Empleo de nuevas tecnologías para la solución de un problema sobre el concepto de trabajo: Bombear liquido de un tanque cilíndrico

Lely Gutiérrez Evelio Pérez Jonathan Ruiz
Corporación Educativa mayor del desarrollo Simon Bolivar

1. Introducción

El propósito de este proyecto es el de contribuir a un mejor conocimiento de la Teoría de trabajo mecánico, especialmente para la parte del cálculo de áreas bajo una curva,hem os podido observar que en el transcurso de varios años del tratamiento de este tema, que este tipo de concepto presentan problem as para el estudiante, que es, generalmente, el de visualizar el fenómeno físico, a partir del modelo matemático, para ello, se ha tratado con ejemplos de clarificar la teoría sin incidir demasiado en la complejidad matemática, dado que en estos tiempos de software de simulación y amplia información (Internet), el tener el concepto claro es mas importante que el resolver problemas mecánicamente, hay que mencionar a los estudiantes que en la vida profesional, la capacidad de resolver problemas entendiendo las causas de estos, es importante, que tratar de aplicar recetas que no se adecúen al problema que uno enfrenta y hagan que la situación se complique; en la vida de estudiante, esto último equivale a resolver problemas tipos,de memoria o mecánicamente.

2. Justificación

Dada la situación actual de los estudiantes, se hace entonces imprescindible el estudio de su problemática para proveer las posibles soluciones que ayudaran a la erradicación o reducción del problem a presentado. Para ello se tendrá en cuenta la justificación teóricapráctica de este propuesta.

Este proyecto no es un producto al azar, esta fundamentado en los conceptos de Física y calculo integral.

Las derivadas y las integrales tienen diferentes campos de aplicación, pero en este caso en particular, nos referiremos a los beneficios que se obtienen mediante el uso de las integrales; Para llevar a cabo estas aplicaciones, nos valimos del uso de dos herramientas elementales: Las integrales definidas y El Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

Al tener el conocimiento necesario sobre estos dos puntos se podrá llevar a cabo cualquiera de las aplicaciones aquí mencionadas, sumado claro,con las reglas individuales de cada caso en mención. De acuerdo a la problemática presentada se hace necesario utilizar como recursos la implementación de un software que facilitara las necesidades que requiera el estudiantado para el aprendizaje y m anejo del concepto de trabajo.

Con el software, se pretende clarificar la teoría sin incidir demasiado en la complejidad matemática. Ya que en estos últimos tiempos se denomina la era informática, no podemos de ignorar este tipo de herramientas que facilitan la comprensión del mundo sino el continuo cam bio de nuestra realidad, de esta manera se quiere llevar el aprendizaje de una form a dinámica y fácil de com prender.

3. Presentación

Este proyecto tiene la finalidad de desarrollar una aplicación en Visual Basic,que ayude en form a didáctica a determinar el trabajo que se requiere para vaciar el liquido P de un tanque de altura H y radio R. Proceso que es verificado por el estudiante de forma manual.

El objetivo de este software es contribuir y enriquecer la teoría asimilada en clase por el estudiante; mostrándole la causa y efecto que presenta este fenómeno al momento de presentarse en la vida cotidiana.

El propósito de este procedimiento es hacer que el estudiante obtenga la habilidad de identificar este proceso,y saberlo emplear en el momento adecuado durante su rutina diaria.

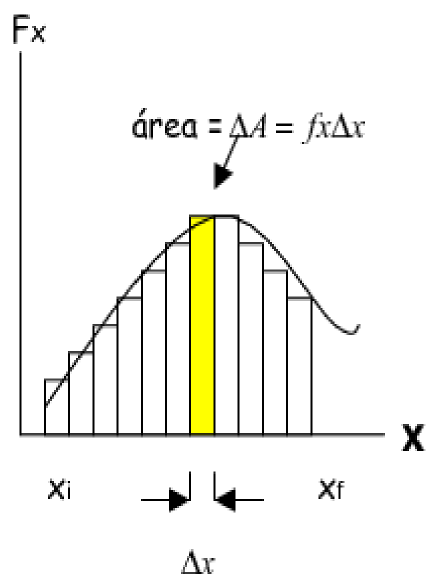
Además facilitarle la tarea de resolver cualquier problem a (trabajo) sin temor a equivocarse.

Para esto contamos con la teoría de trabajo variable que es la siguiente:

3.1. Trabajo Mecánico

1. Considere una partícula que se desplaza a lo largo del eje X bajo la acción de una fuerza variable $f(x)$. La partícula se mueve en la dirección de X_i a X_f.
Si la partícula experimenta un desplazamiento Δx muy pequeño, como se ilustra en la figura, entonces las componentes rectangulares en x de la fuerza fx,es aproximadamente constante a lo largo de este intervalo, y es posible expresar el trabajo hecho por la fuerza para este pequeño desplazamiento como

$$\Delta W = Fx\Delta x$$



Esta es el área del rectángulo sombreado en la figura. Si imagina que la curva fx vs. X se divide en un gran número de subintervalos, entonces el trabajo total efectuado por el desplazamiento de x_i a x_f es aproximadamente igual a la suma de un gran numero de tales termino:

$$w = \sum_{xi}^{xf} fx\Delta x$$

Si se permite que los desplazamiento se aproximen a cero, entonces el numero de los términos en la suma aumenta sin limites, aunque el valor de la suma se acerca a un valor definido igual al área bajo la curva delimitada por fx y el eje x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{xi}^{xf} fx\Delta x = \int_{xi}^{xf} fxdx$$

Esta integral definida es numéricamente igual al área bajo la curva fx vs. x entre xi y xf. Por consiguiente, se puede expresar el trabajo hecho por fx para el desplazamiento del objeto de xi a xf como:

$$\boxed{w = \int_{xi}^{xf} fxdx}$$

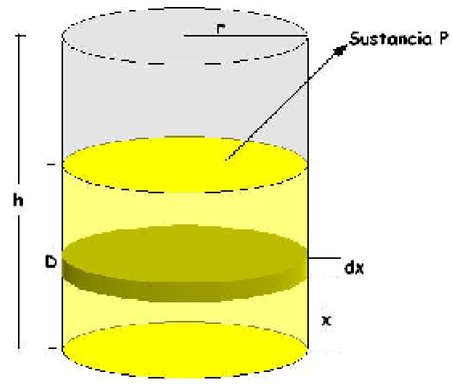
Si mas de una fuerza actúa sobre una partícula, el trabajo total es exactamente el trabajo hecho por la fuerza resultante. Si se expresa la fuerza resultante en la dirección x como $\sum fx$, en ese caso el trabajo total, o el **trabajo neto**, efectuado cuando la partícula se mueve de xi a xf es:

$$\sum w = w.neto = \int_{xi}^{xf} \left(\sum fx\right) dx$$

3.1.1. Aplicación

Consideremos un tanque cilíndrico de radio r y altura h,lleno con una profundidad D. ¿cuánto trabajo se hace para bombear un liquido P por encima del borde del tanque, que tiene una densidad w?

Solución:
La esencia de este problema es el hecho de que cada gota de liquido P debe elevarse desde su posición inicial hasta el borde del tanque y verterla por encima de el. El trabajo hecho en este proceso es el mismo para todas las gotas que están a la misma distancia por



debajo del borde. Esto sugiere que consideremos todo el liquido P localizada en una capa horizontal delgada del grosor dx ,a una altura x por encima del tanque, que escribamos el elemento de trabajo dW necesario para elevar toda esta capa hasta el borde del tanque y que calculemos el trabajo total en la forma habitual, sumando (integrando) estos elementos del trabajo cuando x aumenta desde cero hasta D, de modo que nuestra capa típica recorra todo el liquido P del tanque. Es claro a partir de la figura que el volumen de la capa es $\pi r^2 dx$, de manera que su peso es de $w\pi r^2 dx$, y el trabajo realizado para elevar esta capa a lo largo de la distancia $h-x$ hasta la parte alta del tanque es: $dW = w\pi r^2 dx(h-x)$.

El trabajo realizado para bombear todo el liquido P es por lo tanto;

$$\begin{aligned} W = \int dw &= w\pi r^2 \int_0^D (h-x)dx \\ &= w\pi r^2 \left(hx - \frac{1}{2}x^2 \right)\Big|_0^D \\ &= w\pi r^2 \left(hD - \frac{1}{2}D^2 \right) \end{aligned}$$

2. *(Cono)Un tanque tiene la forma de un cono invertido con una altura h y de radio R de la base se llena con liquido P que tiene una densidad w hasta una profundidad D. ¿Encuentre el trabajo requerido vaciarlo bombearlo toda el liquido hacia la parte superior del mismo*?.

Solución:

Midamos las profundidades desde la parte superior del tanque introduciendo una recta

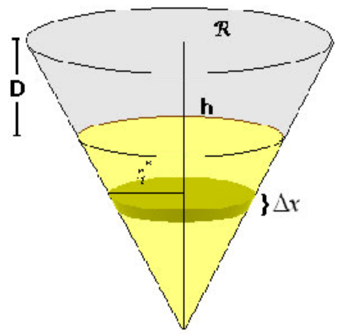


Figura 1.

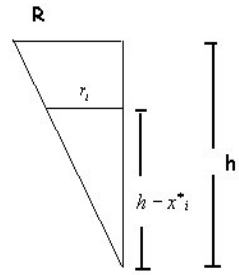


Figura 2.

coordenada vertical en al figura 1. El liquido P se extiende desde una profundidad D hasta una altura h por lo que dividimos el intervalo $[D, h]$ en n sub-intervalos con puntos extremos $x_0, x_1, ..., x_n$ y elegimos x_i en el i-ésimo subintervalo. Esto divide el liquido en n capas. Se obtiene una aproximación de la i-ésima capa con un cilindro circular con radio r y altura Δx que es equivalente a dx.

Podemos calcular r a partir de triángulos semejantes como indica la figura 2.

$$\frac{r_i}{h - x_i^*} = \frac{R}{h} \;\Rightarrow\; r_i = \frac{R}{h}(h - x_i^*)$$

Por lo tanto, una aproximación para el volumen de la i-ésima capa del liquido P es $V_i = \pi r_i^2 dx = \pi \frac{R^2}{h^2}(h - x_i^*)^2 \Delta x$ y, de este modo su masa es:

$$m_i = wV_i = w\pi \frac{R^2}{h^2}(h - x_i^*)^2 \Delta x$$

La fuerza requerida para elevar esta capa debe vencer la fuerza de la gravedad,por lo cual seria:

$$F_i = m_i g = w\pi \frac{R^2}{h^2}(h - x_i^*)^2 g \Delta x$$

Cada partícula de la capa de recorrer una distancia de mas o menos x_i^*. El trabajo W_i realizado para elevar esta capa hasta la parte superior es aproximadamente el producto de la fuerza F_i y la distancia x_i^*:

$$W_i = F_i x_i^* = \left[w\pi \frac{R^2}{h^2}(h - x_i^*)^2 g \right] x_i^* \Delta x$$

Con objeto de hallar el trabajo realizado para vaciar el tanque sumamos las colaboraciones de cada una de las n capas y tomamos el limite cuando $n \to \infty$.

$$\begin{aligned}
W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F_i x_i^* \Delta x = \int_D^h \left[w\pi \frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 g \right] x dx \\
&= wg\pi \frac{R^2}{h^2} \int_D^h x(h-x)^2 dx \\
&= wg\pi \frac{R^2}{h^2} \int_D^h x(h^2 - 2hx + x^2) dx \\
&= wg\pi \frac{R^2}{h^2} \int_D^h (xh^2 - 2hx^2 + x^3) dx \\
&= wg\pi \frac{R^2}{h^2} \int_D^h xh^2 dx - wg\pi \frac{R^2}{h^2} \int_D^h 2hx^2 dx + wg\pi \frac{R^2}{h^2} \int_D^h x^3 dx \\
&= \frac{1}{2} w\pi g R^2 x^2 - \frac{2}{3h} w\pi g R^2 x^3 + \frac{1}{4h^2} w\pi g R^2 x^4 \Big|_D^h
\end{aligned}$$

Reduciendo términos la ecuación queda de esta forma:

$$W = \frac{w\pi g R^2 x^2}{12h^2}(6h^2 - 8hx + 3x^2)\Big|_D^h$$

Evaluando los limites, el trabajo que da de la siguiente manera:

$$W = \frac{w\pi g R^2}{12h^2}(h^4 - 6D^2h^2 + 8hD^3 - 3D^4)$$