El proceso de generalización a partir de pliegues de papel

David Beltrán
dma_dabeltrane903@pedagogica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional, (Bogotá, Colombia)
Kelly Duque
dma_kjduqueg708@pedagogica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional, (Bogotá, Colombia)
Camila Fernández
dma_cafernandezc459@pedagogica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional, (Bogotá, Colombia)
Brandon Suárez
dma_basuarezr037@pedagogica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional, (Bogotá, Colombia)

Resumen

La siguiente experiencia de aula busca mostrar las maneras en que razonan los estudiantes de un grado once cuando se enfrentan a un problema de generalización. Como primera medida se establece un marco teórico con base a ideas expuestas por Radford (2006), Radford (2008), Radford (2013), Rojas y Vergel (2013) y Vergel (2015) todas estas relacionadas con la generalización y el pensamiento algebraico, para resaltar los aspectos que se tendrán en cuenta en el posterior análisis que se realiza a dos de las producciones que hicieron los alumnos, que son presentadas como conclusiones del documento.

Palabras clave: Generalización, inducción ingenua, patrón, pensamiento algebraico.

1. Introducción

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) afirman que las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural que rigen los números y las figuras, son una forma apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado. Estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica, a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica.

Según Godino & Font, (2000) citados en Rojas y Vergel (2013) "El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades numéricas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar […], especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones […]."

Con base en esto se hizo la elección del siguiente problema:

Tomemos una hoja de papel y realicemos la acción de unir los respectivos extremos (doblar por la mitad), realizando el doblez respectivo (una marca sobre la hoja de papel), reitere esta acción, siempre en el mismo sentido; por ejemplo, al realizar dos veces la acción de doblar por la mitad, se obtienen 3 dobleces y a la tercera 7 dobleces.

a) ¿Cuántos dobleces se obtienen al realizar 5 veces la misma acción?

b) ¿7 veces?

c) ¿15 veces?

d) ¿100 veces?

El problema presentado anteriormente se expuso a estudiantes de grado once en el colegio Domingo Faustino Sarmiento ubicado en la localidad de Barrios Unidos, en el marco del desarrollo del espacio académico del curso de Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo del proyecto curricular Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional.

Durante el desarrollo de la actividad se hicieron grabaciones de audio a algunos estudiantes, esto dado que para utilizar video habría que pedir autorización a los padres y para este caso el audio entrega la misma fidelidad que el video. En dichas grabaciones se registró la manera en que el estudiante daba solución al problema. Posteriormente se realizaron las transcripciones de dichas grabaciones y junto con las hojas de cálculo se hizo el respectivo análisis.

2. Referente conceptual

En el desarrollo del curso Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo se abordaron diversos documentos relacionados, especialmente, con diversos tipos de generalización. Desde algunos de ellos se caracteriza la experiencia de aula, por ejemplo, teniendo en cuenta lo planteado por Rojas y Vergel (2013) como proceso de generalización, esto con el fin de evidenciar los estratos de generalidad que describe Radford (2006).

Entendemos pensamiento algebraico como forma particular de reflexionar matemáticamente. Esto es caracterizado por Radford (2006) mediante tres elementos:

El sentido de indeterminancia: objetos básicos como. Incógnitas, variables y parámetro; opuesto a la determinancia numérica.

La analiticidad: como forma de trabajar los objetos indeterminados; reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.

La designación simbólica de sus objetos: manera específica de nombrar o referir los objetos.

Teniendo en cuenta lo anterior se describirá la experiencia, intentando encontrar dichos elementos en el desarrollo del problema por parte de los estudiantes.

Adicionalmente, se tendrán en cuenta los tres problemas de la generalización propuestos por Radford (2013):

Fenomenológico: Se busca, con este ejercicio, un acercamiento a la intuición, la atención y la sensibilidad cuando los niños desarrollan el ejercicio.

Epistemológico: Se genera una conceptualización y el uso de palabras claves propias de este proceso. El niño identifica lo que le es útil y lo que no.

Semántico: se llega a la construcción de dicho concepto mediante símbolos que representen la variable en el ejercicio de los pliegues.

Durante el trabajo desarrollo por Radford (2008) se aborda lo llamado por el cómo inducción ingenua, la cual es la acción de dejarse llevar por el contexto en que están los estudiantes y dan certeza a una manera de proceder que no necesariamente es correcta.

3. Descripción de la experiencia

Los maestros en formación presentaron y explicaron la actividad, entregaron a los estudiantes 2 hojas, una para realizar los pliegues y otra para dar solución a las preguntas. Los estudiantes iniciaron su trabajo de manera autónoma mientras los maestros en formación daban respuesta a ciertas preguntas que iban surgiendo. En este momento se advirtió de 4 estudiantes que estaban haciendo avances significativos en la resolución del problema y se hizo una grabación de audio relaciona con la sustentación del trabajo que cada uno de ellos realizaba.

Los alumnos trabajaron de manera autónoma durante las dos horas que duró la sesión y cuando se iba a terminar se realizó una socialización donde otros estudiantes compartían sus modos de razonar frente al problema. Al finalizar la sesión se recogieron las hojas de trabajo de todos los estudiantes.

4. Reflexiones y conclusiones

Entre las grabaciones realizadas uno de los estudiantes (será llamado estudiante 1) dio solución al problema de la siguiente manera:

1	Estudiante 1	Pues yo lo que hice fue empezar a doblar y anotaba lo que me iba dando. Cuando doblé la tercera vez vi que se multiplicaba por dos y así lo hice hasta el número 11…
Transcripción 1. El primer método que el estudiante iba a usar para dar solución al problema.		

En este punto el estudiante ha encontrado un método para llegar al doblez número 15, es decir, su abducción ha generado un procedimiento, pero este no genera una regla que permita calcular cualquier término de la secuencia o por lo menos un término específico (Vergel, 2014). Hasta este punto, de acuerdo con Radford (2013), el estudiante 1 ha logrado una generalización aritmética.

Partiendo de lo anterior y de lo expuesto por Radford (2013) la intuición, la intención, la atención y la sensibilidad correspondientes del problema fenomenológico se ve presente en la evidencia del estudiante 1, porque encuentra los primeros valores que se le preguntan del proceso de doblar la hoja de manera intuitiva.

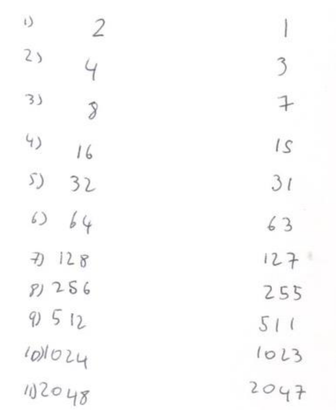
Por otro lado, se evidencia el problema epistemológico porque cuando el estudiante 1 expresa. "*Cuando doblé la tercera vez vi que se multiplicaba por dos*" se observa que el encontró una propiedad, la cual era, multiplicar por dos al número anterior hasta llegar a la iteración solicitada.

La conversación continuó como se muestra a continuación:

1	MF	¿Cómo así? ¿Qué es lo que estabas anotando?
	Estudiante 1	Pues mire, en esta columna [señalando la primera columna de la imagen 1] puse los dobleces, en esta [señalando la segunda columna de la imagen 1] puse las… digamos partes que me iban dando. Aquí… en el doblez 10 me dio 1024 y cuando lo multipliqué por 2 me dio 2048, me acordé de un juego que se llama así y yo ya sabía que ese juego está relacionado con las potencias de dos. Ahí ya verifiqué que los números anteriores también salían si los sacaba así… entonces cogí el 2 y lo elevé a la 15 y me dio 32.768 y pues ya.
	MF	¿Y ese es el número de dobleces?
	Estudiante 1	Pues sí
	MF	Bueno, verifiquemos… coge otra hoja y dóblala una vez ¿Cuántos dobleces te quedan? Recuerda que los dobleces son las líneas que quedan.

	Estudiante 1	[dobla la hoja] Mmmm me queda uno
	MF	¿Y cuántos quedan si lo doblas por segunda vez?
	Estudiante 1	Me quedan 3… Ah, pues le resto uno a lo que me había dado y ya ¿Sí?
	MF	Aja, ¿Y entonces para el doblez 100?
	Estudiante 1	Pues 2 a la 100 menos 1
	MF	¿Y para el doblez número n?
	Estudiante 1	Pues dos a la n menos uno.

Transcripción 2. Aquí se muestra como el estudiante da otro rumbo a la solución del problema.



1)	2	1
2)	4	3
3)	8	7
4)	16	15
5)	32	31
6)	64	63
7)	128	127
8)	256	255
9)	512	511
10)	1024	1023
11)	2048	2047

Imagen 1. Hoja de trabajo del estudiante 1

El estudiante 1 encontró la regularidad presente en el número de regiones que surgían en cada doblez pero, como afirma Vergel (2015), “capturar la regularidad no es suficiente para garantizar la generalización…” y evidentemente el estudiante no logra una generalización algebraica puesto que cuando encuentra la expresión que le permite determinar el valor de cualquier término de la secuencia, procede a hacer una comprobación con casos finitos. Adicionalmente, la expresión que el estudiante 1 encuentra, no proviene de la comunalidad de los primeros casos (Vergel, 2014) por lo tanto a pesar de que presenta una fórmula esta no es deducida, por esto es posible afirmar que ha logrado un tipo de inducción, que Radford (2008) denomina, ingenua.

1	Estudiante 2	Lo que yo hice doblar la hoja y empezar a anotar las líneas que me quedaban y al lado los pedazos que me quedaban [refiriéndose a las regiones en las que se dividía la hoja después de doblar]. En el número de líneas yo no veía nada, pero miré el número de pedazos y me di cuenta que eran potencias de dos y pues la diferencia entre las líneas y los pedazos siempre es de uno entonces para saber el número de líneas hay que restar siempre uno, o sea, hay que hacer esto [señalando la ecuación que se muestra en la imagen dos]
Transcripción 3. El estudiante da solución al problema.		

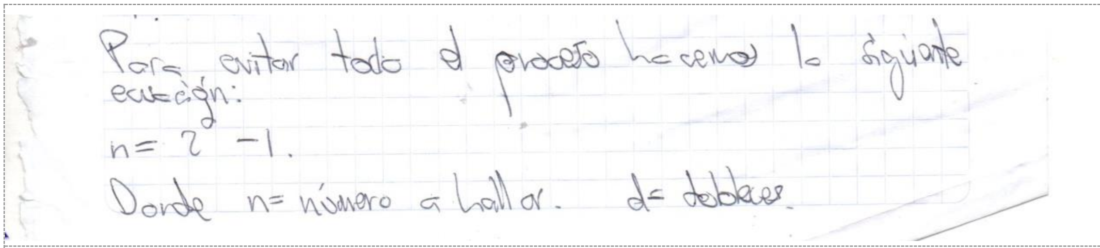


Imagen 2. Hoja de trabajo del estudiante 2

Como primera medida el estudiante 2 presenta una expresión que le permite calcular cualquier término de la secuencia por lo que es posible afirmar que el alumno generalizó. Esta generalización no alcanza a ser de tipo algebraico ya que el estudiante 2 no tiene un nivel de formación que lo impulse a usar su hipótesis (la fórmula que halló) como tesis para iniciar una demostración.

El modo en que el estudiante presenta la expresión que ha encontrado da a entender que ve la situación como una relación funcional donde **n** (número de dobleces) depende de **d** (dobleces), es decir, el estudiante 2 se ha dado cuenta que a medida que cambia el número de doblez que está haciendo cambia la cantidad de dobleces resultantes.

Referencias bibliográficas

Ministerio de Educación Nacional (2006) *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá, Colombia.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective, PME-NA, Vol. 1, 2-21.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. En: *ZDM Mathematics Education, 40*, 83-96

Radford, L. (2013) Concerning three problems of generalization. En: *Investigación en Didáctica de la Matemática.* Granada, España.

Vergel, R (2014) *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Tesis de doctorado**.** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá D.C., Colombia.

Vergel, R (2015) ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. *Uno revista de Didáctica de las Matemáticas, 68,* 9-17.

Vergel, R. & Rojas, P. (2013) Procesos de generalización y pensamiento algebraico. *Revista Científica*. Bogotá D.C., Colombia.