

# Aplicación unidad didáctica “distancia entre dos puntos”

**Jonathan Tello Cardona**

ja.tello11@uniandes.edu.co

Secretaria de Educación Distrital, (Bogotá, Colombia)

**Yenny Moreno**

yc.moreno10@uniandes.edu.co

Secretaria de Educación Distrital, (Bogotá, Colombia)

**Mónica Cáceres**

m.caceres10@uniandes.edu.co

Gobernación de Cundinamarca, (Suesca, Cundinamarca)

**Ingrid Vargas**

ij.vargas11@uniandes.edu.co

Colegio IED Santa Bárbara, (Bogotá, Colombia)

## Resumen

En el desarrollo de la Maestría en Educación Matemática (MAD3) de la Universidad de Los Andes, un grupo conformado por cuatro profesores de matemáticas diseñamos, implementamos y evaluamos la unidad didáctica denominada “Cálculo de la distancia entre dos puntos”. El diseño de la unidad didáctica se enmarca desde el análisis didáctico que se divide en cinco partes. Para el diseño tuvimos en cuenta el análisis de contenido que permite la elegir el tema, determinar la estructura conceptual, establecer los sistemas de representación, la fenomenología y documentos curriculares nacionales e institucionales en los que se involucra el tema. En segundo lugar, encontramos el análisis cognitivo mediante el cual realizamos las previsiones para el desarrollo de la unidad didáctica teniendo en cuenta la dimensión cognitiva y afectiva. En tercer lugar, tenemos el análisis de instrucción que corresponde al diseño de cada una de las tareas de

aprendizaje para que se ajusten a los objetivos propuestos, a las expectativas de aprendizaje de nivel superior, las expectativas de tipo afectivo y se entrelacen por medio de la secuencia de tareas. En cuarto lugar, encontramos el análisis de actuación en el cual diseñamos los instrumentos que permiten evaluar el desarrollo de la unidad didáctica, estos instrumentos son diario del estudiante y diario del profesor. Finalmente, la evaluación de la implementación de la unidad didáctica por medio del sistema ACE<sup>4</sup> que se alimenta de la información que se recopila de la implementación de cada una de las tareas de aprendizaje. La implementación de la unidad didáctica se llevó a cabo en el Colegio Santa Bárbara ubicado en la localidad de Ciudad Bolívar con estudiantes de grado octavo.

**Palabras clave:** Análisis didáctico, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción, sistemas de representación, fenomenología, dimensión cognitiva, dimensión afectiva, tareas de aprendizaje, expectativas de aprendizaje de nivel superior, motivación y expectativas de tipo afectivo.

## 1. Introducción

La construcción de la unidad didáctica surge de las necesidades que presentan los estudiantes al abordar el concepto de distancia entre dos puntos. Este concepto involucra distintos temas de las matemáticas escolares tales como: (a) el teorema de Pitágoras, (b) el teorema de Thales, (c) la fórmula de la distancia y (d) la distancia en la recta numérica. Con el diseño de la unidad didáctica permitimos el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes —de acuerdo con los estándares básicos de competencias en matemáticas (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 2006)—, y a las capacidades matemáticas fundamentales y procesos matemáticos que están establecidas en el marco PISA 2012 (Ministerio de educación cultura y deporte, 2013).

Para la planificación de la unidad didáctica, el diseño de los instrumentos, los métodos de evaluación y el análisis de resultados de la misma nos basamos en el análisis didáctico del tema. Según Gómez (2002) “el diseño,

---

<sup>4</sup> El sistema ACE es un sistema en Excel para el registro y análisis de la información, que está conformado por un grupo de libros (archivos) que contemplan distintos aspectos de la implementación.

implementación y evaluación de una unidad didáctica está basado en el procedimiento de la organización de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde cuatro análisis: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de evaluación” (p. 20). Teniendo en cuenta lo anterior, diseñamos la unidad didáctica sobre el cálculo de la distancia entre dos puntos según el análisis didáctico. La implementación de la unidad didáctica la realizamos en la IED Santa Bárbara ubicada en la localidad de Ciudad Bolívar en Bogotá.

Luego de la implementación y el proceso de registro de datos abordamos la evaluación de la unidad didáctica desde dos dimensiones: cognitiva y afectiva. En la primera, analizamos el desarrollo de las expectativas de aprendizaje de nivel superior —capacidades matemáticas fundamentales y procesos matemáticos incluidos en el marco PISA 2012— y el logro de objetivos de aprendizaje. Analizamos la segunda dimensión desde las expectativas de tipo afectivo y los aspectos que afectan la motivación.

Con el diseño de la unidad didáctica contribuimos a las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias matemáticas y matematización y a los procesos matemáticos de formular e interpretar. De acuerdo con los resultados obtenidos la unidad didáctica se fortalecieron las expectativas de tipo afectivo y los factores que afectan la motivación que se plantearon en el diseño previo

## 2. Referente conceptual

El análisis didáctico está compuesto por cuatro análisis: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación. Según Gómez (2015) “Cada uno de estos análisis se centra en una de las dimensiones del currículo y todos tienen un objetivo común: contribuir al diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas sobre temas concretos de las matemáticas escolares” (p. 1). El análisis de contenido se relaciona con la dimensión conceptual de las matemáticas. Este análisis nos permite realizar la delimitación del tema a través de tres organizadores del currículo: (a) estructura conceptual, (b) sistemas de representación y (c) fenomenología (Cañadas y Gómez, 2014). El análisis cognitivo que permite realizar una descripción de lo que esperamos que el estudiante aprenda

acerca del tema y sobre las previsiones acerca de la manera en que el estudiante va a lograr ese aprendizaje. En la unidad didáctica abordamos tres niveles de expectativas de aprendizaje —nivel superior, nivel medio y nivel inferior—. Como expectativas de aprendizaje de nivel superior, identificamos los procesos matemáticos (formular, emplear e interpretar) y las capacidades matemáticas fundamentales (diseño de estrategias para resolver problemas, matematización, comunicación, razonamiento y argumentación, utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico, representación, y utilización de herramientas matemáticas) propuestas en el marco PISA 2012. En el nivel medio, ubicamos los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica y en el nivel inferior y de acuerdo con González y Gómez (2015) proponemos las capacidades que son considerados como “los procedimientos rutinarios que el estudiante activa a lo largo de la unidad didáctica” (p. 11). Por ejemplo el objetivo<sup>5</sup> 1 está relacionado con lo propuesto por el MEN (2006) en donde se utiliza “el estándar resuelve problemas y simplifica cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos” (p. 86).

Luego, en el análisis cognitivo del tema, presentamos los objetivos de aprendizaje, las capacidades y las dificultades y errores relacionados con el tema. Además, caracterizamos los objetivos desde los grafos de criterios de logro. Por último, mostramos las expectativas de tipo afectivo organizadas según el enfoque que entrelaza motivación y aprendizaje. En el análisis de instrucción, presentamos la estructura del diseño previo de la unidad didáctica. Describimos las siete tareas de aprendizaje. Gómez y Mora (2015), mencionan que “una tarea de aprendizaje es aquella que el profesor propone a los estudiantes con el propósito de contribuir a que logren las expectativas propuestas y superen sus limitaciones de aprendizaje” (p. 8). Tuvimos en cuenta los elementos de una tarea de aprendizaje para diseñar las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica sobre el cálculo de la distancia entre dos puntos (a) requisitos, (b) metas, (c) formulación, (d) materiales y recursos, (e) agrupamiento, (f) interacción, (g) temporalidad y (h) previsiones. Adicionalmente, se diseñó la secuencia de tareas para la implementación iniciando con la evaluación diagnóstica y terminando con una evaluación final.

---

<sup>5</sup> Los objetivos para la unidad pueden consultarse en <https://goo.gl/4OqCpZ>

En el análisis de instrucción se diseñan los instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información. Para la recolección de la información, diseñamos las tareas de evaluación (diagnóstica y examen final) y contemplamos los registros del desarrollo de las tareas de aprendizaje por parte de los estudiantes. También, diseñamos los formatos del diario del estudiante y diario del profesor, para registrar sus percepciones durante la implementación. Elaboramos el sistema de evaluación de la unidad didáctica que nos permitió dar cuenta del nivel de desempeño de cada estudiante. Para el registro de la información obtenida con los instrumentos de recolección de información, la generación de resultados y el análisis de datos, empleamos el sistema ACE —Análisis de Consecución de Expectativas—. Por último, se realiza un análisis de los resultados de la implementación de la unidad didáctica y se extraen las fortalezas y debilidades para realizar modificaciones que mejoren la unidad didáctica.

### 3. Descripción de la experiencia

La implementación de la unidad didáctica se llevó a cabo en el año 2015 en la IED Santa Bárbara, ubicada en la localidad de Ciudad Bolívar en Bogotá. La institución cuenta con una población aproximada de 2000 estudiantes de preescolar, básica primaria, secundaria y media, cuyo estrato socioeconómico es 1 y 2. El curso seleccionado fue de grado 8° y estaba conformado por 19 estudiantes (8 niños y 11 niñas) cuya edad promedio era de 14 años. El desempeño académico de los estudiantes en el área de matemáticas no es sobresaliente; en promedio, el 60% mantienen un rendimiento académico básico, mientras que el restante presenta un desempeño bajo.

En la implementación de la unidad didáctica, iniciamos con la presentación del tema a los estudiantes, mostramos los tres objetivos de aprendizaje —con sus respectivas tareas de aprendizaje y metas— y los instrumentos de recolección de información. Luego, explicamos a los estudiantes la manera en que desarrollaríamos la unidad didáctica, a partir de la evaluación diagnóstica, la secuencia de tareas y el examen final, e hicimos énfasis en el trabajo individual, grupal, el uso de aplicativos y el sistema de evaluación abordado desde los aspectos cognitivo, procedimental y actitudinal.

La implementación de la unidad didáctica inició con la aplicación de la tarea diagnóstica<sup>6</sup>. La tarea diagnóstica que diseñamos contiene trece puntos que están relacionados con los conocimientos previos que debe tener el estudiante para iniciar con el desarrollo de las tareas de aprendizaje. Por ejemplo, con el literal 1, buscamos que el estudiante realice operaciones con números racionales, con el fin de indagar por el conocimiento previo de realizar operaciones utilizando los números reales.

Luego, continuamos con la aplicación de las siete tareas de aprendizaje<sup>7</sup> y la recolección de información por medio del diario del profesor y del estudiante. A continuación, hacemos una descripción de cada una de las tareas de aprendizaje. Para el objetivo 1, planteamos dos tareas de aprendizaje relacionadas con la subestructura de valor absoluto. La primera, la tarea Ruta H3, está relacionada con la utilización del aplicativo Google Maps para hallar la distancia en la distancia de un recorrido en línea recta. La segunda, la tarea Mapa, centrada en utilizar la distancia taxi en el plano cartesiano a través del Geoplano. Para el objetivo 2, proponemos dos tareas de aprendizaje, la primera denominada Antena que está orientada a calcular la distancia más corta entre dos ciudades. La segunda denominada Recorrido, está orientada a calcular la distancia más corta entre dos puntos al utilizar la fórmula de la distancia. También incluimos el uso del Geoplano como un material para representar información de un contexto real. La tarea Recorrido y Antena permiten que el estudiante pueda interpretar, relacionar y utilizar distintas representaciones de una situación en la cual se calcula la distancia más corta entre dos puntos. Asimismo, buscamos que el estudiante pueda valorar dos o más representaciones con relación a una situación.

Para el objetivo 3, proponemos tres tareas de aprendizaje. La primera, la tarea Ruta, tiene como meta emplear el teorema de Pitágoras en situaciones de la vida real a través de la elaboración de representaciones en el software Geogebra. La segunda, tarea Fotografía, se centra en utilizar el teorema de Thales en la resolución de problemas relacionados con la medida de segmentos en figuras semejantes. Finalmente, la tarea Simulacro concentra la utilización de los teoremas de Pitágoras y Thales para resolverla.

---

<sup>6</sup> Según Romero y Gómez (2015), "la tarea diagnóstica fue diseñada para indagar si los estudiantes manifiestan tener los conocimientos previos para comenzar con la implementación de la unidad didáctica" (p. 14),

<sup>7</sup> La ficha de tareas de aprendizaje aplicadas en la implementación de la unidad didáctica pueden consultarse en: <https://goo.gl/Ov6gZG>

En el momento de aplicar la unidad didáctica, identificamos que la secuencia de tareas género en los estudiantes la falta de comprensión de algunos términos en la tarea Antena relacionados con las alturas sobre el nivel del mar. Esta dificultad nos llevó a modificar la formulación, de la tarea Antena e incluir la representación gráfica de la situación, reorganizar el agrupamiento, debido a que no se cumplía con las previsiones y las expectativas de aprendizaje de nivel superior y de tipo afectivo que se habían propuesto inicialmente.

Después de la implementación, recolección y análisis de los datos obtenidos mediante el sistema ACE. Identificamos que la tarea Ruta H3 contiene debilidades respecto a algunos puntos porque son repetitivos, y están centrados en el cálculo de la distancia de un punto a otro en la recta numérica. El contexto de la tarea no fue cercano ya que los estudiantes no reconocieron los lugares asociados con la ruta (Transmilenio) planteada. Y finalmente en la implementación el manejo del aplicativo Google Maps generó distracción a los estudiantes porque estaban más interesados en la exploración del aplicativo que en validar las respuestas obtenidas. En cambio para la tarea Mapa, identificamos fortalezas respecto a la interacción entre los estudiantes y el uso del Geoplano ya que permitió seleccionar estrategias, explicarlas y justificarlas de acuerdo con el contexto. Además, el agrupamiento generó un espacio de discusión y validación de estrategias para reconocer la relación entre el contexto del problema y la solución. Finalmente, los estudiantes realizaron reflexiones sobre las soluciones matemáticas y proporcionaron argumentos válidos mediante el uso del Geoplano.

En las tareas de aprendizaje asociadas al objetivo 2, se presentó debilidad en la formulación de la tarea Antena porque contiene términos desconocidos para los estudiantes (metros sobre el nivel del mar) y los literales de la formulación le indicaban al estudiante la estructura matemática que debía utilizar para resolver la situación. Solo planteamos la interacción en el literal 4, por lo que se vio afectada la interpretación de resultados y la valoración de dos o más representaciones con relación a la situación. En las previsiones, no tuvimos en cuenta un tiempo específico para la socialización sobre la utilización de la fórmula de la distancia por lo cual no generamos un espacio para interactuar, articular una solución, mostrar el trabajo asociado y presentar los resultados matemáticos obtenidos.

Aunque la tarea Recorrido presenta fortalezas en su implementación observamos que en la formulación los literales 4 y 5, no permitieron que el estudiante activara mecanismos para la solución del problema desde el análisis de la representación gráfica. Las tareas de aprendizaje asociadas al objetivo 3, las debilidades las encontramos en la redacción de los literales 1, 2 y 6 de la tarea Ruta porque llevó al estudiante a realizar el mismo procedimiento por lo que no tuvo la necesidad de diseñar una estrategia de solución. El literal 8 no contribuyó a que el estudiante utilizara el teorema de Pitágoras para explicar, defender o facilitar una justificación de la necesidad de emplearlo para calcular distancias. En la formulación, no promovimos el reconocimiento de la estructura matemática para calcular la distancia entre dos puntos y sólo nos enfocamos en el análisis de la representación geométrica. En la tarea Fotografía, la formulación del literal 2 no es precisa porque no permite al estudiante identificar las variables y estructuras matemáticas asociadas a la representación geométrica de la situación. En los literales 3 y 5, le indicamos al estudiante una serie de pasos concretos para resolver la situación por lo tanto no podía elaborar suposiciones o formular un modelo.

## 4. Reflexiones y conclusiones

La unidad didáctica siempre mantuvo un proceso sistémico y reflexivo, razón por la cual es una herramienta que le brinda al profesor un método de enseñanza y aprendizaje efectivo y contundente para abordar el tema del cálculo de la distancia entre dos puntos. El proceso fue sistémico porque la unidad didáctica tuvo una planeación, un diseño, una evaluación y unos ajustes de acuerdo con la evaluación. El proceso fue reflexivo, porque la implementación generó interrogantes sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo de la distancia entre dos puntos, de acuerdo con los instrumentos aplicados como las tareas de aprendizaje, la tarea diagnóstica, la evaluación final, entre otros. Asimismo, para el nuevo diseño de la unidad didáctica tuvimos en cuenta los imprevistos o situaciones que no tuvieron éxito en la implementación de la unidad didáctica. En la dimensión cognitiva, presentamos un modelo que permitió evaluar la contribución de la consecución de los criterios de logros a los objetivos propuestos, y esto generó avances en los procesos de aprendizaje por medio de ayudas y previsiones que consideramos en el nuevo diseño de la unidad didáctica.

También, los estudiantes desarrollaron, en mayor medida, la capacidad matemática fundamental de comunicación, una expectativa de aprendizaje que poco se trabaja en el aula de clase.

Aunque, los tres objetivos de la unidad didáctica contribuyeron a desarrollar las expectativas de aprendizaje de nivel superior, fue el objetivo tres el que tuvo mayor contribución con la capacidad matemática fundamental de utilización de herramientas matemáticas. La tarea Simulacro promovió el desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje que contribuyeron a comprender el concepto de cálculo de la distancia entre dos puntos. Esto se debe a que en el diseño e implementación, fue la que tuvo más impacto en los estudiantes ya que el contexto fue cercano.

El tema del cálculo de la distancia entre dos puntos fue interesante para los estudiantes debido a sus múltiples aplicaciones en la cotidianidad, lo que generó impacto para desarrollar las tareas de aprendizaje. Los estudiantes mostraron motivación para aprender sobre los procedimientos matemáticos y proponer solución a las tareas de aprendizaje. Las tareas enfocadas a desarrollar el concepto de la distancia entre dos puntos fueron instrumentos que llevaron al estudiante a reconocer el uso de las matemáticas en la vida diaria y a diferenciar la distancia entre dos puntos en la recta, en el plano, el teorema de Pitágoras y Thales.

## Referencias bibliográficas

- Cáceres, M., Moreno, Y., Tello, J., y Vargas, I. (2016). Informe Final Unidad didáctica sobre el cálculo de la distancia entre dos puntos. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Cañadas M, & Gómez P (2014). Apuntes módulo 2 de MAD3. Análisis de contenido. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en [https://www.dropbox.com/s/zm2ws1bokpn69zm/140825\\_Apuntes.pdf?dl=0](https://www.dropbox.com/s/zm2ws1bokpn69zm/140825_Apuntes.pdf?dl=0)
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. Revista EMA, 7 (3), 251-293. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/375/>
- Gómez P, & Castro, P (2016). Apuntes Módulo 7 de MAD 3. Evaluación de la planificación. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en [https://www.dropbox.com/s/ut4p726fh85hf11/MAD3\\_Apuntes\\_Modulo7.pdf?dl=0](https://www.dropbox.com/s/ut4p726fh85hf11/MAD3_Apuntes_Modulo7.pdf?dl=0)

- Gómez P, & Mora, M. (2015). Apuntes módulo 4 de MAD3. Análisis de instrucción. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <https://www.dropbox.com/s/nrmm978jzwuuy/ApuntesModulo4MAD3.pdf?dl=0>
- Marín, A. y Gómez, P. (2015). Apuntes sobre análisis de datos. Módulo 6 en MAD 3. Documento no publicado. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes. Disponible en [https://www.dropbox.com/s/ewluiueldlp4gxg3/MAD3\\_Apuntes\\_Modulo6.pdf?dl=0](https://www.dropbox.com/s/ewluiueldlp4gxg3/MAD3_Apuntes_Modulo6.pdf?dl=0)
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Autor. Disponible en <http://tinyurl.com/bljb3wd>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013). Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias. Descargado el 30/1/2014, de <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d>
- Romero, I. y Gómez, P. (2015). Apuntes sobre análisis de actuación. Módulo 5 en MAD 3. Documento no publicado. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes. Disponible en [https://www.dropbox.com/s/mlz7nznt4ryx9h6/MAD3\\_Apuntes\\_Modulo5.pdf?dl=0](https://www.dropbox.com/s/mlz7nznt4ryx9h6/MAD3_Apuntes_Modulo5.pdf?dl=0)