Cálculo del área, a través de determinantes

Rojas Gómez, Jorge Alejandro – Ariza Daza, Aura Alejandra

lalorojas10@hotmail.es– auri_9312@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

El presente informe, pretende mostrar el abordaje realizado para hallar el área bajo una curva sin utilizar las sumas de Riemann, esto con el fin de resaltar la posibilidad de utilizar otros procesos que quizás para muchos son desconocidos, sin embargo, como profesores e investigadores debemos reconocer diferentes maneras de abordar una situación, permitiéndonos así identificar algunos procesos de los estudiantes, al momento de trabajar bajo la metodología de resolución de problemas.

Palabras clave: Área, exhausción y determinantes.

1. Introducción

La presente experiencia de aula tiene lugar en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, dentro de la carrera de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y específicamente en el espacio de formación “Matemática del movimiento III”, la situación a abordar consistía en hallar el área de una figura curvilínea, con la condición de no utilizar las sumas de Riemann. Para abordar ésta, los estudiantes Resolutores decidieron ponerle otras condiciones, la primera fue que la figura iba a estar definida en el plano cartesiano y la segunda fue que ésta iba a ser una parábola, dando de ese modo inicio al proceso de abordaje.

2. Referente conceptual

Para el abordamiento de la situación es necesario entender por qué funciona el proceso de exhausción, para esto nos basaremos en la proposición I del libro X de Euclides, la cual nos dice *"dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor, una magnitud mayor que su mitad, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedara una magnitud que será menor que la magnitud dada",* permitiéndonos ver que este proceso no superara el área de la figura a medir.

También es necesario comprender la interpretación geométrica de los determinantes mostrada por Grossman & Flores (2012), en la cual nos permitirá evidenciar la relación entre el área de un paralelogramo y el determinante de una matriz (2x2), esta visión será adaptada para aplicarla en un polígono de n lados, conociendo las coordenadas de sus vértices, sin embargo se trabajará siempre ½ en la columna 3 porque de esta manera podemos realizar la medición de la figura a partir de triángulos, para esto es necesario plantear lo siguiente:

$$A = Det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \frac{1}{2} \\ x_2 & y_2 & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Se debe tener en cuenta que los vértices deben estar dados en un orden específico, el cual consiste en elegir un primero, el cual nos permitirá ordenar el resto, de acuerdo a su posición con respecto a éste en dirección igual al movimiento de las manecillas del reloj. El orden es importante debido a que este puede ser considerado un proceso de triangulación, con el fin de cubrir el área completa de la figura con n vértices.

3. Descripción de la experiencia

Para el abordamiento de la situación se buscó integrar un proceso de exhausción junto con una generalización haciendo uso de determinantes, para esto se partió de querer hallar el área de una parábola cuya función $f(x) = -x^2 + 2$, en el intervalo [-√2,√2]. Este método se basó en ir inscribiendo polígonos irregulares dentro de la parábola, de la siguiente manera:

Se partirá la base de la parábola en n partes $(n \geq 2)$, cada parte tendrá una longitud de $p_n = \frac{2\sqrt{2}}{n}$, y respectivamente cada coordenada estará dada por:

$$\left(\frac{\sqrt{2}(2i-n)}{n}, 0\right)\ con\ i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n$$

La cantidad de lados que ira teniendo el polígono irregular estará dado $2^n + 1$.

Cada vértice del polígono irregular estará dado por las siguientes coordenadas:

$$\left(\frac{\sqrt{2}(2i-n)}{n}, f\left(\frac{\sqrt{2}(2i-n)}{n}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}(2i-n)}{n}, \frac{-8i^2+8in}{n^2}\right)$$

Luego se partirá de una matriz $M_{(n+2)\,x\,2}$ con el fin de determinar el área, la cual estará dada por:

$$A \approx \frac{1}{2}\ Det \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}(2i-n)}{n} & \frac{-8i^2+8in}{n^2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\sqrt{2}(2n-n)}{n} = \frac{\sqrt{2}\cancel{n}}{\cancel{n}} = \sqrt{2} & \frac{-8i^2+8in}{n^2} = -\frac{8\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} + \frac{8\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} = 0 \\ \frac{\sqrt{2}(2i-n)}{n} & \frac{-8i^2+8in}{n^2} \end{vmatrix}$$

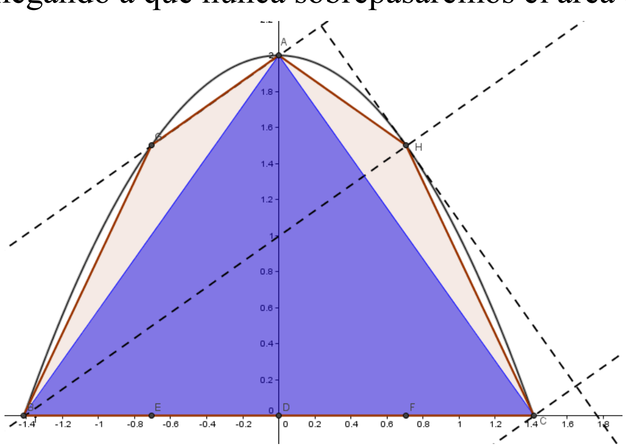
$$\approx \frac{1}{2}\left|a_{11}\cdot a_{22}+a_{21}\cdot a_{32}+\cdots+a_{n1}\cdot 0 - \left(a_{12}\cdot a_{21}+a_{22}\cdot a_{31}+\cdots+a_{n2}\cdot -\sqrt{2}\right)\right|$$

$$\approx \frac{1}{2}\left|a_{11}\cdot a_{22}+a_{21}\cdot a_{32}+\cdots+a_{n1}\cdot 0-a_{12}\cdot a_{21}+a_{22}\cdot a_{31}+\cdots+a_{n2}\cdot -\sqrt{2}\right|$$

Se llegó a establecer ésta nueva igualdad durante el proceso de calculación de áreas específicas, debido a que nos dimos cuenta que el ½ colocado en la columna 3, al momento de calcular el determinante lo podíamos sacar como un factor común, estableciendo lo siguiente, siendo concordante con lo realizado en el paso anterior.

$$A = Det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \frac{1}{2} \\ x_2 & y_2 & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}Det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{bmatrix}$$

En estos momentos se observaba el área calculada a través de los determinantes funcionaba correctamente, sin embargo, era necesario mostrar que esta aproximación, nunca iba a superar al área de la parábola, siendo necesario mostrar lo propuesto en la proposición I del libro X de Euclides, en la cual se observa que siempre al momento de ampliar la cantidad de lados de nuestro polígono iremos sustrayendo una parte mayor a la mitad, del pedazo faltante, llegando a que nunca sobrepasaremos el área de la parábola.



En este momento se estableció que se cumplían varias condiciones, no obstante, faltaba llegar a establecer la igualdad entre las dos áreas, siendo necesario realizar un proceso de generalización, con el fin de llevar la cantidad de lados de la figura a una cantidad tan grande que permita establecer el valor exacto del área, este proceso consistió en llevar la generalización al límite.

$$A = \frac{1}{2}\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{2}(2(i-1)-n)}{n}\cdot\frac{-8i^2+8in}{n^2}\right) - \left(\frac{-8(i-1)^2+8(i-1)n}{n^2}\cdot\frac{\sqrt{2}(2i-n)}{n}\right)\right|$$

Realizando diferentes procesos algebraicos se llega a establecer que el área es:

$$A = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

La cual se comprobó a través de un proceso de integración, el cual permitió evidenciar que la respuesta es correcta y exacta.

4. Logros y dificultades

Durante y después del abordaje a la situación, se establecieron los siguientes logros y dificultades, sin embargo diremos que toda dificultad se tendrá en cuenta como un logro que permite potenciar el ser profesional:

- Se logró reconocer otras maneras de calcular el área bajo una curva, sirviéndonos este método como base para entender diferentes acciones pensadas por los estudiantes, al abordar problemas de área en figuras curvilíneas, de las cuales no hay una forma específica y rápida de hacerlo.

- Se dificultó comprender la manera en que funcionaba los determinantes de una matriz al momento de calcular el área, sin embargo, se comprendió la existencia de un proceso de triangulación, que da como resultado el área de un polígono de n lados; resaltando la importancia de la modelación y matematización de los aspectos trabajados, durante cualquier situación.

- La resolución de problemas es un proceso que permite a los estudiantes utilizar sus conocimientos previos en pro de generar otros nuevos, sin embargo, requiere un gran compromiso y autonomía, siendo en ocasiones impredecibles las respuestas de los estudiantes.

5. Reflexiones

El abordaje de situaciones, trabajando bajo la metodología de resolución de problemas, tiene como intención el que los estudiantes pongan en manifiesto sus conocimientos previos con el fin de generar otros nuevos, esta generación de conocimientos si se realiza de una manera apropiada, teniendo presente la idea de modelación y matematización permitirán la generación de muchos aspectos matemáticos y un desarrollo significativo del pensamiento matemático, permitiendo a los estudiantes avanzar en su conocimiento tanto como lo quieran.

Por otra parte esta metodología nos permite relacionar nuestros procesos de abordaje con los que nuestros estudiantes realizan, evidenciando que el conocimiento pasa por muchas fases, unas en las cuales no sabemos qué hacer, y otras en las cuales podemos avanzar demasiado, siendo esta una constante vista no solo en nosotros, sino también en el desarrollo de la humanidad.

Esta metodología y específicamente la situación nos permiten observar que no existe una única manera de solucionar un problema, y que así como nosotros propusimos una manera de solución, existen muchas otras, quizás alguna más complejas o sencillas, sin embargo, debemos reconocerlas como mecanismo de solución, que pueden ser utilizadas por nuestros estudiantes, y mas no por esto debemos homogeneizarlos en la impartición y utilización de un solo método.

Referencias bibliográficas

- Euclides. (1996). Elementos de euclides libros X-XIII. Madrid: Credos.
- Grossman, S., & Flores, J. (2012). Álgebran lineal. México: Mc Graw Hill.