Un problema de generalización de patrones, una herramienta para desarrollar el pensamiento algebraico "un estudio de caso"

Sindy Lorena Gil Muñoz
sidneykimho@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Bogotá, Colombia)
Ángela María Arias Omaña
angelitaarias10@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Bogotá, Colombia)

Resumen

En esta experiencia se discute la emergencia del pensamiento algebraico y la presencia de los niveles de algebrización propuesta por Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, (2014) en las producciones matemáticas realizadas por 4 estudiantes de diferentes grados de escolaridad, ante un problema de generalización de patrones figúrales. Igualmente se presentan algunos resultados alcanzados por los estudiantes, los cuales se analizarán bajo algunos aspectos del pensamiento algebraico expuestos por Vergel, (2015) permitiéndonos reflexionar sobre la importancia de la aplicación de esta clase de tareas en la escuela. Finalmente, esto contribuirá significativamente en nuestra práctica educativa permitiéndonos ganar experiencia y hacer evidente lo que parece invisible para nuestros ojos.

Palabras clave: Niveles de algebrización, generalización, y patrones.

1. Introducción

La experiencia que se reporta en este documento surge como la continuación de un proceso realizado en el espacio de formación Didáctica de la Variación correspondiente al pensum de sexto semestre de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM) que ofrece la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC) Bogotá, donde se realizó una propuesta sobre la *generalización de patrones y el desarrollo del pensamiento algebraico*. A partir de dicho trabajo vimos la necesidad de ampliar el análisis realizado de las producciones dadas por los estudiantes ante la tarea de generalización de patrones, relacionado con los números triangulares (o suma de los números naturales); esto con el fin de categorizar dichas producciones s en los niveles de algebrización propuestos por Godino, et al. (2014). Finalmente problematizamos algunos aspectos tales como: ¿cómo se debe evaluar las producciones de los estudiantes en sus procesos de algebrización? y ¿qué tareas se deben presentar para "desarrollar el pensamiento algebraico en edades tempranas"?

Como se pudo observar en el documento de Rojas y Vergel, (2013), el desarrollo del pensamiento algebraico ha sido un tema de investigación para varios investigadores en didáctica del álgebra y se puede afirmar que existe un consenso respecto a la necesidad de potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico en *edades tempranas* afirmando que esto es posible y contradiciendo los métodos de enseñanza tradicionales.

En relación a lo anterior Godino, et al. (2014) establecen que algunas de las características del razonamiento algebraico que son sencillas de obtener por los niños aprovechando las fuentes de significados que están presentes en los contenidos matemáticos de la educación primaria y que deben ser conocidas por los maestros en formación son:

1. "Los patrones o regularidades, pueden ser reconocidas, ampliadas o generalizadas, y se encuentran de manera natural en las matemáticas.
2. El uso de símbolos permite expresar de manera más eficaz las generalizaciones de patrones y relaciones. Entre los símbolos destacan los que representan variables y los que permiten construir ecuaciones o inecuaciones…" (Godino, et al. 2014).

Partiendo de lo anterior, se considera importante trabajar con los estudiantes problemas que involucren generalizaciones de patrones para desarrollar el pensamiento algebraico. Por ello nos basamos en lo planteado por García, Gil y Arias (en prensa) tomando el problema de generalización de patrones que en su trabajo proponen.

De esta manera la intención de esta experiencia es evidenciar que los problemas de generalización de patrones promueven la emergencia de distintas formas del pensamiento algebraico, que varían ampliamente dependiendo de las maneras de proceder y de razonar, que se sustentan en los medios que utiliza cada niño en cada solución. Así pues, con este documento pretendemos analizar y clasificar las producciones de los estudiantes, en los niveles de algebrización de la actividad matemática escolar propuestos por Godino, et al., (2014). Confirmamos así que el pensamiento algebraico no es (ni debería ser) exclusivo de estudiantes de grados superiores de escolaridad, sino que más bien puede desarrollarse en edades tempranas desde la educación básica.

3. Referente conceptual

Para reconocer y argumentar las generalidades encontradas en la generalización de patrones figúrales (en este caso); los resolutores a quienes se les asignó la situación, pueden emplear hasta 5 tipos de lenguajes que le permiten expresar soluciones a las tareas propuestas, estos son:

- *Lenguaje natural:* Es el lenguaje que permite el acceso a la comprensión de las matemáticas. Por ejemplo: Sumar= aumentar, Restar= disminuir.
- *Lenguaje numérico:* Es el lenguaje mediante el cual se emplean números y operaciones, para dar respuesta a alguna situación planteada.: 5*5= 25
- *Lenguaje icónico:* Bruner (1984, citado por Guilar, 2009) propone, que este tipo de lenguaje consiste en la representación de cosas mediante una imagen o algún esquema. Por ejemplo: un dibujo puede representar un carro.

- *Lenguaje gestual:* Es el tipo de comunicación que se expresa a través del lenguaje corporal. Por ejemplo: as expresiones faciales, gestos, señas y además el contacto visual

- *Lenguaje Simbólico-literal o lenguaje algebraico*: Según Carrascal (S.f) es la forma en la que se traducen símbolos y números de lo que normalmente se conoce como lenguaje natural. Por ejemplo: manipular cantidades desconocidas empleando símbolos, simplificar expresiones, formular ecuaciones e inecuaciones y además permite el estudio de cómo resolverlas.

La generalización es uno de los criterios básicos para definir los niveles de algebrización. Godino, et al., (2014) establecen los siguientes niveles de algebrización de la actividad matemática escolar:

- *Nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico):* En este nivel intervienen objetos extensivos, los cuales son expresados mediante los *lenguajes natural, numérico icónico o gestual.* Pueden intervenir símbolos que describan a un valor desconocido.

- *Nivel incipiente de algebrización (nivel 1):* Intervienen objetos intensivos, su generalidad se reconoce mediante los *lenguajes natural, numérico, icónico o gestual.* Pueden intervenir símbolos que refieran a intensivos conocidos, pero sin operar con ellos.

- *Nivel intermedio de algebrización (nivel 2):* Intervienen indeterminadas o variables expresadas mediante el *lenguaje simbólico-literal* para referirse a los intensivos reconocidos.

- *Nivel consolidado de algebrización (nivel 3):* Se producen objetos intensivos representados mediante el *lenguaje simbólico-literal* y se opera con ellos. A su vez, se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia.

Estos niveles y tipos de lenguaje, son los que se tendrán en cuenta a la hora de realizar el análisis de las producciones realizadas por los 4 resolutores a las dos tareas propuestas.

4. Descripción de la experiencia

Un problema de generalización de patrones se presentó en distintas sesiones a 4 estudiantes con distintos grados de escolaridad (tres estudiantes universitarias y un estudiante de 7° grado de básica secundaria), la resolutora uno (R1) tiene 20 años y cursa séptimo semestre del proyecto curricular de ingeniería agronómica, ofrecido por la Universidad Nacional de Colombia; la resolutora dos (2) tiene 19 años y cursa sexto semestre del proyecto curricular de Artes plásticas y visuales, ofrecido por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas; el resolutor tres (3) tiene 13 años y cursa 7° grado de básica secundaria y la resolutora cuatro (R4) tiene 22 años y cursa cuarto semestre del proyecto curricular biología, ofrecido por la Universidad Nacional de Colombia.

A continuación, presentamos el problema propuesto:

Presentación 1 de la secuencia (resolutores 1 y 2):

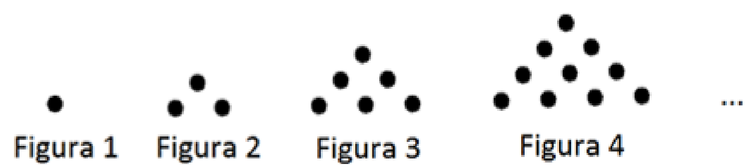

Figura 1. Presentación de la primera tarea

Presentación 2 de la secuencia (resolutores 3y 4)

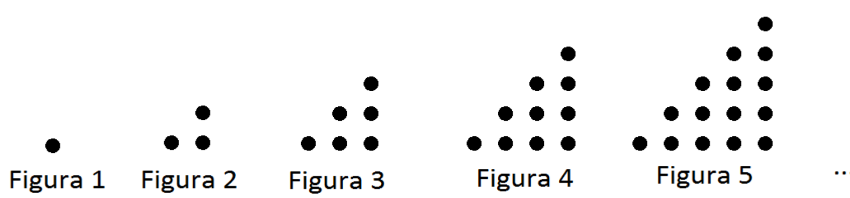

Figura 2. Presentación de la variación de la tarea tomada de García, Gil y Arias (en prensa), p. 1.

Las tareas y cuestiones propuestas para los resolutores fueron:

a) Construir la figura 5 o 6.

b) ¿Es posible determinar el número de puntos de la figura 5 o 6 sin tener que contarlos todos? Justifica

c) ¿Puedes hacer algo parecido a lo que has hecho para determinar el número de puntos de la figura 7? Justifica

d) ¿Puedes decir cuántos puntos tendrían las figuras 8, 10, 20 y 100 sin necesidad de dibujarlas?

e) ¿Puedes decir cuántos puntos tendría cualquier figura? ¿Por ejemplo la figura *a o n*?

Éstas preguntas fueron tomadas de García, Gil y Arias (en prensa) ya que plantean que *la instrucción debe ir más allá del desarrollo, en este sentido las preguntas deben tener un grado de complejidad mayor que activen y movilicen ciertas acciones en los niños, que en este caso deben responder a un proceso de generalización. p.2*

Se propuso a los resolutores un problema de generalización de patrones relacionado con los números triangulares (o suma de los números naturales) tomado de Arias, García y Gil (en prensa), el cual consistía en la presentación de una tarea de dos formas distintas (ver figura 1 y 2).

El R1 y el R2 tienen algunas dificultades en construir las demás figuras partiendo de la presentación 1 de la tarea (figura 1) y reconocen solo algunas regularidades que no solucionan las cuestiones pedidas. Ellas manifiestan que la secuencia de figuras no les permite encontrar más regularidades y no logran continuar con el proceso de solución del problema. En la segunda propuesta de la tarea (figura 2) se reorganizaron los puntos que componen las figuras con el fin de que el estudiante lograra percibir los patrones y regularidades presentes en la secuencia, y de esta forma dar cuenta de cómo afecta la presentación de la tarea en cuanto a las soluciones que pueden brindar los resolutores de la misma; como pudimos evidenciar los resolutores (R3 Y R4) logran identificar muchas más regularidades de las que nosotros mismos habíamos encontrado, produciendo una solución desconocida para nosotros del problema. De acuerdo a lo anterior podríamos afirmar que la forma en que se presenta la tarea ayuda u obstaculiza las producciones y razonamientos de los estudiantes, pues los R1 Y R2 no continúan con sus producciones, a diferencia de los R3 y R4 que cumplen con todas las cuestiones pedidas.

La primera tarea solicitada a los resolutores es construir la figura 5 o 6, dependiendo la sucesión de figuras presentada. Los 4 resolutores no tienen dificultades para construir dicha figura. Hasta el momento podemos reconocer que los resolutores tienen distintas formas de pensar y de actuar por ejemplo los resolutores R1 y R2 proceden a contar los puntos correspondientes a las cuatro figuras propuestas con el fin de hallar algún tipo de generalidad y comienzan a tratar a responder el punto c) de la tarea propuesta, los resolutores R3 y R4 proceden a contar los puntos que tienen la base y las filas de las figuras para hallar alguna generalidad; para que finalmente los resolutores: R1, R2, Y R4, construyen la figura solicitada encontrando una dependencia de la figura anterior con la siguiente; al contrario, el R3 construye la figura reconociendo la relación del número de la figura con la cantidad de puntos de la fila y la base de la figura, estableciendo finalmente que son la misma cantidad de puntos; dichas relaciones son expresadas por los resolutores mediante un *lenguaje natural*.

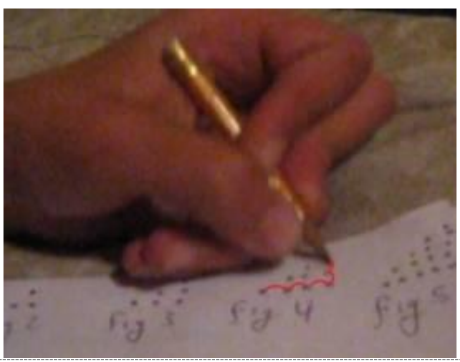

Figura3. Relación del número de la figura con la cantidad de puntos de la fila establecida por R3.

Figura 4. Relación de dependencia entre las figuras establecida por R1, R2 y R4.

Así pues, podemos decir que las producciones de los cuatro resolutores al resolver la primera tarea se encontrarían en un *nivel 1* (*incipiente de algebrización)* según Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014*)*, pues reconocen que hay ciertas variables (cantidad de puntos) que dependen del número de la figura o de la figura anterior, por lo tanto, se ha establecido un primer paso en la algebrización del razonamiento; sin embargo, éstas relaciones han sido reconocidas mediante el empleo de *lenguaje natural, numérico, icónico o gestual.*

Al ver que los resolutores han logrado establecer algunas generalidades en cuanto a los números de las figuras y la cantidad de puntos que posee cada una, se decide presentar la siguiente tarea ¿Hay alguna forma de saber cuál es el número de puntos de la figura, sin tener que contarlos?, con esto, la intención es movilizar a los resolutores a hallar más regularidades que le permitan construir figuras más grandes.

Los resolutores R1 y R2, comienzan a realizar operaciones con *expresiones simbólico-literales*, para poder establecer una generalidad entre la cantidad de puntos que puede poseer cualquier figura *n* (ver figura 5). Para posteriormente llegar a una expresión algebraica, en este caso R1 y R2, empiezan a trabajar con lo indeterminado, ya que según Radford (2011, citado en Vergel, 2015) la indeterminación y el carácter analítico están ligados a una regla la cual permite a los estudiantes tratar con cualquier figura de la secuencia presente en la tarea que ha sido presentada.

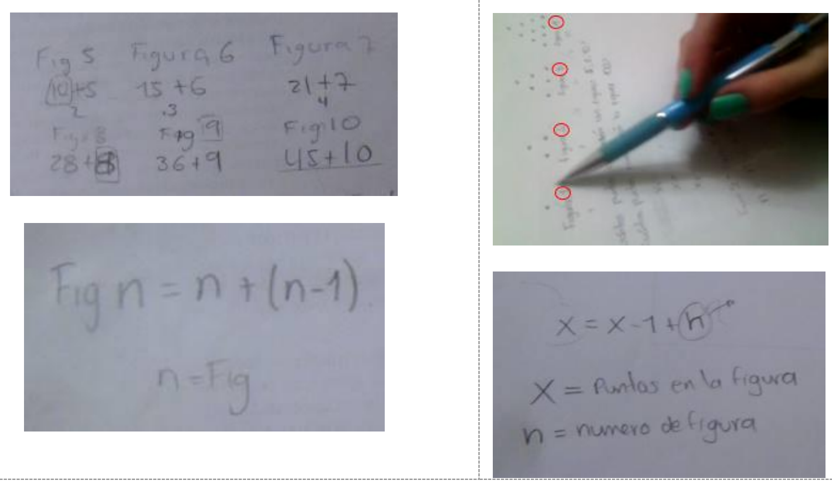

Figura 5. Producciones de R1 y R2 respectivamente.

R1 y R2 concluyen que la generalización que han hallado requiere de la cantidad de puntos que posee la figura anterior, mediante el siguiente dialogo R2 da cuenta de sus hallaszgos (ver transcripción 1.):

1	*R2*	(…) la figura x es igual a la figura anterior, o sea figura x menos 1, más el número de figuras [señalando con el lápiz los puntos correspondientes a la figuras 2y 3], pero no sé cuál sería el número de figuras.
2	*Investigador*	Pero cuando dices el número de figuras, ¿no hace referencia a la figura que vas a hallar?
3	*R2*	Sí, pero no sé cómo expresarlo. (…) Voy a hallar la figura 8, es

		igual a la figura anterior, ahh! Pero tendría que hallar la figura 7 primero, y me tocaría la sexta.
4	*Investigador*	Entonces y si te pido hallar la figura 100, ¿vas a tener que hallar la 99?
5	*R2*	Si y para hallar la 99, tengo que hallar la 98 y…

Transcripción 1. Dialogo entre el R2 y el investigador.

Por lo tanto, ambos resolutores no logran determinar una expresión para establecer una generalidad que permita hallar los puntos que contienen todas las figuras de la secuencia (ver figura 6.). En este caso las producciones de R1 y R2, se encuentran en una transición del *nivel incipiente de algebrización (nivel 1)* al *nivel intermedio (nivel 2)*, en el cual según lo establece Godino, et al. (2014, p.6) "*Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos,...*". Los cuales son establecidos mediante la relación hallada entre la cantidad de puntos de la figura y el número correspondiente a su posición en la secuencia.

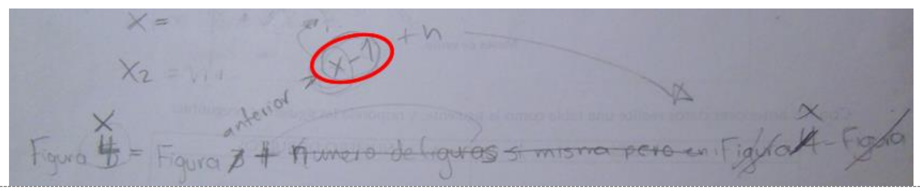

Figura 6. Expresión realizada por R2 a la solución de la tarea.

Por otro lado, R3 y R4 proponen completar un cuadrado agregando puntos simétricamente sobre la diagonal de la figura (ver figura 7.):

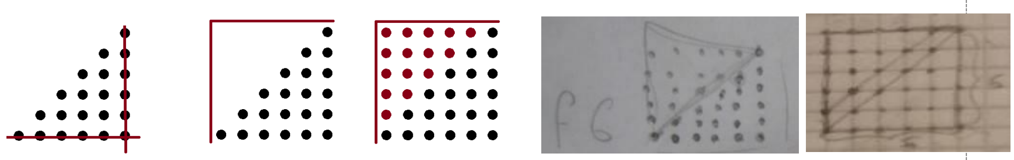

Figura 7. Producciones de R3 y R4 respectivamente.

El R3 y R4 concluyen que el número de puntos que hay sobre la diagonal es el mismo número de la figura, y la diagonal divide los puntos que hay sobre ella a la mitad. El R3 se ve en la necesidad de construir la Fig. 7 para observar mejor lo que sucede en la diagonal y obtiene que el número de puntos de la mitad del cuadrado es 24.5. Esa expresión decimal 0.5 le hace pensar que hay *mitades de puntos* sobre la diagonal que pueden juntarse para completar 3.5 puntos y que deben ser sumados a los 24.5 puntos para completar los 28 puntos de la Fig. 7, (Figura 8.)

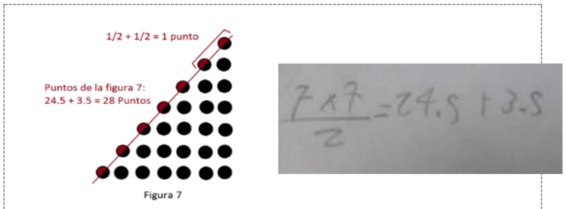

Figura 8. Producción de R3

Se puede decir que hasta el momento que la producción del R3 muestra señales de una generalización, él ha reconocido algunas regularidades que tienen todas las figuras y seguramente para cualquier figura que se le postule el estudiante identificará su número de puntos sin necesidad de realizar el conteo. He aquí otra evidencia del uso del pensamiento algebraico del estudiante; según Vergel (2015) los procesos de generalización de patrones están ligados al desarrollo del pensamiento algebraico. Al contrario, el R4 ha establecido la misma generalidad, pero sustenta su razonamiento mediante un *lenguaje natural*, expresando lo siguiente "*sería 20 por 20 más la mitad de 20, 10 no, teniendo en cuenta que por ejemplo aquí se sumaron 2 la mitad de 4 (señalando la fig. 4), y 3 la mitad 6 (señalando la fig. 6),* (ver figura 9). Para el R4 esa generalidad encontrada es importante y procede a comprobar ese razonamiento con distintas figuras.

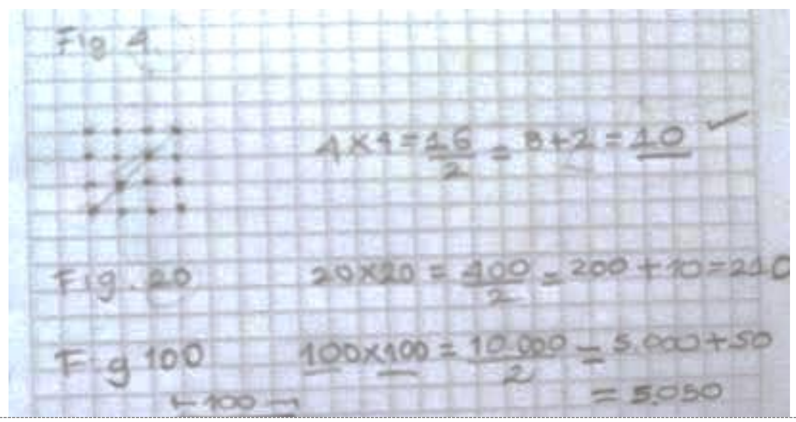

Figura 9. Producción de R4.

Hasta el momento el R3 y R4 no han hecho uso de un *lenguaje simbólico-literal* para expresar la generalización encontrada; al contrario, lo hacen a partir del *lenguaje natural* y señalamientos (*lenguaje gestual*), por ello se considera que sus producciones se encontrarían en un nivel intermedio o en tránsito, entre el *nivel incipiente de algebrización (nivel1)* y el *nivel intermedio de algebrización (nivel 2).*

Figura 10. Generalidad hallada a la secuencia por R3 y R4

,

Posteriormente se pregunta al R3 y R4 por la figura número *a* y *n* respectivamente, los resolutores manifiestan que se debe realizar el mismo procedimiento hecho con las figuras anteriores, por lo tanto, ya emplean un lenguaje *Simbólico-literal.* Aunque el R3 emplea el lenguaje literal para expresar lo que sucedía con una figura *a*, esto no quiere decir que haya comprendido que esa expresión correspondía a la formula general para hallar la cantidad de puntos de cualquier figura; pues el estudiante determina que *a* es un caso particular y no cree que las letras se puedan operar. De acuerdo a lo anterior las producciones del R3 se encontrarían en un nivel emergente entre el *nivel intermedio de algebrización (nivel2)* y el *nivel consolidado de algebrización (nivel3)*, ya que su actividad matemática no se encuentra ni en el uno ni en el otro.

Por el contrario, el R4 reconoce que la expresión encontrada con la figura *n* es una formula general para hallar el número de puntos de cualquier figura, ya que considera que *n* es un valor fijo, y el procedimiento que resuelve la situación es: "*multiplicar al número de la figura por sí mismo, dividir el resultado a la mitad y luego sumarle la mitad del número de puntos que hay en la diagonal*", que casualmente corresponde con el número de la figura. (Ver figura 10.) Las producciones del R4 finalmente se encontrarían en un nivel consolidado de algebrización, ya que explica su actividad matemática realizada, pues ha operado y planteado de manera simbólica la ecuación requerida por la secuencia de patrones.

5. Reflexiones y conclusiones

Es indispensable iniciar estos procesos de razonamiento algebraico desde grados básicos de la primaria, ya que distintos autores han demostrado que el álgebra temprana es posible; pues los estudiantes tienen las habilidades para construir conceptos cercanos al algebra partiendo de la generalización de patrones que permita potenciar y desarrollar el pensamiento algebraico.; pareciera ser que somos los profesores, que, en la mayoría de los casos, incapacitamos y obstaculizamos los desarrollos de los niños.

Reconocemos que el pensamiento algebraico puede emerger de distintas formas, y es labor del docente ser creativo a la hora de implementar las tareas en el aula (variaciones en la presentación de las tareas e innovación), además debe reconocer que los estudiantes tienen distintas formas de pensar y de resolver las tareas propuestas. Pues los estudiantes pueden hacer uso de diferentes recursos como lo son el *lenguaje natural, numérico, icónico o gestual,* para permitir evidenciar en sus producciones los niveles de algebrización planteados por Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi.

La situación presentada y las variaciones de la misma, junto con las preguntas planteadas permitió que los estudiantes pasaran por distintos niveles de razonamiento algebraico, considerando los que han sido planteados por Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi pues se logra evidenciar que los estudiantes usan distintos medios de expresión que le permiten reconocer fácilmente regularidades y relaciones, alcanzando generalizaciones. Este tipo de situaciones pueden llevarse al aula ya que permite a los estudiantes de distintos grados de escolaridad acercarse a construcciones del pensamiento algebraico para que posteriormente se re-signifiquen.

6. Referencias bibliográficas

Arias, A., García, M. y Gil, S, (2016). Generalización de patrones y el desarrollo del pensamiento algebraico. VI Encuentro nacional estudiantil en educación Matemáticas y Física: Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas en tiempos contemporáneos. Universidad de Antioquia. (En prensa)

Carrascal, H. (S.f). Del lenguaje común al lenguaje algebraico. Institución Educativa colegio Rafael Contreras Navarro.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. Enseñanza de las Ciencias, *32(1)*, 199–219.

Guilar, M. (2009). Las ideas de Bruner: "de la revolución cognitiva" a la "revolución cultural" *Educere,13 (44)* 235-241

Rojas, P. y Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. *Revista científica*. *Edición especial,* 760-766.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*,9(3),193-215.