Empleo de nuevas tecnologías para la solución de un problema sobre sólidos en revolución: Visualizar la región que se determina al hacer girar una función sobre un eje

Kevin Ahumada Paola Ariza Lesly Carranza
Corporación Educativa mayor del desarrollo Simon Bolivar

1. Introducción

Por medio de este proyecto se pretende presentar en forma didáctica la teoría de los sólidos en revolución, teniendo en cuenta los diferentes métodos que permiten hallar los volúmenes de los sólidos ya mencionados, debido a que la gran mayoría de los estudiantes presentan serios problemas a la hora de identificar y utilizar planteamientos matemáticos para resolver el volumen de los sólidos.

Es por ellos que se aspira a que los estudiantes por medio de esta aplicación puedan no solo aprender una forma memorística del como resolver la problemática, sino mas bien el hecho del que se realice un aprendizaje significativo que pueda servirle para ampliar su comprensión y la posterior aplicabilidad de la matemática como tal para llegar al fin especificado.

2. Presentación

Teniendo en cuenta las falencias de los estudiantes, que fueron mencionadas anteriormente, en este proyecto se realizará un programa creado en Visual Basic, que apoyada con la teoría dada por los docentes en el aula de clase permitirá a los alumnos el poder captar con mayor facilidad los conceptos de Sólidos en Revolución, basándose en las teorías geométricas de volumen y en los métodos de integración como tal.

Hay muchas cosas que se pueden calcular con integrales: el área entre curvas, el volumen y el área de la superficie de sólidos, la longitud de las curvas, la cantidad de trabajo que se requiere para bombear líquidos del subsuelo, las fuerzas contra las contrapuertas de una presa, las coordenadas del punto donde un sólido está en equilibrio etc, en esta aplicación se tratará de encontrar el volumen de un sólido que a su vez encarna la problematica del área de regiones acotadas por las curvas y que se pueden realizar por medio de los métodos de discos y de capas, teniendo en cuenta alrededor de que eje se quiere rotar, a continuación se explicara cada uno de los métodos:

2.1. Método de Rebanadas

Primeramente antes de entrar a detallar lo concerniente a este método debemos presentar la definición de volumen como un área transversal conocida e integrable $A(x)$, desde $x = a$ hasta $x = b$, es la integral de A desde a hasta b:

$$\int_a^b A(x)dx$$

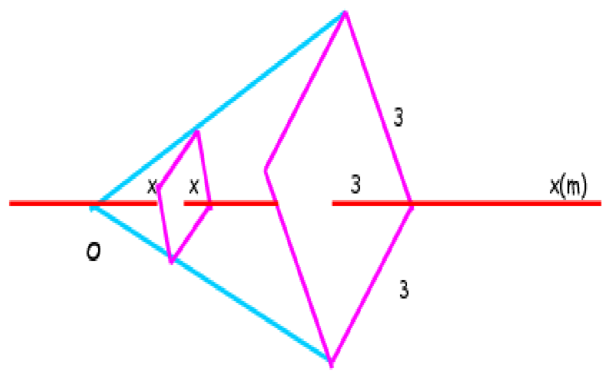
Cómo hallar volúmenes por el método de las rebanadas

1. Traza el sólido y una sección transversal típica
2. Halla la fórmula para $A(x)$
3. Halla los límites de integración
4. Integra $A(x)$ para hallar el volumen

Ejemplo 2.1.
Una pirámide de $3m$ *de altura tiene una base cuadrada de* $3m$ *por lado. La sección transversal de la pirámide, perpendicular a la altura,* $\times$ m *hacia abajo desde el vértice es un cuadrado con* $\times$ m *por lado. Hallar el volumen de la pirámide:*

Paso 1: (Dibujo)

Dibujamos una pirámide con su altura sobre el eje x y su vértice en el origen, e incluimos una sección transversal típica.



Paso 2: (Límites de Integración)

Los cuadrados van de $x = 0$ hasta $x = 3$

Paso 3: (Volumen)

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^3 x^2 dx = 9$$

El volumen es $9m^3$.

2.2. Método de Discos

La aplicación más común del método por rebanadas son los sólidos de revolución. Los **sólidos de Revolución** se pueden generar a partir de regiones planas que giran sobre los ejes. Los carretes de hilos son sólidos de revolución; también lo son las pesas de mano y las bolas de billar. A veces los sólidos de revolución tienen volúmenes que podemos calcular usando fórmulas geométricas, como en el caso de una bola de billar. Pero cuando queremos hallar el volumen de un dirigible o predecir el peso de una pieza que va a fabricarse en un torno, las fórmulas geométricas no son de mucha utilidad y entonces usamos el cálculo para hallar las respuestas.

Si podemos hacer que la región sea tal que esté entre la gráfica de una función continua $y = R(x)$, $a \leq x \leq b$, y el eje x, y que el eje de rotación sea el eje x, podemos hallar el volumen del sólido del siguiente modo.

La sección transversal típica del sólido que es perpendicular al eje de rotación es un disco de radio $R(x)$ y área

$$A(x) = \pi(radio)^2 = \pi[R(x)]$$

El volumen del sólido, la integral de A desde $x = a$, es la integral de $\pi[R(x)]^2$ desde a hasta b.

2.2.1. Volumen de un sólido de revolución para rotación alrededor del eje x

El volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x y la gráfica de la función continua $y = R(x)$, $a \leq x \leq b$, es

$$V = \int_a^b \pi[radio]^2 dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$

2.2.2. Volumen de un sólido de revolución para rotación alrededor del eje y

$$V = \int_c^d \pi[radio]^2 dy = \int_c^d \pi[R(x)]^2 dy$$

Como hallar los volúmenes?

1. Dibuja la región e identifica la función radio $R(x)$
2. Eleva al cuadrado $R(x)$ y multiplica por π
3. Integra para hallar el volumen

2.3. Método de Arandelas

Si la región que giramos para formar un sólido no toca o no cruza el eje de rotación, el sólido tendrá un agujero. Las secciones transversales perpendiculares al eje de rotación son arandelas en lugar de discos. Las dimensiones de una arandela típica son:
Radio externo: $R(x)$

Radio interno: $r(x)$
El área de la arandela es

$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$

Fórmula de la arandela para hallar volúmenes

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$

Como hallar volúmenes por el método de arandela

1. Dibuja la región y traza un segmento de recta a través de ella perpendicular al eje rotación. Cuando la región gira, este segmento generará una sección transversal típica en forma de arandela de sólido generado.

2. Halla los límites de integración

3. Halla los radios interno y externo de la arandela barrida por el segmento.

4. Integra para hallar el volumen

2.4. Casquillos Cilíndricos

Cuando necesitamos hallar el volumen de un sólido de revolución, a veces los casquillos cilíndricos pueden funcionar mejor que las arandelas. En parte, la razón es que la fórmula a la que nos llevan no requiere que se eleve al cuadrado.
La formula del casquillo para estimar el volumen del sólido, podemos aproximar la región con rectángulos con base en una partición P del intervalo $[a, b]$ donde se encuentra la región. EL típico rectángulo de aproximación es Δx_k unidades de ancho por $f(c_k)$ unidades de altura, donde c_k es el punto medio de la base del rectángulo. Una formula geométrica nos dice que el volumen de un casquillo barrido por un rectángulo es:

$$\Delta V_k = 2\pi \cdot (radio\ promedio\ del\ casquillo) \cdot (altura\ del\ casquillo) \cdot (grosor)$$

que en nuestro caso es

$$\Delta V_k = 2\pi \cdot c_k \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

Aproximamos el volumen del sólido al sumar los volúmenes de los casquillo barridos por los n rectángulos con base en P:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi c_k f(c_k)\Delta x_k$$

El límite de esta suma cuando P tiende a infinito nos da el volumen del sólido:

$$V = \lim_{p\to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi c_k f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

2.4.1. Formula del casquillo para rotaciones alrededor del eje y

El volumen del sólido generado al girar la región comprendida entre el eje x y la grafica de la función continua $y = f(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq b$

$$V = \int_a^b 2\pi \cdot (radio\ del\ castillo) \cdot (altura\ del\ casquillo)dx = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

2.4.2. Formula del casquillo para rotaciones alrededor del eje x

$$V = \int_c^d 2\pi \cdot (radio\ del\ castillo) \cdot (altura\ del\ casquillo)dy = \int_c^d 2\pi y f(y)dy$$

Como usar el método del casquillo

1. Dibuja la región y traza un segmento de recta a través de ella paralelo al eje de rotación. Identifica la altura o la longitud del segmento (altura del casquillo) y el ancho (grosor del casquillo)

2. Halla los limites de integración

3. Integra el producto $2\pi \cdot (radio\ del\ castillo) \cdot (altura\ del\ casquillo)$ respecto a la variable apropiada (x ó y) para hallar el volumen.

En el software que se presentará tiene la capacidad de resolver las siguientes aplicaciones:

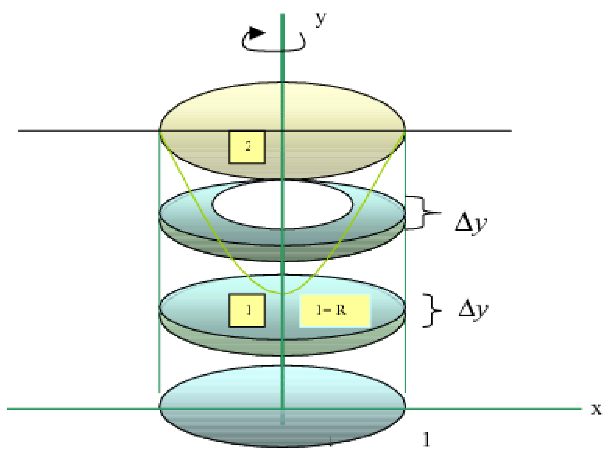
Ejemplo 2.2.
Calcular el volumen del sólido generado al girar, en torno al eje y, la región acotada por las gráficas de

$$y = x^2 + 1, \quad y = 0 \quad x = 1$$

Graficamos la función teniendo en cuenta los puntos de corte $y = x^2 + 1, \quad x = 0 \;\; y \;\; x = 1.$ Para lo cual reemplazamos $x = 0 \quad y \quad x = 1$ en la ecuación de la parabola

$$y = x^2 + 1 \quad si\ x = 0 \longrightarrow y = 1$$

$$x = \sqrt{y-1} \quad x = 1 \longrightarrow y = 2$$

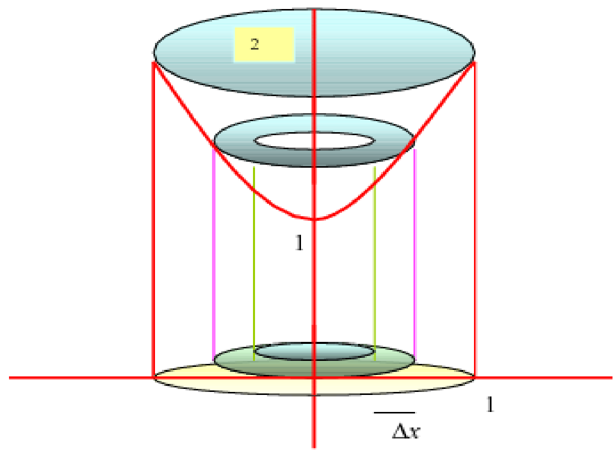


Método del disco

$$V = \pi \int_0^1 R^2 dy + \pi \int_0^1 (R^2 - r^2) dy \qquad R^2 = 1 \;\; y \;\; r^2 = \sqrt{y-1}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 1^2 dy + \pi \int_1^2 (1^2 - (\sqrt{y-1})^2) dy \\ &= \pi \int_0^1 dy + \pi \int_1^2 (2-y) dy = \pi [y]_0^1 + \pi \left[2y - \frac{y^2}{2} \right]_1^2 \\ &= \pi \left(1 + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

Método de capas

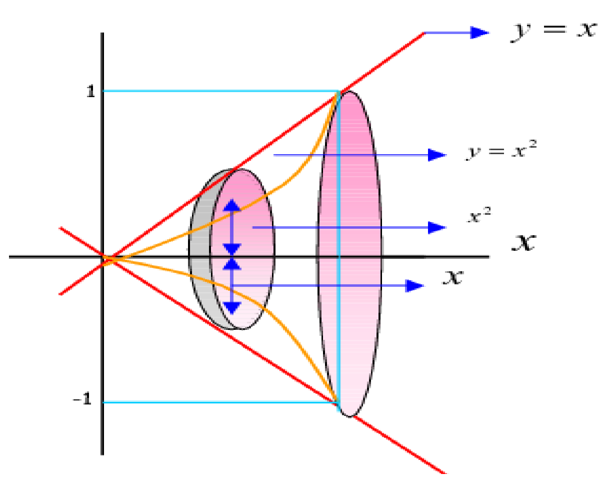


$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx; \qquad y = f(x) = x^2 + 1$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi x(x^2+1)dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (x^3+x)dx = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.

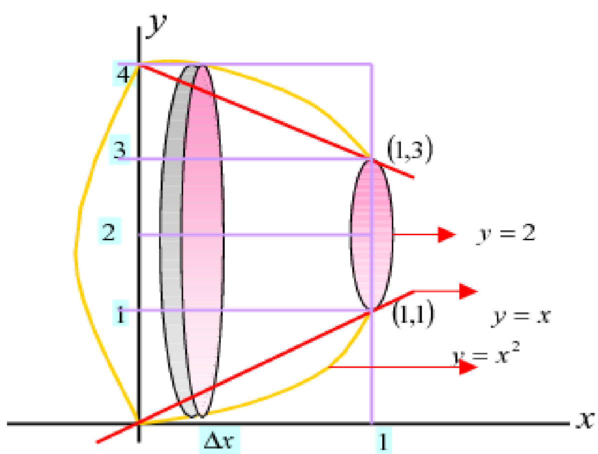
Halle el volumen del sólido de revolución generado al girar entorno al eje x la región acotada por $y = x$, $y = x^2$.

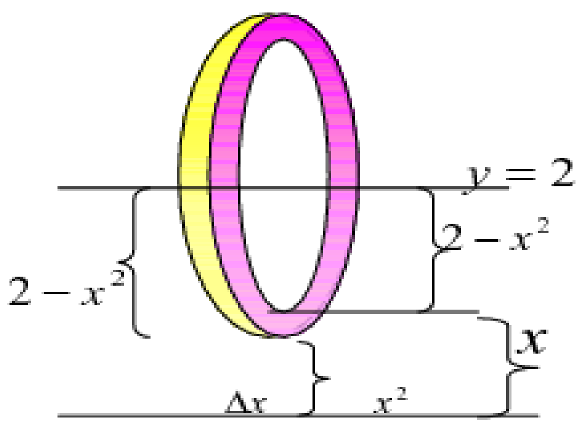


$r = x^2 \qquad R = x \qquad A(x) = \pi(R^2 - r^2) \qquad A(x) = \pi(x^2 - x^4)$

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 (x^2 - x^4)dx$$
$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

Si giramos la región del ejemplo alrededor de la recta $y = 2$

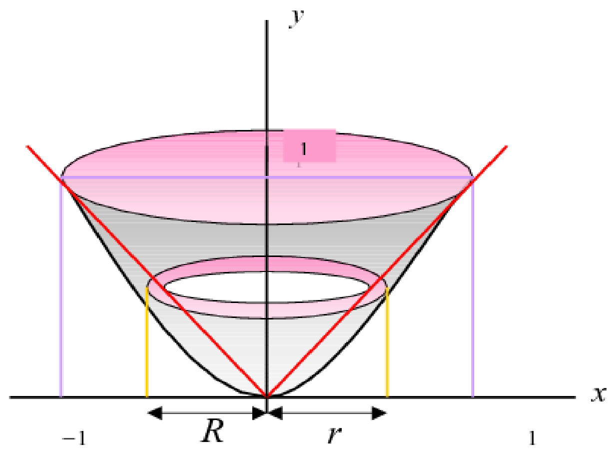




$r = 2 - x,\ R = 2 - x^2 \qquad A(x) = \pi[(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

Si giramos la región del ejemplo alrededor del eje y



$R = \sqrt{y},\ \ r = y^2\ A(x) = \pi(R^2 - r) = \pi(y - y^2)$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi(y - y^2)dy \\ &= \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$