COMUNICACION BREVE

UN BREVE ESTUDIO HISTORICO Y EPISTEMOLOGICO DE LA FUNCION EXPONENCIAL Y ANALISIS DE ALGUNOS LIBROS DE TEXTO

Aily Diomara Morales
Matemáticas Pura
Universidad de Pamplona
aily810@hotmail.com

Resumen

En este trabajo se hará un breve resumen del análisis histórico y epistemológico de la función exponencial, la revisión de algunos libros de texto, y algunos obstáculos epistemológicos presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial.

Palabras clave: Exponente, función, función exponencial, obstáculo.

Abstract

In this work a brief summary of the historical and epistemological analysis of the exponential function, a review of some textbooks and some epistemological obstacles present in the process of teaching and learning of the exponential function.

Key words: Exponent, function, exponential function, obstacle.

INTRODUCCIÓN

Cuando los estudiantes aprenden un concepto deben manejarlo con destreza y agilidad en situaciones que lo requieran, ya sea dentro o fuera del aula de clase; el concepto de función exponencial presenta dificultades para que los alumnos comprendan este concepto, es por eso que para lograr que el estudiante entienda este objeto de enseñanza se debe analizar tanto la construcción que ha tenido este objeto a nivel histórico y la forma en como se enseña en las escuelas, estos aspectos son importantes para poder comprender por qué y para que surge este conocimiento matemático.

ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO

Para la investigación histórica referente a la construcción matemática de la función exponencial se toma como referencia el trabajo hecho por Sierra (2002).

En donde sustenta que la función exponencial aparece implícita por primera vez en los elementos de Euclides, en donde se enuncia la igualdad $a^{m+n} = a^m a^n$, para m y n naturales, luego para la edad Media Nicolás Oresme (francés, s XVI) vuelve a hallar esta regla hablando de exponentes racionales y estableciendo otras identidades como $(ab)^{1/n} = a^{1/n} b^{1/n}$. Pero estas ideas no fueron entendidas sino hasta un siglo después cuando N, Choquet las retoma.

Al parecer la noción de exponente cero, y negativo surge en el marco del pensamiento algebraico de Nicolás

Chuquet (siglo XV).

Este matemático en La tripalty en la Science des Nombres (documento fechado en 1484) construyo la noción de exponente cero y negativo. En este primer momento se nota que Choquet introduce el exponente cero para indicar que se trata de una cantidad estricta (sin incógnita); es decir no se interpreta como la potencia cero de una cantidad continua, sino más bien como su ausencia, ejemplo 12^0 quiere decir doce, 12^1 (número lineal) indica 12*x*, 12^2 (número superficial cuadrado) significa $12x^2$. Se puede ver que Chuquet utiliza estas expresiones para la economía de la escritura de las multiplicaciones, para esta época no se hablaba de $x^0 = 1$ ya que el exponente cero se utilizaba para denotar la ausencia de la cantidad.

Dentro del pensamiento algebraico existieron exponentes fraccionarios para denotar la raíz cuadrada y la raíz cúbica. Esta investigación no pudo determinar las razones que motivaron el uso de esas expresiones pero es de suponer que la relación entre las progresiones aritmética y geométrica tuvo un papel en ello. En todo caso se refleja un intento de unificar las notaciones de las raíces y los exponentes naturales.

Wallis (1665) en su Arithmetica Infinitorum, resolviendo el problema de las cuadraturas le permite darle un significado al exponente cero ya que $y = x^0$ debe tener una razón característica de 1, debe ser una línea horizontal. Y además afirma que el índice apropiado de $y = \sqrt[q]{x^p}$ debe ser $^p/_q$, y además introduce los exponentes negativos, definiendo al índice de $\frac{1}{x}$ como -1, el índice de $\frac{1}{x^2}$ como -2, etc.

El paso a exponentes racionales fue debido a Stifel (siglo XVI), y el paso a exponentes reales fue realizado por Napier (1614-1620) de manera intuitiva, quien es además quien introduce el número e de forma muy discreta; J, Bernoulli (1683) examino el problema del interés compuesto y, durante su análisis del interés compuesto continuamente, trato de encontrar el $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Uso el teorema del binomio para encontrar que estaba entre 2 y 3. Hasta donde se sabe, la primera vez que el número e aparece explícitamente es en 1690; En ese año, Leibniz le escribió una carta a Huygens en la que usa la notación b para lo que nosotros conocemos por e. Por fin el número e tenía nombre (aunque no sea el actual) y era reconocido. Es tanta la notación matemática actual que le debemos a Euler que no sorprende descubrir que la notación e para este número se la debemos a él. La afirmación que se ha hecho algunas veces de que Euler uso la letra e porque era la primera letra de su nombre es ridícula. Es probable que e ni siquiera venga de “exponencial” sino que sea simplemente la vocal que sigue de la “a”, la cual Euler ya estaba usando en su trabajo. Sea cual fuera la razón, la notación e aparece por primera vez en una carta que le escribió Euler a Goldbach en 1731. Euler hizo varios descubrimientos respecto a e en los años siguientes pero no fue sino hasta 1748 con la publicación de *Introduction in Analysin infinitorum* cuando Euler dio un tratamiento completo a las ideas alrededor de e. Demostró que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots, \text{ Y que } e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Euler dio una aproximación de e con 18 decimales, e = 2,718281828459045235. Casi todo el mundo acepta que Euler fue el primero en probar que e es irracional. Y sin duda fue Hermite quien probó en 1873 que e no es un número algebraico.

De acuerdo con las investigaciones de Sierra (2002). Dentro de la matemática erudita de fines de siglo XVII el principal objeto de estudio era la curva Una curva en un sistema de referencia involucra las relaciones entre distintas cantidades geométricas variables definidas con respecto a un punto variable sobre la curva. Tales cantidades geométricas variables son por ejemplo: ordenada, abscisa, longitud de arco, radio, arco polar, subtangente, normal, tangente, área entre curva y eje, rectángulo circunscrito, sólido de revolución, etc. Las relaciones entre esas cantidades geométricas variables eran expresadas, si esto era posible, por medio de ecuaciones. Pero esto no siempre era posible; ya que justo antes del fin del siglo XVII no había fórmulas para relaciones transcendentes, (que trascienden las expresiones algebraicas). De entre las curvas que no contaban con fórmula se encuentra la que hoy conocemos como la función exponencial. En este sentido aparecen dos causas para la ausencia de una fórmula para las curvas exponenciales: la ausencia del concepto de función y una matemática que requiera de dimensionalidad en sus interpretaciones. En la primera mitad del siglo XVIII el centro de interés cambio de la curva y de las relaciones entre las cantidades geométricas a las expresiones algebraicas que las relacionaban. Las expresiones analíticas que involucraban números y letras, más que los objetos geométricos de que se apoyaban, se convirtieron en el centro de atención. Este cambio en el foco de interés hizo posible la emergencia del concepto de función como fórmula que involucraba una variable (y no la cantidad geométrica). En donde el término variable era referido, por Euler por ejemplo, como:

"una cantidad indeterminada, o universal, que comprende en si misma a absolutamente todos los valores determinados... en consecuencia, una cantidad variable comprende en si misma absolutamente a todos los números, tanto positivos como negativos, tanto enteros como fraccionarios, tanto racionales como irracionales y trascendentales. Ni siquiera el cero o los números imaginarios quedan excluidos del significado de cantidad variable"

Y función como: "*... La función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes..."*

Fue bajo estas circunstancias que se construyó la fórmula de la función exponencial tal y como la conocemos en nuestros días. La fórmula de la función exponencial $y = a^{(x)}$.

La función exponencial como solución de una ecuación funcional.

Una de las formas de definir la exponencial es la de construirla como solución de una Ecuación Funcional.

Cauchy encontró que la función exponencial era la única función que satisfacía dos propiedades muy importantes.

Cauchy pregunta en su Cour's de Analyse:

"Determiner la fonction φ(x) de maniere qu'elle reste continue entre deux limites reelles quel conques de la variable x, et que l'on ait pour toutes les valeurs reelles des variables x et y:"

$$\varphi (x + y) = \varphi(x)\, \varphi (y)$$

(Fragmento de Cauchy, citado por NAGEL, R. (2000).)

Y encontró que evidentemente quien satisfacía esta propiedad era la función exponencial. Se define también una característica de la función exponencial para la ecuación funcional "*Sea f una función con dominio en los reales no nula, continua en el punto cero que verifica que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todos los reales x y y. Entonces existe* *un real a tal que,"*

$$f(x) = e^{ax}, \text{ Para todo real } x.$$

De acuerdo con lo anterior deducimos que la función exponencial nace como consecuencias de esta y otras propiedades que cumple, lo que contradice lo presente en la enseñanza de los libros de texto en donde derivan estas propiedades del concepto de función exponencial.

La Exponencial como solución de una ecuación diferencial.

Una de las formas de definir la exponencial es la de construirla como solución de una ecuación diferencial.
De acuerdo a Debarre en su *exponentielles et logarithmes M´ethode d'euler* quien sustenta en un teorema que:

"Existe una única función derivable con dominio en los reales, que verifica que la función evaluada en cero es igual a uno y que además satisface que $f' = f$."
Y de este teorema se deriva otro aspecto importante: "*Sea a un numero real y g una función con dominio en los reales derivable que satisface que: $dg = g$ donde dg determina la derivada de la función g."* De aquí se determina que $g(0) = a$.

ANÁLISIS DIDÁCTICO

Este da cuenta del estado de la enseñanza, los ambientes de aprendizaje, el reconocimiento de las dificultades, errores y obstáculos en la aprensión de los objetos y su significado.

Revisión Libros de Texto

Para la revisión de los libros de texto se toma al azar un libro de cada época comprendida entre los años 70 y el año 2000, correspondiente al grado 9 de la básica secundaria. Aclaramos que en todos los textos seleccionados la presentación de la función exponencial rompe toda relación con la componente histórica de este conocimiento matemático.

Matemática Moderna Estructurada (1976)

En este texto parten de la potenciación, para introducir el concepto de función exponencial. La estructura fenomenológica esta contextualizada a problemas de la vida real, utilizando también el problema del interés compuesto como ayuda didáctica.

DEFINICION → EJEMPLOS → REPRESENTACION GRAFICA → CARACTERISTICAS DERIVADAS DE LA REPRESENTACION GRAFICA

Serie Matemática Progresiva (1984)

Suponen las propiedades que tiene la función exponencial como ciertas ya que no las demuestran sustentando que no están al alcance del curso. Pero no son introducidas sino hasta después que introducen el concepto de función logarítmica, y son utilizadas para demostrar las propiedades de logaritmo. Lo que no concuerda con el estudio

DEFINICION → EJEMPLOS → REPRESENTACION GRAFICA epistemológico ya que la función exponencial surge como consecuencia de las propiedades que satisface y no al contrario. Los ejemplos son totalmente descontextualizados, basados en operaciones aritméticas. El esquema metodológico para la enseñanza es el siguiente:

Matemática 9 (1992)

Se contextualiza la función exponencial con el problema del interés compuesto, es utilizado como un auxiliar didáctico, para definir la función exponencial, el texto no presenta una definición formal de la función exponencial, para los ejemplos recurren solamente a los sistemas de representación gráfica. El esquema para la enseñanza es el siguiente:

Algebra Y Geometría II (2004).

Los ejemplos están basados en operaciones aritméticas, y no son colocados en un contexto real. Nombran las posibles situaciones en donde sea necesario aplicar la función exponencial, mas no citan ejemplos de cómo aplicarla a las situaciones nombradas. No se habla de las propiedades que cumplen estas funciones, se suponen ya conocidas. El esquema metodológico para la enseñanza es el siguiente:

DEFINICION → EJEMPLOS → REPRESENTACION GRAFICA → CARACTERISTICAS DE LA FUNCION EXPONENCIAL

Una Mirada a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

En los lineamientos curriculares tienen por objeto y cito Tal cual:

"Desarrollar en los estudiantes una sólida comprensión de los conceptos, procesos y estrategias básicas de la matemática e, igualmente, la capacidad de utilizar todo ello en la solución de problemas".

"Desarrollar en los estudiantes la habilidad para reconocer la presencia de las matemáticas en diversas situaciones de la vida real."

Lo correspondiente al estudio de la función exponencial se encuentra enmarcado en forma implícita en lo que se denomina "pensamiento variacional" sistemas algebraicos y analíticos.

Los estudiantes de grado noveno deben aprender a reconocer una función exponencial, construir su gráfica en el Plano cartesiano, y debe describir sus características e identificar sus componentes principales. Los estudiantes deben tener cocimientos previos: función, reales, plano cartesiano, representaciones graficas que aprenderán progresivamente en el transcurso de su ciclo académico.

Obstáculos en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la Función Exponencial.

Al intentar que el alumno construya su significado del conocimiento colocándolo en situaciones donde tengan que luchar con sus concepciones anteriores y produzcan uno propio que le permita resolver problemas del común, obviamente la construcción de este conocimiento no está privado de errores, en donde juegan un papel importante no solo las situaciones diseñadas en torno al conocimiento, sino también las concepciones de los alumnos, sus nociones previas.

De acuerdo a la investigación de Socas (1997) y Ferrari (2001) encontramos algunos obstáculos epistemológicos ligados a la enseñanza de la función exponencial.

Cuando se parte de la enseñanza de estructuras multiplicativas desde las aditivas y el uso de las primeras para introducir la potenciación, se convierte en un obstáculo para la apropiación y entendimiento de las funciones exponenciales por parte de los alumnos. Por ejemplo, luego que los alumnos dominan la adición, se les ensena la multiplicación, presentándola como una suma reiterada, es decir: 3+3+3+3+3 = "cinco veces el tres" = 5×3 a su vez, se los introduce al concepto de "potenciación", como una multiplicación repetida, por ejemplo:

3×3×3×3×3= "cinco veces el tres" = 3^5

Se ve que, ante esta definición de la potenciación desde estructuras multiplicativas, 3^5 significa multiplicar la base por si misma tantas veces como indique el exponente. Esta explicación tiene sentido para los alumnos en tanto se trate de exponentes enteros y positivos, pues se puede traducir como cinco veces el tres. Pero, qué significado podrían conferirle a $3^{1/2}$ *o* $3^{\sqrt{2}}$, ¿Cómo calcular "media vez el tres" o "raíz de dos veces tres"? Incluso, ¿qué sentido darle al cálculo de 2^0 *o* 2^1? ¿Qué significa multiplicar cero veces el dos o una vez el dos? Respuestas persistentes y que se encuentran con facilidad giran en torno al 0 o al 2.Claramente una notación que les era familiar y útil, con el que tenían éxito, deja de funcionarles al extender el dominio de validez de los exponentes. Otro tanto sucede con los exponentes negativos cuando tienen 2^{-3}, que lo dotan de otro significado por ejemplo:

$$2^{-3} = (-2)(-2)(-2) = (-8)$$

CONCLUSIONES

El hecho de suponer las propiedades que satisface la función exponencial (como la ecuación funcional), como una consecuencia del concepto está en contradicción con el análisis epistemológico de la función exponencial, ya que este concepto de función exponencial surge como consecuencia de estas propiedades y no al contrario.

Los alumnos presentan obstáculos de carácter didáctico que los llevan a cometer errores y es un papel del profesor plantear situaciones problemas en donde el uso de los exponentes no naturales tengan significado y sentido.

Los estándares curriculares del ministerio de educación nacional desean desarrollar en los estudiantes una sólida comprensión de los conceptos, procesos y estrategias básicas de la matemática e, igualmente, la capacidad de utilizar todo ello en la solución de problemas, además el estudiante debe identificar fenómenos en la física, la ingeniería, la economía u otras ciencias que pueden modelarse mediante funciones y ecuaciones exponenciales, y al ver algunos libros de texto nos damos cuenta que los ejemplos no están contextualizados a estas situaciones problema.

De acuerdo al análisis hecho anteriormente, podemos ver que la enseñanza de la función exponencial puede ser problemática, ya que los estudiantes tienen dificultad para comprender el concepto de este conocimiento matemático, lo cual no les permite desenvolverse bien en la resolución de situaciones en donde sea necesario aplicar estas funciones. Debido a esto surge el interés de diseñar una unidad didáctica que permita que los estudiantes construyan su propio conocimiento, y que esto les facilite identificar y resolver problemas en la física, economía, u otras áreas; para esto deseo plantear situaciones a los estudiantes, en donde puedan identificar fenómenos, por ejemplo de crecimiento o decrecimiento de acuerdo a representaciones graficas de diferentes funciones, además deseo diseñar problemas relacionados a situaciones reales que permita que el alumno vaya construyendo su propio conocimiento y que pueda superar los obstáculos que lo llevan a cometer errores, en donde el papel del profesor es el de servir de guía del estudiante, lográndolo llevar a construir el conocimiento, sin darle la respuesta, o las soluciones del problema, también es importante aclararle al alumno la importancia de estas funciones, por qué surgieron y para qué son útiles.

BIBLIOGRAFÍA

Ferrari, M. (2001). Una visión socioepistemológica : estudio de la función Logaritmo. Mexico.

Herrera, A. Salgado, D., Nivia, L., Acosta, M., Orjuela, J. (2004). Algebra y geometría II. Editorial Santillana S.A. pág.154-157.

Klaus, J. Nagel, R. (2000). One-parameter semigroups for linear evolution equations.

Londoño, N. Bedoya, H. (1984). Serie matemática progresiva. Algebra y geometría. Colombia: Editorial Norma. pág. 200-209.

Martínez, G. (2000). Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. el caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales. México D.F.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria.

Villegas, M. Melo C. (1992). Matemáticas 2000 9. Editorial voluntad s.a. Santafé de Bogotá D.C. pág. 217-224.

Wills, D. Guarín, H. Londoño,N. Gómez, R. (1976). Serie Matemática Moderna estructurada 4. Colombia: Editorial Norma.