TALLER
LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Luis Arbey Gómez Gómez
Magister Scientiae Matemáticas
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
argoz2006@gmail.com

Resumen

Aprovechando la variedad de herramientas del programa Geogebra, se sugieren dos construcciones: una sobre el límite de una función real y otra, acerca de la construcción de una curva paramétrica.

Palabras Clave: *Límite, intervalo abierto, epitrocoide, epicicloide, hipotrocoide, nefroide, cardioide.*

Abstract

With an adequate selection of different GeoGebra features, it will be posible perform two exercices: the observation about a limit of a real function (an example) and, the construction of a parametric curve.

Key words: *Limit, open interval, epitrochoid, epicycloid, nephroid, cardioid.*

INTRODUCCIÓN

El desarrollo del taller "Límite de una función" comprende dos aspectos el primero presenta algunos conceptos fundamentales relacionados con límite de una función real, un ejemplo y algunas visualizaciones de éste en el software libre GEOGEBRA. La segunda parte corresponde a curvas paramétricas, se comenta sobre las trocoides como curvas obtenidas a través de puntos asociados a una circunferencia que rueda sobre otra, se presenta el caso particular denominado epicicloides, por último se hacen observaciones que permiten la construcción del caracol de Pacal y la cardioide.

Límite de una función real

El programa Geogebra permite visualizar fácilmente una gran variedad de funciones de valor real. Gracias a sus herramientas geométricas y analíticas, se pueden realizar construcciones donde de manera sencilla se cambian valores o condiciones, sin necesidad de rehacer todo el proceso.

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en el número a mismo. El límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es L, lo que se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si la siguiente proposición es verdadera (Leithold L.,1998):

Dado cualquier real $\varepsilon > 0$, no importa cuán pequeño sea, existe un real $\delta > 0$ tal que

$$\boxed{si\ \ 0 < |x-a| < \delta\ entonces\ 0 < |f(x)-L| < \varepsilon.}$$

EJEMPLO

Si se considera la función

$$f(x) = \sqrt{x-b},\ \ x \geq b,$$

y se desea evaluar el límite en un valor *a>b*, en cuyo caso *L>0* y se espera

$$L = \sqrt{a-b}.$$

Al seguir la proposición anterior, en la búsqueda del valor o valores adecuado(s) para el real positivo δ, al revisar la desigualdad correspondiente a *|f(x)-L|<ε* se encuentra

$$|\sqrt{x-b} - L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \sqrt{x-b} - L < \varepsilon,$$

Y sumando *L*, aparece

$$L - \varepsilon < \sqrt{x-b} < L + \varepsilon.$$

Surgen dos opciones: *ε≥L* y *ε<L*. Considerando la segunda, resulta

$$(L-\varepsilon)^2 < x - b < (L+\varepsilon)^2.$$

Modificándola convenientemente se obtiene

$$(L-\varepsilon)^2 + b - a < x - a < (L+\varepsilon)^2 + b - a.$$

Desarrollando los cuadrados

$$L^2 - 2\varepsilon L + \varepsilon^2 + b - a < x - a < L^2 + 2\varepsilon L + \varepsilon^2 + b - a$$

y por la relación de *L* con *a* y *b* se reduce a

$$-2\varepsilon L + \varepsilon^2 < x - a < 2\varepsilon L + \varepsilon^2.$$

Puesto que

$$-2\varepsilon L - \varepsilon^2 < -2\varepsilon L + \varepsilon^2,$$

entonces se tiene

$$|x-a| < 2\varepsilon L + \varepsilon^2,$$

a partir de la cual, se puede proponer que el real positivo δ tome el valor (o menor) de

$$\boxed{\delta \leq 2\varepsilon L + \varepsilon^2.}$$

Sin embargo, puesto que el intervalo de centro *a* y radio δ debe ser subconjunto del dominio de la función, se requiere entonces tener presente la condición: $\delta < a - b$. Este hecho será suficientemente visible cuando en Geogebra se desarrolle la construcción.

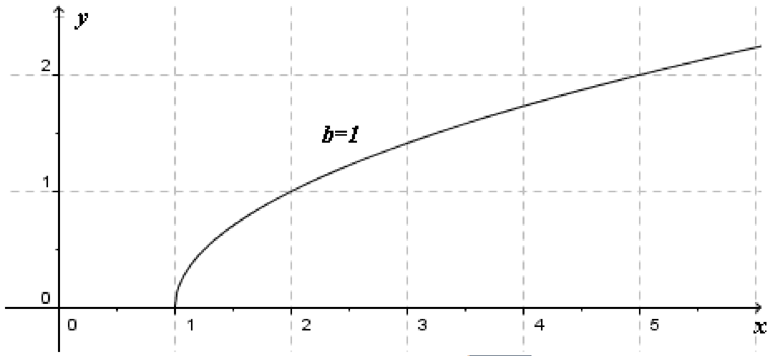

Figura 1. $f(x) = \sqrt{x-1}$

Observación

El valor de δ depende no sólo de ε, por supuesto influye el punto a en donde se analiza el valor del límite L.

Visualización en Geogebra

Si se propone un primer cálculo para observar sobre la Figura 1, por ejemplo cuando b=1, los respectivos intervalos para el caso $a=2$ y $\varepsilon=0.5$, junto con el valor de L y tomando el valor máximo
$\delta = 2\varepsilon L + \varepsilon^2 = 2.$

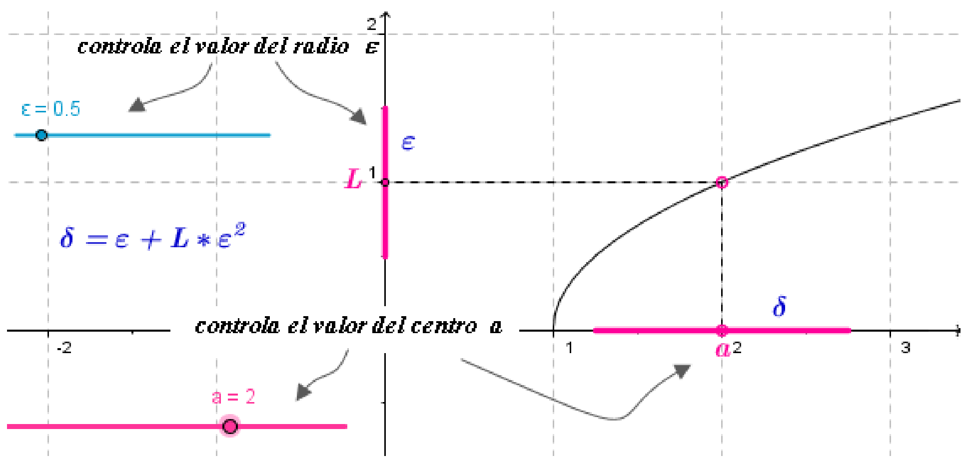

Figura 2. Centros a, L y radios ε, δ

Como un recurso visual, para apreciar las imágenes de los puntos del intervalo de centro a y radio δ, se agregan cuatro segmentos buscando el intervalo de centro L y radio ε, es decir estableciendo la relación $|f(x)-L|<\varepsilon$:

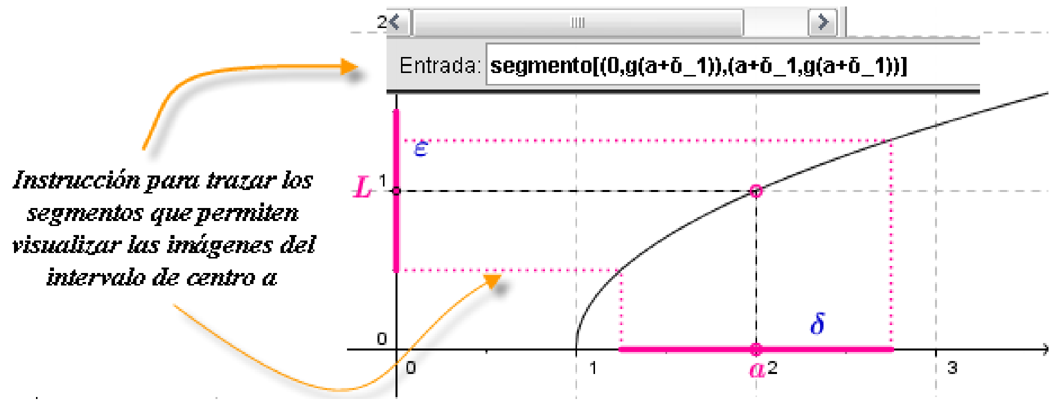

Figura 3. Imágenes de puntos del intervalo de centro *a* y radio δ

Se puede obtener una función discontinua, con ayuda del condicional "Si". De tal manera que si a la función inicial se agrega otra, se puede apreciar el resultado en la Figura 4 y continuar manejando los intervalos respectivos. Naturalmente se deben revisar los cálculos para mantener la existencia de límite, en aquellos puntos donde exista. Se espera que la inexistencia del límite en el punto del salto, pueda apreciarse fácilmente.

En general no se espera que una vez hallado el valor de δ para un cierto ε, este radio δ continúe siendo satisfactorio si se modifica el valor del punto *a*. Cuando tal hecho sucede, y además si la función es continua, se presenta el caso de la continuidad uniforme.

En el siguiente gráfico, se agrega una función sencilla a partir del valor *k*, definido por un deslizador con la finalidad de tener un gráfico que pueda cambiarse según la curiosidad del interesado:

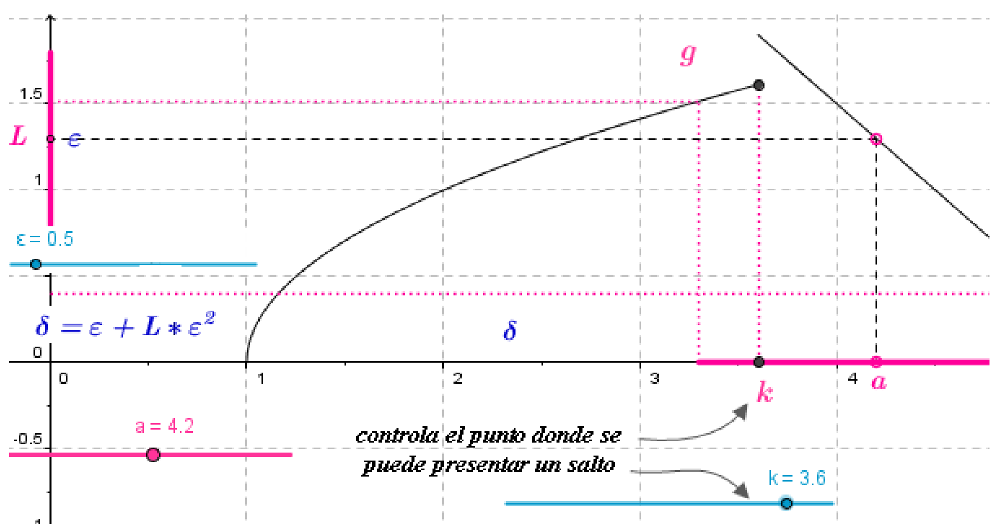

Figura 4. Nueva función mediante el condicional "Si"

Una Curva Paramétrica

Las trocoides son curvas obtenidas a través de puntos asociados a una circunferencia que rueda sobre otra circunferencia. Las epitrocoides son curvas generadas cuando la circunferencia móvil rueda por la parte exterior de la fija. El caso particular de que el punto generador *P* esté sobre la circunferencia móvil las curvas obtenidas se denominan epicicloides (Castro L, 2010).

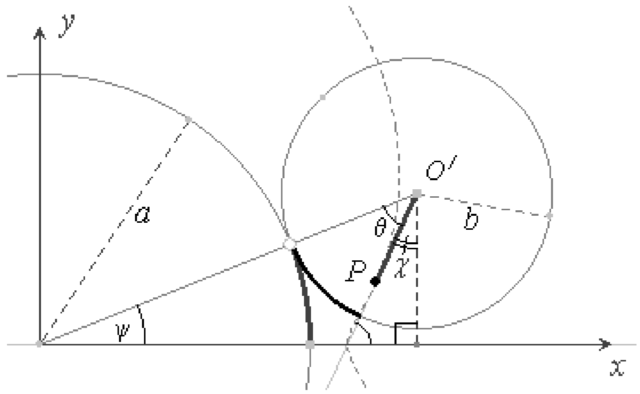

Figura 5. Epitrocoide

Con el fin de describir la curva resultante en el plano cartesiano *xy*, se facilita iniciar con los centros de las dos circunferencias sobre el eje horizontal, quedando el centro de la circunferencia fija en el origen y, el centro O' de la circunferencia móvil en la parte positiva del eje *x*. Ahora, se propone el punto *P* sobre el eje *x* pero, a la izquierda del centro O'. La circunferencia móvil gira en sentido antihorario, de tal forma que el punto de tangencia describe arcos iguales; así, siguiendo la figura 5 se tiene

$\theta = \frac{a}{b}\psi$

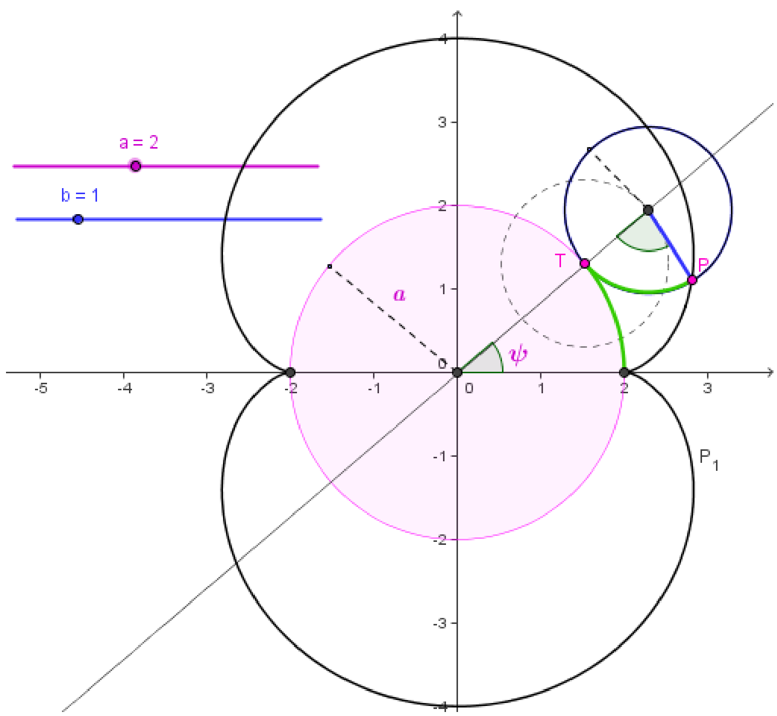

Figura 6. Nefroide: *a=2b*

Si se asume que el punto donde inicia el movimiento se encuentra sobre el eje *x* en su parte positiva, la relación anterior permite obtener las ecuaciones para el punto *P*, en función del parámetro ψ:

$$x(\psi) = (a+b)cos\psi - \lambda bcos\left(\frac{a+b}{b}\psi\right),$$

$$y(\psi) = (a+b)sen\psi - \lambda bsen\left(\frac{a+b}{b}\psi\right),$$

donde $\lambda>0$ determina la distancia del punto *P* al centro O'. Cuando $\lambda=1$ se genera la epicicloide, como se indicó antes. Si $\lambda<1$ se denomina *epitrocoide acortada* y, el caso $\lambda>1$ corresponde a la *epitrocoide alargada*.

Observación

Si la epitrocoide es cerrada al cabo de una vuelta, entonces a/b es un entero. Si la epitrocoide es cerrada después de varias vueltas, entonces *a/b* es un racional positivo, pudiendo ser un entero (Castro L, 2010).

Por el momento, se desea revisar la construcción en Geogebra, sin acudir a las respectivas ecuaciones paramétricas, que dependen de ψ (el parámetro).

Los radios de las dos circunferencias se pueden proponer a través de la herramienta "*deslizador*", con el fin de modificarlos para obtener diferentes epitrocoides en la misma construcción. El uso de la relación entre θ y ψ posibilita trasladar el valor del ángulo ψ de la circunferencia fija sobre la circunferencia móvil, y así registrar correctamente la huella o el lugar geométrico que describe el punto *P*.

Además de la nefroide la cual fue estudiada por Huygens y Tschirnhausen alrededor de 1679, otra epitrocoide es el caracol de Pascal que se genera cuando *a=b*. La cardioide, un caso especial del Caracol, fue usada primero por De Castillon (1708-1791).

CONCLUSIONES

La versatilidad del programa Geogebra, en sus herramientas y manejo, permite desarrollar diversos temas ya sea de tipo analítico o de tipo geométrico.

El seguimiento de puntos, o de ciertos conjuntos en las gráficas construidas, seguramente resolverá y fortalecerá los conceptos pertinentes.

BIBLIOGRAFÍA

Castro, J. (2010). *Análisis de curvatura de cónicas y curvas clásicas*. Duitama, Colombia: UPTC.

Leithold, L. (1998). *Cálculo con Geometría Analítica*. Séptima Edición. México: Oxford University Press.

Programa Geogebra. Disponible en: *<http://code.google.com/p/geogebra/downloads/list>*