

MARTA ELENA VALDEMOROS, ELENA FABIOLA RUIZ

EL CASO DE LUCINA PARA EL ESTUDIO DE LAS FRACCIONES EN LA ESCUELA DE ADULTOS

THE CASE OF LUCINA FOR THE STUDY OF FRACTIONS IN ADULT SCHOOL

RESUMEN. En una indagación cualitativa recientemente concluida, realizada en una escuela primaria nocturna de la Ciudad de México, seguimos el caso de Lucina junto con cuatro casos más. La indagación efectuada alternó el uso de números naturales, fraccionarios y decimales; aquí abordamos exclusivamente el enriquecimiento semántico y conceptual de las fracciones, en la resolución de problemas que permiten la reconstrucción de las experiencias vitales del sujeto. El estudio estuvo integrado por un cuestionario exploratorio y dos entrevistas de corte didáctico aplicadas a esta mujer de 41 años, de sexto grado, siendo las entrevistas la principal fuente de información del mismo. Hemos seleccionado el caso de Lucina porque ella ha regresado recientemente a la escuela, ha exhibido un desempeño sólido en el cuestionario y un satisfactorio nivel de reflexión acerca de la naturaleza de sus propias elaboraciones.

PALABRAS CLAVE: Adulto, significados de fracción, medida, cociente, razón, operador multiplicativo.

ABSTRACT. In a recently concluded exhaustive, qualitative investigation carried out in an evening primary school in Mexico City, we follow the case of Lucina along with four others. The research alternated the use of natural numbers, fractions and decimals; here we deal exclusively with the semantic and conceptual enrichment of fractions, in the resolution of problems which allow the reconstruction of vital experiences of the subject. The study was made up of an exploratory questionnaire and two didactical interviews with this 41-year-old woman who attends 6th grade elementary school, the interviews being the main source of information of the study. We have selected Lucina's case because she has recently returned to school, has shown a solid performance on the questionnaire and a satisfactory level of reflection on the nature of her own development.

KEY WORDS: Adult, meanings of fraction, measure, quotient, ratio, multiplying operator

RESUMO. Numa investigação qualitativa recentemente concluída, realizada numa escola primária noturna da cidade do México, seguimos o caso de Lucina junto com mais quatro casos. A investigação efetuada alternou o uso de números naturais, fracionários e decimais; abordamos aqui exclusivamente o enriquecimento semântico e conceitual das frações, na resolução de problemas que permitem a reconstrução das experiências vitais do sujeito. O estudo estava integrado por um

questionário exploratório e duas entrevistas didática aplicada a esta mulher de 41 anos, do sexto ano, sendo as entrevistas a principal fonte de informação do mesmo. Seleccionamos o caso de Lucina porque ela tinha regressado recentemente a escola, tinha exibido um sólido desempenho no questionário e um satisfatório nível de reflexão acerca da natureza de suas próprias elaborações.

PALAVRAS CHAVE: Adulto, significados da fração, medida, quociente, razão, operador multiplicativo.

RÉSUMÉ. Dans une enquête qualitative récemment conclue, réalisée dans une école élémentaire nocturne à México, nous avons suivi le cas de Lucina et quatre autres cas. L'enquête effectuée concerne l'usage des nombres naturels, rationnels et décimaux ; ici on aborde exclusivement l'enrichissement sémantique et conceptuel des fractions, dans la résolution des problèmes permettant la reconstruction des expériences vitales du sujet. L'étude comportait un questionnaire exploratoire et deux entretiens de type didactique. Parmi ces entretiens, les plus révélateur ont été ceux réalisés avec cette femme de 41 ans, élève de CM2. Nous avons sélectionné le cas de Lucina parce qu'elle est retournée récemment à l'école. Le travail qu'elle a produit lors du questionnaire a été considéré comme pertinent pour cette étude, d'autant plus qu'elle a fait preuve de recul critique quant à ses réponses.

MOTS CLÉS: Adulte, significations de fraction, mesure, quotient, raison, opérateur multiplicatif.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. *¿Por qué privilegiamos la educación elemental de adultos?*

A nivel internacional, la UNESCO (1997) ha vuelto a reconocer que uno de los espacios más importantes del presente es la educación de adultos y todo lo que de ella deriva; sin embargo, la investigación en este ámbito ha permanecido relegada por múltiples causas.

La educación de adultos está inmersa en una gran complejidad de modalidades de intervención, tanto para la formación de quienes así lo requieran como para la investigación a ella asociada. Uno de estos espacios de intervención es la educación básica (Bishop, 2000), donde llevamos a cabo el presente estudio.

Si bien la educación básica de adultos ha evidenciado ser un sector muy importante en toda América Latina, de acuerdo con Messina (1993), asume diferentes modalidades en cada país, dependiendo de sus necesidades específicas. En México, más de un millón de personas jóvenes y adultas reciben instrucción primaria en distintas instituciones del estado, integradas tanto al sistema escolarizado como al sistema abierto de enseñanza pública.

Para atender eficientemente a este importante sector de la realidad mexicana, se requiere investigar los principales contenidos de educación matemática en dicho ámbito y los aprendizajes que generan. El uso de las fracciones y el tratamiento de significados y conceptos aquí abordados constituyen uno de los pilares fundamentales de la instrucción aritmética desarrollada en la escuela elemental.

2. ANTECEDENTES TEÓRICOS

Fitz Simons y Godden (2000) señalan que el regreso del adulto a la escuela para retomar los estudios inconclusos es intencional, y suele decidirlo a partir de un buen número de razones que comúnmente no están muy articuladas entre sí.

Ahora bien, el cúmulo de saberes del adulto ha sido adquirido y sistematizado a lo largo de mucho tiempo. Por ello, su interacción con la enseñanza formal corresponde más bien a un proceso de encuentro entre dos culturas (la propia y la escolar), en el que el aprendizaje del individuo se caracteriza por una reflexibilidad crítica que lo habilita para comprender cómo ha adquirido sus perspectivas de significado, dando así sentido a la acción (Medina Fernández, 1997). Tal reflexibilidad crítica permite que el sujeto distinga las relaciones entre sus propios pensamientos y experiencias del pasado, a la par que reconoce los nexos de aquéllos con el presente, discriminando de hecho cuáles puntos de avance constituirán la base de futuras acciones y elaboraciones. En nuestro estudio del caso de Lucina procuramos establecer, hasta donde nos resulta posible, cómo se entretajan las asociaciones que posibilita esta característica del adulto. Por su parte, Cabello Martínez (1997) enfatiza que el adulto necesita reconocer cómo se integran sus nuevos conocimientos, requiriendo información acerca de sus alcances y consecuencias prácticas.

Varios investigadores dedicados a la problemática de la educación de adultos (Messina, 1993; García Carrasco, 1997; Jóia, 1997; Mariño, 1997; Soto, 1997, entre muchos) reconocen que tanto los conocimientos generales como los matemáticos que vayan a ser construidos por jóvenes y adultos en su proceso de formación elemental deben partir del cúmulo de experiencias y saberes que han logrado en distintos ámbitos sociales, es decir, de los otros espacios vitales en que se desenvuelven, ya que esto fortalece y amplía su aprendizaje.

La reflexibilidad crítica coincide con lo que Gimeno y Pérez (2000) han

caracterizado como una reconstrucción crítica de la realidad, mediante el abordaje de las situaciones propuestas a través de diversos tratamientos de enseñanza, en tanto facilita aprender para la vida, o sea, para enfrentar las circunstancias que ésta configura. Así, la reflexibilidad crítica hace que el adulto re-construya su realidad, con el respaldo que le brindan los saberes que ha elaborado en los distintos planos de su vida. Todo ese bagaje le permite ejercer contrastes y comparaciones en el plano de la acción (empíricamente, no de manera discursiva), fijando criterios y puntos de vista tanto respecto a sus experiencias vitales como a las nuevas situaciones que enfrenta.

De acuerdo con las caracterizaciones referidas hasta este momento, asumimos que el adulto cuenta con un campo simbólico cargado de sentido para el aprendizaje global y para el seguimiento específico de las fracciones por la vía del planteamiento y resolución de problemas que, desde la institución educativa, reconstruyan escenas de la propia vida familiar, laboral y comunitaria para lograr procesos de re-significación de esas vivencias, donde se instauren y fortalezcan las elaboraciones matemáticas del sujeto. Esto ratifica un planteamiento anterior de Valdemoros (2000), quien trabajó con un grupo de adultos que enfrentaron tareas con tales características y les pudieron dar una adecuada solución una vez que enriquecieron el contenido semántico previo de esas rememoraciones vitales.

El campo simbólico cargado de sentido al que hacemos referencia surge de la reunión sistemática de experiencias personales que resultan confrontadas y consideradas críticamente, tanto a lo largo de la historia del sujeto como en un momento determinado de ella.

También es pertinente señalar que los números naturales facilitan aprendizajes no escolarizados muy variados dentro de distintos espacios culturales (Valdemoros, 2000). Sin embargo, aclaramos que las fracciones se acompañan de un repertorio mucho más limitado de saberes previos. Al adoptar esta última expresión, bastante difundida por investigadores como Mariño (1997), estamos identificando el cúmulo cognitivo de elaboraciones personales que un sujeto reúne con antelación a determinada enseñanza formal, que en este último caso sería relativa a las fracciones.

Consideramos que los contenidos semánticos, nociones y términos tocantes a las fracciones presentan una gran diversidad en el ámbito de resolución escolar elemental de problemas aritméticos. Los distintos significados atribuibles a las fracciones sientan las bases para un posterior desarrollo de conceptos. Por ello, se recuperan aquí los de medida, cociente intuitivo (asociado a las situaciones de reparto), operador multiplicativo y razón, a los que Kieren (1984, 1985 y 1988)

y Valdemoros (2001) atribuyen a aplicaciones diversas de los números fraccionarios en un terreno concreto. Se retoman también el significado de la relación parte-todo y la noción de unidad, ya que fungen como soportes básicos y fundamentales de los contenidos semánticos indicados con anterioridad (Kieren, 1983, 1984 y 1985; Valdemoros, 1998 y 2001).

La aportación de Kieren a la semántica de las fracciones es de gran relevancia porque no sólo establece los significados fundamentales atribuibles a dichos números, sino además precisa la conformación de su estructura conceptual en un sujeto ideal. Tal sistema lo concibe bajo la forma de una amplia red semántica, en cuya base identifica los mecanismos constructivos de la fracción: el reconocimiento de una unidad divisible, la partición y la equivalencia.

Como resultado de entrelazar estos mecanismos constructivos, identifica los constructos de medida, cociente, operador multiplicativo y razón como elaboraciones intuitivas, muy próximas al plano vital de la experiencia y, por ende, de naturaleza muy concreta; tales constructos intuitivos están vinculados a la enseñanza escolar. En la cúspide de la red semántica que consideramos, Kieren (1988) sitúa los constructos de naturaleza más formal –las clases de equivalencia y el campo de cocientes–, a los que accede el sujeto cuando ha alcanzado el nivel más abstracto de pensamiento. En nuestra investigación, nos concentramos en el nivel intuitivo de conocimiento en el que están inmersos Lucina y sus compañeros.

En cuanto al sentido que otorgamos a cada uno de esos significados, señalamos a la fracción como medida, toda vez que puede ser usada como un comparador (Freudenthal, 1983) entre dos o más objetos para determinar su tamaño. Asimismo, para los todos continuos y discretos es aplicable lo que Bergeron y Herscovics (1987) plantean respecto a tal contenido semántico, al afirmar que la fracción es la medida de la relación parte-todo. Otra manera de definir esta idea remite a que surge cuando la unidad adoptada no es adecuada para medir cierto objeto, por lo que es necesario subdividirla; de aquí emerge la unidad quebrada de medida.

Con respecto al cociente intuitivo es un número de la forma a/b , donde la interpretación que el sujeto realiza del numerador y del denominador atañe a las condiciones mismas de la partición y reparto de uno o varios objetos entre dos o más personas (Kieren, 1976, 1983, 1984, 1985 y 1988; Valdemoros, 2004). Según Empson et al. (2006), la coordinación de cantidades entre las personas que participan en el reparto y los objetos repartidos permite que el sujeto logre la elaboración inicial de las fracciones como una expresión de las estructuras

multiplicativas (esto es, como síntesis de la multiplicación y la división). Block y Solares (2001) indican que la interpretación de $\frac{3}{4}$ como cociente corresponde a la idea del número que multiplicado por 4 es igual a 3 unidades, con lo cual la fracción puede definirse básicamente como un cociente entre dos números naturales.

En cuanto al reparto, situación en la que surge este significado de fracción, Brizuela (2006) afirma que promueve tempranamente en el sujeto las primeras nociones del número fraccionario. Al respecto, Saxe et al. (2005) plantean que el reparto equitativo es una práctica común tanto fuera de la escuela como dentro del salón de clases, que antecede a la enseñanza formal de las fracciones; precisamente en esos aspectos se apoya la eficacia del reparto equitativo.

Con respecto al operador multiplicativo, primordialmente le hemos concedido el alcance de operador fracturante, de acuerdo con las aportaciones de Freudenthal (1983) y Streefland (1993), atribuyéndole el papel de aquella fracción que está vinculada a la situación dinámica de partición de un todo, con lo que resulta privilegiado el nexo entre la fracción y el acto de partir. Asimismo, en el presente estudio hay otro aspecto importante para entender a la fracción como operador multiplicativo, al ser el número que permite pasar de un estado inicial a un estado final en la resolución de problemas (Ruiz, 2002; Ruiz y Valdemoros, 2001, 2002 y 2006).

Otorgamos a la razón el sentido de la relación entre dos magnitudes (Hart, 1988; Ruiz, 2002; Ruiz y Valdemoros, 2001, 2002 y 2006), que pueden ser de naturaleza igual o distinta. Freudenthal (1983) designa a la relación de las primeras como razón interna; a la de la segunda, razón externa. Sobre la producción de sentido en torno a la razón, así como en el caso de cualquier otro concepto matemático complejo, Lesh y Doerr (2000) dicen que la elaboración de dicho sentido debe seguir el flujo de distintos sistemas de representaciones que interactúan entre sí, generando procesos de interpretación en el sujeto dentro del marco global de la simbolización matemática. Puede advertirse que esta última caracterización no es exclusiva de la razón, sino resulta aplicable a los significados aquí identificados, como lo han explicado los autores que estamos considerando.

Para ilustrar eficazmente la aplicación de la idea de razón a la resolución de problemas, Lesh y Doerr (2001) muestran el problema de la huella, donde plantean una situación delictiva que debe resolver Sherlock Holmes a partir del establecimiento de la razón entre el tamaño de la huella hallada *in situ* y la presunta estatura del ladrón. Los investigadores se apoyan en la gran familiaridad de Holmes como personaje literario para fortalecer y acrecentar los

efectos de sentido en el sujeto que resuelve el problema.

También recuperamos de Piaget, Inhelder y Szeminska (1966) el reconocimiento de las relaciones parte-todo y parte-parte, que constituyen las bases estructurales del concepto de fracción en la adición y la multiplicación, respectivamente. En esta vinculación con las ideas originales de los autores hacemos a un lado sus connotaciones evolutivas para concentrarnos primordialmente en el sentido de integración de la parte en el todo y en la reconstrucción del todo, tomando a la parte como punto de partida (en lo que a la relación parte-todo se refiere) y a la posible consideración de la parte como un nuevo todo susceptible de ser sometido a partición (en cuanto a la relación parte-parte).

3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Desde un enfoque cognoscitivista, y con base en los planteamientos teóricos descritos, señalamos como problema de investigación el rol marcadamente activo que ejerce el adulto cuando construye significados, nociones y conceptos de fracción en el terreno de la resolución de problemas aritméticos que recuperan experiencias relevantes de la propia vida. Tal rol activo se reconoce a través de la descripción que realizan Lesh y Doerr (2000) sobre los procesos de simbolización matemática en el sujeto. Al mismo tiempo, ese dinamismo alojado en lo más profundo de la producción cognitiva del ser humano contrasta con muchas prácticas escolares aún vigentes, donde se procura que el sujeto del aprendizaje avance mediante experiencias apoyadas fuertemente en la memorización de algoritmos, como más adelante indicaremos, al hablar en torno a las circunstancias identificadas en la instrucción que recibe el grupo escolar de Lucina.

Reparamos en que este problema es de vital importancia para esclarecer cómo se producen y articulan las elaboraciones básicas del adulto en las fracciones; cuando al enfrentar problemas aritméticos el sujeto duda, se formula preguntas, establece nexos entre distintas experiencias, se plantea ciertas conjeturas, ve distintas soluciones, reflexiona sobre ellas y anticipa resultados. No menos trascendente resulta la circunstancia de que, en tanto se indague esto en el plano de la investigación, se distinguen procesos de resolución de problemas potencialmente aprovechables en el terreno de la enseñanza, a la par que se identifican los problemas aritméticos que tienen mayor adaptabilidad a las condiciones de vida del adulto.

Ante este problema de investigación, formulamos la siguiente pregunta: ¿Qué tipo de tareas aritméticas pueden favorecer, en mejores condiciones, la construcción de diversos significados, nociones y conceptos de fracción en el adulto?

En asociación con la pregunta, explicitamos la hipótesis de que es en la resolución de problemas aritméticos que recrean las experiencias laborales, comunitarias y familiares del adulto donde se enriquecen y construyen eficazmente nuevos significados, nociones y conceptos ligados a las fracciones. Con ello, deseamos las tareas y problemas aritméticos marcadamente estereotipados que han tenido amplio uso en la enseñanza, cuyas acciones y escenarios pueden ser retomados de las estrategias instruccionales dirigidas a los niños.

Por tanto, la hipótesis ubica en un lugar central la pertinencia y la adecuación de los problemas aritméticos para que el adulto genere procesos plenos de significación y sentido.

4. METODOLOGÍA

En esta sección caracterizaremos dónde y cómo llevamos adelante el estudio del caso de Lucina, para lo cual reunimos información de la institución y su entorno, del grupo de adultos al que tuvimos acceso, de los instrumentos metodológicos que diseñamos y de los procedimientos de validación aplicados. Luego sistematizaremos estos datos.

4.1. *El escenario en el que se realizó la investigación*

El estudio se llevó a cabo en una escuela primaria nocturna de un barrio periférico de la Ciudad de México, que está poblado por trabajadores procedentes de diversas zonas rurales del interior del país. La zona circundante es predominantemente industrial, aunque hay asentamientos de pequeños comerciantes.

La escuela está integrada por pequeños grupos de adolescentes y adultos que cursan los seis grados establecidos en todas las instituciones educativas de este tipo, pertenecientes al sistema público escolarizado de enseñanza. Ahora bien, la población de adultos en la escuela sufre cambios notables cada ciclo escolar, debido a las bajas y las nuevas incorporaciones. Esa movilidad tuvo que

ser cuidadosamente considerada al seleccionar a los sujetos con los que hicimos el estudio de casos. Fueron elegidos quienes exhibieron, entre otros aspectos, mayor estabilidad en su participación escolar.

4.2. *Los sujetos del estudio*

Los alumnos que resolvieron el cuestionario exploratorio fueron 17 jóvenes y adultos que cursaban el cuarto, quinto y sexto grado de primaria, cuyas edades comprendían entre 14 y 70 años. Sus actividades laborales eran diversas: obreros, amas de casa, trabajadoras domésticas, comerciantes ambulantes, vigilantes, artesanos. Por su origen, la mayoría de ellos son migrantes de las zonas rurales a la ciudad, situación que los acerca de manera notable a las labores de los campesinos y de los artesanos de provincia, aunque al incorporarse a la gran urbe hayan tenido un cambio en su perfil ocupacional.

Cinco fueron los casos sometidos a estudio, por lo que se escogieron dos jóvenes y tres adultos de cuarto, quinto y sexto grado, tomando en cuenta su desempeño académico –medio o alto– en el cuestionario inicial. Aquí sólo se presenta el caso de Lucina, quien tuvo un desempeño matemático alto. Ella tiene 41 años, trabaja como empleada doméstica y cursa el sexto grado de primaria.

Otros criterios que usamos para seleccionar a Lucina fue que había iniciado su escolaridad en el transcurso de su niñez, cuando la dejó inconclusa, y hace poco regresó a la escuela. Avanzó algo más de la mitad de sus estudios elementales, con lo que hizo evidente un buen desenvolvimiento en el aprendizaje de nuevos conocimientos y en la actualización del saber previo. Lucina tuvo un desempeño sólido en el cuestionario inicial exploratorio que aplicamos, al lograr resultados satisfactorios en la resolución de problemas y un adecuado nivel de reflexión sobre la naturaleza de su propia producción.

Por otra parte, Lucina ha sido una de las muchas personas de esta institución educativa que se trasladaron de una zona rural de la provincia mexicana hacia la capital del país, preservando muchas características personales forjadas en el pasado, sin dejar de mostrar una clara adaptación a su situación presente. Actualmente, ella se desempeña como empleada doméstica y asistente de una pareja de ancianos en la comunidad a la que pertenece la escuela. Este perfil nos permite tener cierto acercamiento a este importante sector de la sociedad mexicana, atendiendo a sus rasgos con problemas aritméticos adecuados; de igual manera, ilustra una diversidad de experiencias vitales que resultan de gran interés en nuestra investigación.

4.3. *Instrumentos metodológicos*

Se involucraron en el estudio de casos el cuestionario y la entrevista de corte didáctico, de acuerdo con los lineamientos de Valdemoros (1998).

A continuación, profundizamos las características de dichos instrumentos.

4.3.1. *Cuestionario inicial*

El cuestionario inicial fue de carácter exploratorio, pues carecimos de antecedentes sobre trabajos que hubieran indagado en la línea que planteábamos. Sus resultados fueron sometidos a análisis cualitativo, con lo cual adaptamos el cuestionario a los requerimientos de un seguimiento profundo de los casos.

Dicho instrumento fue incluido en la investigación para poder seleccionar en mejores condiciones a los sujetos del estudio de casos, así como disponer de información general respecto a todos los jóvenes y adultos que integraban los grupos escolares con los cuales se llevó a cabo esta investigación.

El objetivo específico del cuestionario fue requerir del adulto la resolución de problemas aritméticos asociados a sus experiencias vitales y que involucran el uso de distintos significados de fracción, evidenciando con ello su dominio sobre los correspondientes significados matemáticos. A partir de ese propósito, el objetivo particular de cada tarea del cuestionario estuvo referido a la aplicación de un significado matemático determinado; esta última información puede ser consultada en la Tabla I donde mostramos los problemas aritméticos incluidos en este instrumento metodológico y señalamos el significado particular abordado en cada uno de ellos.

Los problemas aritméticos o tareas que conformaron el cuestionario tuvieron como estructura común un breve texto, complementado por ciertos dibujos, que permitiese lograr una reconstrucción de distintos aspectos de las experiencias vitales.

El cuestionario, que constó de ocho tareas, involucró los significados de la fracción como cociente resultante de un reparto concreto, como medida, como razón y como operador multiplicativo. La relación parte-todo fue indagada de un modo más específico con tareas que requerían diferenciarla de la relación parte-parte. La unidad fue explorada, preferentemente, en torno a la discriminación de todos continuos y discretos, así como en una tarea de reconstrucción de un todo discreto, desde la identificación inicial de una parte.

A los jóvenes y adultos se les pidió que completaran, tradujeran e interpretaran información diversa, expresada mediante diferentes modos de

representación (textos, notaciones aritmético-técnicas, figuras geométricas, dibujos de distinta naturaleza). También se les requirió que hicieran variadas particiones, identificaran relaciones de equivalencia y realizaran elementales sumas y restas de fracciones. En algunas tareas se les dijo que ofrecieran indicios del camino que siguieron para lograr la solución, ya que así los orillábamos a reflexionar sobre su estrategia.

4.3.2. *Entrevista de corte didáctico*

La entrevista fue el instrumento fundamental en el desarrollo del estudio de casos. Cada sujeto a ser entrevistado fue escogido tanto por su desempeño en el cuestionario como por la estabilidad que mostrara en su participación y su permanencia en la escuela de adultos. Recordamos al lector que era evidente una marcada movilidad de los adultos incorporados a la escuela, por lo cual debíamos precavernos para garantizar la continuidad del trabajo.

El objetivo específico de la entrevista fue constatar si la resolución de problemas que recrean situaciones vitales para el adulto favorece el establecimiento y ampliación de diversos significados de fracción. El objetivo particular de cada tarea, al igual que en el cuestionario, estuvo referido a la aplicación de un significado matemático determinado; para tener acceso a estos últimos datos, en la sección de análisis del caso pueden ser consultadas las Tablas II y III, donde se identifica cada problema aritmético propuesto y el significado correspondiente que indaga.

A los cinco jóvenes y adultos se les aplicaron dos entrevistas distintas de carácter individual y semiestructurado, ya que, si bien había un plan previsto para cada tarea, dispusimos de una gran apertura con el fin de avanzar con el entrevistado en la dirección que tomara. Cada uno de los sujetos resolvió problemas aritméticos de diseño común, similares a los incluidos en el cuestionario; una vez concluida su ejecución, los resultados eran susceptibles de compararlos.

En el transcurso de la primera entrevista hecha a Lucina se le presentaron cuatro tareas que fueron tomadas del cuestionario, a fin de promover un nuevo proceso de resolución en la entrevista, ya sea que Lucina rectificara sus errores en el instrumento inicial, o que reconstruyera procesos de gran relevancia, sobre los cuales el cuestionario no brindaba información. Los significados considerados fueron los de la fracción como medida y como cociente intuitivo, además del sentido otorgado a las relaciones parte-todo y parte-parte. Más adelante, la Tabla II completará estos datos.

Durante la segunda entrevista se le mostraron a Lucina cuatro nuevas tareas, similares a las del cuestionario, que implicaban los significados de medida en un todo continuo y un todo discreto –siguiendo la idea de Bergeron y Herscovics (1987) de que “la fracción es la medida de la relación parte-todo”–, razón y operador multiplicativo. En la sección de análisis del caso, la Tabla III identifica cada problema aritmético propuesto en la entrevista y el significado indagado por su intermedio.

La naturaleza didáctica de las entrevistas estuvo determinada por la sucesión de dos momentos: a) una fase inicial exploratoria, donde se procuró determinar el avance de Lucina por sus propios medios; b) una fase ulterior, de carácter constructivista-didáctico, donde el entrevistador procuró que la entrevistada superara las dificultades cognitivas manifiestas en su desenvolvimiento previo, retroalimentándola, pero sin proponerle soluciones u obstruirle nuevas búsquedas, adecuando lo que planteó Valdemoros (1998).

En el desarrollo de una entrevista, el pasaje del primer al segundo momento fue valorado en cada situación, ya que dependía de que se hubieran agotado las posibilidades razonables de la exploración inicial; es decir, cuando las verbalizaciones y la producción de la entrevistada se hubiesen estancado. Dicho pasaje ofreció una de las claves fundamentales en la eficaz realización de las entrevistas y, por ende, en el seguimiento del caso de Lucina.

4.4. *Procedimientos de validación cualitativa*

Con respecto al cuestionario, se realizaron controles cruzados entre dos observadores presentes en su aplicación. Escogimos tal procedimiento de validación porque era un recurso idóneo para el desarrollo de este instrumento y no creaba resistencia en Lucina ni en los restantes adultos. Los observadores tuvieron un interés particular en las preguntas formuladas por los adultos, discriminaron su naturaleza y el momento en que fueron manifestadas, ya que esa información permitía valorar si los problemas aritméticos les resultaban familiares.

En las entrevistas optamos por comparar distintos procesos de solución desplegados por Lucina ante problemas aritméticos análogos de la entrevista, o bien de la entrevista y el cuestionario. Aunque hicimos un uso combinado de diversos recursos de validación, el procedimiento fundamental que empleamos fue la triangulación de diferentes métodos, lo cual nos permitió identificar las respuestas y procesos más estables de ambas entrevistas y el cuestionario aplicados a Lucina. El contraste lo realizamos tomando en cuenta las tareas que

tenían un significado en común tanto en el cuestionario como en las entrevistas. Por ejemplo, el significado de medida hizo posible que comparáramos los procesos de solución registrados en todas esas tareas y observar sus coincidencias, diferencias y cambios. Además, efectuamos comparaciones similares en relación con los demás significados involucrados en el cuestionario y las entrevistas.

Una vez que terminamos dicho contraste, notamos que Lucina tuvo gran consistencia en sus procesos de solución, que tendieron a ser estables; sin embargo, pudimos identificar las reelaboraciones que llevó a cabo en los dos métodos considerados. Por otra parte, el análisis general del caso se vio notablemente enriquecido con el desarrollo de este último procedimiento de validación.

5. LA ENSEÑANZA PREVIA RECIBIDA POR LUCILA

En esta sección, presentamos e interpretamos la situación en que se encontraba la instrucción desarrollada por el maestro en el grupo escolar de Lucina, al momento en que hicimos el presente estudio. Dicho entorno permitió apreciar de qué naturaleza fueron los aprendizajes logrados por estos adultos en sus condiciones naturales de escolaridad.

Al observar los cuadernos de los integrantes de este grupo, pudimos identificar las actividades escritas que realizaron durante el ciclo escolar de sexto año. Casi en su totalidad eran ejercicios donde aplicaban los algoritmos de la equivalencia de fracciones, así como los de suma y resta de fracciones con el mismo y distintos denominadores. La resolución de problemas aritméticos verbales en los que se ocuparan fracciones estuvo casi ausente. Los pocos problemas incluidos en los cuadernos eran muy pobres, ya que planteaban situaciones artificiales que no guardaban relación con la vida de los adultos.

Por todo lo expuesto, supusimos que la enseñanza recibida había sido de naturaleza mecanicista, al advertir su estrecho vínculo con experiencias de reiteración sistemática de procedimientos algorítmicos y la ausencia de su aplicación a situaciones de la vida real.

Al contrastar las actividades escritas de este grupo con las tareas impulsadas en el presente estudio hallamos la primera confirmación sobre el enriquecimiento de significados matemáticos postulado desde nuestra hipótesis, a pesar de que su verificación más directa y sólida la expondremos en la

siguiente sección.

6. ANÁLISIS DEL CASO DE LUCINA

A continuación, describiremos los pasajes fundamentales tanto del cuestionario como de las entrevistas, a los que sometimos a un análisis cualitativo centrado en los siguientes aspectos que identificamos.

De este modo, en la interpretación de los resultados privilegiamos el seguimiento de los modos de representación adoptados por Lucina porque lograron determinar en qué terreno se generaron las producciones personales importantes. Asimismo, concedimos especial atención a las dificultades cognitivas que se detectaron en su dominio de determinados significados, ya que pudieron reiterarse en otros adultos o en la propia Lucina, a posteriori. Los contenidos semánticos que tuvieron sistematicidad en Lucina los consideramos como representativos de las configuraciones primordiales de su pensamiento, al igual que la clase de argumentos con los que justificó sus procesos de resolución.

6.1. *Resultados del cuestionario inicial exploratorio*

La Tabla I contiene las ocho tareas que integraron el cuestionario y las soluciones dadas por Lucina. Ante cada problema aritmético se especifica cuál fue el significado matemático indagado –que estaba vinculado al planteamiento del objetivo particular asociado a dicha tarea–; los problemas de proporcionalidad indican dos significados porque el sujeto puede optar por uno de ellos al desarrollar su proceso de solución.

Durante la resolución del cuestionario, en general Lucina hizo un uso correcto de las fracciones, apelando a notaciones expresadas en lenguaje técnico cuando lo requería la solución de la tarea. Es decir, en el plano numérico se evidenció su tendencia global a interpretar adecuadamente las fracciones y traducirlas de manera eficiente en otras modalidades de representación.

A nivel de la equipartición, Lucina mostró un cuidadoso dominio, tanto en aquellos problemas aritméticos en los que debía efectuar la subdivisión de un conjunto en subconjuntos, como de una figura dada en un número preestablecido de partes. Esta habilidad para subdividir todos –discretos y continuos– contrastó con muchas respuestas que en este ámbito dieron los otros participantes.

TABLA I

Tareas del cuestionario y soluciones ofrecidas por Lucina (parte 1)

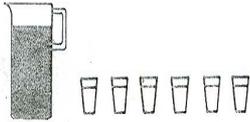
Significado	Tarea
<p>Medida</p>	<p>Tarea 1. El artesano está cubriendo con esmalte rojo las partes sombreadas de estos escudos metálicos:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>Escudo A</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Escudo B</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Escudo C</p> </div> </div> <p>Use flechas para unir las siguientes columnas:</p> <div style="display: flex; justify-content: center; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <p>Escudo A →</p> <p>Escudo B →</p> <p>Escudo C →</p> </div> <div style="margin-right: 20px;"> <p>↘</p> <p>↘</p> <p>↘</p> </div> <div> <p>2/4 pintados de rojo</p> <p>4/8 pintados de rojo</p> <p>3/8 pintados de rojo</p> </div> </div> <p>¿En cuáles escudos usa el artesano la misma cantidad de esmalte rojo?</p> <p style="text-align: center;"><u>Escudo C</u></p>
<p>Razón Operador</p>	<p>Tarea 2. Para una reunión familiar, se ha preparado agua de jamaica. Si una jarra con dicha agua llena seis vasos :</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>¿Cuántas jarras se necesitan para servir agua de jamaica en los siguientes vasos?</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Se requieren <u>2</u> jarras con agua de jamaica.</p>
<p>Medida</p>	<p>Tarea 3. Tres campesinos han adquirido un rebaño de dieciocho ovejas. Los dibujos de abajo muestran cómo se ha realizado la venta de estos animales.</p> <p>En cada caso, escriba qué fracción de todo el rebaño han adquirido los compradores:</p> <p style="text-align: center;">(información de tarea 3 se completa en la siguiente sección de la tabla)</p>

TABLA I

Tareas del cuestionario y soluciones ofrecidas por Lucina (parte 2)

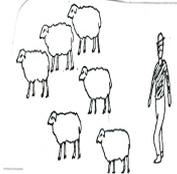
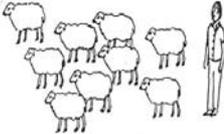
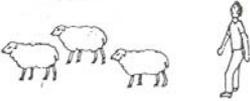
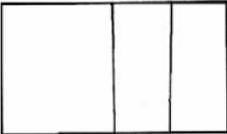
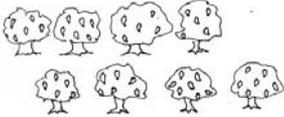
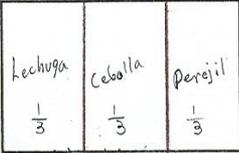
Significado	Tarea	
<p>Medida (Parte de tarea 3)</p>	<p>Julio ha comprado $\frac{6}{18}$ del rebaño</p>	
		<p>Emilio ha comprado $\frac{9}{18}$ del rebaño</p>
	<p>Jorge ha comprado $\frac{3}{18}$ del rebaño</p>	
<p>Cociente</p>	<p>Tarea 4. Un padre entrega a sus cinco hijos un terreno como el siguiente:</p>  <p>En el dibujo de arriba marque cómo se puede distribuir el terreno, de modo que todos los hijos reciban lo mismo. A continuación, escriba la fracción correspondiente: Así, cada hijo tiene $\frac{5}{5}$ de todo el terreno.</p>	
<p>Relación parte-todo</p>	<p>Tarea 5. José tiene una parcela rectangular de tierra, como se muestra en el siguiente dibujo:</p>  <p>El año pasado, José sembró $\frac{1}{2}$ de la parcela de jitomates y $\frac{1}{4}$ de la parcela de cilantro. En el dibujo de arriba marque la parte sembrada de jitomates y la parte sembrada de cilantro. ¿Qué parte de toda la parcela sembró José? $\frac{3}{4}$. <u>José sembró tres cuartos de la parcela</u> ¿Qué parte de toda la parcela no sembró José? $\frac{1}{4}$. <u>Un cuarto</u></p>	

TABLA I

Tareas del cuestionario y soluciones ofrecidas por Lucina (parte 3)

Significado	Tarea
<p>Relación parte-parte</p>	<p>Tarea 6. Este año, José cultivó flores en $\frac{1}{2}$ de la parcela y en $\frac{1}{4}$ de esa mitad cultivó rosas.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Marque en el dibujo la parte en la que cultivó flores y la parte que dedicó a las rosas.</p> <p>¿Qué parte de toda la parcela dedicó al cultivo de rosas? <u>$\frac{3}{4}$. Tres cuartos</u></p>
<p>Relación parte-todo</p>	<p>Tarea 7. También este año José ha plantado diferentes árboles frutales en su parcela.</p> <p>Estos 8 árboles de mango representan $\frac{1}{4}$ del total de árboles frutales plantados por José:</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>¿Cuántos árboles frutales ha plantado José? <u>32 árboles frutales</u></p>
<p>Relación parte-todo</p>	<p>Tarea 8. En el futuro, José quiere dividir su parcela en tres partes iguales para sembrar en ellas lechuga, cebolla y perejil.</p> <p>En el dibujo de abajo, indique con lápiz las partes que va a sembrar de lechuga, cebolla y perejil, indicando también las fracciones correspondientes:</p> <div style="text-align: center;">  </div>

Pese a las observaciones expresadas en los dos párrafos anteriores, en el problema de reparto (Tarea 4) Lucina hizo adecuadamente la equipartición del todo continuo, mas no identificó correctamente la fracción que se le pidió, como ilustra la Tabla I. Interpretamos que esta dificultad al reconocer la parte

correspondiente a un solo receptor del reparto revela un centramiento en el todo. Lucina parecería estar pensando “son cinco partes para los cinco hijos”, con lo cual no hizo emerger a la parte en contraste con el todo. De esta forma evidenció un manejo deficiente del significado de la fracción como cociente intuitivo, una circunstancia que resalta debido al carácter elemental de la tarea de reparto involucrada.

En general, Lucina tuvo adecuadas interpretaciones tanto del todo continuo como del discreto. Además, fue notorio que en varias tareas dio muestras de que necesitaba resaltar la conformación global del todo en la figura incorporada al problema, al remarcar con lápiz su contorno, como si fuera un reconocimiento cargado de dificultades, o bien que necesitase reunir todo el sentido de la situación presentada en la figura.

A pesar de lo que acabamos de señalar, la Tarea 6 de la Tabla I plantea un problema aritmético de reconocimiento sobre las relaciones parte-parte en un todo continuo, donde también está el significado de la fracción como medida. En esta tarea, Lucina no pudo identificar las fracciones de manera correcta.

Puede advertirse en la Tarea 6 que las elaboraciones desarrolladas en la figura dada y la fracción explícitamente reconocida –en lenguaje técnico-aritmético, mediante una expresión lingüística– podrían corresponder a la suma de las dos fracciones mencionadas en el texto del problema. Posiblemente, lo graficado en la figura sea más ambiguo que la escritura de la fracción, aunque si interpretamos a aquélla a la luz de esta última, podemos afirmar inequívocamente que Lucina estuvo muy lejos de reconocer la relación parte-parte (de naturaleza multiplicativa) y se apejó a una ejecución de carácter aditivo ($1/2 + 1/4$).

Esto último tal vez se haya dado porque la enseñanza previa había excluido tal clase de elaboraciones en el trabajo escolar. A ello debemos agregar las dificultades intrínsecas al reconocimiento de una relación de carácter intensivo, es decir, no aditivo. Los otros participantes manifestaron distorsiones similares a las de Lucina en este problema. Por último, podría estar dándose en la solución de la Tarea 6 un intento de generalización sobre el tratamiento que Lucina dio a la Tarea 5, aunque en otras condiciones.

Sobre la identificación directa de las relaciones de equivalencia entre fracciones, Lucina tuvo claras dificultades al manejarlas, tal vez porque hizo una ambigua interpretación de la Tarea 1 que contenía la Tabla I. Aquí puede detectarse la solución que dio Lucina a un sencillo problema del cuestionario inicial exploratorio, donde señaló sólo uno de los objetos involucrados en la tarea: el escudo que quedaba excluido de la relación de equivalencia.

En la Tarea 1, Lucina efectuó una lectura directa de las fracciones asociadas a los escudos, ya que colocó adecuadamente las flechas en la primera parte del problema. No obstante, en la segunda parte de la tarea se vio imposibilitada de efectuar las comparaciones que la condujesen a identificar la relación de equivalencia.

Sin embargo, esta última tarea no permitió apreciar –por ser una actividad de lápiz y papel– el peso que pudo haber tenido la configuración de las tres figuras y sus respectivos sombreados en la interpretación que Lucina hizo del problema y los procesos que la condujeron a su solución. Ahora bien, el que carezcamos de indicios de esa naturaleza no significa que tales representaciones hayan sido poco relevantes en la ejecución global de Lucina.

Globalmente, los errores que cometió Lucina en las Tareas 1, 4 y 6 pudieran estar expresando un dominio inestable de sus significados involucrados, aspecto que sólo se puede esclarecer a través de un acercamiento mucho más directo y profundo a Lucina, el cual propicia la entrevista. Esto presentamos en la siguiente sección del artículo, donde además sometemos a indagación la familiaridad que suponen para Lucina los problemas aritméticos propuestos.

6.2. *Resultados de las entrevistas*

A continuación, presentaremos tanto las tareas involucradas en las dos entrevistas como su análisis general. En particular, nuestra labor interpretativa se acrecienta en torno a los pasajes de las entrevistas que evidenciaron las reelaboraciones de Lucina con respecto a algunos problemas mostrados originalmente en el cuestionario, o bien con la propia producción de las entrevistas.

En el transcurso de la primera entrevista se reconstruyeron las tres actividades del cuestionario (Tareas 1, 4 y 6) que había resuelto Lucina en forma errónea, y agregamos la Tarea 5 porque facilitaba un contraste con la número 6, como muestra la Tabla II, que debe ser complementada con la información ya presentada en la Tabla I.

Para facilitar la reconstrucción de estos problemas, la entrevistadora intervino promoviendo nuevas elaboraciones y retroalimentando las respuestas de Lucina, de modo que ella se viera impulsada a continuar buscando otras vías de solución, aunque sin recibir sugerencias sobre las estrategias a seguir, o a los vínculos que debía elaborar en la nueva tentativa de solución.

TABLA II
 Problemas aritméticos de la primera entrevista

Significado	Tarea
Medida	A. Replanteamiento de la Tarea 1 del cuestionario
Cociente	B. Replanteamiento de la Tarea 4 del cuestionario
Relación parte-todo	C. Replanteamiento de la Tarea 5 del cuestionario
Relación parte-parte	D. Replanteamiento de la Tarea 6 del cuestionario

La pregunta inicial que hizo la entrevistadora a Lucina fue cuán familiar le parecía la situación exhibida en cada uno de los problemas aritméticos. Ante la Tarea A, se le interrogó si conocía el modo de trabajo de los artesanos, a lo que respondió que en su tierra había visto trabajar a diferentes artesanos en sus talleres, y que en la escuela de adultos su compañero Alejo hacía cajitas de madera que luego pintaba. Lucina agregó que, por lo común, los artesanos medían o pesaban los materiales con los que trabajaban; en el caso de Alejo, las cajitas eran del mismo tamaño, razón por la cual debía medir muy bien la madera para cumplir con tal condición.

Tras esos comentarios, Lucina contó cuidadosamente el total de partes y las partes sombreadas de cada escudo, escribiendo al pie la fracción correspondiente: $4/8$ junto al escudo A, $3/8$ junto al escudo B y $2/4$ junto al escudo C, y colocó adecuadamente las flechas. Después permaneció pensativa, ya que la entrevistadora le enfatizó que se quería saber cuáles escudos llevaban la misma cantidad de esmalte rojo, ante lo cual anotó: “escudos A y C”. Aquí dio indicios de experimentar, globalmente, menores dificultades que frente a otros problemas.

La figura 1 muestra los replanteamientos de Lucina sobre el reparto del terreno familiar entre cinco hermanos. Ante la pregunta de si conocía situaciones de reparto de bienes familiares, dijo que eso era muy frecuente y por lo común estaba asociado a la herencia de ciertas propiedades. Con respecto a sus reelaboraciones en esta tarea, durante la entrevista hubo dos preguntas clave. La primera estuvo referida a qué les correspondía a los cinco hermanos; Lucina reconoció correctamente el todo al señalar la fracción $5/5$, que había identificado de manera equivocada en el cuestionario. La segunda pregunta fue qué parte de todo el terreno le correspondió a cada uno de los cinco hijos; Lucina expresó la fracción $1/5$ oralmente y por escrito, con lo cual pudo configurar la parte en contraste con el todo. Recordamos al lector que, tanto en el cuestionario como en la entrevista, la equipartición fue correctamente realizada por Lucina.

Un padre entrega a sus hijos un terreno como éste:

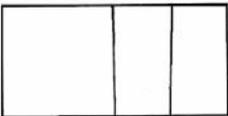


En el dibujo de arriba marque cómo se puede distribuir el terreno, de modo que todos los hijos reciban lo mismo.
A continuación escriba la fracción correspondiente:
Cada hijo tiene $\frac{1}{5}$ de todo el terreno.

Figura 1. En la primera entrevista Lucina reiteró la equipartición del cuestionario inicial, y rectificó la fracción asociada a cada beneficiario del reparto.

También en la primera entrevista se reconstruyeron otras actividades del cuestionario inicial, apelando a recursos de simplificación de las tareas que causasen muchas dificultades en Lucina. Eso se ilustra mediante la comparación de las Tareas C y D de la entrevista (Figuras 1 y 2), donde Lucina pudo rectificar el último error que había cometido en el cuestionario inicial.

José tiene una parcela rectangular de tierra, como se muestra en el siguiente dibujo.



El año pasado José sembró $\frac{1}{2}$ de la parcela de jitomates y $\frac{1}{4}$ de la parcela de cilantro.
En el dibujo de arriba marque la parte sembrada de jitomates y la parte sembrada de cilantro.
¿Qué parte de toda la parcela sembró José? $\frac{3}{4}$
¿Qué parte de toda la parcela no sembró José? $\frac{1}{4}$

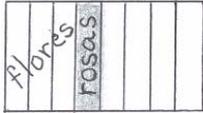
Figura 2. Lucina reiteró la tarea 5 del cuestionario inicial, sin presentar dificultades en la entrevista.

La pregunta inicial ligada a estas actividades de partición de una parcela fue si Lucina sabía cómo se cultivaba la tierra, a lo que respondió afirmativamente porque sus parientes poseían terrenos dedicados a la siembra de trigo y de maíz, siendo este último el más cultivado. De inmediato subdividió el rectángulo en mitades y señaló una de esas mitades para indicar que aquella parte era para el jitomate; a la otra mitad la partió en cuartos y agregó que un cuarto era para el cilantro. De esa manera, la entrevistada concluyó que José cultivó tres cuartos de

la parcela y un cuarto quedó sin sembrar. Como ilustra la figura 2, Lucina llegó a desarrollar el proceso de solución de ese problema en el que se exploraba la relación parte-todo sin tropiezo alguno.

Dicho problema se ligaba con el que muestra la figura 3, ya que Lucina debía identificar la relación parte-parte. Por ello, le pedimos que comparara esa tarea con la anterior y pensara en qué se diferenciaban. Una vez que manifestó haber reconocido en qué discrepaban ambos problemas, comenzó a resolver la Tarea D de la entrevista.

José tiene una parcela de tierra rectangular, donde cultivó flores en $\frac{1}{2}$ de la misma y en $\frac{1}{4}$ de esa mitad cultivó rosas.



Marque en el dibujo la parte en la que cultivó flores y la parte que dedicó a las rosas.

¿Qué parte de toda la parcela dedicó al cultivo de rosas? $\frac{1}{4}$

Figura 3. A posteriori de diversos procesos de reelaboración, Lucina replanteó la relación parte-parte en el transcurso de la primera entrevista.

La secuencia que desarrolló Lucina durante la resolución del problema que contenía la figura 3 esclarece el sentido global de su respuesta. Ella comenzó dividiendo la figura en mitades y en una de ellas marcó cuatro partes, sombreando sólo una. Ante la pregunta de qué parte era esa de todo el terreno, se centró en una mitad y dijo que $\frac{1}{4}$, tanto por escrito como oralmente. Al ser interrogada respecto a cuál era todo el terreno, tomó en cuenta la figura y completó su división en octavos; en esta fase final de su elaboración afirmó que todo el terreno estaba así dividido en ocho partes iguales y una de ellas estaba destinada al cultivo de rosas. Con esto, Lucina hizo la tarea de un modo adecuado, aunque no exento de grandes esfuerzos.

La figura 3, al contrastarlo con las Tareas 5 y 6 de la Tabla I, permite apreciar los avances que logró Lucina en el ámbito de las actividades que involucraban las relaciones parte-todo y parte-parte, con la subsiguiente identificación de la fracción.

Al estudiar el desarrollo de la primera entrevista, supusimos que la enseñanza previa de Lucina en este terreno numérico favoreció primordialmente su manejo del lenguaje de las fracciones, facilitando con ello la designación de

los números. De igual manera, que tal instrucción parecería haberla introducido con éxito al plano de la equipartición de todos continuos, aunque por ser una enseñanza eminentemente mecanicista parecería haber omitido los contenidos semánticos y conceptuales explorados en nuestra investigación.

Tampoco serían atribuibles los cambios de Lucina a las intervenciones de la entrevistadora, ya que su papel no fue ejercido más allá de lograr una retroalimentación por vía constructivista. Por ello, atribuimos los logros de Lucina en el terreno semántico a una pertinente re-creación de experiencias asociadas a su propia vida, en las que pudo recordar aspectos fundamentales, conformar de hecho sus puntos de vista y establecer comparaciones esclarecedoras en el plano de la acción, a partir de las cuales reelaboró adecuadamente sus respuestas originales. Los problemas que manifestó ante las relaciones parte-parte estarían destacando los obstáculos intrínsecamente ligados a tales nociones.

En la segunda entrevista fueron introducidos nuevos problemas aritméticos, similares a los que ya hemos presentado. La Tabla III contiene dichas tareas, los significados indagados por su intermedio y las respuestas de Lucina.

Al abordar la Tarea E, le preguntamos a Lucina si viajaba en camión de pasajeros y contestó que iba seguido a “su tierra”, y que aproximadamente a medio camino el autobús entraba a una ciudad grande para hacer un descanso y recibía gran número de pasajeros; esta información nos permitió apreciar que realizaba una estimación de las distancias, una circunstancia que facilitaría la resolución de esta actividad.

Una vez que se concentró en el problema, Lucina tuvo un manejo eficiente de la fracción como medida, ya que efectuó un correcto reconocimiento del recorrido por carretera indicado –un todo continuo representado linealmente y su parte–, empleando la fracción como medida o comparador, según lo establecido por Freudenthal (1983). En este proceso de solución probó diferentes unidades de medida, repitiéndolas sucesivamente sobre el dibujo hasta optar por aquella que se ajustaba a la equipartición del recorrido total. Dichas acciones fueron cruciales para el reconocimiento final del complemento de la fracción dada, que era requerido en el problema.

Con respecto a la Tarea F, en primera instancia le preguntamos a Lucina si conocía alguna fábrica de ropa, respondiendo que años atrás había presentado una solicitud para incorporarse a un taller donde producían camisas y, a pesar de no haber sido aceptada, llegó a conocer globalmente el modo de trabajo de ese taller.

Al resolver el problema, asignó de manera correcta una fracción a un

subconjunto de un conjunto de personas, identificando de hecho a la fracción como medida de la relación parte-todo, con lo que se ajustó a lo definido en el respecto por Bergeron y Herscovics (1987). En la justificación de su respuesta, Lucina apeló a la cuantificación del todo para legitimar el tamaño de la parte, como puede identificarse en su escrito, que incluye la Tabla III.

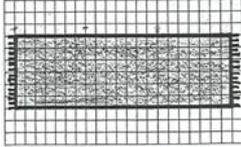
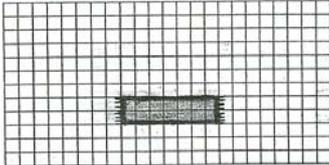
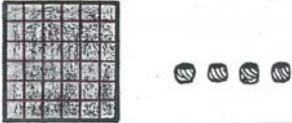
De manera global, puede afirmarse que en las Tareas E y F Lucina evidenció un claro dominio del significado de medida y tuvo un adecuado manejo tanto del todo continuo como del todo discreto.

TABLA III
Problemas de la segunda entrevista y soluciones de Lucina (parte 1)

Significado	Tarea
<p>Medida</p>	<p>Tarea E. Este camión de pasajeros realiza un viaje desde Mexicali hacia Nogales.</p>  <p>En el siguiente mapa se indica con una flecha la parte del recorrido que ha avanzado:</p>  <p>Si lo que ya ha avanzado corresponde a $\frac{2}{3}$ de todo el recorrido, ¿qué fracción le falta transitar? $\frac{1}{3}$</p>
<p>Medida</p>	<p>Tarea F. Todo el personal de una pequeña fábrica de camisetas está integrado por 20 personas, incluyendo los empleados administrativos, los vendedores, los cortadores de algodón y las costureras.</p>  <p>Las costureras son 5. ¿Qué parte de todo el personal es? $\frac{1}{4}$ ¿Cómo lo puede comprobar? <u>Porque si son $\frac{4}{4}$ en total entonces $\frac{1}{4}$ pertenece a las costureras.</u></p>

TABLA III

Problemas de la segunda entrevista y soluciones de Lucina (parte 2)

<p>Razón Operador</p>	<p>Tarea G. La Sra. Ortiz teje bufandas de diferentes tamaños. La siguiente es una de ellas:</p>  <p>A la Sra. Ortiz le han encargado una bufanda más pequeña, cuyos lados sean la tercera parte del largo de cada uno de los lados que tiene la bufanda de arriba.</p> <p>En el espacio de abajo dibuje la nueva bufanda:</p>  <p>A continuación, escriba los pasos que siguió para dibujarla. <u>Primero contar los cuadros y reducir de los dos lados la bufanda, y luego reducir a un tercio de ancho.</u></p>
<p>Razón Operador</p>	<p>Tarea H. La Sra. Martínez teje manteles con ganchillo. Para el siguiente mantel necesitó 4 madejas de hilo.</p>  <p>Le han encargado un mantel cuyo tamaño sea la mitad del área del anterior mantel. ¿Cuántas madejas de hilo necesitará para tejerlo? <u>2 madejas de hilo.</u></p> <p>Explique cómo lo resolvió. <u>Pensando en que si para el primer mantel usó 4 madejas, y va a hacer otro que mida la mitad, entonces son dos madejas de hilo.</u></p>

En cuanto a las Tareas G y H, cuando interrogamos a Lucina acerca de si tejía, respondió que lo hacía desde niña y que en los últimos años había hecho abrigos para distintos miembros de su familia.

Lucina realizó varios intentos para resolver la Tarea G. Después de contar

de manera reiterada los cuadros, comenzó reduciendo uno solo de los lados de la bufanda; ante ello, le preguntamos si se ajustaba el nuevo dibujo a lo que le requería el problema. Para responder a esta interrogante hizo otra lectura del texto, volvió a contar los cuadros e hizo un dibujo en el que redujo tanto la base como la altura de la bufanda.

Puede advertirse en la Tabla III que, al abordar las dos situaciones sencillas de variación proporcional (Tareas G y H), Lucina privilegió el uso de los operadores fracturantes, del tipo de “dividir a la mitad” o de “reducir a un tercio”, lo cual le permitió fundamentar su resolución.

Además, en la Tabla III se observa que el planteamiento de la Tarea H le ofreció a Lucina la opción de trabajar con razones externas (vinculando el número de cuadros del mantel y el número de madejas de hilo) o con un operador multiplicativo (reduciendo a la mitad). Ella escogió el operador multiplicativo tal vez porque le ofrecía el camino más sencillo y accesible hacia la solución. En la Tarea G ocurrió algo similar, pues Lucina llegó a reducir a un tercio las respectivas dimensiones.

Frente a los hechos que acabamos de exponer, y atendiendo a la circunstancia de que otros adultos ofrecieron procesos de solución similares, estimamos que sería aconsejable introducir el tratamiento didáctico elemental de la proporcionalidad, a partir de un uso amplio de los operadores multiplicativos como herramientas iniciales, altamente cargadas de sentido (una cuestión que ya habían anticipado Ruiz, 2002, y Ruiz y Valdemoros, 2001 y 2002).

Vistas en conjunto, las actividades de la segunda entrevista nos permitieron reconocer con mayor claridad qué situaciones eran más familiares para Lucina. Esa proximidad a su espacio vital hizo que ocupara ciertos recursos espontáneos de representación, como su dibujo del recorrido que hacía el autobús por la carretera, sobre el que recalcó la unidad de medida adoptada cuando dicha acción no le había sido demandada para la solución del problema.

Por otra parte, en el dibujo de la bufanda Lucina efectuó varios intentos de solución, en concordancia con sus distintas interpretaciones sobre la tarea, de ahí que probara sus propias conjeturas antes de optar por la respuesta final, que hemos presentado en la Tabla III. A través de estas iniciativas que llevó a cabo en sus procesos de solución, Lucina hizo evidente un estado mental de gran reflexión, desde el cual consideró distintas opciones, eligiendo una de ellas de manera razonada.

Asimismo, fue notorio el manejo eficiente que realizó Lucina del todo discreto en la Tarea F, en cuya resolución tampoco pesó la enseñanza previa porque no se había abordado el tema, lo cual pudimos establecer al analizar los

cuadernos de los adultos. Esta ejecución adecuada de Lucina se apoyó primordialmente en el reconocimiento de la elemental relación parte-todo, ya que una vez que asignó una fracción al todo, pudo cuantificar dicha relación.

De nuevo, como hicimos en la primera entrevista, descartamos que los cambios observados en Lucina hubieran ocurrido por la influencia de la enseñanza previa –debido a que no involucró tratamientos semánticos de las fracciones–, ni a las intervenciones de la entrevistadora, pues su papel se limitó a retroalimentar los avances de Lucina y ayudarla a que desplegara sus recursos. Por ello, consideramos que el respaldo fundamental de las nuevas elaboraciones de Lucina fue su saber empírico acumulado a través de vivencias propias, que estuvo sujeto a una reorganización al enfrentar problemas asociados a su historia previa en el transcurso de la segunda entrevista.

7. REFLEXIONES FINALES

En este artículo hemos caracterizado la naturaleza primordial de la enseñanza previa recibida por Lucina y sus compañeros de grupo, a partir de los cuadernos que usaron en clases y las actividades desarrolladas. De tal modo, hemos podido establecer que su instrucción estuvo asociada al uso de algoritmos y a la mecanización de ejercicios bastante descarnados de la realidad circundante, que difícilmente pudieron favorecer el enriquecimiento y ampliación del campo semántico de los números fraccionarios, lo cual advertimos en las entrevistas.

También hemos descrito la forma como Lucina enfrentó las actividades propuestas en el cuestionario y las entrevistas, profundizando en estas últimas sobre la familiaridad involucrada en las diversas situaciones, los diálogos fundamentales, sus intentos en los problemas donde tuvo dudas o desplegó procesos alternativos de solución, así como sus comparaciones entre diferentes alternativas. Con todo ello, hemos ilustrado las condiciones planteadas en los problemas que motivaron a Lucina para recrear algunos fragmentos de su propia realidad, lo cual le permitió reflexionar, tomar decisiones ante datos que originalmente le resultaban ambiguos y usar distintas representaciones del lenguaje natural, del lenguaje matemático o del dibujo para emprender la solución. Así, dio muestras de ejercer la *reflexibilidad crítica* (concepto que referimos en el marco teórico), pues re-construyó ciertos pasajes de su experiencia de vida.

En lo que atañe a la aplicación de los significados de fracción identificados,

el cuestionario permitió confirmar que el dominio de dichos contenidos semánticos básicos por parte de Lucina fue evidente porque efectuó un adecuado proceso de resolución de los problemas aritméticos; sin embargo, también detectó algunas de sus dificultades cognitivas al tratar las relaciones parte-todo y parte-parte. Las entrevistas didácticas, por su parte, ofrecieron evidencia de los procesos de re-elaboración de significados, nociones y conceptos de fracción que tenía Lucina –en especial, de las relaciones parte-todo y parte-parte contrastadas–, los cuales aplicó al resolver problemas que favorecían la recreación de sus experiencias vitales. Esto lo hizo sin que mediasen intervenciones sugestivas ni directrices por parte de la entrevistadora, hecho que pudiera haber sido una fuente promotora de cambios en la producción de Lucina.

Una vez establecido que los avances de Lucina no son atribuibles a la enseñanza previa del maestro ni a la mediación orientadora de la entrevistadora, a modo de conclusión sobre este estudio de caso juzgamos que hemos reunido las suficientes evidencias para comprobar la hipótesis: Es en la resolución de problemas aritméticos que replantean las experiencias laborales, comunitarias y familiares del adulto cuando se enriquecen y construyen eficazmente nuevos significados, nociones y conceptos ligados a las fracciones. Tal afirmación la formulamos a la luz de la familiaridad general con la que Lucina enfrentó los problemas aritméticos y la diversidad de recursos con los que pudo re-elaborar y superar sus titubeos y dificultades iniciales.

Con base en los párrafos anteriores, reparamos en que hay algunas sugerencias para el proceso de enseñanza, a pesar que no fue un espacio directamente involucrado en esta investigación. Sin lugar a duda, los procesos de instrucción se verán favorecidos si son acompañados de problemas aritméticos como los que hemos caracterizado. Ahora bien, para plantearlos es necesario apelar a las experiencias más notables que viven los adultos, y adaptarlas en textos accesibles y sencillos que permitan generar los procesos fundamentales de matematización de las fracciones.

También resulta pertinente para la enseñanza que los diversos significados, nociones y conceptos de fracción –crecientemente abstractos y complejos– se apoyen en ideas elementales, como las descritas para las relaciones parte-todo y parte-parte. De ahí la relevancia de que estas últimas nociones queden muy bien establecidas.

Por último, todo parece indicar que, en el terreno de enseñanza de la proporcionalidad, la temprana introducción y uso de los operadores multiplicativos es una eficaz puerta de acceso a aquella porque dichos

operadores no sólo son importantes instrumentos de cálculo, sino también poderosos soportes para algunos contenidos semánticos de la proporcionalidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bergeron, J. C. & Herscovics, N. (1987). Unit fractions of a continuous whole. In J. C. Berenson, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 357-365). Montreal, Canada: PME.
- Bishop, A. (2000). Preface a Coben, D.; O'Donoghue J. & FitzSimons, G. (Eds.), *Perspectives on Adults Learning Mathematics* (pp. XI-XIII). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Block, D. y Solares, D. (2001). Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo. *Educación Matemática* 13 (2), 5-30.
- Brizuela, B. M. (2006). Young children's notations for fractions. *Educational Studies in Mathematics* 62 (3), 281-305.
- Cabello Martínez, M. J. (1997). *Didáctica y educación de personas adultas*. Málaga, España: Aljibe.
- Empson, S.; Junk, D.; Domínguez, H. and Turner, E. (2006). Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: a cross-sectional study of children's thinking. *Educational Studies in Mathematics* 63 (1), 1-28.
- FitzSimons, G. & Godden, G. (2000). Review of research on adults learning mathematics. In D. Coben, J. O'Donoghue & G. FitzSimons (Eds.), *Perspectives on Adults Learning Mathematics* (pp. 13-45). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenological of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: D. Reidel.
- García Carrasco, J. (1997). *Educación de adultos*. Barcelona, España: Ariel.
- Gimeno, J. y Pérez, A. (2000). *Comprender y transformar la enseñanza*. Madrid, España: Morata.
- Hart, K. (1998). Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades 2* (pp. 198-219). Reston, USA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Jóia, O. (1997). Cuatro preguntas sobre la educación matemática de jóvenes y adultos. En OREALC-UNESCO Santiago (Eds.), *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos* (pp. 27-34). Santiago, Chile: OREALC-UNESCO Santiago.
- Kieran, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, USA: ERIC/SMEAC.
- Kieran, T. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of rational number ideas. In W. Zwang (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*. (pp. 506-508). Boston, USA: Birkhauser.
- Kieran, T. (1984). Mathematical knowledge building: the mathematics teacher as consulting architect. In *35th International Congress of Mathematical Education* (pp. 187-194).
- Kieran, T. (1985). Graphical algorithm in partitioning tasks. *The Journal of Mathematical Behavior* 4, 25-36.

- Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades 2* (pp. 162-181). Reston, USA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lesh, R. & Doerr, H. (2000). Symbolizing, communicating and mathematizing: key components of model and modeling. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 361-383). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. & Doerr, H. (2001). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching and learning. In H. Doerr & R. Lesh (Eds.), *Beyond constructivism: a model and modeling perspective* (pp. 3-33). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mariño, G. (1997). Los saberes matemáticos previos de jóvenes y adultos: alcances y desafíos. En OREALC-UNESCO Santiago (Eds.), *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos* (pp. 77-100). Santiago, Chile: OREALC-UNESCO Santiago.
- Medina Fernández, O. (1997). *Modelos de educación de personas adultas*. Barcelona, España: El Roure Editorial.
- Messina, G. (1993). La educación básica de adultos: la otra educación. En OREALC-UNESCO Santiago (Eds.), *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos* (pp. 197-207). Santiago, Chile: OREALC-UNESCO Santiago.
- Piaget, J.; Inhelder, B. & Szeminska, A. (1966). *The child's conception of geometry*. London, England: Routledge and Keagan Paul.
- Ruiz, E. F. (2002). *Estudio de estrategias de solución y una propuesta para la enseñanza de razón y proporción*. Tesis de doctorado, Cinvestav, México.
- Ruiz, E. F. y Valdemoros, M. E. (2001). A teaching proposal about ratio and proportion worked with students of elementary school. In *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 291-299). Snowbird, Utah, USA.
- Ruiz, E. F. y Valdemoros, M. E. (2002). Concepts of ratio and proportion in basic level students: a case study. In *Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1651-1657). Athens, Georgia, USA.
- Ruiz, E. F. y Valdemoros, M. E. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9 (2), 299-324.
- Saxe, G.; Taylor, E.; McIntosh, C. & Gearhart, M. (2005). Representing fractions with standard notation: a developmental analysis. *Journal for Research in Mathematics Education* 36 (2), 137-157.
- Soto, I. (1997). Algunas proposiciones sobre la didáctica para la enseñanza de las matemáticas de jóvenes y adultos. En OREALC-UNESCO Santiago (Eds.), *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos* (pp. 119-130). Santiago, Chile: OREALC-UNESCO Santiago.
- Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course. A theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics* 25 (1), 109-135.
- UNESCO (1997). Plan de acción para el futuro de la educación de adultos. *Fifth International Conference on Adult Education*. Hamburgo, Alemania.
- Valdemoros, M. E. (1993). *La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él*. Tesis de doctorado, Cinvestav, México.
- Valdemoros, M. E. (1998). La constancia de la unidad en la suma de fracciones: estudio de caso. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 465-481). México: Editorial Iberoamérica.

- Valdemoros, M. E. (2000). Los problemas aritméticos elementales resueltos por el adulto. *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 14*, 23-24.
- Valdemoros, M. E. (2001). Las fracciones, sus referencias y los correspondientes significados de unidad: estudio de casos. *Educación Matemática 13* (1), 51-67.
- Valdemoros, M. E. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 7* (3), 235-256.

Autoras

Marta Elena Valdemoros. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, D.F., México; mvaldemo@cinvestav.mx

Elena Fabiola Ruiz. Instituto Politécnico Nacional, México, D.F., México; elen_fruiz@yahoo.com.mx