# APLICACIONES DE LAS MATEMÁTICAS EN LAS FINANZAS

GERMÁN AUGUSTO MURILLO PIÑEROS

TATIANA GALEANO MORENO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL.

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2019

# APLICACIONES DE LAS MATEMÁTICAS EN LAS FINANZAS


GERMÁN AUGUSTO MURILLO PIÑEROS

CC: 10337539663

Código: 2014240039

TATIANA GALEANO MORENO

CC: 1031158322

Código: 2014240018


Trabajo de grado para optar el título de Licenciatura en Matemáticas


DIRECTOR:

JESÚS ANDRÉS ROMERO DÁVILA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL.

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS



BOGOTÁ, D.C.

2019

## DEDICATORIA

El presente trabajo de grado lo dedicamos principalmente a Dios, por ser el inspirador y darnos fuerza para continuar en este proceso de obtener uno de los anhelos más deseados.

A nuestros padres, por su amor, trabajo y sacrificio en todos estos años, gracias a ustedes hemos logrado llegar hasta aquí y convertirnos en lo que somos. Ha sido el orgullo y el privilegio de ser sus hijos, son los mejores padres.

A nuestros hermanos (as) por estar siempre presentes, acompañándonos y por el apoyo moral, que nos brindaron a lo largo de esta etapa de nuestras vidas.

A todas las personas que nos han apoyado y han hecho que el trabajo se realice con éxito en especial a aquellos que nos abrieron las puertas y compartieron sus conocimientos.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Dios por bendecirnos la vida, por guiarnos a lo largo de nuestra existencia, ser el apoyo y fortaleza en aquellos momentos de dificultad y de debilidad.

Gracias a nuestros padres, por ser los principales promotores de nuestros sueños, por confiar y creer en nuestras expectativas, por los consejos, valores y principios que nos han inculcado.

Agradecemos a nuestro asesor el Profesor Jesús Andrés Romero Dávila, por haber compartido sus conocimientos a lo largo de la preparación de nuestra profesión y quien ha guiado con su paciencia y su rectitud como docente.

**ABSTRACT**

This document will talk about the preliminary financial risk starting with the history of risk and some preliminary concepts that the reader must take into account to read the document. Subsequently, some definitions of financial risk said by different authors will be discussed.

Then, we will start talking about one of the central themes, linear regression, we will start talking from its definition and estimation, in addition we will see a couple of examples where the view theory will be applied. After the examples, the justifications for why this linear regression can be applied will be analyzed.

Turning to another of the central issues, we will talk about the CAPM model, this also has to do with linear regression but already applied to the economy. Finally, the conclusions of the degree work will be given.

| | |
|---|---|
| UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL | **FORMATO** |
| | **RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE** |
| **Código:** FOR020GIB | **Versión: 01** |
| **Fecha de Aprobación: 10-10-2012** | **Página vi de 114** |

## 1. Información General

| | |
|---|---|
| **Tipo de documento** | Trabajo de grado |
| **Acceso al documento** | Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central |
| **Título del documento** | Aplicaciones de las matemáticas en las finanzas |
| **Autor(es)** | Galeano Moreno, Tatiana; Murillo Piñeros, Germán Augusto |
| **Director** | Romero Ávila, Jesús Andrés |
| **Publicación** | Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 114p. |
| **Unidad Patrocinante** | Universidad Pedagógica Nacional UPN |
| **Palabras Claves** | FINANZAS; APLICACIONES; MÉTODOS CUANTITATIVOS; PROBABILIDAD. |

## 2. Descripción

En este trabajo se encuentran dos aplicaciones las cuales son desarrolladas a partir de modelos financieros. Se realiza por el motivo de profundizar en un tema que poco se ha trabajado en las instituciones siendo esta matemática financiera importante para el campo laboral y educativo. Las aplicaciones matemáticas surgen de una serie de recopilación de recursos bibliográficos los cuales permiten hacer un mejor análisis de los ejemplos (aplicaciones). Se empieza por hacer un recorrido histórico y observar los más destacados eventos tanto positivos como negativos, luego se abordan, de manera general, diferentes métodos cuantitativos que están relacionados con las finanzas y pueden ser parte de algún modelo del mismo. Se profundiza en dos métodos que son la regresión lineal simple y múltiple, pues son los más relevantes en el trabajo de grado. Por otro lado, se explican los dos modelos financieros que tienen relación con los métodos explicados y finalmente, se exponen las aplicaciones matemáticas argumentadas con el contenido ya expuesto.

## 3 Fuentes

Abad, A., Cristóbal, A., & Quilis, E. (2000). *Fluctuaciones económicas, puntos de giro y clasificación cíclica.* Instituto Nacional de Estadística.

Aceña, P.M. (2011). *PASADO Y PRESENTE de la gran depresión del siglo XX a la Gran Recesión del siglo XXI.* Bilbao: Fundación BBVA.

Alonso C. J., & Bergrun P. L. (2015). *Introducción al análisis de riesgo financiero.* Bogotá: ECOE Ediciones.

Atienza, B. G. (26 de junio de 2012). *LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS.* Obtenido de https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1764/Gal%C3%A1n%20Atienza%2C%20Benjam%C3%ADn.pdf?sequence=1

Avellaneda, B., & Campo, A. (2009). *El patrimonio y los ciclos de las entidades financieras.*

Bogotá: Criterio Libre.

Barajas Nova, A. (2008, pág. 155). *Finanzas para no financistas.* Bogotá: Editorial Pontifica Universidad Javeriana.

Cabrera Martín, M. (24 de noviembre de 2009). *LOS DISTINTOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN.* Obtenido de https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_24/MARIA%20DEL%20CARMEN_%20CABRERA%20MARTIN_1.pdf

Castillo, B. (2018). *¿Qué es la tasa libre de riesgo? ¿Cómo se calcula?*

Corona Cabrera, A. (2002). *Contabilidad Básica II.* Sistema Universidad Abierta.

CRUZ, E. D. (2009). *Teoría del riesgo.* Bogotá: Ecoe Ediciones.

Damrauf, G. (2010). *Finanzas Corporativas.* Buenos Aires: Alfaomega.

Del Valle, S. C., & Schemel, M. E. (12 de enero de 2010). *Desarrollo y evolución de las finanzas.* Obtenido de https://www.actaodontologica.com/ediciones/2011/1/art-20/

Duque Navarro, J. (21 de junio de 2018). *¿Qué significa el término cameralismo?* Obtenido de https://www.abcfinanzas.com/principios-de-economia/que-significa-el-termino-cameralismo

Durán, O. (2014). *XX Congreso nacional de profesionales en Ciencias Económicas.* Salta-

Argentina

Espinoza, E. (2016). *Variables operaciones de variables.* Barcelona.

Fomín, S. V. (1975). *SISTEMA DE NUMERACIÓN.* Moscú: Editorial MIR.

García Padilla, V. M. (2014). *Introducción a las finanzas.* México: Patria.

Garnica, B. Á. (s.f). *UNA APROXIMACIÓN A LA HISTORIA DE LA CUANTIFICACIÓN DEL RIESGO: DE LA ANTIGÜEDAD AL SIGLO XVIII.* Obtenido de https://www.aeca.es/old/vi_encuentro_trabajo_historia_contabilidad/pdf/01_ballarin.pdf

Garza, J. Á. (8 de febrero de 2003). *Sistemas Numéricos*. Obtenido de http://jagarza.fime.uanl.mx/general/presentaciones/notas.pdf

Gimeno Torres, M. (2014). *EVOLUCIÓN DEL MODELO CAPM A LO LARGO DE LA HISTORIA DE LA ECONOMÍA FINANCIERA*. Obtenido de https://repositorio.comillas.edu/jspui/bitstream/11531/149/1/TFG000037.pdf

Laguna, C. (s.f.). *CORRELACIÓN Y REGRESIÓN LINEAL*. Obtenido de http://www.ics-aragon.com/cursos/salud-publica/2014/pdf/M2T04.pdf

Ledesma Goyzueta, L., & Alarcón Novoa, J. (2017). Diferencias entre el error estándar y desviación estándar de la disposición a pagar: aplicación del método bootstrap en la valoración contingente de un bien o servicio ambiental. *Anales Científicos,* 18.

Lemelin, A. (2004). *Métodos cuantitativos de las ciencias sociales aplicados a los* *estudios urbanos y regionales.* México: Fomento Editorial.

Marsden, J., & Tromba, A. (1991). *Cálculo Vectorial.* Wilmington, Delaware: Printed in U.S.A.

Martínez, M., & Marí, M. (s.f.). *Parámetros estadísticos de Posición, Dispersión y Forma.* Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.

McCONNELL, Campbell, R., & BRUE. (1997). *Economía.* McGraw-Hill.

Medina, A., Hidalgo, A., & Sandoval, R. (2012). *Estrategias de diversificación y concentración empleadas por las sociedades anónimas en Chile.* Concepción: Chile.

Monaco, N. I. (14 de marzo de 2009). *Matemática e Historia. El número Cero*. Obtenido de file:///D:/Biblioteca/Downloads/Dialnet-MatematicaEHistoria-3045279.pdf

Monroy, M. (16 de febrero de 2015). *¿Por qué son importantes las matemáticas financieras?* Obtenido de https://www.finanzaspersonales.co/columnistas/articulo/por-que-importantes-matematicas-financieras/55464

Montgomery, D., Peck, A., & Vining, G. (2006). *Introduction to Linear Regression Analysis.* USA: Wiley Interscience.

Morales Castro, A., Sánchez Rodríguez, B., Morales Castro, J. A., & Figueroa Flores, J. G. (2005). *Finanzas I (finanzas básicas).* México: FCA.

Morales, C. A., Restrepo Pinera, C., & Villa Monsalve, O. (23 de febrero de 2017). *Aportes de Fray Luca Pacioli al desarrollo de la contabilidad: Origen y difusión de* *la partida doble.* Obtenido de https://www.revistaespacios.com/a17v38n34/a17v38n34p01.pdf

Newbold, P., Carlson, W., & Thorne, B. (2008). *Estadística para Administración y Economía.* New Jersey: PEARSON Prentice Hall.

Newbold, P., Carlson, W., & Thorne, B. (2008). *Estadística para Administración y Economía.* Madrid: PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Orellana, B. (marzo de 2012).

Pelekais, C. d. (2000). *Métodos cuantitativos y cualitativos: diferencias y tendencias.* Obtenido de file:///D:/Biblioteca/Downloads/Dialnet-MetodosCuantitativosYCualitativos-6436313.pdf

Pérez Burgos, R. O. (octubre de 2011). *HISTORIA DE LAS CRISIS FINANCIERAS.* El Salvador.

Polanco, J. (1995). *Métodos casuales para la cuantificación de la actitud del consumidor.* Cantabria: Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa.

Render, B., Stair, R., & Hanna, M. (2006). *Métodos cuantitativos para los negocios.* México: Pearson Educación.

Rodríguez, E. M. (2005). *Errores frecuentes en la interpretación del coeficiente de determinación lineal*. Obtenido de file:///D:/Biblioteca/Downloads/Dialnet-ErroresFrecuentesEnLaInterpretacionDelCoeficienteD-1143023.pdf

Rosillo C, J. (2005). *Apalancamiento financiero y operativo.*

Sánchez, J. (2002). *Análisis de rentabilidad de la empresa.* Análisis contable.

Toro, J. M. (2007). *Regresión lineal múltiple*. Obtenido de https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/53349817/Regresion_lineal_multiple_3.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DRegresion_lineal_multiple.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz-Credential=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A%2F20200127%2F

Valencia, J., & Gallego, G. (2014). *DISEÑO DE UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN DE RENTA VARIABLE CON INSTRUMENTOS FINANCIEROS COLOMBIANOS BAJO LA METODOLOGÍA DE CARTERA EFICIENTE DE HARRY MARKOWITZ.* Medellín: Universidad de Medellín.

Walpole, R., Myers, R., Myers, S., & Ye, K. (2012). *Probabilidad y estadística para ingenieros y ciencias.* México: PEARSON.

**4. Contenidos**

El contenido de este trabajo está distribuido en seis capítulos en donde se argumenta teóricamente el objetivo general. El primer capítulo recoge una introducción general de las finanzas, allí se puede encontrar la historia y sucesos importantes, por otro lado, se explican una serie de conceptos relacionados con las finanzas, pues es necesario para entender los modelos y otros temas más adelante expuestos. También se habla sobre la definición de riesgo y, específicamente del riesgo financiero, ya que los modelos financieros están relacionados con el mismo, tomando como referentes teóricos a Cruz (2009), Corona (2002), García (2014) y Garnica (s.f).
En el segundo capítulo, se encuentran los métodos cuantitativos que se relacionan en el campo de las finanzas para la toma de decisiones, allí se nombran características importantes de algunos de estos métodos, pero se profundizan en dos, los cuales son: regresión lineal simple y múltiple, esto sustenta los modelos financieros los cuales arrojan resultados y permiten tener una visión más clara para la toma de decisiones.
En el tercer capítulo se evidencia la deducción del modelo de regresión lineal; en el cuarto capítulo presenta el modelo CAPM en el cual se pueden encontrar los conceptos cruciales para entender este modelo explicado de forma detallada. El quinto capítulo muestra el segundo modelo a trabajar el cual es el modelo de tres factores de Fama y French, este se realizó teniendo en cuenta los conceptos importantes de este modelo los cuales se explican de manera detallada.
Finalmente, el sexto capítulo aborda los ejemplos usando los modelos financieros, allí se encuentran ejemplos los cuales se explican con los modelos a partir de una aplicación matemática. También se evidencia el contraste de los dos ejemplos, la efectividad del modelo, el análisis de la aplicación con el modelo Fama y French con el uso de Excel y el análisis de la regresión múltiple aplicada.

**5. Metodología**

El desarrollo del trabajo se hace en tres fases. Para empezar, se hace una recopilación de recursos bibliográficos para hablar sobre las finanzas desde distintos puntos de vista. El primero es basado en la historia y observar los momentos importantes en donde se ve que la toma de decisiones es relevante para mirar el futuro de la empresa o persona, también se indagan sobre dos modelos lo cuales van a ser útiles en los ejemplos (fase 1); por otro lado, los métodos cuantitativos serán primordiales pues son los encargados de explicar cómo trabaja el modelo (fase 2), finalmente se muestran los ejemplos con su respectivo análisis lo que muestra la efectividad del modelo.(Fase 3).

| | FORMATO |
|---|---|
| UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL | RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE |
| **Código:** FOR020GIB | **Versión: 01** |
| **Fecha de Aprobación: 10-10-12** | **Página xiii de 114** |

## 6. Conclusiones

Lo expuesto a lo largo de este trabajo permite arribar las siguientes conclusiones. El trabajo escrito está enfocado en la realización de dos ejemplos los cuales son explicados con dos modelos financieros por medios de aplicaciones matemáticas, para ellos los objetivos específicos fueron una guía para lograrlo.
En primer lugar, se quiso abordar desde un punto de vista general sobre las finanzas, el riesgo y los diferentes momentos de la historia en donde se vivieron situaciones importantes. Dentro de la recolección de la información, se pudo encontrar todo lo relacionado con lo hablado en el objetivo, pero se evidenció sólo un momento importante el cuál fue llamado la gran depresión por lo que se habló detalladamente solo de este episodio.
En segundo lugar, se lograron encontrar los modelos financieros los cuales van ligados a dos métodos cuantitativos que también tiene una relación estrecha. Sobre los métodos cuantitativos, se abordó gran contenido que logró explicarlos de manera detallada, sin embargo, hay procedimientos algebraicos de fondos, los cuales no se estudiaron ya que no era el fin del trabajo. Lo mismo sucedió con los modelos financieros. A pesar de lo dicho anteriormente, el objetivo se cumple.
Por otro lado, para la producción de las aplicaciones matemáticas, si se usó el programa Excel con el fin de aportar al análisis de los ejemplos. No sólo se colocaron dos ejemplos, sino que se expusieron dos más, uno más por modelo, y esto ayuda a que el lector entienda con mayor claridad la forma en que se usa y lo importante que puede ser tomar estos modelos financieros como ayuda para sus decisiones financieras.
Finalmente, cabe aclarar que es un trabajo que empieza en su primera fase de investigación el cuál es la recolección de recursos bibliográficos, primera fase que puede ser usada por alguna persona interesada en avanzar a otras fases.

| | |
|---|---|
| **Elaborado por:** | Galeano Moreno, Tatiana;<br>Murillo Piñeros, Germán Augusto |
| **Revisado por:** | Romero Dávila, Jesús Andrés |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Fecha de elaboración del resumen:** | 10 | 02 | 2020 |

# TABLA DE CONTENIDO

**LISTA DE FIGURAS** **Pág.**

**LISTA DE TABLAS** **Pág.**

# INTRODUCCIÓN

En el siguiente trabajo de grado se quiere mostrar el uso de aplicaciones matemáticas relacionadas con dos modelos financieros, esto con el fin de mirar cómo es el uso de los mismos, qué datos arrojan para la toma de decisiones y cómo puede un inversor hacer predicciones que le permitan decidir qué hacer con los activos de su empresa y mirar el riesgo financiero que implica realizar la inversión. De manera general, se quiere que los lectores encuentren la utilidad que tienen estos modelos financieros.

La realización de este trabajo se hizo por el interés de dar a conocer modelos financieros, cómo es su uso y para qué sirven. Otro interés fue por abordar los conceptos matemáticos que no se trabajan en el aula como lo son las matemáticas financieras y que debería ser una rama de las matemáticas que se debería enseñar en el aula, pues noticias de la revista semana dicen que, si los temas de ahorro y crédito se empezaran a enseñar desde una temprana edad, los ayudaría para la vida adulta.

La metodología que se usó para la realización de este trabajo se compone en tres grandes partes. En un primer momento, se quiso plantear una idea la cual fuera útil, una idea que pudiera servir en algún momento para alguna persona natural. En un segundo momento, se hizo una recopilación de recursos bibliográficos lo que permite argumentar matemáticamente las decisiones que tome la persona para minimizar el riesgo en una inversión y finalmente, el planteamiento de los ejemplos usando dos modelos financieros comunes.

Este trabajo se encuentra dividido en seis capítulos. En el primero se encuentra una introducción e información general sobre las finanzas y el riesgo; en el segundo capítulo se encuentran los métodos cuantitativos los cuales ayudan tomar la mejor decisión y saber cuál es el camino correcto a seguir; en el tercero, cuarto y quinto capítulo se habla sobre los modelos financieros y la deducción del modelo de regresión lineal, ya con esto se puede realizar el último capítulo el cual usa la teoría para presentar ejemplos con los modelos financieros y así mirar cómo es el uso de estos.

## JUSTIFICACIÓN

En el trabajo se muestra el uso que se le pueden dar a los modelos financieros expuestos en la toma de decisiones, pero no es solo un documento para personas que estudien finanzas sino para los estudiantes de la licenciatura en matemáticas porque además de abordan conceptos matemáticos en los modelos, es bueno que aprendan cómo se podría usar estos modelos financieros en el ámbito personal o para algún proyecto. Este trabajo también puede ayudar a dar herramientas a los maestros en matemáticas para enseñar conceptos matemáticos usando ejemplos y modelos financieros.

Este trabajo se va a realizar en dos momentos importantes. El primero tiene que ver con la búsqueda de información relacionada con las finanzas y los métodos cuantitativos; recolectar todos estos conceptos para que sean ese sustento teórico y poder abordar el segundo momento, el cual será estimar o encontrar esos modelos financieros que puedan explicar de forma detallada unas conclusiones para saber cuál es el mejor camino a seguir. Por otro lado, este documento no resuelve ninguna problemática, pero puede ser de ayuda para algunos de los lectores, esto ya es más a modo individual.

## OBJETIVOS GENERALES

Presentar varios ejemplos de manera detallada relacionados con dos modelos financieros previamente estudiados por medio de aplicaciones de matemáticas que muestren la importancia de los datos arrojados para tomar decisiones sobre las inversiones de una empresa.

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudiar el concepto de finanzas y riesgo financiero a lo largo de los últimos años encontrando el impacto social y económico que este ha tenido en la economía mundial.
- Encontrar dos modelos financieros adecuados donde se evidencien metodologías cuantitativas las cuales arrojen datos relacionados sobre el riesgo financiero.
- Producir dos aplicaciones de matemáticas con el uso de Excel dirigidos a la interpretación de resultados a partir datos de ejemplos.

# CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN E INFORMACIÓN GENERAL

El siguiente trabajo tiene como propósito mostrar dos ejemplos de manera detallada con el fin de observar el uso de dos modelos financieros y cómo ellos pueden influir en la toma de decisiones de una empresa o de un individuo. Antes de lo dicho, se desea mostrar un poco de la historia de las finanzas y otros conceptos en el marco de este.

## 1.1 Historia de las Finanzas

Del Valle y Schemal (2010) afirman que las finanzas son creadas en el momento que el ser humano utiliza el dinero para realizar algún tipo de transacción y se convierte en algo importante para el sujeto pues esto le garantiza la sobrevivencia y mejor calidad de vida.

A lo largo de la historia se pueden encontrar diversos momentos en los que el ser humano empezó a ver la necesidad de incorporar a su cotidianidad un sistema de conteo y una estructura la cual le permite realizar los conteos o trabajos necesarios de la época, es por ello que, civilizaciones como la griega y egipcia creación el sistema numérico decimal, pero vale la pena resaltar por qué estas culturas lo construirán en base 10. Fomín (1975) afirma que la invención de la base 10 no es algo netamente matemático; el ser humano usó como primera herramienta los dedos de las manos para realizar los conteos que necesitaba. Cuando el sujeto terminaba de usarlos, se convierte el número 10 en una unidad nueva; es por ello que el uso de los dedos de la mano para el conteo da origen a esta base que es muy natural.

Las civilizaciones griegas crearon un sistema numérico que utilizaba veinticuatro letras del abecedario, pero carecían de tener un sistema numeral lo que impedía un avance en las matemáticas, sin embargo, Galán (2012) manifiesta que los griegos fueron la primera civilización que organizo y formó las matemáticas desde definiciones y demostraciones, lo que da origen a resolver problemas geométricos y aritméticos. Garza (2003) afirma que a la civilización romana se le debe reconocer la construcción de un sistema número en cual permite escribir números del 1 al 1’000.000 usando sólo siete símbolos, pero uno de los problemas que tiene es que es difícil realizar cálculos como la multiplicación y división ya que llevaría mucho tiempo en realizarlas; estos problemas se resuelven cuando en el siglo V lo indios instituyeron el sistema Nnmeral que se usa en la actualidad.

Otro gran aporte es la invención del cero. Según Mónaco (2009) el cero aparece en Babilonia hacia el año 400 a.C. Esta civilización trabajó con base 60 y durante muchos años, no se distinguía la forma de escribir el número que llevara la representación del cero y el número que no lo llevaba, el ejemplo que el autor nombra es el 23 y 203; pero alrededor de ese año, los babilónicos usaron las comillas para escribir el cero por lo que quedaba de la siguiente manera: 23 y 2’’3.

Por otro lado, Mónaco (2009) afirma que otras civilizaciones como la mesopotámica también representaba el cero, pero aquí se representaba con tres ganchos. También en la india por los años 876 d.C se empieza a usar el cero como una cifra y es introducido por los árabes a Europa.

A partir del sistema numérico creado por los indios, aparecen avances en las matemáticas y una de ellas es la que realiza Fray Luca Pacioli. Cano, Restrepo y Villa (2017) y Ballarín (s.f) afirman que este matemático fue el primero en usar la partida doble en Europa anexando los números en aritmética con el álgebra en su obra llamada *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* que traduce aritmética, geometría, proporciones y proporcionalidad; con esta matemática logró abordar las necesidades comerciales de la época.

A partir de lo anterior, se puede decir que la obra de Pacioli muestra su aporte más importante: la exposición de la contabilidad por partida doble, pero él no es inventor de esta técnica pues Ballarín (s.f) afirma que se basa en la obra de Fibonacci llamada *Liber Abbaci* en donde si hablan de forma sustanciosa sobre la partida doble. Además de esto, en la obra de Pacioli se puede observar el planteamiento de un problema. Ballarín (s.f) afirma que:

> A y B se encuentran en un juego de “balla”. Se acuerdan que no se pararán antes de que uno de los dos haya ganado en seis tiradas. En realidad, al final de la partida, A ha logrado cinco victorias, y B tres ¿cómo van a dividirse los beneficios?” Este problema fue conocido en textos matemáticos hasta el siglo XVII con el nombre de “problema de los puntos” y dio origen a múltiples debates de varios sujetos quienes querían darle respuesta. (p.5)

Pues bien, la solución a este problema nos abre el camino al análisis sistemático de la noción de que un suceso suceda o no, esto llamado desde el contexto matemático como probabilidad. Con esto se da inicio a la cuantificación del riesgo.

Otro matemático que aportó a la matemática fue Cardano quien escribió una obra titulada *Liber de Ludo Aleae* donde según Ballarín (s.f) afirma que se define en latín el juego de datos, el azar, el riesgo y la suerte y a pesar de que el mismo Cardano dice no haber podido resolver el "problema de los puntos" en su obra, se puede observar por primera vez los principios estadísticos de la probabilidad, define la forma que de aquí en adelante se va a expresar una probabilidad: se escribirá como una fracción; el número de casos favorable va a ser dividido por el total de posibilidades; también afirma que la probabilidad que caiga cara o sello al lanzar una moneda es el 50%.

Ballarín (s.f) dice que esta obra fue encontrada en el año 1663 después del fallecimiento de Cardano y en este momento de la historia ya se tenían teorías de probabilidad, pero se asegura que, si esta obra hubiera salido a luz años antes, hubiese sido el apoyo para avanzar en la probabilidad.

En el año 1564 nace otro matemático que contribuye a la noción de probabilidad; él es Galileo que no solo es reconocido por esto sino por un sinfín de temas relacionados a varias ramas del conocimiento. Según Ballarín (s.f), él escribe un folleto llamado *Sopra el Scoperte dei Dadi*, allí se describen las conclusiones de Cardano y hace un análisis en el lanzamiento de los dados pues este experimento permite reflexionar sobre las posibles combinatorias y los posibles resultados. Por otro lado, los avances que se vieron en el siglo XVII en el álgebra y el cálculo infinitesimal abrieron las puertas a conceptos matemáticos ya más abstractos y permiten aplicaciones matemáticas en varios campos, uno de ellos son las inversiones financieras.

Después del recorrido histórico en donde se observan aportes a la probabilidad, Del Valle y Schemal (2010) afirman que las finanzas como disciplina moderna comienza con la ciencia llamada cameralismo. Como el autor Duque (2018) afirma en su sitio web, esta ciencia es de la administración alemana entre los siglos XVIII y XIX la cual refiere a la administración de las finanzas del estado.

También Del Valle y Schemel (2010) dicen que el cameralismo se caracteriza por tres rasgos principales: el primero es sobre la preocupación del buen uso de los recursos de la economía del país; el segundo habla de la relación que debe existir entre la economía privada con la economía pública, teniendo como eje principal el Estado en el cual se montará el desarrollo y fortalecimiento de la economía y el tercero, es sobre las consecuencias del presupuesto del que se habla en el segundo rasgo.

Las finanzas empiezan a hablarse, como campo de estudio, en el siglo XX y se vivieron una serie de sucesos de gran relevancia. Del valle y Schemel (2010) afirman que en la década de los 20 toma mayor importancia el estudio de las finanzas, específicamente en cantidad de fondos, liquidez y financiamiento de las organizaciones gracias a la tecnología y a las nuevas empresas.

En la década de los 30 viene una de las mayores crisis en la historia, la llaman: La gran depresión o crisis de 1929. Según Del Valle y Schemel (2010) y Aceña (2011) este momento de la historia surge a partir de unos endeudamientos principalmente de empresas de servicio público y a su vez movimientos extraños en la bolsa, pues el jueves 29 de octubre de 1929 se redujo de manera astronómica los precios de las acciones; todos querían vender sus acciones ya que iba en descenso la valoración adecuada. Debido a la urgencia de venderlas, en menos de 24 horas, se venden millones de acciones y a su vez una gran quiebra en muchos accionistas y las fluctuaciones no solo produjeron el suicidio de inversionistas, sino que esto fue el comienzo de un largo tiempo de crisis. El 8 de julio de 1932 la gran depresión alcanzó su auge pues la cuarta parte de la población estadounidense estaba desempleada y millones de americanos perdieron sus ahorros por intentar tener una ganancia gracias a los movimientos financieros. Este trance no acababa, tres años después seis mil bancos habían quebrado, la economía mundial se afectó en un 70% y el desempleo llegó a los catorce millones de estadounidenses. Las características más importantes que tuvo esta época fueron:

- Se sabe que epicentro de esta caída fue en New York, Estados Unidos, pero al pasar los años se extendió a todos los países del mundo.
- Esta época duró aproximadamente 4 años en Estados Unidos, pero en el resto del mundo fue mucho más caótico, ya que finalizó aproximadamente en el año 1940, ósea, un poco más de una década.
- Durante este tiempo en casi todo el mundo hubo muchos cambios a nivel político por motivo de las dificultades sociales y económicas que produjo esta gran crisis.
- Otro de los términos como se conoce la gran depresión es la "Burbuja financiera" ya que se vio afectado de gravedad el sistema financiero más específicamente en el sector de la economía.

Por último, se hablará acerca de las causas de la gran depresión. Estas se originan al finalizar la Primera Guerra Mundial que además trajo grandes efectos negativos en la economía principalmente en Europa, donde hubo una disminución del 10 % de la población debido a la guerra. La mayoría de países europeos estaban sumidos en grandes deudas públicas e inflación; esto afectó directamente a Estados Unidos ya que fue fuente económica de diferentes potencias europeas, lo cual transformó severamente su economía por el uso excesivo de crédito, lo que condujo a la caída de bolsa de New York en 1929. La quiebra de Wall Street, más conocida como martes negro sucedió el 29 de octubre de 1929, con pérdidas del 50 % en las acciones de todas las empresas, y, por consiguiente, quiebran un gran número de bancos.

Pérez (2011) afirma que otra época de crisis a nivel mundial sobre las finanzas, fue llamada la crisis del petróleo en 1973, esta se originó por la guerra de Yom Kippur dada en los países árabes y generó un incremento del valor de este oro negro en cuatro veces más de su precio normal. Pues bien, la crisis económica alrededor del mundo no tiene un por qué seguro, aunque hay predicciones o circunstancias que logran advertir a las empresas, no hay nada seguro que lo pueda predecir, sin embargo, esos momentos marcan una historia importante en el mundo financiero.

## 1.2 Conceptos preliminares en las finanzas

**Activo**

Corona (2002) afirma que son los bienes con cuenta una empresa o una persona natural que a futuro les permitirá obtener beneficios económicos o servicios que eventualmente generan flujos de efectivo.

**Costo de capital**

Damarauf (2010) declara que es la tasa de rendimiento que debe alcanzar la empresa acerca de sus inversiones para que su precio en el mercado este intacto.

**Cuantificación**

Polanco (1995) afirma que cuantificar se refiere a expresar numéricamente una cantidad, en otras palabras, reside en asignar en la expresión de una magnitud por medio de números.

**Desviación muestral o desviación estándar de la muestra:**

Autores como Ledesma y Alarcón (2017) definen este concepto como la raíz cuadrada de la varianza de una variable.

**Diversificación**

Medina, Hidalgo y Sandoval (2012) manifiestan que diversificar es buscar invertir el dinero o bienes en varias opciones de inversión, ya que al invertir siempre existirán riesgos, pues en ocasiones en vez de ganar se puede perder lo invertido.

**Fluctuaciones económicas:**

Autores como Abad, Cristóbal y Quilis (2000) estipulan que este concepto está referido a las oscilaciones o alteraciones muestran los precios, las alzas y bajas en las cantidades ofrecidas en una empresa (Tasa de crecimiento económico) en momentos puntuales.

**Flujo de caja:**

Barajas Nova (2008) enuncia que el flujo de caja se encarga de determinar el estado de liquidez de la empresa, es decir, el efectivo que se espera recibir en un determinado tiempo y los egresos en el momento en que se espera que se paguen. El objetivo del flujo de caja es determinar la cantidad de efectivo para cancelar las deudas obtenidas por terceros y retribuir la inversión de los accionistas de la compañía.

**Modelo CAPM**

Alonso y Berggrun (2015) estipulan que es el modelo de fijación de precios de activos de capital que sirve para determinar la tasa de rentabilidad requerida para un activo que forma parte del portafolio de inversiones.

**Parámetro estadístico**

Martínez y Marí (s.f.) manifiestan que este concepto tiene como base un número que representa la cantidad de datos que pueden obtenerse del análisis de una variable estadística. Para calcular este número generalmente se usa una fórmula aritmética que resulta a partir de los datos de una población.

**Portafolio**

Valencia y Gallego (2014) afirman que está constituido por un conjunto de productos financieros los cuales pueden ser, divisas, renta variable, derivados, entre otros. Estos productos buscan generar una rentabilidad económica futura bajo un nivel de riesgo determinado.

**Patrimonio financiero:**

Avellaneda y Campo (2009) definen el concepto de patrimonio financiero como el conjunto de bienes, derechos y obligaciones que posee una persona o compañía. Generalmente este es un concepto que se aplica en las empresas, pero también se utiliza para hablar de la propiedad de un individuo sin tener en cuenta de cómo lo obtuvo.

**Riesgo sistemático y no sistemático:**

Durán (2014) resalta que el riesgo sistemático alude a los riesgos enlazados con todo un mercado o partes de un mercado, por otro lado, el riesgo no sistemático alude a los riesgos que son propios de una empresa.

**Tasa de captación (TIP):**

Según McConnell, Campbell y Brue (1997) la tasa de captación es una función propia que realizan los bancos, los cuales captan o recolectan dinero de las personas o entidades, dependiendo de la cuenta que tenga la persona o entidad (Cuenta de ahorros, cuenta corriente, CDT, etc) ganan intereses los cuales son intereses de captación, representados mediante la tasa de captación. En otras palabras, al banco le conviene que las personas o empresas depositen su dinero en su sistema y como consecuencia, éste los beneficia con una cantidad de dinero por depositar sus recursos financieros en los depósitos del banco.

**Tasa de rentabilidad:**

Sánchez (2002) lo define como el cociente entre los intereses recibidos y el capital invertido. Este valor (La tasa) se representa por medio de porcentajes y es crucial para determinar el plazo de tiempo al que va referida.

**Tasa libre de riesgo:**

Autores como Castillo (2018) definen este concepto como el activo considerado libre de riesgo, esto quiere decir que dicho activo promete un rendimiento seguro sin perdida monetaria en un tiempo establecido.

**Variable discreta:**

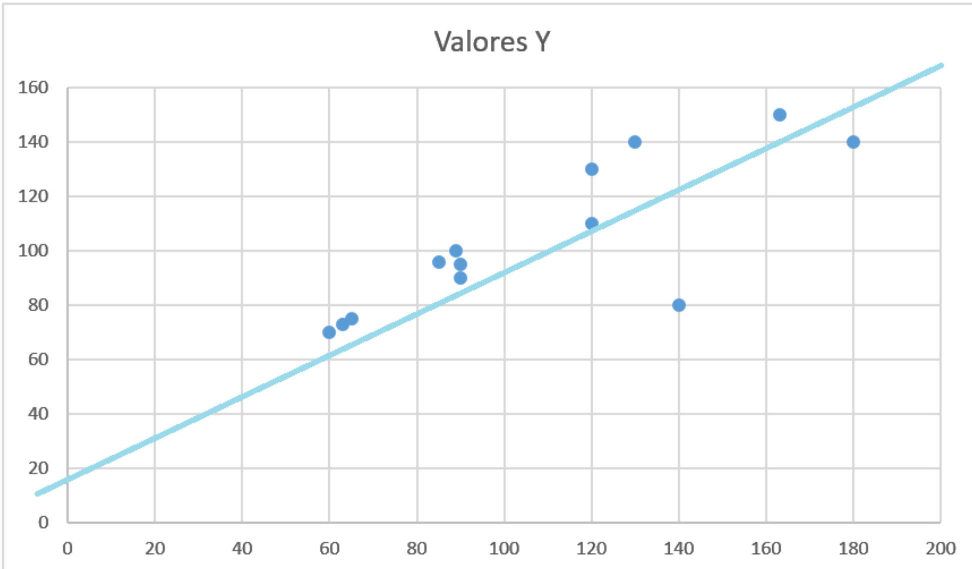
Espinoza (2016) declara que estas variables están ligadas a enumeraciones o conteos y únicamente deben ser representadas con números enteros.

**Variable aleatoria**

Espinoza (2016) también manifiesta que esta es una variable que toma valores numéricos los cuales se determinan con los resultados de un experimento aleatorio.

**Recta de regresión:**

Newbold, Carlson y Thorne (2008) y Laguna (s.f.) estipulan que es un modelo de tipo lineal que permite hacer predicciones sobre un conjunto de valores. Estos autores también afirman que si se tienen dos variables aleatorias $X$ y $Y$ se puede hacer un análisis en donde se observe si existe una relación lineal entre estas; para ello es importante hablar sobre el coeficiente de correlación y regresión lineal simple, además, en un diagrama de puntos dispersos, se puede encontrar esta relación que viene siendo una recta que enlace las dos variables aleatorias, pero no siempre hay una recta lineal apropiada, ésta depende del coeficiente de correlación; entre este coeficiente esté más cerca a uno, es más pertinente el resultado. (Este diagrama se construye como puntos en el plano cartesiano).
La correlación tiene como función determinar la fuerza y dirección cuando se asocian las dos variables y para medirlo, se necesita el coeficiente de correlación Pearson.
Por ejemplo, se toman los datos de los estudiantes de un salón, de su peso con respecto a su estatura, dicha información se representa en un gráfico de dispersión, entonces la recta de regresión será aquella en donde intercepte en lo posible la mitad de los puntos:




Fuente: Elaboración propia

*(Figura 1)*

**Coeficiente de Correlación Lineal de Pearson**

Este coeficiente se usa para encontrar (si existe pues el coeficiente puede ser nulo) la medida que se genera cuando los puntos de dispersión tienen una tendencia lineal. Se toman valores que estén entre -1 y 1. Según Montgomery, Peck y Vining (2006) este coeficiente de correlación $r$ es

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

Donde

- $S_{xy}$: Es la covarianza muestral entre $X$ y $Y$
- $S_x$: Desviación muestral de la variable $X$

- $S_Y$: Desviación muestral de la variable $Y$

**Apalancamiento financiero:**

Rosillo (2005) estipula que el apalancamiento financiero tiene en cuenta el costo de financiamiento y mide el efecto de utilidades netas (Efectivo que le queda a la empresa después de descontar los gastos o atributos correspondientes) de incrementos en las utilidades operativas (Se centra en los ingresos operacionales menos los costos y gastos operacionales), esto quiere decir que considera los intereses como los generadores de la palanca financiera, en palabras más sencillas, el gasto de intereses (Interés generado con una tasa específica después de un determinado tiempo) sería el costo fijo financiero, independiente de la cantidad que produzca la empresa debe pagar la misma cantidad como costo de la deuda.

El apalancamiento financiero se define de la siguiente forma:

Grado de Apalancamiento Financiero= $GAF$

Utilidades antes de impuestos e intereses= $UAII$

$$GAF = \frac{UAII}{UAII - Intereses}$$

**Covarianza:**

Laguna (s.f.) define la covarianza como una medida del grado en que dos variables aleatorias se mueven en la misma dirección o en direcciones opuestas respecto a la otra. En otras palabras, si dos variables aleatorias generalmente se mueven en la misma dirección, se dirán que tienen una covarianza positiva. La varianza se define mediante la siguiente expresión.

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

donde, $x_i$ es la variable independiente, $y_i$ es la variable dependiente, $\bar{x}$ es el promedio de la variable independiente y, por último, $\bar{y}$ corresponde al promedio de la variable dependiente.

Según el resultado obtenido al realizar el proceso con la fórmula anterior se puede determinar lo que la covarianza en el fondo debe concluir, ese análisis se hace teniendo en cuenta si la covarianza es positiva o negativa, en otras palabras, se dice que:

- $S_{xy} > 0$ las dos variables crecen y decrecen a la vez
- $S_{xy} < 0$ una de las variables crece y la otra decrece
- $S_{xy} = 0$ no hay una relación lineal

**Varianza:**

Autores como Walpole, Myers R, Myers S y Ye (2012) estipulan que la varianza es una medida de dispersión que representa la variabilidad de una serie de datos respecto a su media y se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (X-\mu)^2 f(x) \text{ cuando } X \text{ es discreta}$$

Siendo $X$ una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$ y media $\mu$.

## 1.3 ¿Qué son las Finanzas?

Las finanzas es un tema hablado no solo en las empresas, hoy por hoy, se puede encontrar en medios de comunicación y en aplicaciones donde se realice un tipo de inversión, por eso, es importante que se tenga en cuenta el concepto claro de este término. Según García (2014) las finanzas son una serie de movimientos los cuales se hacen por medio de la toma de decisiones, esto con el fin de poder organizar, mover y administrar el dinero o algo que tenga algún valor. Por lo dicho anteriormente, Morales, Sánchez, Morales y Figueroa (2005) afirman que una empresa pierde parte de sus activos por el mal manejo del dinero y no por la suerte financiera que mucho creen.

Uno de los principios de las finanzas según García (2014) tiene que ver con dos tipos de necesidades; el primero es un grupo de personas, instituciones y empresas las cuales tienen un amplio capital y desean sacarle provecho, y el segundo grupo de personas, empresas e instituciones son los que no poseen un gran capital y están dispuestos a pagar interés para obtener dinero y así poder utilizarlo. Al tener más capital que el que gasta (a este grupo de personas se conoce con el nombre de inversionista en el sector financiero) este primer grupo desea conceder este dinero a personas que lo necesiten con el fin de ganar algo que el autor llama rendimiento financiero, en pocas palabras, tener ganancias. El segundo grupo (a este grupo se le conoce con el nombre de Emisores) necesita dinero ya que su capital es poco, ellos deben pagar un valor adicional por el préstamo de ese dinero, lo que el autor llama costo financiero. En el siguiente cuadro se explica detalladamente.

| GRUPO | TASA DE INTERÉS | REPRESENTA |
| --- | --- | --- |
| 1. Tienen dinero | Recibe una tasa de interés como rendimiento por prestar sus recursos | Rendimiento financiero |
| 2. No tienen dinero | Paga una tasa de interés por utilizar los recursos de otros | Costo financiero |

Tabla 1. *Explicación de rendimiento y costo financiero*

Ahora bien, García (2014) afirma este procedimiento entre los dos grupos se deben hacer en algún espacio ya sea físico o virtual, a esto se le llama mercado financiero y el autor hace la comparación con el significado de mercado que se tiene en la cotidianidad; este término se relaciona con un lugar en donde hay productos como alimentos, ropa, artículos para el aseo, los cuales están a la disposición de las personas; en este lugar hay personas que estas dispuestas a venderlas a cambio de dinero. El autor también hace referencia al mercado de flores, en el cual se realiza el mismo proceso, por eso, se le atribuye el nombre de mercado financiero. Además de la transacción, allí se entrega algo llamado instrumento financiero que García (2014) lo define como los documentos que respaldan la transacción y los derechos y deberes que tienen los inversionista y emisores respectivamente. El autor habla de un ejemplo muy cotidiano el cual es relacionado con el préstamo que le hace un banco a una persona. En este caso, si el emisor no responde con sus obligaciones, los inversionistas pueden corroborar con el instrumento financiero que se realizó la transacción y así poder ganar interés por ello. El emisor es quien da el instrumento financiero al inversionista.

Después de abordar el concepto de finanzas, el autor García (2014) habla sobre las clases de finanzas que existe y esto depende del núcleo social de donde se tomen las decisiones. Las tres clases son las finanzas personales en las que esta involucrados los individuos, las finanzas corporativas en donde se encuentran las empresas y finalmente las públicas que, como su nombre lo indica, se encuentran el gobierno.

**1.4 Definición de riesgo**

Según el diccionario de la Real Academia Española de la Lengua se define riesgo como "Contingencia o proximidad de un daño"; en otras palabras, es la probabilidad de que un acontecimiento negativo suceda o no suceda. Entonces, el riesgo se puede manifestar cuando un evento ocurre, por ende, este siempre va a estar presente. Por ejemplo, suponga que un banco le presta dinero a una persona natural, entonces el riesgo se ve reflejado en si el deudor saldará su deuda o no, como consecuencia, el riesgo estará presente hasta que la persona pague.

Por otro lado, Cruz (2009) manifiesta que cuando ocurren pérdidas, las consecuencias de este suceso afectan el presupuesto, ingreso, flujo de caja de un ente o empresa terminando de inducir a un evento crítico. Además, las variables aleatorias en el marco de la Matemática actuarial, pueden brindar información sobre la frecuencia y tamaño del daño, pero lo importante que este autor menciona, es establero un seguro para prevenir estos sucesos que pueden generar pérdidas astronómicas. Algunas empresas que disponen de seguros a la gente como es el caso de BBVA (2015) lo definen como una herramienta la cual permite resguardar los activos del riesgo financiero. Un ejemplo que nos puede ayudar a entender mejor lo del seguro que se debe tomar cuando se realice alguna inversión es el relacionado con beneficios por muerte. Los parámetros son los siguientes:

$t_0$: Tiempo cuando la persona adquiere el préstamo

$t_1$: *Tiempo para el cual se hace el cálculo*

$Prob(t_0, t_1)$: probabilidad de sobrevivir en el tiempo $\Delta t$

$C_0$: Capital asegurado inicial

$i$: Tasa de interés

$dtq_{t_1}$: Probabilidad de muerte en un instante posterior a $t_1$

Ahora bien, el valor presente del pago es

$$\frac{C_0}{(1+i)^{t_1-t_0}}$$

El valor esperado del pago

$$C_0 Prob(t_1, t_0) dtq_{t_1}$$

Finalmente, el valor actuarial es

$$\frac{C_0}{(1+i)^{t_1-t_0}}\ Prob(t_1, t_0) dtq_{t_1}$$

### 1.4.1 Definición de riesgo financiero

Según Cruz (2009) el riesgo es todo lo que puede generar un acontecimiento no favorable y las consecuencias que estas pueden generar son daños o pérdidas. Particularmente, en la variable discreta se debe conocer la función ya sea de probabilidad o la función de distribución.

Por otro lado, cuando se refiere a pérdidas generalmente se puede asociar a una consecuencia financiera en donde se afecta el ingreso, presupuestos, cartera, entre otras y puede producir eventos negativos en una empresa o individuo.

Autores como Alonso y Berggrun (2015) afirman que se entiende por riesgo aquella condición en la cual existe una posibilidad de desviarse del resultado esperado o deseado y a su vez, se despliegan dos aspectos de la misma:

El riesgo, además de implicar un posible daño, también puede tener beneficios.

Dependiendo de lo que ocurra (daño o beneficio) siempre va a ocurrir un evento.

# CAPÍTULO 2

## MÉTODOS CUANTITATIVOS

En el siguiente capítulo, se abordan los métodos cuantitativos que se usan en los modelos financieros los cuales explicarán los ejemplos para mirar el uso de este. Pelekais (2000) afirma que se puede definir los métodos o investigaciones cuantitativas como el proceso de explicar y controlar una serie de fenómenos con el fin de conseguir datos numéricos. Los métodos que se usan en las finanzas son amplios, aquí se hablará de algunos de ellos. Un método cuantitativo que ayuda a la toma de decisiones los menciona los autores Anderson, Sweeney, Williams, Camm y Martin (2011), uno de ellos es el modelo que implica una relación entre una variable de volumen como volumen de ventas de producción, con los costos, ingresos y utilidades. Estos autores dicen que el costo de manufactura $C(x)$ esta en función de un volumen de producción el cual lo definen como la suma del costo fijo y el costo variable. Anderson, Sweeney, Williams, Camm y Martin (2011) definen el costo fijo como una parte del costo total que no depende del volumen de producción, además que varía y define el costo variable como una parte del costo total que si depende del volumen de producción y no varía.

Por otro lado, los ingresos van en función del volumen de ventas y los autores Anderson, Sweeney, Williams, Camm y Martin (2011) lo definen como el modelo de ingresos y volumen como la tasa de cambio todo el ingreso con respecto al volumen de ventas. Cuando la tasa de cambio es un valor constante el volumen de ventas no varía, pero cuando la tasa de cambio aumenta o disminuye es un proceso más completo. Un ejemplo que colocan estos autores es cuando esa tasa de cambio es igual a cinco, el modelo lineal que se obtiene es

$$R(x) = 5x$$

Donde

$x$ = Volumen de ventas

$R(x) =$ Ingreso total

Por último, Anderson, Sweeney, Williams, Camm y Martin (2011) hablan sobre la importancia de las utilidades y para ello usan un modelo en donde se determine las utilidades totales $C(x)$ asociadas con el volumen de produccion y ventas $R(x)$. Este modelo es el siguiente

$$P(x) \longrightarrow \text{Probabilidad de } x$$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

El anterior método, se explicó de manera general a modo de ejemplo y de comprender la importancia de los métodos cuantitativos para el desarrollo de situaciones en donde es importante tomar decisiones, se deja a lector la revisión detallada del tema.

## 2.1 Regresión Lineal

### 2.1.1 Definición Regresión Lineal

La regresión lineal simple es una técnica en la estadística que ayuda a modelar la relación que existe entre dos variables cuantitativas. La primera variable cuantitativa será la que se desea predecir por lo que se llama dependiente $Y$; la segunda variable será la que ayudará a predecir la variable $Y$ por lo que a esta se le llama independiente $X$. Esta técnica no sólo es usada en la estadística, se puede encontrar en la biología, ciencias sociales, química física y economía. El riesgo (definido en párrafos anteriores) es un factor que enfrentan muchas de las empresas por lo que se necesita de un modelo el cual permita interpretarlo y así mismo mirar el grado de confiabilidad para dar el siguiente paso, pues bien, el modelo CAPM es usado para esta necesidad y la regresión lineal es la teoría matemática que se encuentra inmersa. El modelo de regresión lineal simple es

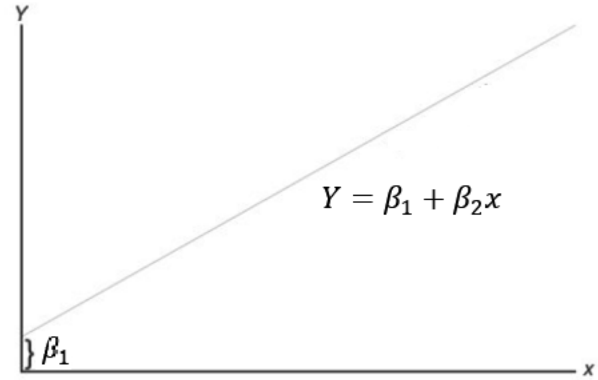
$$Y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon \tag{2.1}$$

Donde los parámetros $\beta_1$ y $\beta_2$ son el origen y la pendiente respectivamente. Se observa otro parámetro $\varepsilon$ el cuál es el componente aleatorio del error el cual tiene algunas características las cuales son:

- El valor medio de los errores es cero
- Los errores no están correlacionados

Por ejemplo, se puede inferir que no todas las casas ubicadas en la misma zona del país, con la misma superficie de construcción, se venden al mismo precio. En este caso, el precio de las casas son **variables dependientes** y los metros cuadrados de superficie de construcción, son las **variables independientes** o regresores. Lo anterior se puede representar mediante la fórmula $Y = \beta_1 + \beta_2 x$

Donde, $\beta_1$ es la intersección y $\beta_2$ es la pendiente, esta relación se expresa como: *(Figura 2)*




Fuente. Elaboración propia. Título: Regresión lineal [Figura]

*(Figura 2)*

Autores como Walpole, Myers R, Myers S y Ye (2012) manifiestan que, si la relación es exacta y no contiene ningún componente probabilístico, entonces se considera como una relación **determinista** entre dos variables científicas. Sin embargo, como en el ejemplo anterior y como muchos otros fenómenos científicos y de ingeniería, las relaciones son no determinísticas, esto quiere decir, una $x$ dada no siempre produce el mismo valor de $Y$. Como consecuencia, los problemas son de naturaleza probabilística.

El concepto de **análisis de regresión** se refiere a encontrar la mejor relación lineal entre $Y$ y $X$, cuantificando la fuerza de esa relación y empleando métodos que permitan predecir los valores de la respuesta dados los valores del regresor $x$.

Un ejemplo para entender con claridad la regresión lineal el cuál es usado para el modelo que se mencionará más adelante (CAPM) trata sobre predecir cómo serían las ventas de algunas tiendas que se quiere abrir la “Northern HouseHold Goods” y para ello, se necesita estimar una ecuación lineal que nos arroje las ventas al por menos en función de la renta de un grupo de familias las cuales fueron encuestadas. A continuación, se encuentra un gráfico de puntos dispersos y la tabla en donde se nombró la variable $Y$ a las ventas al por menos de las familias y la variable $X$ de la renta de las mismas.

| AÑO | RENTA (X) | VENTAS AL POR MENOR (Y) |
|---|---|---|
| 1 | 9098 | 5492 |
| 2 | 9138 | 5540 |
| 3 | 9094 | 5305 |
| 4 | 9282 | 5507 |
| 5 | 9229 | 5418 |
| 6 | 9347 | 5320 |
| 7 | 9525 | 5538 |
| 8 | 9756 | 5692 |
| 9 | 10282 | 5871 |
| 10 | 10662 | 6157 |
| 11 | 11019 | 6342 |
| 12 | 11307 | 5907 |
| 13 | 11432 | 6124 |
| 14 | 11449 | 6186 |
| 15 | 11697 | 6224 |
| 16 | 11871 | 6496 |
| 17 | 12018 | 6718 |
| 18 | 12523 | 6921 |
| 19 | 12053 | 6471 |
| 20 | 12088 | 6394 |
| 21 | 12215 | 6555 |
| 22 | 12494 | 6755 |

*Tabla 2.* Datos sobre la renta $(X)$ y las ventas al por menor $(Y)$ por familia

La gráfica de puntos dispersos la cual permite visualizar la recta de regresión que más se ajusta a los datos es:

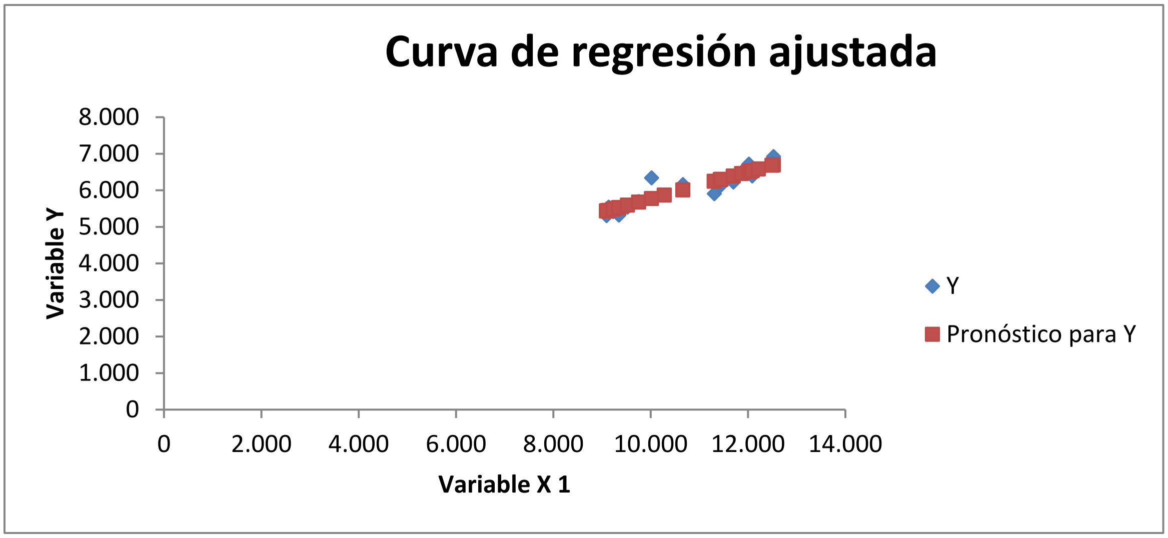



*Figura 3.* Curva de Regresión Ajustada

El análisis de datos se puede observar a continuación

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Resumen | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| *Estadísticas de la regresión* | | | | | | | | |
| Coeficiente d | 0,9587488 | | | | | | | |
| Coeficiente d | 0,91919927 | | | | | | | |
| R^2 ajustad | 0,91515923 | | | | | | | |
| Error típico | 147,669718 | | | | | | | |
| Observacion | 22 | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| ANÁLISIS DE VARIANZA | | | | | | | | |
| | *Grados de liber* | *ma de cuadrad* | *io de los cua* | *F* | *alor crítico de F* | | | |
| Regresión | 1 | 4961434,41 | 4961434,41 | 227,522506 | 2,1713E-12 | | | |
| Residuos | 20 | 436126,913 | 21806,3456 | | | | | |
| Total | 21 | 5397561,32 | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | *Coeficientes* | *Error típico* | *Estadístico t* | *Probabilidad* | *Inferior 95%* | *Superior 95%* | *Inferior 95,0%* | *Superior 95,0%* |
| Intercepción | 1922,39269 | 274,949374 | 6,99180605 | 8,7446E-07 | 1348,85835 | 2495,92704 | 1348,85835 | 2495,92704 |
| Variable X 1 | 0,38151672 | 0,02529306 | 15,0838492 | 2,1713E-12 | 0,32875632 | 0,43427712 | 0,32875632 | 0,43427712 |

*Tabla 3.* Datos sobre la estadística de la regresión teniendo en cuenta los datos de la tabla 2

Con estos datos, podemos concluir que la recta es

$$Y = 1.922{,}39 + 0{,}381517X$$

Los datos de esta o cualquier recta se pueden calcular de dos formas, la primera, es utilizar softwares que ayuden a calcular los valores de $\beta_1$ y $\beta_2$, en este caso el software que se utilizó fue Excel, como se muestra en la columna de coeficientes de la tabla 2, pero también hay una forma matemática con la cual se puede hallar:

$$\beta_2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

y

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \beta_2 \sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

### 2.1.2 Estimación de los parámetros por mínimos cuadrados

Los parámetros $\beta_1$ y $\beta_2$ no se conocen, y se deben usar para la estimación de los parámetros de la muestra. Suponiendo que hay $n$ pares de datos

$$(y_1, x_1), (y_2, x_2), \dots , (y_n, x_n)$$

Recuerde que estos datos pueden obtenerse de un experimento controlado o un estudio observacional, partiendo de registros históricos existentes.

#### 2.1.2.1 Estimación de $\boldsymbol{\beta_1}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{\beta_2}$

Para estimar el $\beta_1$ $y$ $\beta_2$ se usa el método de mínimos cuadrados, esto quiere decir que la suma de los cuadrados de las diferencias entre las observaciones $y_i$ y la línea recta sea mínima. Según la ecuación (2.1) vista en la sección anterior, se puede inferir que

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots , n \quad (2.2)$$

Se puede apreciar que la ecuación (2.1) es un modelo poblacional de regresión, mientras que la ecuación (2.2) es un modelo muestral de regresión, escritos en términos de los $n$ pares de datos $(y_i, x_i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Por consiguiente, el criterio de mínimos cuadrados es

$$S(\beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)^2 \quad (2.3)$$

Los estimadores, por mínimos cuadrados, de $\beta_1$ y $\beta_2$ que se designarán por $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ deben satisfacer lo siguiente

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \beta_1}\right| (\hat{\beta}_1 . \hat{\beta}_2) = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_i) = 0$$

y

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \beta_2}\right| (\hat{\beta}_1 . \hat{\beta}_2) = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_i)x_i = 0$$

Al simplificar estas dos ecuaciones se obtiene

$$n\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

Las anteriores ecuaciones son llamadas **ecuaciones normales de mínimos cuadrados** y su solución es la siguiente:

$$\hat{\beta}_1 = \hat{y} - \hat{\beta}_2 \hat{x} \quad (2.4)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)(\sum_{i=1}^{n} x_i)}{n}}{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}}$$

(2.5)

donde,

$$\hat{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad y \qquad \hat{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

son los promedios de $y_i$ y $x_i$ respectivamente. Como consecuencia, $\hat{\beta}_1\ y\ \hat{\beta}_2$ en las ecuaciones (2.4) y (2.5) son los estimadores por mínimos cuadrados de la ordenada del origen y la pendiente respectivamente. Resumiendo, el modelo ajustado a la regresión lineal simple, es

$$\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\hat{x}$$

(2.6)

### 2.1.3 Supuestos del modelo de regresión simple

A lo largo de las secciones anteriores se ha discutido el modelo de regresión simple el cual tiene una relación lineal entre dos variables $x$ y $y$, esto quiere decir:

$$y_1 = \beta_1 + \beta_2 x_1 + \varepsilon_t$$

Esta sección se centrará en analizar el término de error ($\varepsilon_t$) el cual cumple con las siguientes condiciones:

1. Tiene media cero ($E[\varepsilon_t] = 0$)
2. Varianza constante ($Var[\varepsilon_t] = \sigma^2$)
3. No presenta autocorrelación ($[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0$ para todo $i \neq j$)

Cuando estos supuestos se cumplen se puede asegurar que se obtendrán las mejores estimaciones posibles partiendo de estimadores lineales.

En la cotidianidad no se puede asegurar si los tres supuestos anteriores se usan o no. El primer supuesto que data sobre el error (media cero) siempre se cumplirá siempre y cuando el modelo de regresión tenga un intercepto. Si el modelo no tiene un intercepto, el supuesto será infringido. Para que esto no pase, es recomendable estimar los valores de regresión con intercepto.

Para estimar el error se calcula con la diferencia entre el valor esperado de la variable dependiente y su valor estimado, es decir:

$$\hat{\varepsilon}_t \equiv e_t = y_t - \hat{y}_t$$

### 2.1.4 Suma total de los cuadrados

Newbold, Carlson y Thorne (2008, pp 448) afirman acerca de la ecuación anterior se puede inferir que la desviación de un valor de $Y$ con respecto a su media puede descomponerse en la desviación del valor predicho con respecto a la media y la desviación del valor observado con respecto a su valor predicho. Lo anterior se representa así con un ligero cambio de notación:

$$y_i - \bar{y} = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i)$$

Ahora se realizan operaciones algebraicas como elevar al cuadrado las dos partes de la igualdad (Esto se efectúa gracias a que la suma de las desviaciones en torno a la media es igual a cero), por último, se suma el resultado de los $n$ puntos y se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

(2.2.1)

Esta ecuación puede representarse de la siguiente forma:

$$STC = SCR + SCE$$

(2.2.2)

En otras palabras, estas siglas representan:

$STC \longrightarrow$ *Suma total de cuadrados*

$SCR \longrightarrow$ *Suma de los cuadrados de la regresión*

$SCE \longrightarrow$ *Suma de los cuadrados de los errores*

Acá se puede observar que la variabilidad total ($STC$) puede ramificarse en un componente ($SCR$) que representa la varibalidad que es explicada por la pendiente de la ecuación de regresión. El segundo componente ($SCE$) corresponde a la desviación aleatoria o también a los puntos de la recta de regresión. Ahora, vinculando las ecuaciones 2.2.1 y 2.2.2, se obtiene:

$$STC = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

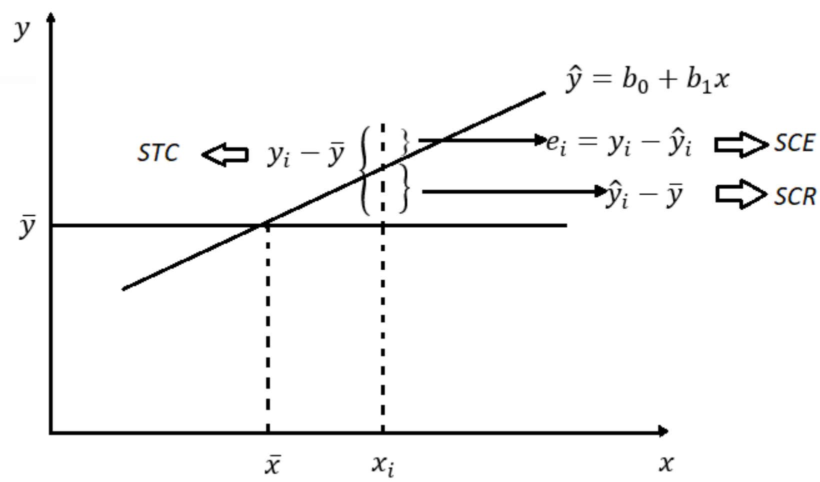
La cantidad de variabilidad establecida por la ecuación de regresión es la *suma total de los cuadrados de la regresión* y se calcula así:

$$SCR = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = {\beta_2}^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Se puede evidenciar que en la ecuación anterior la regresión depende directamente de la magnitud del coeficiente $\beta_2$ y de la dispersión de los datos de la variable independiente, $X$. Las desviaciones que giran alrededor de la recta de regresión $e_i$, que se usan para obtener la *suma de los cuadrados de los errores*, puede definirse haciendo uso de las siguientes formas algebraicas:

$$SCE = \sum_{i=1}^{n}(y_i - [\beta_1 + \beta_2 x_i])^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2$$

Se puede deducir que en esta descomposición cuanto más alto sea el valor de $SCR$ y recíprocamente cuanto más bajos sean los valores de $SCE$, mejor se ajusta o se aproxima la ecuación de regresión a los datos observados. Esta descomposición se puede apreciar mejor en el siguiente gráfico:




Fuente: Elaboración propia. Título: *Descomposición de la variabilidad* [Figura]

*(Figura 4)*

En la ecuación de $SCR$ (suma de los cuadrados de la regresión) se ve que la variabilidad explicada, está relacionada directamente con la dispersión de la variable independiente o $X$. En otras palabras, cuando se trata de explicar aplicaciones del análisis de regresión, se debe tener en cuenta datos que tengan un gran rango para la variable independiente y como consecuencia, el modelo de regresión resultante tenga una variabilidad sin explicar menor.

Lo anterior se refiere al *coeficiente de determinación* o en términos más generales, $R^2$.

$$R^2 = \frac{SCR}{STC} = 1 - \frac{SCE}{STC}$$

### 2.1.5 Ecuaciones normales de la recta de regresión

Los autores Newbold, Carlson y Thorne (2008) también hacen su contribución mostrando cómo se estima por mínimos cuadrados los parámetros poblacionales de regresión. El objetivo es hallar los valores de $\beta_1$ y $\beta_2$ tales que la suma de los cuadrados de las discrepancias sea lo más pequeña posible:

$$SCE = \sum_{i=1}^{n} e_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i])^2 \tag{2.2.3}$$

En primer lugar, se mantendrá la constante $\beta_2$ y se diferencia con respecto a $\beta_1$, esto sería

$$\frac{\partial SCE}{\partial \beta_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)$$

$$= -2\left(\sum y_i - \beta_2 \sum x_i - n\beta_1\right)$$

Como la derivada debe ser 0 para encontrar los puntos críticos y luego derivar por segunda vez para obtener un mínimo, se tiene que *(Este paso se justificara en la sección siguiente)*

$$\sum y_i - n\beta_1 - \beta_2 \sum x_i = 0$$

Dividiendo todo por $n$ se obtiene

$$\beta_1 = \bar{y} - \beta_2\bar{x}$$

Reemplazando este resultado en la ecuación 2.2.3 se obtiene

$$SCE = \sum_{i=1}^{n}[(y_i - \bar{y}) - \beta_2(x_i - \bar{x})]^2$$

Ahora, diferenciando esta expresión con respecto a $\beta_2$, se obtiene

$$\frac{\partial SCE}{\partial \beta_2} = 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})[(y_i - \bar{y}) - \beta_2(x_i - \bar{x})]$$

$$= -2\left(\sum(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y}) - \beta_2\sum(x_i - \bar{x})^2\right)$$

Recordando que la derivada debe ser 0 para encontrar los puntos críticos y luego derivar por segunda vez para obtener un mínimo, se hace

$$\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \beta_2\sum(x_i - \bar{x})^2$$

Entonces,

$$\beta_2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

### 2.1.6 Justificación del uso de la primer y segunda derivada

En la sección anterior se utilizó en más en más de una ocasión el hecho de que la derivada debe igualarse a cero, en esta sección se explicará el por qué se aplica esto. Los autores Marsden y Tromba (1991) usan el siguiente teorema que cual justifica la igualación a cero, este dice: (Se aclara al lector que se hará uso de la notación que se ha venido trabajando)

*"Sea $f\,(\beta_n, \beta_m)$ de clase $C^3$ en un conjunto abierto $U$ en $R^2$. Un punto $(\beta_1, \beta_2)$ es un mínimo local (estricto) de $f$ si se cumplen las tres condiciones siguientes:*

*I.* $\frac{\partial f}{\partial \beta_n}(\beta_1, \beta_2) = \frac{\partial f}{\partial \beta_m}(\beta_1, \beta_2) = 0$

*II.* $\frac{\partial^2 f}{\partial {\beta_n}^2}(\beta_1, \beta_2) > 0$

*III.* $D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial {\beta_n}^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial {\beta_m}^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \beta_n \partial \beta_m}\right)^2 > 0 \text{ en } (\beta_1, \beta_2)$

*(D es el discriminante) Si en II se tiene que < 0 en lugar de > 0 sin cambiar la condición III, entonces se tiene un máximo local (estricto)*"

Para comprender mejor este teorema se realizará el siguiente ejemplo:

Hallar los puntos críticos de la función dada y determinar cuáles son los máximos o mínimos locales.

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + 5x - 2y + 6y^2 + 8$$

*En primer lugar, se deriva parcialmente con respecto a $x$ y luego con respecto a $y$*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y + 5 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 12y - 2 = 0 \quad (2)$$

*En el paso anterior se ve reflejado la aplicación I del teorema.*

*En segundo lugar, se resuelve este sistema de ecuaciones $2x2$ por el método de eliminación. Acá se multiplica la ecuación 1 por 3 y la ecuación 2 por 2:*

$$\cancel{6x} - 9y += -15$$

$$-\cancel{6x} + 24y = 4$$

$$15y = -11$$

$$\boxed{y = -\frac{11}{15}}$$

*Sustituyendo y en la ecuación 1, se obtiene:*

$$2x - 3\left(-\frac{11}{15}\right) = -5$$

$$2x + \frac{33}{15} = -5$$

$$2x = -5 - \frac{33}{15}$$

$$2x = -\frac{108}{15}$$

$$2x = -\frac{36}{5}$$

$$x = -\frac{36}{10}$$

$$\boxed{x = -\frac{18}{5}}$$

*Entonces el punto crítico de la función es* $(-\frac{11}{15}, -\frac{18}{5})$

*Ahora se calcularán las segundas derivadas parciales tanto para* $x$ *como para* $y$*, para aplicar la parte II del teorema*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3$$

*Como* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ *se puede afirmar que el punto* $(-\frac{11}{15}, -\frac{18}{5})$ *es un mínimo local estricto.*

*Para finalizar, se aplicará la parte III del teorema*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

*Hallando el determinante de esta matriz, se obtiene*

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) > 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

*Ahora, reemplazando con los datos obtenidos*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12$$

$$(2)(12) - (-3)^2 > 0$$

$$24 - 9 > 0$$

$$15 > 0$$

*Entonces, se puede concluir que para este último caso también se cumple el teorema, quedando justificado la parte de la sección anterior en la que la derivada se iguala a cero.*

## 2.2 Regresión lineal múltiple

Los autores Newbold, Carslon y Thorne (2008) afirmar que este método cuantitativo es usado para establecer una relación entre una variable dependiente con un conjunto de variables independientes y por esta razón, la regresión múltiple se acerca con mayor claridad a fenómenos y hechos reales a diferencia de la regresión simple. La ecuación matemática es la siguiente:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_j x_j \ + \varepsilon$$

Donde

$y$: variable dependiente

$x_j$: Variables independientes

$\beta_j$: Parámetros a estimar

$\varepsilon$: error que se comete en la predicción de los parámetros

Newbold, Carslon y Thorne (2008) también afirman que este método se puede considerar como un buen modelo para usar en la cotidianidad, sin embargo, al introducir una tercera, cuarta o quinta variable dependiente es importante reconocer cuáles variables son las más indicadas para explicar el fenómeno y cuáles no son cruciales pues no tiene una alta capacidad explicativa. A raíz de esto, se deben analizar estos datos a partir de los siguientes ítems.

1. Determinación de la bondad de ajuste

2. Elección de la menor cantidad de variables independientes que explican la variable dependiente

Antes de esto, es crucial hablar sobre los supuestos de normalidad

### 2.2.1 Supuestos de normalidad

Según Pardo y Ruíz (2005) los supuestos de normalidad son condiciones que deben tenerse en cuenta pues es lo que le da validez al modelo, además que serán supuestos que se tendrán que tener en cuenta en situaciones de la vida cotidiana

- Linealidad: Pardo y Ruíz (2005) afirman que la recta de regresión está conformada de una manera especial, pues la variable dependiente viene siendo la suma de dos elementos: el primero es una combinación lineal de variables independientes y el segundo es el residuo. Cuando no se tienen en cuenta variables independientes importantes o cuando los parámetros que recogen los datos no permanecen constantes, el autor los llama errores de especificación lo cual se debe cuando no se cumple a cabalidad este supuesto.
- Independencia: El autor dice que este supuesto hace referencia a la no dependencia de los residuos pues estos forman una variable aleatoria
- Homocedasticidad: En texto de Newbold (2008) dice que las variables aleatorias construidas con los errores o residuos, tiene una media de 0 y la varianza es la misma.
- Normalidad: Pardo y Ruiz (2005) dicen que, para cada valor de la variable independiente, los errores se distribuyen normal y tienen como media 0

- No-colinealidad: Este autor también define este supuesto como la no existencia de relación entre ninguna de las variables independientes.

**2.2.2 Bondad de ajuste**

Rodríguez y Catalá (2019) definen que la bondad de ajuste determina que tan ajustada esta la recta de regresión con los datos, para ello, se deben tener en cuenta los datos estadísticos como $R, R^2, R^2$ corregido y error típico de la estimación. A continuación, se explicará cada uno de estos datos.

**2.2.2.1 Coeficiente de correlación múltiple R**

Los autores Rodríguez y Catalá (2019) afirman que este dato estadístico mide la intensidad entre el conjunto de variables independientes con la variable dependiente; esta medida se realiza bajo la observación de una matriz de correlaciones parciales. Se debe observar la estrecha relación entre las variables independientes y por otro lado la relación que hay entre la variable dependiente con cada una de las variables independientes. Es importante resaltar que la primera variable que se introduce al modelo es la que arroja la correlación parcial más alta. En la primera observación, los coeficientes de la correlación (estos coeficientes deben estar entre $1$ y $-1$) deben ser cercanas a $0$ ya que, si es, al contrario, se concluye que algunas variables explican de la misma manera la variable dependiente y en la segunda observación, deben existir una relación alta pues de no ser así, podría indicar que las dos variables a analizar no tienen asociación lineal por lo que no es viable realizar la ecuación de regresión lineal. En otras palabras, se puede interpretar el coeficiente de correlación $r$ de la siguiente manera:

- Cuando $r = -1$ existe una relación lineal perfecta de manera negativa
- Cuando $r$ se aproxima a $-1$ la relación lineal es fuerte
- Cuando $r$ se aproxima a $0$, no hay relación lineal
- Cuando $r$ se aproxima a $1$ la relación lineal es fuerte
- Cuando $r = 1$ existe una relación perfecta de manera positiva

#### 2.2.2.2 Coeficiente de determinación $\boldsymbol{R^2}$

Rodríguez y Catalá (2019) señalan que este coeficiente muestra qué tan variable puede ser la variable dependiente la cual es explicada por las variables independientes que son las escogidas por ser las más factibles de manera porcentual. Rodríguez (2005) afirma que para encontrar $R^2$ se debe tener en cuenta la varianza explicada (VE) dividida entre la varianza total (VT) escrita de la siguiente manera

$$R^2 = \frac{VE}{VT}$$

La variable explicada se calcula restando la varianza total menos la varianza no esperada (VNE)

$$R^2 = \frac{VT - VNE}{VT}$$

Finalmente, se puede escribir de la siguiente manera

$$R^2 = 1 - \frac{VNE}{VT}$$

El autor también señala que este coeficiente de determinación se puede clasificar de la siguiente manera

- Si $R^2$ es menor que 0,4 es malo
- Si $R^2$ esta entre $0{,}4\ y\ 0{,}5$ es regular
- Si $R^2$ está entre0,5 a 0,85 es bueno
- Si $R^2$ es mayor a 0,85 es muy bueno

Ahora bien, para hallar la varianza total, especificada y la no especificada se debe a partir de la definición de residuo que surge a partir del modelo de regresión lineal múltiple

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k \beta_{ki} + \varepsilon_I$$
$$\hat{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k \beta_{ki}$$

$$y_i = \hat{y}_i + \varepsilon_I$$
$$y_i - \hat{y}_i = \varepsilon_I$$

Se resta a ambos lados de la igualdad la media muestral de la variable dependiente y se obtiene

$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_i - \bar{y}) + \varepsilon_I$$

Y se reemplaza el valor del residuo

$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i)$$

Esta nueva ecuación sería la desviación observada con respecto a la media muestral es igual a la desviación predicha con respecto a la media muestral más el residuo. Luego se eleva al cuadrado ambos términos de la igualdad y después, se hace la suma desde el índice $i = 1$ hasta el tamaño de la muestra $n$ y se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=!}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

Finalmente, lo encontrado se puede llamar la suma de los cuadrados (varianza total) es igual a la suma de los cuadrados de la regresión (varianza explicada) más la suma de los cuadrados de los errores (varianza no explicada). En conclusión, se tiene que

$$VT = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

$$VE = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y_i} - \bar{y})^2$$

$$VNE = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y_i})^2$$

Los dos componentes que tiene la suma de los cuadrados de la regresión, van a permitir hacer un análisis de varianza que más adelante será expuesto.

#### 2.2.2.2.1 $\mathbf{R^2}$ corregido

Newbold, Carslon y Thorne (2008) dicen que el $R^2$ corregido (el autor lo simboliza $\overline{R^2}$) también explica la variabilidad de la variable dependiente, la diferencia es que es neutral al momento de introducir otra variable. El autor Toro (2007) muestra la forma de hallar este dato teniendo en cuenta que este mantiene la relación con $R^2$.

$$\overline{R^2} = 1 - \frac{\frac{VE}{n-k}}{\frac{VT}{n-1}}$$

Siendo

$k$: número de parámetros

$n$:  Número de observaciones de la muestra

### 2.2.2.3 Error típico de la estimación

Para hablar del error típico de la estimación, es necesario explica primero el concepto de la estimación de la varianza de los errores. Considerando el modelo de regresión múltiple, Newbold, Carslon y Thorne (2008) dicen que $\sigma^2$ es la varianza común de los errores $e_i$ y la estimación insesgada es

$$s_e{}^2 = \frac{VNE}{n - K - 1}$$

Donde $K$ es la cantidad de variables independientes, $n - K - 1$ son los grados de libertad y que sea insesgada quiere decir que el valor esperado $E(\beta) = \beta$

### 2.2.3 Estimación de los parámetros

Para encontrar las ecuaciones que arroja el valor de los parámetros se estima mediante el proceso de mínimos cuadrados. Si el lector desea abordar de manera detallada la demostración, se puede dirigir a Walpole (2012). Las ecuaciones para hallar tres parámetros son:

$$b_1 = \frac{s_y\left(r_{x_1y} - r_{x_1x_2}r_{x_2y}\right)}{s_{x_1}\left(1 - r^2{}_{x_1x_2}\right)}$$

$$b_2 = \frac{s_y\left(r_{x_2y} - r_{x_1x_2}r_{x_1y}\right)}{s_{x_2}\left(1 - r^2{}_{x_1x_2}\right)}$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2$$

Donde

$r_{x_1y}$: Correlación muestral entre $x_1$ e $y$

$r_{x_2y}$: Correlación muestra entre $x_2$ e $y$

$r_{x_1x_2}$: Correlación muestral entre $x_1$ y $x_2$

$s_{x_1}$: Desviación típica muestral de $x_1$

$s_{x_2}$: Desviación típica muestral de $x_2$

$s_y$: Desviación típica muestral de $x_y$

### 2.2.4 Contraste de hipótesis de coeficientes

A partir de los componentes de la suma y como bien se dijo en una de las secciones anteriores Newbold, Carslon y Thorne (2008) hacen un análisis de varianza que permite visualizar que tan acertada es la recta de regresión y para ello tiene la siguiente hipótesis nula:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k = 0$$

Con esta hipótesis se dice que ninguno de los parámetros es realmente significativo y de ser así, se debe recolectar otro conjunto de datos, sin embargo, esta situación pocas veces ocurre pues al menos existe un parámetro diferente de cero, por lo que esta será nuestra hipótesis alternativa:

$$H_1 \;\; al\ menos\ un\ \beta_k \neq 0$$

Para rechazar la hipótesis nula, se parte de la descomposición de la variabilidad de

$$VT = VE + VNE$$

Para empezar, se debe tener en cuenta el cuadrado medio de la regresión el cual se calcula de la siguiente manera

$$CMR = \frac{VE}{K}$$

Donde K son los grados de libertad. Ahora bien, se necesita de un estadístico que permite rechazar la hipótesis nula, para ello se necesita calcular F (Fisher) quien Marco (s.f) lo define como un test que dice, si entre un conjunto de variables independientes existe al menos una que sea significativa para la variabilidad de la variable dependiente. Los autores Newbold, Carslon y Thorne (2008) escriben la fórmula de la siguiente manera

$$F = \frac{CMR}{{S_e}^2}$$

Finalmente, se dice que se rechaza la hipótesis nula cuando el valor calculado de $F$ (el cual es el resultado arrojado con la fórmula anterior) es mayor el valor crítico de F. Escrito de manera forma sería

$$Si\ F_{K,n-K-1} > F_{K,n-K-1,\alpha}$$

# CAPÍTULO 3

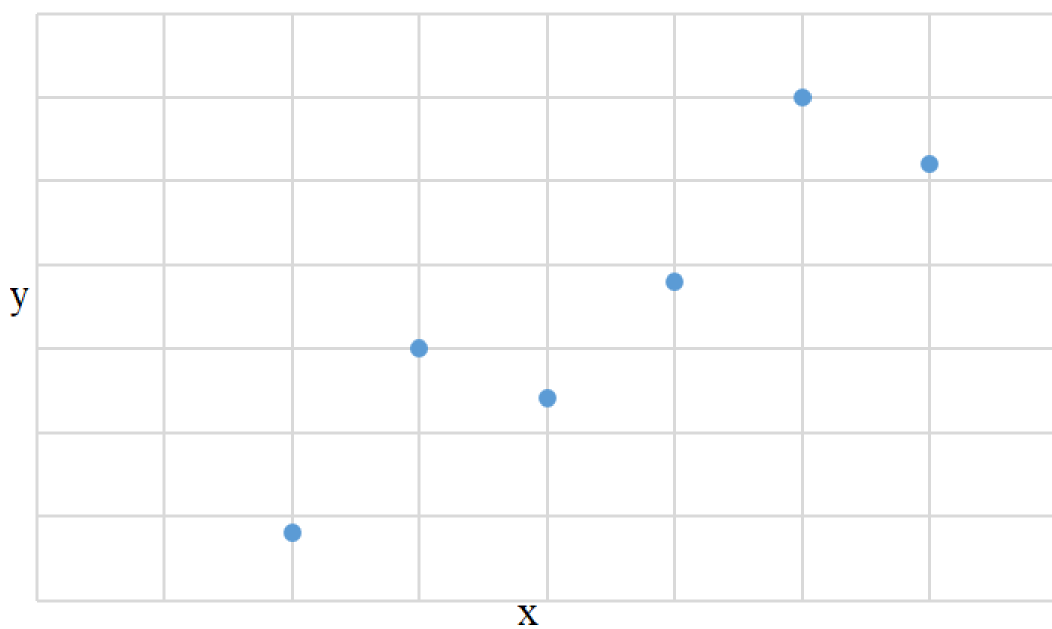
## DEDUCCIÓN DEL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL

En este capítulo se verá el formalismo matemático el cual permitirá ver la derivación de fórmulas para la regresión lineal simple. En primer lugar, se toman $n$ pares de datos

| $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | … | $\boldsymbol{x_n}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{y}$ | $y_1$ | $y_2$ | … | $y_n$ |

Murillo, G (2019) *Tabla de regresión para* $x_n$, $y_n$ [Tabla 4]

Se quiere predecir $x$ en términos de $y$ *(Ver figura 1)*



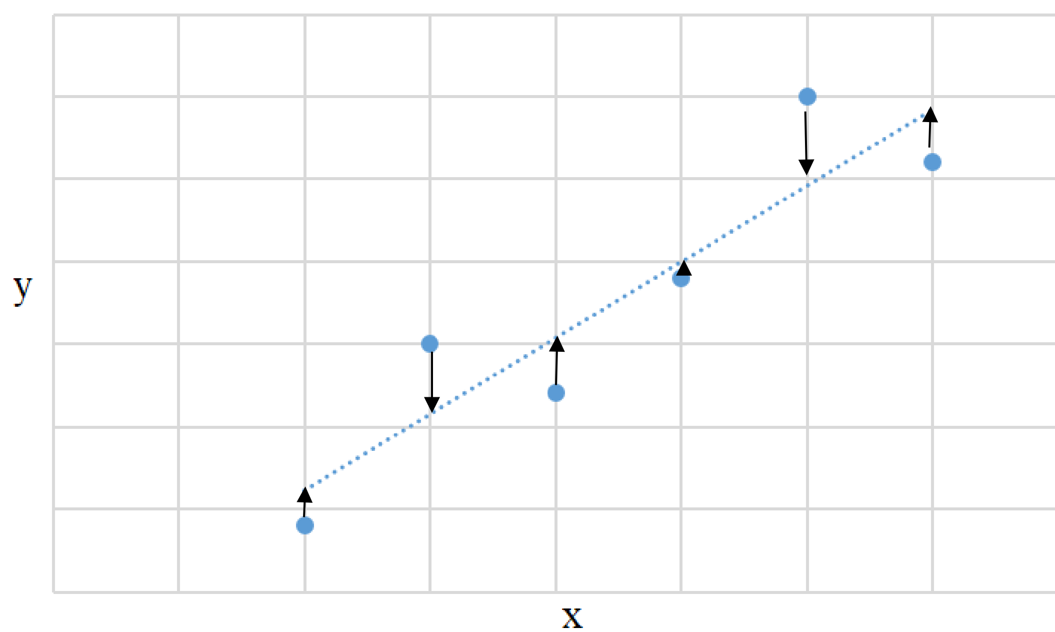

Murillo, G (2019) *Gráfico de regresión para* $x_n$, $y_n$. [Figura]

*(Figura 5)*

Se tomará la ecuación de la recta $y = mx + b$, pero teniendo en cuenta que el objetivo es predecir $y$ en términos de $x$ entonces se tomará como base la siguiente ecuación y llevándola con la notación que se ha venido trabajando, quedaría:

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon_i$$

Se sabe que para encontrar la mejor recta que corresponda a los puntos de la dispersión es encontrar las distancias verticales que hay de los puntos a la recta, el objetivo es encontrar la recta que está más cerca a esos puntos *(Ver figura 5)*. En pocas palabras, el objetivo es buscar la recta que se acople mejor a los datos y estas distancias son las consideradas como el error ($\varepsilon_i$).




Murillo, G (2019) *Gráfico de regresión para* $x_n$, $y_n$. [Figura]

*(Figura 6)*

Se le recuerda al lector que estos errores (o residuos) pueden ser tanto positivos como negativos, entonces, el objetivo es tratar de minimizar el error realizando la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_i}^2$$

Ahora, despejando a $\varepsilon_i$ de

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i = \ y - (\beta_1 + \beta_2 x)$$

Reemplazando en la sumatoria

$$SCE = \sum_{i=1}^{n} y - (\beta_1 + \beta_2 x)^2$$

Se le recuerda al lector que la sumatoria resultante corresponde a la vista en el capítulo anterior en la sección 2.2.6 la cual es *la suma de los cuadrados de los errores (SCE).*

Como ${\varepsilon_i}^2 = (-\varepsilon_i)^2$ y $\varepsilon_i = \ y - (\beta_1 + \beta_2 x)$ entonces por propiedades de la igualdad se trabajará con la parte negativa

$$SCE(\beta_2, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (\beta_1 + \beta_2 x - y)^2$$

En este caso se minimizará $SCE$ obteniendo el gradiente y evaluándolo en el punto mínimo debe dar cero ($\nabla SCE = 0$).

Para obtener estos gradientes lo primero que se hace es derivar parcialmente con respecto a $\beta_2$ y $\beta_1$.

$$\frac{\partial SCE}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{n} 2(\beta_1 + \beta_2 x - y)x$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\beta_1 + \beta_2 x - y)x = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_2 x^2 + x\beta_1 - xy = 0$$

Se recuerda que la sumatoria de la suma es la suma de las sumatorias, entonces se aplica esta propiedad

$$\beta_2\sum_{i=1}^{n} x^2 + \beta_1\sum_{i=1}^{n} x = \sum_{i=1}^{n} xy$$

Ahora se derivará con respecto a $\beta_1$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{n} 2(\beta_1 + \beta_2 x - y)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_1 + \beta_2 x - y = 0$$

(3.1)

En esta parte de la deducción es necesario hacer una observación y es que

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_1 = \beta_1 + \beta_1 + \cdots + \beta_1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_1 = n\beta_1$$

Aplicando esta parte en la deducción y continuando con la ecuación 3.1, queda

$$\beta_2\sum_{i=1}^{n} x + n\beta_1 = \sum_{i=1}^{n} y$$

Se obtuvieron las siguientes ecuaciones

$$i)\ \beta_2 \sum_{i=1}^{n} x^2 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x = \sum_{i=1}^{n} xy$$

$$ii)\ \beta_2 \sum_{i=1}^{n} x + n\beta_1 = \sum_{i=1}^{n} y$$

Para resolver este sistema de ecuaciones se hará por medio de matrices y por términos de notación dejará de lado el $i = 1$ y la $n$.

$$\begin{bmatrix} \sum x^2 & \sum x \\ \sum x & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum xy \\ \sum y \end{bmatrix}$$

Para calcular estos determinantes, se hará uso de la regla de Cramer

$$\beta_2 = \frac{\begin{bmatrix} \sum xy & \sum x \\ y & n \end{bmatrix}}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

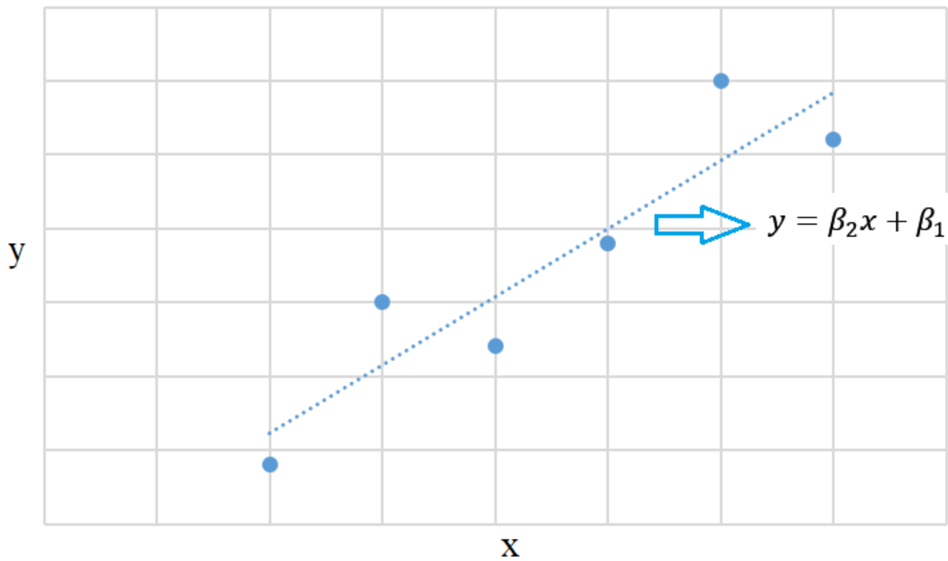
$$\beta_1 = \frac{\sum y - \beta_2 \sum x}{n}$$

(3.2)

Recordando que $\frac{\sum y}{n} = \bar{y}$ y $\frac{\sum x}{n} = \bar{x}$ y aplicándolo en la fórmula 3.2

$$\beta_1 = \bar{y} - \beta_2 \bar{x}$$

Entonces, se puede concluir que la ecuación que corresponde a la recta *(Figura 6)* es $y = \beta_2 x + \beta_1$ donde $\beta_2$ y $\beta_1$ están dados por las fórmulas previamente deducidas.




Murillo, G (2019) *Gráfico de regresión para* $x_n$, $y_n$. [Figura]

*(Figura 7)*

# CAPÍTULO 4

# MODELO CAPM (CAPITAL ASSET PRICING MODEL)

El riesgo es uno de los parámetros que muchos inversionistas tienen en cuenta para realizar algún paso financiero, por lo tanto, existen diferentes modelos que permite hacer esta estimación y dar un panorama de la situación. Entre ellos está el modelo CAPM que, a pesar de ser muy criticado el autor Orellana (2012) dice que es de los más acertados, además de no tener muchos parámetros. Es importante tomar los valores precisos para que el resultado si sea el correcto.

Uno de los conceptos centrales de las finanzas es el costo de capital pues es la columna del proceso para la toma de decisiones de inversiones que se realizarán en los activos financieros y aquí entra en juego el modelo ya que es uno de los más usados por su precisión.

## 4.1 Costo de Capital

Este concepto de las finanzas ha tenido diferentes definiciones pues los autores que se han atrevido a definirla, lo hacen bajo el contexto en donde se encuentran inmersos. Por ejemplo, Giddy (1981) dice que es un rendimiento esperado para las inversiones que dan fondos a una empresa; Mayo (1982) señala que es un promedio de los costos de las fuentes de fondos de una empresa, por otro lado, Damodaran (1994) afirma que es la tasa de retorno que los inversionistas necesitan para ser la rentabilidad de invertir o no es una empresa. La definición que mejor se ajusta a este trabajo la da (Orellana, 2012) la cual dice lo siguiente:

> Es el rendimiento promedio esperado por los accionistas cuando invierten en las acciones de una determinada empresa – $y$ en general de un activo financiero–, a un plazo específico; se utiliza para evaluar las inversiones que tienen riesgo en un negocio y plazo de maduración. (Orellana, 2012, p.30)

**4.2 Historia y Definición del Modelo CAPM**

Este modelo se atribuye a Sharpe (1964), aunque hubo varios autores que contribuyeron con su construcción teórica y aplicación empírica (Treynor (1961), Lintner (1965), Mossin (1966) y Fama (1968 y 1971)). Asimismo, el CAPM ha recibido críticas pues no siempre arroja resultados correctos por lo que se crearon otros modelos que ayudan a la determinación del costo de capital de un activo, sin embargo, este modelo es el más apropiado por su sencillez y por los pocos parámetros que se requieren, además de ser el más asertivo dentro de todos los que ya son vigentes en las empresas.

El modelo CAPM se basa en los primeros trabajos de Markowits (1952) quien trató el problema de seleccionar un portafolio como un problema de encontrar el máximo de utilidades bajo condiciones de incertidumbre. Para esto, Markowits infiere que las preferencias de los inversionistas se ven expresadas con la media y la varianza como representación del riesgo de los reintegros de un portafolio durante un periodo de tiempo. Esto quiere decir que para escoger el portafolio óptimo se debe basar en dos parámetros de la distribución de los reintegros de la media y la varianza (o desviación estándar). Tomando como base lo anterior y con el objetivo de demostrar una relación entre el retorno y el riesgo de un activo, el modelo CAPM se apoya en los siguientes supuestos:

- Todos los inversionistas buscan maximizar sus riquezas en un periodo de tiempo determinado, para ello, escogen portafolios tomando como base la media y la varianza de sus retornos.
- Todos los inversionistas pueden obtener u otorgar préstamos por cantidades ilimitadas a tasas libres de riesgo ($R_f$).
- No existen los impuestos.
- Todos los inversionistas no tienen el poder de fijar precios en el mercado.
- Las cantidades de los activos son fijos.

Utilizando los apartados anteriores el retorno esperado $E[R_j]$ de cualquier activo $j$ está dado por:

$$E[R_j] = R_f + \beta(E[R_m - R_f])$$

Donde

- $E[R_j]$ = El rendimiento o valor esperado
- $R_f =$ Tasa libre de riesgo
- $R_m =$ Rendimiento del mercado de activos financieros con riesgo
- $\beta$ = Beta de la acción, factor de riesgo diferencial respecto a la prima de mercado

El rendimiento esperado se obtiene a partir del rendimiento de mercado de activos, la tasa libre de riesgo y el Beta de acción, pero este parámetro varía dependiendo de la acción de los últimos periodos. Ahora, se mirará cada uno de los parámetros con mayor detalle. Para un mayor detalle, se puede leer el texto del autor Orellana (2012).

## 4.3 Variables del Modelo CAPM

En primer lugar, el CAPM es un modelo lineal por lo que dentro de sus parámetros se puede encontrar la pendiente y la ordenada explicados en la ecuación anterior

La importancia del modelo ha llevado a que autores como Adrián y Franzoni citado en Orellana (2012) estudiaran y concluyeran que el riesgo varía con el tiempo, conclusión que juega en pro del CAPM pues las críticas hablan son la poca predictibilidad del modelo; la variabilidad del riesgo puede ser estructural.

Dentro de los comentarios negativos, se habla sobre los parámetros de este modelo pues algunos de los parámetros generan errores de estimación asumiendo condiciones que no se encuentran con el objetivo del modelo. Por ellos son importantes dos cosas: resaltar los cálculos del rendimiento esperado por los inversionistas y la importancia de escoger de manera correcta los datos que van a tomar cada una de los parámetros teniendo en cuenta valores reales que se reflejen en las acciones de una empresa o de una determinada inversión. A continuación, se analizarán los parámetros del modelo y su utilidad dentro del mismo

### 4.3.1 La tasa libre de riesgo

Varios analistas del tema dicen que la tasa libre de riesgo $R_f$ es el fruto que se puede obtener libre de riesgo de incumplimiento. Hay varias entidades en donde el riesgo es mínimo, por ejemplos, los bonos del tesoro americano pues nunca se ha reportado algún error o perdida por parte de los inversionistas por lo que se podría concluir que la tasa libre de riesgo es casi nula.

Por otro lado, el autor Damoradan citado en Orellana (2012) señalan que los gobiernos de países son aquellos que están libres de cualquier riesgo y no por ser superiores en términos de la dirección del capital, sino porque son los encargados de manejar la moneda.

### 4.3.2 El Beta

El Beta ($\beta$) correspondiente a la fórmula del modelo que aparece en la sección 2.12 se define como:

*Covarianza entre la acción "x" y el Mercado*

$$\text{Beta de la acción "x"} \rightarrow \beta_x = \frac{Cov(x,M)}{Var(M)}$$

*Varianza del Mercado*

Como se dijo anteriormente, este modelo es lineal por lo que se dice que la beta es el valor de la pendiente.

Orellana (2012) asegura que se hace esta razón entre la covarianza y la varianza por qué permite obtener una aproximación a la pendiente de una regresión lineal de la acción respecto al mercado. El mismo autor afirma que cuando se efectúa esta división y se haya la pendiente de la regresión, se hace más sencillo encontrar el Beta, por medio de la regresión lineal. En conclusión, la pendiente de la regresión es el estimado del Beta.

#### 4.3.2.1 Ajuste del Beta

El modelo CAPM propone al Beta como la medida del riesgo sistemático de un activo financiero. Las empresas que tienen mayor riesgo son los que tienen el Beta más alto, del mismo modo, las compañías con mayor grado de apalancamiento operativo o financiero son más riesgosas, también por medio de estudios se muestra que las pequeñas empresas o microempresas tienen mayor riesgo.

**4.4 Limitaciones**

A través de varias experiencias e investigaciones, se ha comprobado que para que una persona que quiera realizar una inversión correcta, debe tener en cuenta la rentabilidad que podría obtener de la inversión y el riesgo que tiene al realizarla. Este tipo de características se deben tener en cuenta deben analizarse de manera simultánea. Por esta razón se han desarrollado modelos los cuales permitan medir ese riesgo y uno de ellos es el que se ha venido trabajando en este trabajo: CAPM. Este modelo ha sido aceptado por la comunidad de investigadores en el marco de las finanzas pues además de ser sencillo, recoge las variables más importantes para hacer este análisis. Por estas razones, ha sido un modelo bastante analizado y criticado; algunos autores como Levy habla sobre uno de sus resultados en el análisis de la bolsa de New York y concluye que el beta hace una buena medición de la rentabilidad de los activos cuando el volumen de negociación de los activos es alto, pero cuando es, al contrario, cuando este volumen es bajo, el riesgo es tan eficiente para comprobarla rentabilidad de los activos (como se cita en Gimeno, 2014). Por otro lado, hay autores que creen que se debe tener en cuenta otros parámetros para pronosticar el riesgo que puede correr un inversor, otros parámetros como la cartera de mercado y esto conlleva a que se aleje de la realidad (como se cita en Gimeno, 2014). Este modelo tiene varias críticas con relación a sus resultados, sin embargo, es uno de lo más favorables y verídicos para los inversores.

# CAPÍTULO 5

# EL MODELO DE TRES FACTORES DE FAMA Y FRENCH

Autores como Alonso y Berggrun (2015) también hacen referencia a este modelo como lo hicieron en el CAPM visto en el capítulo anterior, se le recuerda al lector que este es un modelo lineal, la diferencia de dicho modelo es que, el *"Modelo de tres factores de Fama y French"* es multilineal y también busca medir que tan rentable puede ser un activo, pero lo hace con una mayor precisión y además de añadir otros parámetros. Antes de entrar a mirar la parte teórica y práctica del modelo, se hará un breve repaso de su origen, sus componentes y como se constituye.

## 5.1 Origen del modelo

Eugene F. Fama y Kenneth French en 1992 publicaron un estudio que ayuda a esclarecer los retornos accionarios. Este análisis consistió en las variables como el valor del mercado del patrimonio (Este valor es el plasmado en los libros de las compañías) de una firma y la razón, en otras palabras, Valor en libros/Valor del mercado de patrimonio (de ahora en adelante se denotará como *B/M* por sus siglas en inglés *Book to Market*). En este modelo no se evidencia el retorno de una acción en una sola dimensión como sucedía en el CAPM, acá se ve reflejado en varias dimensiones que muestran diferentes fuentes de riesgo cuando se invierte en el mercado accionario.

## 5.2 La razón *B/M*

La razón *B/M* puede entenderse como la medición de problemas financieros que pueda tener una empresa. Esto quiere decir que, si las compañías tienen razones altas, entonces tendrán dificultades financieras y, por lo tanto, tendrán malos prospectos futuros (hablando el mercado), lo que ocasiona que el valor de las acciones en el mercado sea cada vez más bajo. En resumen, estas compañías muestran un alto riesgo, por consiguiente, presentan un retorno mayor. Como consecuencia de este retorno, los costos de capital de las empresas involucradas serán más cuantiosos.

Por otro lado, si la razón *B/M* es baja, quiere decir que la firma tiene buenos panoramas y frecuentemente se establecerán como firmas sólidas y en crecimiento.

Los autores Fama y French estipulan que el riesgo que contiene la variable *B/M* puede ser producto de las fluctuaciones del mercado respecto al futuro y percepción de una empresa.

**5.3 Estudio del modelo en algunos Portafolios**

En el siguiente año (1993) los mismos autores estudiaron el retorno mensual de 25 portafolios de acciones, organizados por el tamaño y la razón (*B/M*) del patrimonio. Para la creación de estos portafolios se catalogaron las firmas en las muestras (acciones de NYSE, Amex y Nasdaq) en cinco quintiles de tamaño y cinco quintiles dependiendo de la razón (*B/M*) del patrimonio. La intersección de estos quintiles da lugar a 25 portafolios, cuyos retornos, en exceso de la tasa libre de riesgo, se establece en la variable dependiente en la investigación.

Como se hizo en el modelo CAPM las variables independientes o explicativas emplearon el retorno del mercado, en exceso de la tasa libre de riesgo, una variable que simboliza la diferencia entre los retornos de las empresas pequeñas y los de las grandes (*Small minus big, SMB*) expresada como $R_t^{SMB}$ y una variable que representa la compensación por invertir en empresas que afronten dificultades financieras, evaluado como la diferencia entre el retorno de firmas con alta y baja razón *B/M* (*High minus low*, *HML*), $R_t^{HML}$. Para la construcción de estas últimas dos variables, se distribuyó la muestra en dos grupos de firmas dependiendo el costo de mercado del patrimonio. Entonces, si este estaba por debajo de la mediana del valor del patrimonio de las firmas listadas en el NYSE, la firma quedaba establecida como pequeña (*Small*, *S*), pero si estaba por encima, la firma quedaba clasificada como grande (*Big*, *B*). Asimismo, fraccionaron todas las firmas en tres grupos basándose en el valor de la razón *B/M* para cada firma. El primer grupo abarcaba el 30 % de las firmas con el indicador *B/M* más bajo (*Low*, *L*), posteriormente el 40 % de las firmas con indicadores *B/M* medios (*medium*, *M*) y, finalmente, el 30 % restante de las firmas con los indicadores *B/M* más altos (*High*, *H*). Con las dos distribuciones previas, los autores Fama y French fabricaron seis portafolios que aparecen luego de la intersección de los dos grupos ordenados según tamaño y los tres grupos ordenados dependiendo de la razón *B/M*. Más precisamente, los seis portafolios que incluyen todas las acciones en la muestra son:

| | | |
|---|---|---|
| *S/L* | *S/M* | *S/H* |
| *B/L* | *B/M* | *B/H* |

Fuente: Elaboración propia. *Estudio del modelo en algunos portafolios* [Tabla 5]

Por consiguiente, la variable $R_t^{SMB}$ se evalúa como la diferencia, cada mes, entre el retorno promedio simple de los tres portafolios que abarcan acciones pequeñas:

| | | |
|---|---|---|
| *S/L* | *S/M* | *S/H* |

y el retorno promedio simple de los tres portafolios que abarcan acciones grandes:

| | | |
|---|---|---|
| *B/L* | *B/M* | *B/H* |

Posteriormente, de forma semejante la variable $R_t^{SMB}$ se calcula como la diferencia, cada mes, entre el retorno promedio simple de los dos portafolios con valores altos de la razón *B/M:*

| | |
|---|---|
| *S/H* | *B/H* |

y el retorno promedio simple de los dos portafolios con los valores más bajos:

| | |
|---|---|
| *S/L* | *B/L* |

Primeramente, se hizo uso del modelo CAPM un análisis de series de tiempo donde se estimó que para cada uno de los 25 portafolios ($i = 1, 2, 3, \dots, 25$) con la siguiente ecuación:

$$\left(R_{it} - R_{ft}\right) = \beta_1 + \beta_2\left(R_{Mt} - R_{ft}\right) + \varepsilon_t$$

Se pudo evidenciar que con el modelo CAPM se obtenía una buena parte de la variación de los retornos de los 25 portafolios accionarios con $R^2$ que oscilaban entre $0{,}61$ y $0{,}92$. Posterior a esto se usó el modelo de tres factores de Fama y French que añadían las variables explicativas vistas durante este capítulo $R_t^{SMB}$ y $R_t^{SMB}$ y que se aprecia de la siguiente forma:

$$\left(R_{it} - R_{ft}\right) = \beta_1 + \beta_2\left(R_{Mt} - R_{ft}\right) + \beta_3 R_t^{SMB} + \beta_4 R_t^{SMB} + \varepsilon_t \tag{5.3}$$

Fama y French observaron que empleando este modelo de regresión múltiple se obtiene mejoras significativas en el $R^2$, en esta ocasión oscilaban entre $0{,}83$ y $0{,}97$ para los diferentes portafolios. Como se esperaba, los coeficientes $(\beta_3)$ de sensibilidad del tamaño, disminuían conforme el tamaño de las firmas aumentaba, mostrando la relación inversa entre el tamaño y el retorno. De la misma forma, para cualquier quintil de tamaño, se percibe que los coeficientes $(\beta_4)$ van aumentando acorde pasa del quintil más bajo al más alto dependiendo de la razón *B/M,* corroborando que firmas con las razones *B/M* más altas, son más riesgosas y, por consiguiente, presentan un retorno mayor.

Ahora bien, la pregunta que surgía a los autores era acerca de qué modelo sería más efectivo a la hora de describir los retornos, para ello el criterio de decisión tuvo como base los interceptos más bajos e idealmente, el grupo de los 25 interceptos no fuera estadísticamente diferente de cero. Se le recuerda al lector que estos interceptos se pueden entender como la parte de los retornos accionarios que no se pueden explicar por medio de los modelos de regresión explicados a lo largo del documento. En el caso del modelo CAPM tuvo un considerable número de interceptos (11 de 25) que resultaron ser estadísticamente distintos de cero, lastimosamente este modelo evidencia insuficiencias a la hora de explicar los retornos accionarios. Estas insuficiencias se presentaron en los portafolios que comprendían las acciones con valores altos *B/M.* La otra cara de la moneda muestra como el empleamiento del modelo de tres factores de Fama y French fue considerablemente más bajo con respecto al modelo CAPM, el modelo de Fama y French tuvo de 3 de 25 interceptos que tuvieron como desenlace el ser distintos de cero.

No obstante, los autores manifiestan que el modelo esclarece bastante bien los retornos accionarios, ya que en la práctica un número muy pequeño de interceptos es estadísticamente diferente de cero. También añaden que sería conveniente usar este modelo donde haya sido empleado CAPM como en la selección y evaluación del desempeño de portafolios, estudio de eventos y la apreciación del costo de capital de las empresas.

# CAPÍTULO 6

# APLICACIONES MATEMÁTICAS

Después de haber recogido modelos relacionados con las aplicaciones con el fin de argumentar lo que se va a exponer, se muestran los ejemplos.

## 6.1 Primer ejemplo aplicativo del modelo CAPM

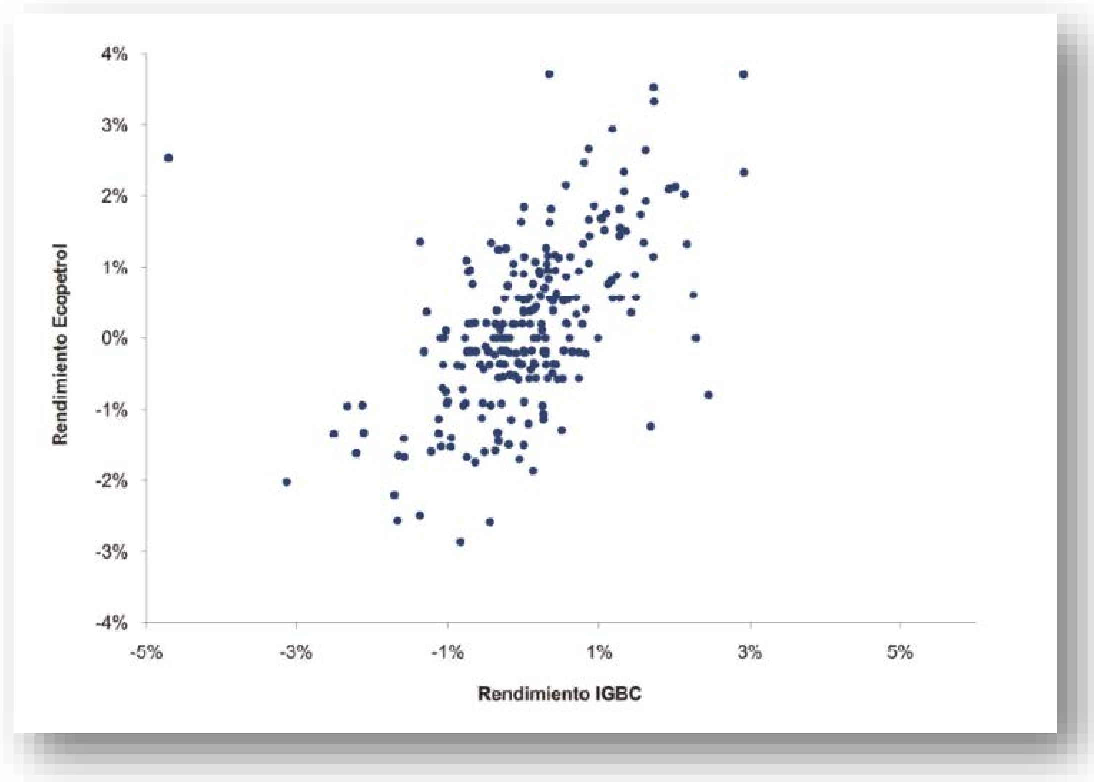
Ahora se contrastará la parte teórica vista en el capítulo cuatro con un ejemplo real usando el modelo CAPM como un estimador a través de una regresión lineal simple en el cual se asimila la tasa libre de riesgo a la tasa DTF (Tasa de captación de los depósitos a 90 días), a tasas de títulos de tesorería (TES) del gobierno colombiano. Para utilizar el modelo CAPM usualmente se usa el retorno de un índice accionario representativo como el Índice General de la Bolsa de Colombia (IGBC).

A continuación, se presentará una aplicación del modelo CAPM representado en las actividades de la empresa Ecopetrol. En la práctica, el modelo CAPM se suele estimar a través de una regresión de la siguiente forma:

$$\left(R_a - R_f\right) = \beta_1 + \beta_2\left(R_{Mt} - R_{ft}\right) + \varepsilon_t$$

Esta ecuación es similar a la ecuación 2.6 (Sección 2.2.1), se diferencia en que la variable dependiente (retorno de la acción de Ecopetrol) se puede expresar en exceso de la tasa libre de riesgo ($R_f$), se incluye un intercepto ($\beta_1$) y un término de error ($\varepsilon_t$), se le recuerda al lector que este último se añade previniendo que no se cuenta con un modelo exacto sino estocástico.

En la siguiente gráfica se puede apreciar que el rendimiento logarítmico diario de la acción de Ecopetrol presentó una correspondencia casi lineal con los retornos diarios del mercado accionario colombiano durante la etapa comprendida entre el 7 de diciembre de 2011 y el 7 de diciembre de 2012, tal como lo afirma el modelo CAPM:




Alonso, C & Berggrun P (2015). *Retornos logarítmicos diarios Ecopetrol-IGBC (7 de diciembre de 2011 a 7 de diciembre de 2012)* [Figura]

*(Figura 8)*

Para calcular esta regresión se tomó como tasa libre de riesgo la tasa interbancaria colombiana. Los resultados simulados en Excel fueron los siguientes:

**Resumen**

| Estadística de regresión | |
|---|---|
| Coeficiente de correlación múltiple | 0,5627 |
| Coeficiente de determinación R^2 | 0,3166 |
| R^2 Ajustado | 0,3138 |
| Error típico | 0,0117 |
| Observaciones | 245 |

**ANÁLISIS DE VARIANZA**

| | Grados de libertad | Suma de cuadrados | Promedio de los cuadrados | F | Valor crítico de F |
|---|---|---|---|---|---|
| Regresión | 1 | 0,01551 | 0,01551 | 112,59112 | 0,00000 |
| Residuos | 243 | 0,03348 | 0,00014 | | |
| Total | 244 | 0,04899 | | | |

| | Coeficientes | Error típico | Estadístico l | Probabilidad | Inferior 95% | Superior 95% |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercepción | 0,0006 | 0,0008 | 0,7851 | 0,4332 | -0,0009 | 0,0021 |
| R_a-R_f | 0,7125 | 0,0672 | 10,6109 | 0,0000 | 0,5803 | 0,8448 |

Alonso, C & Berggrun P (2015). *Retornos logarítmicos diarios Ecopetrol-IGBC (7 de diciembre de 2011 a 7 de diciembre de 2012)* [Tabla 6]

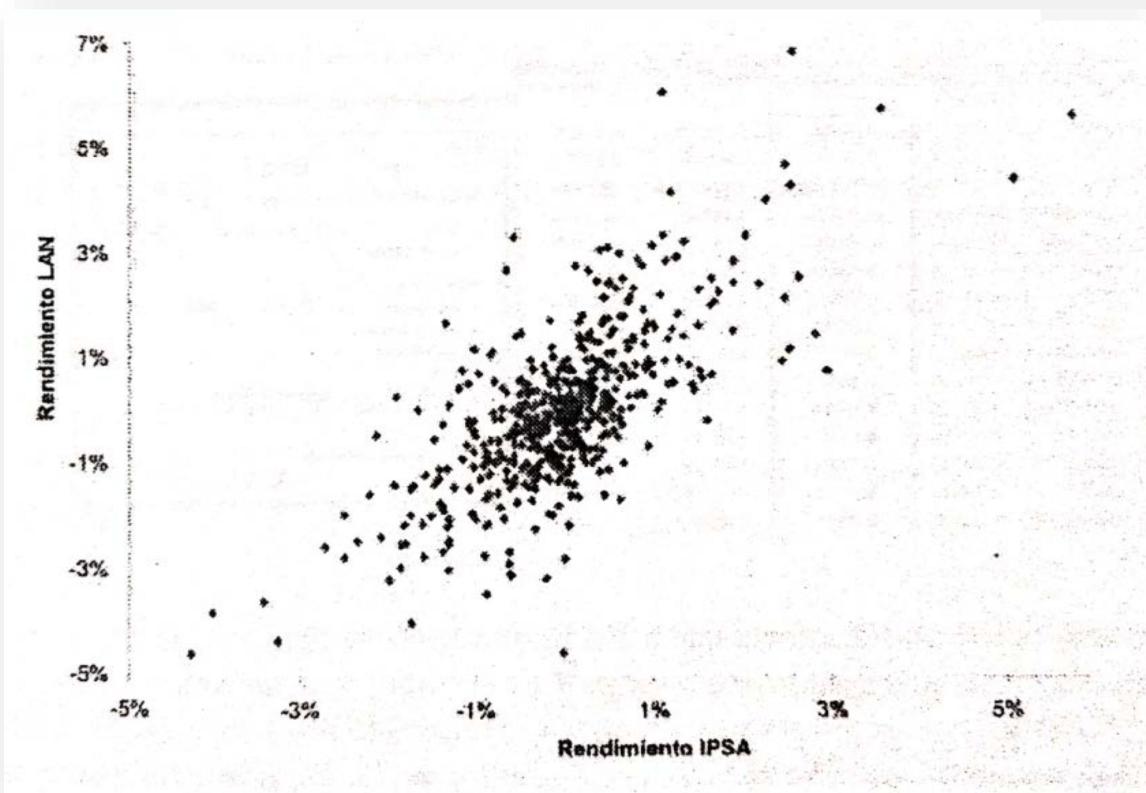
En los datos anteriores se puede inferir que el 31,66 % de la variabilidad de los retornos de Ecopetrol se explica por la variación de los retornos del IGBC. Ahora bien, el intercepto $\beta_1$ presenta como un valor muy bajo y no hay suficientes pruebas para desmentir la hipótesis de que el intercepto es estadísticamente igual a cero.

Por último, el coeficiente que mide la sensibilidad de los retornos de la acción ante los retornos del mercado ($\beta_2$) es igual a 0,7125 lo cual es significativo. Para este caso, el $valor - p$ asociado con el estadístico $t$ es muy cercano a cero, por lo tanto, se puede obviar la hipótesis nula de que la pendiente es igual a cero, como consecuencia el modelo para este ejemplo es ineficiente ya que no se puede obtener una recta de regresión que se ajuste a los datos.

## 6.2 Segundo ejemplo aplicativo del modelo CAPM

Ahora se considerará el siguiente ejemplo real en donde se toma la relación lineal entre el rendimiento de un activo y el rendimiento del índice respecto al mercado. Para este ejemplo, se tomará el rendimiento de la acción de LAN Airlines S.A. (LAN) y su relación con el rendimiento diario del Índice de Precios Selectivo de Acciones (IPSA).

En la siguiente gráfica se puede apreciar una nube de puntos correspondiente a las diferentes combinaciones observadas de los rendimientos diarios de la acción y del IPSA para la etapa de tiempo comprendida entre el 4 de enero de 2011 y el 28 de diciembre de 2012. En la gráfica se podrá observar una relación lineal positiva tal como se esperaba teóricamente:




Alonso, C & Berggrun P (2015). *Rendimiento diario de la acción de LAN Airlines y del IPSA (4 de enero de 2011 a diciembre 28 de 2012)* [Gráfico]

*(Figura 9)*

Aplicando los conceptos teóricos antes vistos, se espera que la relación estadística entre las variables sea:

$$R_{LAN,t} = \beta_1 + \beta_2 R_{IPSA,t} + \varepsilon_t \qquad \text{con} \qquad Var[\varepsilon_t] = \sigma^2$$

Introduciendo los datos en el Excel se tiene,

**Resumen**

| Estadística de regresión | |
|---|---|
| Coeficiente de correlación múltiple | 0,7449347 |
| Coeficiente de determinación R^2 | 0,5549278 |
| R^2 Ajustado | 0,5540304 |
| Error típico | 0,0104693 |
| Observaciones | 498 |

**ANÁLISIS DE VARIANZA**

| | Grados de libertad | Suma de cuadrados | Promedio de los cuadrados | F | Valor crítico de F |
|---|---|---|---|---|---|
| Regresión | 1 | 0,067783066 | 0,067783066 | 613,4258475 | 3,10406E-3 |
| Residuos | 496 | 0,054364482 | 0,000109606 | | |
| Total | 497 | 0,122147549 | | | |

| | Coeficientes | Error típico | Estadístico l | Probabilidad | Superior 95% |
|---|---|---|---|---|---|
| Intercepción | -0,000182709 | 0,000469309 | -0,389315837 | 0,697209614 | -0,0011047 |
| Retorno IPSA | 1,083883882 | 0,04358519 | 24,86316936 | 3,10406E-89 | 0,99824952 |

Alonso, C & Berggrun P (2015). *Rendimiento diario de la acción de LAN Airlines y del IPSA (4 de enero de 2011 a diciembre 28 de 2012)* [Tabla 7]

Según los datos anteriores el valor estimado para el intercepto es $-0{,}00018$ y lo que le corresponde a la pendiente es $1{,}083388$, ahora, estos valores se reemplazan en la ecuación antes mencionada

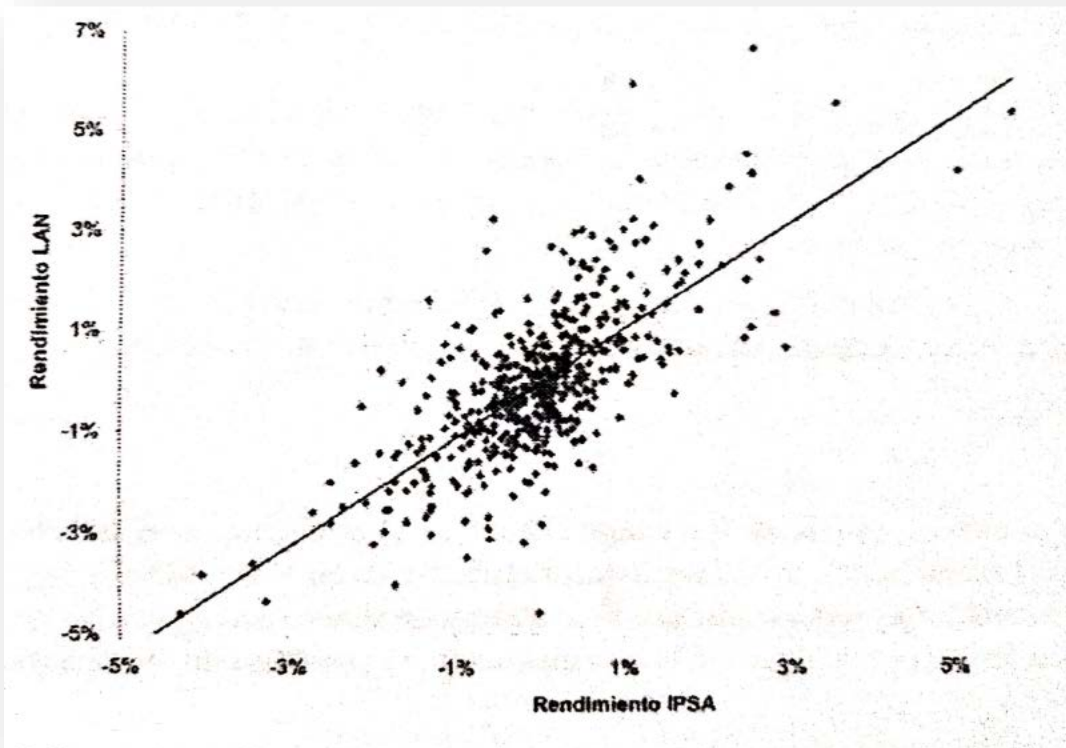
$$R_{LAN,t} = -0{,}00018 + 1{,}083388 R_{IPSA,t} + \varepsilon_t$$

Además, la varianza estimada del error queda de la siguiente forma

$$s^2 = (0{,}01047)^2$$

$$s^2 = 0{,}00011$$

Ahora, llevando esta recta al plano de la gráfica de la regresión se obtiene




Alonso, C & Berggrun P (2015). *Rendimiento diario de la acción de LAN Airlines y del IPSA (4 de enero de 2011 a diciembre 28 de 2012)* [Figura 9]

*(Figura 10)*

El intercepto estimado se puede interpretar como la parte del rendimiento de la acción de LAN que no depende del rendimiento de IPSA; para este caso el rendimiento depende es de $-0{,}018$ %. Por otro lado, el cálculo de la pendiente corresponde a que por cada punto porcentual que aumente el rendimiento diario del IPSA, el rendimiento diario de la acción de LAN crecerá en 1,08 puntos porcentuales.

### 6.3 Contraste entre los ejemplos anteriores

Si bien en los ejemplos anteriores se aplica el mismo modelo, los resultados son muy diferentes, en el primer ejemplo (Ecopetrol) se muestra como el modelo CAPM no es muy bien recibido por los datos suministrados, allí se evidencia que el modelo no tiene mucha funcionabilidad debido a que los datos que se presentan en el Excel y en la gráfica no muestran una relación lineal, pero en el segundo ejemplo (LAN Airlines S.A.) se evidencia todo lo contrario, con la simulación en Excel y la gráfica de la regresión lineal muestra que si existe una relación entre la parte teórica y práctica.

En este ejemplo se presenta una nube de puntos como la línea de regresión estimada. Cabe aclarar que esta nube de puntos se ubica alrededor de la línea de la regresión encontrada, algunos puntos muy alejados y otros relativamente cerca.

### 6.4 Determinando la efectividad de la regresión

Una vez se estima la relación lineal, la pregunta que seguramente le surge al lector es, ¿qué tan bueno es el modelo estimado? o ¿qué tanto sirve dicho modelo para explicar la variable dependiente? Estas preguntas se pueden contestar mediante un medio estadístico conocido como $R^2$ o coeficiente de determinación.

El $R^2$ expone el porcentaje de la variabilidad de la variable dependiente que es explicada por el modelo. Por ejemplo, un $R^2$ de 0,8 significa que un 80% de la variación de la variable dependiente es explicado por el modelo. Generalmente un $R^2$ que sea superior de 0,6 es considerado aceptable.

Es importante aclarar que por medio de la fórmula del CAPM se puede encontrar la pendiente y el intercepto que caracterizan una relación lineal potencial. Así que sin importar si existe o no una relación lineal entre la variable independiente y la dependiente, la fórmula antes mencionada, funcionará encontrando la ecuación, pero es posible que no se ajuste al modelo.

Una vez se encuentre la pendiente y el intercepto es importante establecer si estos son estadísticamente importantes para explicar la variable dependiente, esto quiere decir, será pertinente determinar si estos parámetros son estadísticamente diferentes de cero o no.

## 6.5 Tercero ejemplo aplicativo del modelo CAPM

Para este ejemplo se tomaron las acciones de la empresa colombiana grupo éxito con una frecuencia mensual que, en otras palabras, se puede llamar el rendimiento mensual de la empresa. A continuación, se encuentran los valores entre los meses de febrero del 2018 y noviembre del 2019 junto con el rendimiento mercantil IGBC del mismo periodo de tiempo

| | GRUPO ÉXITO | IGBC |
|---|---|---|
| Nov. 2019 | 14000 | 13290,88 |
| Oct. 2019 | 17900 | 13272,19 |
| Sep. 2019 | 17620 | 12831,93 |
| Ago. 2019 | 17580 | 12638,96 |
| Jul. 2019 | 17400 | 12727,02 |
| Jun. 2019 | 16680 | 12606,12 |
| May. 2019 | 14100 | 12054,85 |
| Abr. 2019 | 14500 | 12777,89 |
| Mar.2019 | 14520 | 13060,07 |
| Feb. 2019 | 14600 | 12221,34 |
| Ene. 2019 | 14100 | 11828,32 |
| Dic. 2018 | 12400 | 11144,08 |
| Nov. 2018 | 13320 | 11604,75 |
| Oct. 2018 | 13900 | 12393,78 |
| Sep. 2018 | 14580 | 12464,06 |
| Ago. 2018 | 15860 | 12254,88 |
| Jul. 2018 | 16240 | 12136,69 |
| Jun. 2018 | 16200 | 12499,63 |
| May. 2018 | 16500 | 12297,04 |
| Abri. 2018 | 16960 | 12414,57 |
| Mar. 2018 | 16480 | 11320,43 |
| Feb. 2018 | 16780 | 11411,08 |

Fuente: Investing

(*Tabla 8)*

Luego, se encuentran la variable independiente con los datos del rendimiento de mercado IGBC y la variable dependiente con el rendimiento de la empresa Grupo éxito. Para ello, se resta el valor del mes actual menos el valor del mes anterior y esta operación se divide por el valor del mes anterior. Los valores de las variables se encuentran a continuación.

| | GRUPO ÉXITO | IGBC | Y | X |
|---|---|---|---|---|
| Nov. 2019 | 14000 | 13290,88 | 27,86% | -0,14% |
| Oct. 2019 | 17900 | 13272,19 | -1,56% | -3,32% |
| Sep. 2019 | 17620 | 12831,93 | -0,23% | -1,50% |
| Ago. 2019 | 17580 | 12638,96 | -1,02% | 0,70% |
| Jul. 2019 | 17400 | 12727,02 | -4,14% | -0,95% |
| Jun. 2019 | 16680 | 12606,12 | -15,47% | -4,37% |
| May. 2019 | 14100 | 12054,85 | 2,84% | 6,00% |
| Abr. 2019 | 14500 | 12777,89 | 0,14% | 2,21% |
| Mar.2019 | 14520 | 13060,07 | 0,55% | -6,42% |
| Feb. 2019 | 14600 | 12221,34 | -3,42% | -3,22% |
| Ene. 2019 | 14100 | 11828,32 | -12,06% | -5,78% |
| Dic. 2018 | 12400 | 11144,08 | 7,42% | 4,13% |
| Nov. 2018 | 13320 | 11604,75 | 4,35% | 6,80% |
| Oct. 2018 | 13900 | 12393,78 | 4,89% | 0,57% |
| Sep. 2018 | 14580 | 12464,06 | 8,78% | -1,68% |
| Ago. 2018 | 15860 | 12254,88 | 2,40% | -0,96% |
| Jul. 2018 | 16240 | 12136,69 | -0,25% | 2,99% |
| Jun. 2018 | 16200 | 12499,63 | 1,85% | -1,62% |
| May. 2018 | 16500 | 12297,04 | 2,79% | 0,96% |
| Abri. 2018 | 16960 | 12414,57 | -2,83% | -8,81% |
| Mar. 2018 | 16480 | 11320,43 | 1,82% | 0,80% |
| Feb. 2018 | 16780 | 11411,08 | 6,56% | 6,15% |

Fuente: Investing, Yahoo finanzas y cálculos propios

*(Tabla 9)*

Después de encontrar los valores de las variables, se procede a encontrar el valor de beta y realizar el análisis de datos y para ello se realiza la siguiente tabla

Resumen

| *Estadísticas de la regresión* | |
|---|---|
| Coeficiente de correlación múltiple | 0,41094219 |
| Coeficiente de determinación R^2 | 0,16887348 |
| R^2 ajustado | 0,12731715 |
| Error típico | 0,07636476 |
| Observaciones | 22 |

ANÁLISIS DE VARIANZA

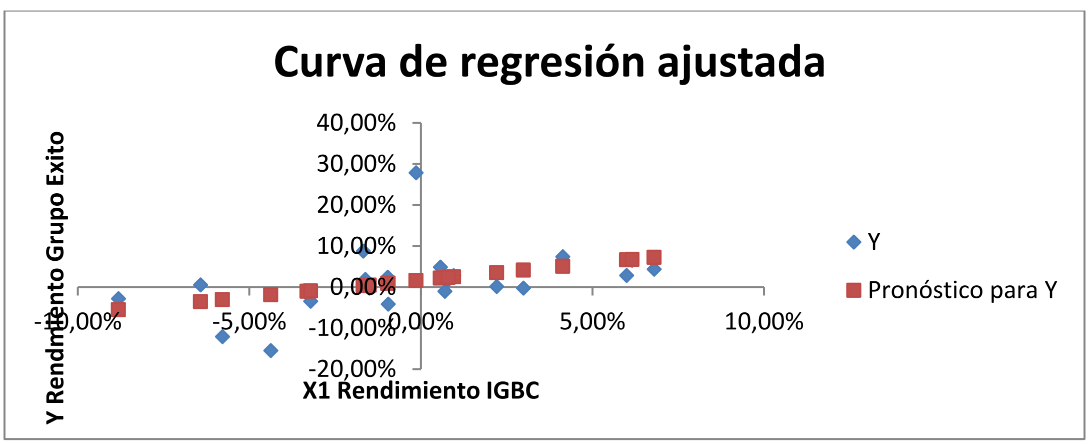
| | *Grados de libert* | *a de cuadrad* | *io de los cua* | *F* | *alor crítico de F* |
|---|---|---|---|---|---|
| Regresión | 1 | 0,02369792 | 0,02369792 | 4,06372498 | 0,05744745 |
| Residuos | 20 | 0,11663152 | 0,00583158 | | |
| Total | 21 | 0,14032944 | | | |

| | *Coeficientes* | *Error típico* | *Estadístico t* | *Probabilidad* | *Inferior 95%* | *Superior 95%* | *Inferior 95,0%* | *Superior 95,0%* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercepción | 0,0169947 | 0,01633954 | 1,04009631 | 0,31070637 | -0,01708899 | 0,05107839 | -0,01708899 | 0,051078385 |
| Variable X 1 | 0,81911258 | 0,40633239 | 2,01586829 | 0,05744745 | -0,02848193 | 1,66670709 | -0,028481931 | 1,666707092 |

Fuente: Elaboración propia.

En primer lugar, se debe mirar el coeficiente de determinación $R^2$ y analizar si la variabilidad entre $x$ e $y$ es buena. Para este ejemplo $y$ varia un $16\%$ con respecto a la variable $x$ esto significa que el modelo de regresión lineal simple es malo ya que no se asimila satisfactoriamente con los datos reales, de manera general, no es un modelo fiable. En segundo lugar, el coeficiente de correlación $R$ para este ejemple es de $0{,}410942$ lo que equivale a un $41{,}0\%$. Ya que el valor está lejos de uno, se puede decir que las variables no tienen una buena relación, no hay una asociación lineal. De manera general, no es una relación fiable.

Ya teniendo el análisis anterior, se puede entrar a observar el valor que toma Beta $\beta$ quien será el parámetro que arroje el riesgo que tiene el inversionista. Para el ejemplo, el valor de este parámetro es de $0{,}819112$. Cuando el valor de $\beta$ es menor a uno, se dice que este está debajo el mercado de renta variable lo que indica que el riesgo es bajo. Se puede concluir que es fiable la inversión teniendo en cuenta el beta, sin embargo, por lo dicho anteriormente, el modelo no se acepta como fiable. Finalmente se puede observar la gráfica de dispersión con la recta ajustada




Fuente: Elaboración Propia

### 6.6 Cuarto ejemplo aplicativo del modelo CAPM

Para realizar un ejemplo con el modelo fama french, se va a empezar por mostrar el siguiente ejercicio del modelo CAPM. Se toman los valores de las acciones de la empresa Amazon junto con el rendimiento mercantil s&p 500 el cual es usado en los estados unidos. El periodo que se tomó fue desde febrero 2018 y noviembre de 2019

| | AMAZON | S&P 500 |
|---|---|---|
| Nov. 2019 | 1800,8 | 3140,98 |
| Oct. 2019 | 1776,66 | 3037,56 |
| Sep. 2019 | 1735,91 | 2976,74 |
| Ago. 2019 | 1776,29 | 2926,46 |
| Jul. 2019 | 1866,78 | 2980,38 |
| Jun. 2019 | 1893,63 | 2941,76 |
| May. 2019 | 1775,07 | 2752,06 |
| Abr. 2019 | 1926,52 | 2945,83 |
| Mar.2019 | 1780,75 | 2834,4 |
| Feb. 2019 | 1639,83 | 2784,49 |
| Ene. 2019 | 1718,73 | 2704,1 |
| Dic. 2018 | 1501,97 | 2506,85 |
| Nov. 2018 | 1690,17 | 2760,17 |
| Oct. 2018 | 1598,01 | 2711,74 |
| Sep. 2018 | 2002 | 2913,98 |
| Ago. 2018 | 2012,71 | 2901,52 |
| Jul. 2018 | 1777,44 | 2816,29 |
| Jun. 2018 | 1699,8 | 2718,37 |
| May. 2018 | 1629,62 | 2705,27 |
| Abri. 2018 | 1566,13 | 2648,05 |
| Mar. 2018 | 1447,34 | 2640,87 |
| Feb. 2018 | 1512,45 | 2713,83 |

Fuente: Investing

*(Tabla 10)*

Luego, se hallan los rendimientos de ambos valores, este proceso se explica en el ejemplo anterior. Los resultados son los siguientes

| | AMAZON | S&P 500 | Y | X |
|---|---|---|---|---|
| Nov. 2019 | 1800,8 | 3140,98 | -1,34% | -3,29% |
| Oct. 2019 | 1776,66 | 3037,56 | -2,29% | -2,00% |
| Sep. 2019 | 1735,91 | 2976,74 | 2,33% | -1,69% |
| Ago. 2019 | 1776,29 | 2926,46 | 5,09% | 1,84% |
| Jul. 2019 | 1866,78 | 2980,38 | 1,44% | -1,30% |
| Jun. 2019 | 1893,63 | 2941,76 | -6,26% | -6,45% |
| May. 2019 | 1775,07 | 2752,06 | 8,53% | 7,04% |
| Abr. 2019 | 1926,52 | 2945,83 | -7,57% | -3,78% |
| Mar.2019 | 1780,75 | 2834,4 | -7,91% | -1,76% |
| Feb. 2019 | 1639,83 | 2784,49 | 4,81% | -2,89% |
| Ene. 2019 | 1718,73 | 2704,1 | -12,61% | -7,29% |
| Dic. 2018 | 1501,97 | 2506,85 | 12,53% | 10,11% |
| Nov. 2018 | 1690,17 | 2760,17 | -5,45% | -1,75% |
| Oct. 2018 | 1598,01 | 2711,74 | 25,28% | 7,46% |
| Sep. 2018 | 2002 | 2913,98 | 0,53% | -0,43% |
| Ago. 2018 | 2012,71 | 2901,52 | -11,69% | -2,94% |
| Jul. 2018 | 1777,44 | 2816,29 | -4,37% | -3,48% |
| Jun. 2018 | 1699,8 | 2718,37 | -4,13% | -0,48% |
| May. 2018 | 1629,62 | 2705,27 | -3,90% | -2,12% |
| Abri. 2018 | 1566,13 | 2648,05 | -7,58% | -0,27% |
| Mar. 2018 | 1447,34 | 2640,87 | 4,50% | 2,76% |
| Feb. 2018 | 1512,45 | 2713,83 | -4,07% | 4,05% |
| Ene. 2018 | 1450,89 | 2823,81 | -100,00% | -100,00% |

Fuente: Investing, yahoo finanza y cálculos propios

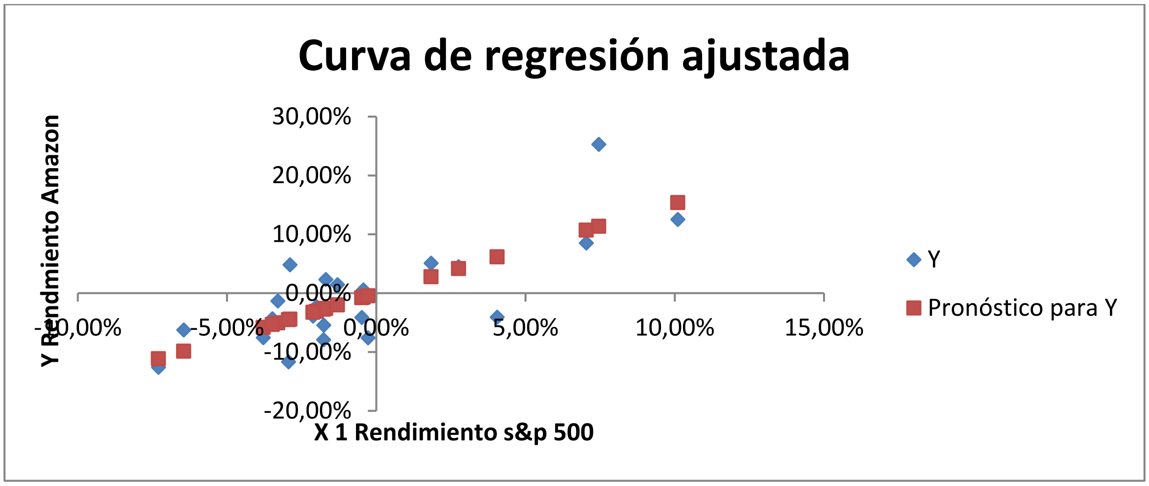
*(Tabla 11)*

Después de encontrar estos valores, se procede a encontrar el beta y la tasa libre de riesgo (intercepto con el eje $y$). A continuación, el análisis de datos

| Resumen | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |
| *Estadísticas de la regresión* | | | | | | | | |
| Coeficiente de correlación múltiple | 0,774192464 | | | | | | | |
| Coeficiente de determinación R^2 | 0,599373971 | | | | | | | |
| R^2 ajustado | 0,57934267 | | | | | | | |
| Error típico | 0,055791476 | | | | | | | |
| Observaciones | 22 | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| ANÁLISIS DE VARIANZA | | | | | | | | |
| | *Grados de libertad* | *na de cuadra* | *dio de los cua* | *F* | *alor crítico de F* | | | |
| Regresión | 1 | 0,09313747 | 0,09313747 | 29,9218687 | 2,35587E-05 | | | |
| Residuos | 20 | 0,06225378 | 0,00311269 | | | | | |
| Total | 21 | 0,15539124 | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | *Coeficientes* | *Error típico* | *Estadístico t* | *Probabilidad* | *Inferior 95%* | *Superior 95%* | *Inferior 95,0%* | *Superior 95,0%* |
| Intercepción | -0,000418839 | 0,01194531 | -0,03506305 | 0,97237706 | -0,02533633 | 0,024498647 | -0,025336325 | 0,024498647 |
| Variable X 1 | 1,525861988 | 0,27894649 | 5,47008855 | 2,3559E-05 | 0,943989811 | 2,107734165 | 0,943989811 | 2,107734165 |

Fuente: Elaboración propia

Ahora bien, haciendo el respectivo análisis con los datos anterior, se puede observar que el valor del coeficiente de determinación $R^2$ es de $60\%$ lo que quiere decir que la variación entre la variable $y$ con respecto a la variable $x$ es aceptable, sin embargo, puede ser mejor. Por otro lado, el coeficiente de correlación $R$ es del $77\%$ y con esto se puede decir que, las variables tienen una relación lineal buena pues el valor esta cercano a uno. A pesar de ser un modelo aceptable, el valor de beta quien determina el riesgo del inversor, está por encima de 1 pues es $1.5258$, esto dice que el riesgo en el rendimiento de las acciones de Amazon es alto. Por último, la gráfica de dispersión junto con la recta ajustada




Fuente: Elaboración propia

### 6.7 Primer ejemplo del modelo Fama french

Este ejemplo extensión del ejemplo hecho con el modelo CAPM relacionado con el rendimiento de la empresa Amazon. Aquí se tendrán en cuenta los valores encontrados en el modelo CAPM, pero se añaden dos variables independientes más las cuales son $SML$ y $HML$ quienes relacional el tamaño y lo alto y bajo de las rentabilidades de grandes empresas contra pequeñas empresas respectivamente. Estas nuevas variables se pueden descargar de la página “Kenneth French Data”. A continuación, se encuentra una tabla con los valores explicados en este párrafo.

| | Y | X | SML | HML |
|---|---|---|---|---|
| Nov. 2019 | -1,34% | -3,29% | 0,87 | -1,86 |
| Oct. 2019 | -2,29% | -2,00% | 0,25 | -2,07 |
| Sep. 2019 | 2,33% | -1,69% | -0,9 | 6,71 |
| Ago. 2019 | 5,09% | 1,84% | -2,41 | -4,99 |
| Jul. 2019 | 1,44% | -1,30% | -2,07 | 0,14 |
| Jun. 2019 | -6,26% | -6,45% | 0,33 | -1,08 |
| May. 2019 | 8,53% | 7,04% | -1,2 | -2,39 |
| Abr. 2019 | -7,57% | -3,78% | -1,68 | 1,93 |
| Mar.2019 | -7,91% | -1,76% | -3,13 | -4,07 |
| Feb. 2019 | 4,81% | -2,89% | 2,06 | -2,84 |
| Ene. 2019 | -12,61% | -7,29% | 3,01 | -0,62 |
| Dic. 2018 | 12,53% | 10,11% | -2,63 | -1,47 |
| Nov. 2018 | -5,45% | -1,75% | -0,79 | 0,25 |
| Oct. 2018 | 25,28% | 7,46% | -4,76 | 3,44 |
| Sep. 2018 | 0,53% | -0,43% | -2,37 | -1,3 |
| Ago. 2018 | -11,69% | -2,94% | 1,15 | -4,08 |
| Jul. 2018 | -4,37% | -3,48% | -2,17 | 0,43 |
| Jun. 2018 | -4,13% | -0,48% | 1,18 | -2,38 |
| May. 2018 | -3,90% | -2,12% | 5,23 | -3,16 |
| Abri. 2018 | -7,58% | -0,27% | 1,12 | 0,54 |
| Mar. 2018 | 4,50% | 2,76% | 3,95 | -0,12 |
| Feb. 2018 | -4,07% | 4,05% | 0,26 | -1,19 |

Fuente: Kenneth French data

*(Tabla 12)*

Luego de reunir los datos necesarios, se realiza una regresión multilineal para encontrar el análisis de datos

| *Estadísticas de la regresión* | |
|---|---|
| Coeficiente de correlación múltiple | 0,81191064 |
| Coeficiente de determinación R^2 | 0,65919889 |
| R^2 ajustado | 0,6023987 |
| Error típico | 0,05424098 |
| Observaciones | 22 |

ANÁLISIS DE VARIANZA

| | *Grados de libert* | *na de cuadrad* | *dio de los cua* | *F* | *alor crítico de F* |
|---|---|---|---|---|---|
| Regresión | 3 | 0,10243373 | 0,03414458 | 11,6055763 | 0,00018192 |
| Residuos | 18 | 0,05295751 | 0,00294208 | | |
| Total | 21 | 0,15539124 | | | |

| | *Coeficientes* | *Error típico* | *Estadístico t* | *Probabilidad* | *Inferior 95%* | *Superior 95%* | *nferior 95,0%* | *uperior 95,0%* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercepción | 0,00418017 | 0,01259212 | 0,33196687 | 0,74374855 | -0,0222749 | 0,03063524 | -0,0222749 | 0,03063524 |
| Variable X 1 | 1,42265445 | 0,29514529 | 4,82018343 | 0,00013722 | 0,8025772 | 2,0427317 | 0,8025772 | 2,0427317 |
| Variable X 2 | -0,00410927 | 0,00540882 | -0,75973568 | 0,45724831 | -0,01547278 | 0,00725423 | -0,01547278 | 0,00725423 |
| Variable X 3 | 0,00641356 | 0,00464332 | 1,38124394 | 0,18411164 | -0,0033417 | 0,01616882 | -0,0033417 | 0,01616882 |

Fuente: Elaboración Propia

Teniendo en cuenta que este modelo es una extensión del modelo CAPM, los valores de los coeficientes deben tener una mejoría para que el resultado sea más certero. Como se puede ver en el análisis de datos, el coeficiente de determinación mejoró en un 6% lo que vuelve el modelo mucho más fiable además del coeficiente de determinación que es el 81% lo que arroja que las variables tienen una relación lineal más alta lo que mejora el modelo

### 6.8 Segundo ejemplo del modelo Fama French

Para esta pequeña aplicación se hará uso de la ecuación 5.3 en donde las variables Betas representarán los siguientes valores:

$$\beta_1 = 0$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2}$$

$$\beta_3 = \frac{3}{10}$$

$$\beta_4 = \frac{4}{10}$$

Aceptando igualmente que en el periodo $t$ la tasa libre de riesgo es del 6 % anual, el retorno del mercado escala al 12 % anual y que el retorno esperado $R_t^{SMB}$ y $R_t^{HML}$ es del 2 y 3 % anual respectivamente, entonces, se podría encontrar el retorno esperado de una acción con esta ecuación:

$$R_{it} = R_{ft} + \beta_1 + \beta_2(R_{Mt} - R_{ft}) + \beta_3 R_t^{SMB} + \beta_4 R_t^{HML} + \varepsilon_t \tag{5.4}$$

Ahora, sustituyendo con los valores antes planteados, la ecuación se propone de la siguiente manera:

$$R_{it} = 6\ \% + 0 + \frac{1}{2}(12\% - 6\%) + \frac{3}{10}(2\%) + \frac{4}{10}(3\%)$$

Calculando…

$$R_{it} = 10.8\ \%$$

Se le recuerda al lector que este retorno valorado no debe coincidir obligatoriamente con uno obtenido por medio modelo CAPM.

**6.9 Uso de Excel para cálculo y diagnóstico de la regresión múltiple:**

Para esta sección se hará uso nuevamente del ejemplo visto en la sección 6.2, allí se intentó explicar el rendimiento de la acción de LAN únicamente del comportamiento del IPSA. Se puede incrementar el análisis añadiendo más variables que probablemente pueden afectar el rendimiento de esta acción, por ejemplo, un analista podría plantear la siguiente relación:

$$R_{LAN,t} = \beta_1 + \beta_2 R_{IPSA,t} + \beta_3 R_{TC,t} + \beta_4 TIP_t + \varepsilon_t$$

donde, $R_{TC,t}$ y $TIP_t$ simbolizan el rendimiento diario del tipo de cambio CLP/USD y la tasa de interés de interés de captación TIP (30-89 días) respectivamente. En otros términos, el rendimiento de la acción depende del rendimiento del índice del mercado (entorno), del rendimiento de un activo sustituto como el tipo de cambio CLP/USD y de una medida de costo de oportunidad del dinero como la TIP.

Una de las formas con que se puede calcular los coeficientes de un modelo de regresión múltiple es con Excel, usando la rutina de Regresión del módulo de regresión de datos.

La única diferencia con respecto al modelo CAPM es que se debe escoger el Rango X de entrada de manera que incorpore las columnas de datos que corresponden a las variables independientes (para este ejemplo son tres).

**Resumen**

| Estadística de regresión | |
|---|---|
| Coeficiente de correlación múltiple | 0,748857444 |
| Coeficiente de determinación R^2 | 0,560787471 |
| R^2 Ajustado | 0,558120189 |
| Error típico | 0,010421165 |
| Observaciones | 498 |

**ANÁLISIS DE VARIANZA**

| | Grados de libertad | Suma de cuadrados | Promedio de los cuadrados | F | Valor crítico de F |
|---|---|---|---|---|---|
| Regresión | 3 | 0,068498815 | 0,022832938 | 210,246743 | 7,33164E-38 |
| Residuos | 494 | 0,053648734 | 0,000108601 | | |
| Total | 497 | 0,122147549 | | | |

| | Coeficientes | Error típico | Estadístico l | Probabilidad | Inferior 95% |
|---|---|---|---|---|---|
| Intercepción | -0,003555598 | 0,004044514 | -0,879116339 | 0,37976561 | -0,011502169 |
| IPSA | 1,093914428 | 0,043656251 | 25,05745236 | 4,9476E-90 | 1,008139691 |
| Tipo de cambio | 0,173341692 | 0,071621397 | 2,420250094 | 0,01586956 | 0,032621572 |
| TIP | 0,062501467 | 0,074546105 | 0,83842699 | 0,40219643 | 0,08365054 |

Alonso, C & Berggrun P (2015). *Rendimiento diario de la acción de LAN Airlines y del IPSA (4 de enero de 2011 a diciembre 28 de 2012)* [Tabla 10]

Substrayendo los datos del Excel la ecuación estimada sería:

$$\hat{R}_{LAN,t} = -0{,}0036 + 1{,}0939\ R_{IPSA,t} + 0{,}1733\ R_{TC,t} + 0{,}0625\ TIP_t$$

## 6.10 Análisis de la regresión múltiple aplicada

Lo primero que se hará es comprobar la bondad del modelo, gracias a la tabla se puede identificar que $R^2$ es 0.56, esto quiere decir que un 56 % de la variabilidad del retorno de la acción de LAN es explicada por el modelo de tres factores. Se le recuerda al lector que cuando se realizó este ejemplo con el modelo CAPM el $R^2$ correspondió al 55 %, entonces, el $R^2$ del modelo de tres factores es ligeramente superior.

Esto permite concluir que el $R^2$ tiende a aumentar cuando se incluyen más variables explicativas, y que además sean importantes o no a la hora de explicar la variable dependiente. Por este motivo se ha creado una medida que previene la añadidura de más variables y conceda la comparación de modelos con distinto número de variables explicativas. Está medida creada es más conocida como $R^2$ ajustado.

Desafortunadamente, este $R^2$ no permite interpretarse, pero tiene un punto a favor y es que con él se pueden comparar modelos. Generalmente es más conveniente un modelo con mayor $R^2$ajustado; en este caso, el $R^2$ ajustado que se usó con el modelo CAPM fue 0,554 comparado con el modelo de tres factores fue 0,558. Esto quiere decir que, bajo este supuesto el modelo de regresión múltiple (Modelo de tres factores de Fama y French) será un poco más preciso a la hora de explicar la rentabilidad de la acción de LAN.

Otro desenlace que comprueba lo encontrado es la significancia individual del coeficiente asociado a la reciente variable incluida en esta regresión $R_{TC,t}$. En el cuadro de Excel expuesto en la sección anterior se evidencia que el valor $p$ (Probabilidad) asociado a este coeficiente es $0.0159$, entonces, se puede rechazar la hipótesis nula de que $\beta_2$ es igual a cero. No obstante, el valor de $p$ asociado con el coeficiente $TIP_t$ según el cuadro de Excel es $0.4021$, lo que significa que no necesariamente dicho coeficiente sea estadísticamente distinto de cero.

## CONCLUSIONES

Lo expuesto a lo largo de este trabajo permite concluir lo siguiente. El trabajo escrito está enfocado en la realización de dos ejemplos los cuales son explicados con dos modelos financieros por medio de aplicaciones matemáticas, para ello los objetivos específicos fueron una guía para lograrlo.

En primer lugar, se quiso abordar desde un punto de vista general sobre las finanzas, el riesgo y los diferentes momentos de la historia en donde se vivieron situaciones importantes. Dentro de la recolección de la información, se pudo encontrar todo lo relacionado con lo hablado en el objetivo específico, pero se evidenció sólo un momento importante el cuál fue llamado la gran depresión por lo que se habló detalladamente solo de este episodio.

En segundo lugar, se lograron encontrar los modelos financieros los cuales van ligados a dos métodos cuantitativos que también tiene una relación estrecha. Sobre los métodos cuantitativos, se abordó gran contenido que logró explicarlos de manera detallada, sin embargo, hay procedimientos algebraicos de fondos, los cuales no se estudiaron ya que no era el fin del trabajo. Lo mismo sucedió con los modelos financieros. A pesar de lo dicho anteriormente, el objetivo específico se cumple.

Por otro lado, para la producción de las aplicaciones matemáticas, si se usó el programa Excel con el fin de aportar al análisis de los ejemplos. No sólo se colocaron dos ejemplos, sino que se expusieron dos más, uno más por modelo, y esto ayuda a que el lector entienda con mayor claridad la forma en que se usa y lo importante que puede ser tomar estos modelos financieros como ayuda para sus decisiones financieras.

Finalmente, cabe aclarar que es un trabajo que empieza en su primera fase de investigación en cuál es la recolección de recursos bibliográficos, primera fase que puede ser usada por alguna persona interesada en avanzar a otras fases.

## REFERENCIAS


Abad, A., Cristóbal , A., & Quilis, E. (2000). *Fluctuaciones económicas, puntos de giro y clasificación cíclica* . Instituto Nacional de Estadística .

Aceña, P. M. (2011). *PASADO Y PRESENTE de la Gran Depresión del siglo XX a la Gran Recesión del siglo XXI.* Bilbao: Fundación BBVA.

Alonso C , J., & Berggrun P. , L. (2015). *Introducción al análisis de riesgo financiero* . Bogotá : ECOE.

Anderson, D. R. (s.f.). *Métodos cuantitativos para los negocios.*

Atienza, B. G. (26 de Junio de 2012). *LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS*. Obtenido de https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1764/Gal%C3%A1n%20Atienza%2C%20Benjam%C3%ADn.pdf?sequence=1

Avellaneda , B., & Campo , A. (2009). *El patrimonio y los ciclos de las entidades financieras* . Bogotá : Criterio Libre .

Barajas Nova , A. (2008, pág. 155 ). *Finanzas para no financistas.* Bogotá : Editorial Pontificia Universidad Javeriana .

BBVA. (14 de Mayo de 2015). *¿Qué es el riesgo financiero? 5 consejos para evitarlo.* Obtenido de https://www.bbva.com/es/resultados-2t19/

Cabrera Martín, M. (24 de Noviembre de 2009). *LOS DISTINTOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN*. Obtenido de https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_24/MARIA%20DEL%20CARMEN_%20CABRERA%20MARTIN_1.pdf

Castillo , B. (2018 ). ¿Qué es la tasa libre de riesgo?¿Cómo se calcula? *Rankia* .

Corona Cabrera, A. (2002 ). *Contabilidad Básica II.* Sistema Universidad Abierta .

CRUZ, E. D. (2009). *Teoría del riesgo.* Bogotá: Ecoe Ediciones.

Damrauf, G. (2010 ). *Finanzas Corporativas* . Buenos Aires : Alfaomega .

David R. Anderson, Dennis J. Sweeney, Thomas A. Williams, Jeffrey D. Camm, & Kipp Martin. (2011). *Metódos cuantitativos para los negocios.* México D.C: Cengage Learning, Inc.

Del Valle, S. C., & Schemel, M. E. (12 de Enero de 2010). *Desarrollo y evolución de las finanzas.* Obtenido de https://www.actaodontologica.com/ediciones/2011/1/art-20/

Duque Navarro, J. (21 de Junio de 2018). *¿Qué significa el término cameralismo?* Obtenido de https://www.abcfinanzas.com/principios-de-economia/que-significa-el-termino-cameralismo

Durán , O. (2014). *XX Congreso nacional de profesionales en Ciencias Económicas.* Salta-Argentina .

Espinoza , E. (2016 ). *Variables operación de variables* . Barcelona .

Fomín, S. V. (1975). *SISTEMA DE NUMERACIÓN.* Moscú: Editorial MIR.

García Padilla, V. M. (2014). *Introducción a la finanzas.* México: Patria.

Garnica, B. Á. (s.f.). *UNA APROXIMACIÓN A LA HISTORIA DE LA CUANTIFICACIÓN DEL RIESGO: DE LA ANTIGÜEDAD AL SIGLO XVIII.*

Obtenido de https://www.aeca.es/old/vi_encuentro_trabajo_historia_contabilidad/pdf/01_ballarin.pdf

Garza Garza, J. Á. (8 de Febrero de 2003). *Sistemas Numéricos*. Obtenido de http://jagarza.fime.uanl.mx/general/presentaciones/notas.pdf

Gimeno Torres, M. (2014). *EVOLUCIÓN DEL MODELO CAPM A LO LARGO DE LA HISTORIA DE LA ECONOMÍA FINANCIERA*. Obtenido de https://repositorio.comillas.edu/jspui/bitstream/11531/149/1/TFG000037.pdf

Laguna, C. (s.f.). *CORRELACIÓN Y REGRESIÓN LINEAL*. Obtenido de http://www.ics-aragon.com/cursos/salud-publica/2014/pdf/M2T04.pdf

Ledesma Goyzueta, L., & Alarcón Novoa, J. (2017 ). Diferencias entre el error estándar y desviación estándar de la disposición a pagar: aplicación del método bootstrap en la valoración contingente de un bien o servicio ambiental. *Anales Científicos* , 18.

Lemelin, A. (2004). *Métodos cuantitativos de las ciencias sociales aplicados a los estudios urbanos y regionales.* México: Fomento Editorial.

Marsden , J., & Tromba , A. (1991 ). *Cálculo Vectorial* . Wilmington, Delaware : Printed in U.S.A.

Martínez , M., & Marí , M. (s.f.). *Parámetros estadísticos de Posición, Dispersión y Forma* . Valencia : Universidad Politécnica de Valencia .

McCONNELL, Campbell , R., & BRUE. (1997). *Economía.* McGraw-Hill.

Medina , A., Hidalgo , A., & Sandoval , R. (2012 ). *Estrategias de diversificación y concentración empleadas por las sociedades anómimas en Chile* . Concepción : Chile .

Monaco, N. I. (14 de Marzo de 2009). *Matemática e Historia. El número Cero*. Obtenido de file:///D:/Biblioteca/Downloads/Dialnet-MatematicaEHistoria-3045279.pdf

Monroy, M. (16 de Febrero de 2015). *¿Por qué son importantes las matemáticas financieras?* Obtenido de https://www.finanzaspersonales.co/columnistas/articulo/por-que-importantes-matematicas-financieras/55464

Montgomery, D., Peck, A., & Vining, G. (2006 ). *Introduction to Linear Regression Analysis.* USA : Wiley Interscience .

Morales Castro, A., Sánchez Rodríguez, B., Morales Castro, J. A., & Figueroa Flores, J. G. (2005). *Finanzas I ( finanzas básicas).* México: FCA.

Morales, C. A., Restrepo Pinera, C., & Villa Monsalve, O. (23 de febrero de 2017). *Aportes de Fray Luca Pacioli al desarrollo de la contabilida: Origen y difusión de la partida doble* . Obtenido de https://www.revistaespacios.com/a17v38n34/a17v38n34p01.pdf

Newbold, P., Carlson , W., & Thorne , B. (2008 ). *Estadística para Administración y Economía* . New Jersey : PEARSON Prentice Hall .

Newbold, P., Carlson, W., & Thorne, B. (2008). *Estadística para Administración y Economía* . Madrid: PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Orellana, B. (Marzo de 2012).

Pardo Merino, A., & Ruíz Díaz , M. (2005). *Análisis de datos con SPSS 13 base.* Madrid: McGraw- Hill Interamericana.

Pelekais, C. d. (2000). *Métodos cuantitativos y cualitativos: diferencias y tendencias* . Obtenido de file:///D:/Biblioteca/Downloads/Dialnet-MetodosCuantitativosYCualitativos-6436313.pdf

Pérez Burgos, R. O. (Octubre de 2011). *HISTORIA DE LAS CRISIS FINANCIERAS.* El Salvador.

Polanco, J. (1995 ). *Métodos casuales para la cuantificación de la actitud del consumidor* . Cantabria : Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa .

Render, B., Stair, R., & Hanna, M. (2006). *Métodos cuantitativos para los negocios.* México: Pearson Educación.

Rodríguez, E. M. (2005). *Errores frecuentes en la interpretación del coeficiente de determinación lineal*. Obtenido de file:///D:/Biblioteca/Downloads/Dialnet-ErroresFrecuentesEnLaInterpretacionDelCoeficienteD-1143023.pdf

Rodríguez, M., & Catalá Mora, R. (2019). Análisis de regresión múltiple. En *Estadística informática: casos y ejemplos con el SPSS* (págs. 3-17). España.

Rosillo C, J. (2005). *Apalancamiento financiero y operativo* .

Sánchez, J. (2002). *Análisis de rentabilidad de la empresa* . Análisis contable .

Sanjuán, F. J. (s.f.). *Economipedia*. Obtenido de Estadístico F: https://economipedia.com/definiciones/estadistico-f.html

Toro, J. M. (2007). *Regresión lineal múltiple*. Obtenido de https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/53349817/Regresion_lineal_ multiple_3.pdf?response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DRegresion_lineal_multiple.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz-Credential=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A%2F20200127%2F

Valencia , J., & Gallego , G. (2014 ). *DISEÑO DE UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN DE RENTA VARIABLE CON INSTRUMENTOS FINANCIEROS COLOMBIANOS BAJO LA METODOLOGÍA DE CARTERA EFICIENTE DE HARRY MARKOWITZ.* Medellín : Universiad de Medellín .

Walpole, R., Myers, R., Myers, S., & Ye , K. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* . México : PEARSON .