La delta de Dirac como función

Resumen

Hay dos lecturas sobre la delta de Dirac,. La del matemático puro, que la considera como distribución. Y la lectura del físico y del ingeniero quienes, desde su origen, la consideran como función. Nuestra propuesta consiste en volver al punto de partida, y definir la delta de Dirac como función. Al hacerlo así, nos colocamos en la dirección de las estrategias y de la heurística de la física y la ingeniería, donde la delta de Dirac funciona bien, es aplicable y se entiende.

La *delta de Dirac* es un concepto que permite analizar, a través de un intervalo no muy largo de tiempo, las distintas adaptaciones conceptuales que se hacen de medios importantes de la matemática, que son utilizados de acuerdo con los intereses de ciertas disciplinas y a sus contextos concretos de aplicación.

Formulada por primera vez por el propio P.A.M. Dirac desde 1930, interesó vivamente a la comunidad científica, que la bautizó con el nombre de su autor. Desde entonces, el interés por la delta de Dirac ha tomado dos direcciones básicas: la primera, hacia su fundamentación matemática; y la segunda, hacia su aplicación práctica. Estas dos direcciones se han entrecruzado, pues quienes han dotado a la delta de Dirac de un corpus teórico se preocupan por tratar de mostrar su enorme campo de aplicación, mientras que los que la aplican, tratan de dotarla de una cierta fundamentación.

Kemel George
Universidad Distrital "Francisco José de Caldas"
Santafé de Bogotá, Colombia

Carlos Imaz Jahnke
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV, México, D.F.

La formulación inicial de Dirac

En su obra clásica , *The Principles of Quantum Mechanics*, P.A.M. Dirac[1] observa que sus investigaciones lo han llevado a

> **#15. «... considerar cantidades que involucran cierta clase de infinitos. Para lograr una notación precisa en el manejo de estos infinitos, introducimos una cantidad δ (*x*) dependiendo de un parámetro *x*, que satisface las condiciones**
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1, \quad \delta(x) = 0 \text{ para } x \neq 0\ldots\text{»}$$

Dirac reconoce que el objeto que ha descrito

> **«no es una función de *x* de acuerdo con la definición matemática usual, la que requiere que una función tenga un valor definido para cada punto de su dominio, sino algo más general, lo cual podemos llamar función impropia para destacar su diferencia con la de función según la definición usual».**

Dos contextos en la construcción

Hay dos contextos desde los cuales se formulan las teorías, los métodos y también las propuestas de aplicación de la delta de Dirac: el de la matemática pura, y el de la física y la ingeniería. Del primero surge la delta de Dirac como *distribución*, y del segundo, la delta de Dirac como *función*. La primera es una visión descontextualizada. Se elabora la *teoría de distribuciones* que fundamenta a la delta de Dirac, y que va mucho más allá, pues involucra espacios de funciones, convergencia, operadores y teoría de la medida. En la teoría de distribuciones, la delta de Dirac es sólo *un ejemplo* de distribución. La segunda es una visión sobre un contexto determinado. Domina el uso intensivo de tal medio para su aplicación directa en la física o en el procesamiento de señales, aunque se le reviste de elementos teóricos que posibilitan una generalización.

La teoría de distribuciones de Schwartz

La teoría de distribuciones lleva el nombre de Schwartz desde la publicación de sus dos volúmenes,[2] que produjeron una contribución enorme al análisis. Schwartz construye el espacio $D(\Re)$ de todas las funciones ϕ de variable real, que tienen

---

[1] P.A.M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, (1934), 4th ed. (Rev.), Oxford at the Clarendon Press (1958).

[2] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Tomo I, 1950. Tomo II, 1951. Paris: Hermann et Cie.

derivadas de todos los órdenes y que se anulan fuera de una región acotada en $\Re$. A estas funciones ϕ —las *funciones de prueba*— se les dota del siguiente criterio de convergencia: una sucesión de funciones de prueba $\{\phi_m(x)\}$ converge a cero en D si todas las funciones $\phi_m(x)$ se anulan idénticamente fuera de la misma región acotada en y si las funciones $\phi_m(x)$ y todas sus derivadas convergen uniformemente a cero. Así, el espacio $D(\Re)$ es un espacio vectorial topológico completo.

Una distribución es una funcional lineal continua T: $D(\Re) \to \Re$, que asocia a cada función de prueba ϕ el valor, $<T, \phi>$. Por analogía con D($\Re$P), el espacio de todas las distribuciones T se denota por $D'(\Re)$. Por ejemplo, *la delta de Dirac* es la funcional lineal continua $<\delta, \phi> = \phi(0)$. La derivada T' de una distribución T se define como la funcional lineal continua $<T', \phi>, = -<T, \phi'.>$. Por ello, la derivada δ' de la delta de Dirac es $<\delta', \phi> = -\varphi'(0)$. La función de Heaviside, la delta de Dirac y sus derivadas, son sólo ejemplos de la derivación de distribuciones. Con esta construcción, Schwartz supera las inconsistencias y contradicciones creadas con el cálculo de operadores de Heaviside y la delta de Dirac.

Al sacar de su contexto original a la delta de Dirac, se produce su separación con el amplio campo de sus aplicaciones, el cual no ha requerido de tanta generalización. Por eso se producen intentos de bajarla de las altas esferas y acercarla a los que cotidianamente la han utilizado en la heurística de la resolución de problemas relacionados con la transformada de Laplace en circuitos lineales, transformada de Fourier en teoría de señales, mecánica cuántica, cálculo de la densidad de energía, convoluciones, y el estudio de los espectros de frecuencias.

Un punto de enlace: las funciones generalizadas

Uno de los primeros que observan la encrucijada que se abre con la teoría de distribuciones es George Temple[3] quien plantea:

> **«La teoría de las distribuciones es indudablemente de gran importancia práctica para los matemáticos aplicados, pero desafortunadamente para ellos, la teoría es altamente abstracta». En el propio tratado de Schwartz dice: «Todas las partes de aspecto teórico de este libro exigen poseer buenos conocimientos de topología general y análisis funcional (espacios vectoriales topológicos)»**

Si este es el nivel de conocimientos que se requiere para la comprensión de esta teoría, podemos imaginarnos qué grados de dificultad enfrentarían los físicos e ingenieros, para no hablar de los estudiantes de estas disciplinas, en el pregrado universitario. El propósito de Temple es, en sus propias palabras, hacer la teoría «accesible al físico y al ingeniero». Se trata de *popularizarla* basándose en las ideas de Mikusinski.[4] Surge así el área de las *funciones generalizadas* como un punto de conexión entre el saber abstracto, que

---

[3] G. Temple, F.R.S. «The theory of generalized functions», *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol., 228, March 1955.

[4] J.G. Mikusinski, «Sur le méthode de géneralisation de Laurent Schwartz et sur la convergence faible» *Fundamenta Mathematicae*. Vol. 35, 1948, pp. 235-239.

se aleja de su aplicación, con el saber concreto que —pese a las inconsistencias— proporciona resultados correctos.

El enfoque de Temple —seguido por otros, como Lighthill—[5] consiste en dejar de lado las distribuciones como funcionales lineales continuas y representar las *funciones generalizadas* en términos de la convergencia de *funciones ordinarias*. En su obra monumental sobre el tema, Gel'fand[6] *afirma que el primero en usar las funciones generalizadas en la forma explícita que actualmente es aceptada, fue S.L. Sobolev, en 1936, al estudiar la unicidad de las soluciones del problema de Cauchy para las ecuaciones hiperbólicas lineales.*

Heurística en física e ingeniería

Entendemos por heurística las estrategias para resolver problemas; tales estrategias son utilizadas frecuentemente por los físicos y los ingenieros; las estrategias incluyen el uso de analogías, la introducción de elementos auxiliares simbólicos y gráficos, la actividad basada en datos, la descomposición y recomposición de los problemas, el explotar recursivamente los problemas relacionados; y sobre todo, si la solución planteada es viable y funciona, no dar rodeos en aras del rigor. De hecho, esto es lo que hace algunos años ha propuesto Polya[7] y ha retomado posteriormente Schoenfeld.[8]

Un ejemplo notable es el tratamiento heurístico de la delta de Dirac y la resolución de problemas en física e ingeniería. Ya hemos citado al propio Dirac. Tratamientos similares se encuentran en los conocidos libros de Alan Oppenheim[9] y Hwei P. Hsu,[10] para citar sólo un par de los textos de los currícula. En todos ellos se vislumbra la idea que deberíamos recuperar: la delta de Dirac es *una función*, aunque muchos se disculpen diciendo que en realidad no lo es.

Una propuesta de construcción

Nuestra reflexión parte de la forma como la utilizan los ingenieros, físicos y profesores, y de una amplia experiencia en el aula de clase. Allí, las distribuciones, o funciones generalizadas que se requieren, tienen *nombres propios*, y se reducen básicamente a las siguientes: (1). La 'función' de Heaviside o *escalón unitario*; (2). La delta de Dirac, o *impulso unitario*; (3). La delta de Dirac periódica o *tren de impulsos*; (4). Las derivadas de estas 'funciones'. Ellas constituyen, por decirlo así, la *pequeña biblioteca de funciones especiales* —llámense distribuciones o funciones generalizadas— que en

---

[5] M.J. Lighthill, F.R.S., *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge, at the University Press, 1962.
[6] I.M. Gel'fand, et. al., Generalized Functions, Tomos I, II, III, IV, V. Academic Press, New York and London, 1964..
[7] G. Polya, *How to solve it*, (2nd ed.), New York, Dolbleday, 1957.
[8] A.H. Schoenfeld, Mathematical Problem Solving, Academic Press, Inc., 1985.
[9] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, Signals and Systems, Prentice-Hall International, Inc., 1983.
[10] H.P. Hsu, *Análisis de Fourier*, Fondo Educativo Interamericano, 1970.

el aula de clases requiere un buen curso de *matemáticas avanzadas* para la física y la ingeniería.

La propuesta consiste en volver al punto de partida y definir la delta de Dirac como *función*. Pero no es razón suficiente que su origen sea funcional. Se trata de que, en realidad, durante todo un trayecto de 60 años, los físicos e ingenieros así la han tratado y así ha funcionado, aunque siempre aclaran que en realidad no lo es.

Hemos anotado que al definir la delta como función, nos colocamos en la dirección de las estrategias y de la heurística de los físicos e ingenieros, donde la delta de Dirac funciona bien, es aplicable y se entiende. A esto se añade que podemos dar una *definición rigurosa*, que no podía existir en los tiempos de Dirac. Esto lo hizo posible Abraham Robinson,[11] con su invención del *análisis no estándar*, y las recientes contribuciones de la *matemática educativa* para introducir el *cálculo infinitesimal* como parte de la enseñanza del cálculo en el aula. Entre estas últimas se cuenta con los trabajos de Imaz,[12] Takeuchi,[13] y Salat,[14] entre otros.

Cabe mencionar que el propio Robinson ha definido la delta de Dirac como una clase de *función no estándar*, pero su construcción resulta inaccesible. Otras construcciones,[15] aunque mantienen un nivel de generalización que consideramos innecesario, son cercanas a las nuestras.

La función Delta de Dirac

Vamos a considerar la recta $^*\mathfrak{R}$ en el sentido extendido de los modelos infinitesimales del análisis, ya sea los modelos de tipo *no estándar*,[16] o los de *cálculo infinitesimal* antes mencionados. Para nuestra presentación, basta tener en cuenta que en tal modelo existen tres tipos de cantidades: números infinitamente pequeños, números finitos y números infinitos. Denotaremos con β un infinitesimal fijo, y con $°x = st(x)$, la *parte real o estándar* de un número finito x.

Por lo general, consideraremos funciones $f(x)$ definidas sobre $^*\mathfrak{R}$, con valores en $^*\mathfrak{R}$, que provienen de la extensión de funciones reales ordinarias. Como nuestro universo de funciones ordinarias es muy restringido —o son funciones con un salto, o funciones por lo menos continuas— nos bastará con especificar las reglas para extenderlas.

Supongamos que $f(x)$ es continua en $x = a$. La extensión de $f(x)$ en todos los puntos infinitamente próximos de a es $f(a) + \beta$. Si $f(x)$ es derivable en $x = 0$, $f(\beta) = f(0) + f'(0)\beta + o(\beta)$, donde $o(\beta)/\beta$ es infinitesimal. Si $f(x)$ tiene segunda derivada en $x = 0$, $f(\beta) = f(0) + f'(0)\,\beta + \frac{1}{2}f''(0)\beta^2 + o(\beta^2)$, donde $o(\beta^2)/\beta^2$, es infinitesimal, y así sucesivamente, siguiendo la fórmula de Taylor.

---

[11] A. Robinson, Non-Standard Analysis, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1966, Rev. ed. 1974.

[12] C. Imaz, «Infinitesimal models for Calculus», Boletín Sociedad Matemática Mexicana, vol. 29, 2, 1984.

[13] Y. Takeuchi, *Teoría de funciones no estándar*, Universidad Nacional de Colombia, 1983.

[14] R.S. Salat F., *Elaboración, prueba y análisis de un modelo infinitesimal de cálculo*, tesis doctoral, Depto. de Matemática Educativa, CINVESTAV, 1993.

[15] A. Robert, Nonstandard Analysis, John Wiley & Sons, 1985.

[16] J.M. Henle, E.M. Kleinberg, *Infinitesimal Calculus*, The MIT Press, Cambridge, Mass., 1979.

Hay funciones que brincan en $x = a$. Por ejemplo, la de Heaviside, definida como $u(x) = 0$ para $x < 0$, $u(x) = 1$, para $x > 0$, o como veremos que ocurrirá, la delta de Dirac. Para derivarlas sólo necesitaremos definirlas en el intervalo $(a - \beta, a + \beta)$, uniéndolas con un *trazo lineal*, como se ve en la Figura 1.

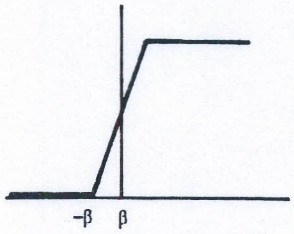


Figura 1

Para evaluar la derivada de la función con trazo lineal se le asigna, en el intervalo del salto o brinco, la pendiente de ese trazo lineal. La integral será la parte real del área bajo la curva correspondiente. Para evaluar dicha área, tomamos el valor de la función en el centro del intervalo.

Empecemos con la función $u(x)$ de Heavyside, que tiene un brinco en $x = 0$; la sustituimos por la función definida como $u(x) = 0$, para $x < -\beta$; $u(x) = 1$, para $x > \beta$; $u(x) = (\frac{1}{2}\beta)x + \frac{1}{2}$, cuya pendiente es $\frac{1}{2}\beta$, para $x \in [-\beta, \beta]$. De acuerdo con la regla de derivación, obtenemos la función $\delta(x)$ de la Figura 2, que llamaremos *delta de Dirac*, definida por: $\delta(x) = 0$, $x < -\beta$ o bien $x > \beta$; $\delta(x) = \frac{1}{2}\beta$, para $-\beta \leq x \leq \beta$.

Por la regla de integración,

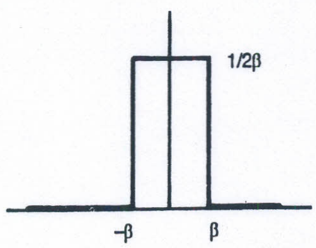


Figura 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \int_{-\beta}^{\beta} \delta(x)dx = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{1}{2\beta}\, dx = 1$$

La propiedad fundamental que caracteriza a la delta de Dirac es la siguiente: si $f(x)$ es continua en $x = 0$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

Para demostrarla, obsérvese que sólo debemos integrar $f(x)\delta(x)$ en el intervalo $(-\beta, \beta)$, en el cual el integrando $f(x)\delta(x)$ se sustituye por $f(0)(\frac{1}{2}\,\beta)$ y la longitud del intervalo es 2β. Por lo tanto, el resultado de la integración —el producto de estas dos expresiones— es $f(0)$.

Derivada de la Delta de Dirac

La derivada $\delta'(x)$ es otra función de gran utilidad en la ingeniería y en la física. Como tiene un salto o brinco en $x = \beta$, y otro en $x = -\beta$, de acuerdo con la regla de sustitución, consideraríamos la función $\delta(x)$ con dos trazos lineales, como en la Figura 3.

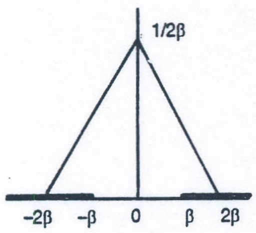


Figura 3

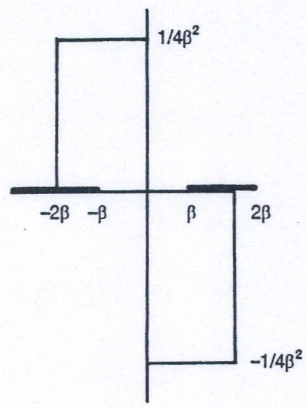


Figura 4

Por el proceso de derivación, obtenemos $\delta'(x)$ como en la Figura 4. Ahora demostraremos la otra relación fundamental:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = f'(0).$$

cuya hipótesis es la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$. Aplicando nuevamente las reglas establecidas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = \int_{-2\beta}^{2\beta} f(x)\delta'(x)dx = \int_{-2\beta}^{0} \frac{f(x)}{4\beta^2}\,dx - \int_{0}^{-2\beta} \frac{f(x)}{4\beta^2}\,dx$$

Para el punto medio $-\beta$, $f(-\beta) = f(0) - f(0)\,\beta + o_1(\beta)$; para el otro punto medio β, $f(\beta) = f(0) + f(0)\beta + o_2(\beta)$, donde las cantidades $o_1(\beta)/\beta$, y $o_2(\beta)/\beta$ son ambas infinitesimales. Remplazando,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = \frac{1}{4\beta^2}\{f(0) - f'(0)\beta + o_1(\beta)\}\,2\beta - \frac{1}{4\beta^2}\{f(0) - f'(0)\beta + o_1(\beta)\}\,2\beta$$

$$= -f'(0) + \frac{o_1(\beta)}{\beta} - \frac{o_2(\beta)}{\beta}$$

pero $o_1(\beta)/\beta - o_2(\beta)/\beta$ es infinitesimal; luego la parte real o estándar de la derecha es la cantidad $-f\,'(0)$ que buscábamos.

De manera análoga puede establecerse que la integral de $f(x)d(x)$ es $f(0)$. Y en general, pueden obtenerse las propiedades clásicas de la delta de Dirac que conocemos en los libros de texto. Sugerimos al lector que tomando en cuenta la Figura 4, complete los trozos lineales y dibuje la segunda derivada (obtendrá una función par con cuatro brincos). Luego, aplicando las reglas dadas, evalúe la integral de $f(x)\delta''(x)$.

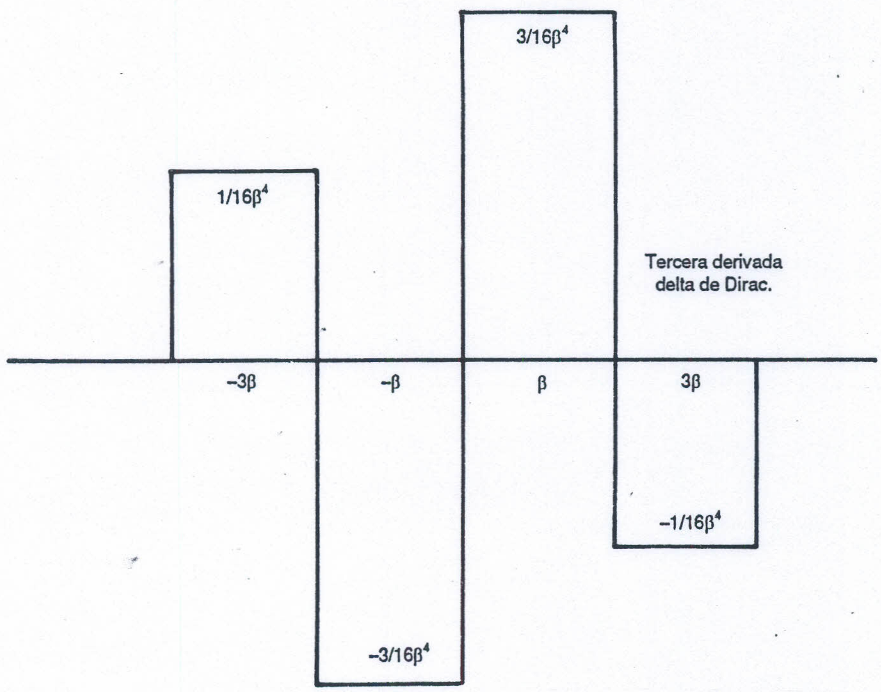
Vamos a realizar los cálculos de la tercera derivada e indicaremos la fórmula general para el cálculo de la derivada n-ésima de la delta de Dirac.

Cálculo de la derivada enésima

Fijémonos nuevamente en la regla que hemos dado para calcular cualquier derivada de la delta de Dirac; por ejemplo, la tercera. Según esta regla, como en la segunda derivada hay cuatro brincos, tenemos cuatro trazos lineales.

Al derivar estos cuatro trazos lineales, en el dominio (-4b, 4b), obtenemos una función impar de cinco brincos

Recordemos que si una función $f(x)$ tiene hasta la tercera derivada en $x = 0$, para calcular la integral de $f(x)\ \delta'''(x)$, debe evaluarse $f(-3\beta)$, $f(-\beta)$, $f(\beta)$ y $f(3\beta)$, según la fórmula de Taylor.



Sustituyendo, tenemos:

$$\frac{1}{8\beta^3}\left\{f(0) - f\,'(0)(3\beta) + \frac{1}{2}f\,''(0)(9\beta^2) - \frac{1}{6}f\,'''(0)(27\beta^3) + o_1(\beta^3)\right\} -$$

$$\frac{3}{8\beta^3}\left\{f(0) - f'(0)(\beta) + \frac{1}{2}f''(0)(\beta^2) - \frac{1}{6}f'''(0)(\beta^3) + o_2(\beta^3)\right\} +$$

$$\frac{3}{8\beta^3}\left\{f(0) - f'(0)(\beta) + \frac{1}{2}f''(0)(\beta^2) - \frac{1}{6}f'''(0)(\beta^3) + o_3(\beta^3)\right\} -$$

$$\frac{1}{8\beta^3}\left\{f(0) + f'(0)(3\beta) + \frac{1}{2}f''(0)(9\beta^2) + \frac{1}{6}f'''(0)(27\beta^3) + o_4(\beta^3)\right\}$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(3)}(x)dx = -f^{(3)}(x)$$

como esperábamos.

Esto proporciona un método para el cálculo de la enésima derivada de $\delta(t)$. Tenemos que

$$\delta'(x) = \frac{1}{2\beta}\{\delta(x+\beta) - \delta(x-\beta)\}$$

$$\delta''(x) = \frac{1}{2^2\beta^2}\{\delta(x+2\beta) - 2\delta(x) + \delta(x-2\beta)\}$$

y en general,

$$\boxed{\delta''(x) = \frac{1}{2''\beta''}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\delta(x+(n-2k)\beta)}$$

Obsérvese la gran diferencia con la definición de la derivada enésima de δ en la *teoría de distribuciones*. Allí, si T es una funcional lineal continua —es decir, una distribución— se define $T^{(n)}$ la derivada enésima de T, como la funcional $<T^{(n)}, \phi> = (-1)^n <T, \phi^{(n)}>$, de donde $<\delta^{(n)}, \phi> = (-1)^n \phi^{(n)}(0)$. En cambio, hemos contruido la enésima derivada de δ, la hemos dotado de una expresión analítica y le hemos dado un sentido geométrico.

Bibliografía

1 **P.A.M. DIRAC,** *The Principles of Quantum Mechanics*, (1934), 4th ed. (Rev.,) Oxford at the Clarendon Press (1958).

2 **L. SCHWARTZ,** *Théorie des distributions,* Tomo I, 1950. Tomo II, 1951. Paris: Hermann et Cie.

3 **G. TEMPLE, F.R.S.** «The theory of generalized functions» *Proceedings of the Royal Society of London,* Vol., 228, March 1955.

4 **J.G. MIKUSÍNSKI,** «Sur le méthode de géneralisation de Laurent Schwartz et sur la convergence faible» *Fundamenta Mathematicae*. Vol. 35, 1948, pp. 235-239

5 **M.J. LIGHTHILL, F.R.S.,** *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge, at the University Press, 1962.

6 **I.M. GEL'FAND,** *et al., Generalized Functions,* Tomos I, II, III, IV, V. Academic Press, New York and London, 1964.

[7] G. POLYA, *How to solve it*, (2nd ed.), New York, Dolbleday, 1957.
[8] A.H. SCHOENFELD, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Inc., 1985.
[9] A.V. OPPENHEIM, A.S. Willsky, *Signals and Systems*, Prentice-Hall International, Inc., 1983.
[10] H.P. HSU, *Análisis de Fourier*, Fondo Educativo Interamericano,1970.
[11] A. ROBINSON, *Non-Standard Analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1966, Rev. ed., 1974.
[12] C. IMAZ, «Infinitesimal models for Calculus», *Boletín Sociedad Matemática Mexicana*, Vol.29, 2,1984.
[13] Y. TAKEUCHI, *Teoría de funciones no estandar*, Universidad Nacional de Colombia, 1983.
[14] R.S. SALAT F., *Elaboración, prueba y análisis de un modelo infinitesimal de cálculo*, tesis doctoral, Depto. de Matemática Educativa, CINVESTAV, 1993
[15] A. ROBERT, *Nonstandard Analysis*, John Wiley & Sons, 1985.
[16] J.M. HENLE, E.M. KLEINBERG, *Infinitesimal Calculus*, The MIT Press, Cambridge, Mass., 1979.