

CONFERENCIA LA CONVERSIÓN EN LA TEORÍA DE DUVAL: NOTAS PARA EXPLICAR LA COMPRESIÓN EN MATEMÁTICAS

Gloria Inés Neira Sanabria

Doctorado en Educación Matemática – Culminación de estudios

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

gneira@udistrital.edu.co; gerarlopez3@hotmail.com; nicolauval@yahoo.es

Resumen

¿Es la matemática un lenguaje?, ¿El simbolismo matemático es necesario e imprescindible para aprender matemáticas?, Cuando se modela un enunciado del lenguaje normal (o verbal), en símbolos, ¿se puede decir que se está “traduciendo” de un lenguaje a otro? ¿Aprender matemáticas es ser capaz de entender el lenguaje matemático y saberlo traducir, ó es más que eso?, Esa palabra **traducción**, ¿está bien utilizada? Es decir, ¿el problema de simbolizar o modelar es una **traducción**? Si así es, ¿tendríamos aquí un obstáculo para el aprendizaje? Se aborda esta problemática a la luz de la teoría de las Representaciones Semióticas de Duval.

Palabras clave: Representaciones Semióticas, Conversión, Comprensión, Aprendizaje, Traducción Simbólica.

Abstract

¿Is mathematics a language?, ¿Is the mathematical symbolism necessary and essential for learning mathematics?, When modeling a statement of ordinary language (or verbal), in symbols, can you say you are "translating" from a language to another? Learning mathematics is being able to understand mathematical language and to know how translate it, or is it something more?, That word translation, is well used? That is, the problem of symbolizing or model is a translation? If so, do we have here an obstacle to learning? Let's study this problems with the theory of semiotic representations of Duval.

Key words: Semiotics Representations, Translation, Understanding, Learning, Symbolic Translation

INTRODUCCIÓN

*Hermosa niña de ojos radiantes, dime, si tú has comprendido el método de inversión. ¿Cuál es el número que multiplicado por 3, agregándole las 3/4 partes del producto, dividiendo por 7 y disminuyendo en 1/3 el cociente multiplicado por sí mismo, disminuyendo 52, extrayendo la raíz cuadrada, sumándole 8 y dividiéndole por 10, da el número 2?
(BHASKARA, SIGLO XIII)*

*Todo conocimiento es inseparable de los fenómenos de representación. Las matemáticas siguen siendo incomprensibles para la mayoría de los alumnos, inclusive después de estar diez años en la escuela... Igual que en la vida nadie piensa por uno, nadie comprende como lo hace uno; **la comprensión es una cosa individual.** (Raymond Duval, Seminario Doctoral en Bogotá, Julio de 2008)*

La actividad matemática integra dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas: una que corresponde a un cambio de registro de representación y otra que consiste en utilizar las posibilidades de transformación propias a cada registro. Es el primer tipo de transformación lo que resulta más difícil y más desconcertante para los alumnos. Las dificultades para pasar de una representación en un registro a una representación en otro registro hace evidente la complejidad, de la articulación entre los registros de representación utilizados en matemática. Se plantea la siguiente tesis: la conversión es un proceso o transformación semiótica fundamental para la comprensión en matemáticas.

DESARROLLO

Afirma el profesor Duval que las matemáticas se distinguen de otras áreas del conocimiento, entre otros aspectos, en que el único acceso a ellas es de naturaleza semiótica, vía la representación. Conceptualiza entonces la representación y distingue entre representaciones externas y representaciones internas. Habla así de los registros de representación, y de los sistemas que las producen, los cuales determinan el contenido de la representación.¹³

Cada representación no presenta las mismas propiedades o características del objeto y recíprocamente, ninguna representación es completa y adecuada al objeto. Además, según la naturaleza del sistema productor de la representación, y el modo fenomenológico de producción de éstas, se habla entonces de representaciones semióticas, cuya producción es intencional, para distinguirlas de las representaciones neurales, cuya producción no es intencional sino automática, en tanto se involucran procesos motores y neuronales.

Desde esta perspectiva se postula en primer lugar que las representaciones en matemáticas son de naturaleza semiótica y que toda actividad matemática implica el recurso a representaciones semióticas porque los objetos estudiados no son accesibles perceptiva o instrumentalmente, como en otros ámbitos de conocimiento científico. Y en segundo lugar, postula su tesis acerca de lo que se ha llamado *la paradoja de Duval*: “sólo se puede acceder a los objetos matemáticos mediante sus representaciones, y no se puede confundir el objeto con su representación”: ¿Cómo evitar que esa (s) representación(es) se convierta en el mismo objeto, si sólo conozco de él lo que la representación me dice?¹⁴

Según Duval, las transformaciones de representaciones se pueden clasificar en dos tipos. Por una parte, el **Tratamiento**, como transformación de una representación en otra representación de un mismo registro, y por otro lado, la **Conversión**, como transformación de la representación de un objeto en un registro en otra representación del mismo objeto en otro registro. En palabras de Duval:

¹³ Una representación no puede ser comprendida independientemente del sistema que ha permitido producirla. Un signo puede significar algo sólo gracias a las relaciones de oposición que pueda tener con otros signos (Saussure). Un signo es tal sólo al interior de un conjunto de otros signos: no hay signo aislado o que pueda ser comprendido independientemente de otros signos. Y un Sistema Semiótico comporta reglas, más o menos explícitas, que permiten combinar los signos entre sí de tal manera que la asociación formada tenga también un sentido. Pag 43 Los problemas fundamentales del aprendizaje...

¹⁴ “Una representación es la propiedad de una cosa, en virtud de la cual, la cosa está, para la producción de un cierto efecto mental, en lugar de otra. La cosa que tiene este carácter, lo llamo representamen, el efecto mental o pensado, su interpretante, la cosa por la cual la representación aparece, el objeto” Peirce, Semiótica y Lógica, material fotocopiado para el seminario.

Dos características distinguen el papel central y particular de las representaciones semióticas en matemáticas. En primer lugar, no se las utiliza para evocar objetos, o para comunicar, sino para efectuar tratamientos, es decir, razonamientos, hacer cálculos, etc. Es decir, las representaciones semióticas sólo son importantes en la medida en que pueden transformarse en otras representaciones. En segundo lugar, se debe recurrir a tipos diferentes de representaciones semióticas, ya que cada sistema semiótico ofrece posibilidades diferentes de tratamiento. Es decir, el punto fundamental en la actividad matemática no es (solamente) la utilización necesaria de representaciones semióticas sino la capacidad para pasar de un registro semiótico de representación a otro registro.

En cuanto al aprendizaje, la teoría de Duval es radical al postular la comprensión en matemáticas como la habilidad para articular registros de representación, es decir se postula la conversión como el paso crucial en la comprensión.

Se plantea que cuando se le brinda al estudiante una pluralidad de representaciones del mismo objeto matemático, se están brindando mayores posibilidades de comprensión de ese objeto, pero enfatiza también que no basta la multi-representación¹⁵, es decir no es suficiente con representar de diversas maneras un objeto, si no se garantiza mediante el trabajo cognitivo, el reconocimiento del mismo objeto en los diferentes registros. Por ejemplo el objeto “mitad”, se puede representar como $\frac{1}{2}$, o como el 50%, o como “la mitad de” o como un cuadrado dividido en dos partes y sombreada una de ellas.

Es decir, el tratamiento, transformación en el mismo registro que permite producir información nueva, requiere, exige, unas competencias importantes, pero es la conversión la que demanda y a su vez garantiza posibilidades y competencias de comprensión reales y aún mayores.

Estas dos clases de transformaciones de representaciones yacen en el corazón de la actividad matemática. Por ello el primer requisito metodológico para analizar los problemas de la comprensión matemática de los estudiantes es diferenciar por completo estas dos clases de transformación.

La conversión y el tratamiento son fuentes totalmente independientes de problemas en el aprendizaje y se postula que la conversión es un problema cognitivo más complejo que el tratamiento. El problema que la mayoría de estudiantes encuentra es tan profundo que la conversión puede ser considerada como el **umbral** de la comprensión. ¡La conversión de representaciones semióticas aparece a menudo como un truco que no puede ser bien aprendido y que no es enseñado!

¿Por qué la conversión es crucial en la comprensión de los estudiantes?

En una aproximación dual a la actividad matemática, de una parte el contenido matemático conceptual y no semiótico, y por el otro las representaciones semióticas, el uno mental y el otro externo o material, la conversión

¹⁵ Claro que una multi-representación es deseable en nuestras aulas, en las que generalmente se trabaja con un modelo axiomático tradicional que todavía mantiene el esquema :definición, ejemplos, ejercicios. Cada objeto casi tiene una sola representación, en la gran generalidad de nuestras aulas de clase, así que ya de por sí postular la importancia de las diversas representaciones para un mismo objeto es ya importante, en cuanto cada una nos permite capturar unas u otras propiedades del objeto, pero Duval trasciende lejos esta mera enunciación al afirmar que la enseñanza debe basarse y propiciar la articulación de los registros, trabajar la conversión, favorecer el tránsito entre unas y otras y reconocer el mismo objeto en todas ellas.

emerge como el resultado de la comprensión conceptual. A este respecto Duval postula dos requisitos¹⁶ de la actividad matemática

- Las representaciones semióticas deben ser usadas necesariamente
- Los objetos matemáticos representados nunca deben confundirse con el contenido de las representaciones semióticas utilizadas

El primer requisito es importante por dos razones que resalta el estatus epistemológico particular de las matemáticas y que la distingue de las otras áreas científicas: los objetos de conocimiento (números, funciones, propiedades, relaciones,...) no son accesibles físicamente, ni a través de los sentidos ni mediante instrumentos. La única forma de acceder a ellos y trabajar con ellos es a través de signos y representaciones semióticas. Pero hay que resaltar que el papel principal no es representar los objetos matemáticos sino trabajar en ellos y con ellos, por ejemplo, el papel principal del sistema de representación de los números no es representarlos sino calcular, y los algoritmos son diferentes según el sistema y la notación utilizados, y de si el sistema tiene o no el signo cero. Es decir, los sistemas semióticos son utilizados principalmente para operar, o sea, para el tratamiento. Es por esto que se afirma que sin mediaciones semióticas no es posible la actividad matemática.

Por otro lado, el contenido de cada representación semiótica no depende solo de los conceptos o de los objetos representados, sino también de los sistemas semióticos de representación empleados. Y es aquí donde la mayoría de estudiantes se enfrentan con problemas, porque cambiar de un sistema a otro significa cambiar el contenido de la representación sin cambiar las propiedades matemáticas representadas. Así surge una pregunta *¿cómo el contenido matemático puede discriminarse de lo específico del sistema semiótico utilizado y de lo que no tiene relevancia matemática?* Fuera de las matemáticas no se tiene este problema porque el acceso a los objetos del conocimiento no es semiótico, son independientes de cualquier mediación semiótica.

Los problemas de comprensión con los que tropiezan la mayoría de los estudiantes, también son muy específicos del aprendizaje de las matemáticas, porque la transferencia de conocimientos y la comprensión siempre implican la conversión de representaciones, de hecho el isomorfismo matemático entre dos representaciones nunca involucra su isomorfismo cognitivo y por tanto no puede ser reconocido por los estudiantes.

Por supuesto que la comprensión no significa dar un salto desde el contenido de la representación hasta el concepto puramente matemático representado; consiste más bien en relacionar diversos contenidos de representación del mismo concepto. La comprensión en matemáticas requiere una coordinación interna entre los diversos sistemas de representación semiótica usados y sin desarrollar tal coordinación es imposible cruzar el umbral de la conversión de representación.

De esta manera, la habilidad para movilizar diversas representaciones conjuntamente, depende del desarrollo de esta coordinación, y la comprensión conceptual no es la condición de tal coordinación, sino que surge de su desarrollo. Así, lo más importante para la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación, sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos.

¹⁶ En los que subyace la paradoja cognitiva.

Acerca de la comprensión de los estudiantes

Duval manifiesta la importancia que tiene para los profesores el hecho de que los alumnos usen diferentes representaciones en el aprendizaje de conceptos matemáticos pero a la vez resalta que el tema principal es saber cuáles son los tipos de tareas y actividades para lograr este propósito.

Al parecer la idea más obvia es exponer **varias posibles** representaciones al **mismo tiempo**. Pero, desde un punto de vista didáctico estas actividades no conducen a ninguna parte, dado que toda representación comporta dos dimensiones semánticas: la del **contenido que representa**, y que es intrínseca al registro movilizado, y la del **objeto que representa**, que es independiente del registro que se moviliza.

Por ejemplo el contenido de una representación gráfica puede ser una recta, una parábola, un círculo, etc., que son tres contenidos visualmente diferentes y representan tres objetos matemáticos: una función lineal, una cuadrática y una relación que no es una función pero que caracteriza un objeto geométrico, como es el círculo. Se dice además que la yuxtaposición de dos representaciones de un mismo objeto en dos registros diferentes no puede resolver el problema cognitivo del reconocimiento del mismo objeto representado, porque las diferencias de contenido de las representaciones varían independientemente de los objetos representados. Así aparecen dos situaciones de reconocimiento en cierta manera opuestas:

- a) Reconocer el mismo objeto en dos representaciones cuyos contenidos son muy diferentes porque corresponden a dos registros diferentes, por ejemplo una ecuación de primer grado y el grafo de una recta.
- b) Reconocer dos objetos diferentes en dos representaciones cuyos contenidos parecen semejantes porque corresponden al mismo registro, como por ejemplo dos grafos que son visualmente rectas o parábolas, o entre dos enunciados de problemas que utilizan las mismas palabras y describen la misma situación real (como por ejemplo los problemas aditivos o los problemas de proporcionalidad, etc.).

Dada la complejidad de estas dos situaciones de reconocimiento, Duval llama la atención sobre la limitación de todas las actividades didácticas que se apoyan en una yuxtaposición simultánea de varias representaciones de un mismo objeto porque se limitan a un reconocimiento mediante asociaciones que son particulares en cada caso. Manifiesta también que la estructura de la tarea cognitiva que subyace en estas actividades no ofrece las condiciones que permiten tomar conciencia de esta doble discriminación necesaria para la conversión de las representaciones.

Otros investigadores como Radford, plantean el tránsito de la nominación "traducir", usada tantas veces para significar el paso del lenguaje natural al lenguaje simbólico por el término "narrativa simbólica". Una búsqueda rápida de lo que subyace en el término narrativa nos arroja lo siguiente: *las estructuras narrativas son estructuras lineales, donde hay a grandes rasgos una sola voz, o donde las voces corean al unísono, o al menos, en la misma dirección. La estructura narrativa central es el relato, pero se considera también, como estructura del orden narrativo, a la descripción.* No implica solamente pasar al lenguaje de símbolos, sino que la palabra narrativa implica una nueva manera de contar, de relatar, de describir, de interpretar, con unas reglas propias y diferentes de la anterior forma de narrar: se pasa, en efecto a un espacio semiótico nuevo.

Por ejemplo, abrir el paso a esa nueva narrativa implica darle giros a una frase del estilo "Kelly tiene dos dulces más que Manuel"¹⁷, pero darle tantas vueltas y re-decirla hasta llegar a una frase asertiva del tipo: "Kelly tiene lo que

¹⁷ La actividad matemática se basó en el siguiente problema verbal corto: "Kelly tiene 2 caramelos más que Manuel. José tiene 5 caramelos más que Manuel. Todos juntos tienen 37 caramelos"^[1]. El mismo problema verbal fue utilizado para generar tres

tenga Manuel más 2" es de una complejidad mayor que posibilita de alguna manera el paso a la solución del problema.

Los sujetos, los adjetivos cambian de una narrativa a otra, luego se comprende esta manera de nombrar lo que casi siempre hemos llamado "lenguaje de símbolos", significando con esto una traducción semántica y sintáctica directa de un lenguaje a otro, que una vez más Radford llama la atención acerca de lo erróneo de este imaginario. Es decir, nos lleva a la toma de conciencia que al cambiar de narrativa los personajes cambian, los héroes ya no son más los que eran (Camila, Manuel, José), sino que se emergen como protagonistas, como héroes las relaciones numéricas: son ellas las que pasan a ser los sujetos, porque la nueva narrativa abre un nuevo espacio semiótico.

El análisis de un problema tan sencillo como el de la experiencia que relata, tan común en todos los países, los textos y las aulas, deja ver que con toda razón hay dificultades y obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas, empezando por la comunicación, por la expresión de las situaciones, por la argumentación, por las "malas inferencias". También deja entrever el origen semiótico de tales dificultades o conflictos, utilizando el término de Juan Díaz Godino, en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición en matemáticas.

CONCLUSIONES

Esto nos lleva a reflexionar sobre cómo en la mayoría de casos en los que se pide a los alumnos que resuelvan problemas tipo historieta como el que se analiza en el texto, no se piensa en las implicaciones cognitivas que requiere su solución, sino que se espera que el estudiante pase casi que directamente del enunciado a la ecuación que lo resuelve.

Considero que es de un valor pedagógico y didáctico muy grande las propuestas y los análisis de estos investigadores para hacer esa transición, mostrando los procesos y dificultades que se dan antes de llegar a la ecuación, como son el modo de designación de los objetos del discurso a través del simbolismo algebraico y las operaciones que se realizan sobre los símbolos que designan los objetos, aspectos a los cuales se les pone muy poca atención en la enseñanza del álgebra.

Desde el punto de vista didáctico valoro el reconocimiento de frases comparativas en el enunciado de una situación y la estrategia de transformarlas en frases asertivas para facilitar y comprender la introducción de letras para designar las cantidades desconocidas y la elaboración de expresiones simbólicas. Este análisis es muy importante para ser discutido con los docentes, pues les podría dar herramientas para ayudar a los alumnos a comprender la resolución de este tipo de problemas. Suele ocurrir, en la mayoría de los casos que el alumno debe elaborar sus propias expresiones simbólicas y operar con ellas para formar la ecuación sin mayor comprensión de los procesos involucrados, lo cual los lleva a adivinar e inventar procedimientos, muchas veces equivocados.

problemas involucrando transformaciones en la expresión algebraica de los datos. En el problema 1, a los estudiantes se les pidió designar el número de caramelos de Manuel por x , elaborar una expresión simbólica para los de Kelly y José, y , luego, escribir y resolver una ecuación correspondiente al problema verbal. Los problemas 2 y 3 incluyen cuestiones similares. La diferencia es que, en el Problema 2, a los estudiantes se les pidió que designaran el número de caramelos de Kelly por x , mientras que en el Problema 3, se les pidió que designaran del número de caramelos de José por x .

BIBLIOGRAFÍA

Duval, R. (2006a). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar de registro de representación. *La Gaceta de la RSME.*, 9(1), 143-168.

Duval, R. (2006b). *La conversión des représentations: Un des deux processus fondamentaux de la pensée*. Grenoble: Presses universitaires de Grenoble.

Duval, R. (1988) Graphiques et Equations: l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1, 235–255.