

PLENARIA

ATLAS.TI Y UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA COMO HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DOCENTE: LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.

Jeannette Vargas Hernández

Aspirante a Doctora en Educación Matemática

Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca

jeannettevargash@usal.es

Resumen

En esta comunicación se describe la manera cómo se clasifica y realiza un análisis de primer orden sobre los datos obtenidos en una investigación cuyo objetivo es caracterizar la práctica de los docentes universitarios de precálculo del concepto función exponencial. Para ello se hace un planteamiento de una descomposición genética del concepto función exponencial y se usa ATLAS.ti que permite almacenar todos los datos, codificarlos, categorizarlos y analizar los resultados obtenidos a partir de la noción de modelación de la descomposición genética.

Palabras clave: Educación Matemática, función, exponencial, docentes. 97C70, 97C30, 97B10, 26A12

Abstract

This communication describes how it is classified and analyzed the first order data from the research on the characterization of teaching methods' instructors of the exponential function concept at the college level in a precalculus class. The approach employ is a genetic decomposition of the exponential function concept and use ATLAS.ti. This allows to save, code, sort and analyze all data so results are obtained from the modeling notion of the genetic decomposition.

Key words: 97C70, 97C30, 97B10, 26A12

INTRODUCCIÓN

La utilización de las nuevas tecnologías en la investigación educativa ha obligado a los investigadores a perfeccionar los métodos a seguir así como la selección de los instrumentos, herramientas y técnicas más adecuadas para conseguir los objetivos planteados. Si repasamos las diferentes fases de una investigación: selección de sujetos, metodología a aplicar, el diseño de instrumentos, la recogida de datos,...en cada uno de esos momentos se ha logrado que las nuevas tecnologías formen parte del proceso investigador como ayuda o enriquecimiento de dicho proceso. Así nos han permitido:

- Acceso a los sujetos objeto de investigación a través de diversos medios: páginas web, correo electrónico, redes sociales,...
- Diseño de una metodología de aula innovadora que implique el uso de las TIC.
- La recogida de los datos mediante audiongrabadoras digitales, de cámaras de vídeo, cámaras web o software de captura de pantallas (Codes, 2009)

Modificar el centro de interés, por ejemplo, el análisis de los gestos realizados por los alumnos cuando resuelven

un problema matemático no habría sido posible sin el uso de cámaras de vídeo

En general, cuando se habla de metodología cualitativa, el trabajo del investigador se ha caracterizado por ser bastante artesanal, teniendo que superar grandes dificultades para estructurarlo y sistematizarlo, en definitiva, es un trabajo muy complejo que requiere mucho tiempo y reflexión por parte del investigador.

A partir de la década de los 90, fueron apareciendo herramientas informáticas como ayuda para facilitar el análisis de datos cualitativos que conforman lo que hoy en día se conoce bajo las siglas CAQDAS (Computer Assisted Qualitative Data Analysis). Estos programas han soportado una gran resistencia a su uso por parte de los investigadores debido al uso lineal y las restricciones que imponían. Pero hoy en día, muchas de estas barreras han sido superadas y encontramos programas que pueden apoyar a los investigadores en las diferentes fases de la investigación y que pueden ser clasificados en diversas categorías según su uso:

- Los de asistencia a la transcripción: SOUNDSCRIBER, TRANSANA
- Los orientados a la lógica como AQUAD
- Los que permiten análisis de contenido TESTQUES
- Los que ayudan al análisis ATLAS/ti, NUDIST, QDAMiner, NVivo, MaxQDA.

Es importante señalar que la aplicación de estos paquetes se debe asumir con atención, criticidad y reflexión (Farias y Montero, 2005), generando un acercamiento centrado en las necesidades del investigador o del tema.

Atlas.ti como recurso para el análisis de datos

El programa ATLAS.ti fue desarrollado en Berlín mediante un proyecto de colaboración entre el departamento de Psicología de la Universidad Libre de Berlín y Thomas Muhr y se sigue perfeccionando en nuestros días. Se usa como medio de almacenamiento, categorización, codificación y estructuración de los datos obtenidos en una investigación a través del diseño de diagramas, mapas y redes. Permite el almacenamiento de los datos en un único lugar (unidad hermenéutica) a partir del que se va a hacer el análisis. Posteriormente, se segmentan, se asignan códigos a cada segmento incluyendo comentarios y anotaciones (memos) y se forma así una base relacional de datos a partir de los que el programa genera redes semánticas (networks) para que finalmente sean interpretados por el investigador.

Los objetos o elementos que constituyen el programa son:

- Documentos primarios: documentos de texto, gráficos, sonoros o visuales situados en el disco duro. El programa no los modifica ni los guarda sino que almacena referencias a ellos.
- Citas: fragmentos de los documentos primarios seleccionados por su significación en relación con la investigación. Puede ser una cadena de texto, un gráfico, una imagen, ...
- Códigos: indicadores de conceptos o expresiones que se van asignando a las citas seleccionadas.
- Notas (memos) textos breves con ideas asociadas a algunos de los elementos

- Familias: conjunto de objetos que comparten una cualidad, pueden ser familias de códigos, de documentos primarios, etc. Se suelen usar como filtros en la búsqueda de los miembros de algún objeto.
- Redes: están compuestas por nodos y relaciones creados a través de un editor específico. Los nodos pueden ser cualquiera de los objetos del programa y las relaciones son los nexos establecidos entre esos nodos.

Todos los objetos llevan datos sobre la fecha y hora de su creación e incluso, si nuestro trabajo es en equipo, se pueden distinguir las aportaciones de los distintos miembros del equipo.

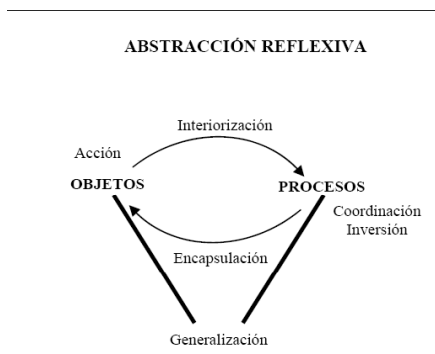
Referentes teóricos

En esta comunicación se pretende mostrar un ejemplo del proceso de análisis de datos en el caso de una investigación sobre la práctica docente en torno a la función exponencial.

Uno de los objetivos que justifica el análisis de la práctica del profesor de matemáticas en el ámbito de la educación matemática es determinar en qué medida lo que el profesor hace en el aula (su discurso matemático) y los problemas y recursos que utiliza facilitan el que los estudiantes doten de significado a las ideas matemáticas (Gavilan et al, 2007a, 2007b). En este contexto la secuencia de construcciones mentales y los mecanismos cognitivos por los cuales los estudiantes pueden desarrollarlos se convierte en un referente para determinar en qué medida la práctica del profesor permite esa construcción. De esta manera, la descomposición genética de un concepto se convierte en un referente para identificar y explicar aspectos relevantes de la práctica del profesor de matemáticas.

La función exponencial es un concepto que se incluye en los cursos de precálculo a nivel universitario en Colombia y una característica importante que la identifica es ser la única función cuya derivada es proporcional a la propia función. Sin embargo, su aprendizaje no está exento de dificultades relacionadas con las restricciones sobre los valores de la base (Davis, 2009), los cálculos tanto si el exponente es natural como cuando no lo es (Confrey y Smith, 1995) o el significado de su crecimiento (Lezama, 1999). Desde el punto de vista de su enseñanza, se ha realizado una inversión respecto a su génesis histórica dado que lo habitual es que se enseñe previamente a la función logaritmo cuando, en realidad, surgió como inversa de ésta. Esto ha conducido a que se descuiden aspectos que la dotan de significado y que tienen que ver tanto con dicha génesis histórica como puede ser la relación entre la estructura aditiva de los exponentes y la multiplicativa de la variable dependiente como con las aplicaciones de la función exponencial en ámbitos muy diversos como las ciencias naturales o la economía. Esto pone de manifiesto los prerrequisitos para su construcción como los nuevos significados que deben ser generados: razón de cambio, covariación y crecimiento.

A partir de las consideraciones anteriores se hace una propuesta de descomposición genética de la función exponencial (Vargas, J., González, MT y Llinares, S, 2011). Se elabora y examina la propuesta teniendo presente que la descomposición genética del concepto hace referencia a dos componentes del modelo de comprensión APOS: las formas de conocer: acción, proceso, objeto y esquema, y los mecanismos de construcción: interiorización, inversión, coordinación encapsulación y desencapsulación. En el siguiente esquema (Dubinsky, 1991, p. 107) se pueden ver las relaciones entre estos dos componentes lo cual es una ayuda al esbozar las ideas que se presentan en las descomposiciones.



Esquema 1. Formas de conocer y mecanismos de construcción en la teoría APOS, p. 107.

Para realizar la descomposición genética se establecieron unos prerrequisitos para luego describir cada uno de los mecanismos de construcción en dos grupos de registros de representación: el analítico-tabular y el gráfico-analítico, considerando así tanto los aspectos aritméticos y algebraicos por un lado como los geométricos y gráficos por otro.

La idea inicial es partir de la noción de potencia como operación, junto con los diferentes significados del exponente; considerar los exponentes naturales mayores que uno como una multiplicación reiterada en la que se busca una economía en la escritura y luego la noción de exponente no natural como una convención matemática para uniformizar las operaciones entre monomios a partir de las leyes de las exponenciales. Esta introducción permitirá generar en los estudiantes formas de conocer la potencia como una acción que posteriormente permitirán generar mecanismos de interiorización de la idea de potencia con exponente natural.

Además, en el contexto de las funciones se parte de las funciones lineales y polinómicas, entre ellas las funciones potenciales, para llegar a la función compuesta y la función inversa.

Comienza la construcción de la función exponencial por medio de las llamadas acciones en la teoría APOE, transformaciones de objetos percibidas por el estudiante como externas. Estas transformaciones se producen como una reacción a una indicación que ofrece información sobre los pasos a seguir. Se realiza en dos planos, el analítico y el gráfico para los cuáles se consideran algunos casos particulares como bases enteras y racionales, teniendo en cuenta, además que las funciones exponenciales $f(x) = b^x$ son aquellas funciones cuya razón de cambio es proporcional al valor de la función y, por tanto, los estudiantes deben ser conscientes de esta razón de cambio. Por otro lado hay que tener en cuenta la noción de covariación entre las dos estructuras, la aditiva de la variable independiente y multiplicativa de la dependiente. Estos dos últimos aspectos deben permitir al estudiante identificar la naturaleza creciente o decreciente de la función. En cuanto a los aspectos gráficos, hay que considerar la representación en el plano cartesiano de los puntos de la curva exponencial para lo que se requiere el uso de elementos geométricos como la media geométrica, la semejanza o el producto de segmentos. En definitiva, se trata de:

- Analítico- tabular

Acción de evaluar numéricamente la expresión de función exponencial con una base dada.

Acción de calcular las diferencias entre dos valores de la variable independiente y los valores correspondientes de

la variable dependiente.

Acción de comparación de diferencias y cocientes de dos valores de la variable independiente e dependiente respectivamente.

- Gráfico- analítico

Acción de ubicar en el plano cartesiano puntos correspondientes a parejas de coordenadas donde la segunda componente es una potencia de exponente la primera componente, recurriendo a construcciones geométricas cuando la ubicación de puntos lo requiera.

El mecanismo de interiorización es la construcción mental de un proceso que tiene que ver con una serie de acciones sobre objetos cognitivos, es decir, las acciones se interiorizan en procesos. Este mecanismo permite ya la comparación de funciones exponenciales de diferente base, distinguiendo de este modo el tipo de crecimiento relacionado con los valores de la base tanto desde el punto de vista analítico como gráfico, la adquisición del proceso asociado a la covariación de la función exponencial y del proceso de proporcionalidad de la razón de cambio con el valor de la función asociado a la función exponencial.

- Analítico- tabular

Interiorización de las acciones en un proceso cuando se realizan iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando los casos en que la base es mayor que uno o cuando tiene un valor entre cero y uno.

Interiorización de las acciones de comparación de diferencias y cocientes de dos valores de la variable dependiente

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2 - x_1}$$

e independiente respectivamente, para buscar las relaciones entre ellas.

Interiorización de las acciones del cambio que se efectúa en la variable x, para x muy grande en el caso de la función decreciente y x muy pequeño en el caso de la función creciente para comparar el cambio que se genera en y.

Interiorización de las acciones de comparación de la razón de cambio promedio en un punto con el valor de la función en ese punto.

- Gráfico-analítico.

Interiorización de las acciones de ubicar diferentes puntos en el proceso gráfica de la función exponencial sin recurrir a realizar las acciones de reemplazar en la fórmula esos diversos valores en donde está definida la función.

Representación del triángulo característico para diferentes puntos de la gráfica de una función.

El mecanismo de coordinación es el acto cognitivo de asociar dos o más procesos para construir un nuevo proceso, en este caso los procesos construidos mediante el mecanismo de interiorización son coordinados para formar el

proceso función exponencial en el plano analítico y en el plano gráfico.

- Analítico -tabular.

Coordinación entre el proceso función exponencial, cuya razón de cambio promedio es directamente proporcional al valor de la función en ese punto y el proceso de funciones crecientes para bases mayores que uno y decrecientes para bases mayores que cero y menores que uno con corte en (0,1) y asíntota al eje x.

- Gráfico-analítico.

Coordinación entre el proceso curva de la función exponencial asíntota al eje x con corte en el eje y; y el proceso función creciente para bases mayores que uno y decrecientes para bases mayores que cero y menores que uno.

El mecanismo de encapsulación es la transformación mental de un proceso dinámico en un objeto cognitivo estático. Este objeto puede ser visto como una entidad total y puede ser transformado mentalmente por otras acciones o procesos. En este caso se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto cognitivo.

Encapsulación del proceso función exponencial en el objeto $f(x) = b^x$ función exponencial y su representación con $b > 0$ y $b \neq 1$, dominio en el conjunto de los números reales y rango los números reales positivos, que tiene como asíntota el eje x, es una función creciente para $b < 1$ y decreciente para $0 < b < 1$ con una raíz para $x = 1$ y relación de proporcionalidad entre la función y su razón de cambio.

Finalmente el mecanismo de generalización permite considerar la función exponencial en diferentes contextos tanto matemáticos como no matemáticos incrementando la imagen del concepto y con ello dotando al concepto de sentido.

Generalización de la función exponencial objeto $f(x) = b^x$ por diversas transformaciones relacionando los diferentes parámetros de la representación analítica con sus efectos en la representación gráfica.

Aplicación de la generalización anterior con los procesos de solución de ecuaciones exponenciales.

Utilización de la función exponencial en diferentes contextos: crecimiento de poblaciones, decaimiento, temperatura e interés compuesto, comportamiento radiactivo.

Ejemplo de uso en una investigación sobre la práctica profesional del profesor de matemáticas: El caso de la enseñanza de la función exponencial

Para indagar sobre la forma cómo se construye en el aula el concepto de función exponencial, se han utilizado ciertas herramientas conceptuales e informáticas. En cuanto a la primera adoptamos el constructo modelación de la descomposición genética (Gavilán, 2005) generado a partir de la teoría APOS (Dubinsky, 1991) para explicar la práctica del docente entendida como “una descripción de los mecanismos de construcción que el profesor modela, de la secuencia de estas modelaciones y de la organización de las relaciones que establece entre dichos mecanismos a través del uso de diferentes instrumentos de la práctica”. Y, en relación con el segundo aspecto,

optamos por utilizar el programa ATLAS.ti para llevar a cabo el proceso de análisis de la práctica de los docentes.

Esta investigación que pretende responder a ¿Cómo guía el docente la construcción de la función exponencial con estudiantes de precálculo? es un estudio de casos de dos¹ docentes universitarios de precálculo con una experiencia profesional de 15 y 10 años respectivamente. Los instrumentos utilizados para la recogida de datos de cada sesión de aula correspondientes a la enseñanza de la función exponencial fueron: una entrevista inicial sobre la planificación, un audio y videograbación de las sesiones correspondientes a la implementación y una entrevista final, por cada sesión, de contraste entre el investigador y cada docente.

Los videos junto con las grabaciones de voz tanto de las clases como de las entrevistas fueron transcritos en su totalidad e incorporados a una unidad hermenéutica del programa. Es importante señalar que el programa es solamente una ayuda para el investigador, puesto que, en definitiva, tiene que ser él mismo quien debe ingresar tanto los documentos, como los videos, grabaciones de voz y demás datos que requiera para establecer relaciones de acuerdo con los objetivos planteados. La siguiente imagen (figura 1) del documento² 20 muestra una parte de la entrevista posterior a la sesión 5, que ya forma parte de la Unidad Hermenéutica de ATLAS.ti :

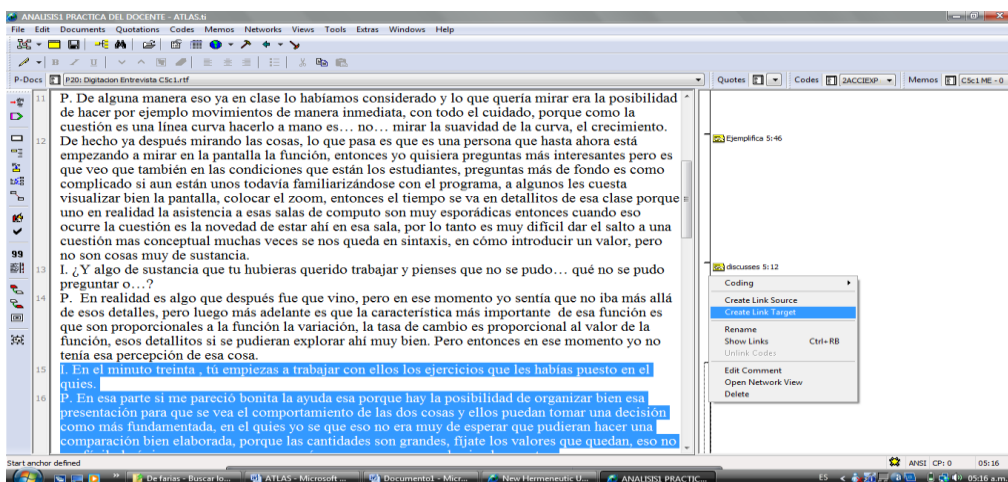


Figura 1. Extracto de una entrevista.

Después de realizar por un lado las transcripciones y por otro, a nivel más teórico, la descomposición genética³ de la función exponencial, se generaron categorías relacionadas con las sucesivas fases de dicha descomposición a las que se les asignaron códigos y una descripción de su significado. Dichos códigos, por lo tanto, se refieren a los

¹ En esta comunicación sólo se va a hacer referencia a uno de los casos, el docente que se ha denominado caso 1.

² La numeración de los documentos es asignada automáticamente por el programa y puede ser reordenada según lo considere el investigador. En nuestro caso el orden definido por la investigadora fue: primero las 15 sesiones de clase y luego una a una las entrevistas del caso 1 seguidas de las entrevistas correspondientes al caso 2 y finalmente las entrevistas iniciales. Por lo tanto el documento 20 corresponde a la entrevista 5 entrevista realizada al caso 1 sobre una sesión de clase.

³ Una descomposición genética es un conjunto estructurado de construcciones mentales, las cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente de un individuo (Asiala et al., 1996).

mecanismos que modela el docente: interiorización⁴, coordinación⁵, encapsulación⁶, inversión⁷, generalización⁸. A partir de esa codificación se fueron seleccionando los segmentos significativos en relación con las categorías previamente establecidas. Esto permitió observar los mecanismos de construcción que el profesor propicia para que sus estudiantes construyan el conocimiento en cada sesión de clase (Gavilán, J.M.; García, M. & Llinares, S. 2007b).

En esta comunicación, por razones de extensión, sólo vamos a hacer referencia a tres de esos mecanismos: generalización, inversión y coordinación. Un ejemplo de un segmento de una clase ya codificado se puede ver a continuación:

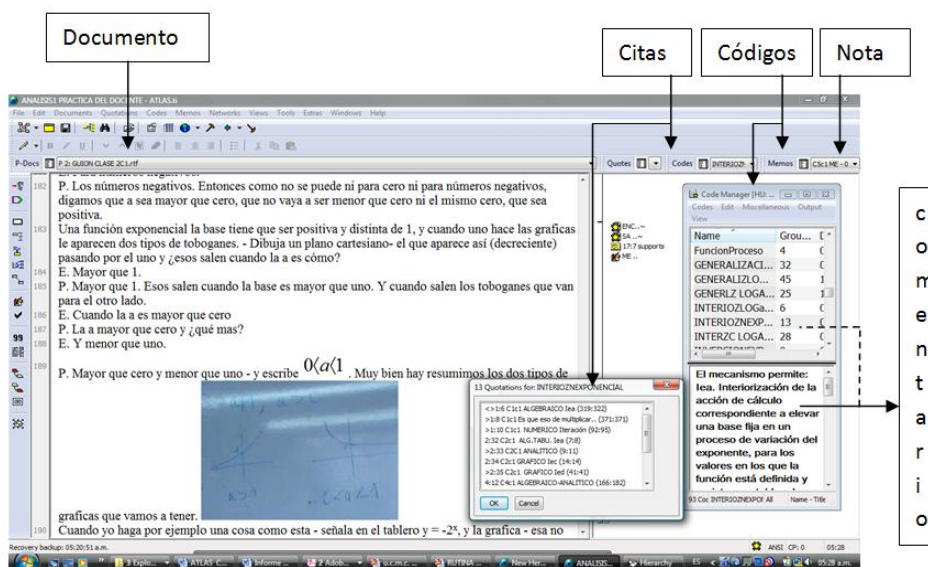


Figura 2. Información de pantalla sobre documentos en ATLAS.ti

En esta indagación, la investigadora ha establecido los códigos de acuerdo con los cuales va a clasificar los segmentos de clase con anterioridad al análisis propiamente dicho, pero se puede hacer sobre la marcha a medida que se van revisando los datos obtenidos en la investigación.

El programa también permite incorporar un comentario sobre cada uno de los códigos que, en nuestro caso, corresponde a la interpretación e indicadores de cada mecanismo, por ejemplo, alguno de los códigos que se

⁴ La repetición y la reflexión sobre las acciones permiten caracterizar el mecanismo de interiorización (Dubinsky, 1996) entendido como “traducción de una sucesión de acciones materiales a un sistema de operaciones interiorizadas” (Beth y Piaget 1966, p. 206).

⁵ Coordinación: A partir de dos o más procesos se construye un nuevo proceso.

⁶ Encapsulación: Transformación de un proceso en objeto.

⁷ Inversión: Una vez que existe un proceso internamente, es posible para sujeto pensar en él en reversa, no necesariamente en el sentido de deshacerlo, sino como un medio de construir un nuevo proceso que consista de *revertir* el proceso original.

⁸ Generalización: Aplicación de un esquema en situaciones diferentes a los usos previamente construidos.

asignaban fueron los relativos al mecanismo de generalización y el comentario incluido por la investigadora se refiere a la concreción de este mecanismo en relación con la función exponencial, que incluye:

Generalización de la función exponencial objeto $f(x) = b^x$ por diversas transformaciones relacionando los diferentes parámetros de la representación analítica con sus efectos en la representación gráfica. Gea.

Aplicación de la generalización anterior con los procesos de solución de ecuaciones exponenciales. Geb.

Utilización de la función exponencial en diferentes contextos: crecimiento de poblaciones, decaimiento, temperatura e interés compuesto, comportamiento radiactivo. Gec

A partir de la codificación, la investigadora interpreta las acciones de los docentes y, guiada por las intenciones que estos últimos han manifestado en las entrevistas, asigna el mecanismo Generalización y luego dentro de cada cita o segmento el código Gea, Geb o Gec según corresponda a las acciones marcadas en el segmento. Se procede de forma similar asignando cada uno de los mecanismos que forman parte de la descomposición genética del concepto de función exponencial a diferentes segmentos. Este proceso se realiza de una forma ágil permitiendo establecer relaciones y vínculos entre los diferentes documentos que constituyen los datos. De esta manera se pueden vincular los segmentos de las clases con las afirmaciones del docente durante las entrevistas.

Para observar estas relaciones y vínculos entre los segmentos de la entrevista y las sesiones de clase se puede utilizar la herramienta hierarchy. A continuación se presenta un ejemplo que corresponde a la segunda entrevista realizada al docente. Los encabezados de la forma [17:--] corresponden a la entrevista que fue guardada como documento 17 y los encabezados [2:--] indican que se refieren a la sesión de clase número dos. Así [17:6] es el sexto segmento de dicha entrevista aparece relacionado con el noveno segmento de la sesión de clase [2:9] al cual se le asigna el código correspondiente al mecanismo de interiorización de la función exponencial y tiene un memo anexo que la investigadora escribió el 30 de octubre del año 2009.

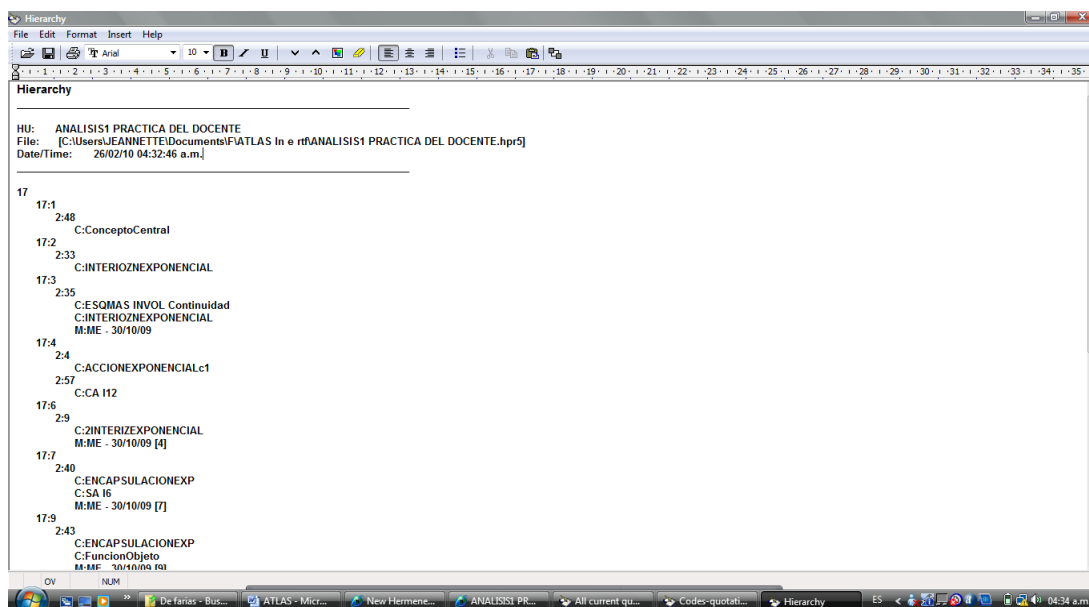


Figura 3. Jerarquía entre vínculos de segmentos de diferentes documentos.

Los memos que la investigadora ha asignado a algunos códigos pueden corresponder al análisis o a diversos comentarios sobre las razones de la codificación, aclaraciones o elementos que se podrían considerar para profundizar en un análisis con mayor grado de profundidad.

Los nexos entre segmentos de las entrevistas y segmentos de las sesiones de clase también pueden ser observados en pantalla. En la siguiente imagen (figura 4) el docente durante la tercera entrevista explica por qué escogió en su sesión de clase [3:14] esa construcción del número e y qué pasos pretende que los estudiantes comprendan al igual que aquellos que considera secundarios.

The screenshot shows a software window titled "All current quotations (94): Quotation-Fiber: All (extended version)". The main content is a transcript of a class and an interview. The transcript includes the following text:

E. -escribe en el tablero $A(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{11} = 2$

I. Hay les estás presentando el número e , ¿por qué esa manera de presentarlo?
Me pareció muy bonito que en el contexto del interés compuesto apareciera un número que en realidad es exótico, la primera vez que yo me encontré con eso a mi me

P18: Digitacion Entrevista C3c1.rtf - 18:8 [E3c1] (37:49) (J)
Hyper-Links:
Ejemplifica 3:14 C3c1 ALGEBRAICO

The transcript also includes a photograph of a chalkboard with handwritten mathematical work. The chalkboard shows the formula $A(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{11} = 2$ and calculations for n and $A(t)$.

Fijese como usted le puede aumentar un número tan grande, cada fracción de tiempo muy pequ

P. ¿Considerar clave?...la construcción de la fórmula...yo en el fondo pensando en ella, no lo consideraría como clave. Porque de alguna manera yo no me meto a m
I. Ajá
P. Es cuando él, el estudiante, pues de alguna forma yo que llego ahí y entonces con esa formullita, cada cosita, va le encuentra su sentido, de esto es tal cosa, esto e
I. Cuando dices lo otro, me estás hablando del proceso de...
P. Del proceso de construcción de la fórmulas. Sí, no sé si eso forme parte como de la, no sé de, para ser un poco honestos tal vez como que las cosas no salen de la

On the right side of the screenshot, there are four boxes labeled "Clase" and "Entrevista". Arrows point from the transcript text to these boxes, indicating the source of the information. The first "Clase" box is connected to the formula $A(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{11} = 2$. The first "Entrevista" box is connected to the text "Me pareció muy bonito...". The second "Clase" box is connected to the text "Fijese como usted...". The second "Entrevista" box is connected to the text "¿Considerar clave?...".

Figura 4. Nexos entre segmentos de entrevista y sesión de clase.

Una vez el investigador procede a codificar las sesiones de clase, identificando segmentos o citas a los que asigna códigos y subcódigos y estableciendo memos cuando lo considera necesario, es posible visualizar la información de diferentes maneras: tal como aparece en las figuras anteriores o mediante un editor especial, una especie de pizarra a la que podemos incorporar cualquiera de los objetos que se han mencionado. Estas redes permiten profundizar en las relaciones entre los datos que se van obteniendo.

En la siguiente imagen (figura 5) aparece una red o esquema que permite mostrar una característica relevante del programa de análisis seguido como es la de establecer relaciones entre diferentes tipos de datos.

Este ejemplo se apoya en la construcción del concepto de función logaritmo como inversa de la exponencial. De acuerdo con Wieleitner (1932), Euler fue el primero que vio en la logaritmicación una de las dos operaciones inversas de la elevación de potencias, con lo cual se hizo posible aplicar a los logaritmos procedimientos algebraicos:

dato valorem quocunque affirmativo ipsius y , conveniens datibur valor pisius z , ut fit $az=y$; iste autem valor ipsius z , quatenud tanquam Functio ipsiys y spectatur, oari solet LOGARITHMUS ipsius y (Euler, p. 73).

Por otro lado, los resultados de investigaciones en educación matemática advierten que los itinerarios académicos para la enseñanza de estas funciones están ligados inicialmente al conocimiento de la función exponencial y el estudio posterior¹⁰ de la función logarítmica como su inversa, adquiriendo así la exponencial un papel intermediario (De Faria, 2006; Berezovski, 2004; Kastberg, 2002). El esquema que nos presenta el programa en relación con este mecanismo de inversión de la función exponencial para obtener la logarítmica, es el siguiente:

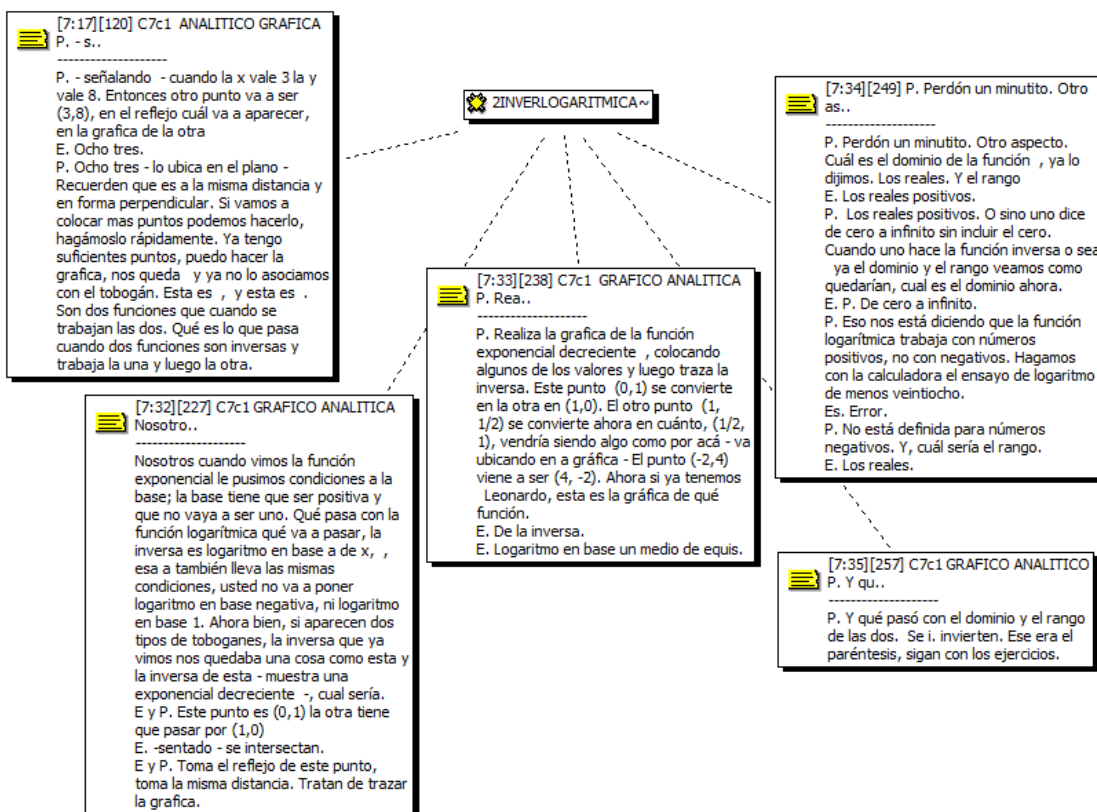


Figura 5. Inversión de la función exponencial como mecanismo de construcción de la logarítmica.

En este caso (figura 5) se han identificado diferentes segmentos para construir la función logarítmica a partir de la función exponencial, cuando se construye la gráfica de la función logarítmica [7:17], para calcular su corte con el eje y [7:32], estudiar su crecimiento [7:33] o determinar el dominio y el rango [7:34] y [7:35].

Este análisis de primer orden permite, no sólo realizar la triangulación de todos los datos recogidos: video de clase, voz de clase, entrevistas con el docente, sino también la triangulación del análisis puesto que varios investigadores

⁹ Dado un valor afirmativo cualquiera de y vendrá dado el valor de z conveniente para que sea $a^z = y$; este valor de z contemplado en cuanto función de y , suele llamarse LOGARITMO de y .

¹⁰ Justo al contrario que la génesis histórica, puesto que inicialmente surgieron los logaritmos para el trabajo de cálculos en Astronomía con números grandes, mientras que la función exponencial es bastante más tardía (Vargas y González, 2007).

pueden trabajar sobre la misma Unidad Hermenéutica y a partir de una descomposición genética establecida (o categorización previamente establecida), segmentar la clase individualmente, asignar códigos y discutir las coincidencias de codificación para validar cada categoría asignada. Dicha segmentación de la clase permite caracterizar la práctica de cada docente ya sea por su presencia frecuente o por su ausencia, por ejemplo, en el caso del docente 1 se ha comprobado que modela el mecanismo de interiorización, como se puede ver en la siguiente figura, pero no el de coordinación que no aparece en ningún momento:

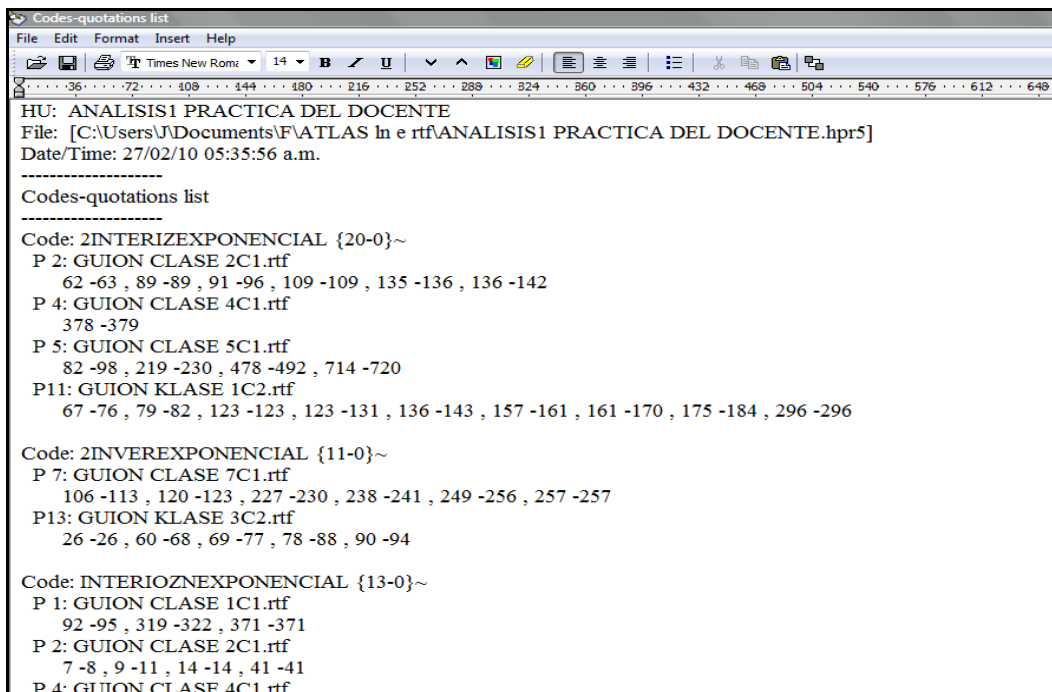


Figura 6. Mecanismo de interiorización

Al indagar en los diferentes informes que permite crear ATLAS.ti se pudo advertir efectivamente una ausencia del mecanismo de coordinación entre los procesos de interiorización lee y lef que puede ser debida a que el profesor se ha centrado en la reflexión sobre ciertas características de la gráfica de la función exponencial como son cuándo es creciente o decreciente, el corte con el eje x o la existencia de una asíntota (proceso lee) pero no ha reflexionado sobre la tasa de variación¹¹ de la función (proceso lef).

Aún cuando este análisis de primer orden ya permite establecer cierta caracterización, es necesario poder comparar la descomposición genética previamente elaborada por los investigadores con la modelación de la descomposición genética que presenta cada caso y para ello es necesario reconstruir el proceso que ha seguido el docente a lo largo de todas las sesiones de clase, por lo tanto, si en el análisis de primer orden se descompuso la clase por mecanismos ahora se va a recomponer en el análisis de segundo orden.

CONCLUSIONES

La investigación necesitó de un fuerte soporte teórico dentro del cual emerge nuestra propuesta de una descomposición genética del concepto función exponencial que se planteó, como lo sugiere la teoría APOS, a partir

¹¹ Este proceso es importante en relación con la función exponencial porque estas funciones se pueden caracterizar porque su razón de cambio es proporcional al valor de la función en ese punto (Thompson, 2008).

inicialmente de la experiencia del profesor o investigador una revisión histórica del concepto función exponencial como de los reportes de las investigaciones en Educación Matemática alrededor de los procesos utilizados por los estudiantes cuando tratan de comprender el concepto.

La descomposición genética se convierte en un instrumento para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas al ser considerada como un referente de las acciones y recursos usados por el profesor cuando intenta que sus estudiantes doten de significado a las ideas matemáticas.

Con el programa ATLAS.ti el proceso de análisis de entrevistas, grabaciones de audio y video se logra concretar con las redes conceptuales que ayudan al investigador en la interpretación de los resultados y avanzar hacia el logro de los objetivos de investigación.

La clasificación de los datos y los nexos que se establecen pueden ser editados con ATLAS.ti en diferentes formatos; cada uno de ellos favorece o enriquece un aspecto del análisis, así se puede editar bloques por mecanismo y mediante su lectura supervisar la codificación, como también los listados de cada código, lo que permite un mayor control de un vasto número de documentos en tiempos reducidos logrando de esta manera economizar tiempo en labores mecánicas que se puede dedicar para lograr mayor profundidad del análisis de cada caso.

Los investigadores en Educación Matemática han venido actualizando sus dominios metodológicos mediante el uso adecuado de los paquetes tecnológicos. Sin embargo, su empleo no se ha generalizado, lo cual puede incentivarse con la posibilidad de recurrir a paquetes tecnológicos desde el inicio de la formación de investigadores.

Reconocimiento: Este documento forma parte del desarrollo de la tesis doctoral en Educación Matemática que se está elaborando con la tutela de la Doctora María Teresa González Astudillo. Universidad de Salamanca. España, Doctor Salvador Llinares Ciscar. Universidad de Alicante. España.

BIBLIOGRAFÍA

- Asiala, M. et al. (1996) A framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, vol. II, num. 3, pp.1-32.
- Berezovski, T. (2004). An inquiry into high school students' understanding of logarithms. Thesis. Master of Science. Canada. Simon Frase University.
- Beth, E.W. & J. Piaget (1996) *Mathematical Epistemology and Psychology*. Dordrecht: Reidel.
- Codes, M. (2009). Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.
- Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education* 26(1), 66-86.
- Davis, J.D. (2010) Understanding the influence of two mathematics textbooks on prospectiv secondary teachers' knowledge. *Journal of mathematics teacher education*, 12, 365-389.

- De Faria, (2006) Ingeniería Didáctica en: Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. 1(2).
- Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, En D. Tall. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 95-123.
- Dubinsky, E. (1996) Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8(3).
- Euler, L (1748) *Introductio in Analysin infinitorum* Lausanne: Marcum Michaellem Bousquet y socios. (Edición facsimil editada por SAEM: Thales y la Real Sociedad Matemática española).
- Farias, L. y Montero, M. (2005). De la transcripción y otros aspectos artesanales de la investigación cualitativa. *Internacional Journal of Qualitative Methods*, 4(1) p. 7.
- Gavilán, J.M. (2005/2010) El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Publicada en 2010 por Edición Digital @tres, S.L.L.
- Gavilán, J.M.; García, M; Llinares, S. (2007a). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. *Implicaciones metodológicas, Enseñanza de las Ciencias*, vol. 25, pp. 157–170.
- Gavilán, J.M.; García, M.; Llinares, S. (2007b). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista Del aprendizaje potencial de los Estudiantes. *EDUCACION MATEMATICA*, vol. 19, pp. 5- 39.
- Kastberg, S. E. (2002). *Understanding Mathematical Concepts: The case of the Logarithmic Function*. Thesis. Doctor of Philosophy. Athens, Georgia.
- Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría inédita. México. Departamento de Matemática Educativa.
- Thompson, P. (2008) *Conceptual analysis for mathematical ideas: some spadework at the foundations of mathematics education*. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A.Sépulveda (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol 1, pp. 45-64). Morélia, Mexico: PME. Available at <http://patthompson.net/PDFversions/2008ConceptualAnalysis.pdf>.
- Vargas, J. y González, M.T. (2007) Segmentos de la historia: la función logarítmica. *Matemática: Enseñanza Universitaria*, 15(2), 129-144
- Vargas, J., González, M.T., Llinares S (2010). ATLAS.ti como herramienta de Análisis de la Práctica docente: El caso de la Función Exponencial. En: España. *Memorias XIV Simposio de la SEIEM*. En imprenta.
- Vargas, J., González, M.T., Llinares S (2011). Descomposición genética de la función exponencial: mecanismos de construcción. En: Brasil. *Memorias del Evento 2011. XIII CIAEM*. Consultado el 3 de agosto de 2011. En: http://cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1292/154
- Wieleitner, H. (1932). *Historia de las Matemáticas*. Barcelona: Editorial Labor.