Un estudio sobre los lemas de Arquímedes: Desarrollo algebraico y dinámico.

Autores:

Wilson Alexander Guzmán Chiquiza

Código: 2008240073 **Cédula:** 80.250.741

Andrés Camilo Flórez Segura

Código: 2008240030 **Cédula:** 1.023.905.587

Director:

Benjamín Sarmiento Lugo

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y tecnología

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D. C.

2013- I

1.Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Matemáticas.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Titulo del documento	Un estudio sobre los lemas de Arquímedes, desarrollo algebraico y dinámico.
Autor(es)	FLORÉZ SEGURA, Andrés Camilo. GUZMÁN CHIQUIZA, Wilson Alexander.
Director	SARMIENTO LUGO, Benjamín.
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. 2013,123 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional. UPN.
Palabras Claves	Lemas de Arquímedes, Proposiciones, Geometría Dinámica, Demostraciones, Actividades.

2.Descripción

Este trabajo de grado está ligado al interés profesional del estudiante, con el cual se busca proporcionar a los maestros en formación un recurso bibliográfico sobre una temática antigua y que ha sido descuidada pero sigue siendo vigente “Los 15 Lemas de Arquímedes”. Este recurso contiene, para cada uno de los lemas, la explicación, demostración y una propuesta de taller para su enseñanza. En los talleres se hace uso del software de geometría dinámica GeoGebra.

3.Fuentes

[1] Boyer, C. B. (1999). *Historia de la matemática.* Madrid : Alianza Editorial .

[2] Burton, D. (2010). *The History of Mathematics: An Introduction* (7 ed.). McGraw-Hill.

[3]Euclides. (300 A.C). Los elementos de Euclides. Versión digital.

http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm

[4]Fukata, J., Getz, M., & Jones, D. (2002). A generalization of the arbelos (Feature). *Mathematics Magazine*, 75(3), 231-233.

[5] Gutierrez, A. (11 de Mayo de 2004). *Archimedes' Book of Lemmas*. Recuperado el 2012 de Noviembre de 11, de Go Geometry: *http://www.gogeometry.com/ArchBooLem00.htm*

[6] Heath, T. (1987). *The Works of Archimedes.* Cambridge University

[7] MEN (2002). *Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*, Serie memorias, Bogotá, Colombia.

[8] Nelsen, R. B. (2002a). Proof Without words: the area of an arbelos. *Mathematics Magazine*, 75(2), 144.

[9] Parra, E. (2009). *Arquímedes: su vida, obras y aportes a la matemática moderna.* Universidad de costa rica.

[10] Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas. (2011, Marzo 29). Criterios para la realización y evaluación de trabajos de grado. Bogotá, Colombia.

4.Contenidos

Capítulo 1: Este capítulo trata sobre una breve reseña histórica de Arquímedes, además se incluyen datos sobre sus obras más representativas.

Capítulo 2: En este capítulo aparecen los lemas de Arquímedes y se desarrollan las explicaciones y las demostraciones de cada unos de los lemas.

Capítulo 3: en este capítulo se proponen 15 talleres para la enseñanza de los lemas de Arquímedes.

5.Metodología

Luego de realizar la respectiva consulta y estudio sobre los lemas de Arquímedes, se procedió a realizar las demostraciones de cada una de las proposiciones, elaborar las construcciones dinámicas utilizando software GeoGebra, luego, se diseñaron los talleres y finalmente se almacena todo el producto del trabajo en un CD ejecutable.

6.Conclusiones

- El objetivo se logró debido a que se conformó un recurso bibliográfico que recoge los 15 lemas de Arquímedes con explicaciones detalladas, representaciones dinámicas, demostraciones y propuestas de talleres.

- Los aportes del trabajo son:

    1. Explicaciones detalladas y demostraciones de los 15 lemas con su respectiva representación dinámica.
    2. Una propuesta de talleres para la enseñanza de los lemas de Arquímedes, haciendo uso de software de geometría dinámica.
    3. Un CD interactivo en donde el usuario tiene al alcance todo el trabajo organizado por los enunciados de los lemas, explicaciones, representaciones dinámicas (Applets), demostraciones y talleres.

- Esta es una propuesta para que en los cursos de geometría se pueda retomar el estudio de trabajos antiguos no muy conocidos y se puedan abordar con herramientas actuales como lo es la utilización de software educativo de matemáticas.

Elaborado por:	Andrés Camilo Flórez Segura Wilson Alexander Guzmán Chiquiza
Revisado por:	Benjamín Sarmiento Lugo

Fecha de elaboración del Resumen:	02	07	2013

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Este trabajo fue motivado por el interés de los autores en proporcionar a la comunidad un recurso bibliográfico organizado y detallado sobre los 15 Lemas de Arquímedes, el cual es una temática antigua que ha sido descuidada pero que sigue siendo vigente por su densidad en contenidos y propiedades de los objetos geométricos planos implícitos en cada lema.

Consideramos que este trabajo es pertinente y necesario para la comunidad de estudiantes y docentes de geometría por cuanto su contenido abarca tópicos interesantes de la geometría plana como las tangencias, la solución al problema de la trisección del ángulo, el estudio del Salinon, las propiedades de los círculos gemelos y los Árbelos de Arquímedes, entre otros.

Por otro lado, el presente trabajo contiene dos capítulos; el primer capítulo, trata sobre una reseña histórica del gestor de los lemas y de las diferentes proposiciones establecidas. En el segundo capítulo, se desarrollan las diferentes proposiciones, presentando una breve explicación de cada lema, sus demostraciones y finalmente se propone un taller para la enseñanza de dicho lema.

Teniendo en cuenta que el uso de software de geometría dinámica es importante en la visualización de los objetos matemáticos y mayor comprensión de sus propiedades, se incluyen Applets que faciliten el desarrollo de los talleres y con esto el aprendizaje de los lemas.

OBJETIVOS

General

Diseñar un recurso bibliográfico en formato (electrónico-digital), en cuyo contenido (explicaciones, demostraciones, talleres y Applets) se retome y se proponga actividades para la enseñanza y aprendizaje de los Lemas de Arquímedes.

Específicos

- Reorganizar y relacionar la información recogida en la revisión de la bibliografía, la realización de las demostraciones y la construcción de los Applets, para obtener como producto del trabajo un recurso bibliográfico en formato digital sobre los lemas de Arquímedes.

- Construir Applets (pequeña aplicación componente de software que es escrita en Java) que faciliten la visualización de cada uno de los Lemas de Arquímedes.

Capítulo 1

RESEÑA HISTÓRICA

1.1.Breve biografía de Arquímedes

Arquímedes nace en la ciudad de Siracusa, en la isla de Sicilia, hacia el año 287 a.C., se piensa que era hijo de un astrónomo llamado Fidias. De la vida temprana de Arquímedes y de su familia se sabe muy poco. Algunos creen que Arquímedes debió pertenecer a la nobleza de Siracusa, lo cual le permitiría acceder y dedicarse al estudio.

Cuenta la historia que los romanos comandados por el general Marcelo, querían invadir la ciudad de Siracusa en el año 212 a.C. por tal motivo Arquímedes, una de las mentes brillantes por esa época, ayudó a su ciudad a protegerse, inventando artefactos que pudieran bloquear la arremetida de los romanos, por eso creó catapultas de diferentes alcances, máquinas que incendiaban barcos, también para los barcos romanos que se encontraban muy cerca de los muros de la ciudad, diseñó unas pértigas movibles.

Sin embargo, en un descuido de la ciudad de Siracusa, cuando celebraban sus fiestas, en este caso era la fiesta de la diosa de la caza llamada Diana, en ese momento los romanos entraron a la ciudad siendo esta saqueada, además el general Marcelo había dado la orden a sus soldados de no matar a Arquímedes quien conocía de todas sus capacidades, no obstante surgió un mal entendido con esa información y Arquímedes murió a manos de un soldado romano en acontecimientos que realmente no son bien conocidos. Para hablar un poco mas de la historia que rodea a Arquímedes, se toma como referencia a (Parra, E, 2009) y (Boyer, C, B, 1999).

Otra historia cuenta que durante el mando del general Marcelo por las tropas romanas en Siracusa, Arquímedes utilizó parte de sus inventos para detener la flota romana. La muerte de Arquímedes fue en el 212 a.C., cuando Siracusa fue tomada por los romanos después de un largo sitio, Arquímedes estaba resolviendo un problema sentado en el suelo, cuando de pronto un soldado romano se acercó a él y le ordenó levantarse e irle a presentar sus respetos al general romano Marcelo. Arquímedes, muy molesto porque el soldado había pisado su dibujo, le gritó enfadado “No pises mis esferas” la reacción del soldado fue inmediata, pues este lo asesinó. Marcelo, quien había ordenado no matar a Arquímedes, pues conocía de su fama de gran virtuoso y sabio, encargó que le hicieren un funeral de honor y esculpió es su lápida la frase “*Arquímedes el genio de Siracusa”* y un grabado con una esfera dentro de un cilindro, uno de sus tratados geométricos.

Este personaje trabajó en diversos temas de matemáticas como la aritmética, geometría, astronomía, estática e hidrostática. Fue en particular la incorporación al saber científico de estas dos ramas de la física la circunstancia que explica la extraordinaria influencia de los escritos de Arquímedes sobre los hombres del renacimiento y la edad moderna, convirtiéndose así en una de las más grandes figuras de la historia de la ciencia.

Fue una figura muy célebre entre sus conciudadanos de Siracusa. Tal vez por sus méritos científicos o por sus excentricidades y grandes inventos que le atribuyeron o por su vinculación, quizá por su parentesco con la familia real. Sin embargo hoy esa vida se ha podido reconstruir sobre los datos, no muy abundantes de varios historiadores en especial de los que se ocuparon de las guerras púnicas. Es por ello que el hecho de su muerte, se sitúa en el saqueo que sufrió Siracusa en manos de los romanos en el 212, y este dato combinado con otro, según el cual Arquímedes habría vivido 75 años se obtiene el año de nacimiento.

Sin duda las actividades de su padre quien era astrónomo fueron las que motivaron e influenciaron a Arquímedes en su vocación y formación científica. En sus inicios Arquímedes viajo hacia Alejandría para estudiar allí, en este lugar conoció a Eratóstenes de Cirene, director del museo de Alejandría. Con el cual pudo intercambiar ideas y opiniones científicas. De estos encuentros, más que todo por correspondencia se conoce el *Método*. Allí en Egipto fue donde logro hacer su primer gran invento, *el tornillo de Arquímedes*, este consistía en una especie de máquina que servía para elevar las aguas y regar ciertas regiones del rio Nilo, donde no llegaba el agua por las inundaciones.

Después de este viaje Arquímedes regresó a su ciudad natal. Se cuenta que él dedicaba la mayor parte del tiempo en la investigación, a tal instante que no le importaba si no se bañaba, creía que perdía tiempo en ello. Era tanto su interés y concentración por su estudio, que se encuentra una anécdota muy conocida la cual relata el arquitecto romano Vitruvio, es la famosa “Eureka” (Que traduce “lo encontré” en griego). Cuenta la leyenda que el rey Herón II de Siracusa le había dado una cierta cantidad de oro a un orfebre para que hiciere una corona de oro puro. Cuando le hicieron entrega de tal corona, el rey desconfío y se preguntaba si en realidad la corona estaba hecha de solo oro. Este rey le planteó la duda a Arquímedes y él gustoso se dio a la tarea de resolver el misterio. La cuestión era que Arquímedes estaba tomando un baño, y estaba sumido en el problema de la famosa corona y cuando se metió a la tina que estaba llena de agua hasta el tope, se dio cuenta que la cantidad de agua que se derramó estaba relacionada con cantidad de su cuerpo sumergido en el agua. Con su cara llena de satisfacción y alegría, salió de la tina y desnudo se fue por las calles gritando “Eureka! Eureka!”.

Otra de sus populares anécdotas era que solía enviar a sus amigos de Alejandría los trabajos que escribía, y en ocasiones solo los enunciados de los resultados que obtenía pero sin la demostración, costumbre que en algún momento le permitió hacer una observación de los profesores alejandrinos. En efecto, el advertir en una ocasión que los enunciados remitidos eran falsos, sin que ninguno de los profesores alejandrinos hubiera señalado el error, pudo asegurar Arquímedes “… aquellos que pretenden haber resuelto todos los problemas, pero sin dar la demostración quedan refutados por el hecho mismo de haber declarado que demostraron algo imposible” poniéndolos así en ridículo.

Arquímedes se consideraba geómetra y no por nada es en las matemáticas donde más demostraciones y teoremas ha dejado. Pero también era un virtuoso en aplicar principios físicos y matemáticos para la construcción de sus inventos mecánicos. Algunos de estos inventos fueron palancas, catapultas, poleas, espejos ardientes, entre otros.

Se puede pensar que todas las anécdotas de las que se hablan no sean más que meras recreaciones, pero la fama que tuvo y ha tenido no es debido a ello sino por su importante estudio y progreso de la ciencia.

1.2.Los trabajos de Arquímedes

No es fácil establecer un nexo lógico cronológico entre los escritos de Arquímedes, en parte por el distinto contenido que se refiere a matemáticas, a astronomía y a física, sin olvidar que probablemente algunos de sus escritos se han perdido.

Se cuenta que Arquímedes desarrolló más de diez obras en matemáticas, donde trabajó áreas como geometría plana, geometría en el espacio, hidrostática, mecánica, aritmética y astronomía, siempre resaltando el descubrimiento hacia nuevos conocimientos, es por eso que se enumerarán las obras desarrolladas por él.

A continuación se describe las principales obras de Arquímedes, para ello se toma del libro (De la Torre, A, 1997):

1. Primer libro de los equilibrios:

En este libro se plasma la parte de encontrar los centros de gravedad, también habla sobre los paralelogramos y los triángulos.

2. Segundo libro de los equilibrios:

En este libro se desarrollan los centros de gravedad de los segmentos de parábola.

Estos escritos sobre los equilibrios, específicamente equilibrios de los planos, está construido a la manera euclídea con definiciones, postulados y teoremas, comprendiendo el primer libro las condiciones de equilibrio de la palanca y la determinación de los centros de gravedad de alguno polígonos, mientras que en el segundo libro se llega a determinar el centro de gravedad de un trapecio parabólico, es decir: la porción de parábola comprendida entre dos cuerdas paralelas.

3. Cuadratura de la parábola:

Aquí trata de la cuadratura de cualquier segmento parabólico. Arquímedes brinda dos soluciones a este problema, una de ellas es geométrica y otra es mecánica. En este tratado, Arquímedes dió una primera demostración mecánica de la cuadratura de la parábola (proposiciones 1-17) más larga que la que presenta en el *método*, basada en los postulados de la Estática extraídos del tratado *Sobre el Equilibrio de los Planos* y previa a la demostración geométrica por exhaución (proposiciones 18-24), la cual es desarrollada posteriormente en el mismo tratado y en la que utiliza la suma de los términos de una progresión geométrica indefinida de razón ¼ para llegar a un resultado geométrico equivalente a la fórmula

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{4}{3}$$

De aquí consigue finalmente el resultado principal: "*la equivalencia entre el segmento de parábola y los cuatro tercios del triángulo inscrito* con el mismo vértice y altura que la parábola". Se trata del primer ejemplo en la historia de la matemática de la cuadratura de una figura mixtilínea. Arquímedes diferencia según que el diámetro sea perpendicular o no a la base del segmento (proposiciones 14 y 15), pero en ambos casos la solución es la misma.

4. Sobre las esferas y el cilindro:

Los siguientes tres ítems son tomados textualmente de Collette (1985).

a) La superficie de una esfera es cuatro veces la del gran círculo;

b) La superficie de un segmento de esfera es igual a un círculo de radio igual a un segmento de recta trazado desde el vértice del segmento al punto sobre la circunferencia de la base;

c) Si un cilindro está circunscrito a una esfera y su altura es igual al diámetro de la esfera, entonces, 1) el volumen y 2) la superficie son las bases del cilindro son una vez y media el volumen y la superficie respectivamente de la esfera.

5. Sobre las espirales:

Es uno de los escritos más difíciles de comprender por sus largas demostraciones, debido a que la concisión del texto se presentan muchas relaciones intermediarias, la aplicación de expresiones en forma geométrica de la suma de términos en progresión aritmética o de sus cuadrados, etc. Todo esto, hace su lectura nada fácil, circunstancia que explica que en los siglos XVII y XVIII hubo matemáticos que desistieron de entender el escrito y hasta quienes frente a sus dificultades, prefirieron considerar erróneos estos resultados.

En este caso se reconoce esta obra con el nombre de la espiral de Arquímedes. También trata sobre el estudio de las tangentes y de las áreas generadas por el radio vector.

6. Sobre los conoides y los esferoides:

Se presenta el estudio de los volúmenes generados por las elipses y parábolas que giran alrededor de un eje de simetría, también por las hipérbolas que giran alrededor de un eje transversal. En él se estructuran las propiedades métricas de los sólidos de Arquímedes designados con el nombre de concoides (hoy en día nuestro paraboloide y rama del hiperboloide de dos hojas de revolución) y esferoides (hoy en día nuestro elipsoide de revolución).

7. La medida del círculo:

Es uno de los escritos más importantes de Arquímedes, pues en él no solo demuestra la equivalencia de los problemas de la rectificación de las circunferencia y el de la cuadratura del círculo, sino que al dar una solución aproximada de esos problemas, con un valor bastante cómodo para el numero π, aporta interesantes cuestiones aritméticas.

Concretamente se realiza una especie de tratado que se compone de tres proposiciones; la primera es la demostración de los problemas de la cuadratura y la rectificación; la segunda demuestra que el círculo es once catorceavos del cuadrado circunscrito si la longitud de la circunferencia es tres veces el diámetro más un séptimo; y finalmente la última proposición es que el perímetro del círculo es menor que los tres mas un séptimo del diámetro, porque es superior a los tres mas diez setenta y unavos de este diámetro.

8. El Arenario:

Este es un sistema de numeración, donde están incluidos números muy grandes, con el fin de denotar un número más grande, al número de granos de arena que posee todo el universo.

En este escrito se encuentra un párrafo importante desde el punto de vista histórico, pues establece la única alusión conocida al sistema heliocéntrico de Aristarco de Samos, concepción del universo que Arquímedes no comparte, pero que toma por cuanto sus dimensiones eran mayores del universo que ordinariamente pensaban los astrónomos de la época.

9. Los cuerpos flotantes:

Se compone de dos libros donde se habla del equilibrio de un segmento de paraboloide en revolución que flota en un líquido, este caso se conoce como el principio hidrostático de Arquímedes. En este escrito se dan científicamente las condiciones de equilibrio de los cuerpos sumergidos parcialmente, se manifiesta el hoy llamado “principio de Arquímedes” y se estudian las aplicaciones del principio al caso de un casquete esférico y de un segmento paraboloide de revolución. Una de las cosas de interés que se puede apreciar en este escrito es que en la forma dada por Arquímedes los problemas de hidrostática se pueden reducir a problemas de estática, solo que algo más complicados, esto lo hace interviniendo la razón entre los pesos específicos del cuerpo y del fluido.

10. Tratado del método:

En esta obra comenta como descubrió algunos teoremas referentes a la curvatura y a la cuadratura, donde se basa en métodos geométricos rigurosos. También se comenta que Arquímedes nombraba que los procedimientos mecánicos servían para explorar los teoremas más no para demostrarlos, en él explota todas las propiedades de la palanca y de los centros de gravedad.

Aunque en este escrito figuran varias determinaciones mecánicas de equivalencias y centros de gravedad, su finalidad fue la de hacer conocer dos curvaturas especiales, la uña cilíndrica y la doble bóveda cilíndrica.

11. Los Lemas:

El estudio de los Árbelos ha sido conocido por los trabajos de Arquímedes en el año (287-221 a.C.), la palabra Á*rbelos* procede del griego y significa cuchilla del zapatero. La mayoría de las propiedades de los Árbelos aparecen en el tratado *Los Lemas de Arquímedes.* La copia más antigua y conocida proviene de una traducción al árabe de Thabit ibn qurra. Algunos aseguran que no fue escrito por él, ya que en el mismo tratado aparece él citado varias veces*;* pero también puede ser una inserción posterior por el traductor. El libro consta de 15 proposiciones principalmente independientes, con la primera proposición se refiere varias veces en los teoremas siguientes. Tres de los lemas (proposiciones 4, 5, 6) describen algunas propiedades de Árbelos. Su abundancia de características es, probablemente, sólo igualado por un triángulo. La proposición 8 presenta la solución de la trisección del ángulo. La proposición 14 introduce otra forma notable, el *Salinon*, que consta de cuatro semicírculos.

En el libro, el hecho de que las alturas de un triángulo se intersecan en un punto está siendo utilizado muy habitualmente. Esto es curioso porque una declaración en este sentido no se encuentra en alguna parte de los Elementos de Euclides.

Aunque se dice no ser de su autoría, Los Lemas pueden tener fácilmente origen arquimediano, sobre todo las proposiciones que tratan de Árbelos, el *Salinon* y la proposición 8 que habla sobre la trisección de cualquier ángulo.

Capítulo 2

LEMAS, EXPLICACIONES Y DEMOSTRACIONES

En el siguiente capítulo se presentan los quince lemas de Arquímedes, los cuales se desarrollan de la siguiente manera: en primer lugar se escribe el enunciado del lema, seguidamente una explicación detallada del mismo y por último se encuentra la respectiva demostración. Para la explicación y la demostración se utilizan representaciones gráficas que permitan al lector visualizar los lemas y así lograr una mayor comprensión de los mismos.

Por otro lado, los talleres propuestos para la enseñanza de los lemas, se han elaborado para que sean desarrollados con el apoyo de un software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri. Estos talleres están dirigidos a estudiantes de primeros semestres donde se estudie geometría plana. El objetivo de los talleres es que el estudiante haga algunas conjeturas y al final concluya con la formulación correcta de los Lemas de Arquímedes.

2.1 Lema Nº 1

2.1.1 Enunciado

Caso 1:
Sean dos circunferencias C_1 y C_2 de diámetros CD y EF $(CD < EF)$ respectivamente, se tocan en el punto A internamente, y si CD y EF son diámetros paralelos entonces los puntos $A, D\ y\ F$ son colineales.

Caso 2:
Sean dos circunferencias C_1 y C_2 de diámetros DC y EF $(DC < EF)$ respectivamente, se tocan en el punto A externamente, y si DC y EF son diámetros paralelos entonces los puntos $D, A\ y\ F$ son colineales.

2.1.2 Explicación

El Lema Nº 1, caso 1, establece que si se tienen dos circunferencias tangentes internamente (siendo una de mayor diámetro) de tal manera que sus diámetros sean paralelos, entonces al unir los extremos de los diámetros con el punto de tangencia estos puntos serán colineales. Esto se evidencia de mejor manera en la Figura 1.

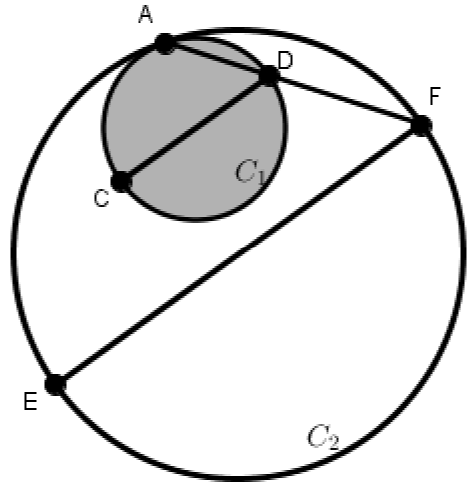


Figura 1: Lema 1, Caso 1

El Lema Nº 1, caso 2, establece que si se tienen dos circunferencias tangentes externamente (siendo una de mayor diámetro) de tal manera que sus diámetros sean paralelos, entonces al unir los extremos de los diámetros con el punto de tangencia estos puntos serán colineales. Esto se evidencia de mejor manera en la Figura 2.

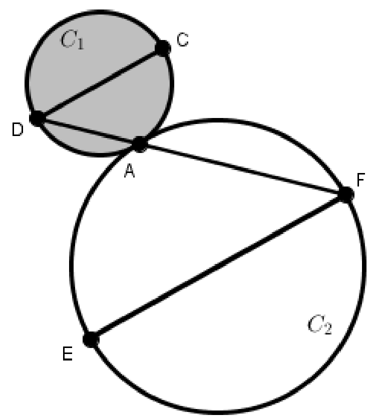


Figura 2: Lema 1, Caso 2

2.1.3 Demostración

Caso 1

Sean G y K los centros de las circunferencias C_1 y C_2 respectivamente.

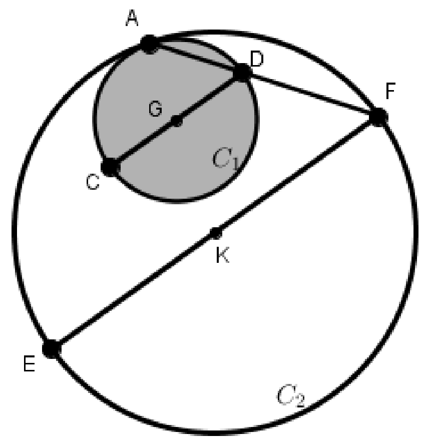


Figura 3.

Ahora, se dibuja un segmento DH de tal manera que sea paralelo y de igual medida que el segmento GK, con H que pertenezca al segmento EF.

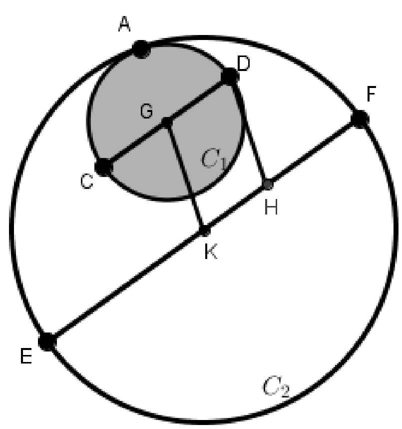


Figura 4.

Se tiene que $GD = GA$ y $AK = FK$, por ser radios de una misma circunferencia.

Como los segmentos DH y GK son paralelos, de igual forma lo son los segmentos GD y KH, por lo tanto el cuadrilátero $GDHK$ es un paralelogramo, por lo cual sus lados opuestos son de igual medida.

De este modo se concluye que

$$KH = GD = GA$$

En la figura 4 se observa que $AK = AG + GK$ y $KF = HF + KH$, además $AK = FK$ entonces $GK = HF$. Por lo tanto se puede decir que $GK = HF = DH$.

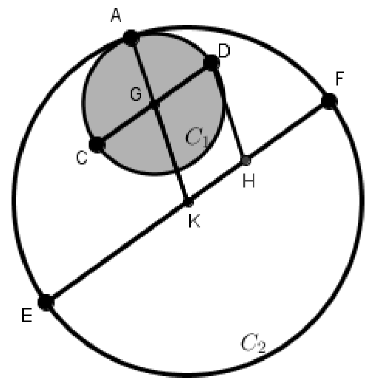


Figura 5.

Por otro lado, los triángulos AGD y DHF son isósceles, entonces se tiene que

$m\angle GAD = m\angle GDA$ y $m\angle HFD = m\angle HDF$.

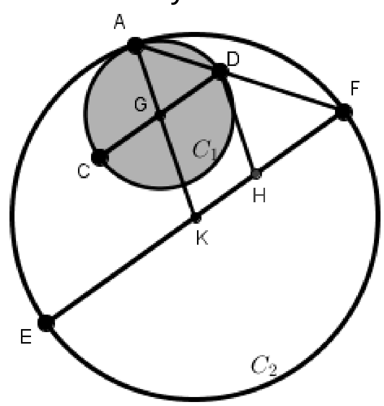


Figura 6.

Además, $m\angle AGD = m\angle AKF$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas y $m\angle AKF = m\angle DHF$por la misma razón, entonces $m\angle AGD = m\angle DHF$

Ahora, como la media de los ángulos interiores de un triangulo es igual a 180 grados, se tiene las siguientes ecuaciones que para los triángulos isósceles AGD y DHF.

Para el triangulo AGD se tiene que $m\angle AGD + m\angle GDA + m\angle GAD = 180°$ entonces

$$m\angle AGD + 2m\angle GDA = 180° \qquad \text{(I)}$$

Para el triangulo DHF se tiene que $m\angle DHF + m\angle HFD + m\angle HDF = 180°$ entonces

$$m\angle DHF + 2m\angle HFD = 180° \qquad \text{(II)}$$

Igualando las ecuaciones (I) y (II) se tiene que

$$m\angle AGD + 2m\angle GDA = m\angle DHF + 2m\angle HFD$$

Como el ángulo $m\angle AGD = m\angle DHF$ entonces

$$m\angle AGD + 2m\angle GDA = m\angle AGD + 2m\angle HFD$$

$$2m\angle GDA = 2m\angle HFD$$

$$m\angle GDA = m\angle HFD$$

Ahora, como $m\angle AGD = m\angle DHF$ y $m\angle GDA = m\angle HFD$ entonces $m\angle GAD = m\angle HDF$, además $m\angle GDA = m\angle GAD = m\angle HFD = m\angle HDF$ debido a que los triángulos son isósceles.

Luego, el ángulo $m\angle GDH = m\angle DHF$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas y $m\angle HFD = m\angle GDA$, además en el triángulo DHF se tiene que

$$m\angle DHF + m\angle HFD + m\angle HDF = 180°$$

Por lo tanto

$$m\angle GDH + m\angle GDA + m\angle HDF = 180°$$

Entonces los ángulos $m\angle GDH, m\angle GDA$ y $m\angle HDF$ forman par lineal, por lo tanto $A - D - F$ es decir los puntos D, A y F son colineales.

Caso 2:

Sean dos circunferencias C_1 y C_2 de diámetros DC y EF $(DC < EF)$ respectivamente, se tocan en el punto A externamente, y si DC y EF son diámetros paralelos entonces los puntos $D, A\ y\ F$ son colineales.

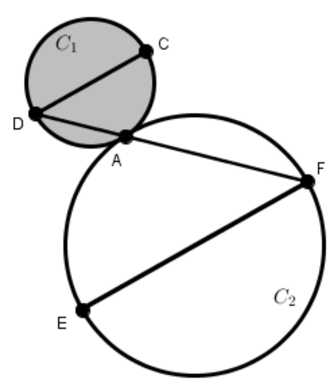


Figura 7.

Demostración:

Sean G y K los centros de las circunferencias C_1 y C_2 respectivamente.

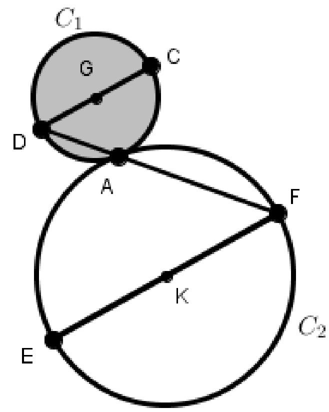


Figura 8.

Ahora, se dibuja un segmento DH de tal manera que sea paralelo y de igual medida que el segmento GK, con H que pertenezca al segmento EF.

También se dibuja un segmento AP de tal manera que sea paralelo y de igual medida que el segmento DG, con P que pertenezca al segmento DH

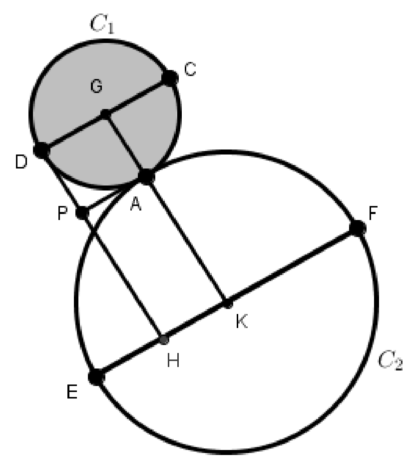


Figura 9.

Se tiene que $GD = GA$ y $AK = FK$ por ser radios de una misma circunferencia.

Como los segmentos DH y GK son paralelos, de igual forma lo son los segmentos GD, PA y KH, por lo tanto los cuadriláteros $GDHK$ y $GDPA$ son paralelogramos, por lo cual sus lados opuestos son de igual medida.

De este modo se concluye que

$$DG = PA = DP = GA$$

Por otro lado, los triángulos DPA y AKF son isósceles, entonces se tiene que:

$$m\angle PDA = m\angle PAD \text{ y } m\angle KFA = m\angle KAF$$

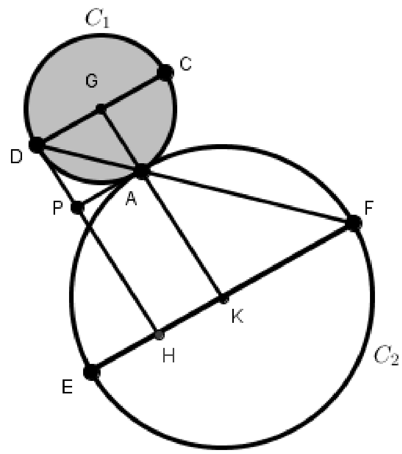


Figura 10.

Además, $m\angle DPA = m\angle DHF$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas y $m\angle AKF = m\angle DHF$por la misma razón, entonces $m\angle DPA = m\angle AKF$

Ahora, como la medida de los ángulos interiores de un triangulo es igual a $180°$, se obtienen algunas relaciones entre las medidas de los lados de los triángulos isósceles DPA y AKF.

Para el triangulo DPA se tiene que

$$m\angle DPA + m\angle PAD + m\angle ADP = 180°$$

entonces,

$$m\angle DPA + 2m\angle ADP = 180° \qquad \text{(I)}$$

Para el triangulo AKF se tiene que

$$m\angle AKF + m\angle KFA + m\angle FAK = 180°$$

entonces,

$$m\angle AKF + 2m\angle FAK = 180° \qquad \text{(II)}$$

Igualando las ecuaciones (I) y (II) se tiene que

$$m\angle DPA + 2m\angle ADP = m\angle AKF + 2m\angle FAK$$

Como $m\angle DPA = m\angle AKF$ entonces, $2m\angle ADP = 2m\angle FAK$, es decir que

$$m\angle ADP = m\angle FAK$$

Ahora, como $m\angle DPA = m\angle AKF$ y $m\angle ADP = m\angle FAK$, entonces $m\angle PAD = m\angle KFA$, ademas, $m\angle ADP = m\angle FAK = m\angle PAD = m\angle KFA$ debido a que los triángulos son isósceles.

Luego, $m\angle PAK = m\angle AKF$ por ser angulos correspondientes entre paralelas y $m\angle PAD = m\angle KFA$, ademas, en el triángulo AKF se tiene que

$$m\angle AKF + m\angle KFA + m\angle FAK = 180°$$

Por lo tanto $m\angle PAK + m\angle PAD + m\angle FAK = 180°$ entonces, los ángulos $\angle PAK, \angle PAD\ y\ \angle FAK$ forman par lineal, por lo tanto se cumple que $D - A - F$ es decir los puntos D, A y F son colineales.

2.2 Lema Nº 2

2.2.1 Enunciado

Sea AB el diámetro de una semicircunferencia S_1 y el punto D que pertenece a la semicircunferencia S_1. Sean dos tangentes a la semicircunferencia S_1, una que contenga el punto D y otra que contenga el punto B de tal manera que se intersequen en el punto C. Si se traza $DE \perp AB$ y si la intersección entre AC y DE es el punto F, entonces F es el punto medio de DE.

2.2.2 Explicación

El Lema Nº 2, establece a partir de una semicircunferencia de diámetro (AB). Se construye una tangente a la semicircunferencia por el extremo B del diámetro y una tangente por cualquier punto (D) de la semicircunferencia distinto a los extremos del diámetro. Si (C) es el punto de intersección de las tangentes y (DE) una perpendicular al diámetro (AB), dado que el punto F es la intersección del segmento AC con el segmento DE, entonces F es punto medio del segmento DE. Esto se evidencia de mejor manera en la Figura 11.

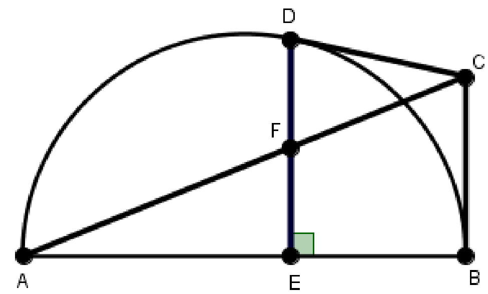


Figura 11: Lema 2

2.2.3 Demostración

Sea M el centro de la semicircunferencia S_1, prolongar los segmentos AD y BC, siendo L la interacción de estas dos prolongaciones.

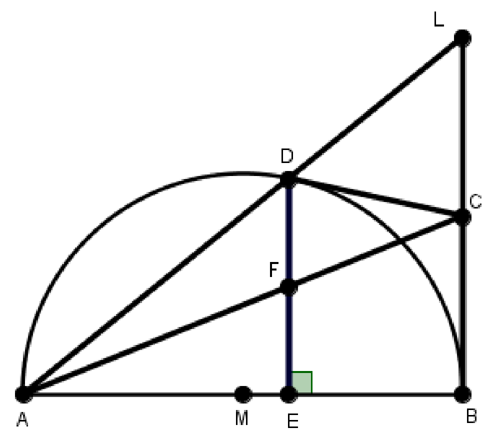


Figura 12.

Luego, trazar los segmentos MC y DB, sea K el punto de intersección entre los dos segmentos.

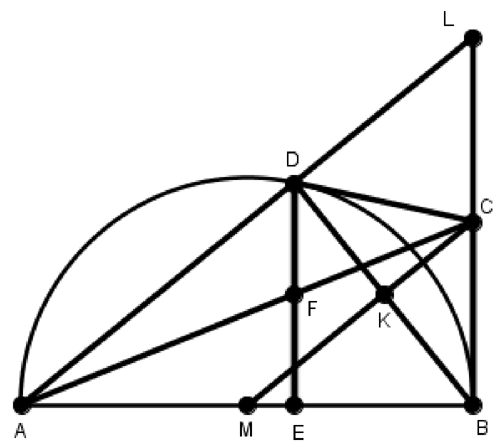


Figura 13.

Como $MDCB$ es un cuadrilátero, los segmentos MD y MB son lados consecutivos y congruentes porque son radios de la semicircunferencia S_1, además los segmentos DC y BC son lados consecutivos y congruentes, porque son segmentos tangentes a la semicircunferencia, entonces el cuadrilátero MCD es una cometa.

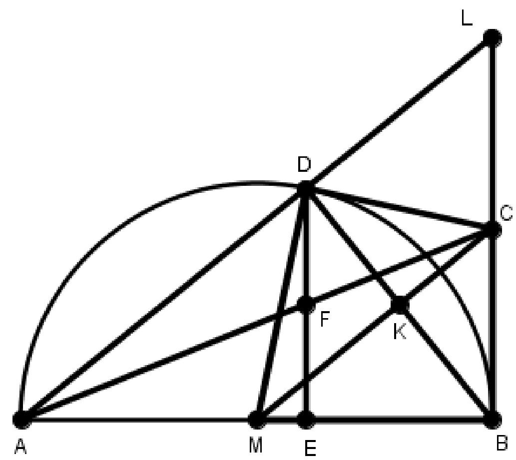


Figura 14.

Ahora, las diagonales de una cometa son perpendiculares, es decir que MC es perpendicular a BD, por lo tanto el ángulo MKB es recto, así mismo el ángulo ADB es recto porque está inscrito en una semicircunferencia.

De lo anterior se puede concluir que el segmento AD es paralelo con el segmento MC. Por lo tanto, por ser ángulos correspondientes entre paralelas se tiene que

$$m\angle BLD = m\angle BCK$$

Ahora, utilizando el teorema de Thales se puede afirmar que

$$\frac{BC}{CL} = \frac{BK}{KD}$$

Como las diagonales de una cometa se bisecan, entonces $BK = KD$; reemplazando en la anterior ecuación se tiene que

$$\frac{BC}{CL} = \frac{BK}{BK}$$

Luego,

$$\frac{BC}{CL} = 1$$

Por lo tanto,

$$BC = CL$$

Ahora, se tiene que DE es paralelo a BL debido a que el segmento BL es perpendicular al segmento AB, y DE es perpendicular al segmento AB.

En la figura 14 se observa que los triángulos ALC y ADF son semejantes porque DF y LC son paralelos, por lo tanto

$$\frac{CL}{FD} = \frac{AC}{AF} \tag{I}$$

De igual manera, en la figura 14 se observa que los triángulos ACB y AFE son semejantes porque FE y CB son paralelos, por lo tanto

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{AF} \tag{II}$$

Por las ecuaciones (I) y (II) se tiene que

$$\frac{CL}{FD} = \frac{BC}{EF}$$

Luego,

$$\frac{EF}{FD} = \frac{BC}{CL}$$

Como $BC = CL$ entonces:

$$\frac{EF}{FD} = \frac{BC}{BC}$$

Luego,

$$\frac{EF}{FD} = 1$$

Por lo tanto,

$$EF = FD$$

Como se tiene que $E - F - D$ y $EF = FD$ entonces F es punto medio del segmento ED.

2.3 Lema Nº 3

2.3.1 Enunciado

Sea C cualquier punto de una semicircunferencia S de diámetro AB y de centro O, y $CD \perp AB$, D pertenece a AB y un punto E en AB talque $AD = DE$, sea F un punto en CB de modo que $CF = AC$, entonces $BF = BE$.

2.3.2 Explicación

El Lema Nº 3 establece que si se tiene una semicircunferencia de diámetro AB, un segmento DC perpendicular a AB con D que pertenece al diámetro y si localizamos un punto E que pertenece al diámetro tal que $AD = DE$ y un punto F en el arco CB tal que el arco CF sea de igual medida al arco CA, entonces la medida del segmento BF es igual a la medida del segmento BE. Esto se evidencia de mejor manera en la Figura 15.

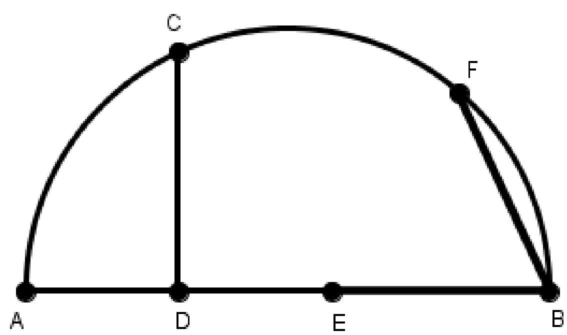


Figura 15: Lema 3

2.3.3 Demostración

Se trazan los segmentos AC, CE, CF y FE

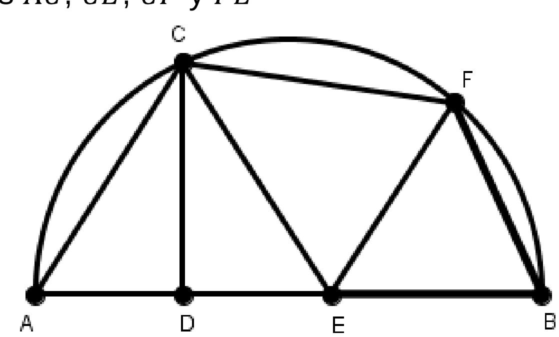


Figura 16.

En adelante se usará $2\llcorner$ para representar un ángulo de 180 grados y $1\llcorner$ para representar un ángulo de 90 grados.

Como se tiene que $mCF = mAC$ entonces $AC = CF$.

Por otro lado, cómo $CD = CD,\ m\angle CDA = m\angle CDE$ (ya que los dos son ángulos rectos) y $AD = DE$, entonces por el teorema LAL[1] se tiene que $\Delta ACD \cong \Delta ECD$.

Así mismo, por definición de congruencia de triángulos, se tiene que $m\angle CAE = m\angle CEA$ y $CA = CE$.

Como $AC = CE$ y $CA = CF$ entonces $CE = CF$, es decir que el triángulo CEF es isósceles y entonces la medida de los ángulos CEF y CFE son iguales.

En la figura 16 se observa que los puntos A, C, F y B pertenecen a la semicircunferencia S por lo tanto el cuadrilátero ACFB está inscrito en la semicircunferencia S, por tal razón

$$m\angle CAB + m\angle CFB = 1\llcorner$$

Como el ángulo CAB es igual al ángulo CAE y $m\angle CAE = m\angle CEA$ entonces:

$$m\angle CEA + m\angle CFB = 1\llcorner \qquad \text{(I)}$$

También se tiene que por par lineal

$$m\angle CEA + m\angle CEB = 1\llcorner \qquad \text{(II)}$$

Ahora, igualando las ecuaciones (I) y (II) se tiene que:

$$m\angle CEA + m\angle CFB = m\angle CEA + m\angle CEB$$

simplificando,

$$m\angle CFB = m\angle CEB$$

Se puede observar en la figura 16, que la $m\angle CFB = m\angle CFE + m\angle EFB$ y $m\angle CEB = m\angle CEF + m\angle FEB$

Como $m\angle CFB = m\angle CEB$ entonces

[1] Teorema de congruencia de triángulos Lado Ángulo Lado (LAL)

$$m\angle CFE + m\angle EFB = m\angle CEF + m\angle FEB$$

También se tiene que $m\angle CEF = m\angle CFE$ entonces

$$m\angle EFB = m\angle FEB$$

Por lo tanto en el triángulo BEF como $m\angle EFB = m\angle FEB$ entonces por el teorema reciproco del triángulo isósceles $BF = BE$

2.4 Lema Nº 4

2.4.1 Enunciado

Sea C cualquier punto de una semicircunferencia S_1 de diámetro AB, y sea $CD \perp AB$, donde D pertenece a AB. Si se inscriben dos semicircunferencias S_2 y S_3 de diámetros AD y DB respectivamente en la semicircunferencia S_1. El área de la figura compendiada internamente por el semicírculo S_1 y externamente por los semicírculos S_2 y S_3 es llamada Árbelos[2], entonces el área de los Árbelos es igual al área del circulo C_4 con diámetro CD.

2.4.2 Explicación

El Lema Nº 4 establece que si se tiene una semicircunferencia de diámetro AB, se construye un segmento perpendicular CD con el punto D que pertenece al diámetro, además se construyen dos semicircunferencias inscritas a la semicircunferencia de diámetro AB estas semicircunferencias con diámetros determinados por el punto D, entonces el área de los Árbelos es igual al área del círculo que tiene por diámetro CD. Esto se evidencia de mejor manera en la Figura 17.

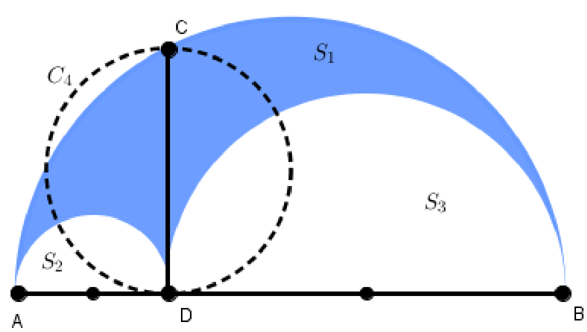


Figura 17: Lema 4

[2] El área de la figura es llamada Árbelos Según Arquímedes.

2.4.3 Demostración

En primer lugar se describen las áreas de los diferentes semicírculos y del círculo:

$A_1 =$ Área del semicírculo S_1 con diámetro AB.

Si el radio de S_1 es $r_1 = \frac{AB}{2}$ entonces su área es $A_1 = \frac{\pi\ \frac{AB}{2}^{2}}{2} \rightarrow\ \boldsymbol{A_1 = \frac{\pi}{8}AB^2}$

$A_2 =$ Área del semicírculo S_2 con diámetro AD.

Si el radio de S_2 es $r_2 = \frac{AD}{2}$ entonces su área es $A_2 = \frac{\pi\ \frac{AD}{2}^{2}}{2} \rightarrow\ \boldsymbol{A_2 = \frac{\pi}{8}AD^2}$

$A_3 =$ Área del semicírculo S_3 con diámetro BD.

Si el radio de S_3 es $r_3 = \frac{BD}{2}$ entonces su área es $A_3 = \frac{\pi\ \frac{BD}{2}^{2}}{2} \rightarrow\ \boldsymbol{A_3 = \frac{\pi}{8}BD^2}$

$A_4 =$ Área del círculo C_4 con diámetro CD.

Si el radio de C_4 es $r_4 = \frac{CD}{2}$ entonces su área es $A_4 = \pi\ \frac{CD}{2}^{2} \rightarrow\ \boldsymbol{A_4 = \frac{\pi}{4}CD^2}$

Ahora, se nombra a $\mathcal{A}$ como el área del Arbelo, por lo tanto el área del Arbelo es

$$\mathcal{A} = A_1 - A_2 - A_3 \qquad \text{(I)}$$

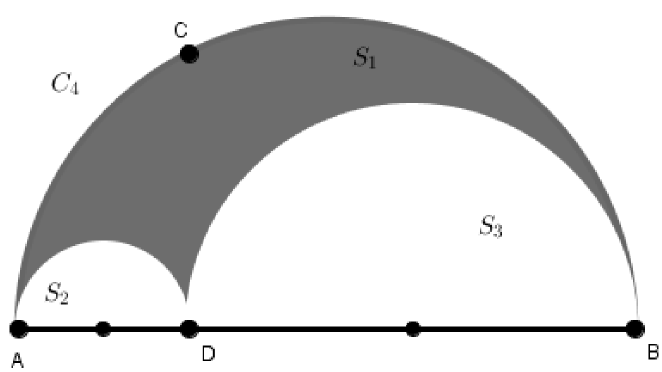


Figura 18.

Si se remplaza $A_1,\ A_2\ y\ A_3$ en la ecuación (I)

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{8}AB^2 - \frac{\pi}{8}AD^2 - \frac{\pi}{8}BD^2$$

luego al factorizar $\frac{\pi}{8}$ se obtiene

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{8}\ AB^2 - AD^2 - BD^2\ ,$$

En la figura 18, se puede observar que: $AB = AD + BD$ entonces

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{8}\ (\boldsymbol{AD} + \boldsymbol{BD})^{\mathbf{2}} - AD^2 - BD^2$$

Luego,

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{8}\ \boldsymbol{AD}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{AD} \cdot \boldsymbol{BD} + \boldsymbol{BD}^{\mathbf{2}} - AD^2 - BD^2$$

al simplificar se obtiene:

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{8}\ 2AD \cdot BD$$

Entonces,

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\ \boldsymbol{AD} \cdot \boldsymbol{BD} \qquad \text{(II)}$$

Ahora, utilizando la media geométrica para el segmento CD se tiene que

$$CD^2 = AD \cdot BD \quad \text{ó} \quad CD = \overline{AD \cdot BD}$$

Si se reemplaza CDen la ecuación $A_4 = \frac{\pi}{4}CD^2$ entonces $A_4 = \frac{\pi}{4}\ \ \overline{AD \cdot BD}^{\ 2}$ Por lo tanto,

$$\boldsymbol{A_4} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\ \boldsymbol{AD} \cdot \boldsymbol{BD} \qquad \text{(III)}$$

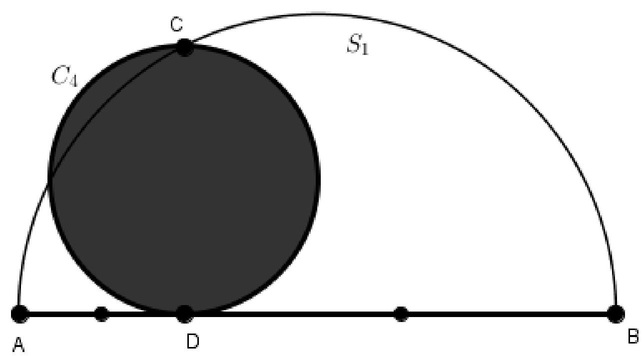


Figura 19.

Como las ecuaciones (II) y (III) son iguales, entonces el área del Arbelo $\mathcal{A}$ es igual al área del círculoC_4.

2.5 Lema Nº 5

2.5.1 Enunciado

Sea D cualquier punto de una semicircunferencia S_3 de diámetro AB y una recta CD perpendicular al segmento AB, D pertenece a AB. Si se inscriben dos semicircunferencias S_4 y S_5 en la semicircunferencia S_3, que tienen a AC y CB como diámetros respectivamente, además, existen dos circunferencias S_1 y S_2 inscritas en los Árbelos, talque una circunferencia S_1 sea tangente a la recta CD, y a las semicircunferencias S_3 y S_4, también sea una circunferencia S_2 tangente a la recta CD, y a las semicircunferencias S_3 y S_5, entonces el área del circulo S_1 es igual al área del circulo S_2.

2.5.2 Explicación

El Lema Nº 5 establece que si se tiene una semicircunferencia de diámetro AB, se construye un segmento perpendicular CD con el punto C que pertenece al diámetro, se construyen dos semicircunferencias inscritas a la semicircunferencia de diámetro AB estas semicircunferencias con diámetros determinados por el punto C, además se construyen circunferencias con centros O_1 y O_2 tal que sean tangentes (externamente) a las semicircunferencias determinadas por el punto C respectivamente y también que estas sean tangentes al segmento CD y a la semicircunferencia de diámetro AB (internamente) , entonces el área del circulo de centro O_1 es igual al área del círculo de centro O_2. Esto se representa en la Figura 20.

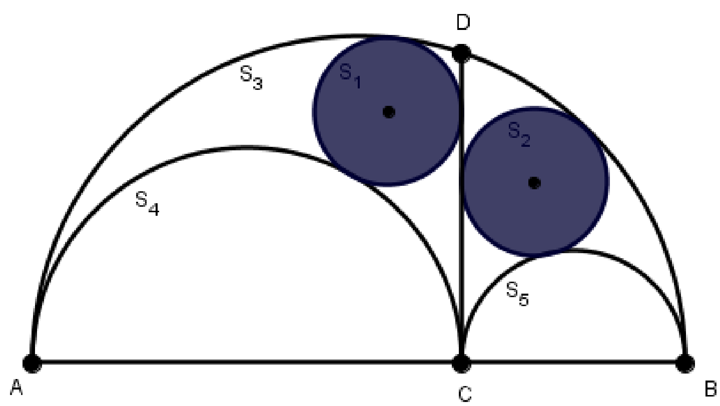


Figura 20: Lema 5

2.5.3 Demostración

Sea E el punto de tangencia entre la circunferencia S_1 y la recta CD.

Sea E el punto de tangencia entre la circunferencia S_1 y la recta CD, y se traza el segmento HE que es diámetro de la circunferencia S_1.

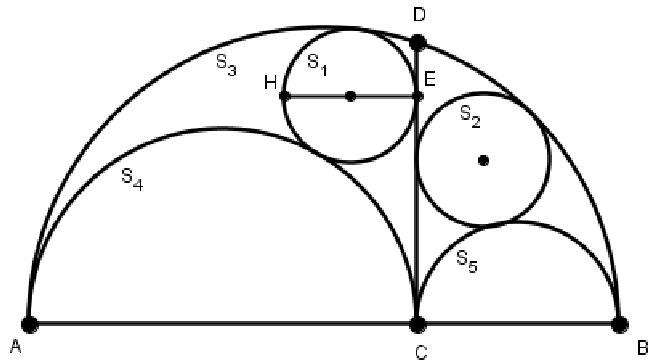


Figura 21.

Se tiene que el segmento HE es perpendicular a la recta CD, por que la recta CD es tangente a la circunferencia con centro en S_1, además, como CD es perpendicular al segmento AB, entonces HE es paralelo al segmento AB.

Ahora, sea F el punto de tangencia entre la circunferencia S_1 y la semicircunferencia S_3, luego se trazan los segmentos FH, HA, FE y EB.

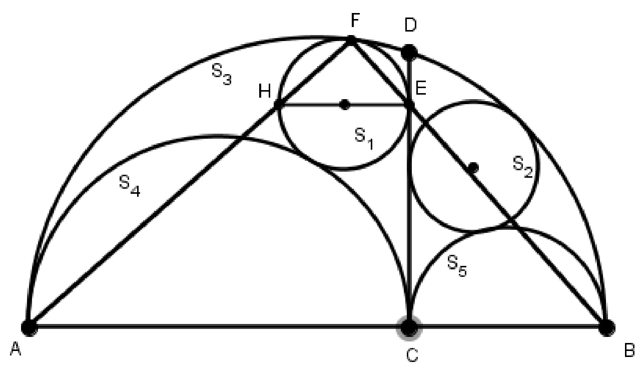


Figura 22.

Por la proposición I parte I se tiene que $F-H-A$ y $F-E-B$, debido a que el segmento HE es paralelo al segmento AB.

Sea G el punto de tangencia entre la semicircunferencia S_4 y la circunferencia S_1, por la proposición I parte II se tiene que $C-G-H$.

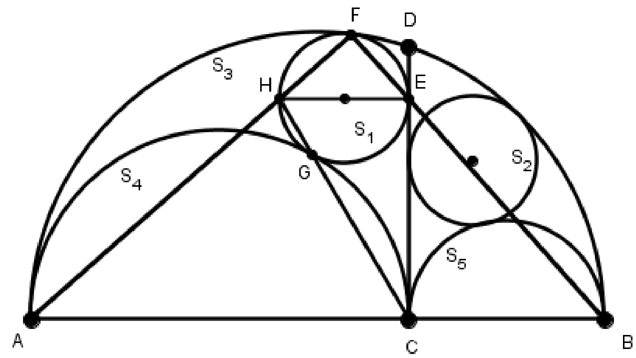


Figura 23.

Sea D_1 en punto de intersección entre la recta CD y la prolongación del segmento AF. Sea I el punto de intersección entre la prolongación del segmento AE y la semicircunferencia S_3

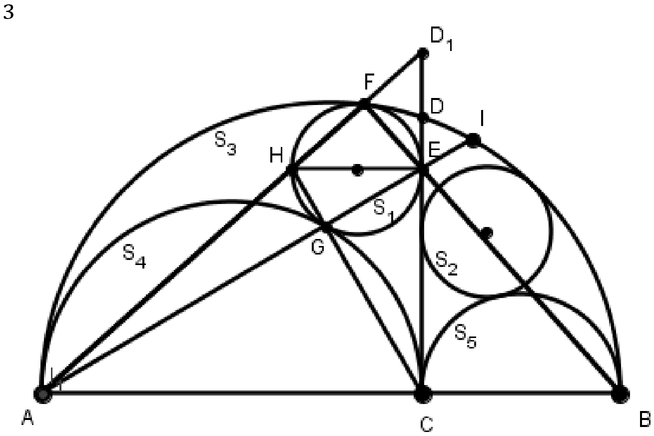


Figura 24.

Los ángulos AFB y ACD_1 se intersecan en el punto E. Como el ángulo AIB está inscrito en la semicircunferencia S_3 entonces el segmento AE es perpendicular a segmentos BD_1 y BI, por lo tanto $B - I - D_1$ son colineales.

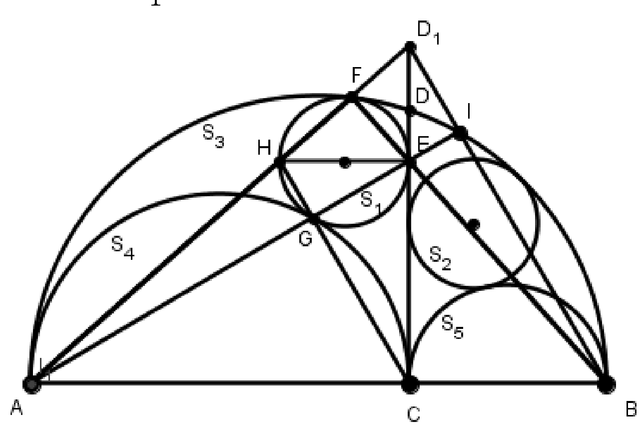


Figura 25.

Como el ángulo AGC es recto, entonces el segmento CH es paralelo a BD_1.

Ahora, por el teorema de Thales podemos decir que

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AD_1}{D_1H} \tag{I}$$

Además, los triángulos ACD_1 y HED_1 son semejantes, porque los ángulos $D_1HE\ y\ D_1EH$ son congruentes con los ángulos $D_1AC\ y\ D_1CA$ respectivamente. Por lo tanto se tiene que:

$$\frac{AC}{HE} = \frac{AD_1}{D_1H} = \frac{CD_1}{CE} \tag{II}$$

Por la ecuación (I) y (II) se obtiene que

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AC}{HE}$$

Es decir,

$$HE = \frac{AC*CB}{AB} \tag{III}$$

Ahora, se realiza un procedimiento similar para la circunferencia S_2, donde su diámetro es H_1E_1, siendo H_1es el punto de intersección con la recta CD y S_2, F_1es el punto de intersección de la circunferencia S_2 y la semicircunferencia S_3.

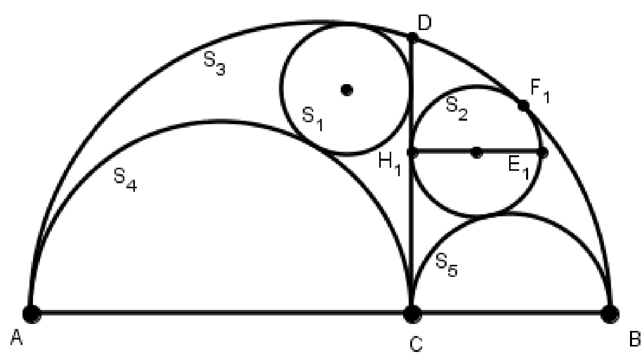


Figura 26.

Se tiene que el segmento H_1E_1 es perpendicular a la recta CD, por que la recta CD es tangente a la circunferencia con centro en S_2, además, como CD es perpendicular al segmento AB, entonces H_1E_1 es paralelo al segmento AB.

Trácese los segmentos F_1E_1, E_1B, F_1H_1 y H_1A

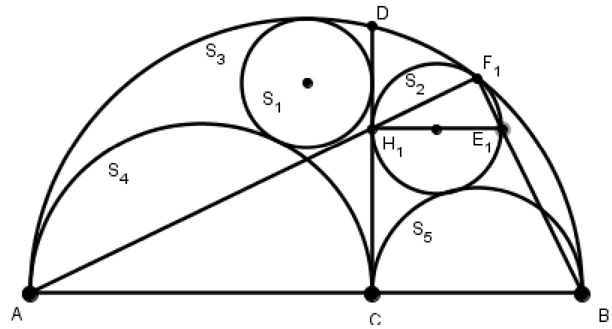


Figura 27.

Por la proposición I parte I se tiene que $F_1 - H_1 - A$ y $F_1 - E_1 - B$, debido a que el segmento H_1E_1 es paralelo al segmento AB.

Sea G_1 el punto de tangencia entre la semicircunferencia S_5 y la circunferencia S_2, por la proposición I parte II se tiene que $C - G_1 - E_1$.

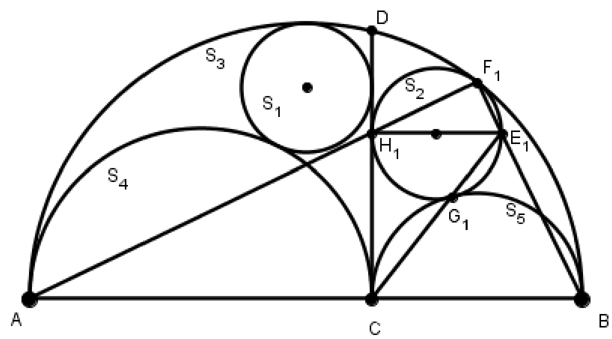


Figura 28.

Sea D_2 en punto de intersección entre la recta CD y la prolongación del segmento BF_1. Sea I_1 el punto de intersección entre la prolongación del segmento BH_1 y la semicircunferencia S_3.

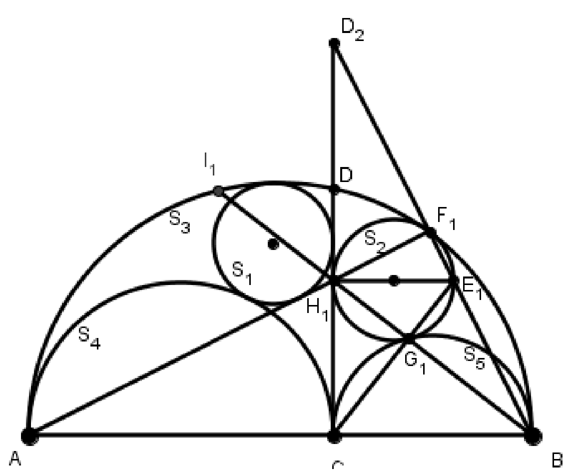


Figura 29.

Los ángulos BF_1A y BCD_2 se intersecan en el punto H_1. Como el ángulo BI_1A está inscrito en la semicircunferencia S_3 entonces el segmento BH_1 es perpendicular a los segmentos AD_2 y AI_1, por lo tanto $B - I_1 - D_2$ son colineales.

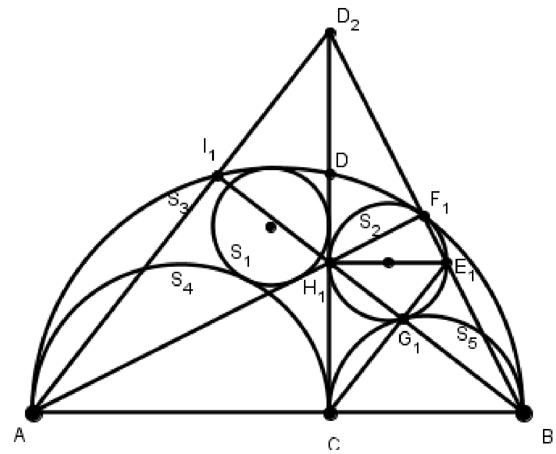


Figura 30.

Como el ángulo $BG_2\ C$ es recto, entonces el segmento CE_2 es paralelo a AD_2.

Ahora, por el teorema de Thales podemos decir que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\boldsymbol{BD_2}}{\boldsymbol{D_2E_1}} \qquad \text{(IV)}$$

Además, los triángulos BCD_2 y $E_1H_1D_2$ son semejantes, porque los ángulos $D_2E_1H_1\ y\ D_2H_1E_1$ son congruentes con los ángulos $D_2BC\ y\ D_2CB$ respectivamente. Por lo tanto se tiene que:

$$\frac{CB}{H_1E_1} = \frac{CD_2}{H_1D_2} = \frac{\boldsymbol{BD_2}}{\boldsymbol{D_2E_1}} \qquad \text{(V)}$$

Por la ecuación (IV) y (V) se obtiene que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{CB}{H_1E_1}$$

Es decir,

$$H_1E_1 = \frac{AC*CB}{AB} \qquad \text{(VI)}$$

Entonces, por las ecuaciones (III) y (VI) se tiene que

$$HE = H_1E_1$$

Siendo HE el diámetro de la circunferencia S_1 y H_1E_1 el diámetro de la circunferencia S_2, por tal motivo, el área de las circunferencias S_1 y S_2 son iguales.

2.6 Lema Nº 6

2.6.1 Enunciado

Sea AB el diámetro de una semicircunferencia S, donde el AB se divide en un punto C, de tal manera que $\frac{AC}{CB} = r$, además, se inscriben dos semicircunferencias S_1 y S_2 en la primera semicircunferencia S, que tienen a AC y CB como diámetros respectivamente, y sea DE el diámetro de una circunferencia C_1 que es tangente a las semicircunferencias S, S_1 y S_2. Entonces $\frac{DE}{AB} = \frac{r}{r^2+r+1}$

2.6.2 Explicación

El Lema Nº 6 establece que si se tiene una semicircunferencia de diámetro AB, se localiza un punto C que pertenece al diámetro AB tal que $\frac{AC}{CB} = r$, además se construyen dos semicircunferencias inscritas a la semicircunferencia de diámetro AB; estas semicircunferencias con diámetros determinados por el punto C, y si se construye una circunferencia que sea tangente a las dos semicircunferencias determinadas por el punto C y también sea tangente a la semicircunferencia de diámetro AB, entonces $\frac{DE}{AB} = \frac{r}{r^2+r+1}$. En la Figura 31 se ilustran los objetos que intervienen en las premisas de este lema.

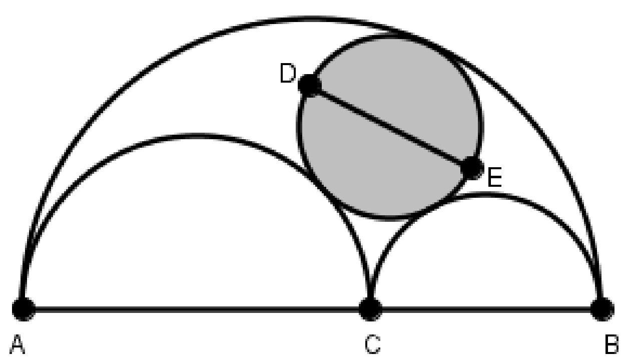


Figura 31: Lema 6

2.6.3 Demostración

Inicialmente se hace que el diámetro DE de la circunferencia C_1 sea paralelo al diámetro AC de la semicircunferencia S.

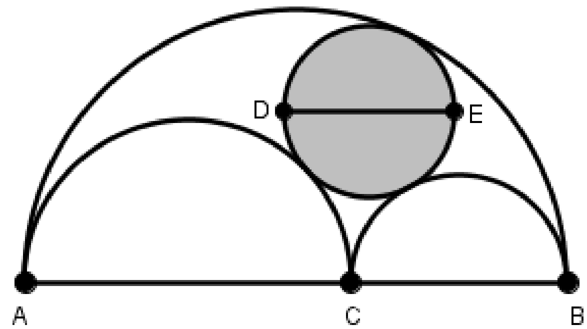


Figura 32.

Sean los puntos F, G y H, puntos de tangencia entre la circunferencia C_1 y las semicircunferencias S, S_1 y S_2 respectivamente.

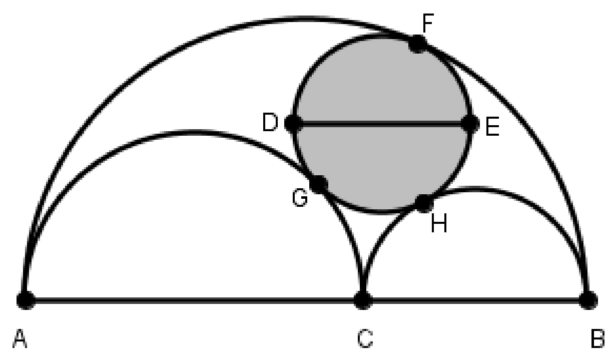


Figura 33.

Se trazan los segmentos AD, DF, FE y BE.

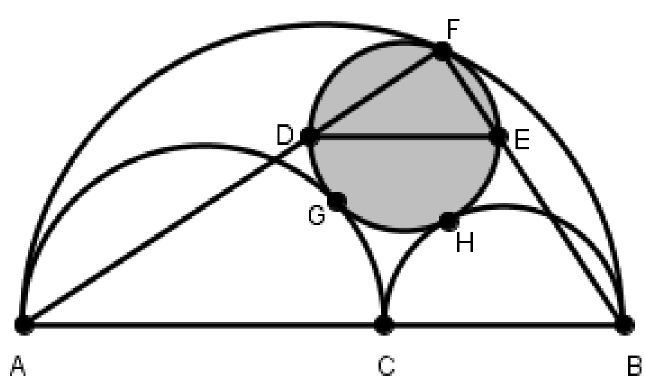


Figura 34.

Utilizando la proposición 1 parte 1 para la circunferencia C_1 y la semicircunferencia S, se tiene que los puntos A, D y F son colineales, igualmente los puntos F, E y B.

Ahora, se trazan los segmentos AG, GE, CG y GD.

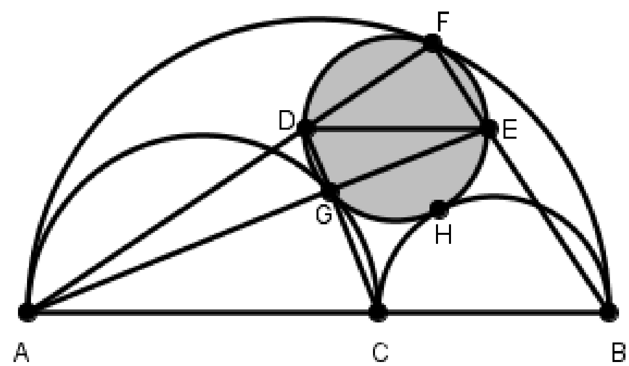


Figura 35.

Utilizando la proposición 1 parte 2 para la circunferencia C_1 y la semicircunferencia S_1 se tiene que los puntos A, G y E son colineales, igualmente los puntos D, G y C.

Ahora, se trazan los segmentos BH, HD, CH y HE.

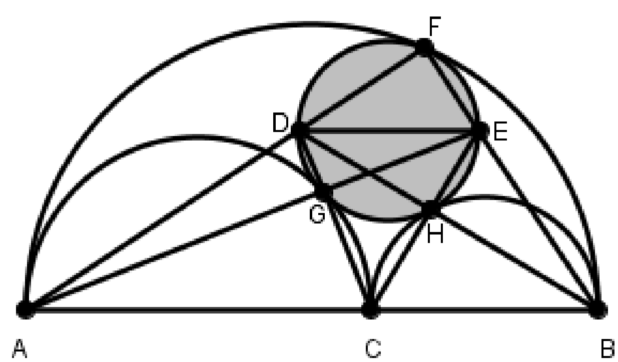


Figura 36.

Utilizando la proposición 1 parte 2 para la circunferencia C_1 y la semicircunferencia S_2 se tiene que los puntos B, H y D son colineales, igualmente los puntos E, H y C.

Sea el punto I el punto de intersección entre el segmento AF y la semicircunferencia S_1. Sea el punto J el punto de intersección entre el segmento BF y la semicircunferencia S_2.

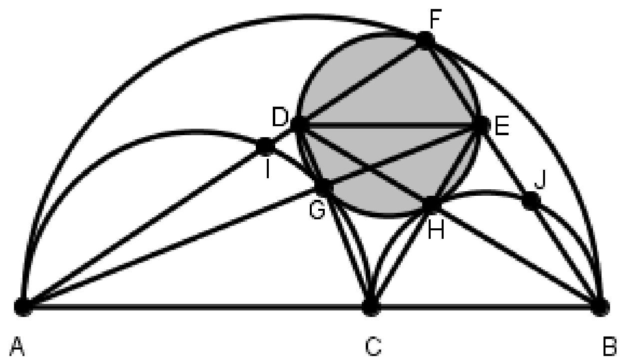


Figura 37.

Se trazan los segmentos CI y CJ

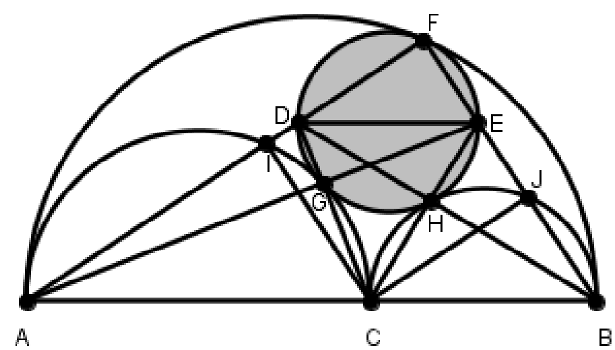


Figura 38.

Sea K el punto de intersección entre los segmentos AE y CI. Sea L el punto de intersección entre los segmentos BD y CJ.

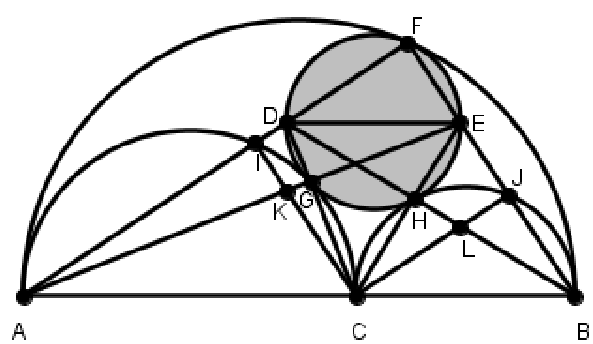


Figura 39.

Prolónguese el segmento DK de tal manera que se interseque con el segmento AB en el punto M. Prolónguese el segmento EL de tal manera que se interseque con el segmento AB en el punto M. Luego se trazan los segmentos DM y EN.

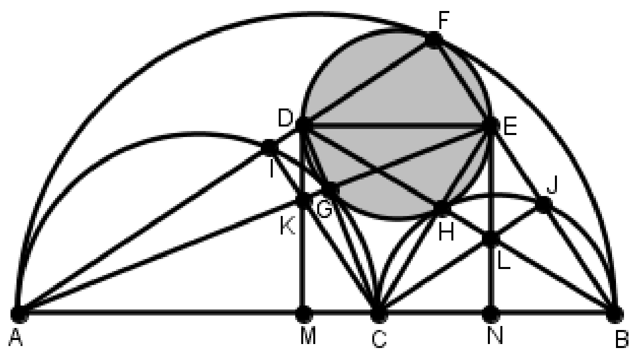


Figura 40.

Los ángulos AIC y AGC son rectos por estar inscritos en la semicircunferencia S_1, por lo tanto los segmentos CI y AG son alturas del triángulo ADC. Como el punto K es la intersección entre las alturas del triángulo ADC entonces el segmento DM es altura del triángulo ADC, por lo tanto el segmento DM es perpendicular al segmento AB.

Los ángulos BJC y BHC son rectos por estar inscritos en la semicircunferencia S_2, por lo tanto los segmentos CJ y BH son alturas del triángulo BCE. Como el punto L es la intersección entre las alturas del triángulo BCE entonces el segmento EN es altura del triángulo BCE, por lo tanto el segmento EN es Perpendicular al segmento AB.

Como DM y EN son perpendiculares al segmento AB entonces los segmentos DM y EN son paralelos.

Como los ángulos AIC y AFB son rectos por estar inscritos en las semicircunferencias S_1 y S respectivamente, entonces los segmentos CI y BF son paralelos.

En adelante se utilizara el teorema de tales entre paralelas para definir algunas proporciones.

Debido a que el segmento CI es paralelo con el segmento BF y teniendo en cuenta los segmentos AB y AE se tiene que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AK}{KE} \tag{I}$$

Debido a que el segmento DM es paralelo con el segmento $EN,$ y teniendo en cuenta los segmentos AN y AE se tiene que

$$\frac{AM}{MN} = \frac{AK}{KE} \qquad \text{(II)}$$

Igualando las ecuaciones (I) y (II) se tiene que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AK}{KE} = \frac{AM}{MN}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AM}{MN} \qquad \text{(III)}$$

Ahora, como los ángulos AFB y CJB son rectos por estar inscritos en las semicircunferencias S y S_2 respectivamente, entonces los segmentos CJ y AF son paralelos.

Debido a que el segmento CJ es paralelo con el segmento AF, y teniendo en cuenta los segmentos AB y DB se tiene que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{DL}{LB} \qquad \text{(IV)}$$

Debido a que el segmento DM es paralelo con el segmento $EN,$ y teniendo en cuenta los segmentos MB y DB se tiene que

$$\frac{MN}{NB} = \frac{DL}{LB} \qquad \text{(V)}$$

Igualando las ecuaciones (IV) y (V) se tiene que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{DL}{LB} = \frac{MN}{NB}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{MN}{NB} \qquad \text{(VI)}$$

Como el cuadrilátero $DENM$ es un paralelogramo, entonces sus lados opuestos son congruentes, por lo tanto $DE = MN$

En la figura 40 se puede observar que

$$AB = AM + MN + NB \qquad \text{(VII)}$$

Ahora, en la ecuación (III) se despeja AM

$$AM = \frac{AC}{CB} \; MN \qquad \text{(VIII)}$$

Ahora, en la ecuación (VI) se despeja NB

$$NB = \frac{CB}{AC} \; MN \qquad \text{(IX)}$$

Ahora, reemplazando en la ecuación (VII), las ecuaciones (VIII) y (IX) y teniendo en cuenta que $\frac{AC}{CB} = r$ se obtiene que

$$AB = \frac{AC}{CB} \; MN \;\; + MN + \frac{CB}{AC} \; MN$$

$$AB = MN \;\; \frac{AC}{CB} + 1 + \frac{CB}{AC}$$

$$AB = MN \;\; 1 + \frac{AC}{CB} + \frac{CB}{AC}$$

$$AB = MN \;\; 1 + r + \frac{1}{r}$$

$$AB = MN \;\; \frac{r + r^2 + 1}{r}$$

$$\frac{AB}{MN} = \;\; \frac{r + r^2 + 1}{r}$$

$$\frac{MN}{AB} = \;\; \frac{r}{r + r^2 + 1}$$

Como $MN = DE$, entonces

$$\frac{DE}{AB} = \;\; \frac{r}{r + r^2 + 1}$$

2.7 Lema Nº 7

2.7.1 Enunciado

Sea un cuadrado $ABCD$ inscrito en una circunferencia C_1 con centro O y una circunferencia C_2 con centro en O inscrita en el cuadrado $ABCD$, entonces el área del circulo C_2 es igual a dos veces el área del circulo C_1.

2.7.2 Explicación

El Lema Nº 7 establece que si se tiene una circunferencia con centro O y se inscribe un cuadrado en esta y además se inscribe en el cuadrado una circunferencia de centro O, entonces el área del círculo mayor es dos veces el área del círculo menor. Esto se representa de mejor manera en la Figura 41.

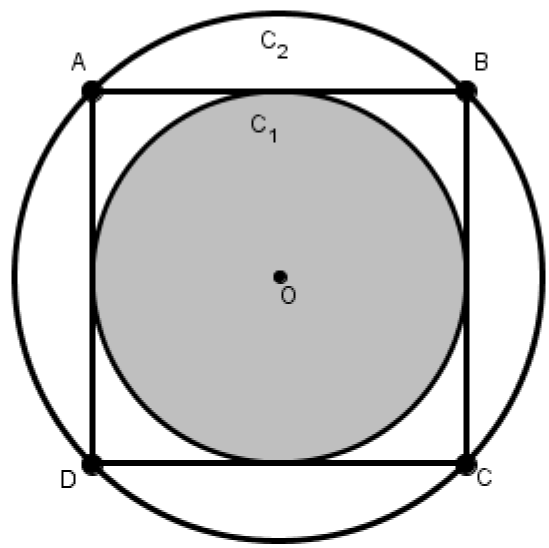


Figura 41: Lema 7

2.7.3 Demostración

Denótese por: $r_1 =$ Radio del círculo C_1

$r_2 =$ Radio del círculo C_2

$A_1 =$ Área del círculo de radio r_1

$A_2 =$ Área del círculo de radio r_2

Entonces, si el segmento AB es el diámetro del círculo C_1, entonces $r_1 = \frac{AB}{2}$, luego,

$$A_1 = \pi \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} AB^2$$

es decir,

$$4A_1 = \pi\, AB^2 \qquad \text{(I)}$$

Ahora, usando el T.P.[3] se puede mostrar que la diagonal del cuadrado ABCD es $BD = \sqrt{2}AB$ que a su vez es el diámetro del círculo C_2.

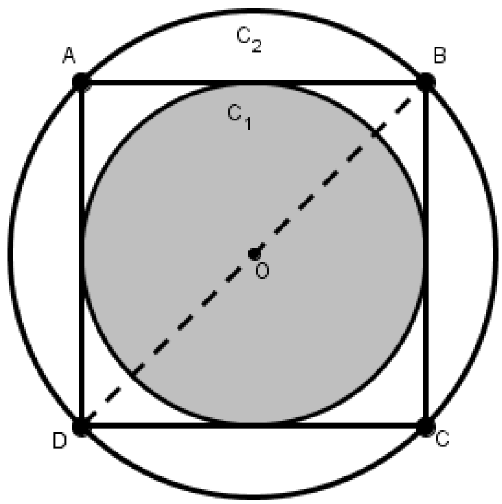


Figura 42.

Como $BD^2 = AB^2 + AD^2$ por T.P., a su vez $AB = AD$, entonces $BD^2 = 2AB^2$, por lo tanto $BD = \sqrt{2}AB$.

Entonces, $r_2 = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{2}AB}{2}$ por lo tanto,

$$A_2 = \pi \left(\frac{\sqrt{2}AB}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\, 2AB^2 = \frac{\pi}{2}\, AB^2$$

es decir,

$$2A_2 = \pi\, AB^2 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando la ecuación (I) en la ecuación (II), se tiene que

$$2A_2 = \pi\, AB^2 = 4A_1, \text{ entonces}$$

[3] Teorema de Pitágoras.

$$2A_2 = 4A_1, \text{ por lo tanto,}$$

$$A_2 = 2A_1$$

Así se concluye que el área del círculo C_2 es igual a dos veces el área del círculo C_1.

2.8 Lema Nº 8

2.8.1 Enunciado

Sea el segmento CD cualquier cuerda de una circunferencia C_1 con centro en O, y sea A un punto en la recta CD talque $C - D - A$ y $AD = r$, siendo r el radio de la circunferencia C_1. Si B es un punto de de la circunferencia C_1 talque $A - O - B$, entonces $m\angle BOC = 3m\angle BAC$.

2.8.2 Explicación

El Lema Nº 8 establece que si se tiene una circunferencia con centro en O y se traza una cuerda CD, si localizamos un punto A en el rayo CD tal que $C - D - A$ y $AD = r$, siendo r el radio de la circunferencia con centro en O y sea B el punto de intersección entre la circunferencia y el rayo AO, entonces la medida del ángulo BOC es igual a tres veces la medida del ángulo BAC. Este lema está relacionado el problema antiguo de la trisección del ángulo. Esto se ilustra en la Figura 43.

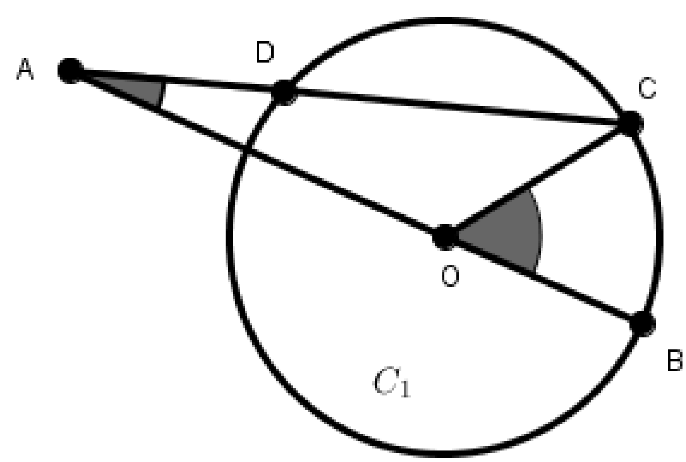


Figura 43: Lema 8

2.8.3 Demostración

En adelante se usará $2\llcorner$ para representar un ángulo de 180 grados.

Como los puntos $B, C\ y\ D$ son puntos de C_1, entonces $OB = OC = OD = AD$ por ser radios de C_1

Trácese el segmento DO y considérense los triángulos ADO y CDO, los cuales son isósceles y por lo tanto $m\angle DAO = m\angle AOD\ y\ m\angle ODC = m\angle OCD$.

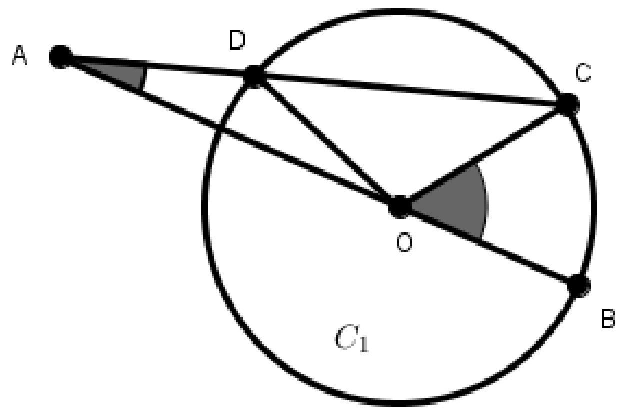


Figura 44.

Además, como el $\angle ODC$ es el ángulo externo del ΔADO, entonces $m\angle ODC = m\angle DAO + m\angle AOD$, luego

$m\angle ODC = 2m\angle AOD$. Dado que $m\angle DAO = m\angle AOD$

Como $m\angle COD + m\angle ODC + m\angle OCD = 2\llcorner$, entonces $m\angle COD = 2\llcorner - m\angle ODC - m\angle OCD$ y como $m\angle ODC = m\angle OCD$ entonces,

$$m\angle COD = 2\llcorner - m\angle ODC - m\angle ODC$$

$$m\angle COD = 2\llcorner - 2m\angle ODC$$

Ahora, como $m\angle ODC = 2m\angle AOD$, entonces,

$$m\angle COD = 2\llcorner - 2\ 2m\angle AOD$$

$$m\angle COD = 2\llcorner - 4m\angle AOD \qquad \text{(I)}$$

En la figura 44, se puede observar que:

$$m\angle BOC + m\angle COD + m\angle AOD = 2\llcorner \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando la ecuación (I) en la ecuación (II) se tiene que:

$$m\angle BOC + \ 2\llcorner - 4m\angle AOD \ + m\angle AOD = 2\llcorner$$

Entonces, reduciendo términos, se tiene que:

$$m\angle BOC - 4m\angle AOD + m\angle AOD = 0$$

$$m\angle BOC - 3m\angle AOD = 0$$

$$m\angle BOC = 3m\angle AOD$$

Así se concluye que la medida del ángulo BOC es igual a tres veces la medida del ángulo AOD.

2.9 Lema Nº 9

2.9.1 Enunciado

Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia con centro en O, son perpendiculares y su intercepción es el punto P, entonces $mAC + mBD = mDA + mCB$.

2.9.2 Explicación

El Lema Nº 9 establece que si se tiene una circunferencia con centro O, se construyen dos cuerdas perpendiculares y estas cuerdas determinan cuatro arcos en la circunferencia, entonces la suma de las medidas de dos arcos (no consecutivos) es igual a la suma de las medidas de los otros dos arcos (no consecutivos). Esto se evidencia de mejor manera en la Figura 45.

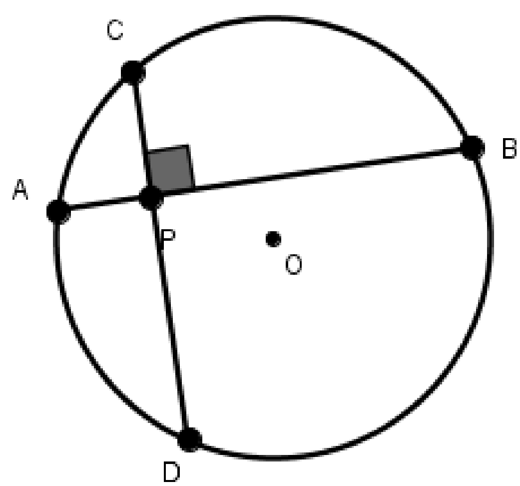


Figura 45: Lema 9

2.9.3 Demostración

En adelante se nombrarán los diferentes arcos de la figura 46 en sentido de las manecillas del reloj.

Trácese una cuerda EF paralela a la cuerda AB por el punto O.

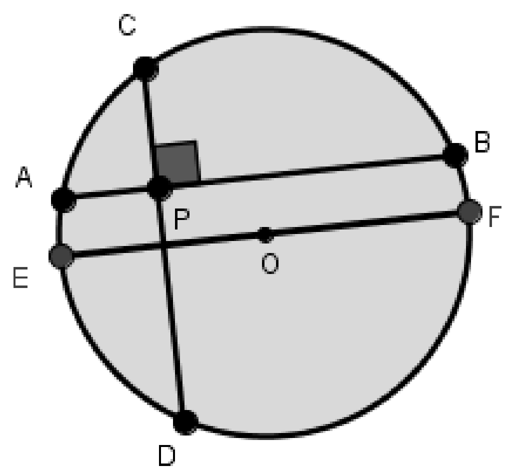


Figura 46.

Como EF es el diámetro de la circunferencia entonces los arcos ECF y FDE son congruentes por ser semicircunferencias.

Ahora, como las cuerdas EF y CD son perpendiculares, entonces $mDE = mEC$ y $mCF = mFD$. De igual manera, Como las cuerdas AB y EF son paralelas entonces los arcos satisfacen $mEA = mBF$.

En la figura 46, se puede observar que $mFDE = mFD + mDE$ y como $mDE = mEC$ y $mEC = mEA + mAC$ entonces

$$mFDE = mFD + mEA + mAC$$

Luego, como $mEA = mBF$ se tiene que $mFDE = mFD + mBF + mAC$ y como $mBD = mBF + mFD$ entonces

$$mFDE = mBD + mAC \qquad \text{(I)}$$

En la figura 46, se puede observar que $mECF = mEC + mCF$ y como $DE = EC$ y $mCF = mCB + mBF,$ entonces

$$mECF = mDE + mCF$$

$$mECF = mDE + mCB + mBF$$

Luego, como $mEA = mBF$ se tiene que $mECF = mDE + mCB + mEA$ y como $mDA = mDE + mEA$ entonces

$$mECF = mDA + mCB \qquad \text{(II)}$$

Como $FDE = ECF$ y por las ecuaciones (I) y (II) entonces

$$mAC + mBD = mDA + mCB$$

Así se comprueba que la suma de los arcos opuestos en una circunferencia son iguales.

2.10 Lema Nº 10

2.10.1 Enunciado

Sean B, C y D puntos de la circunferencia C_1, y dos rectas tangentes a esta circunferencia C_1, una que pase por el punto B y otra que pase por el punto C de tal manera que estas se intersequen en el punto A, donde AD corta a la circunferencia C_1, además, si se traza una paralela a AD por el punto C se obtiene la cuerda CE, y BE se interseca con AD en el punto F. Si FG se traza perpendicular al CE y G pertenece a CE entonces $CG = GE$.

2.10.2 Explicación

El Lema Nº 10 establece que si se tiene una circunferencia, se ubica un punto exterior A por el cual se pasan dos tangentes a la circunferencia en los puntos B y C, determinando así los segmentos AB y AC. D y E no están en el arco determinado por los puntos B y C, también se traza el segmento AD y el segmento EC tal que éste sea paralelo a AD, además se traza el segmento BE y este se interseca con el segmento DA en el punto F, por último se traza un segmento FG perpendicular al segmento EC con G que pertenece al segmento EC, entonces la medida del segmento CG es igual a la medida del segmento GE. Esto se ilustra de mejor manera en la Figura 47.

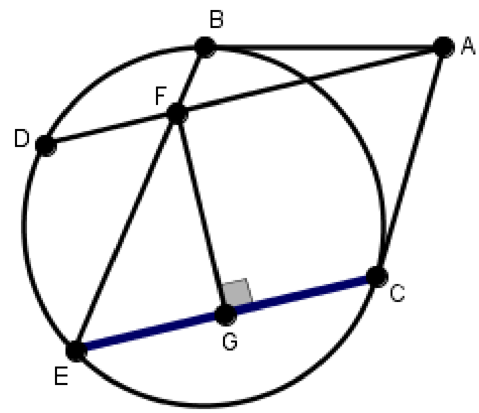


Figura 47: Lema 10

2.10.3 Demostración

Inicialmente se demuestra que el ángulo ABC es congruente con el ángulo BEC:

Se tendrá en cuenta la figura 48 para la demostración:

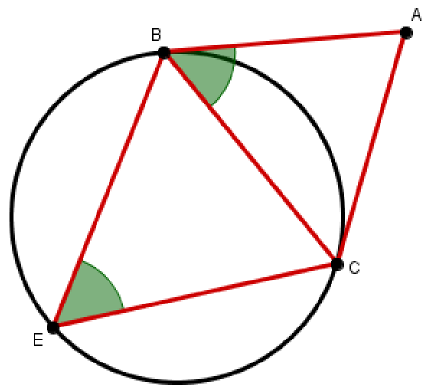


Figura 48.

Sea el punto O el centro de la circunferencia:

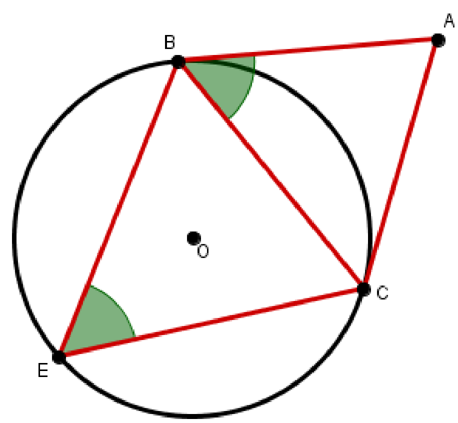


Figura 49.

Se traza el diámetro CK:

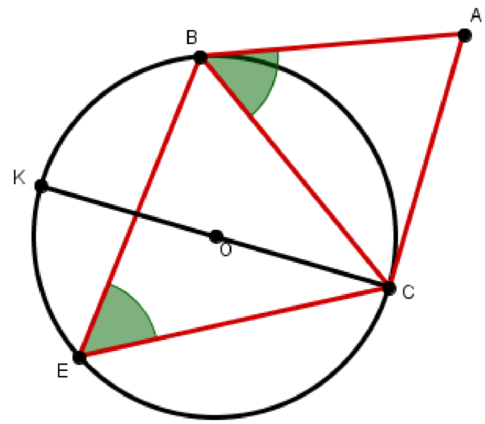


Figura 50.

Luego, se trazan los radios BO y OE y los segmentos BK y EK:

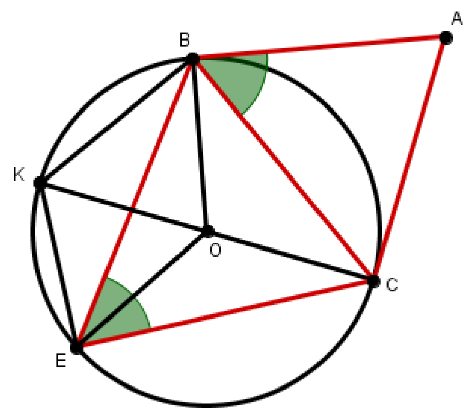


Figura 51.

Se nombran los diferentes ángulos con letras minúsculas a, b, c, d, g, h, i, j de la siguiente manera:

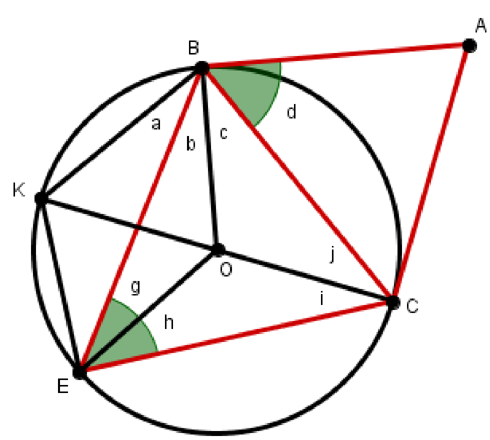


Figura 52.

Utilizando el teorema del triangulo isósceles se tiene que:

En el triángulo BOC la $m\angle c = m\angle j$
En el triángulo EOC la $m\angle h = m\angle i$
En el triángulo BOE la $m\angle b = m\angle g$

También se tiene que en ángulo KBC es recto por estar inscrito en una semicircunferencia, es decir KBC mide $90°$. Por lo tanto

$$m\angle a + m\angle b + m\angle c = 90° \qquad \text{(I)}$$

Ahora, como BA es tangente a la circunferencia, entonces BA es perpendicular al radio OB. Por lo tanto:

$$m\angle c + m\angle d = 90° \qquad \text{(II)}$$

Igualando las ecuaciones (I) y (II) se obtiene

$$m\angle a + m\angle b + m\angle c = m\angle c + m\angle d$$

$$m\angle a + m\angle b = m\angle d \qquad \text{(III)}$$

Ahora, en el triángulo EBC se tiene que la suma de los ángulos interiores es igual a $180°$ por lo tanto

$$m\angle b + m\angle c + m\angle j + m\angle i + m\angle h + m\angle g = 180°$$

Teniendo en cuenta que $m\angle c = m\angle j$, $m\angle h = m\angle i$ y $m\angle b = m\angle g$ entonces

$$m\angle b + m\angle c + m\angle c + m\angle h + m\angle h + m\angle b = 180°$$

$$2m\angle b + 2m\angle c + 2m\angle h = 180°$$

$$2\ m\angle b + m\angle c + m\angle h = 180°$$

$$m\angle b + m\angle c + m\angle h = \frac{180°}{2}$$

Entonces,

$$m\angle b + m\angle c + m\angle h = 90° \qquad \text{(IV)}$$

Igualando las ecuaciones (I) y (IV) se obtiene:

$$m\angle a + m\angle b + m\angle c = m\angle b\ + m\angle c + m\angle h$$

$$m\angle a = m\angle h$$

Como $m\angle a + m\angle b = m\angle d$, $m\angle a = m\angle h$ y el $m\angle b = m\angle g$ entonces

$$m\angle a + m\angle b = m\angle d$$

$$m\angle h + m\angle b = m\angle d$$

$$m\angle h + m\angle g = m\angle d$$

Como el ángulo d es el ángulo ABC y $m\angle h + m\angle g$ es igual a la medida del ángulo BEC entonces: el ángulo ABC es congruente con el ángulo BEC.

Teniendo demostrado que el ángulo ABC es congruente con el ángulo BEC, se inicia con la demostración de la proposición 10.

Se trazan los segmentos BC, FC y el punto H es la intersección entre los segmentos BC y AD,

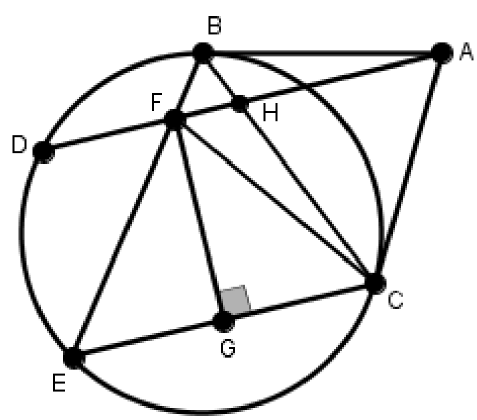


Figura 53.

Ahora, $AB = AC$ por ser tangentes a una circunferencia por un punto exterior, es decir el triangulo ABC es isósceles por tanto

$$m\angle ABC = m\angle ACB \qquad \text{(I)}$$

También se tiene que $m\angle AFC = m\angle FCE$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

Además, se demostró que

$$m\angle ABC = m\angle BEC \tag{II}$$

Como $\angle BFA$ y $\angle BEC$ son ángulos correspondientes entre paralelas entonces $m\angle BFA = m\angle BEC$, por lo tanto $m\angle ABC = m\angle BFA$

Ahora, $\Delta ABF\ y\ \Delta AHB$ son semejantes, porque $m\angle ABC = m\angle BFA$ y los triángulos comparten el ángulo $\angle BAF$, luego por definición de triángulos semejantes se tiene que

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AB}{AF}$$

Como $AB = AC$ se tiene que

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AF}$$

Entonces los triángulos $FCA\ y\ CHA$ son semejantes, por eso se tiene que:

$$m\angle AFC = m\angle ACB$$

Como $m\angle AFC = m\angle ACB$ y $m\angle AFC = m\angle FCE$ entonces

$$m\angle ACB = m\angle FCE \tag{III}$$

Por las ecuaciones (I) y (II) se tiene que

$$m\angle ACB = m\angle BEC \tag{IV}$$

Por las ecuaciones (III) y (IV) se tiene que

$$m\angle FCE = m\angle BE$$

Como $m\angle FCE = m\angle BEC$ entonces $FE = FC$ por teorema reciproco del triangulo isósceles.

$m\angle EFG = m\angle CFG$ porque si en dos triángulos dos ángulos correspondientes son congruentes entonces el tercer ángulo es congruente.

Ahora, como $FE = FC$, $m\angle EFG = m\angle CFG$ y $FG = FG$ entonces, los triángulos $ABF\ y\ BAC$ son congruentes por el teorema LAL, entonces, por definición de congruencia de triángulos $EG = GC$.

2.11 Lema Nº 11

2.11.1 Enunciado

Sean dos cuerdas AB y CD en una circunferencia S_1 de radio r se cortan en ángulo recto en un punto P, no siendo el centro, entonces $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = (diámetro)^2$

2.11.2 Explicación

El Lema Nº 11 establece que si se tiene una circunferencia de radio r, y se trazan dos cuerdas AB y CD (distintas al diámetro) que sean perpendiculares, siendo el punto P su intersección, entonces la suma de los cuadrados de las medidas de los segmentos determinados por el punto P es igual a la medida del diámetro de la circunferencia al cuadrado. Esto se ilustra en la Figura 54.

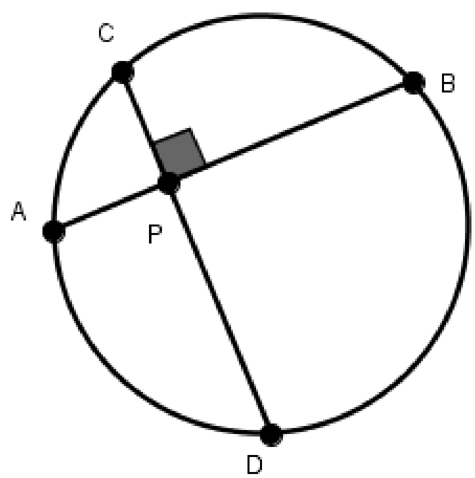


Figura 54: Lema 11

2.11.3 Demostración

Se traza CE como diámetro de la circunferencia.

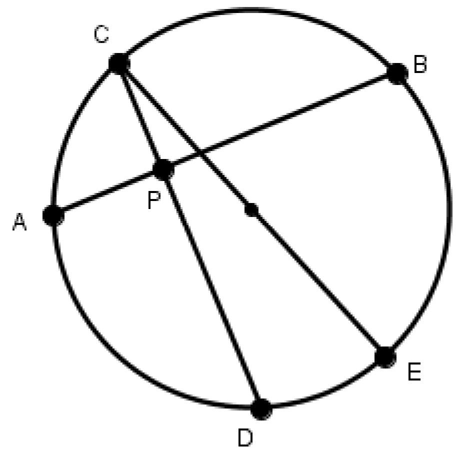


Figura 55.

Luego constrúyanse los segmentos $AC, CB, AD\ y\ BE$.

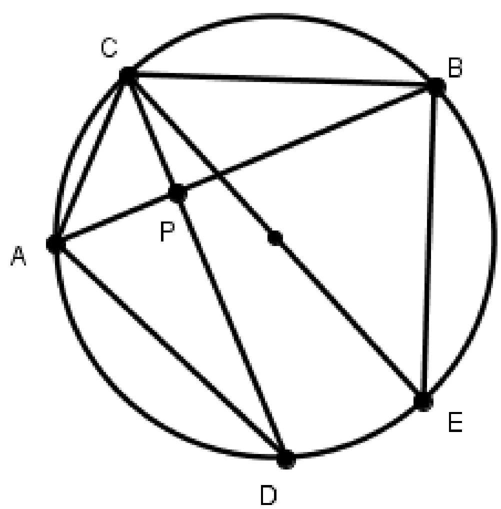


Figura 56.

Ahora, $m\angle CAP = m\angle CEB$ porque subtienden al mismo arco, también $m\angle APC = m\angle EBC$ por ángulo recto, es decir que $m\angle ACP = m\angle BCE$. Entonces $\Delta ACP\ y\ \Delta ECB$ son semejantes.

Del mismo modo, $m\angle ADC = m\angle ABC$ porque subtienden al mismo arco, también $m\angle APD = m\angle CPB$ por ángulo recto, es decir que $m\angle DAP = m\angle BCP$. Entonces $\Delta APD\ y\ \Delta CPB$ son semejantes.

Como $\Delta APD\ y\ \Delta CPB$ son semejantes se tiene que

$$\frac{AP}{CP} = \frac{AD}{CB} = \frac{DP}{BP}$$

Entonces,

$$\frac{AP}{CP} = \frac{AD}{CB} \qquad \text{(I)}$$

Como $\Delta ACP\ y\ \Delta ECB$ son semejantes se tiene que

$$\frac{AP}{BE} = \frac{CP}{CB} = \frac{AC}{CE}$$

Entonces,

$$\frac{AP}{CP} = \frac{BE}{CB} \qquad \text{(II)}$$

Ahora, se reemplaza la ecuación (I) en la ecuación (II) se obtiene

$$\frac{AD}{CB} = \frac{BE}{CB}$$

Es decir que:

$$AD = BE \qquad \text{(III)}$$

Por teorema de Pitágoras para el $\Delta APD\ y\ \Delta CPB$ respectivamente se tiene que

$$AD^2 = AP^2 + DP^2$$
$$BC^2 = CP^2 + BP^2$$

Sumando estas dos ecuaciones resulta

$$AD^2 + BC^2 = AP^2 + DP^2 + CP^2 + BP^2$$

Luego, por (III) se sabe $AD = BE$ entonces se tiene que

$$\boldsymbol{BE^2} + \boldsymbol{BC^2} = AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 \qquad \text{(IV)}$$

Por teorema de Pitágoras para el triángulo CEB se tienen que

$$CE^2 = \boldsymbol{BE^2} + \boldsymbol{BC^2} \qquad \text{(V)}$$

Luego, la ecuación (IV) se reemplaza por la ecuación (V) y se obtiene

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = CE^2$$

Y como el segmento CE es el diámetro de la circunferencia entonces

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = (diametro)^2$$

2.12 Lema Nº 12

2.12.1 Enunciado

Sea AB el diámetro de una semicircunferencia S_1, y los puntos D y E que pertenecen a la semicircunferencia S_1. Sean dos tangentes a la semicircunferencia S_1, una que contenga el punto D y otra que contenga el punto E de tal manera que se intersequen en el punto C. Si AE se interseca con BD en el punto F, entonces $CF \perp AB$.

2.12.2 Explicación

El Lema Nº 12 establece que si se tiene una semicircunferencia de diámetro AB y un punto C exterior a esta, se construyen tangentes por el punto exterior C a la semicircunferencia obteniendo los segmentos DC y CE, y si además el segmento DB y AE se intersecan en F, entonces el segmento CF es perpendicular a diámetro AB. Esto se representa en la Figura 57.

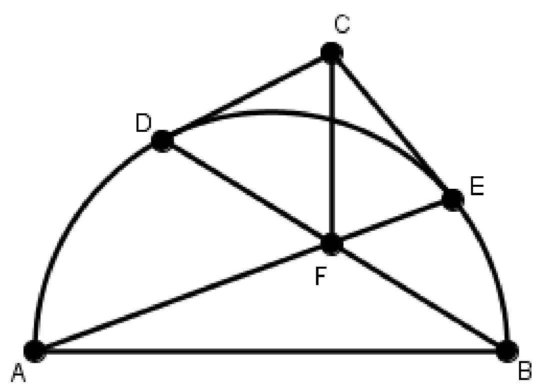


Figura 57: Lema 12

2.12.3 Demostración

Inicialmente se demuestra que el ángulo CDB es congruente con el ángulo DAB.

Se tendrá en cuenta la figura 58 para la demostración.

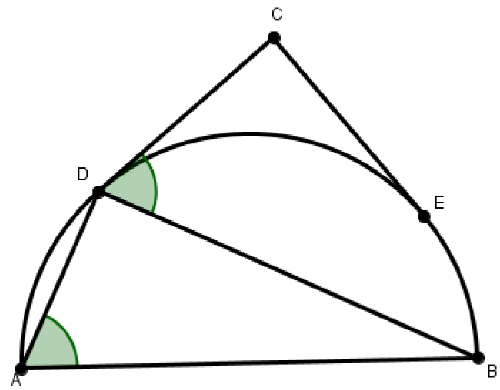


Figura 58.

Sea el punto O el centro de la semicircunferencia.

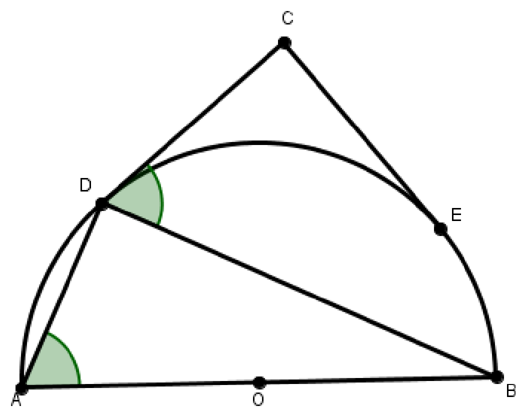


Figura 59.

Se trazan el radio DO.

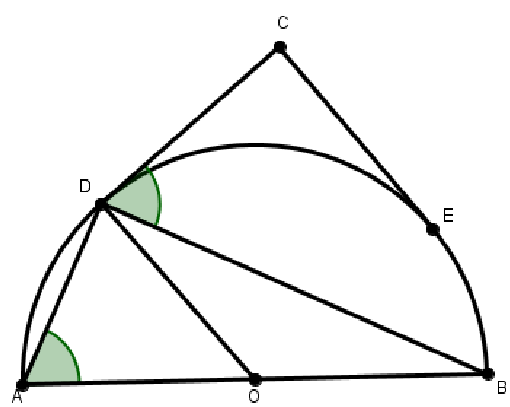


Figura 60.

Se nombran los diferentes ángulos con letras minúsculas a, b, c, d de la siguiente manera:

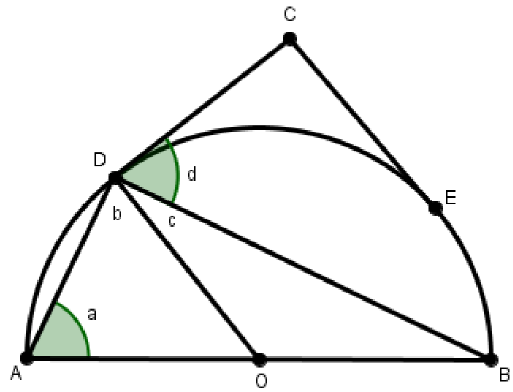


Figura 61.

Se tiene que el ángulo ADB es recto por estar inscrito en una semicircunferencia, es decir ADB mide $90°$. Por lo tanto

$$m\angle b + m\angle c = 90°. \qquad \text{(I)}$$

Ahora, como CD es tangente a la semicircunferencia, entonces CD es perpendicular al radio OD. Por lo tanto

$$m\angle c + m\angle d = 90° \qquad \text{(II)}$$

Igualando las ecuaciones (I) y (II) se obtiene que

$$m\angle b + m\angle c = m\angle c + m\angle d$$

$$m\angle b = m\angle d \qquad \text{(III)}$$

Como $OD = OA$ por ser radios de la semicircunferencia, entonces el triángulo AOD es isósceles, por tanto

$$m\angle b = m\angle a \qquad \text{(IV)}$$

Igualando las ecuaciones (III) y (IV) se obtiene que

$$m\angle d = m\angle a$$

Como el ángulo d es el ángulo CDB y el ángulo a es el ángulo DAB entonces, el ángulo CDB es congruente con el ángulo DAB.

Igualmente se puede demostrar que el ángulo CEA es congruente con el ángulo EBA.

Ya demostrado que el ángulo CDB es congruente con el ángulo DAB, se inicia la demostración de la proposición 12.

Se trazan los segmentos AD y BE

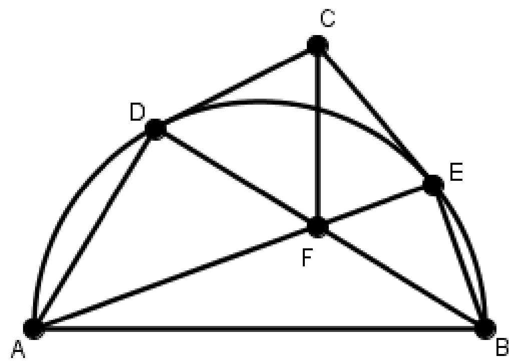


Figura 62.

Se construye un segmento FG de tal manera que este sea perpendicular al segmento AB.

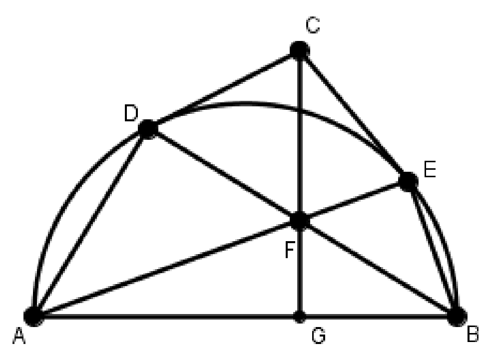


Figura 63.

En adelante se usará $2\llcorner$ para representar un ángulo de 180 grados y $1\llcorner$ para representar un ángulo de 90 grados.

En el triángulo ABD, $m\angle ADB + m\angle DAB + m\angle DBA = 2\llcorner$ porque la suma de la medida de los ángulos de un triángulo es igual a 180 grados.

Como $\angle ADB$ es un ángulo inscrito en una semicircunferencia entonces él $\angle ADB$ es recto, luego,

$$1\llcorner + m\angle DAB + m\angle DBA = 2\llcorner$$

simplificando,

$$m\angle DAB + m\angle DBA = 1\llcorner \tag{I}$$

Ahora, en el triángulo AEB, $m\angle AEB + m\angle EAB + m\angle EBA = 2\llcorner$ porque la suma de la medida de los ángulos internos de un triangulo es igual a 180 grados, y $\angle AEB$ es un ángulo inscrito en una semicircunferencia entonces él $\angle AEB$ es recto, luego,

$$1\llcorner + m\angle EAB + m\angle EBA = 2\llcorner$$

simplificando,

$$m\angle EAB + m\angle EBA = 1\llcorner$$

Como $m\angle AEB = 1\llcorner$, y teniendo en cuenta la ecuación (I) se tiene que

$$m\angle DAB + m\angle DBA = m\angle AEB \tag{II}$$

Si se suma a ambos lados de la ecuación (II) el $\angle DBE$ se obtiene

$$m\angle DAB + m\angle DBA + m\angle DBE = m\angle AEB + m\angle DBE \tag{III}$$

En la figura 63 se observa que, $m\angle EBA = m\angle DBA + m\angle DBE$ y como el ángulo DFE es externo al triangulo FEB entonces $m\angle DFE = m\angle AEB + m\angle DBE$.

Como $m\angle EBA = m\angle DBA + m\angle DBE$ se reemplaza en la ecuación (III) se obtiene que:

$$m\angle DAB + m\angle EBA = m\angle AEB + m\angle DBE \tag{IV}$$

Como $m\angle DFE = m\angle AEB + m\angle DBE$ se reemplaza en la ecuación (IV) se tiene que

$$m\angle DAB + m\angle EBA = m\angle DFE$$

Por lo tanto, como se demostró anteriormente

$$m\angle CDB = m\angle DAB \tag{V}$$

y

$$m\angle CEA = m\angle EBA \tag{VI}$$

Al sumar las ecuaciones (V) y (VI) se obtiene que

$$m\angle CDB + m\angle CEA = m\angle DAB + m\angle EBA \qquad \text{(VII)}$$

Como, $m\angle DAB + m\angle EBA = m\angle DFE$ se reemplaza en la ecuación (VII) se tiene que

$$m\angle CDB + m\angle CEA = m\angle DFE \qquad \text{(VIII)}$$

Ahora se construye el segmento CO en el rayo DC talque $CO = CE$, luego, se trazan los segmentos OE y CE.

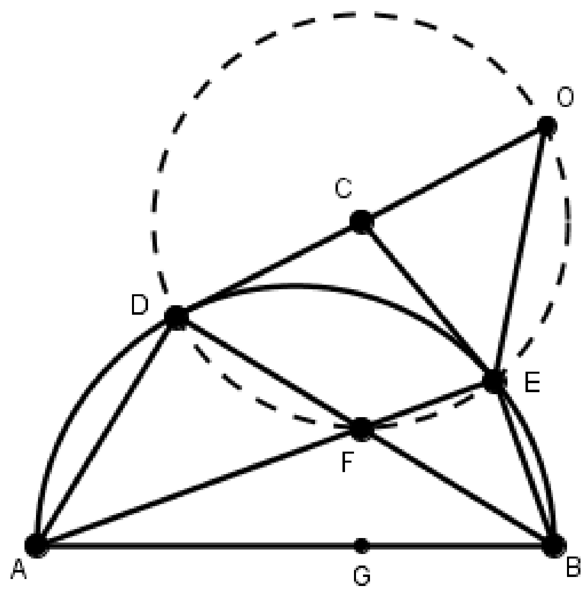


Figura 64.

Se tiene que, $m\angle CEO = m\angle DOE$ porque el triángulo CEO es isósceles debido a que $CE = CO$.

Ahora, se considerará el cuadrilátero $DOEF$, se compararán sus ángulos opuestos y finalmente se sumarán los ángulos opuestos.

Se inicia con los ángulos $m\angle DFE + m\angle DOE$, como $m\angle DFE = m\angle CDB + m\angle CEA$ (ecuación VIII) se reemplaza y se tiene

$$m\angle DFE + m\angle DOE = m\angle CDB + m\angle CEA + m\angle DOE \qquad \text{(IX)}$$

Con los ángulos $m\angle FEO + m\angle CDB$, en la figura 64 $m\angle FEO = m\angle CEA + m\angle CEO$ luego se reemplaza y se obtiene

$$m\angle FEO + m\angle CDB = m\angle CEA + m\angle CEO + m\angle CDB \qquad \text{(X)}$$

Como $m\angle CEO = m\angle DOE$ reemplazamos en la ecuación (X),

$$m\angle FEO + m\angle CDB = m\angle CEA + m\angle DOE + m\angle CDB$$

organizando la ecuación se tiene que

$$m\angle FEO + m\angle CDB = m\angle CDB + m\angle CEA + m\angle DOE \qquad \text{(XI)}$$

Al igualar las ecuaciones (IX) y (XI) se obtiene lo siguiente

$$m\angle DFE + m\angle DOE = m\angle CDB + m\angle CEA + m\angle DOE = m\angle FEO + m\angle CDB$$

es decir,

$$m\angle DFE + m\angle DOE = m\angle FEO + m\angle CDB$$

Entonces, los ángulos opuestos del cuadrilátero al sumarlos son iguales, esto quiere decir que el cuadrilátero se encuentra inscrito en una circunferencia.

Como el cuadrilátero $DOEF$ está inscrito en una circunferencia, entonces los puntos $D, O, E\ y\ F$ pertenecen a la circunferencia y $CD = CO = CE = CF$ por ser radios de la circunferencia.

Como el triángulo CDF es isósceles, entonces $m\angle CDB = m\angle CFD$, además se tenía que $m\angle CDB = m\angle DAB$ por lo tanto

$$m\angle DAB \ = m\angle CFD.$$

Ahora, en la figura 64 se puede observar que en el triángulo AFG se tiene que $m\angle FAG + m\angle AFG + m\angle AGF = 2\llcorner$, como $\angle AGF$ es un ángulo recto, entonces

$$m\angle FAG + m\angle AFG + 1\llcorner \ = 2\llcorner$$

$$m\angle FAG + m\angle AFG = 1\llcorner \qquad \text{(XII)}$$

También se puede observar que en el triángulo ADF se tiene que $m\angle DAF + m\angle ADF + m\angle DFA = 2\llcorner$, pero $\angle ADF$ es un ángulo recto, porque está inscrito en una semicircunferencia, entonces

$$m\angle DAF + 1\llcorner + m\angle DFA = 2\llcorner$$

$$m\angle DAF + m\angle DFA = 1\llcorner \qquad \text{(XIII)}$$

Ahora se suman las ecuaciones (XII) y (XIII) y se obtiene que

$$m\angle FAG + m\angle AFG + m\angle DAF + m\angle DFA = 1\llcorner + 1\llcorner$$

$$m\angle FAG + m\angle DAF + m\angle AFG + m\angle DFA = 2\llcorner$$

Como la medida del ángulo FAG mas la medida del ángulo DAF es igual a la medida del ángulo DAB, además $m\angle DAB = m\angle CFD$ entonces

$$m\angle DAB + m\angle AFG + m\angle DFA = 2\llcorner$$

$$m\angle CFD + m\angle AFG + m\angle DFA = 2\llcorner$$

Es decir, los ángulos $\angle CFD, \angle AFG\ y\ \angle DFA$ forman par lineal, por lo tanto se cumple que $C - F - G$.

Como el segmento FE es perpendicular al segmento AB y se tiene que $C - F - G$ entonces el segmento CG es perpendicular al segmento AB.

2.13 Lema Nº 13

2.13.1 Enunciado

Sea un AB el diámetro de una circunferencia que corta a una cuerda CD (distinta al diámetro) en el punto E, además, los puntos M y N pertenecen a CD y si $AM \perp CD$ y $BN \perp CD$ entonces $CN = DM$.

2.13.2 Explicación

El Lema Nº 13 establece que si se tiene una circunferencia, se traza un diámetro AB y se construye una cuerda distinta a otro diámetro esta se intersecan en el punto E, además se localizan puntos M y N que estén contenidos en CD y si los segmentos AM y BN son perpendiculares a CD, entonces la medida del segmento CN es igual a la medida del segmento DM. Esto se muestra en la Figura 65.

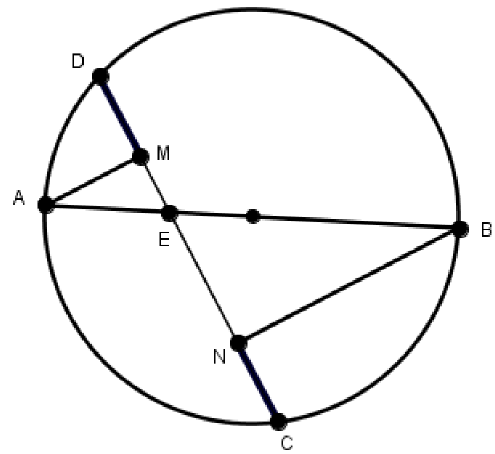


Figura 65: Lema 13

2.13.3 Demostración

Sea O el centro de la circunferencia, trácese el segmento BM y una recta l perpendicular a CD por O, tal que esa intersección sea H. Llámese K el punto de intersección entre el segmento BM y la recta l.

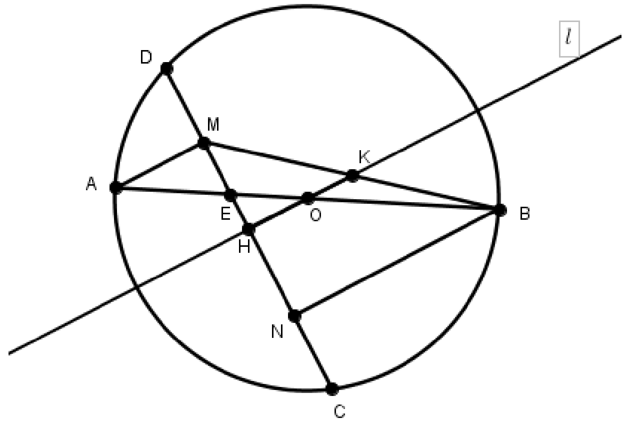


Figura 66.

Ahora, como $DH = HC$, debido a que la perpendicular a cualquier cuerda desde el centro siempre biseca la cuerda. También se tiene que $AO = OB$, por ser AB diámetro de la circunferencia y AO y OB radios.

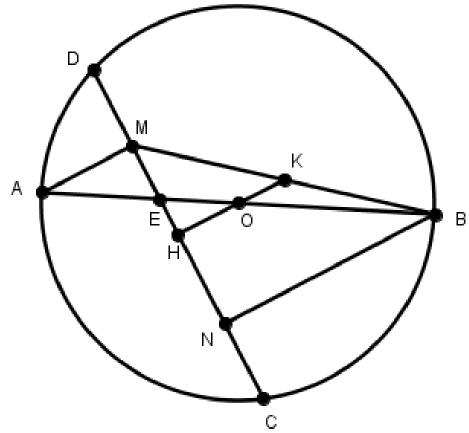


Figura 67.

Como los segmentos AM, HK y BN son perpendiculares a la cuerda DC, entonces los segmentos AM, HK y BN son paralelos entre sí.

Ahora, por el teorema de Thales entre las paralelas AM y HK se tiene que

$$\frac{AO}{OB} = \frac{MK}{KB}$$

Pero $AO = OB$ luego,

$$\frac{AO}{AO} = \frac{MK}{KB}$$

Es decir,

$$KB = MK \qquad \text{(I)}$$

Utilizando nuevamente el teorema de Thales entre las paralelas HK y BN se tiene que

$$\frac{MK}{KB} = \frac{MH}{HN}$$

Pero por (I) como $KB = MK$ luego,

$$\frac{MK}{MK} = \frac{MH}{HN}$$

Es decir,

$$HN = MH \qquad \text{(II)}$$

Ahora, como $D - M - H$ y $H - N - C$ se tiene que

$$DH = DM + MH \;\text{ y }\; HC = HN + NC.$$

Como $DH = HC$ entonces se tiene que

$$HC = DM + MH \quad \text{(III)}$$

$$HC = HN + NC \quad \text{(IV)}$$

Igualando las ecuaciones (III) y (IV) se obtiene

$$DM + MH = HN + NC$$

Luego se sabe que por (II) $HN = MH$,

$$DM + MH = MH + NC$$

Entonces,

$$DM = NC$$

Se concluye que el segmento DM es igual al segmento NC.

2.14 Lema Nº 14

2.14.1 Enunciado

Sea AB el diámetro de una semicircunferencia S_1 y O el punto medio de AB, donde los puntos C y D pertenecen a AB y E pertenece a la semicircunferencia S_1, con $AC = DB$ si y solo si $AC < AO$, si se inscriben dos semicircunferencias S_2 y S_3 en la semicircunferencia S_1, que tienen al AC y BD como diámetros respectivamente. Sea una semicircunferencia S_4 del lado opuesto a las semicircunferencias S_2 y S_3 que tiene por diámetro CD y sea F un punto de la semicircunferencia S_4. La figura comprendía entre las cuatro semicircunferencias (figura 68) es llamada “Salinon”, y si se traza una perpendicular a AB por O se tiene EO, OF y EF, entonces el área de Salinon es igual al área del circulo C_5 de diámetro EF.

2.14.2 Explicación

El Lema Nº 14 establece que si se tiene una semicircunferencia de diámetro AB y centro O, y se localizan puntos C y D que pertenecen al diámetro AB tales que $AC = BD$ teniendo en cuenta que $AC < AO$ y se traza un punto E que pertenece a la semicircunferencia, también si se inscriben dos semicircunferencias con diámetros AC y DB respectivamente en la semicircunferencia de diámetro AB y además se construye una semicircunferencia de diámetro CD externa a la semicircunferencia de diámetro

AB, donde F pertenece a la semicircunferencia de diámetro CD y por ultimo se traza una perpendicular al diámetro AB por O se tienen los segmentos EO, OF y EF, entonces el área de Salinon es igual al área de la circunferencia con diámetro EF. Esto se evidencia de mejor manera en las Figuras 68 y 69.

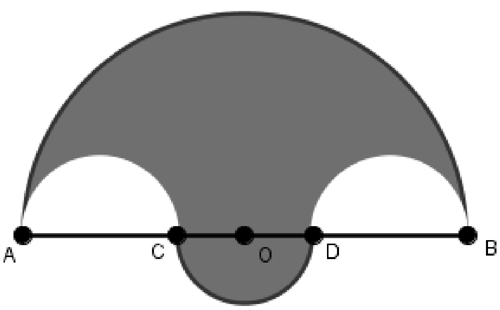


Figura 68: Lema 14, Salinon

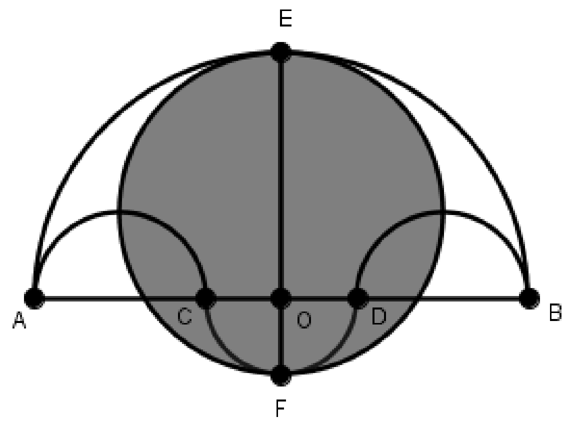


Figura 69: Lema 14 círculo C_5

2.14.3 Demostración

En primer lugar se describen las áreas de los diferentes semicírculos y del círculo:

$A_1 =$ Área del semicírculo S_1 con diámetro AB.

Si el radio de S_1 es $r_1 = \frac{AB}{2}$ entonces su área es $A_1 = \frac{\pi \frac{AB}{2}^2}{2} \rightarrow A_1 = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}} AB^2$

$A_2 =$ Área del semicírculo S_2 con diámetro AC.

Si el radio de S_2 es $r_2 = \frac{AC}{2}$ entonces su área es $A_2 = \frac{\pi \frac{AC}{2}^2}{2} \rightarrow A_2 = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}} AC^2$

$A_3 =$ Área del semicírculo S_3 con diámetro BD.

Si el radio de S_3 es $r_3 = \frac{BD}{2}$ entonces su área es $A_3 = \frac{\pi \frac{BD}{2}^2}{2} \rightarrow A_3 = \frac{\pi}{8} BD^2$

$A_4 =$ Área del semicírculo S_4 con diámetro CD.

Si el radio de S_4 es $r_4 = \frac{CD}{2}$ entonces su área es $A_4 = \frac{\pi \frac{CD}{2}^2}{2} \rightarrow A_4 = \frac{\pi}{8} CD^2$

$A_5 =$ Área del círculo C_5 con diámetro CD.

Ahora, se nombra a $\mathcal{S}$ como el área del Salinon, por lo tanto el área del Salinon es

$$\mathcal{S} = A_1 - A_2 - A_3 + A_4 \qquad \text{(I)}$$

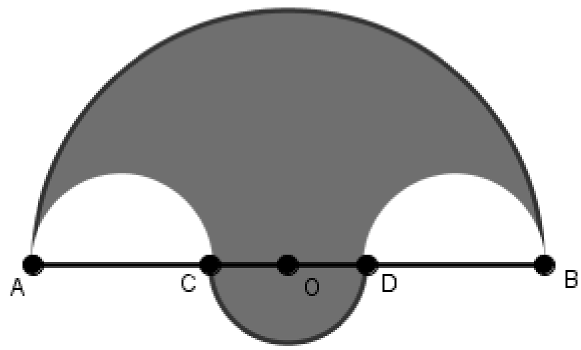


Figura 70.

Si se reemplaza $A_1,\ A_2,\ A_3\ y\ A_4$ en la ecuación (I) se tiene que

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{8}AB^2 - \frac{\pi}{8}AC^2 - \frac{\pi}{8}DB^2 + \frac{\pi}{8}CD^2$$

luego al factorizar $\frac{\pi}{8}$ se obtiene

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{8}\ \ AB^2 - AC^2 - DB^2 + CD^2$$

Como $AC = DB$

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{8}\ \ AB^2 - AC^2 - AC^2 + CD^2$$

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{8}\ \ AB^2 - 2AC^2 + CD^2 \qquad \text{(II)}$$

En la figura 70 se puede observar que: $AB = AC + CD + DB$, entonces $AB = 2AC + CD$ se reemplaza en (II) obteniendo

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{8}\ \ \ 2AC + CD\ \ ^2 - 2AC^2 + CD^2$$

Se resuelve el binomio al cuadrado $\ 2AC + CD\ \ ^2$

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{8}\ \ 4AC^2 + 4AC.CD + CD^2 - 2AC^2 + CD^2$$

reduciendo términos se obtiene

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{8}\ \ 2AC^2 + 4AC.CD + 2CD^2$$

factorizando un 2 en $2AC^2 + 4AC.CD + 2CD^2$

$$\mathcal{S} = \frac{2\pi}{8}\ \ AC^2 + 2AC.CD + CD^2$$

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{4}\ \ AC^2 + 2AC.CD + CD^2$$

Como $AC^2 + 2AC.CD + CD^2$ es un trinomio cuadrado perfecto se obtiene

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{4}\ \ AC + CD\ \ ^2 \qquad \text{(III)}$$

Ahora, en la figura 71 se puede observar que $EF = EO + OF$ siendo EF el diámetro del círculo C_5.

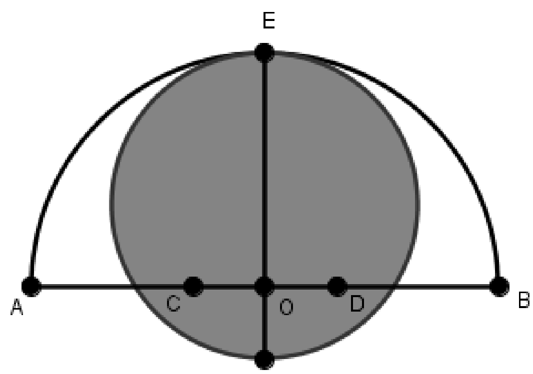


Figura 71

Como $EO, AO\ y\ BO$ son radios de la circunferencia S_1 que tiene a AB por diámetro entonces $EO = AO = BO$

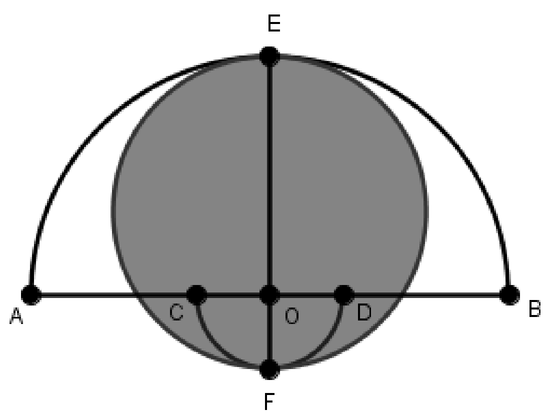


Figura 72.

Como $CO, DO \; y \; FO$ son radios de la circunferencia S_4 que tiene a CD por diámetro entonces $CO = DO = FO$

Como $EF = EO + FO$, también $EO = AO$ y $DO = FO$ entonces

$$EF = AO + DO$$

Además, en la figura 72 se observa que $AO = AC + CO$, entonces,

$$EF = AC + CO + DO$$

Pero, como $CD = CO + DO$ se obtiene

$$EF = AC + CD$$

Es decir que $AC + CD$ es el radio de la circunferencia C_5 que tiene a EF como diámetro.

A continuación se halla el área del círculo C_5

Como el diámetro del círculo C_5 es $AC + CD$, entonces el radio de C_5 es $r_5 = \frac{AC+CD}{2}$ por lo tanto su área es

$$A_5 = \pi \left(\frac{AC + CD}{2} \right)^2$$

$$A_5 = \frac{\pi}{4} \left(AC + CD \right)^2 \qquad \text{(IV)}$$

Ahora, de la ecuación (III) y (IV) se puede concluir que el área del Salinon $\mathcal{S}$ es igual al área del círculo C_5.

2.15 Lema Nº 15

2.15.1 Enunciado

Sea AB el diámetro de una circunferencia C_1, sean los puntos C y D que pertenecen a la circunferencia C_1, además, el segmento BC es un lado de un pentágono regular inscrito en la circunferencia, D es el punto medio del BC, las rectas AB y CD se cortan en el punto E y BC y AD se cortan en F. Si $G \in AB$, de tal manera que $FG \perp AB$, entonces el segmento EG es igual al radio de la circunferencia C_1.

2.15.2 Explicación

El Lema Nº 15 establece que si se tiene una circunferencia de diámetro AB, si AC es un lado de un pentágono inscrito en la circunferencia, se localiza el punto D que es el punto de medio del arco AC, también se tiene que las rectas AB y CD se intersecan en el punto E, los segmentos AC y BD se intersecan en F, si se construye el segmento FG perpendicular a AB, entonces el segmento EG tiene igual medida que el radio de la circunferencia de diámetro AB. Esto se muestra en la Figura 73.

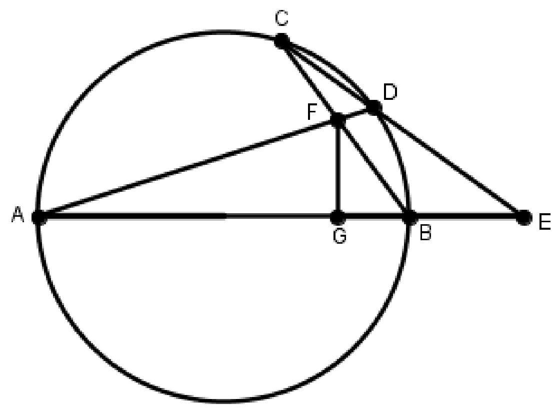


Figura 73: Lema 15

2.15.3 Demostración

En adelante se usará ∟ para representar un ángulo de 90 grados, es decir un ángulo recto.

Sea O el centro de la circunferencia C_1, luego se traza el segmento CA.

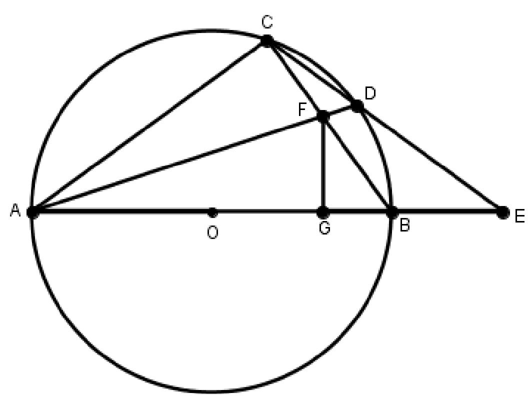


Figura 74.

Se sabe que $CD = DB$ porque D es el punto medio del CB, es decir $CD = DB$ por lo tanto $m\angle CAD = m\angle BAD$, es decir $m\angle CAF = m\angle GAF$.

El ángulo ACB es recto porque está inscrito en una semicircunferencia, además el ángulo AGF es recto, es decir que $m\angle ACB = m\angle AGF$, es decir $m\angle ACF = m\angle AGF$.

En el triángulo ACF la suma de los ángulos interiores es

$$m\angle CAF + m\angle ACF + m\angle CFA = 2\llcorner \qquad \text{(I)}$$

En el triángulo AGF la suma de los ángulos interiores es

$$m\angle GAF + m\angle AGF + m\angle GFA = 2\llcorner \qquad \text{(II)}$$

Igualando las ecuaciones (I) y (II) se obtiene que

$$m\angle CAF + m\angle ACF + m\angle CFA = m\angle GAF + m\angle AGF + m\angle GFA$$

y como $m\angle CAF = m\angle GAF$, $m\angle ACF = m\angle AGF$, por lo tanto

$$m\angle CAF + m\angle ACF + m\angle CFA = m\angle CAF + m\angle ACF + m\angle GFA$$

$$m\angle CFA = m\angle GFA$$

Ahora, los triángulos $BCF\ y\ BGF$ son congruentes, porque $AF = AF$ y todos los ángulos son congruentes según correspondencia.

Ahora, los triángulos $BCF\ y\ BGF$ son congruentes por el teorema ALA[4], porque $BF = BF$, $m\angle CAF = m\angle GAF$ y $m\angle CFA = m\angle GFA$.

Por definición de triángulos congruentes se tiene que $AC = AG$.

Luego, se trazan los segmentos DG y DB.

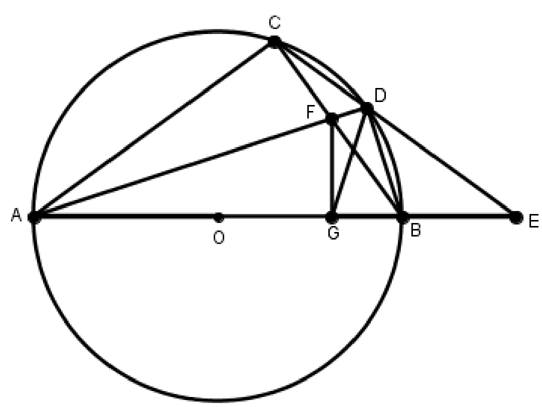


Figura 75.

[4] Teorema de congruencia de triángulos ALA (ángulo lado ángulo).

Como $AC = AG$, $m\angle CAD = m\angle BAD$ y $AD = AD$entonces por el teorema LAL[5] los triángulos ACD y AGD son congruentes.

Por definición de triángulos congruentes $CD = DG$, pero $CD = DB$ por lo tanto

$$DB = DG \qquad \text{(III)}$$

Ahora, se trazan los segmentos OD y OC

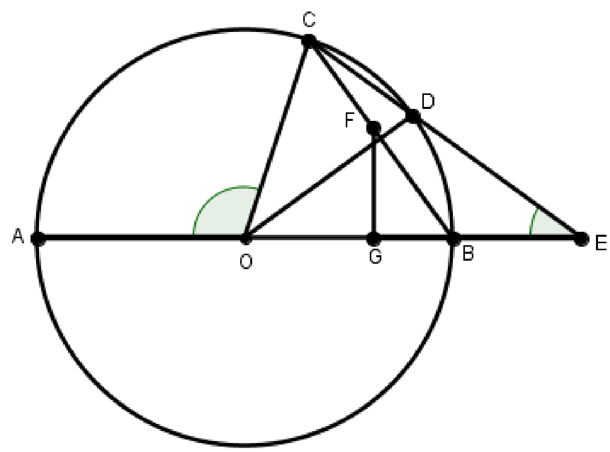


Figura 76.

Debido a que el segmento CB es un lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia, entonces la $m\angle BOC = 72°$, es decir la $m\angle BOD = 36°$ porque D es el punto medio del BC.

Como la $m\angle BOC = 72°$ y $m\angle AOC + m\angle BOC = 180°$ entonces $m\angle AOC = 108°$

Ahora, como CD es una cuerda de la circunferencia C_1, AB es el diámetro y las rectas CD y AB se intersecan en el punto E entonces utilizando la proposición 8 se tiene que:

$$m\angle AOC = 3m\angle CEO$$

Pero $m\angle AOC = 108°$ entonces

$$108° \ = 3m\angle CEO$$

$$\frac{108°}{3} = m\angle CEO$$

[5] Teorema de congruencia de triángulos LAL (lado ángulo lado).

$$m\angle CEO = 36°$$

Por tanto

$$m\angle CEO = m\angle BOD$$

también

$$m\angle DEG = m\angle DOB$$

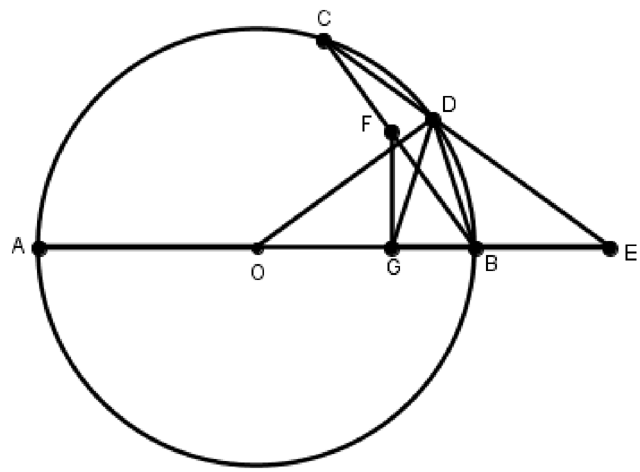


Figura 77.

Como $m\angle CEO = m\angle BOD$, entonces $DO = DE$ por el reciproco del teorema del triángulo isósceles. También $m\angle OBD = m\angle DGE$ porque el triangulo DGB es isósceles.

En el triángulo ODB la suma de los ángulos interiores es

$$m\angle DOB + m\angle OBD + m\angle BDO = 2∟ \quad \text{(V)}$$

En el triángulo EDG la suma de los ángulos interiores es

$$m\angle DEG + m\angle DEG + m\angle GDE = 2∟ \quad \text{(VI)}$$

Igualando las ecuaciones (I) y (II) se obtiene que

$$m\angle DOB + m\angle OBD + m\angle BDO = m\angle DEG + m\angle DEG + m\angle GDE$$

y como $m\angle DEG = m\angle DOB$, $m\angle OBD = m\angle DGE$, por lo tanto

$$m\angle DEG + m\angle DGE + m\angle BDO = m\angle DEG + m\angle DGE + m\angle GDE$$

$$m\angle BDO = m\angle GDE.$$

Finalmente, como $m\angle BDO = m\angle GDE$, $DO = DE$ y $m\angle DEG = m\angle DOB$, entonces los triángulos DBO y DGE son congruentes. Por lo tanto por definición de triángulos congruentes se tiene que $OB = GE$.

En la figura 77, se observa que el segmento OB es el radio de la circunferencia C_1, es decir que el segmento GE es igual al radio de la circunferencia C_1.

Capítulo 3

TALLERES PROPUESTOS

En este capítulo se presentan quince propuestas de talleres, uno por cada lema. En éstas propuestas se deben utilizar programas de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri; se requiere que el estudiante maneje conceptos básicos de geometría plana, como lo es el estudio de propiedades que se cumplen en las semicircunferencias y círculos.

Además, lo más importante es que el estudiante explore y desarrolle sus habilidades en geometría por medio de construcciones usando alguno de los programas antes nombrados y así pueda establecer algunas conjeturas y por qué no, pueda abstraer ideas para la demostración de los mismos lemas.

Los talleres están dirigidos a estudiantes de primeros semestres de matemáticas o de cursos donde se estudie geometría plana, y en general tiene como objetivos que el estudiante, con la ayuda de algún software de Geometría dinámica, plasme las premisas de cada lema en una pantalla y luego de realizar algunos arrastres y movimientos logre formular una conjetura, para finalmente concluir el lema.

En las siguientes páginas se presentan quince talleres, los cuales sólo constituyen un primer acercamiento a propuestas para la enseñanza de cada uno de los lemas, obviamente que requieren un proceso de depuración, pilotaje, implementación y validación, lo cual no es objetivo de este trabajo.

Estos talleres están diseñados bajo un enfoque constructivista mediado por la tecnología, en el que se pretende que el estudiante institucionalice los Lemas de Arquímedes mediante una serie de preguntas, construcciones y actividades organizadas en quince talleres.

Cada taller tendrá la siguiente estructura:

- Una serie de pasos que guía la construcción de unos objetos geométricos
- Una serie de preguntas que lleven al estudiante a realizar algunas conjeturas
- Una serie de preguntas que lleven a generalizar y formular el Lema respectivo.

3.1 Taller No 1 (Lema No 1)

Objetivos:
Desarrollar en el estudiante una habilidad geométrica por medio de herramientas tecnológicas, utilizando software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri para formular una proposición correspondiente al lema 1.

Aplicar conceptos básicos de geometría y sus propiedades, entre los cuales están, circunferencias tangentes, diámetros paralelos y colinealidad entre puntos.

- Traza dos segmentos CD y EF tales que $CD < EF$.
- Construye dos circunferencias, una con diámetro CD y otra con diámetro EF.
- Arrastra las circunferencias, de tal modo que hagan contacto en un punto (llámese A a este punto).
- ¿Describe como te fue?

____
____
____

- ¿Es posible mantener el punto de contacto aun si arrastrase a una de las circunferencias?

____
____
____

- Ahora, realiza la construcción de tal manera que al arrastrar alguna de las circunferencias, el punto de contacto se mantenga (sugerencia: iniciar con el punto de contacto y la circunferencia de diámetro mayor)
- Construye la(s) circunferencia(s) que satisfacen el diámetro menor.
- Dibuja el diámetro CD en la circunferencia de diámetro menor.
- Traza las rectas AE y AF.
- ¿Los puntos E, C y A son colineales?

- ¿Los puntos F, D y A son colineales?
- ¿Los puntos C, A y F son colineales?
- ¿Los puntos D, A y E son colineales?
- Arrastra el diámetro menor, de tal forma que se cumpla la colinealidad expuesta en las preguntas anteriores
- Que condición debe cumplir los diámetros CD y EF, para que se cumpla las anteriores colinealidades.

- Plantea una conjetura a partir de la anterior construcción:

- ¿Cuál es el antecedente?

- ¿Cuál es el consecuente?

- Reconstruye considerando como objetos iniciales los elementos planteados en el antecedente.
- Mueve el diámetro EF ¿Qué observas?

- Reformula si es necesario tu conjetura y escribe de manera formal una proposición.

3.2 Taller No 2 (Lema No 2)

Objetivos:
Desarrollar en el estudiante una habilidad geométrica por medio de herramientas tecnológicas, utilizando software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri para formular una proposición correspondiente al lema 2.

Aplicar conceptos básicos de geometría y sus propiedades, entre los cuales están, semicircunferencia, diámetro, rectas tangentes, rectas perpendiculares e igualdad entre segmentos.

- Construye una semicircunferencia de diámetro AB.
- Construya dos rectas.
- Arrastre esas dos rectas, de tal manera que sean tangentes a la semicircunferencia, nombra C el punto de intersección entre esas dos rectas.
- ¿Es posible mantener el punto de contacto C aun si arrastras a la semicircunferencia?

____
____
____

- Ahora, realiza la construcción de tal manera que al arrastrar la semicircunferencia, el punto de contacto C entre las rectas se mantenga y además que una de las tangentes contenga el punto B.
- Define a D como uno de los puntos de tangencia.
- Construye un segmento DE, donde E pertenezca al segmento AB y el ángulo BED sea recto.
- Traza el segmento AC.
- Arrastra el punto D ¿Qué relación se mantiene entre los segmentos AC y DE?

____
____
____

- ¿En el ítem anterior encontraste algún objeto?

- Ese objeto nómbralo con la letra F.
- ¿Qué relación existe entre los segmentos DF y FE?

- Plantea una conjetura a partir de la anterior construcción:

- ¿Cuál es el antecedente?

- ¿Cuál es el consecuente?

- Reconstruye considerando como objetos iniciales los elementos planteados en el antecedente.
- Reformula si es necesario tu conjetura y escribe de manera formal una proposición.

3.3 Taller No 3 (Lema No 3)

Objetivos:
Desarrollar en el estudiante una habilidad geométrica por medio de herramientas tecnológicas, utilizando software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri para formular una proposición correspondiente al lema 3.

Aplicar conceptos básicos de geometría y sus propiedades, entre los cuales están, semicircunferencia, diámetro, rectas perpendiculares e igualdad entre arcos y segmentos.

- Construye una semicircunferencia con diámetro AB.
- Construye un segmento CD, arrastra ese segmento de tal manera que sea perpendicular al segmento AB.
- ¿Describe cómo te fue?

____

____

____

- Construye una perpendicular al diámetro AB que contenga a C, donde C es un punto de la semicircunferencia. Traza el segmento CD, donde D es la intersección de la perpendicular con el segmento AB.
- Localiza un punto E en el segmento AB, de tal manera que el segmento DE y AD tenga la misma medida.
- Ubica un punto F en la semicircunferencia.
- Arrastra en punto F de tal manera que el arco AC sea igual al arco CF.
- ¿Al arrastrar el punto C se mantiene la propiedad del ítem anterior?

____

____

____

- Ahora, realiza la construcción de tal manera que el arco AC sea igual al arco CF.
- Al arrastrar el punto C ¿qué relación existe entre los segmentos EB y BF?

- Plantea una conjetura a partir de la anterior construcción:

- ¿Cuál es el antecedente?

- ¿Cuál es el consecuente?

- Reconstruye considerando como objetos iniciales los elementos planteados en el antecedente

- Reformula si es necesario tu conjetura y escribe de manera formal una proposición

3.4 Taller No 4 (Lema No 4)

Objetivos:
Desarrollar en el estudiante una habilidad geométrica por medio de herramientas tecnológicas, utilizando software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri para formular una proposición correspondiente al lema 4.

Aplicar conceptos básicos de geometría y sus propiedades, entre los cuales están, semicircunferencia, círculo, semicírculo, diámetro, rectas perpendiculares e igualdad entre áreas.

- Construye una semicircunferencia con diámetro AB
- Construye una perpendicular al diámetro AB que contenga a C, donde C es un punto de la semicircunferencia. Traza el segmento CD, donde D es la intersección de la perpendicular con el segmento AB.
- Construye dos semicircunferencias inscritas en la semicircunferencia de diámetro AB una con diámetro AD siendo D el punto de intersección entre la perpendicular y el diámetro AB y otra con diámetro DB.
- Arrastra el punto C, ¿las semicircunferencias de diámetros AD y AB son fijas?
- ¿Describe cómo te fue?

____

____

____

- Ahora construye una circunferencia de diámetro DC.
- ¿Es posible mantener la circunferencia aun si se arrastrase el punto C?

____

____

____

- La figura que se forma en el interior de la semicircunferencia de diámetro AB y el exterior de las semicircunferencias de diámetros AD y DB del lado donde está la circunferencia de diámetro AB es conocida como Arbelo (que traduce del griego cuchilla del zapatero)

- Qué relación existe entre el círculo de diámetro DC y el arbelo?

____
____
____

- ¿Qué pasa con las áreas de las figuras anteriormente mencionadas?
- Arrastra el punto C, y corrobora tu respuesta anterior.
- ¿Qué condición debe cumplir DC, para que se cumpla la relación que existe entre el circulo de diámetro DC y el arbelo?

____
____
____

- Plantea una conjetura a partir de la anterior construcción:

____
____
____

- ¿Cuál es el antecedente?

____
____

- ¿Cuál es el consecuente?

____
____

- Reconstruye todo considerando como objetos iniciales los elementos planteados en el antecedente.
- Reformula, si es necesario, tu conjetura y escribe de manera formal una proposición.

____
____
____

3.5 Taller No 5 (Lema No 5)

Objetivos:
Desarrollar en el estudiante una habilidad geométrica por medio de herramientas tecnológicas, utilizando software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri para formular una proposición correspondiente al lema 5.

Aplicar conceptos básicos de geometría y sus propiedades, entre los cuales están, semicircunferencia, círculo, semicírculo, diámetro, rectas perpendiculares, tangencia entre objetos geométricos e igualdad entre círculos.

- Construye una semicircunferencia con diámetro AB.

- Construye una perpendicular al diámetro AB que contenga a C, donde C es un punto de la semicircunferencia. Traza el segmento CD, donde D es la intersección de la perpendicular con el segmento AB.

- Construye dos semicircunferencias inscritas en la semicircunferencia de diámetro AB una con diámetro AD siendo D el punto de intersección entre la perpendicular y el diámetro AB y otra con diámetro DB.

- Arrastra el punto C, ¿las semicircunferencias de diámetros AD y AB son fijas?

- ¿Describe cómo te fue?

____
____
____

- Ahora, construye una circunferencia que sea tangente al segmento CD, a la semicircunferencia de diámetro AC y a la semicircunferencia de diámetro AB.

- ¿Describe cómo te fue?

____
____
____

- Si lograste construir esa circunferencia, arrastra el punto C y verifica que se mantiene la tangencia de esos objetos mencionados en el ítem anterior.

- Si se mantiene la relación nombrada anteriormente, especifica los pasos y construcciones que utilizaste para lograrlo.

____
____
____

- De la misma manera que construiste la anterior circunferencia, ahora, construye una circunferencia que sea tangente al segmento CD, a la semicircunferencia de diámetro CB y a la semicircunferencia de diámetro AB.

- ¿Qué relación existe entre las dos circunferencias construidas anteriormente?

____
____
____

- Plantea una conjetura a partir de la anterior construcción.

____
____
____

- ¿Cuál es el antecedente?

____
____

- ¿Cuál es el consecuente?

____
____

- Reconstruye todo considerando como objetos iniciales los elementos planteados en el antecedente.

- Reformula, si es necesario, tu conjetura y escribe de manera formal una proposición.

____
____
____

- Si no lograste construir una circunferencia que fuese tangente al segmento CD, a la semicircunferencia de diámetro AC y a la semicircunferencia de diámetro AB, entonces realiza lo siguiente.
- Dibuja el centro de la semicircunferencia de diámetro AC, nombra ese punto K.
- Traza una circunferencia con centro en K y radio BK. Nombra como P al punto de intersección de la circunferencia de radio BK y la recta que contiene a los puntos C y D.
- Traza el segmento AP.
- Nombra como H al punto de intersección entre el segmento AP y la semicircunferencia de diámetro AB.
- Traza el segmento BH. Nombra como I al punto de intersección entre el segmento CD y el segmento BH.
- Traza una recta perpendicular m al segmento CD por el punto I.
- Nombra como L al punto de intersección entre la perpendicular m y al segmento AP.
- El segmento LI es el diámetro de la circunferencia que es tangente al segmento CD, a la semicircunferencia de diámetro AC y a la semicircunferencia de diámetro AB.
- Ahora, construye una circunferencia que sea tangente al segmento CD, a la semicircunferencia de diámetro AC y a la semicircunferencia de diámetro AB.
- Luego, construye una circunferencia que sea tangente al segmento CD, a la semicircunferencia de diámetro CB y a la semicircunferencia de diámetro AB.
- ¿Qué relación existe entre las dos circunferencias construidas anteriormente?

____
____
____
____

- Plantea una conjetura a partir de la anterior construcción:

- ¿Cuál es el antecedente?

- ¿Cuál es el consecuente?

- Reconstruye considerando como objetos iniciales los elementos planteados en el antecedente

- Reformula si es necesario tu conjetura y escribe de manera formal una proposición

3.6 Taller No 6 (Lema No 6)

Objetivos:
Desarrollar en el estudiante una habilidad geométrica por medio de herramientas tecnológicas, utilizando software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri para formular una proposición correspondiente al lema 6.

Aplicar conceptos básicos de geometría y sus propiedades, entre los cuales están, semicircunferencia, círculo, semicírculo, diámetro, tangencia y proporcionalidad entre objetos geométricos.

Sigue los siguientes pasos para la construcción:

- Construye una semicircunferencia de diámetro AB.
- Ubica un punto C entre el punto A y B.
- Construye dos semicircunferencias de diámetro AC y CB.
- Dibuja el centro de la semicircunferencia de diámetro AB y nómbralo como el punto O_1.
- Dibuja el centro de la semicircunferencia de diámetro AC y nómbralo como el punto O_2.
- Dibuja el centro de la semicircunferencia de diámetro CB y nómbralo como el punto O_3.
- Traza una perpendicular l al segmento AB por C.
- Nombra como G a la intersección de la recta l con la semicircunferencia de diámetro AB.
- Traza una perpendicular m al segmento AB por B.
- Traza una perpendicular n al segmento AB por O_2.
- Nombra como H a la intersección de la recta n con la semicircunferencia de diámetro AC.

- Traza una perpendicular p al segmento AB por O_3.
- Nombra como I a la intersección de la recta n con la semicircunferencia de diámetro CB.
- Ahora traza una circunferencia C_1con centro en el punto H y radio HC
- Traza una circunferencia C_2con centro en el punto I y radio IC
- Nombra como J a la intersección entre las circunferencias C_1, C_2 y la semicircunferencia de diámetro AB.
- Nombra como K a la intersección de la circunferencia C_2 con la semicircunferencia de diámetro AC.
- Nombra como L a la intersección de la circunferencia C_1 con la semicircunferencia de diámetro CB.
- Teniendo en cuenta estos tres últimos puntos que encontraste J, K y L. Traza una circunferencia que los contenga.
- ¿Cómo te fue?

____

____

____

- Verifica que al arrastre la circunferencia que construiste contenga siempre los puntos J, K y L.
- Si no lograste, una sugerencia es utilizar los puntos medios de los segmentos KJ y LJ.
- Teniendo la circunferencia de diámetro DE que contiene los puntos J, K y L. Realizas siguientes comparaciones de segmentos, mediante el arrastre y la medición de los mismos.
- Si $AB = 12\ cm$ y $AC = 1/2\ AB$, ¿Cuánto mide DE?

____

____

- Si $AB = 12\ cm$ y $AC = 1/3\ AB$, ¿Cuánto mide DE?

- Si $AB = 12\ cm$ y $AC = 1/4\ AB$, ¿Cuánto mide DE?

- Si $AB = 12\ cm$ y $AC = 1/4\ AB$, ¿Cuánto mide DE?

- Si $AB = 12\ cm$ y $DE = 1\ cm$, ¿Cuánto mide AC?

- Si $AB = 12\ cm$ y $DE = 2\ cm$, ¿Cuánto mide AC?

- Si $AB = 12\ cm$ y $DE = 3\ cm$, ¿Cuánto mide AC?

- Si $AB = 12\ cm$ y DE varía de 0 a $12\ cm$, ¿Cuál es la máxima longitud que alcanza DE?

- Si x es la distancia entre A y C, ¿Existe una medida x para el cual DE/AB alcanza su máximo valor? ¿su mínimo valor?

- A medida que se desplaza C sobre el segmento AB, ¿qué lugar geométrico describe el centro de la circunferencia de diámetro DE?

- ¿Qué relación se mantiene entre los segmentos AB y DE?

- Plantea una conjetura a partir de la anterior construcción y de las comparaciones de medida que se hicieron anteriormente :

- ¿Cuál es el antecedente?

- ¿Cuál es el consecuente?

- Reconstruye todo lo anterior considerando como objetos iniciales los elementos planteados en el antecedente.

- Reformula, si es necesario, tu conjetura y escribe de manera formal una proposición.

3.7 Taller No 7 (Lema No 7)

Objetivos:
Desarrollar en el estudiante una habilidad geométrica por medio de herramientas tecnológicas, utilizando software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri para formular una proposición correspondiente al lema 7.

Aplicar conceptos básicos de geometría y sus propiedades, entre los cuales están, cuadrado, circunferencia, círculo, figuras geométricas inscritas y circunscritas.

- Traza un segmento AB.
- Construye una circunferencia con diámetro AB.
- Construye un cuadrado.
- Arrastra la circunferencia de tal manera que la circunferencia este inscrita en el cuadrado.
- ¿Es posible mantener inscrita la circunferencia en el cuadrado al arrastrar la circunferencia de diámetro AB?

____

____

____

- Ahora, realiza la construcción de tal manera que al arrastrar la circunferencia de diámetro AB se mantenga inscrita en el cuadrado (sugerencia: Traza rectas perpendiculares al diámetro AB que contengan a los puntos A, B y al centro O)
- Traza un segmento CD.
- Construye una circunferencia de diámetro CD.
- Arrastra la circunferencia de diámetro CD de tal manera que la circunferencia este circunscrita en el cuadrado.
- ¿Es posible mantener circunscrita la circunferencia de diámetro CD en el cuadrado al arrastrar la circunferencia de diámetro CD?

- Ahora, realiza la construcción de tal manera que al arrastrar la circunferencia de diámetro CD se mantenga circunscrita en el cuadrado.
- ¿Qué puedes decir acerca de las áreas de las circunferencias de diámetro AB y CD?

- Compara el área de las circunferencias de diámetro AB y CD.
- Reduce y aumenta el diámetro AB.
- ¿Qué puedes decir acerca de la relación que encontraste en el ítem anterior?

- Plantea una conjetura a partir de la anterior construcción.

- ¿Cuál es el antecedente?

- ¿Cuál es el consecuente?

- Reconstruye todo lo anterior considerando como objetos iniciales los elementos planteados en el antecedente.

- Reformula, si es necesario, tu conjetura y escribe de manera formal una proposición.

3.8 Taller No 8 (Lema No 8)

Objetivos:
Desarrollar en el estudiante una habilidad geométrica por medio de herramientas tecnológicas, utilizando software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri para formular una proposición correspondiente al lema 8.

Aplicar conceptos básicos de geometría y sus propiedades, entre los cuales están, circunferencia, rectas, segmentos, cuerdas, ángulos.

- Traza un segmento AB.
- Construye una circunferencia.
- Arrastra la circunferencia de tal forma que el segmento AB sea una cuerda de la circunferencia.
- ¿Al arrastrar la circunferencia es posible que el segmento AB siempre se mantenga como una cuerda?

____
____
____

- Ahora, realiza la construcción de tal manera que al arrastrar la circunferencia el segmento AB se mantenga como una cuerda (sugerencia: encuentra el punto medio del segmento AB y luego el centro de la circunferencia, a este punto llámese O).
- Construye el rayo AB y localiza un punto C de tal manera que cumpla $C - A - B$ con $CA = r$, siendo r el radio de la circunferencia.
- ¿Describe cómo puedes encontrar un punto D en la circunferencia de tal forma que $C - O - D$?

____
____
____

- Compara la medida de los ángulos BOD y BCD.

- Reduce y aumenta el radio de la circunferencia.
- ¿Qué puedes decir acerca de la relación que encontraste en el ítem anterior?

____

____

____

- Plantea una conjetura a partir de la anterior construcción.

____

____

____

- ¿Cuál es el antecedente?

____

____

- ¿Cuál es el consecuente?

____

____

- Reconstruye todo lo anterior considerando como objetos iniciales los elementos planteados en el antecedente.
- Reformula, si es necesario, tu conjetura y escribe de manera formal una proposición.

____

____

____

3.9 Taller No 9 (Lema No 9)

Objetivos:
Desarrollar en el estudiante una habilidad geométrica por medio de herramientas tecnológicas, utilizando software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri para formular una proposición correspondiente al lema 9.

Aplicar conceptos básicos de geometría y sus propiedades, entre los cuales están, circunferencia, cuerdas perpendiculares e igualdad entre la suma de arcos.

- Construye una circunferencia.
- Traza dos segmentos AB y CD.
- Arrastra los segmentos AB y CD, de tal manera que sean cuerdas de la circunferencia construida.
- ¿Es posible que los segmentos AB y CD se mantengan como cuerdas al arrastrar la circunferencia?

____
____
____

- Ahora, realiza la construcción de tal manera que al arrastrar la circunferencia los segmentos AB y CD se mantengan como cuerdas.
- Arrastra las cuerdas AB y CD de tal forma que se intersequen en un punto (llámese P este punto).
- Escribe los arcos de la circunferencia que se determinan, teniendo en cuenta la condición anterior.

____
____

- ¿Qué relación deben tener las cuerdas para que la suma de dos pares de arcos no consecutivos sea igual?

- Plantea una conjetura a partir de la anterior construcción.

- ¿Cuál es el antecedente?

- ¿Cuál es el consecuente?

- Reconstruye todo lo anterior considerando como objetos iniciales los elementos planteados en el antecedente.

- Reformula, si es necesario, tu conjetura y escribe de manera formal una proposición.

3.10 Taller No 10 (Lema No 10)

Objetivos:
Desarrollar en el estudiante una habilidad geométrica por medio de herramientas tecnológicas, utilizando software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri para formular una proposición correspondiente al lema 10.

Aplicar conceptos básicos de geometría y sus propiedades, entre los cuales están, circunferencia, rectas tangentes, rectas paralelas, rectas perpendiculares, igualdad entre segmentos.

- Construye una circunferencia.
- Construya dos rectas.
- Arrastre esas dos rectas, de tal manera que sean tangentes a la circunferencia, nombra A el punto de intersección entre esas dos rectas.
- ¿Es posible mantener el punto de contacto A aun si arrastras a la circunferencia?

____
____
____

- Ahora, realiza la construcción de tal manera que al arrastrar la circunferencia, el punto de contacto A entre las rectas se mantenga.
- Define a B y a C como puntos de tangencia.
- Ubica un punto D en la circunferencia de tal manera que se encuentre en el arco AB mayor.
- Traza el segmento AD.
- Traza un segmento con extremos C y E (donde E pertenece a la circunferencia), de tal manera que la recta AD y la recta CE no se intersequen.
- ¿Describe cómo te fue?

- Traza en segmento BE.
- Arrastra el punto A ¿Qué relación se mantiene entre los segmentos BE y AD?
- ¿En el ítem anterior encontraste algún objeto?
- Ese objeto nómbralo con la letra F.
- Traza un segmento FG, donde G pertenezca al segmento CE de tal manera que el ángulo CGF sea recto.
- Arrastra el punto A ¿qué relación existe entre el segmento EC y el punto G?
- Plantea una conjetura a partir de la anterior construcción.
- ¿Cuál es el antecedente?
- ¿Cuál es el consecuente?

- Reconstruye todo lo anterior considerando como objetos iniciales los elementos planteados en el antecedente.

- Reformula, si es necesario, tu conjetura y escribe de manera formal una proposición.

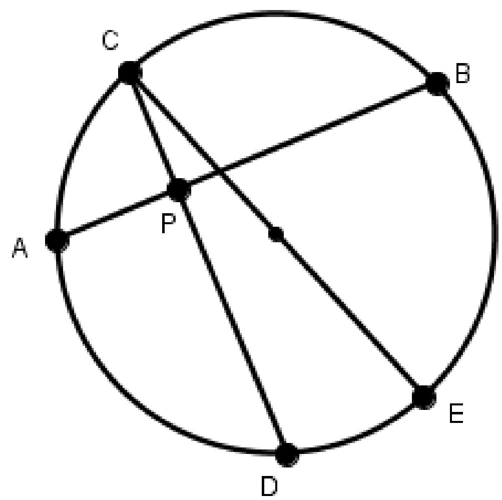
3.11 Taller No 11 (Lema No 11)

Objetivos:
Desarrollar en el estudiante una habilidad geométrica por medio de herramientas tecnológicas, utilizando software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri para formular una proposición correspondiente al lema 11.

Aplicar conceptos básicos de geometría y sus propiedades, entre los cuales están, circunferencia, cuerdas perpendiculares, diámetro, segmentos e igualdad.

Actividad 1.

Considérese una circunferencia de diámetro CE, y dos cuerdas CD y AB perpendiculares entre sí, que no sean diámetros de la circunferencia y que se corten en un punto P, como se muestra en la siguiente figura. ¿Qué relación hay entre los segmentos AP, PB, CP, PD y CE?



- Construye los segmentos AC, CB, AD y BE.
- Descubre porque los triángulos ACP y ECB son semejantes (sugerencia, recuerda que los ángulos que subtienden a un mismo ángulo son congruentes).
- ¿Escribe cuales son las tres parejas de ángulos congruentes?

____

____

____

- De igual forma Descubre porque los triángulos APD y CPB son semejantes (sugerencia, recuerda que los ángulos que subtienden a un mismo ángulo son congruentes).

- ¿Escribe cuales son las tres parejas de ángulos congruentes?

____

____

____

- Como los triángulos APD y CPB son semejantes entonces completa la igualdad (utiliza la definición de triángulos semejantes).

$$\frac{AP}{CP} = \frac{AD}{\quad}$$

- Como los triángulos ACP y ECB son semejantes entonces completa la igualdad (utiliza la definición de triángulos semejantes).

$$\frac{AP}{CP} = \frac{BE}{\quad}$$

- ¿Qué puedes concluir de las dos proporciones anteriores?**

____

____

- Si utilizas el teorema de Pitágoras para los triángulos APD y CPB su resultado sería:

$$\begin{aligned} &= \quad + DP^2 \\ &= \quad + BP^2 \end{aligned}$$

- Si se suman las dos anteriores ecuaciones se obtiene:

$$= \qquad + DP^2 + \qquad + BP^2$$

- Reemplaza el resultado obtenido en ** en la ecuación anterior. ¿Qué resultado obtuviste?

- Se sabe que en el triangulo CEB por teorema de Pitágoras se tiene que $CE^2 = BE^2 + BC^2$ reemplaza esta ecuación en el resultado obtenido anteriormente Qué puedes concluir sobre ¿Qué relación hay entre los segmentos AP, PB, CP, PD y CE?

Actividad 2.

- Según la relación obtenida en la Actividad 1, resuelve los siguientes problemas:

1. Si $AP = 3cm$, $BP = 5cm$, $CP = 6cm$ y $DP = 8cm$ ¿Cuánto mide el radio?
2. Si $AP = 5m$, $CP = 2m$, $DP = 7m$ y $BP = 4m$ ¿Cuánto mide el diámetro?
3. Si $CE = 12cm$, $CD = 10\ cm$ y $AP = 3cm$, ¿Cuánto mide PB?
4. Si $PD = 6cm$, $PB = 7cm$ y $CE = 12cm$, ¿Se puede conocer AP y PC? Justifica.

3.12 Taller No 12 (Lema No 12)

Objetivos:
Desarrollar en el estudiante una habilidad geométrica por medio de herramientas tecnológicas, utilizando software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri para formular una proposición correspondiente al lema 12.

Aplicar conceptos básicos de geometría y sus propiedades, entre los cuales están, semicircunferencia, rectas tangentes, segmentos perpendiculares.

- Construye una semicircunferencia de diámetro AB.
- Construya dos rectas.
- Arrastre esas dos rectas, de tal manera que sean tangentes a la semicircunferencia, nombra C el punto de intersección entre esas dos rectas.
- ¿Es posible mantener el punto de contacto C aun si arrastras a la semicircunferencia?

____
____
____

- Ahora, realiza la construcción de tal manera que al arrastrar la semicircunferencia, el punto de contacto C entre las rectas se mantenga.
- Define a E y a D como los puntos de tangencia.
- Traza los segmentos AE y BD.
- ¿Qué pasa con estos dos últimos segmentos que se construyeron? Arrastra el punto C, ¿qué es lo que se mantiene con respecto a los segmentos AE y BD?

____
____
____

- Ahora traza una recta que contenga al punto C y al punto que encontraste en el ítem anterior, este punto nómbralo F.
- ¿Describe cómo te fue?

- ¿Este punto F siempre se mantiene o en algún caso desaparece?

- ¿La recta que contiene al punto C y F interseca al diámetro AB?

- ¿Qué relación existe entre la recta que contiene al punto C y F, y el diámetro AB? sugerencia (comprueba las propiedades de estos dos objetos matemáticos)

- Arrastra el punto C ¿se mantiene la relación que encontraste en el ítem anterior?

- ¿Qué condición se debe cumplir los segmentos AE y BD para que la relación que encontraste exista?

- Plantea una conjetura a partir de la anterior construcción:

- ¿Cuál es el antecedente?

- ¿Cuál es el consecuente?

- Reconstruye todo lo anterior considerando como objetos iniciales los elementos planteados en el antecedente.

- Reformula, si es necesario, tu conjetura y escribe de manera formal una proposición.

3.13 Taller No 13 (Lema No 13)

Objetivos:
Desarrollar en el estudiante una habilidad geométrica por medio de herramientas tecnológicas, utilizando software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri para formular una proposición correspondiente al lema 13.

Aplicar conceptos básicos de geometría y sus propiedades, entre los cuales están, circunferencia, diámetro, cuerda, rectas perpendiculares e igualdad entre segmentos.

- Construye un segmento AB.
- Construye una circunferencia siendo AB el diametro.
- Construye un segmento que tenga como extremos dos puntos C y D que pertenezcan a la circunferencia.
- Ubique los puntos M y N sobre el segmento CD de tal manera que el ángulo DMA y CNB sean ángulos rectos.
- ¿Describe cómo te fue?

____
____
____

- Arrastra los puntos C o D ¿qué condición es necesaria entre los segmentos CD y AB para que los dos ángulos DMA y CNB sean rectos?

____
____
____

- Según la respuesta anterior, realiza una construcción con los pasos anteriores donde se cumpla la condición que es necesaria.
- ¿Describe cómo te fue?

____
____
____

- Según la construcción que realizaste ¿Qué relación existe entre los segmentos DM y CN?

- Plantea una conjetura a partir de la anterior construcción:

- ¿Cuál es el antecedente?

- ¿Cuál es el consecuente?

- Reconstruye todo lo anterior considerando como objetos iniciales los elementos planteados en el antecedente.

- Reformula, si es necesario, tu conjetura y escribe de manera formal una proposición.

3.14 Taller No 14 (Lema No 14)

Objetivos:
Desarrollar en el estudiante una habilidad geométrica por medio de herramientas tecnológicas, utilizando software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri para formular una proposición correspondiente al lema 14.

Aplicar conceptos básicos de geometría y sus propiedades, entre los cuales están, semicircunferencia, círculo, semicírculo, igualdad entre diámetros, igualdad de áreas.

- Construye una semicircunferencia con diámetro AB.
- Dibuje el centro de la semicircunferencia y nómbrelo O.
- Construye una semicircunferencia de diámetro AC de tal manera que AC sea menor que el radio AO.
- Construye una semicircunferencia de diámetro BD de tal manera que BD sea menor que el radio AO e igual a AC.
- Construye una semicircunferencia de diámetro CD de tal manera que se encuentre en el lado opuesto de las semicircunferencia de diámetro AC y BD
- La figura comprendida por el interior de la semicircunferencia de diámetro AB y CD y por el exterior de la semicircunferencias de diámetro AC y BD es llamada Salinon.
- Ubique un punto E en la semicircunferencia de diámetro AB.
- Trace una recta l que contenga a E y interseque el segmento AB.
- Tenga en cuenta que la recta l contiene el punto O.
- Además, el ángulo AOE es recto.
- ¿Qué observa entre la recta l y el segmento AB?

___

___

- Nombre como F al punto de intersección entre la recta l y la semicircunferencia de diámetro CD.

- ¿Qué relación existe entre el círculo de diámetro EF y el Salinon?

- Arrastre el punto C entre A y O ¿se mantiene la relación encontrada en el ítem anterior?

- Plantea una conjetura a partir de la anterior construcción:

- ¿Cuál es el antecedente?

- ¿Cuál es el consecuente?

- Reconstruye todo lo anterior considerando como objetos iniciales los elementos planteados en el antecedente.

- Reformula, si es necesario, tu conjetura y escribe de manera formal una proposición.

3.15 Taller No 15 (Lema No 15)

Objetivos:
Desarrollar en el estudiante una habilidad geométrica por medio de herramientas tecnológicas, utilizando software de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri para formular una proposición correspondiente al lema 15.

Aplicar conceptos básicos de geometría y sus propiedades, entre los cuales están, circunferencia, igualdad entre arcos, diámetro, radio, igualdad entre segmentos.

- Construye un polígono de cinco lados de tal manera que todos sus lados sean iguales.

- Inscribe ese polígono en una circunferencia.

- ¿Describe cómo te fue?

____
____
____

- Ahora, construye una circunferencia de diámetro AB, donde BC es un lado del polígono que dibujaste.

- Construye una cuerda CD de tal manera que D sea el punto medio del arco BC.

- ¿Cómo puedes hallar un punto E de tal manera que ese punto sea exterior a la circunferencia, donde el punto E sea la intersección de dos cuerdas de la circunferencia?

____
____
____
____
____
____

- Ahora, trace el segmento AD y nombre como F a la intersección entre el segmento CB y el segmento AD.

- Ubique un punto G sobre el segmento AB.
- Trece el segmento FG.
- Tenga en cuenta que el ángulo AGF es un ángulo recto.
- ¿Qué relación existe entre el segmento GE y el radio de la circunferencia?

____

____

____

- Plantea una conjetura a partir de la anterior construcción:

____

____

____

- ¿Cuál es el antecedente?

____

____

- ¿Cuál es el consecuente?

____

____

- Reconstruye todo lo anterior considerando como objetos iniciales los elementos planteados en el antecedente.
- Reformula, si es necesario, tú conjetura y escribe de manera formal una proposición.

____

____

____

CONCLUSIONES

A continuación se presentan dos grupos de conclusiones, las primeras relacionadas con los objetivos del trabajo, y las últimas relacionadas con los productos de este trabajo.

I) Sobre los objetivos:

- La bibliografía encontrada para la realización del presente trabajo aportó a la formación como docente, ya que si se indaga acerca de la temática a estudiar, se conoce su historia y se estudian trabajos que se han realizado y están relacionados en torno a este tópico, se puede dar más significado y comprensión para la enseñanza del tema; por tal motivo se puede adquirir un mayor dominio para diseñar propuestas de enseñanza para el estudio del contenido en particular. Además contribuye para futuros trabajos en geometría plana o trabajos de un estudio similar.

- La construcción de los Applets con el software de geometría dinámica GeoGebra proporciona elementos para una mayor comprensión de los lemas de Arquímedes, debido a que la interacción con éstos facilita la deducción de propiedades geométricas y permite visualizar relaciones que no son fáciles de ver en imágenes estáticas y que por tanto ayudan en la realización de las demostraciones.

- Estas propuestas de taller son un complemento para la enseñanza de los lemas de Arquímedes, ya que con las preguntas orientadoras que allí se plantean, se genera una mayor comprensión para el estudio de esta temática, porque el estudiante no solamente seguirá unos pasos, si no que por medio de este taller el estudiante imagina, deduce y propone caminos orientados hacia la conjetura, verificación y una posible demostración de los resultados que obtienen.

- La realización de las demostraciones de cada lema aportó de gran manera a la formación como docentes, ya que a través de la indagación se evidenció que se desconocían varias propiedades y teoremas relacionados con las circunferencias. Esto permitió un enriquecimiento en el marco matemático y facilitó el diseño de las propuestas de taller para la enseñanza de los lemas de Arquímedes.

II) Sobre los productos finales:

- El objetivo se logró debido a que se conformó un recurso bibliográfico que recoge los 15 lemas de Arquímedes con explicaciones detalladas, representaciones dinámicas, demostraciones y propuestas de talleres.

- Los aportes del trabajo son:

4. Explicaciones detalladas y demostraciones de los 15 lemas con su respectiva representación dinámica.
5. Una propuesta de talleres para la enseñanza de los lemas de Arquímedes, haciendo uso de software de geometría dinámica.
6. Un CD interactivo en donde el usuario tiene al alcance todo el trabajo organizado por los enunciados de los lemas, explicaciones, representaciones dinámicas (Applets), demostraciones y talleres.

- Este trabajo se realizó con el fin, de que los maestros y estudiantes de la licenciatura en matemáticas, puedan hacer uso de un recurso bibliográfico, el cual recopila una temática antigua de geometría plana que no se encuentra fácilmente o que no se ha trabajado lo suficiente. Es una propuesta para que en los cursos de geometría se pueda retomar el estudio de trabajos antiguos no muy conocidos y se puedan abordar con herramientas actuales como lo es la utilización de software educativo de matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Boyer, C. B. (1999). *Historia de la matemática.* Madrid : Alianza Editorial .

[2] Burton, D. (2010). *The History of Mathematics: An Introduction* (7 ed.). McGraw-Hill.

[3] Collete, J. P. (1985). *Historia de la matemática.* Madrid : Editorial Siglo XXI .

[4] De la torre, A. (1997). *Anotaciones a una lectura de Arquímedes*. Medellín: Universidad de Antioquia.

[5] Escobar, J. (2011). *Elementos de Geometría .* Medellín: Universidad de Antioquia.

[6]Euclides. (300 A.C). Los elementos de Euclides. Versión digital. http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm

[7] Fukata, J., Getz, M., & Jones, D. (2002). A generalization of the arbelos (Feature). *Mathematics Magazine*, 75(3), 231-233.

[8] González, M. J. (2001). *Reflexiones en torno a la demostración* (recopilación de textos preparados por el Grupo de Aprendizaje de la Geometría). Documento en línea ver http://uv.es/~didmat/angel/ seiembid.html#textos.

[9] Gutierrez, A. (11 de Mayo de 2004). *Archimedes' Book of Lemmas*. Recuperado el 2012 de Noviembre de 11, de Go Geometry: *http://www.gogeometry.com/ArchBooLem00.htm*

[10] Heath, T. (1987). *The Works of Archimedes.* Cambridge University

[11] MEN (2002). *Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*, Serie memorias, Bogotá, Colombia.

[12] Nelsen, R. B. (2002a). Proof Without words: the area of an arbelos. *Mathematics Magazine*, 75(2), 144.

[13] Nelsen, R. B. (2002a). Proof Without words: the area of a salinon. *Mathematics Magazine*, 75(2), 130.

[14] Parra, E. (2009). *Arquímedes: su vida, obras y aportes a la matemática moderna.* Universidad de costa rica.

[15] Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas. (2011, Marzo 29). Criterios para la realización y evaluación de trabajos de grado. Bogotá, Colombia.