



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL**

*Educadora de educadores*

UN ESTUDIO DE LOS MODELOS CLÁSICOS DE GUERRA PROPUESTOS POR  
LANCHESTER Y UNA DE SUS VARIACIONES PROPUESTA POR DEITCHMAN:  
FUEGO DIRECTO, FUEGO EN ÁREA Y GUERRA DE GUERRILLAS

LAURA LILIANA ARENAS AVENDAÑO  
WILLIAM ANDRES PINILLA ROBLES

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ, D.C.  
2020

UN ESTUDIO DE LOS MODELOS CLÁSICOS DE GUERRA PROPUESTOS POR  
LANCHESTER Y UNA DE SUS VARIACIONES PROPUESTA POR DEITCHMAN:  
FUEGO DIRECTO, FUEGO EN ÁREA Y GUERRA DE GUERRILLAS

Trabajo de grado como requisito parcial para obtener el título de Licenciados en  
Matemáticas

LAURA LILIANA ARENAS AVENDAÑO  
2015240011  
WILLIAM ANDRES PINILLA ROBLES  
2015240064

Asesora  
MYRIAM SOFÍA RODRÍGUEZ GARZÓN  
Prof. Departamento de Matemáticas UPN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ, D.C.  
2020

## ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado "UN ESTUDIO DE LOS MODELOS CLÁSICOS DE GUERRA PROPUESTOS POR LANCHESTER Y UNA DE SUS VARIACIONES PROPUESTA POR DEITCHMAN: FUEGO DIRECTO, FUEGO EN ÁREA Y GUERRA DE GUERRILLAS", elaborado por los estudiantes LAURA LILIANA ARENAS AVENDANO, identificada con el Código 2015240011 y Cédula 1014284250 y WILLIAM ANDRES PINILLA ROBLES identificado con el Código 2015240064 y Cédula 1015471618, el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación cuarenta y seis (46) puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna



Meritoria



Laureada



El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

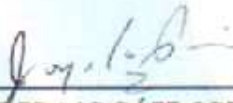
En constancia se firma a los cinco (5) días del mes de mayo de 2021.



Mg. MYRIAM SOFÍA RODRÍGUEZ GARZÓN  
Directora del Trabajo de grado



Mg. FELIPE JORGE FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ  
Jurado del Trabajo de grado



Mg. JORGE EDGAR PÁEZ ORTEGÓN  
Jurado del Trabajo de grado

## **DEDICATORIA**

*A mi mami Toña, la mejor esposa, madre, abuelita, amiga, confidente y consejera, quien me amó sin prejuicios, me enseñó a hacer cada cosa con el corazón y con sus palabras llenas de amor y sabiduría me formó como persona.*

*A mi mami Martha, quien me acompaña en cada etapa de mi vida, me anima a no desfallecer en los momentos más oscuros, me enseña a luchar por mis metas y es mi ejemplo de fortaleza y perseverancia.*

*A mi abuelito Luis, quien es esa figura paterna alegre, amorosa y consentidora, quien saca la mejor versión de mí y me enseña a enfrentar el futuro con optimismo.*

**-Laura Arenas-**

*A mi mamá, Clara Robles Vargas, por apoyarme en cada instante, luchar cada día para hacer de mí una mejor persona y ser un ejemplo de perseverancia.*

*A mi papá, Fabio Pinilla Pinilla, por enseñarme que siempre debo sonreírle a la vida.*

**-William Pinilla-**

# **AGRADECIMIENTOS**

*A Dios, porque sin él realmente nada sería posible.*

*A la profesora Margarita Rojas de Roa, por despertar en nosotros el amor por la docencia y ser un ejemplo a seguir como persona y profesional de la educación matemática.*

*A la profesora Myriam Rodríguez, nuestra asesora, quien nos acompañó a lo largo de este proceso y siempre nos tendió su mano con generosidad y dedicación.*

*A nuestros docentes, quienes desde su disciplina nos mostraron la belleza de las matemáticas.*

*A la Universidad Pedagógica Nacional, por abrirnos sus puertas y formarnos tanto en lo profesional como en lo personal.*

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>Objetivos</b>	<b>11</b>
Objetivo General . . . . .	11
Objetivos Específicos . . . . .	11
<b>1. Descripción de los Modelos</b>	<b>12</b>
1.1. Modelo Fuego Directo - Ley Cuadrada . . . . .	14
1.2. Modelo Fuego Indirecto o Fuego en Área - Ley Lineal . . . . .	14
1.3. Modelo Guerra de Guerrillas . . . . .	15
<b>2. Marco Matemático</b>	<b>17</b>
2.1. Generalidades . . . . .	17
2.2. Sistemas Planos Autónomos Lineales Homogéneos . . . . .	20
<b>3. Análisis de los Modelos</b>	<b>32</b>
3.1. Modelo Fuego Directo . . . . .	32
3.2. Modelo Fuego Indirecto o Fuego en Área . . . . .	52
3.3. Modelo Guerra de Guerrillas . . . . .	66
<b>Conclusiones</b>	<b>77</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>
<b>Anexos</b>	<b>81</b>
Anexo A: Complemento Marco Matemático . . . . .	82
Anexo B: Demostración Principio de Concentración en el Modelo Guerra de Guerrillas Cuando $X_2$ Divide a $X_1$ . . . . .	94
Anexo C: Demostración Principio de Concentración en el Modelo Guerra de Guerrillas Cuando $X_1$ Divide a $X_2$ . . . . .	95

# Índice de figuras

2.1.	<i>Campo de direcciones, nulclinales y línea de autovectores ejemplo 2.2.1.</i>	29
2.2.	<i>Campo de direcciones, líneas de autovectores y diagrama de fases ejemplo 2.2.1.</i>	30
2.3.	<i>Ejemplo gráfico de un punto de silla.</i>	30
3.1.	<i>Situación de empate bajo el modelo fuego directo cuando <math>x_{1_0} = 500</math>, <math>x_{2_0} = 250</math>, <math>\beta = 0,25</math> y <math>\alpha = 1</math>.</i>	38
3.2.	<i>Situaciones en las que <math>X_1</math> gana al variar <math>\alpha</math> en el intervalo <math>(0, 0,4)</math> fijando <math>x_{1_0}, x_{2_0}</math> y <math>\beta</math>.</i>	39
3.3.	<i>Situaciones en las que gana <math>X_2</math> al variar <math>\alpha</math> en el intervalo <math>(0,4, 1]</math> fijando <math>x_{1_0}, x_{2_0}</math> y <math>\beta</math>.</i>	39
3.4.	<i>Soluciones del sistema al considerar los datos de la fila 1 de la tabla (3.4).</i>	41
3.5.	<i>Campo de direcciones y diagrama de fases asociado al modelo fuego directo.</i>	45
3.6.	<i>Representación gráfica de la ecuación (3.13).</i>	45
3.7.	<i>Trayectoria de una situación en la que <math>X_1</math> es aniquilado mientras que <math>X_2</math> aún conserva efectivos bajo el modelo fuego directo.</i>	46
3.8.	<i>Representación gráfica de la ecuación (3.14).</i>	46
3.9.	<i>Trayectoria de una situación en la que <math>X_2</math> es aniquilado mientras que <math>X_1</math> aún conserva efectivos bajo el modelo fuego directo.</i>	47
3.10.	<i>Trayectorias de una situación en la que <math>X_1</math> y <math>X_2</math> son aniquilados bajo el modelo fuego directo.</i>	47
3.11.	<i>Representación gráfica de las tres situaciones que se pueden presentar en un combate bajo el modelo fuego directo.</i>	48
3.12.	<i>Campo de direcciones del sistema asociado al modelo fuego en área.</i>	60
3.13.	<i>Trayectoria de una situación en la que <math>X_2</math> es aniquilado mientras que <math>X_1</math> aún conserva efectivos bajo el modelo fuego en área.</i>	61
3.14.	<i>Trayectoria de una situación en la que <math>X_1</math> es aniquilado mientras que <math>X_2</math> aún conserva efectivos bajo el modelo fuego en área.</i>	61
3.15.	<i>Trayectoria de una situación en la que <math>X_1</math> y <math>X_2</math> son aniquilados bajo el modelo fuego en área.</i>	62
3.16.	<i>Representación gráfica de las tres situaciones que se pueden presentar en un combate bajo el modelo fuego en área.</i>	62
3.17.	<i>Campo de direcciones del sistema asociado al modelo guerra de guerrillas.</i>	68
3.18.	<i>Trayectoria de una situación en la que <math>X_2</math> es aniquilado, mientras que <math>X_1</math> aún conserva efectivos bajo el modelo guerra de guerrillas.</i>	69
3.19.	<i>Gráfica de la función (3.46) cuando <math>c &gt; 0</math></i>	69

3.20. Trayectoria de una situación en la que $X_1$ es aniquilado, mientras que $X_2$ aún conserva efectivos bajo el modelo guerra de guerrillas. . . . .	70
3.21. Trayectoria de una situación en la que $X_1$ y $X_2$ son aniquilados bajo el modelo guerra de guerrillas. . . . .	70
3.22. Representación gráfica de las tres situaciones que se pueden presentar al finalizar el combate bajo el modelo guerra de guerrillas. . . . .	71
A. 1. Ejemplo gráfico de nodo estable . . . . .	82
A. 2. Ejemplo gráfico de un nodo inestable . . . . .	83
A. 3. Ejemplo gráfico de un nodo impropio estable . . . . .	85
A. 4. Ejemplo gráfico de un nodo impropio inestable . . . . .	85
A. 5. Ejemplo gráfico de un punto de estrella estable . . . . .	86
A. 6. Ejemplo gráfico de un punto de estrella inestable . . . . .	86
A. 7. Ejemplo gráfico de un foco estable. . . . .	89
A. 8. Ejemplo gráfico de un foco inestable. . . . .	89
A. 9. Ejemplo gráfico de un centro. . . . .	90
A. 10. Esquema que resume los casos en los que el SPANLH es o no linealizable. . . . .	93



# Índice de tablas

3.1.	<i>Registro de situaciones en las que el combate finaliza en empate cuando <math>X_1</math> cuenta con el doble de efectivos inicial que <math>X_2</math>.</i>	38
3.2.	<i>Variación del valor del parámetro <math>\alpha</math> para determinar el ejército ganador del combate, a partir de las condiciones de empate.</i>	40
3.3.	<i>Registro de situaciones en las que el combate finaliza en empate cuando <math>X_1</math> tiene el triple de efectivos que <math>X_2</math>.</i>	40
3.4.	<i>Registro de situaciones en las que el combate finaliza en empate al ingresar manualmente valores para los parámetros <math>\alpha</math> y <math>\beta</math>.</i>	40

# Introducción

El propósito inicial de este trabajo de grado era recurrir a las ecuaciones de Lanchester para sugerir una estrategia militar desde el punto de vista matemático que fuera favorable para la reducción del gasto presupuestal en la cartera de defensa del gobierno de Colombia. Sin embargo, dicho objetivo fue transformándose a medida que se profundizaba en la consulta de diversos modelos matemáticos de guerra y en la historia del conflicto armado colombiano, acotándose a la modelación de un solo enfrentamiento. Al trabajar en la recolección de la información básica que requiere un modelo matemático de guerra, como lo es el pie de fuerza de cada ejército y la cantidad y tipo de armas utilizadas por cada bando en el combate, se encontró no solo incongruencias en la información proporcionada por distintas fuentes oficiales, sino que, en el caso de las armas, la información es nula. Esta dificultad hizo que el trabajo de grado se reorientara hacia el estudio de los modelos matemáticos de guerra de Lanchester y una de sus variaciones propuesta por Deitchman, desde una postura que no pretende poner en discusión el planteamiento de los sistemas asociados a cada uno de estos modelos, sino demostrar afirmaciones que se encuentran reportadas en la literatura y que no cuentan con una justificación detallada.

Considerando lo anterior, se desarrolló el presente trabajo de grado y se organizó en tres capítulos. En el primero, se presentan los modelos de guerra que son de interés en este trabajo considerando aspectos relacionados con su surgimiento, implementación y la trascendencia que ha tenido el estudio de estos modelos matemáticos de guerra para el sector de defensa, seguido de la presentación de los sistemas asociados a cada uno de estos. Por otro lado, teniendo en cuenta que los autores de esta monografía no adelantaron estudios relacionados con los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales en los espacios académicos cursados durante la carrera, el segundo capítulo corresponde a la construcción del marco matemático en el que se registran los conceptos que se consideran necesarios para el estudio de los modelos de Lanchester y Deitchman. En él, se da a conocer la clasificación a la que pertenecen los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales que son objeto de estudio y se realiza una recopilación teórica sobre su tratamiento analítico y cualitativo. La presentación de esta recopilación está dividida en dos partes, en la primera se expone de manera general los tratamientos mencionados del tipo de sistema que abarca los tres modelos a estudiar y se finaliza puntualizando sobre el tratamiento cualitativo y analítico del tipo de sistema en el que fue catalogado uno de los modelos de guerra.

Por último, en el tercer capítulo se realiza el análisis de cada uno de los modelos por separado, teniendo en cuenta la teoría expuesta en el marco matemático. En este se incluye el cálculo de las soluciones analíticas de cada sistema, la determinación de la estabilidad

de sus soluciones estacionarias y el diagrama de fases y el campo de direcciones asociado. Adicionalmente, se proponen demostraciones para algunas afirmaciones realizadas en torno a los modelos que están relacionadas con el resultado final del combate.

# Objetivos

## Objetivo General

Fortalecer los conocimientos matemáticos de los autores a través de un estudio, desde el punto de vista matemático, de los modelos clásicos de guerra propuestos por Lanchester para describir el combate convencional entre dos fuerzas y una variación de estos para la guerra de guerrillas propuesta por Deitchman.

## Objetivos Específicos

- Fundamentar un marco matemático en el que se incluya teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias respecto al estudio cualitativo y analítico de sus soluciones.
- Deducir la relación que existe entre las fuerzas combativas de los ejércitos para la determinación del ganador del combate bajo cada uno de los modelos a través de la exploración gráfica de las variables de estado.
- Verificar matemáticamente las afirmaciones realizadas por Lanchester respecto al principio de concentración en cada uno de sus modelos.

## Descripción de los Modelos

En este capítulo se describen los tres modelos de guerra que son objeto de estudio en este trabajo, a saber, las ecuaciones de Lanchester y una de sus variaciones propuesta por Deitchman, los cuales están asociados a modelos matemáticos que se han concebido con la intención de estudiar conflictos armados entre dos grupos. En la primera parte, se da a conocer en qué ámbitos se hace uso de las ecuaciones de Lanchester, se mencionan algunas de las batallas que han sido analizadas haciendo uso de estos sistemas y los pro y contra de estas ecuaciones que han sido reportados en la literatura, seguido de la descripción de cada modelo en la que se presentan los sistemas de ecuaciones diferenciales y las características de los enfrentamientos que son susceptibles de ser modelados a través de dichos sistemas. Para el caso de los modelos de Lanchester se dan a conocer las leyes a las cuales conducen dichas ecuaciones.

Lepingwell (1987), afirma que el crecimiento del campo de la investigación de operaciones militares trajo consigo que los analistas en defensa se interesaran por encontrar métodos para modelar enfrentamientos armados terrestres. En medio de la búsqueda, los investigadores se encontraron con que en 1916 el reconocido ingeniero británico Frederick William Lanchester propuso dos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias basados en escenarios de combate aéreo de la Primera Guerra Mundial, los cuales describen cómo disminuye el número de efectivos de dos fuerzas armadas opuestas durante un combate simétrico <sup>1</sup>.

El crecimiento de la tecnología, como computadoras digitales a gran escala, ha permitido no solo el uso de estos modelos con el objetivo de planificación, sino también la implementación y diseño de modelos de combate convencional más complejos, pero aún fundamentados en los sistemas de Lanchester debido a que se consideran un prototipo simple para comprender la dinámica de ciertos tipos de enfrentamientos armados, gracias a que de estos modelos se puede obtener información del combate de manera relativamente fácil (Lepingwell, 1987). Sin embargo, dicha simplicidad y la justificación lógica, pero no científica, realizada por Lanchester para el planteamiento de sus modelos han sido también base para las críticas que se le han formulado ya que sus detractores afirman que, por ejemplo, no son adecuadas para describir el combate moderno debido a que ignoran otros factores que inciden en el desarrollo del enfrentamiento convencional, tales como el factor humano (la moral, el poder de cohesión, el miedo, entre otros), aspectos logísticos,

---

<sup>1</sup>Según Pinedo (2013) el combate simétrico se da cuando las dos fuerzas enfrentadas tienen similitud en términos físicos, doctrinales y ontológicos.

la inteligencia del campo de batalla, procesos de decisión táctica, efectos del terreno, las re-posiciones de hombres, etc., y presentan deficiencias al considerar las fuerzas homogéneas, los coeficientes de aniquilamiento constantes, entre otros (Taylor, 1980). Con respecto a la falta de justificación científica de estas ecuaciones Taylor (1980), quien cita a Bonder (1974), menciona que esta falencia se presenta gracias a la falta de información en la base de datos histórica ya que en ella no se encuentra información indispensable para poder validarlas, tal como el número de efectivos de cada fuerza, sus pérdidas, el tipo de armas usadas durante el combate, entre otros. No obstante, se ha utilizado información de enfrentamientos, en su mayoría de la primera y segunda guerra mundial, y se han obtenido, en algunos casos, resultados muy favorables a pesar de la información limitada, tal como es el caso de las batallas de Iwo Jima y de Panzers Ruso-Germana de Kursk (Romero, 2011).

Cabe aclarar que, a pesar de las críticas y la falta de validación, las ecuaciones de Lanchester han demostrado ser no solo importantes en la descripción y comprensión de ciertos tipos de intercambio militar, sino también ser útiles para esclarecer algunas características propias de los enfrentamientos susceptibles de modelar a través de dichos sistemas de ecuaciones diferenciales (Deitchman, 1962).

Antes de describir cada modelo propuesto por Lanchester es importante tener en cuenta que cuando se habla de las ecuaciones de Lanchester se hace referencia a modelos matemáticos de combate analíticos deterministas, los cuales se caracterizan por su grado de abstracción, “pobre en el número de variables explícitamente consideradas, pero rico en facilidad de manipulación y claridad de perspicacia” (Taylor, 1980, p. 18). Pese a esta característica, que conlleva a que no puedan ser usados para solucionar cualquier problema operativo real específico, son usados como un canal de comunicación entre los analistas, gracias a que permiten identificar posibles dificultades y áreas problemáticas, dilucidar un principio general como el de la concentración <sup>2</sup>, entre otros (Taylor, 1980).

Para la descripción de cada uno de los modelos se tomará como supuesto que dos ejércitos,  $X_1$  y  $X_2$ , se encuentran en un combate en el cual ninguno de los bandos tiene la posibilidad de aumentar su pie de fuerza durante el enfrentamiento. El número de efectivos del ejército  $X_1$  en cualquier instante de tiempo <sup>3</sup>  $t$  está dado por  $x_1(t) = x_1$  mientras que la fuerza numérica del ejército  $X_2$  en cualquier instante de tiempo  $t$  está dada por  $x_2(t) = x_2$ . Por otro lado, el coeficiente de aniquilamiento, que corresponde al número de impactos que son acertados en un intervalo de tiempo por cada efectivo, del ejército  $X_1$  es  $\beta$  mientras que el del ejército  $X_2$  es  $\alpha$ .

En la mayoría de los documentos consultados no se presenta un procedimiento para el cálculo de los coeficientes de aniquilamiento, sin embargo, Ochoa (2009) advierte que estos dependen de aspectos relacionados con la preparación de las tropas, el tipo y calidad de armas, la capacidad económica, etc.

---

<sup>2</sup>“la concentración de todos los recursos de un beligerante con un solo propósito u objeto, y, consiguientemente, la concentración de la máxima potencia de sus fuerzas, navales o militares, en un punto en el campo de operaciones” (Lanchester, 1916, p. 39)

<sup>3</sup>Según Giordano, Fox y Horton (2013) el tiempo en los modelos de tipo Lanchester se mide normalmente en horas o días.

## 1.1. Modelo Fuego Directo - Ley Cuadrada

Lepingwell (1987) afirma que Lanchester al observar que las armas de fuego permiten la concentración de este, determinó las siguientes suposiciones que se presentarían durante el enfrentamiento en condiciones modernas:

1. El fuego es directo, ambos lados pueden apuntar y concentrar su fuego sobre objetivos seleccionados y el fuego se distribuye uniformemente sobre los objetivos.
2. Los objetivos deben ser visibles y accesibles.
3. Las secuencias de fuego deben ser determinables de modo que después de que un objetivo sea desactivado el fuego se cambiará inmediatamente a un nuevo objetivo.
4. Cada bando está compuesto por fuerzas homogéneas, es decir, cada unidad tiene el mismo tipo de arma y eficiencia en el combate.

Atendiendo a estos supuestos, Lanchester (1916) considera que en un enfrentamiento entre los ejércitos  $X_1$  y  $X_2$ , la tasa de pérdidas del ejército  $X_1$  será proporcional a la fuerza numérica de  $X_2$ , con constante de proporcionalidad igual a la efectividad  $\alpha$  de cada unidad de este, y viceversa. Lo anterior expresado matemáticamente es:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1 \end{cases}$$

Estas ecuaciones, según Lanchester, quien es citado por Lepingwell (1987), conducen a la denominada **Ley Cuadrada**, la cual establece que la medida apropiada de la capacidad militar de una fuerza, denominada **fuerza combativa**, es el coeficiente de aniquilamiento multiplicado por el cuadrado de su fuerza numérica. Esta ley permite conocer el resultado del combate en términos del ejército vencedor, ya que un ejército gana cuando su fuerza combativa es mayor que la de su contrincante y si las fuerzas combativas de los ejércitos son iguales ninguno ganará. Adicionalmente, esta ley le permitió a Lanchester justificar cuantitativamente el **principio de concentración** (Lepingwell, 1987).

## 1.2. Modelo Fuego Indirecto o Fuego en Área - Ley Lineal

Contrario a la ley anterior, Lepingwell (1987) señala que, según Lanchester, la ley lineal descarta en las suposiciones que se presentarían durante un enfrentamiento, la concentración de fuego, ya que las armas, como espadas, en el combate antiguo no permiten que varios soldados ataquen simultáneamente un mismo objetivo. Sin embargo, en condiciones modernas se puede mencionar que la ley lineal puede estar presente en enfrentamientos en los que se asumen las siguientes suposiciones:

1. El fuego es indirecto, es decir, al disparar no se cuenta con una línea de visión directa entre el arma y el objetivo ya que no se conocen las posiciones del adversario.
2. El fuego se distribuye uniformemente a lo largo de una zona.

3. Ningún bando cuenta con información sobre el daño producido por el fuego y por tanto no cambia a un nuevo objetivo cuando este es desactivado.
4. Cada grupo está compuesto por fuerzas homogéneas, es decir, cada unidad tiene el mismo tipo de arma y eficiencia en el combate.

Según Lanchester (1916) en un enfrentamiento que se encuentra bajo estos supuestos, la tasa de pérdida de una fuerza dependerá no solamente de la fuerza numérica del contrario y su coeficiente de aniquilamiento, sino también de la fuerza numérica propia que se encuentra en el área bajo fuego. Matemáticamente esto se expresa como:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_2 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1 x_2 \end{cases}$$

Como la tasa de pérdida de cada bando depende no solo de la cantidad de efectivos del oponente y su coeficiente de aniquilamiento, sino también de las propias, se observa que, al aumentar el pie de fuerza, se aumenta tanto la tasa de pérdidas del enemigo como el número de objetivos en el área que el contrincante puede aniquilar, es decir, aumenta la propia tasa de desgaste (Lepingwell, 1987).

Por otro lado, las ecuaciones que describen este tipo de enfrentamiento, según Lanchester, quien es citado por Lepingwell (1987), conducen a la **ley lineal**, la cual establece que la **fuerza combativa** de un grupo armado es igual al coeficiente de aniquilamiento multiplicada por su fuerza numérica. Al igual que en modelo anterior la fuerza combativa determina el ganador del enfrentamiento, de tal manera que el ejército con mayor fuerza combativa resulta vencedor y si dos fuerzas son iguales en esta medida, ninguna de las partes ganará. A diferencia de la ley cuadrada, la ley lineal no proporciona ninguna ventaja a la fuerza numérica, es decir, el principio de concentración no es aplicable para ningún ejército bajo este modelo (Lepingwell, 1987).

Los dos sistemas de ecuaciones anteriores se plantearon para modelar batallas convencionales en las que cada fuerza conocía su contrincante y el lugar donde se desarrollaría el enfrentamiento, es decir, se desarrollaba un combate transparente. No obstante, Deitchman (1962) menciona que luego de la segunda guerra mundial ha sobresalido un tipo de combate distinto a los que suelen modelar las ecuaciones de Lanchester denominado guerra de guerrillas-contraguerrillas, en donde los enfrentamientos se desarrollan entre dos ejércitos, regular e irregular. A partir de esta observación este autor propone la siguiente variación de las ecuaciones de Lanchester en la que pretende capturar las características de estos enfrentamientos.

### 1.3. Modelo Guerra de Guerrillas

Deitchman (1962) afirma que en un conflicto armado que se encuentra bajo este tipo de enfrentamiento, se puede dar la situación en la que el ejército regular  $X_2$  cubre una zona en la que considera que se encuentra un grupo guerrillero  $X_1$  al cual pretende atacar, dicho ejército irregular hará ofensiva a través de una emboscada en la que dispara sobre el ejército regular conociendo la localización de cada uno de sus opositores porque están a la vista de estos; por consiguiente, la tasa de pérdida del ejército regular es proporcional a la fuerza numérica del ejército irregular  $x_1$  y a la efectividad  $\beta$  de cada unidad de este. Como el



emboscador, es decir, el grupo guerrillero está oculto, el ejército regular devolverá el fuego sin conocer las posiciones del oponente, simplemente direccionará el fuego al área que ocupa el ejército irregular. De aquí se puede afirmar que la tasa de pérdida de la guerrilla dependerá tanto de la fuerza numérica del ejército regular  $x_2$  y su respectivo coeficiente de aniquilamiento  $\alpha$ , como de la fuerza numérica propia que ocupa el área en la que dispara el ejército regular (Deitchman, 1962). Las ecuaciones que describen la situación anterior son:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_2 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1 \end{cases}$$

Bajo este modelo la fuerza combativa de  $X_1$  es  $\beta x_1$  y la de  $X_2$  es  $\frac{\alpha}{2} x_2^2$ . Al igual que en los modelos de Lanchester las fuerzas combativas permiten determinar de manera análoga el ganador del combate.

Como se observó, una característica del enfrentamiento que es susceptible de ser modelado por el primer sistema de ecuaciones de Lanchester descrito, modelo de fuego directo, es que los dos bandos tienen visibilidad de cada objetivo del enemigo, caso contrario al modelo de fuego indirecto, en el que, como se expresó, se asume que cada grupo armado no tiene ningún conocimiento de las posiciones de los efectivos del oponente, y en el caso del modelo propuesto por Deitchman al ser una combinación de los dos modelos de Lanchester, es evidente que se supone que mientras un ejército tiene visibilidad absoluta de las posiciones de su contrincante, el otro grupo no tiene conocimiento alguno respecto a ello.

Como se describió, a medida que ha pasado el tiempo han ido surgiendo variaciones de los modelos que son objeto de estudio en esta monografía, algunas de ellas buscan dar solución a algunas de las críticas que se le han realizado a los modelos iniciales. Entre las adaptaciones más recientes que se encontraron en la literatura se destaca el modelo propuesto por Kress y Mackay (2013) quien generaliza el modelo de Deitchman considerando que durante un combate la visibilidad del oponente puede variar.

## Marco Matemático

Los modelos de guerra que son objeto de estudio en el presente trabajo se pueden catalogar como Sistemas Planos Autónomos [SPA], por tal razón, en este capítulo se presenta una recopilación teórica de los conceptos y procedimientos que, a juicio de los autores de esta monografía, son necesarios para el estudio de dichos sistemas. Es importante aclarar que inicialmente, dadas las características apreciadas mediante la observación de los modelos a estudiar, la recopilación fue acotada a la teoría correspondiente a los Sistemas Planos Autónomos Lineales Homogéneos [SPALH] y a los Sistemas Planos Autónomos No Lineales Homogéneos [SPANLH], además de incluirse algunos conceptos de la teoría del Álgebra Lineal necesarios para el estudio de los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales. No obstante, dado que esta información se compiló de manera preliminar al análisis de los modelos de guerra, en dicho estudio no se hizo uso de todo lo reportado, así que atendiendo a que el propósito de la información consignada en este capítulo es contribuir al alcance del objetivo general del trabajo, en este apartado se encuentra solamente la teoría que sustenta el análisis de los modelos, mientras que la otra parte de la recopilación se puede encontrar en el anexo A. Pese a que dos de los sistemas que se pretenden estudiar en el presente trabajo son SPANLH Degenerados, en este capítulo no se incluye información sobre el tratamiento analítico ni cualitativo de estos, debido a que no se cuenta con una teoría general para calcular las soluciones analíticas de Sistemas No Lineales, y el estudio de los puntos de equilibrio degenerados de Sistemas No Lineales está fuera del alcance del presente trabajo.

En este orden de ideas, el capítulo se dividirá en dos secciones, la primera corresponde a las generalidades de los SPA, en la cual se encuentra el desarrollo de los tratamientos cualitativo y analítico de estos sistemas de manera general. La segunda sección corresponde a la información relacionada con el estudio analítico y cualitativo de los SPALH, iniciando con la definición y solución general de estos sistemas, seguido de algunos conceptos del Álgebra Lineal (autovectores, autovalores y su respectiva clasificación) y finalizando con la solución general de un SPALH No Degenerado ligado a los autovalores reales distintos de la matriz de coeficientes constantes del sistema y el comportamiento de los distintos tipos de soluciones de este, vinculado a los autovalores reales distintos de signos opuestos.

### 2.1. Generalidades

Sean  $x_1$  y  $x_2$  funciones desconocidas de una sola variable independiente  $t$ ; las dos ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas de primer orden siguientes forman lo que se

denomina un **sistema plano autónomo**

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.1)$$

debido a que la variable independiente no aparece de manera explícita en el miembro derecho de las ecuaciones que componen el sistema.

**Nota:** Si se consideran los vectores

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

el Sistema Plano Autónomo (2.1) se puede escribir como:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

denominada **notación vectorial**.

**Definición 2.1.1 (Solución de un Sistema Plano Autónomo)**<sup>1</sup>: La solución de un SPA está conformada por un par de funciones de clase  $C^1$ ,  $x_1(t) = \phi_1(t)$  y  $x_2(t) = \phi_2(t)$ , que satisfacen el sistema en un intervalo común  $I$ . En notación vectorial se tiene:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}$$

denominado vector solución en el intervalo  $I$ .

De aquí en adelante se presentarán definiciones y conceptos matemáticos necesarios para el tratamiento cualitativo de los SPA. Es importante resaltar que el propósito de este tipo de tratamiento, es estudiar el comportamiento de las soluciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  del sistema (2.2) de manera sincrónica a medida que va variando  $t$ , es decir, que para cada  $t$  del dominio existe un vector único  $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ , solución de (2.2), donde el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  dado por los puntos  $(x_1(t), x_2(t))$  es una **curva solución, trayectoria u órbita**  $\gamma$  en el plano  $\mathbb{R}^2$ , así que se puede pensar que  $\gamma$  está trazada por una partícula en movimiento cuyo vector posición sobre  $\gamma$  es  $\mathbf{x}(t)$ ; la familia de todas las trayectorias del sistema (2.2) se denomina **diagrama de fases**, el cual permite observar en conjunto qué tipo de comportamiento tiene el sistema.

Las trayectorias se clasifican en curvas cerradas simples, curvas abiertas simples y puntos de equilibrio. La **curva cerrada simple** no se corta a sí misma exceptuando en los puntos inicial y final de su recorrido. Este tipo de curva corresponde a una solución  $\mathbf{x}(t)$  del sistema  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  para la cual existe  $T > 0$  tal que  $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$  para todo  $t$ , denominada **solución periódica**. Cuando  $\gamma$  no se corta así misma, es decir, admite una parametrización inyectiva se denomina **curva abierta simple**. El punto  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  se denomina **punto de equilibrio** del sistema (2.2) si el vector solución está compuesto por

<sup>1</sup>Más adelante se mencionará las condiciones necesarias para la existencia de las soluciones de un sistema plano autónomo lineal homogéneo bajo condiciones iniciales

funciones constantes  $x_1(t) = \bar{x}_1$ ,  $x_2(t) = \bar{x}_2$ , es decir, si  $\mathbf{x}(t)$  es una **solución estacionaria** del sistema 2.2. Es importante resaltar que por cada punto en el plano de fases pasa una única trayectoria.

**Definición 2.1.2 (Punto de Equilibrio no Degenerado):** Un punto de equilibrio  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  se dice no degenerado si la matriz jacobiana asociada al sistema (2.2) evaluada en este punto es no singular.

**Proposición 2.1.1:** Todo punto de equilibrio no degenerado es aislado<sup>2</sup>.

**Nota:** Si un punto de equilibrio  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  en un SPALH, es no degenerado, entonces  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$  es el único punto de equilibrio y el sistema se denomina No Degenerado. En, los SPANLH No Degenerados se puede presentar más de un punto de equilibrio, todos no degenerados.

Una manera de determinar los puntos de equilibrio de un sistema, es a través de la intersección de las **nulclinales**. Para el sistema (2.2) la nulclinal  $x_1$  es el conjunto de los puntos  $(x_1(t), x_2(t))$ , donde  $f_1(x_1, x_2)$  es cero, y la nulclinal  $x_2$  es el conjunto de puntos  $(x_1(t), x_2(t))$  donde  $f_2(x_1, x_2)$  es cero. Además de dar lugar a los puntos de equilibrio, las nulclinales dividen el plano en diferentes regiones donde el vector tangente tiene la misma dirección y sentido.

Los puntos de equilibrio aislados se pueden clasificar en estables, inestables o asintóticamente estables. Un punto de equilibrio aislado  $\bar{\mathbf{x}}$  se dice **estable** si una curva solución  $\gamma$  que inicia lo suficientemente cerca de  $\bar{\mathbf{x}}$  se mantiene cerca a  $\bar{\mathbf{x}}$ , es decir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \bar{x}_1 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \bar{x}_2$$

Se debe tener en cuenta que si al menos una de las trayectorias que inicia lo suficientemente cerca de  $\bar{\mathbf{x}}$  se aleja del punto de equilibrio aislado  $\bar{\mathbf{x}}$ , se dice que este punto es **inestable**.

Un punto de equilibrio aislado  $\bar{\mathbf{x}}$  se dice **asintóticamente estable** si es estable y, además:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_2(t) - \bar{x}_2}{x_1(t) - \bar{x}_1}$$

existe, o si este cociente se hace positiva o negativamente infinito cuando  $t \rightarrow \infty$ . Lo anterior implica que la trayectoria de toda solución que comience suficientemente cerca de un punto asintóticamente estable no solo debe permanecer cerca, sino que a la larga converge al equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$ .

**Nota:** Los SPALH se definen como estables, inestables o asintóticamente estables, mientras que en los SPANLH quienes se definen como tales son sus puntos de equilibrio.

---

<sup>2</sup> $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  es un punto crítico aislado, si existe  $\epsilon > 0$  tal que la bola abierta con centro en  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  y radio  $\epsilon$  no contiene puntos críticos distintos a  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ .

Es importante reconocer que las trayectorias que no permanecen constantes en el tiempo, es decir que no son puntos de equilibrio, no solo se pueden describir a partir de la obtención explícita de las soluciones del sistema, sino también se pueden determinar al resolver la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

Denominada **ecuación diferencial de las trayectorias**, debido a que dichas curvas solución la satisfacen.

**Definición 2.1.3 (Campo de Direcciones):** Sea  $D$  un conjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Un campo de direcciones sobre  $\mathbb{R}^2$  es una función  $G$  que asigna a cada punto  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  en  $D$  un vector bidimensional  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  tangente a la trayectoria en dicho punto. Este vector tangente está definido como:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'(t)$$

Ahora bien, luego de abordar los conceptos que aportan tanto al estudio de los SPALH como al de los SPANLH, se desarrollará parte de la teoría propia de los SPALH No Degenerados.

## 2.2. Sistemas Planos Autónomos Lineales Homogéneos

Para abordar este tipo de sistemas se considera necesario definir en primer lugar un sistema plano autónomo lineal, para luego abordar la teoría alrededor de los SPALH.

Si cada una de las funciones  $f_1$  y  $f_2$  de (2.1) es lineal en las variables dependientes  $x_1$  y  $x_2$ , entonces se dice que el sistema plano autónomo es lineal.

La forma general de un sistema plano autónomo lineal de primer orden es:

$$\begin{cases} x_1' = a_1x_1 + a_2x_2 + b_1 \\ x_2' = a_3x_1 + a_4x_2 + b_2 \end{cases} \quad (2.3)$$

donde  $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ .

Cuando  $b_1 = b_2 = 0$  se dice que el sistema lineal es **homogéneo**, en caso contrario es **no homogéneo**.

Con este tipo de sistemas se puede usar la **notación matricial** para escribirlo de forma más compacta. Sea  $A$  la matriz cuadrada, de tamaño  $2 \times 2$ , correspondiente a los coeficientes de este sistema

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

y sea el vector columna de variables dependientes

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

entonces, la notación matricial de un *sistema lineal homogéneo* es:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad (2.4)$$

La importancia de esta notación en esta monografía radica en el hecho de que las soluciones analíticas se determinarán a partir de la clasificación de los autovalores asociados a la matriz  $A$ .

Antes de hablar de la solución general de un SPALH es necesario recordar la definición de *matriz fundamental de soluciones* y de *exponencial de una matriz*.

**Definición 2.2.1 (Matriz Fundamental de Soluciones):** Dado un conjunto fundamental de soluciones <sup>3</sup> del sistema (2.4) en un intervalo  $I$ ,  $\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$ , la matriz:

$$\phi = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

es una *matriz fundamental de soluciones* del sistema (2.4).

**Definición 2.2.2 (Exponencial de una matriz):** La matriz exponencial de una matriz  $A$  de tamaño  $2 \times 2$  se define como<sup>4</sup>:

$$e^A = I_2 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (2.5)$$

donde por convenio se asume que  $A^0 = I_2$ .

De aquí, se expresa  $e^{tA}$  como una serie de potencias:

$$e^{tA} = I_2 + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \cdots \quad (2.6)$$

Para cada valor de  $t$ ,  $e^{tA}$  es una matriz de tamaño  $2 \times 2$ , es decir, se considera  $e^{tA}$  como una función de  $t \in \mathbb{R}$  cuyos valores son matrices  $2 \times 2$ .

**Proposición 2.2.1 (Solución General del Sistema):** La matriz  $e^{tA}$  es una matriz fundamental de soluciones del sistema plano autónomo lineal homogéneo de coeficientes constantes  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , y la solución general de este sistema, escrita en forma vectorial, es:

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c} \quad (2.7)$$

siendo  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$  un vector arbitrario de dos componentes.

<sup>3</sup>Es cualquier conjunto  $\mathbf{x}_1(t)$ ,  $\mathbf{x}_2(t)$  de dos vectores soluciones linealmente independientes del sistema (2.4) en un intervalo  $I$ .

<sup>4</sup>Se asume que la serie (2.5) es convergente y define una única matriz que se denomina exponencial de  $A$ .

**Demostración (Proposición 2.2.1):** Inicialmente, se probará que:

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$$

para ello se deriva la serie de potencias

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= \frac{d}{dt} \left( I_2 + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \dots \right) \\ &= A + \frac{tA^2}{1!} + \frac{t^2A^3}{2!} + \frac{t^3A^4}{3!} + \dots \\ &= A \left( I_2 + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \dots \right) \end{aligned}$$

Reemplazando (2.6) en lo anterior:

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$$

Así se puede afirmar que  $e^{tA}$  es una matriz de soluciones del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ . Ahora, se debe mostrar que las columnas de la matriz  $e^{tA}$  son linealmente independientes, es decir, que el  $\det(e^{tA}) \neq 0$  para todos los valores de  $t \in \mathbb{R}$ . Para ello, se necesita la siguiente proposición asociada a la exponencial de una matriz:

**Proposición 2.2.2.**<sup>5</sup>:Cualesquiera que sean la matriz  $A$ ,  $n \times n$ , y el escalar  $t$  se tiene:

$$e^{tA}e^{-tA} = I_n$$

luego, la inversa de  $e^{tA}$  es  $e^{-tA}$ .

Particularmente, considerando la proposición anterior, se tiene que:

$$e^{tA}e^{-tA} = I_2$$

aplicando determinante a ambos lados de la ecuación:

$$\det(e^{tA}e^{-tA}) = \det(I_2)$$

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes y que  $\det(I_n) = 1$ , se tiene que:

$$\det(e^{tA})\det(e^{-tA}) = 1$$

De donde se concluye que el  $\det(e^{tA}) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Como todas las columnas de la matriz  $e^{tA}$  son soluciones del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  y el  $\det(e^{tA}) \neq 0$  se puede concluir que  $e^{tA}$  es una matriz fundamental de soluciones del sistema (2.4) y, por ende, la solución general de dicho sistema es  $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$ , con  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$  un vector arbitrario de dos componentes.

**Nota:**  $c_1$  y  $c_2$ , componentes de  $\mathbf{c}$  quedan determinadas una vez se especifican las condiciones iniciales.

---

<sup>5</sup>Demostración en Apóstol (2002, p. 244).

**Definición 2.2.3(Problema de Valor Inicial):** Un problema de valor inicial para el sistema (2.4) es un problema de la forma:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{b} \quad (2.8)$$

donde

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

con  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 2.2.3(Existencia y Unicidad de las Soluciones)**<sup>6</sup>: Sean  $A$  la matriz cuadrada, de tamaño  $2 \times 2$ , asociada al sistema de ecuaciones diferenciales y  $\mathbf{b}$  un vector cuyas componentes constantes corresponden a las condiciones iniciales del mismo, entonces:

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\mathbf{b}$$

es la única solución del problema (2.8) con condiciones iniciales.

A continuación, se abordará en primer lugar la definición, cálculo y clasificación de los autovalores y autovectores asociados a la matriz  $A$  del sistema (2.4). Posteriormente, se hallará la forma de la solución general del sistema atendiendo a la clasificación de dichos autovalores y se determinará el comportamiento de las soluciones alrededor de los puntos de equilibrio a partir del tipo de autovalor y su signo. Es importante aclarar que la clasificación de autovalores que se presentará se da cuando el sistema (2.4) es No Degenerado, caso que es de interés en el desarrollo de este trabajo.

**Definición 2.2.4(Autovector o Vector Propio):** Un vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  no nulo se dice que es un **autovector** de la matriz  $A$  si existe un número real o complejo  $\lambda$  tal que:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (2.9)$$

el número  $\lambda$  se denomina autovalor de la matriz  $A$  asociado al vector  $\mathbf{v}$ .

De (2.9), haciendo uso de propiedades del álgebra matricial, se tiene que:

$$A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

como  $\mathbf{v} = I\mathbf{v}$ , reemplazando en (2.10)

$$A\mathbf{v} - \lambda(I\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

si se hace

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

---

<sup>6</sup>Demostración en Apóstol (2002, p. 273).



entonces (2.11) es igual a

$$(a_1 - \lambda)v_1 + a_2v_2 = \mathbf{0}$$

$$a_3v_1 + (a_4 - \lambda)v_2 = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

De aquí se puede afirmar que (2.12) es un sistema homogéneo de dos ecuaciones algebraicas lineales con dos incógnitas, donde no es posible la solución trivial  $v_1 = 0, v_2 = 0$  dado que  $\mathbf{v}$  debe ser un vector no nulo. Sin embargo, del álgebra lineal se sabe que (2.11) tiene una solución no trivial si y solo si

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.13)$$

Al desarrollar la **ecuación característica** de  $A$ , es decir, (2.13), se tiene como resultado un polinomio en  $\lambda$  de grado dos, denominado **polinomio característico** de  $A$ .

Además, se tiene que si  $\mathbf{v}$  es un autovector correspondiente al autovalor  $\lambda$ , entonces cualquier múltiplo escalar  $c\mathbf{v}$  también es un autovector para  $\lambda$ . Para conocer si esta afirmación es verdadera, se verificará que  $A(c\mathbf{v}) = \lambda(c\mathbf{v})$ , así que, se parte de:

$$A(c\mathbf{v})$$

de aquí, haciendo uso de propiedades de las matrices se tiene:

$$A(c\mathbf{v}) = c(A\mathbf{v})$$

como  $\mathbf{v}$  es un autovector del autovalor  $\lambda$ , por (2.9) se cumple que:

$$c(A\mathbf{v}) = c(\lambda\mathbf{v})$$

Ahora, usando la propiedad asociativa de la multiplicación escalar de matrices y la propiedad conmutativa de la multiplicación de números reales:

$$c(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(c\mathbf{v})$$

por transitividad:

$$A(c\mathbf{v}) = \lambda(c\mathbf{v})$$

Por definición de autovector se puede afirmar que  $c\mathbf{v}$  también es un autovector asociado a  $\lambda$ . Por ende, dado un autovector  $\mathbf{v}$  para el autovalor  $\lambda$ , la línea entera de vectores que pasa por  $\mathbf{v}$  y el origen también son autovectores para  $\lambda$  y se denominan **línea de autovectores** de  $\lambda$ .

**Nota:** A partir de la ecuación (2.11) se calculan los autovectores correspondientes al autovalor  $\lambda$ .

**Definición 2.2.5 (Autovalor o Valor Propio):**  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  si y solo si

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.14)$$

en otras palabras, los autovalores de  $A$  son las raíces de la ecuación característica.

**Nota:** Contando multiplicidades algebraicas, toda matriz de tamaño  $n \times n$  tiene exactamente  $n$  valores propios, reales o complejos. En este caso los autovalores de la matriz  $A$  son dos.

Una vez conocido qué son y cómo se calculan los autovalores de la matriz  $A$  y los autovectores asociados a dichos autovalores, se dará a conocer cómo se clasifican los autovalores para posteriormente determinar la solución general de un SPALH y comprender el comportamiento de los distintos tipos de soluciones de este sistema, ligado a dicha clasificación. Cabe aclarar que, tal y como se expresó al inicio de este capítulo, la teoría que no sustenta el estudio de los tres modelos de guerra se encuentra en el *anexo A*, por lo que a pesar de que se dé a conocer cómo se clasifican los autovalores, aquí solamente se profundizará en los autovalores reales distintos, en particular, en los que son de signos opuestos.

### Clasificación de los Autovalores

Reescribiendo 2.14 se tiene:

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0$$

donde  $tr(A) = a_1 + a_4$  corresponde a la **traza** de la matriz  $A$ . Sus soluciones son:

$$\frac{1}{2} \left( tr(A) \pm \sqrt{(tr(A))^2 - 4 det(A)} \right)$$

A partir de esto caben tres posibilidades asociadas al signo del discriminante  $d$ .

$$d = (tr(A))^2 - 4 det(A)$$

- Si  $d > 0$  existen dos raíces reales distintas ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) y se denominan **Autovalores Reales Distintos**.
- Si  $d = 0$  existe una raíz doble real ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ) y se denominan **Autovalores Reales Dobles**.
- Si  $d < 0$  existen dos raíces complejas conjugadas ( $\lambda = a \pm ib$ ) y se denominan **Autovalores Complejos**.

**Autovalores reales distintos.** Haciendo uso de conceptos del álgebra lineal se sabe que si la matriz  $A$  cuadrada, en este caso de tamaño  $2 \times 2$ , tiene dos autovalores reales distintos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , cada uno con multiplicidad algebraica y geométrica uno, es decir, que los autovectores asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son linealmente independientes, entonces se puede afirmar que  $A$  es diagonalizable. Por definición de matriz diagonalizable existe la matriz diagonal  $D$  de tamaño  $2 \times 2$  semejante a la matriz  $A$ , definida como:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Si  $V$  es una matriz cuyas columnas son autovectores linealmente independientes de  $A$ , entonces:

$$D = V^{-1}AV$$

Antes de continuar, se demostrará, utilizando inducción matemática, que  $A^n = VD^nV^{-1}$ , donde  $D$  es semejante a  $A$ .

**Demostración:**

■ **Para  $n = 1$**

Por definición de semejanza de matrices

$$D = V^{-1}AV$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por  $V$ , a izquierda, y por  $V^{-1}$ . a derecha, se tiene:

$$VD = VV^{-1}AV$$

$$VD = AV$$

$$A = VDV^{-1}$$

Por tanto, se satisface la igualdad para  $n = 1$ .

■ **Hipótesis de Inducción**

Se supone válido para  $n = k$ , es decir:

$$A^k = VD^kV^{-1}$$

■ **Se prueba para  $n = k + 1$ :**

Por hipótesis de inducción  $A^k = VD^kV^{-1}$ . Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por  $A$ , a derecha, se tiene:

$$A^k A = VD^kV^{-1}A$$

$$A^{k+1} = VD^kV^{-1}(VDV^{-1})$$

$$A^{k+1} = VD^k(V^{-1}V)DV^{-1}$$

$$A^{k+1} = V(D^kD)V^{-1}$$

$$A^{k+1} = VD^{k+1}V^{-1}$$

Por ende, para todo  $n$  se cumple que:

$$A^n = VD^nV^{-1}$$

Considerando el resultado anterior, de (2.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I_2 + t(VDV^{-1}) + \frac{t^2(VD^2V^{-1})}{2!} + \frac{t^3(VD^3V^{-1})}{3!} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k(VD^kV^{-1})}{k!} \\ &= V \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!} \right) V^{-1} \end{aligned}$$

De aquí se puede afirmar que:

$$e^{tA} = Ve^{tD}V^{-1} \quad (2.15)$$

Por otro lado, se sabe que  $e^{tA}$  es una matriz fundamental de soluciones del sistema (2.4), pero no es la única ya que lo que se necesita para hallar una matriz de estas es un conjunto fundamental de soluciones. Una forma de obtenerla es, en este caso, a partir de dos vectores  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$  linealmente independientes (autovectores asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  respectivamente). Por lo tanto:

$$e^{tAV}$$

Con  $V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$ , es también una matriz fundamental de soluciones <sup>7</sup> del sistema (2.4).

Ahora, multiplicando a derecha por  $V$  cada miembro de la ecuación (2.15) se tiene:

$$e^{tAV} = (Ve^{tD}V^{-1})V$$

$$e^{tAV} = Ve^{tD}(V^{-1}V)$$

$$e^{tAV} = Ve^{tD}$$

desarrollando lo anterior se tiene:

$$e^{tAV} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

$$e^{tAV} = \begin{pmatrix} v_{11}e^{\lambda_1 t} & v_{12}e^{\lambda_2 t} \\ v_{21}e^{\lambda_1 t} & v_{22}e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

Por definición de matriz fundamental de soluciones

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 \quad y \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$$

forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema (2.4) y, por tanto, la solución general de un SPALH cuando la matriz  $A$  tiene autovalores reales distintos es:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 \quad (2.16)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias.

---

<sup>7</sup>Demostración en Walter (1998, p. 176).

Estas dos soluciones,  $\mathbf{x}_1(t)$  y  $\mathbf{x}_2(t)$ , se denominan soluciones de línea recta, las cuales se encuentran en el plano de fases sobre dos rectas distinguidas, en donde sus trayectorias se dirigen hacia el punto  $(0, 0)$  si  $\lambda < 0$  y en caso contrario, es decir,  $\lambda > 0$  se alejan en forma directa del origen.

**Ejemplo 2.2.1.**<sup>8</sup> Sea el sistema plano autónomo lineal homogéneo

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

En primer lugar, se calcularán los autovalores y autovectores asociados a la matriz  $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , para ello se hará uso de las ecuaciones (2.13) y (2.11) respectivamente.

$$\det \left( \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0$$

De aquí se puede concluir que los autovalores de la matriz  $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  son  $\lambda_1 = 4$  y  $\lambda_2 = 1$ . Ahora se hallará un autovector asociado a cada autovalor. Para  $\lambda_1 = 4$  el autovector se halla a partir de la siguiente ecuación:

$$\left( \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2v_{11} + 2v_{21} \\ v_{11} - v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

como

$$-2v_{11} + 2v_{21} = 0$$

$$v_{11} - v_{21} = 0$$

son ecuaciones redundantes entonces tomando la segunda ecuación se puede concluir que

---

<sup>8</sup>Tomado de Blanchard, Devaney y Hall (1998, p. 258)

$$v_{11} = v_{21}$$

Es decir que todo vector en el que sus componentes son iguales es un autovector asociado a  $\lambda_1 = 4$ , así que, sin pérdida de generalidad, se considerará  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Ahora para hallar el autovector  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$  asociado al autovalor  $\lambda_2 = 1$  se realiza un procedimiento análogo al ya descrito de donde se obtienen las siguientes ecuaciones redundantes:

$$v_{12} + 2v_{22} = 0$$

$$v_{12} + 2v_{22} = 0$$

De aquí

$$v_{12} = -2v_{22}$$

Es decir que todo vector en donde la primera componente es el opuesto aditivo del doble de la segunda componente es un autovector asociado a  $\lambda_2 = 1$ , sin pérdida de generalidad se considerará en este caso  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Como ya se conocen los autovalores y autovectores asociados a dichos valores propios se reemplazan estos en la ecuación (2.16) para determinar la solución general del sistema dado.

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego de hallar la solución general se grafica el campo de direcciones el cual se muestra en la siguiente figura.

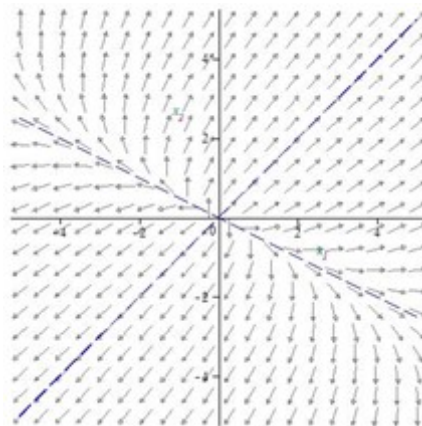


Figura 2.1: Campo de direcciones, nulclinales y línea de autovectores ejemplo 2.2.1.

En este campo las nulclinales coinciden con los ejes, dividiendo el plano en cuatro regiones correspondientes a cada uno de los cuadrantes. Adicionalmente, se distinguen dos líneas de autovectores, la línea de autovectores que se encuentra en el primer y tercer cuadrante corresponde al autovalor  $\lambda_1$  y la que se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante es la asociada al autovalor  $\lambda_2$ . En el campo de direcciones junto con el plano de fases (figura 2.2)

se comprueba lo expuesto previo al ejemplo respecto a que la trayectoria de una solución de línea recta se aleja del origen si el autovalor correspondiente es mayor a cero, en este caso como los dos autovalores son positivos, entonces, como se observa en esta figura, las trayectorias de las dos soluciones de línea recta se alejan del punto de equilibrio.

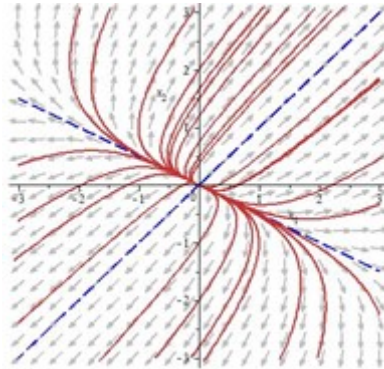


Figura 2.2: *Campo de direcciones, líneas de autovectores y diagrama de fases ejemplo 2.2.1.*

En este apartado se han identificado dos soluciones particulares que se presentan en los SPALH con dos autovalores reales distintos, denominadas soluciones de línea recta, en donde el signo de los autovalores es significativo para predecir el comportamiento de las correspondientes soluciones de este tipo, ya que estas soluciones se encuentran sobre la línea de autovectores asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  respectivamente; cabe resaltar que el conocer el comportamiento de esta clase de soluciones, que está dada por el signo de los autovalores, permitirá predecir y comprender el comportamiento de las demás soluciones de un sistema de este tipo, lo cual abordaremos a continuación.

Como se mencionó en las generalidades, los SPA presentan tres tipos de curvas solución, en el caso de SPALH con autovalores reales distintos de la matriz  $A$ , se tienen puntos de equilibrio y curvas abiertas simples. Si los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  tienen signos opuestos ( $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ), el origen, es decir, el punto de equilibrio del SPALH, es un **punto de silla** (figura 2.3).

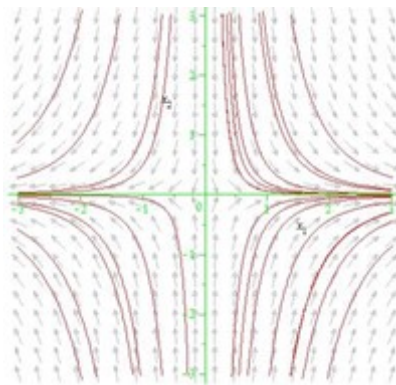


Figura 2.3: *Ejemplo gráfico de un punto de silla.*

Las dos semirrectas que, junto con el origen, componen el autoespacio  $E(\lambda_1)$  son trayectorias que se acercan al origen cuando  $t \rightarrow \infty$  mientras que las que componen  $E(\lambda_2)$  se alejan de él. Las demás trayectorias son curvas de aspecto hiperbólico que se acercan asintóticamente a  $E(\lambda_2)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y a  $E(\lambda_1)$   $t \rightarrow -\infty$ . **Todo punto de silla es inestable.**

Luego de realizar el tratamiento analítico y cualitativo de las soluciones del sistema (2.4) ligado a los autovalores reales distintos (de signos opuestos) de la matriz  $A$ , es importante resaltar que el comportamiento a largo plazo de las soluciones puede determinarse, como ya se mencionó, a partir del signo de cada autovalor de  $A$ , ya que si  $\lambda > 0$  las trayectorias de las soluciones que comparten región con la solución de línea recta que se encuentra sobre la línea de autovectores asociada a dicho autovalor se alejan del punto de equilibrio, en caso contrario, las curvas solución que se encuentran en la misma región que la solución de línea recta ubicada sobre la línea de autovectores asociada a  $\lambda < 0$  tienden al origen; esta afirmación se puede ratificar con la teoría complementaria presentada en el *anexo A*.



## Análisis de los Modelos

En el presente capítulo se realiza el análisis de los modelos de guerra de Lanchester y de Deitchman. Inicialmente se calculan las soluciones analíticas de cada modelo, pese al carácter no lineal de dos de los sistemas. Para el caso del modelo fuego directo se grafican sus soluciones en GeoGebra con el objetivo de deducir, desde el estudio de casos particulares y la observación, la relación que existe entre los coeficientes de aniquilamiento, el número de efectivos y el resultado del combate. Para los dos modelos restantes no se desarrolla el mismo procedimiento, sino que se propone directamente una demostración de dicha relación.

Adicionalmente, se realiza el tratamiento cualitativo de cada modelo, en el cual la estabilidad del punto de equilibrio del modelo fuego directo se determina recurriendo a la teoría expuesta en el capítulo 2, mientras que la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas correspondientes a los modelos fuego en área y guerra de guerrillas, por ser SPANLH Degenerados, se asume desde la observación de su respectivo campo de direcciones.

El análisis de cada modelo finaliza con la verificación del principio de concentración, estudiando inicialmente casos particulares, para posteriormente presentar una demostración formal.

### 3.1. Modelo Fuego Directo

Como se mencionó en el primer capítulo, en este tipo de enfrentamiento la tasa de pérdida de efectivos de un bando es directamente proporcional al número de efectivos en el bando opuesto. Las ecuaciones que componen el sistema son:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1 \end{cases}$$

Tomando  $x_1(0) = x_{10}$  y  $x_2(0) = x_{20}$ , como el número de efectivos al inicio del combate de los ejércitos  $X_1$  y  $X_2$  respectivamente. Se puede notar que este es un SPALH.

Se sabe que las variables de estado permiten describir el comportamiento de un sistema en un determinado instante de tiempo  $t$ . En este caso, las ecuaciones que componen este

sistema involucran variables de estado,  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , que representan el número de efectivos en un momento dado durante el enfrentamiento.

Para determinar las variables de estado sujetas a las condiciones iniciales, en primer lugar, se calcula la solución general del sistema, para ello, considerando lo expuesto en el capítulo 2, se determina el tipo de autovalores asociados a la matriz de coeficientes constantes del sistema, para conocer la estructura de su solución general.

El sistema escrito en forma matricial es:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

La ecuación característica asociada a la matriz de coeficientes constantes del sistema es:

$$\lambda^2 - \alpha\beta = 0$$

A partir de la ecuación anterior se puede afirmar que los autovalores de la matriz son  $\lambda_1 = \sqrt{\alpha\beta}$  y  $\lambda_2 = -\sqrt{\alpha\beta}$ , los cuales tienen asociados los siguientes autovectores:

- Para  $\lambda_1$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha\beta} & -\alpha \\ -\beta & -\sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha\beta} & -\alpha \\ -\beta & -\sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\sqrt{\alpha\beta}v_{11} - \alpha v_{21} = 0$$

$$-\beta v_{11} - \sqrt{\alpha\beta}v_{21} = 0$$

como estas ecuaciones son redundantes, tomando la primera se tiene que:

$$-\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}v_{11} = v_{21}$$

Tomando  $v_{11} = 1$  un autovector correspondiente a  $\lambda_1$  es:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \end{pmatrix}$$

- Para  $\lambda_2$

De manera análoga se determina que un autovector asociado a  $\lambda_2$  es:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \end{pmatrix}$$

Dado que  $\alpha$  y  $\beta$  son números reales positivos,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se clasifican como autovalores reales distintos de signos opuestos y los autovectores asociados a cada autovalor son linealmente independientes, la solución general del sistema es:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\sqrt{\alpha\beta}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \end{pmatrix} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \end{pmatrix}$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias que quedan determinadas una vez se especifican las condiciones iniciales.

A partir de la solución general se puede afirmar que las variables de estado son:

$$x_1(t) = c_1 e^{\sqrt{\alpha\beta}t} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}$$

$$x_2(t) = c_1 e^{\sqrt{\alpha\beta}t} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \end{pmatrix} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \end{pmatrix}$$

Para determinar  $c_1$  y  $c_2$  se toma  $t = 0$  :

$$x_1(0) = c_1 + c_2$$

$$x_2(0) = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \end{pmatrix}$$

Considerando las condiciones iniciales

$$x_{1_0} = c_1 + c_2$$

$$x_{2_0} = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \end{pmatrix}$$

de donde:

$$c_1 = \frac{1}{2} \left( x_{1_0} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \left( x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right)$$

Por tanto, las variables de estado sujetas a las condiciones iniciales son:

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \left( x_{1_0} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) e^{\sqrt{\alpha\beta}t} + \frac{1}{2} \left( x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \quad (3.1)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \left( x_{1_0} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) e^{\sqrt{\alpha\beta}t} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left( x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

A partir de estas soluciones es posible determinar el tiempo en el que finaliza el combate, para ello se debe tener presente la condición de terminación del combate, que para este caso se considera simple y poco realista si se atiende a la evidencia histórica, y es que cada ejército luchará hasta que uno de los dos es aniquilado (o los dos en caso de empate). Matemáticamente, esto significa que, una de las tres situaciones siguientes se presentará al finalizar el enfrentamiento.

Considérense<sup>1</sup>  $x_1(t_f) = x_{1_f}$  y  $x_2(t_f) = x_{2_f}$ :

1.  $X_1$  gana, es decir,  $x_{1_f} > 0$  y  $x_{2_f} = 0$ .

2.  $X_2$  gana, es decir,  $x_{2_f} > 0$  y  $x_{1_f} = 0$ .

3. Empate, es decir,  $x_{1_f} = 0$  y  $x_{2_f} = 0$

- Para determinar el tiempo de duración del combate cuando  $X_1$  gana se toma en (3.2)  $x_2(t_f) = 0$ .

$$0 = \frac{1}{2} \left( x_{1_0} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) e^{\sqrt{\alpha\beta}t_f} \left( -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right) + \frac{1}{2} \left( x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t_f} \left( \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right)$$

$$0 = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\alpha\beta}t_f} \left( \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right) \left[ - \left( x_{1_0} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) e^{2\sqrt{\alpha\beta}t_f} + \left( x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) \right]$$

$$0 = - \left( x_{1_0} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) e^{2\sqrt{\alpha\beta}t_f} + \left( x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right)$$

$$\left( x_{1_0} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) e^{2\sqrt{\alpha\beta}t_f} = \left( x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right)$$

$$e^{2\sqrt{\alpha\beta}t_f} = \frac{x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0}}{x_{1_0} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0}}$$

$$2\sqrt{\alpha\beta}t_f = \ln \left| \frac{x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0}}{x_{1_0} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0}} \right|$$

$$t_f = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \ln \left| \frac{x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0}}{x_{1_0} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0}} \right| \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>Esta notación se tendrá en cuenta a lo largo del documento.

- Para determinar el tiempo de duración del enfrentamiento cuando  $X_2$  gana se toma en (3.1)  $x_1(t_f) = 0$ .

$$0 = \frac{1}{2} \left( x_{1_0} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) e^{\sqrt{\alpha\beta}t_f} + \frac{1}{2} \left( x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t_f}$$

Realizando un procedimiento análogo al anterior se obtiene:

$$t_f = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \ln \left| \frac{-x_{1_0} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0}}{x_{1_0} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0}} \right| \quad (3.4)$$

Nótese que en este caso es posible determinar el tiempo de duración de la batalla cuando cualquiera de los dos ejércitos gana con (3.3) y (3.4) dado que estas expresiones son equivalentes.

Cuando el enfrentamiento finaliza en empate el primer término de (3.1) y (3.2) es cero dado que como afirma Lepingwell (1987) las fuerzas combativas iniciales de cada ejército son iguales, quedando reducidas las variables de estado a:

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \left( x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \quad (3.5)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \left( x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \left( \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right) \quad (3.6)$$

Tanto (3.5) como (3.6) presentan asíntotas horizontales en  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$  respectivamente, por lo que no es posible determinar de manera exacta el tiempo de duración del combate. En caso de que se quiera conocer el tiempo que ha transcurrido desde el inicio del combate a partir del número de efectivos que conserva cada ejército, se igualan (3.5) y (3.6) a  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente, que representan el pie de fuerza que mantiene cada ejército en el instante de tiempo que se desea conocer.

- Para  $X_1$

$$m_1 = \frac{1}{2} \left( x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}$$

$$e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} = \frac{2m_1}{x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0}}$$

$$-\sqrt{\alpha\beta}t = \ln \left| \frac{2m_1}{x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0}} \right|$$

$$t = -\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \left| \frac{2m_1}{x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0}} \right|$$

- Para  $X_2$

Realizando un procedimiento análogo se tiene:

$$m_2 = \frac{1}{2} \left( x_{1_0} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{2_0} \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} \left( \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right)$$

$$t = -\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \left| \frac{2\sqrt{\alpha}m_2}{\sqrt{\beta}x_{1_0} + \sqrt{\alpha}x_{2_0}} \right|$$

Ahora, considerando que a lo largo de su formación académica los autores de esta monografía evidenciaron que a través de la observación y del estudio de casos particulares es posible deducir algunas propiedades matemáticas, a continuación, se desarrolla una exploración gráfica que tiene como objetivo principal deducir la relación entre las fuerzas combativas de los ejércitos  $X_1$  y  $X_2$  que según Lepingwell (1987) permite determinar el ganador del combate bajo este modelo.

Con ayuda del software GeoGebra se grafican algunas situaciones variando los coeficientes de aniquilamiento en el intervalo  $(0, 1]$  y la cantidad inicial de efectivos de cada ejército. Cabe aclarar que los coeficientes de aniquilamiento se toman en el intervalo mencionado con el fin de facilitar la exploración. Se considera importante no tomar cantidades de efectivos al azar para iniciar la exploración gráfica, sino relacionar las cantidades de efectivos de cada ejército ya que esto permite identificar un patrón con mayor facilidad, así que para el primer caso se tiene que el pie de fuerza inicial de  $X_1$  es el doble de la cantidad inicial de efectivos del ejército  $X_2$ , es decir,  $x_{1_0} = 2x_{2_0}$  y para el segundo caso se supone  $x_{1_0} = 3x_{2_0}$ . Para cada situación, inicialmente se fija el valor de  $\beta$  y, se varía el valor del coeficiente de aniquilamiento de  $X_2$  con el fin de identificar el valor que debe tomar este parámetro para que se dé el empate y, a partir de esto, conocer las condiciones en las que cada ejército pueda ganar al aumentar o disminuir el valor de  $\alpha$ .

Es importante resaltar que no se considera el caso trivial en el que los dos ejércitos inician con el mismo número de efectivos, dado que en este caso el empate solo se da si los coeficientes de aniquilamiento son iguales y el ganador será quien tenga mayor coeficiente de aniquilamiento.

Para el primer caso se inicia tomando  $x_{1_0} = 500$ ,  $x_{2_0} = 250$  y  $\beta = 0,25$  y se varía el valor de  $\alpha$  hasta que el enfrentamiento quede en empate. Con dichos datos se obtuvo que el resultado del enfrentamiento es empate cuando  $\alpha = 1$ , tal y como se ilustra en la figura (3.1).

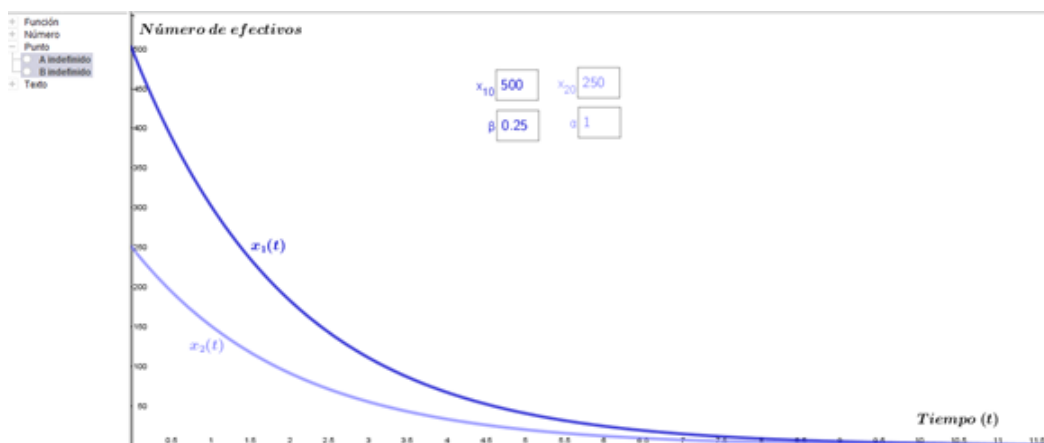


Figura 3.1: Situación de empate bajo el modelo fuego directo cuando  $x_{10} = 500$ ,  $x_{20} = 250$ ,  $\beta = 0,25$  y  $\alpha = 1$ .

En la gráfica se observan dos curvas, de forma logarítmica, que se acercan al eje del tiempo, pero sin intersectarlo ya que los puntos  $A$  y  $B$  que corresponden a dichas intersecciones son indefinidos, dando la idea de que el combate se prolonga indefinidamente. Sin embargo, como la cantidad de efectivos de cada bando es finita finaliza cuando los dos ejércitos son aniquilados.

En la tabla (3.1) se encuentran resultados de empate al fijar los valores de las condiciones iniciales y de  $\beta$ , y al variar el parámetro  $\alpha$ .

$x_{10} = 2x_{20}$			
$x_{10}$	$\beta$	$x_{20}$	$\alpha$
500	0,25	250	1
400	0,05	200	0,2
300	0,1	150	0,4
100	0,2	50	0,8

Tabla 3.1: Registro de situaciones en las que el combate finaliza en empate cuando  $X_1$  cuenta con el doble de efectivos inicial que  $X_2$ .

De la tabla anterior se presume que para que el resultado del enfrentamiento sea empate cuando la cantidad inicial de efectivos de un ejército es el **doble** de la cantidad de su oponente, el coeficiente de aniquilamiento del bando que tiene mayor pie de fuerza debe ser la **cuarta** parte del coeficiente de su contrincante.

A partir de los valores de empate, se aumenta y disminuye el valor de  $\alpha$  para conocer en qué condiciones gana cada fuerza. Para ilustrar gráficamente se toman los valores de la fila 3 de la tabla (3.1). En la figura (3.2) se observa que al variar a  $\alpha$  en el intervalo  $(0, 0,4)$  el ejército  $X_2$  finaliza el combate con cero efectivos, lo que significa que en este caso  $X_1$  es el ganador del combate cuando  $\alpha < 0,4$ . En la figura (3.3) se ilustra el caso opuesto al de la figura (3.2), es decir que bajo los valores de las condiciones iniciales y del coeficiente de aniquilamiento de  $X_1$  de la fila 3 de la tabla (3.1),  $X_2$  es el ganador del enfrentamiento siempre y cuando  $\alpha \in (0,4, 1]$ .

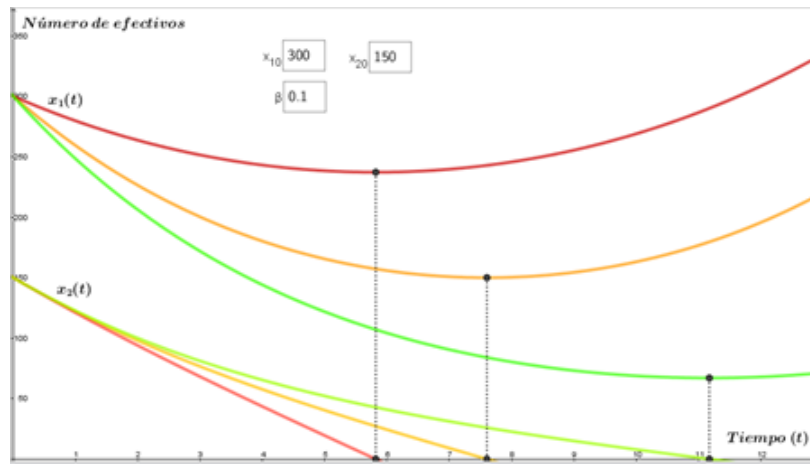


Figura 3.2: Situaciones en las que  $X_1$  gana al variar  $\alpha$  en el intervalo  $(0, 0.4)$  fijando  $x_{10}, x_{20}$  y  $\beta$ .

En la figura (3.2) se ilustran tres enfrentamientos obtenidos al variar el valor de  $\alpha$  en el intervalo  $(0, 0.4)$ . En estos enfrentamientos el ejército ganador es  $X_1$  y el número de efectivos de cada ejército al finalizar el combate está determinado por los puntos sobre cada una de las curvas. Considerando las características de los enfrentamientos que son susceptibles de ser modelados bajo este sistema, la cantidad de efectivos que llega a tener  $X_1$  luego de finalizado el combate no deben ser tenidos en cuenta.

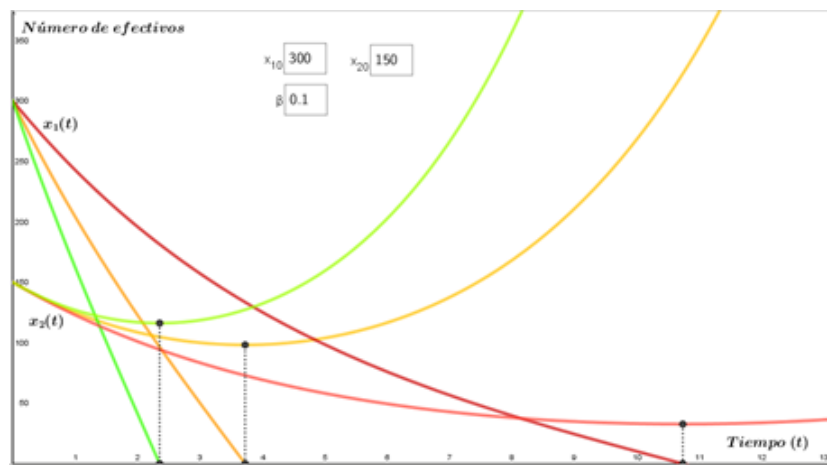


Figura 3.3: Situaciones en las que gana  $X_2$  al variar  $\alpha$  en el intervalo  $(0.4, 1]$  fijando  $x_{10}, x_{20}$  y  $\beta$ .

En la figura (3.3) se ilustran tres enfrentamientos obtenidos al variar el valor de  $\alpha$  en el intervalo  $(0.4, 1]$ . En estos enfrentamientos el ejército ganador es  $X_2$  y el número de efectivos de cada ejército al finalizar el combate está determinado por los puntos sobre cada una de las curvas. Considerando las características de los enfrentamientos que son susceptibles de ser modelados bajo este sistema, la cantidad de efectivos que llega a tener  $X_2$  luego de finalizado el combate no deben ser tenidos en cuenta.

En la tabla (3.2) se registran los resultados de las batallas al variar  $\alpha$ , asociados a los datos presentados en la tabla (3.1).



$x_{1_0} = 2x_{2_0}$				
$x_{1_0}$	$\beta$	$x_{2_0}$	$\alpha$	Ganador
500	0,25	250	$\alpha < 1$	Ejército $X_1$
400	0,05	200	$\alpha < 0,2$	Ejército $X_1$
400	0,05	200	$\alpha > 0,2$	Ejército $X_2$
300	0,1	150	$\alpha < 0,4$	Ejército $X_1$
300	0,1	150	$\alpha > 0,4$	Ejército $X_2$
100	0,2	50	$\alpha < 0,8$	Ejército $X_1$
100	0,2	50	$\alpha > 0,8$	Ejército $X_2$

Tabla 3.2: Variación del valor del parámetro  $\alpha$  para determinar el ejército ganador del combate, a partir de las condiciones de empate.

Atendiendo a los datos registrados en las tablas (3.1) y (3.2), se supone que dado  $x_{1_0} = 2x_{2_0}$ ,

- Si  $\beta = \frac{\alpha}{4}$ , entonces hay empate.
- Si  $\beta < \frac{\alpha}{4}$ , entonces el ejército  $X_2$  gana el combate.
- Si  $\beta > \frac{\alpha}{4}$ , entonces el ejército  $X_1$  gana el enfrentamiento.

Ahora, se considerarán las situaciones en las que el pie de fuerza inicial de un ejército sea el triple de la cantidad inicial de efectivos de su oponente y se realiza un tratamiento de los datos análogo al anterior.

$x_{1_0} = 3x_{2_0}$				
$x_{1_0}$	$\beta$	$x_{2_0}$	$\alpha$	
75	0,1	25	0,9	
150	0,01	50	0,09	

Tabla 3.3: Registro de situaciones en las que el combate finaliza en empate cuando  $X_1$  tiene el triple de efectivos que  $X_2$ .

Dado las condiciones de construcción en GeoGebra, al variar los parámetros mediante el deslizador, no se hallaron otros valores de los coeficientes de aniquilamiento para los cuales se dé el empate, sin embargo, como se observa en los dos casos expuestos en la tabla (3.3),  $\beta = \frac{\alpha}{9}$ , así que se ingresa de manera manual en GeoGebra datos en los que se satisface esta condición para determinar si siempre en caso de empate se tiene esta relación entre los coeficientes (tabla 3.4).

$x_{1_0} = 3x_{2_0}$				
$x_{1_0}$	$\beta$	$x_{2_0}$	$\alpha$	Empate
900	0,0 $\bar{5}$	300	0,5	
855	0,0 $\bar{8}$	285	0,8	

Tabla 3.4: Registro de situaciones en las que el combate finaliza en empate al ingresar manualmente valores para los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

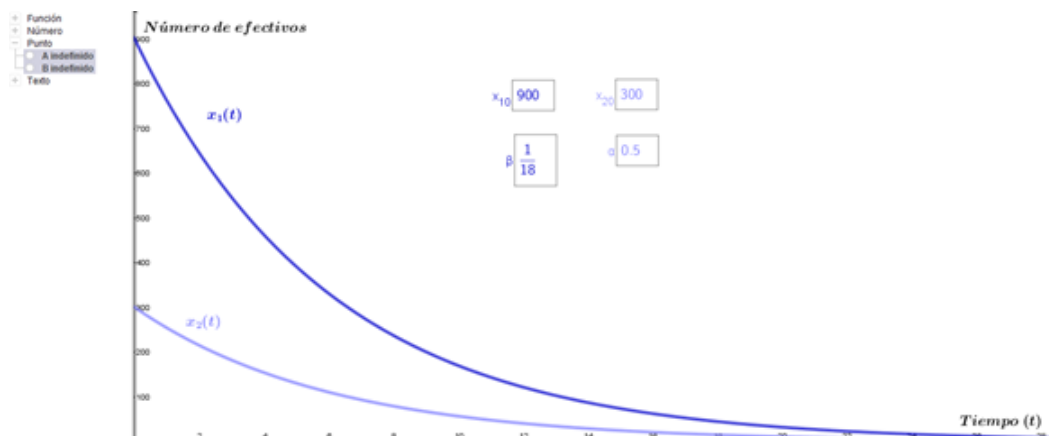


Figura 3.4: Soluciones del sistema al considerar los datos de la fila 1 de la tabla (3.4).

Observando los datos de las tablas (3.3) y (3.4) se infiere que cuando la cantidad inicial de efectivos de un ejército es el **triple** de la cantidad de su oponente y su coeficiente de aniquilamiento es la **novena** parte del coeficiente de su contrincante, el combate finaliza en empate.

Al variar en GeoGebra el valor de  $\alpha$  a partir de los datos registrados en las tablas (3.3) y (3.4), tal y como se realizó en el caso anterior en la tabla (3.2), se prevé que dado  $x_{10} = 3x_{20}$ ,

- Si  $\beta = \frac{\alpha}{9}$ , entonces hay empate.
- Si  $\beta < \frac{\alpha}{9}$ , entonces el ejército  $X_2$  gana el combate.
- Si  $\beta > \frac{\alpha}{9}$ , entonces el ejército  $X_1$  gana el enfrentamiento.

A partir de los resultados anteriores se construye la siguiente hipótesis:

Dado  $x_{10} = kx_{20}$ , con  $k \in \mathbb{Q}^+$

- Si  $\beta = \frac{\alpha}{k^2}$ , entonces hay empate.
- Si  $\beta < \frac{\alpha}{k^2}$ , entonces el ejército  $X_2$  gana el combate.
- Si  $\beta > \frac{\alpha}{k^2}$ , entonces el ejército  $X_1$  gana el enfrentamiento.

Nótese que, si se dejan las expresiones anteriores en términos de las condiciones iniciales, es decir, se hace  $k = \frac{x_{10}}{x_{20}}$  se tiene que:

1. Si la fuerza combativa inicial del ejército  $X_1$  es mayor que la de  $X_2$ ,  $\beta x_{10}^2 > \alpha x_{20}^2$ , el ejército  $X_1$  es el ganador del combate.
2. Si la fuerza combativa inicial de  $X_2$  es mayor que la del ejército  $X_1$ ,  $\beta x_{10}^2 < \alpha x_{20}^2$ , el ejército  $X_2$  es el ganador del enfrentamiento.
3. Si las fuerzas combativas iniciales de cada bando son iguales,  $\beta x_{10}^2 = \alpha x_{20}^2$ , el resultado del enfrentamiento es empate.

Lo que coincide con lo expresado por Lepingwell (1987).

Considerando que en ninguno de los documentos consultados se registra una justificación matemática de la afirmación realizada por Lepingwell (1987), a continuación, se propone una demostración que se apoya en la ecuación de las trayectorias.

La ecuación de las trayectorias está dada por:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\beta x_1}{\alpha x_2}$$

La cual corresponde a una ecuación diferencial ordinaria que se puede resolver por el método de separación de variables.

$$\beta \int_{x_{10}}^{x_1} x_1 dx_1 = \alpha \int_{x_{20}}^{x_2} x_2 dx_2$$

$$\beta(x_{10}^2 - x_1^2) = \alpha(x_{20}^2 - x_2^2)$$

Dejando los términos constantes al lado derecho de la igualdad <sup>2</sup> se tiene:

$$\beta x_1^2 - \alpha x_2^2 = \beta x_{10}^2 - \alpha x_{20}^2 \quad (3.7)$$

Nótese que la diferencia entre las fuerzas combativas de  $X_1$  y  $X_2$  es constante a lo largo del tiempo e igual a la diferencia entre las fuerzas combativas iniciales.

Se quiere probar que: Dado un enfrentamiento bajo fuego directo entre dos fuerzas homogéneas,

1. Si  $\beta x_{10}^2 > \alpha x_{20}^2$  entonces  $X_1$  será el ganador del enfrentamiento.
2. Si  $\beta x_{10}^2 < \alpha x_{20}^2$  entonces  $X_2$  será el ganador del enfrentamiento.
3. Si  $\beta x_{10}^2 = \alpha x_{20}^2$  entonces el enfrentamiento finaliza en empate.

#### **Demostración:**

- **Ítem 1:** Si  $\beta x_{10}^2 > \alpha x_{20}^2$  entonces  $X_1$  será el ganador del enfrentamiento.

Asumiendo que  $\beta x_{10}^2 > \alpha x_{20}^2$  se puede afirmar que:

$$\beta x_{10}^2 - \alpha x_{20}^2 > 0$$

Considerando la desigualdad anterior y (3.7) se tiene:

$$\beta x_1^2 > \alpha x_2^2 \quad (3.8)$$

A partir de (3.8) se puede afirmar que la fuerza combativa de  $X_1$  es mayor que la fuerza combativa de  $X_2$  en cualquier instante de tiempo durante la batalla, particularmente se tiene:

$$\beta x_{1f}^2 > \alpha x_{2f}^2 \quad (3.9)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se estudian las tres posibles situaciones que se pueden dar al finalizar el combate:

---

<sup>2</sup>Cada termino de esta ecuación se conoce como “*Ley Cuadrada*” de Lanchester

- **Caso 1:** Si  $X_2$  es el ejército ganador, es decir,  $X_1$  es aniquilado:

$$\beta x_{1_f}^2 = 0$$

lo que por (3.9) implica que  $0 > \alpha x_{2_f}^2$ , pero esto no es posible dado que  $0 < \alpha \leq 1$  y considerando la regla de terminación del combate  $x_{2_f} > 0$ . Por ende,  $X_2$  no puede ser el ejército ganador.

- **Caso 2:** Si el combate finaliza en empate

$$\beta x_{1_f}^2 = 0 = \alpha x_{2_f}^2$$

lo cual contradice a (3.9) y por consiguiente el enfrentamiento no termina en empate.

Como los casos anteriores no pueden darse bajo las condiciones descritas, se concluye que si la fuerza combativa inicial de  $X_1$  es mayor que la de  $X_2$ , el ejército  $X_1$  gana el enfrentamiento (**caso 3**).

- **Ítem 2:** Si  $\beta x_{1_0}^2 < \alpha x_{2_0}^2$  entonces  $X_2$  será el ganador del enfrentamiento

Si la fuerza combativa inicial de  $X_2$  es mayor que la de su oponente se tiene que:

$$\beta x_{1_0}^2 - \alpha x_{2_0}^2 < 0$$

esto implica que la fuerza combativa de  $X_1$  es menor a la de  $X_2$  durante todo el enfrentamiento, específicamente al final de ella

$$\beta x_{1_f}^2 < \alpha x_{2_f}^2 \quad (3.10)$$

Atendiendo a los posibles resultados que se pueden presentar al finalizar el combate y considerando lo anterior se tiene:

- **Caso 1:**  $X_1$  es el ganador del combate, es decir,  $X_2$  es aniquilado

$$\alpha x_{2_f}^2 = 0$$

Lo que implica que

$$\beta x_{1_f}^2 < 0$$

Pero esta desigualdad no tiene sentido porque  $\beta$  y  $x_{1_f}$  son valores positivos, por tanto, no es posible que se dé este caso.

- **Caso 2:** La batalla finaliza en empate, es decir que tanto  $X_1$  como  $X_2$  pierden la totalidad de sus efectivos

$$\alpha x_{2_f}^2 = 0 = \beta x_{1_f}^2$$

Contradiendo (3.10). Por ende, el único resultado que puede darse bajo las condiciones mencionadas es que  $X_2$  sea el ganador del combate (**caso 3**).

- **Ítem 3:** Si  $\beta x_{1_0}^2 = \alpha x_{2_0}^2$  entonces el enfrentamiento finaliza en empate.

En la situación en la que las fuerzas combativas iniciales son iguales la diferencia entre estas sería igual a cero, lo que conlleva a que  $\beta x_1^2 = \alpha x_2^2$  y como esto se cumple en cualquier instante de tiempo de la batalla, en especial al final de esta

$$\beta x_{1_f}^2 = \alpha x_{2_f}^2 \quad (3.11)$$

Considerando las tres situaciones que pueden darse al finalizar el combate:

- **Caso 1:**  $X_1$  gana el combate, es decir,  $X_2$  es aniquilado.

$$\alpha x_{2_f}^2 = 0$$

y por (3.11) se tendría que:

$$\beta x_{1_f}^2 = 0$$

Como  $\beta > 0$ , entonces se debe cumplir que  $x_{1_f} = 0$ , pero esto contradice el hecho que  $X_1$  gana el combate.

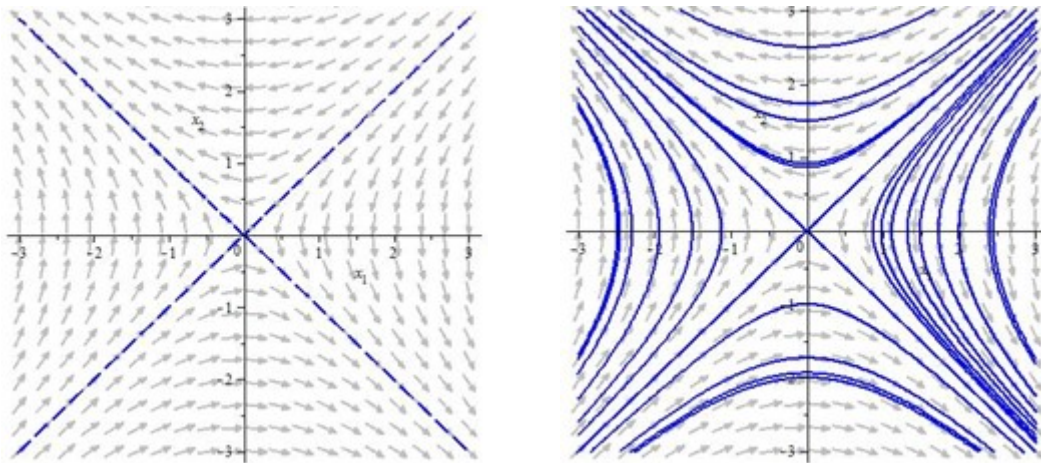
- **Caso 2:**  $X_2$  gana la batalla.

Razonando de manera análoga al caso anterior se concluye que no es posible que  $X_2$  sea el ganador del enfrentamiento.

Debido a que los casos anteriores fueron descartados se puede afirmar que cuando  $\beta x_{1_0}^2 = \alpha x_{2_0}^2$  el enfrentamiento finaliza en empate (**caso 3**).

Con lo anterior queda probada la afirmación realizada por Lepingwell (1987), es decir, se mostró que el ejército que inicia el combate con una mayor fuerza combativa será el ejército ganador y si las fuerzas combativas iniciales son iguales el resultado del enfrentamiento será el empate.

Por otro lado, haciendo uso de la teoría expuesta en el capítulo 1, se puede afirmar que el único punto de equilibrio del sistema es  $(0, 0)$ , debido a que el sistema es lineal homogéneo no degenerado, esto quiere decir que la única posibilidad de que el número de efectivos de las dos fuerzas no presente cambios es cuando los ejércitos  $X_1$  y  $X_2$  no tienen pie de fuerza. Adicionalmente, dado que los autovalores asociados son reales distintos y de signo opuesto el punto de equilibrio, el origen, se denomina punto de silla el cual es inestable (figura 3.5), ya que las trayectorias correspondientes a las soluciones integrales del sistema que se encuentran en las regiones donde está ubicada la solución de línea recta que se halla sobre la línea de autovectores asociada al autovalor  $\sqrt{\alpha\beta}$ , es decir en los cuadrantes dos y cuatro, se alejan del punto de equilibrio, mientras que las trayectorias ubicadas en los cuadrantes uno y tres, en donde se encuentra la solución de línea recta que está situada sobre la línea de autovectores asociada al autovalor  $-\sqrt{\alpha\beta}$ , se acercan al punto de equilibrio.



(a) Campo de direcciones modelo fuego directo

(b) Diagrama de fases modelo fuego directo

Figura 3.5: *Campo de direcciones y diagrama de fases asociado al modelo fuego directo.*

Ahora que se conoce el comportamiento de las soluciones del sistema de manera sincrónica a medida que va variando  $t$ , se continuará el estudio considerando el contexto a partir de la ecuación de las trayectorias, centrando el análisis en el primer cuadrante debido a que los ejes en este plano representan la cantidad de efectivos de cada bando al transcurrir el tiempo del combate y por ello no tiene sentido considerar cantidades negativas. De (3.7) se tiene:

$$\frac{\beta x_1^2}{\beta x_{1_0}^2 - \alpha x_{2_0}^2} - \frac{\alpha x_2^2}{\beta x_{1_0}^2 - \alpha x_{2_0}^2} = 1 \tag{3.12}$$

Si la fuerza combativa inicial de  $X_2$  es mayor que la de  $X_1$  se sabe que el denominador de cada término es menor a cero y por ende se obtiene de (3.12).

$$\frac{x_2^2}{x_{2_0}^2 - \frac{\beta}{\alpha} x_{1_0}^2} - \frac{x_1^2}{\frac{\alpha}{\beta} x_{2_0}^2 - x_{1_0}^2} = 1 \tag{3.13}$$

Como (3.13) corresponde a la ecuación de una hipérbola cuyo centro es el origen y su eje real es el eje  $x_2$  (figura 3.6),

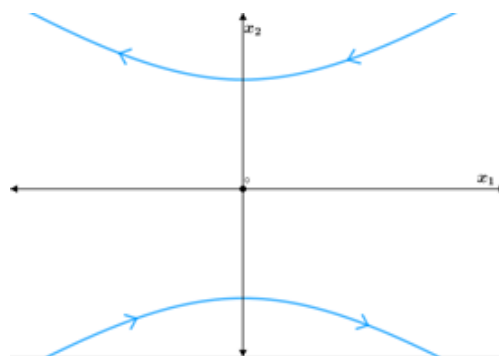


Figura 3.6: *Representación gráfica de la ecuación (3.13).*

se tiene que los vértices son los puntos de intersección entre la hipérbola y dicho eje, pero si se tiene en cuenta el contexto, solo se considera el primer cuadrante y por tanto solo el punto de intersección con la parte positiva de este eje, el cual es

$$\left( 0, \sqrt{x_{2_0}^2 - \frac{\beta}{\alpha} x_{1_0}^2} \right)$$

Este punto de intersección representa la cantidad de efectivos con los que  $X_2$  termina el combate, mientras  $X_1$  es aniquilado; gráficamente se tiene:

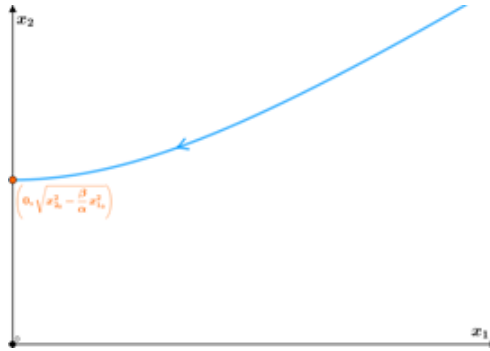


Figura 3.7: Trayectoria de una situación en la que  $X_1$  es aniquilado mientras que  $X_2$  aún conserva efectivos bajo el modelo fuego directo.

Si la fuerza combativa inicial de  $X_1$  es mayor que la de  $X_2$  se sabe que el denominador de cada término es mayor a cero, obteniendo de (3.12).

$$\frac{x_1^2}{x_{1_0}^2 - \frac{\alpha}{\beta} x_{2_0}^2} - \frac{x_2^2}{\frac{\beta}{\alpha} x_{1_0}^2 - x_{2_0}^2} = 1 \quad (3.14)$$

Donde (3.14) corresponde a la ecuación de una hipérbola cuyo centro es el origen y su eje real es el eje  $x_1$  (Figura 3.8).

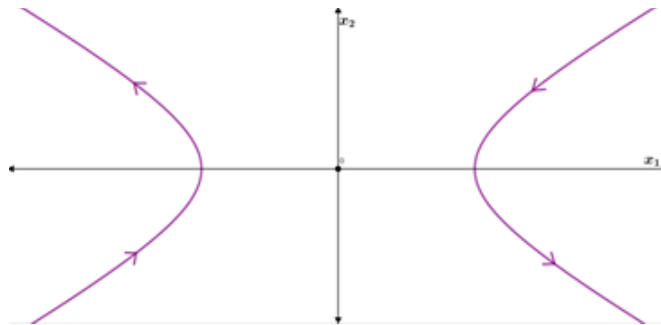


Figura 3.8: Representación gráfica de la ecuación (3.14).

Razonando de manera análoga, el vértice ubicado en la parte positiva del eje  $x_1$  permite conocer el pie de fuerza final de  $X_1$  mientras que  $X_2$  es aniquilado. Este punto es:

$$\left( \sqrt{x_{1_0}^2 - \frac{\alpha}{\beta} x_{2_0}^2}, 0 \right)$$

Gráficamente se tiene:

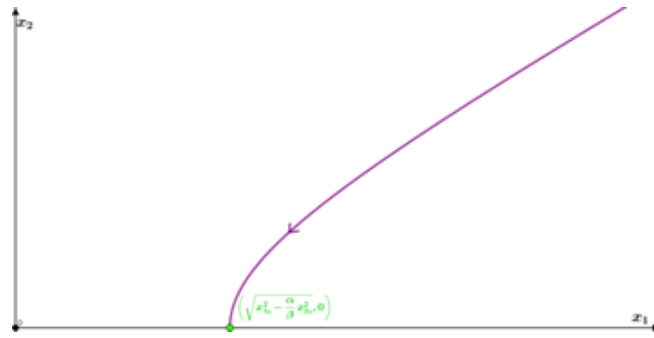


Figura 3.9: Trayectoria de una situación en la que  $X_2$  es aniquilado mientras que  $X_1$  aún conserva efectivos bajo el modelo fuego directo.

El caso en que las fuerzas combativas iniciales sean iguales se sabe que

$$\beta x_1^2 = \alpha x_2^2$$

de donde se obtiene la siguiente función lineal

$$x_2 = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x_1$$

En el plano  $x_1 x_2$ , considerando solamente el primer cuadrante, se tiene:

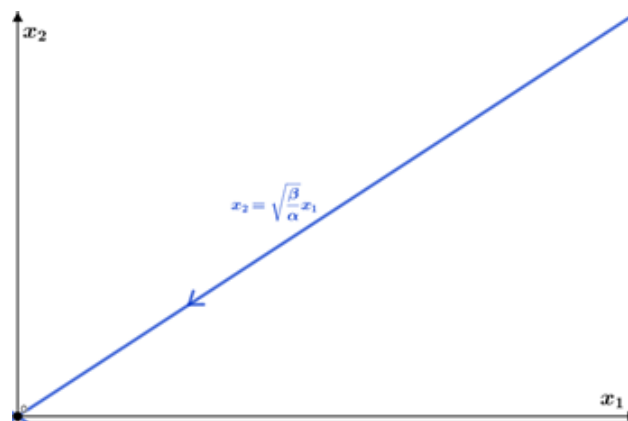


Figura 3.10: Trayectorias de una situación en la que  $X_1$  y  $X_2$  son aniquilados bajo el modelo fuego directo.

Ahora que se conoce la gráfica del comportamiento de las soluciones del sistema de manera sincrónica para cada caso, se considera pertinente ilustrarlas en un mismo plano (figura 3.11).



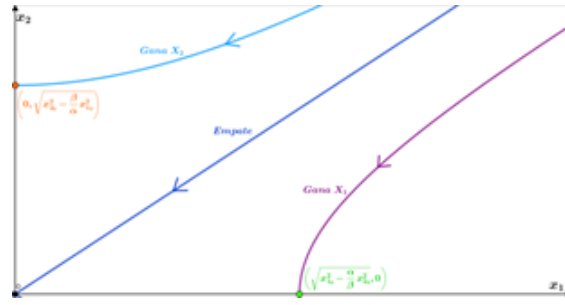


Figura 3.11: Representación gráfica de las tres situaciones que se pueden presentar en un combate bajo el modelo fuego directo.

Por otro lado, como Lanchester asegura que el principio de concentración es aplicable a los combates que son susceptibles de ser modelados bajo este sistema de ecuaciones diferenciales, a continuación, se verificará esta afirmación. Este principio establece que es aconsejable que un ejército reúna todos sus recursos para enfrentar al adversario en una sola batalla, por tanto, se analiza qué pasa al dividir en  $n$  partes iguales el pie de fuerza de un ejército, que ganaría si se lleva a cabo un solo combate, y se desarrollan  $n$  batallas en las que se enfrentan la  $n$ -ésima parte del ejército dividido con el número de efectivos restante del ejército adversario, asumiendo que cada efectivo mantiene su coeficiente de aniquilamiento durante las  $n$  batallas.

Considérese una situación en la que  $x_{10} = kx_{20}$  y  $\alpha = p\beta$ , con  $k, p \in \mathbb{Q}^+$ . Se asume que la fuerza combativa inicial de  $X_1$  es mayor que la de  $X_2$ , por lo que al enfrentarse en una sola batalla el ejército ganador es  $X_1$ , sin embargo, se quiere estudiar en qué condiciones  $X_2$  podría aniquilar en su totalidad a  $X_1$  al dividirlo en  $n$  partes iguales y atacarlo secuencialmente.

Por la ecuación (3.7) se tiene:

$$\beta x_{10}^2 - \alpha x_{20}^2 = \beta x_{1f}^2 - \alpha x_{2f}^2 \quad (3.15)$$

- **Situación 1:** Si  $X_1$  es dividido en **dos** partes iguales se tiene que la fuerza combativa inicial de este ejército para cada enfrentamiento es:

$$\beta \left( \frac{x_{10}}{2} \right)^2 = \frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{20}}{2} \right)^2 \quad (3.16)$$

Reemplazando (3.16) en (3.15), para el primer enfrentamiento se tiene:

$$\frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{20}}{2} \right)^2 - \alpha x_{20}^2 = \beta x_{1f1}^2 - \alpha x_{2f1}^2$$

Como el propósito es conocer las condiciones en las que  $X_2$  gana las dos batallas, se asume que en los dos enfrentamientos  $X_1$  finaliza con cero efectivos y, por tanto, la fuerza combativa final de este ejército es cero.

$$\frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{20}}{2} \right)^2 - \alpha x_{20}^2 = -\alpha x_{2f1}^2$$

de aquí

$$\alpha x_{2_0}^2 \left( \frac{k^2}{4p} - 1 \right) = -\alpha x_{2_{f_1}}^2 \quad (3.17)$$

para que la igualdad tenga sentido se debe tener que

$$\frac{k^2}{4p} - 1 < 0$$

así que

$$k^2 < 4p$$

De esta última desigualdad se entiende que  $X_2$  gana la primera batalla si esta se cumple. Ahora, para conocer las condiciones que se deben cumplir al ganar  $X_2$  el segundo enfrentamiento, se halla la cantidad de efectivos con la que finalizó el primer combate, para ello se despeja  $x_{2_{f_1}}$  de (3.17).

$$x_{2_{f_1}} = \sqrt{1 - \frac{k^2}{4p}} x_{2_0} \quad (3.18)$$

Ahora reemplazando (3.18) y (3.16) en (3.15)

$$\frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{2_0}}{2} \right)^2 - \alpha \left( \sqrt{1 - \frac{k^2}{4p}} x_{2_0} \right)^2 = \beta x_{1_{f_2}}^2 - \alpha x_{2_{f_2}}^2$$

Razonando de manera análoga

$$\alpha x_{2_0}^2 \left( \frac{k^2}{4p} - 1 + \frac{k^2}{4p} \right) = -\alpha x_{2_{f_2}}^2$$

$$\alpha x_{2_0}^2 \left( \frac{k^2}{2p} - 1 \right) = -\alpha x_{2_{f_2}}^2$$

de aquí:

$$\frac{k^2}{2p} - 1 < 0$$

$$k^2 < 2p \quad (3.19)$$

De (3.19) se puede afirmar que, si se cumple esta desigualdad,  $X_2$  es el ejército ganador al finalizar la segunda batalla, es decir que  $X_1$  es totalmente aniquilado.

- **Situación 2:** Si  $X_1$  es dividido en **tres** partes iguales se tiene que la fuerza combativa inicial de este ejército para cada enfrentamiento es:

$$\beta \left( \frac{x_{10}}{3} \right)^2 = \frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{20}}{3} \right)^2 \quad (3.20)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al descrito para la situación 1 se tiene que

$$\frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{20}}{3} \right)^2 - \alpha x_{20}^2 = -\alpha x_{2f1}^2$$

de aquí

$$\alpha x_{20}^2 \left( \frac{k^2}{9p} - 1 \right) = -\alpha x_{2f1}^2 \quad (3.21)$$

para que la igualdad tenga sentido se debe tener que

$$\frac{k^2}{9p} - 1 < 0$$

así que

$$k^2 < 9p$$

Lo que significa que  $X_2$  gana la primera batalla si se cumple esta desigualdad. De (3.21) se sabe que  $X_2$  inicia el segundo enfrentamiento con la siguiente cantidad de efectivos

$$x_{2f1} = \sqrt{1 - \frac{k^2}{9p}} x_{20} \quad (3.22)$$

por lo que se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{20}}{3} \right)^2 - \alpha \left( \sqrt{1 - \frac{k^2}{9p}} x_{20} \right)^2 &= \beta x_{1f2}^2 - \alpha x_{2f2}^2 \\ \alpha x_{20}^2 \left( \frac{k^2}{9p} - 1 + \frac{k^2}{9p} \right) &= -\alpha x_{2f2}^2 \\ \alpha x_{20}^2 \left( \frac{2k^2}{9p} - 1 \right) &= -\alpha x_{2f2}^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

de aquí

$$\frac{2k^2}{9p} - 1 < 0$$

$$k^2 < \frac{9p}{2}$$

Al  $X_2$  ganar la segunda batalla se debe cumplir la desigualdad anterior. Luego, de (3.23) se tiene que  $X_2$  inicia la tercera batalla con el siguiente pie de fuerza

$$x_{2f_2} = \sqrt{1 - \frac{2k^2}{9p}} x_{2_0}$$

Reemplazando

$$\frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{2_0}}{3} \right)^2 - \alpha \left( \sqrt{1 - \frac{2k^2}{9p}} x_{2_0} \right)^2 = \beta x_{1f_3}^2 - \alpha x_{2f_3}^2$$

$$\alpha x_{2_0}^2 \left( \frac{k^2}{9p} - 1 + \frac{2k^2}{9p} \right) = -\alpha x_{2f_3}^2$$

$$\alpha x_{2_0}^2 \left( \frac{3k^2}{9p} - 1 \right) = -\alpha x_{2f_3}^2$$

de donde

$$\frac{k^2}{3p} - 1 < 0$$

$$k^2 < 3p \tag{3.24}$$

Teniendo en cuenta (3.24) se puede afirmar que, si se cumple esta desigualdad,  $X_2$  es el ejército ganador al finalizar la tercera batalla, es decir que  $X_1$  es totalmente aniquilado.

Considerando las desigualdades (3.19) y (3.24), y dejando  $k$  y  $p$  en términos del número de efectivos inicial y los coeficientes de aniquilamiento, respectivamente, se plantea la siguiente hipótesis:

**Hipótesis 3.1.1:** Dado  $x_{1_0} = kx_{2_0}$ ,  $\alpha = p\beta$ , con  $k, p \in \mathbb{Q}^+$ , y  $X_1$  es el ganador cuando se enfrenta a  $X_2$  en una sola batalla de todos contra todos. Si  $X_2$  divide el pie de fuerza de  $X_1$  en  $n$  partes iguales y se satisface

$$\frac{\beta x_{1_0}^2}{n} < \alpha x_{2_0}^2 \tag{3.25}$$

entonces  $X_2$  aniquila al ejército  $X_1$  en su totalidad en el  $n$ -ésimo combate.

**Demostración (Hipótesis 3.1.1):** Supóngase que  $X_2$  no aniquila al ejército  $X_1$  en su totalidad en el  $n$ -ésimo combate, esto quiere decir que  $X_1$  al ser dividido en  $n$  partes iguales aniquila al ejército  $X_2$  en el  $n$ -ésimo combate o que el  $n$ -ésimo enfrentamiento finaliza en empate. Si  $X_1$  es el ejército ganador de la  $n$ -ésima batalla, la fuerza combativa inicial de  $X_1$  es mayor que la fuerza combativa inicial de  $X_2$  para este enfrentamiento, pero si esta batalla finaliza en empate las fuerzas combativas de cada ejército al iniciar el  $n$ -ésimo enfrentamiento son iguales, esto se resume en la siguiente desigualdad

$$\beta \left( \frac{x_{1_0}}{n} \right)^2 \geq \alpha x_{2_0}^2$$

Como se sabe que la cantidad de efectivos con la que inicia  $X_2$  este enfrentamiento es igual a la cantidad de efectivos con los que finaliza el combate inmediatamente anterior, de la desigualdad anterior se tiene

$$\beta \left( \frac{x_{1_0}}{n} \right)^2 \geq \alpha \left( \sqrt{x_{2_0}^2 \left( 1 - \frac{k^2 (n-1)}{n^2 p} \right)} \right)^2$$

Dado que  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $n$  son positivos se tiene:

$$\beta \left( \frac{x_{1_0}}{n} \right)^2 \geq \alpha x_{2_0}^2 - \frac{\alpha x_{2_0}^2 k^2 (n-1)}{n^2 p}$$

$$p \beta x_{1_0}^2 \geq n^2 p \alpha x_{2_0}^2 - \alpha x_{2_0}^2 k^2 (n-1)$$

$$p \beta x_{1_0}^2 \geq n^2 p \alpha x_{2_0}^2 - \alpha x_{2_0}^2 k^2 n + \alpha x_{2_0}^2 k^2$$

Reemplazando  $k = \frac{x_{1_0}}{x_{2_0}}$  y  $p = \frac{\alpha}{\beta}$  en la desigualdad anterior

$$\alpha x_{1_0}^2 \geq \frac{n^2 \alpha^2 x_{2_0}^2}{\beta} - \alpha x_{1_0}^2 n + \alpha x_{1_0}^2$$

$$\alpha x_{1_0}^2 n \geq \frac{n^2 \alpha^2 x_{2_0}^2}{\beta}$$

$$\frac{\beta x_{1_0}^2}{n} \geq \alpha x_{2_0}^2 \quad (3.26)$$

Pero (3.26) no se puede dar ya que se sabe que la desigualdad (3.25) se cumple, lo que quiere decir que el supuesto es falso y por tanto  $X_2$  aniquila al ejército  $X_1$  en su totalidad en el  $n$ -ésimo combate.

En resumen, en un enfrentamiento bajo fuego directo en el que dos ejércitos homogéneos conocen la posición de cada uno de sus oponentes y pueden concentrar su fuego sobre estos, gana en un solo enfrentamiento quien tenga mayor fuerza combativa ( $\beta x_1^2$  o  $\alpha x_2^2$ ), no obstante, el ejército que pierde en una sola batalla en la que los dos bandos concentran todos sus recursos, tiene la posibilidad de cambiar el resultado del combate si divide a su contrincante en  $n$  partes iguales de tal manera que su fuerza combativa inicial sea mayor que la  $n$ -ésima parte de la fuerza combativa inicial de su oponente y lo ataca secuencialmente en  $n$  batallas. Este último resultado ratifica el hecho de que el principio de concentración es aplicable a batallas de este tipo.

## 3.2. Modelo Fuego Indirecto o Fuego en Área

A diferencia del modelo anterior, en este tipo de batallas el pie de fuerza de cada bando disminuye directamente proporcional no solo al número de efectivos de su contrincante, sino también a su propio pie de fuerza que se encuentra en el área bajo fuego. Las ecuaciones que componen este sistema son:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_2 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1 x_2 \end{cases}$$

Tomando  $x_1(0) = x_{1_0}$  y  $x_2(0) = x_{2_0}$  como valores iniciales. Se puede observar que este es un SPANLH.

A pesar de que este modelo es un sistema no lineal es posible obtener la solución analítica, la cual se puede calcular a partir de la ecuación de las trayectorias<sup>3</sup>.

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{\beta}{\alpha} \\ \int_{x_{1_0}}^{x_1} \beta dx_1 &= \int_{x_{2_0}}^{x_2} \alpha dx_2 \\ \beta(x_{1_0} - x_1) &= \alpha(x_{2_0} - x_2) \\ \beta x_{1_0} - \alpha x_{2_0} &= \beta x_1 - \alpha x_2 \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$c_1 = \beta x_1 - \alpha x_2 \tag{3.28}$$

donde  $c_1 = \beta x_{1_0} - \alpha x_{2_0}$ .

Despejando  $x_2$  de (3.28)

$$x_2 = \frac{\beta}{\alpha} x_1 - \frac{c_1}{\alpha}$$

Sustituyendo la igualdad anterior en la primera ecuación del sistema se tiene

$$\frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_1 \left( \frac{\beta}{\alpha} x_1 - \frac{c_1}{\alpha} \right)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -\beta x_1^2 + c_1 x_1$$

$$\frac{1}{-\beta x_1^2 + c_1 x_1} dx_1 = dt$$

$$\frac{1}{x_1(c_1 - \beta x_1)} dx_1 = dt$$

Fracciones parciales

$$\frac{A}{x_1} + \frac{B}{c_1 - \beta x_1} = 1$$

$$\frac{A(c_1 - \beta x_1) + Bx_1}{x_1(c_1 - \beta x_1)} = \frac{1}{x_1(c_1 - \beta x_1)}$$

---

<sup>3</sup>Cada término de (3.27) se denomina "*Ley Lineal*" de Lanchester.

$$A(c_1 - \beta x_1) + Bx_1 = 1$$

$$-A\beta x_1 + Ac_1 + Bx_1 = 1$$

$$x_1(B - A\beta) + Ac_1 = 1$$

$A = \frac{1}{c_1}$  y  $B = \frac{\beta}{c_1}$ , entonces se considera

$$\frac{1}{x_1(c_1 - \beta x_1)} = \frac{1}{c_1} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{\beta}{c_1 - \beta x_1} \right)$$

$$\int_{x_{10}}^{x_1} \frac{1}{c_1} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{\beta}{c_1 - \beta x_1} \right) dx_1 = \int_{t_0}^t dt$$

$$\frac{1}{c_1} \int_{x_{10}}^{x_1} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{\beta}{c_1 - \beta x_1} \right) dx_1 = t$$

$$\frac{1}{c_1} \left[ \int_{x_{10}}^{x_1} \left( \frac{1}{x_1} \right) dx_1 + \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{\beta}{c_1 - \beta x_1} dx_1 \right] = t$$

$$\frac{1}{c_1} (\ln x_1 - \ln x_{10} - (\ln(c_1 - \beta x_1) - \ln(c_1 - \beta x_{10}))) = t$$

$$\frac{1}{c_1} [(\ln x_1 - \ln(c_1 - \beta x_1)) - (\ln x_{10} - \ln(c_1 - \beta x_{10}))] = t$$

$$\frac{1}{c_1} \left[ \ln \left( \frac{x_1}{c_1 - \beta x_1} \right) - \ln \left( \frac{x_{10}}{c_1 - \beta x_{10}} \right) \right] = t$$

$$\frac{1}{c_1} \left[ \ln \left( \frac{\frac{x_1}{c_1 - \beta x_1}}{\frac{x_{10}}{c_1 - \beta x_{10}}} \right) \right] = t$$

$$\frac{\frac{x_1}{c_1 - \beta x_1}}{\frac{x_{10}}{c_1 - \beta x_{10}}} = e^{c_1 t}$$

$$\frac{x_1}{c_1 - \beta x_1} = \left( \frac{x_{10}}{c_1 - \beta x_{10}} \right) e^{c_1 t}$$

$$x_1 = \left( \frac{x_{10}}{c_1 - \beta x_{10}} \right) e^{c_1 t} (c_1 - \beta x_1)$$

$$x_1 = -\beta x_1 \left( \frac{x_{10}}{c_1 - \beta x_{10}} \right) e^{c_1 t} + c_1 \left( \frac{x_{10}}{c_1 - \beta x_{10}} \right) e^{c_1 t}$$

$$x_1 + \beta x_1 \left( \frac{x_{10}}{c_1 - \beta x_{10}} \right) e^{c_1 t} = c_1 \left( \frac{x_{10}}{c_1 - \beta x_{10}} \right) e^{c_1 t}$$

$$x_1 \left( 1 + \frac{\beta x_{10} e^{c_1 t}}{c_1 - \beta x_{10}} \right) = \frac{c_1 x_{10} e^{c_1 t}}{c_1 - \beta x_{10}}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\frac{c_1 x_{10} e^{c_1 t}}{c_1 - \beta x_{10}}}{1 + \frac{\beta x_{10} e^{c_1 t}}{c_1 - \beta x_{10}}} \\
x_1 &= \frac{\frac{c_1 x_{10} e^{c_1 t}}{c_1 - \beta x_{10}}}{\frac{c_1 - \beta x_{10} + \beta x_{10} e^{c_1 t}}{c_1 - \beta x_{10}}} \\
x_1 &= \frac{c_1 x_{10} e^{c_1 t}}{c_1 - \beta x_{10} + \beta x_{10} e^{c_1 t}} \left( \frac{e^{-c_1 t}}{e^{-c_1 t}} \right) \\
x_1 &= \frac{c_1 x_{10}}{e^{-c_1 t} (c_1 - \beta x_{10}) + \beta x_{10}} \tag{3.29}
\end{aligned}$$

En (3.29) se observa que el valor de  $x_1$  es indeterminado cuando  $c_1 = 0$  por tal razón se tendrá en cuenta esta condición para definir a  $x_1(t)$  como una función a trozos. Cuando  $c_1 \neq 0$  el valor de  $x_1(t)$  estará dado por (3.29). Ahora si  $c_1 = 0$  se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -\beta x_1^2 \\
\int_{x_{10}}^{x_1} -\frac{1}{\beta x_1^2} dx_1 &= \int_{t_0}^t dt \\
\frac{1}{\beta x_1} - \frac{1}{\beta x_{10}} &= t \\
\frac{1}{\beta x_1} &= t + \frac{1}{\beta x_{10}} \\
\frac{1}{\beta x_1} &= \frac{t\beta x_{10} + 1}{\beta x_{10}} \\
\beta x_1 &= \frac{\beta x_{10}}{t\beta x_{10} + 1} \\
x_1 &= \frac{x_{10}}{t\beta x_{10} + 1}
\end{aligned}$$

En resumen,  $x_1(t)$  se puede definir como:

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{c_1 x_{10}}{e^{-c_1 t} (c_1 - \beta x_{10}) + \beta x_{10}}, & \text{si } c_1 \neq 0 \\ \frac{x_{10}}{t\beta x_{10} + 1}, & \text{si } c_1 = 0 \end{cases}$$

Por otro lado, al despejar  $x_1$  de (3.28)

$$\begin{aligned}
\beta x_1 &= c_1 + \alpha x_2 \\
x_1 &= \frac{c_1}{\beta} + \frac{\alpha x_2}{\beta}
\end{aligned}$$

y al reemplazar lo anterior en la segunda ecuación del sistema se obtiene:



$$\frac{dx_2}{dt} = -\beta x_2 \left( \frac{c_1}{\beta} + \frac{\alpha x_2}{\beta} \right)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\alpha x_2^2 - c_1 x_2$$

Al igual que en el caso previo, al resolver la ecuación anterior se observa que se presenta una indeterminación cuando  $c_1 = 0$ , por ende, al realizar un procedimiento análogo se consideran las dos situaciones:

▪ Cuando  $c_1 = 0$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\alpha x_2^2$$

$$x_2 = \frac{x_{20}}{1 + \alpha x_{20} t}$$

▪ Cuando  $c_1 \neq 0$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\alpha x_2^2 - c_1 x_2$$

$$x_2 = \frac{c_1 x_{20} e^{-c_1 t}}{\alpha x_{20} + c_1 - \alpha x_{20} e^{-c_1 t}}$$

En resumen,  $x_2(t)$  se puede definir como

$$x_2(t) = \begin{cases} \frac{c_1 x_{20} e^{-c_1 t}}{\alpha x_{20} + c_1 - \alpha x_{20} e^{-c_1 t}}, & \text{si } c_1 \neq 0 \\ \frac{x_{20}}{1 + \alpha x_{20} t}, & \text{si } c_1 = 0 \end{cases}$$

Nótese que tanto las dos funciones que componen la variable de estado  $x_1(t)$  como las que componen a  $x_2(t)$  presentan asíntotas horizontales en  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$ , respectivamente, cuando cada ejército es aniquilado, lo cual genera que no se tenga la posibilidad de conocer el tiempo en el que finaliza la batalla. Sin embargo, sí es posible conocer el tiempo que ha transcurrido del combate a partir del número de efectivos que aún conserva cada ejército en ese instante de tiempo.

Si se quiere conocer el tiempo de batalla a partir del pie de fuerza de  $X_1$  que aún se encuentra en combate ( $m_1$ ) se tiene:

▪ Cuando  $c_1 \neq 0$

$$m_1 = \frac{c_1 x_{10}}{e^{-c_1 t} (c_1 - \beta x_{10}) + \beta x_{10}}$$

$$m_1 (e^{-c_1 t} (c_1 - \beta x_{10}) + \beta x_{10}) = c_1 x_{10}$$

$$-m_1 c_1 e^{-c_1 t} + m_1 \beta x_{10} e^{-c_1 t} = m_1 \beta x_{10} - c_1 x_{10}$$

$$e^{-c_1 t} (m_1 \beta x_{1_0} - m_1 c_1) = m_1 \beta x_{1_0} - c_1 x_{1_0}$$

$$e^{-c_1 t} = \frac{m_1 \beta x_{1_0} - c_1 x_{1_0}}{m_1 \beta x_{1_0} - m_1 c_1}$$

$$-c_1 t = \ln \left| \frac{m_1 \beta x_{1_0} - c_1 x_{1_0}}{m_1 \beta x_{1_0} - m_1 c_1} \right|$$

$$t = -\frac{1}{c_1} \ln \left| \frac{m_1 \beta x_{1_0} - c_1 x_{1_0}}{m_1 \beta x_{1_0} - m_1 c_1} \right|$$

■ Cuando  $c_1 = 0$

$$m_1 = \frac{x_{1_0}}{t\beta x_{1_0} + 1}$$

$$t\beta x_{1_0} + 1 = \frac{x_{1_0}}{m_1}$$

$$t\beta x_{1_0} = \frac{x_{1_0} - m_1}{m_1}$$

$$t = \frac{x_{1_0} - m_1}{m_1 \beta x_{1_0}}$$

Para el caso de  $X_2$ , sea  $m_2$  el número de efectivos de  $X_2$  que permanecen en combate, el tiempo que ha transcurrido de batalla está dado por:

■ Cuando  $c_1 \neq 0$

$$m_2 = \frac{c_1 x_{2_0} e^{-c_1 t}}{\alpha x_{2_0} + c_1 - \alpha x_{2_0} e^{-c_1 t}}$$

$$m_2 (\alpha x_{2_0} + c_1 - \alpha x_{2_0} e^{-c_1 t}) = c_1 x_{2_0} e^{-c_1 t}$$

$$m_2 (\alpha x_{2_0} + c_1) = c_1 x_{2_0} e^{-c_1 t} + m_2 \alpha x_{2_0} e^{-c_1 t}$$

$$m_2 (\alpha x_{2_0} + c_1) = e^{-c_1 t} (c_1 x_{2_0} + m_2 \alpha x_{2_0})$$

$$e^{-c_1 t} = \frac{m_2 (\alpha x_{2_0} + c_1)}{(c_1 x_{2_0} + m_2 \alpha x_{2_0})}$$

$$-c_1 t = \ln \left| \frac{m_2 (\alpha x_{2_0} + c_1)}{(c_1 x_{2_0} + m_2 \alpha x_{2_0})} \right|$$

$$t = -\frac{1}{c_1} \ln \left| \frac{m_2 (\alpha x_{2_0} + c_1)}{(c_1 x_{2_0} + m_2 \alpha x_{2_0})} \right|$$

- Cuando  $c_1 = 0$

$$m_2 = \frac{x_{2_0}}{1 + \alpha x_{2_0} t}$$

$$1 + \alpha x_{2_0} t = \frac{x_{2_0}}{m_2}$$

$$\alpha x_{2_0} t = \frac{x_{2_0} - m_2}{m_2}$$

$$t = \frac{x_{2_0} - m_2}{m_2 \alpha x_{2_0}}$$

Como se mencionó, con la exploración gráfica de las variables de estado se esperaba deducir la relación entre las fuerzas combativas de cada ejército que determina el resultado del combate en términos del ganador, sin embargo, se considera que esta exploración no es adecuada dado que estas variables están definidas a trozos, lo que implica conocer la relación entre las fuerzas combativas iniciales para poder graficarlas. Por esta razón se propone directamente una demostración para la afirmación hecha por Lepingwell (1987) respecto a la comparación entre las fuerzas combativas de cada ejército para determinar el resultado final del combate.

Según Lepingwell (1987) dado un enfrentamiento bajo el modelo de fuego en área entre los ejércitos  $X_1$  y  $X_2$ , el ganador del combate está determinado por:

1. Si  $\beta x_{1_0} > \alpha x_{2_0}$  entonces  $X_1$  es el ejército ganador.
2. Si  $\alpha x_{2_0} > \beta x_{1_0}$  entonces  $X_2$  es el ejército ganador.
3. Si  $\beta x_{1_0} = \alpha x_{2_0}$  entonces no hay ganador del combate, es decir, que la batalla finaliza en empate.

### Demostración

Razonando de manera análoga al análisis del modelo anterior se tiene:

- **Ítem 1:** Si  $\beta x_{1_0} > \alpha x_{2_0}$  entonces  $X_1$  es el ejército ganador.

Asumiendo que  $\beta x_{1_0} > \alpha x_{2_0}$  la diferencia en (3.27) es mayor a cero, lo cual implica que

$$\beta x_1 > \alpha x_2$$

Particularmente

$$\beta x_{1_f} > \alpha x_{2_f} \tag{3.30}$$

Atendiendo a lo expuesto en el primer análisis y a la desigualdad (3.30) se puede concluir que si la fuerza combativa inicial de  $X_1$  es mayor a la de  $X_2$ ,  $X_1$  es el ejército ganador del combate.

- **Ítem 2:** Si  $\alpha x_{2_0} > \beta x_{1_0}$  entonces  $X_2$  es el ejército ganador.

Partiendo de que la fuerza combativa inicial de  $X_2$  es mayor a la de  $X_1$  se tiene en (3.27) que la diferencia  $\beta x_{1_0} - \alpha x_{2_0}$  es menor a cero y, por ende

$$\alpha x_2 > \beta x_1$$

en especial

$$\alpha x_{2_f} > \beta x_{1_f}$$

Lo que permite afirmar, considerando lo realizado para el primer modelo, que si la fuerza combativa inicial de  $X_2$  es mayor a la de  $X_1$ ,  $X_2$  es el ejército ganador del enfrentamiento.

- **Ítem 3:** Si  $\alpha x_{2_0} = \beta x_{1_0}$  entonces el combate finaliza en empate.

Asumiendo que la fuerza combativa inicial de  $X_2$  es igual a la de  $X_1$  y teniendo en cuenta (3.27) se tiene

$$\beta x_1 = \alpha x_2$$

De aquí, al final del combate las fuerzas combativas son iguales, es decir

$$\beta x_{1_f} = \alpha x_{2_f}$$

A partir de esta igualdad, y atendiendo a lo expresado en el análisis del modelo de fuego directo, se da la posibilidad de concluir que si la fuerza combativa inicial de  $X_2$  es igual a la de  $X_1$ , entonces la batalla finaliza en empate, es decir, ambos bandos son aniquilados.

De esta manera se ha demostrado que el ejército con mayor fuerza combativa será quien gane el combate y en caso de igualdad entre estas fuerzas el enfrentamiento finaliza en empate quedando los dos ejércitos aniquilados.

Por otro lado, los puntos de equilibrio de este sistema son aquellos que satisfacen  $-\alpha x_2 x_1 = 0$  y  $-\beta x_1 x_2 = 0$ , es decir, todas las parejas de la forma  $(\bar{x}_1, 0)$  y  $(0, \bar{x}_2)$ . Para determinar cuáles puntos son no degenerados se recurre a la matriz jacobiana asociada al sistema correspondiente al modelo de fuego en área y se evalúa en cada uno de los puntos de equilibrio.

$$Df = \begin{pmatrix} -\alpha x_2 & -\alpha x_1 \\ -\beta x_2 & -\beta x_1 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz jacobiana evaluada en los puntos de equilibrio de la forma  $(\bar{x}_1, 0)$  es:

$$|Df(\bar{x}_1, 0)| = \begin{vmatrix} -\alpha(0) & -\alpha\bar{x}_1 \\ -\beta(0) & -\beta\bar{x}_1 \end{vmatrix}$$

$$|Df(\bar{x}_1, 0)| = 0$$

El determinante de la matriz jacobiana evaluada en los puntos de equilibrio de la forma  $(0, \bar{x}_2)$  es:

$$|Df(0, \bar{x}_2)| = \begin{vmatrix} -\alpha\bar{x}_2 & -\alpha(0) \\ -\beta\bar{x}_2 & -\beta(0) \end{vmatrix}$$

$$|Df(0, \bar{x}_2)| = 0$$

En virtud de la definición 2.1.2 se puede afirmar que todos los puntos de equilibrio de este sistema son degenerados y por ende el sistema también lo es. Adicionalmente, cada punto de equilibrio es no aislado, ya que, considerando la definición de punto de equilibrio aislado, para todo  $\epsilon > 0$  la bola abierta con centro en  $(\bar{x}_1, 0)$  y radio  $\epsilon$  contiene al menos al punto de equilibrio  $(\bar{x}_1 + \frac{\epsilon}{2}, 0)$ , de manera análoga se determina que los puntos de equilibrio de la forma  $(0, \bar{x}_2)$  son no aislados. Por tal motivo, las conclusiones de tipo cualitativo no serán resultado de la aplicación de una teoría general y establecida, sino que serán conjeturas surgidas desde la observación gráfica.

Inicialmente, se observa en el campo de direcciones (Figura 3.12), generado en el programa *Maple 14*, que los puntos de equilibrio ubicados sobre la parte positiva de los ejes son aparentemente estables, ya que el sentido de los vectores tangentes a las órbitas cerca a cada punto de equilibrio señala a cada uno de estos, mientras que los puntos de equilibrio ubicados sobre la parte no positiva de los ejes podrían considerarse inestables, debido a que en todos estos los vectores tangentes a al menos una de las curvas solución cerca a cada punto de equilibrio señala en sentido opuesto al punto.

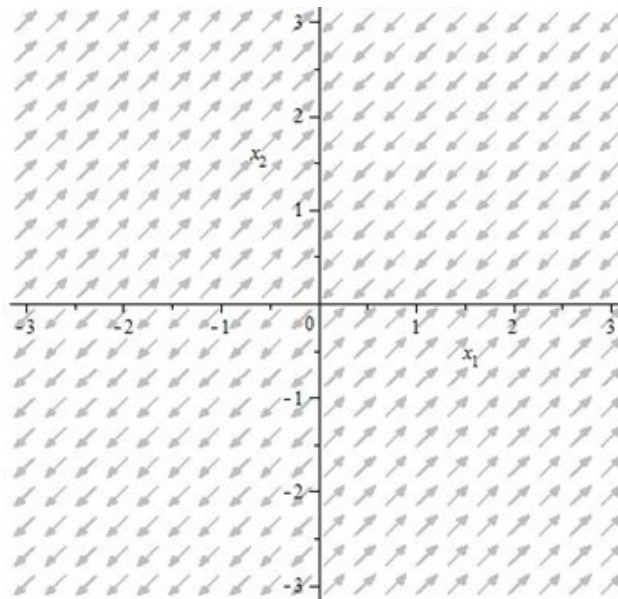


Figura 3.12: Campo de direcciones del sistema asociado al modelo fuego en área.

Para graficar las trayectorias del sistema se despeja  $x_2$  de la ecuación (3.27), obteniendo

$$x_2 = \frac{\beta}{\alpha}x_1 + \frac{c}{\alpha} \quad (3.31)$$

donde  $c = \alpha x_{2_0} - \beta x_{1_0}$ .

Se observa que (3.31) es una función afín donde su pendiente está definida por  $\frac{\beta}{\alpha}$  y su ordenada cuando  $x_1$  es cero está dada por  $\frac{c}{\alpha}$ . Ahora bien, si la fuerza combativa inicial de  $X_1$  es mayor a la de  $X_2$ , es decir que  $X_1$  es el ejército ganador del combate,  $\frac{c}{\alpha} < 0$ , lo que implica que en el primer cuadrante, el cual es el de interés por el contexto, la gráfica de la función interseca al eje  $x_1$  en el punto  $(-\frac{c}{\beta}, 0)$ , que corresponde al número de efectivos con los que finaliza el combate  $X_1$  cuando  $X_2$  es aniquilado (figura 3.13).

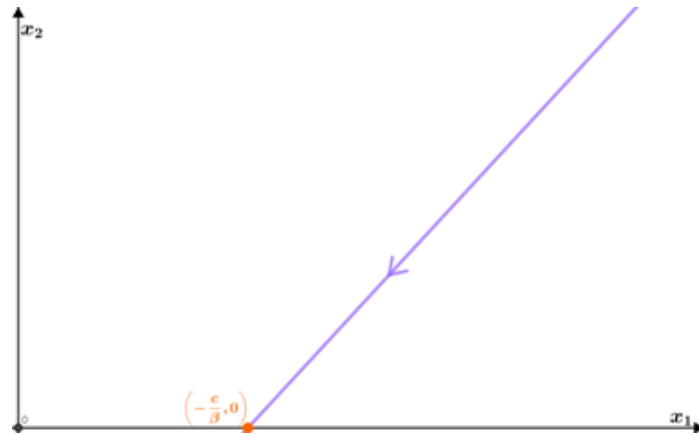


Figura 3.13: Trayectoria de una situación en la que  $X_2$  es aniquilado mientras que  $X_1$  aún conserva efectivos bajo el modelo fuego en área.

En caso de que el ganador del enfrentamiento sea  $X_2$ , la fuerza combativa inicial de este ejército es mayor a la fuerza combativa inicial de su oponente, en consecuencia  $\frac{c}{\alpha} > 0$ , es decir que en el primer cuadrante el punto de intersección entre la representación gráfica de (3.31) y el eje  $x_2$  es  $(0, \frac{c}{\alpha})$ , el cual indica el número de efectivos con el que finaliza el combate  $X_2$  al ser aniquilado  $X_1$  (figura 3.14).

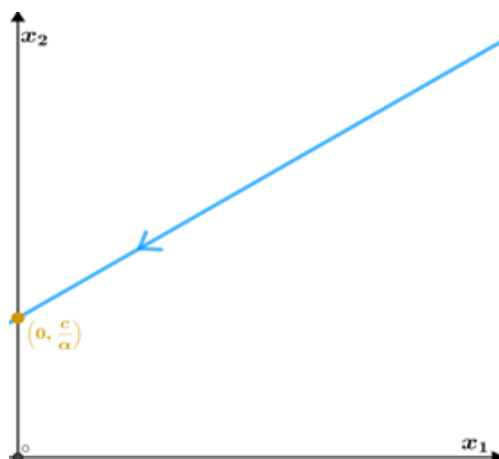


Figura 3.14: Trayectoria de una situación en la que  $X_1$  es aniquilado mientras que  $X_2$  aún conserva efectivos bajo el modelo fuego en área.

Finalmente, si el resultado de la batalla es empate, las fuerzas combativas iniciales de cada bando son iguales y, por ende  $\frac{c}{\alpha} = 0$ , quedando (3.31) reducida a una función lineal que, como se sabe, corta a los dos ejes en el origen. Este punto de intersección indica que los dos ejércitos pierden la totalidad de sus efectivos en el combate (figura 3.15).

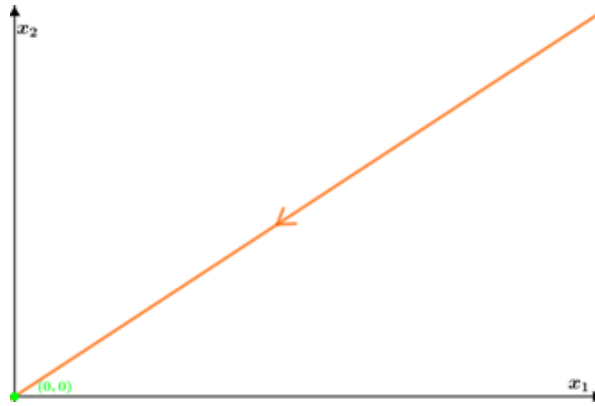


Figura 3.15: Trayectoria de una situación en la que  $X_1$  y  $X_2$  son aniquilados bajo el modelo fuego en área.

Las trayectorias de los tres casos que pueden darse en el combate que es susceptible de ser modelado bajo este sistema se ilustran en la figura (3.16).

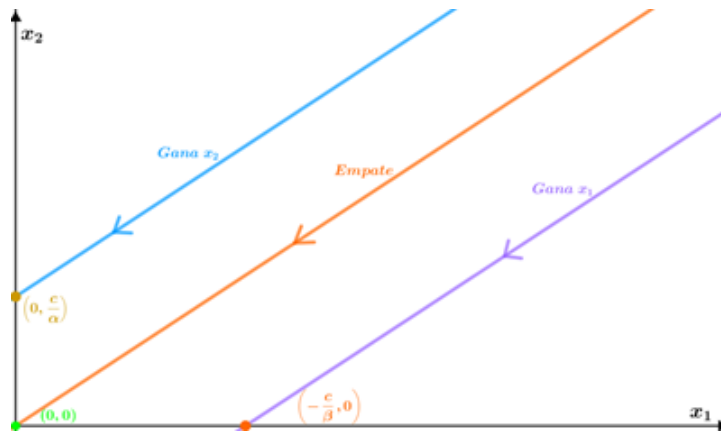


Figura 3.16: Representación gráfica de las tres situaciones que se pueden presentar en un combate bajo el modelo fuego en área.

Continuando con el estudio, se quiere verificar la afirmación realizada por Lanchester respecto a que la ley lineal no proporciona ninguna ventaja sobre la fuerza numérica, es decir, que el principio de concentración no es aplicable a batallas que se puedan modelar bajo este sistema.

Dado  $x_{1_0} = kx_{2_0}$  y  $\alpha = p\beta$ , con  $k, p \in \mathbb{Q}^+$ . Se asume que la fuerza combativa inicial de  $X_1$  es mayor que la de  $X_2$ , por lo que al enfrentarse en una sola batalla el ejército ganador es  $X_1$ , sin embargo, se quiere estudiar en qué condiciones  $X_2$  aniquila en su totalidad a  $X_1$  al dividirlo en  $n$  partes iguales y atacarlo secuencialmente. Al igual que en el modelo anterior se considera que cada efectivo mantiene su coeficiente de aniquilamiento durante las  $n$  batallas.

Por la ecuación (3.27) se tiene:

$$\beta x_{1_0} - \alpha x_{2_0} = \beta x_{1_f} - \alpha x_{2_f} \tag{3.32}$$

Se consideran dos situaciones que serán tratadas de manera análoga al desarrollo presentado para el modelo anterior.

- **Situación 1:** Si  $X_1$  es dividido en dos partes iguales se tiene que la fuerza combativa inicial de este ejército para cada enfrentamiento es

$$\beta \frac{x_{1_0}}{2} = \frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{2_0}}{2} \right) \quad (3.33)$$

Reemplazando (3.33) en (3.32), para el primer enfrentamiento se tiene:

$$\frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{2_0}}{2} \right) - \alpha x_{2_0} = \beta x_{1_{f_1}} - \alpha x_{2_{f_1}}$$

Como el propósito es conocer las condiciones en las que gana  $X_2$  las dos batallas, se asume que en los dos enfrentamientos  $X_1$  finaliza con cero efectivos y por tanto, la fuerza combativa final de este ejército es nula.

$$\alpha x_{2_0} \left( \frac{k}{2p} - 1 \right) = -\alpha x_{2_{f_1}} \quad (3.34)$$

Para que la igualdad tenga sentido se debe tener que

$$k < 2p$$

De esta última desigualdad se entiende que  $X_2$  gana la primera batalla si esta se cumple. Ahora, para conocer las condiciones que se deben cumplir al ganar  $X_2$  el segundo enfrentamiento, se halla la cantidad de efectivos con la que finalizó el primer combate, para ello se despeja  $x_{2_{f_1}}$  de (3.34).

$$x_{2_{f_1}} = x_{2_0} \left( 1 - \frac{k}{2p} \right) \quad (3.35)$$

Ahora reemplazando (3.35) y (3.33) en (3.32)

$$\frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{2_0}}{2} \right) - \alpha \left( x_{2_0} \left( 1 - \frac{k}{2p} \right) \right) = \beta x_{1_{f_2}} - \alpha x_{2_{f_2}}$$

Razonando de manera análoga

$$\alpha x_{2_0} \left( \frac{k}{p} - 1 \right) = -\alpha x_{2_{f_2}}$$

De aquí

$$k < p \quad (3.36)$$

De (3.36) se puede afirmar que, si se cumple esta desigualdad,  $X_2$  es el ejército ganador al finalizar la segunda batalla, es decir que  $X_1$  es totalmente aniquilado.



- **Situación 2:** Si  $X_1$  es dividido en tres partes iguales se tiene que la fuerza combativa inicial de este ejército para cada enfrentamiento es

$$\beta \frac{x_{10}}{3} = \frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{20}}{3} \right) \quad (3.37)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al descrito para la situación 1 se tiene que:

$$\alpha x_{20} \left( \frac{k}{3p} - 1 \right) = -\alpha x_{2f1} \quad (3.38)$$

Para que la igualdad tenga sentido se debe cumplir que:

$$k < 3p$$

Lo que significa que  $X_2$  gana la primera batalla si se cumple esta desigualdad. De (3.38) se sabe que  $X_2$  inicia el segundo enfrentamiento con la siguiente cantidad de efectivos

$$x_{2f1} = x_{20} \left( 1 - \frac{k}{3p} \right) \quad (3.39)$$

Por lo que se tiene

$$\alpha x_{20} \left( \frac{2k}{3p} - 1 \right) = -\alpha x_{2f2} \quad (3.40)$$

De aquí

$$k < \frac{3p}{2}$$

Al  $X_2$  ganar la segunda batalla se debe cumplir la desigualdad anterior. Luego, de (3.40) se tiene que  $X_2$  inicia la tercera batalla con el siguiente pie de fuerza

$$x_{2f2} = x_{20} \left( 1 - \frac{2k}{3p} \right)$$

Reemplazando

$$\alpha x_{20} \left( \frac{k}{p} - 1 \right) = -\alpha x_{2f3}$$

De donde

$$k < p \quad (3.41)$$

Teniendo en cuenta (3.41) se puede afirmar que, si se cumple esta desigualdad,  $X_2$  es el ejército ganador al finalizar la tercera batalla, es decir que  $X_1$  es totalmente aniquilado.

De (3.36) y (3.41) se observa que sin importar el número de partes iguales en las que se divida el ejército que inicialmente gana, se debe cumplir que  $k < p$ , o lo que es lo mismo

$$\beta x_{1_0} < \alpha x_{2_0}$$

Sin embargo, no es posible que esta desigualdad se dé, dado que inicialmente se tomó como ganador en un solo enfrentamiento a  $X_1$  lo que significa que  $\beta x_{1_0} > \alpha x_{2_0}$ .

Atendiendo a los resultados anteriores, se considera que bajo este modelo el ejército que pierde en un solo enfrentamiento no tiene la posibilidad de cambiar este resultado dividiendo a su oponente en partes iguales, lo que significa que el principio de concentración no es aplicable para ningún ejército bajo este modelo. A continuación se propone una demostración para esta afirmación.

**Demostración:** Supóngase que existe algún  $n \in \mathbb{N}$ , tal que al dividir a  $X_1$  en  $n$  partes iguales, el ejército  $X_2$  logra aniquilar a  $X_1$  en el  $n$ -ésimo enfrentamiento, esto quiere decir que la fuerza combativa inicial de  $X_2$  en el enfrentamiento  $n$  es mayor que la fuerza combativa inicial de  $X_1$  en dicho enfrentamiento, matemáticamente se tiene

$$\alpha x_{2_{f(n-1)}} > \frac{\beta x_{1_0}}{n}$$

Cabe aclarar que en la desigualdad anterior se toma la fuerza combativa de  $X_2$  de esa forma debido a que el pie de fuerza inicial de este ejército para la  $n$ -ésima batalla está dado por su cantidad de efectivos final en el enfrentamiento inmediatamente anterior. Así que

$$\alpha x_{2_0} \left( 1 - \frac{(n-1)k}{np} \right) > \frac{\beta x_{1_0}}{n}$$

dado que  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $n$  son positivos se tiene

$$\alpha x_{2_0} - \frac{\alpha x_{2_0} (n-1)k}{np} > \frac{\beta x_{1_0}}{n}$$

$$\frac{np\alpha x_{2_0} - \alpha x_{2_0} (n-1)k}{np} > \frac{\beta x_{1_0}}{n}$$

$$np\alpha x_{2_0} - \alpha x_{2_0} (n-1)k > p\beta x_{1_0}$$

Atendiendo a que  $p = \frac{\alpha}{\beta}$  y  $k = \frac{x_{1_0}}{x_{2_0}}$ , se tiene

$$\frac{n\alpha^2 x_{2_0}}{\beta} - \alpha x_{1_0} n + \alpha x_{1_0} > \alpha x_{1_0}$$

$$\frac{n\alpha^2 x_{2_0}}{\beta} > \alpha x_{1_0} n$$

$$\alpha x_{2_0} > \beta x_{1_0}$$

Lo cual contradice que  $X_1$  es el ejército ganador en una sola batalla, es decir que su fuerza combativa inicial es mayor que la del ejército  $X_2$ . Por tanto, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tal

que al dividir a  $X_1$  en  $n$  partes iguales, el ejército  $X_2$  nunca logra aniquilar a  $X_1$  en el  $n$ -ésimo enfrentamiento.

Sintetizando, el estudio cualitativo del sistema asociado a este modelo estuvo limitado dada las características de sus puntos de equilibrio, los cuales resultaron ser degenerados no aislados. Adicionalmente, se verificó el papel que desempeñan las fuerzas combativas en el resultado del combate bajo este modelo, determinando como ganador a quien cuente con mayor fuerza combativa; si  $\beta x_1 > \alpha x_2$  el ganador del enfrentamiento es  $X_1$ , en caso contrario el ganador es  $X_2$  y si  $\beta x_1 = \alpha x_2$  la batalla finaliza en empate. Por último, se comprobó matemáticamente que el principio de concentración no es aplicable a batallas de este tipo.

### 3.3. Modelo Guerra de Guerrillas

Como se mencionó en el primer apartado de esta monografía, este modelo se puede entender como una combinación de los dos anteriores, es decir, se ajusta a enfrentamientos en los que uno de los bandos ( $X_1$ ) actúa bajo fuego directo y su contrincante ( $X_2$ ) actúa bajo fuego en área. Así que, la tasa de pérdidas de  $X_1$  es proporcional tanto al número de efectivos de  $X_2$  como a su propio pie de fuerza en el combate, mientras que el número de efectivos de  $X_2$  disminuye de manera proporcional solamente al número de efectivos de su adversario. Las ecuaciones que componen este sistema son:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_2 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1 \end{cases}$$

Tomando  $x_1(0) = x_{1_0}$  y  $x_2(0) = x_{2_0}$  como condiciones iniciales. Nótese que este es un SPANLH.

A pesar de que este sistema es no lineal sí cuenta con solución analítica. Así que haciendo uso de la ecuación de las trayectorias se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_2} &= \frac{\alpha x_2}{\beta} \\ \int_{x_{1_0}}^{x_1} \beta dx_1 &= \int_{x_{2_0}}^{x_2} \alpha x_2 dx_2 \\ \beta(x_1 - x_{1_0}) &= \alpha \left( \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_{2_0}^2}{2} \right) \\ \beta x_1 - \beta x_{1_0} &= \frac{\alpha}{2} x_2^2 - \frac{\alpha}{2} x_{2_0}^2 \\ \beta x_1 &= \frac{\alpha}{2} x_2^2 - \frac{\alpha}{2} x_{2_0}^2 + \beta x_{1_0} \\ x_1 &= \frac{\alpha}{2\beta} x_2^2 + x_{1_0} - \frac{\alpha}{2\beta} x_{2_0}^2 \\ x_1 &= \frac{\alpha}{2\beta} x_2^2 + c_1 \end{aligned} \tag{3.42}$$

donde  $c_1 = x_{1_0} - \frac{\alpha}{2\beta}x_{2_0}^2$

Reemplazando lo anterior en la segunda ecuación del sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dt} &= -\beta \left( \frac{\alpha}{2\beta}x_2^2 + c_1 \right) \\ \int_{x_{2_0}}^{x_2} \frac{1}{\beta \left( \frac{\alpha}{2\beta}x_2^2 + c_1 \right)} dx_2 &= - \int_{t_0}^t dt \\ \int_{x_{2_0}}^{x_2} \frac{1}{\frac{\alpha}{2}x_2^2 + \beta c_1} dx_2 &= - \int_{t_0}^t dt \\ \sqrt{\frac{2}{\alpha\beta c_1}} \left[ \arctan \left( x_2 \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta c_1}} \right) - \arctan \left( x_{2_0} \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta c_1}} \right) \right] &= -t \\ \sqrt{\frac{2}{\alpha\beta c_1}} \arctan \left( x_2 \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta c_1}} \right) &= -t + \sqrt{\frac{2}{\alpha\beta c_1}} \arctan \left( x_{2_0} \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta c_1}} \right) \\ \arctan \left( x_2 \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta c_1}} \right) &= -\frac{\sqrt{\alpha\beta c_1}}{\sqrt{2}}t + \arctan \left( x_{2_0} \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta c_1}} \right) \\ x_2 \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta c_1}} &= \tan \left( \arctan \left( x_{2_0} \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta c_1}} \right) - \frac{\sqrt{\alpha\beta c_1}}{\sqrt{2}}t \right) \\ x_2 &= \sqrt{\frac{2\beta c_1}{\alpha}} \tan \left( \arctan \left( x_{2_0} \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta c_1}} \right) - \sqrt{\frac{\alpha\beta c_1}{2}}t \right)\end{aligned}$$

Así que las variables de estado de este sistema son:

$$x_1(t) = \frac{\alpha}{2\beta}x_2^2(t) + c_1 \quad (3.43)$$

$$x_2(t) = \sqrt{\frac{2\beta c_1}{\alpha}} \tan \left( \arctan \left( x_{2_0} \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta c_1}} \right) - \sqrt{\frac{\alpha\beta c_1}{2}}t \right) \quad (3.44)$$

A partir de estas variables de estado solo es posible conocer el tiempo que dura el combate cuando  $X_1$  gana, ya que  $x_2(t)$  no está definida para  $c_1 \leq 0$  ( $X_2$  gana o el enfrentamiento finaliza en empate). Para conocer el tiempo cuando  $X_2$  es derrotado se toma en (3.44)  $x_2(t_f) = 0$ .

$$\begin{aligned}0 &= \sqrt{\frac{2\beta c_1}{\alpha}} \tan \left( \arctan \left( x_{2_0} \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta c_1}} \right) - \sqrt{\frac{\alpha\beta c_1}{2}}t_f \right) \\ \arctan(0) &= \arctan \left( x_{2_0} \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta c_1}} \right) - \sqrt{\frac{\alpha\beta c_1}{2}}t_f \\ t_f &= \sqrt{\frac{2}{\alpha\beta c_1}} \arctan \left( x_{2_0} \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta c_1}} \right)\end{aligned}$$

Dado las discontinuidades que presentan (3.43) y (3.44) al igual que para el segundo modelo no se considera pertinente realizar una exploración gráfica con la intención de deducir la relación que debe existir entre las fuerzas combativas para determinar el ganador

del combate. Adicionalmente, su demostración es en términos generales análoga a las expuestas en los análisis anteriores, por ello se considera redundante incluirla en este apartado.

Por otro lado, al igual que el modelo anterior este sistema es degenerado debido a que sus puntos de equilibrio  $(0, \bar{x}_2)$  son degenerados, esto dado que la matriz jacobiana evaluada en cada punto de equilibrio es singular.

$$|Df(0, \bar{x}_2)| = \begin{vmatrix} -\alpha\bar{x}_2 & -\alpha(0) \\ -\beta & 0 \end{vmatrix}$$

$$|Df(0, \bar{x}_2)| = 0$$

Por los argumentos expuestos en el modelo anterior, estos puntos de equilibrio se consideran no aislados, razón por la cual se hace necesario recurrir nuevamente a la visualización para conjeturar sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio. Observando el campo de direcciones (figura 3.17) se puede pensar que los puntos de equilibrio ubicados sobre la parte positiva del eje  $x_2$  son estables, ya que el sentido de los vectores tangentes a las órbitas cerca a cada punto de equilibrio señala a cada uno de estos, mientras que los puntos de equilibrio ubicados sobre la parte no positiva de dicho eje son inestables, debido a que en todos estos los vectores tangentes a al menos una de las curvas solución cerca a cada punto de equilibrio señala en sentido opuesto al punto.

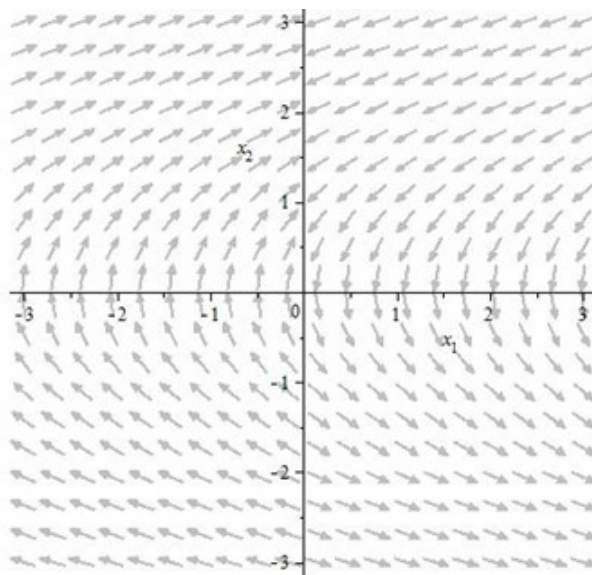


Figura 3.17: Campo de direcciones del sistema asociado al modelo guerra de guerrillas.

Ahora que se conoce el sentido de las trayectorias en el primer cuadrante, para ilustrar en el plano  $x_1x_2$  las tres situaciones que pueden darse en el combate se recurre a (3.42) de donde se tiene:

$$\frac{\alpha}{2}x_2^2 = \beta x_1 + \frac{\alpha}{2}x_{2_0}^2 - \beta x_{1_0}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{2}}x_2 = \sqrt{\beta x_1 + \frac{\alpha}{2}x_{2_0}^2 - \beta x_{1_0}}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sqrt{\beta x_1 + \frac{\alpha}{2} x_{2_0}^2 - \beta x_{1_0}}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sqrt{\beta x_1 + c} \tag{3.45}$$

donde  $c = \frac{\alpha}{2} x_{2_0}^2 - \beta x_{1_0}$ .

Se observa que (3.45) es una función radical cuyo vértice se encuentra sobre el eje  $x_1$  y su ubicación depende del signo de  $c$ , ya que de (3.45) se tiene:

$$x_1 = -\frac{c}{\beta} \tag{3.46}$$

el vértice de esta función es  $(-\frac{c}{\beta}, 0)$ .

Si la fuerza combativa inicial de  $X_1$  es mayor a la de  $X_2$ , es decir que  $X_1$  es el ejército ganador del combate,  $c < 0$  y por ende  $x_1 > 0$ , es decir, el vértice de la función se encuentra sobre la parte positiva del eje  $x_1$  e indica la cantidad de efectivos con la que finaliza  $X_1$  el combate (figura 3.18).

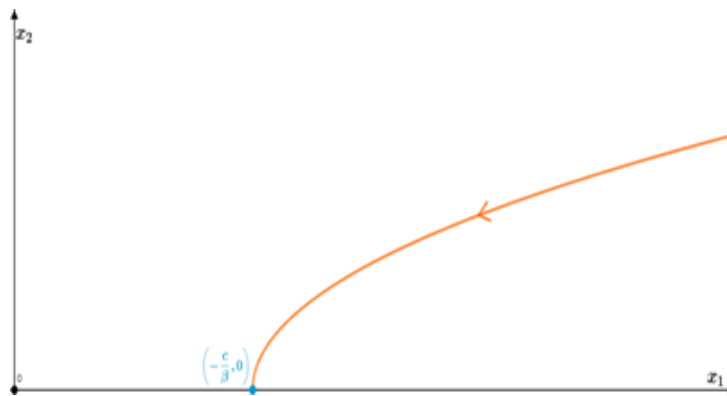


Figura 3.18: Trayectoria de una situación en la que  $X_2$  es aniquilado, mientras que  $X_1$  aún conserva efectivos bajo el modelo guerra de guerrillas.

Si la fuerza combativa inicial de  $X_2$  es mayor que la de  $X_1$ , es decir que el ejército  $X_2$  es el ganador,  $c > 0$ , por lo que de (3.46) se sabe que  $x_1 < 0$ , quedando el vértice sobre la parte negativa del eje  $x_1$  (figura 3.19).

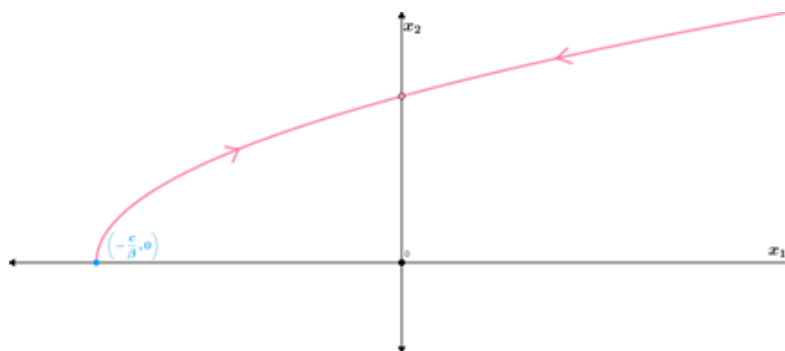


Figura 3.19: Gráfica de la función (3.46) cuando  $c > 0$ .

En este caso, considerando el contexto, el punto  $\left(-\frac{c}{\beta}, 0\right)$  no proporciona información relevante, sin embargo, en la figura (3.19) se observa que la gráfica de la función interseca el eje  $x_2$ . Para determinar este punto de intersección se hace  $x_1 = 0$  en (3.45), debido a que se conoce que el ejército  $X_1$  es el perdedor del combate, de donde se obtiene

$$x_2 = \sqrt{\frac{2c}{\alpha}}$$

Por tanto,  $\left(0, \sqrt{\frac{2c}{\alpha}}\right)$  corresponde al pie de fuerza final de  $X_2$  cuando  $X_1$  es aniquilado (figura 3.20).

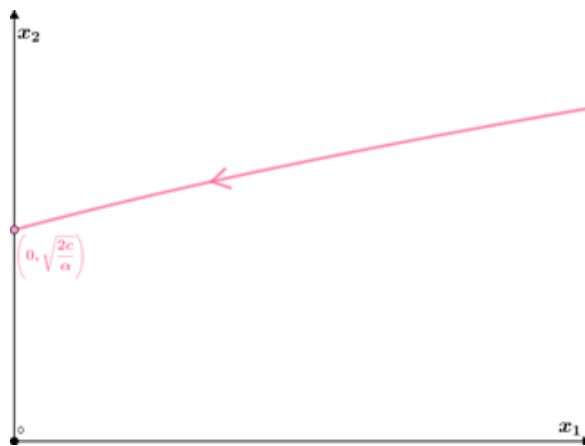


Figura 3.20: Trayectoria de una situación en la que  $X_1$  es aniquilado, mientras que  $X_2$  aún conserva efectivos bajo el modelo guerra de guerrillas.

Cuando las fuerzas combativas iniciales de los dos bandos son iguales, es decir que la batalla finaliza en empate,  $c = 0$  por lo que de (3.45) se tiene que el vértice de la función es  $(0, 0)$ .

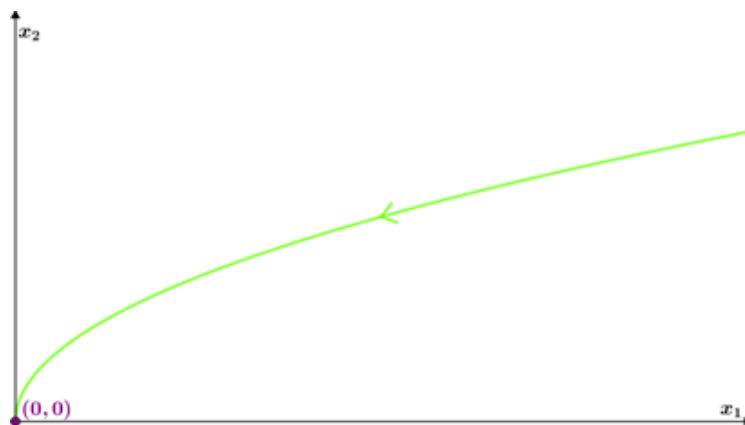


Figura 3.21: Trayectoria de una situación en la que  $X_1$  y  $X_2$  son aniquilados bajo el modelo guerra de guerrillas.

Ahora que se conoce la gráfica del comportamiento de las soluciones del sistema de manera sincrónica para cada caso, se considera pertinente ilustrarlas en un mismo plano (figura 3.22). Cabe aclarar que solo se grafican las curvas solución situadas en el primer

cuadrante debido que para el contexto solo tienen sentidos valores no negativos para  $x_1$  y  $x_2$ .

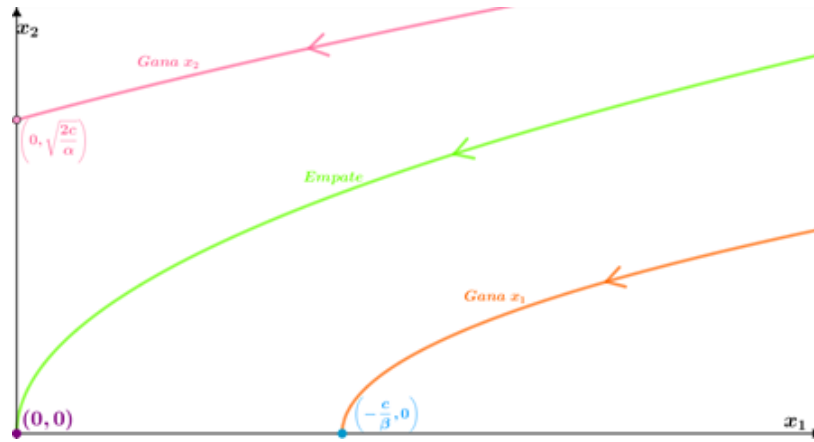


Figura 3.22: Representación gráfica de las tres situaciones que se pueden presentar al finalizar el combate bajo el modelo guerra de guerrillas.

Por otro lado, dado que este modelo es una combinación de los dos sistemas anteriores, es natural pensar que como el ejército  $X_1$  tiene una tasa de pérdida asociada al modelo de fuego en área, si este es quien gana en una sola batalla,  $X_2$  no tiene la posibilidad de cambiar este resultado al dividir a  $X_1$  en partes iguales. Por el contrario, si  $X_2$  es quien gana en una sola batalla, al tener una tasa de pérdida asociada al modelo de fuego directo se puede pensar que  $X_1$  puede cambiar este resultado si logra dividir a su contrincante en  $n$  partes iguales de tal manera que su fuerza combativa inicial sea mayor que la  $n$ -ésima parte de la fuerza combativa inicial de  $X_2$ . En resumen, se presume que aplicar el principio de concentración solo es favorable para el ejército  $X_1$ . Al igual que en los modelos anteriores se considera para las dos situaciones que cada efectivo mantiene su coeficiente de aniquilamiento durante las  $n$  batallas.

- **Situación 1:** Dado  $x_{1_0} = kx_{2_0}$  y  $\alpha = p\beta$ , con  $k, p \in \mathbb{Q}^+$ . Se asume que la fuerza combativa inicial de  $X_1$  es mayor que la de  $X_2$ , por lo que al enfrentarse en una sola batalla el ejército ganador es  $X_1$ .

Como se quiere estudiar en qué condiciones  $X_2$  aniquila en su totalidad a  $X_1$  al dividirlo en  $n$  partes iguales y atacarlo secuencialmente se toma inicialmente la ecuación (3.42), de donde se tiene

$$\beta x_{1_0} - \frac{\alpha}{2} x_{2_0}^2 = \beta x_{1_f} - \frac{\alpha}{2} x_{2_f}^2 \quad (3.47)$$

- **Situación 1.1:** Si  $X_1$  es dividido en dos partes iguales se tiene que la fuerza combativa inicial de este ejército para cada enfrentamiento es

$$\beta \frac{x_{1_0}}{2} = \frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{2_0}}{2} \right) \quad (3.48)$$

Reemplazando (3.48) en (3.47), para el primer enfrentamiento se tiene

$$\frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{2_0}}{2} \right) - \frac{\alpha}{2} x_{2_0}^2 = \beta x_{1_{f1}} - \frac{\alpha}{2} x_{2_{f1}}^2$$



Como el propósito es conocer las condiciones en las que gana  $X_2$  las dos batallas, se asume que en los dos enfrentamientos  $X_1$  finaliza con cero efectivos y por tanto, la fuerza combativa final de este ejército es cero.

$$\frac{\alpha}{2}x_{2_0} \left( \frac{k}{p} - x_{2_0} \right) = -\frac{\alpha}{2}x_{2_{f1}}^2 \quad (3.49)$$

Para que la igualdad tenga sentido se debe tener que

$$k < x_{2_0}p$$

Teniendo en cuenta que  $k = \frac{x_{1_0}}{x_{2_0}}$  y  $p = \frac{\alpha}{\beta}$  se tiene :

$$\frac{x_{1_0}}{x_{2_0}^2} < \frac{\alpha}{\beta}$$

De esta última desigualdad se entiende que  $X_2$  gana la primera batalla si esta se cumple. Ahora, para conocer las condiciones que se deben cumplir al ganar  $X_2$  el segundo enfrentamiento, se halla la cantidad de efectivos con la que finalizó el primer combate, para ello se despeja  $x_{2_{f1}}$  de (3.49)

$$x_{2_{f1}} = \sqrt{x_{2_0} \left( x_{2_0} - \frac{k}{p} \right)} \quad (3.50)$$

Ahora reemplazando (3.50) y (3.48) en (3.47)

$$\frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{2_0}}{2} \right) - \frac{\alpha}{2} \left( \sqrt{x_{2_0} \left( x_{2_0} - \frac{k}{p} \right)} \right)^2 = \beta x_{1_{f2}} - \frac{\alpha}{2}x_{2_{f2}}^2$$

Razonando de manera análoga

$$\frac{\alpha}{2}x_{2_0} \left( \frac{2k}{p} - x_{2_0} \right) = -\frac{\alpha}{2}x_{2_{f2}}^2$$

de aquí

$$2\frac{x_{1_0}}{x_{2_0}^2} < \frac{\alpha}{\beta} \quad (3.51)$$

De (3.51) se puede afirmar que, si se cumple esta desigualdad,  $X_2$  es el ejército ganador al finalizar la segunda batalla, es decir que  $X_1$  es totalmente aniquilado.

- **Situación 1.2:** Si  $X_1$  es dividido en tres partes iguales se tiene que la fuerza combativa inicial de este ejército para cada enfrentamiento es :

$$\beta \frac{x_{1_0}}{3} = \frac{\alpha}{p} \left( \frac{kx_{2_0}}{3} \right) \quad (3.52)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al descrito para la situación 1.1 se tiene que:

$$ax_{2_0} \left( \frac{k}{3p} - \frac{x_{2_0}}{2} \right) = -\frac{\alpha}{2}x_{2_{f1}}^2 \quad (3.53)$$

Para que la igualdad tenga sentido se debe cumplir que

$$\frac{x_{1_0}}{x_{2_0}^2} < \frac{3}{2} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)$$

Lo que significa que  $X_2$  gana la primera batalla si se cumple esta desigualdad. De (3.53) se sabe que  $X_2$  inicia el segundo enfrentamiento con la siguiente cantidad de efectivos

$$x_{2_{f1}} = \sqrt{2x_{2_0} \left( \frac{x_{2_0}}{2} - \frac{k}{3p} \right)} \quad (3.54)$$

Por lo que se tiene

$$ax_{2_0} \left( \frac{2k}{3p} - \frac{x_{2_0}}{2} \right) = -\frac{\alpha}{2} x_{2_{f2}}^2 \quad (3.55)$$

de aquí

$$\frac{x_{1_0}}{x_{2_0}^2} < \frac{3}{4} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)$$

Al  $X_2$  ganar la segunda batalla se debe cumplir la desigualdad anterior. Luego, de (3.55) se tiene que  $X_2$  inicia la tercera batalla con el siguiente pie de fuerza

$$x_{2_{f2}} = \sqrt{2x_{2_0} \left( \frac{x_{2_0}}{2} - \frac{2k}{3p} \right)}$$

Reemplazando

$$ax_{2_0} \left( \frac{k}{p} - \frac{x_{2_0}}{2} \right) = -\frac{\alpha}{2} x_{2_{f3}}^2$$

de donde

$$\frac{x_{1_0}}{x_{2_0}^2} < \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) \quad (3.56)$$

Teniendo en cuenta (3.56) se puede afirmar que, si se cumple esta desigualdad,  $X_2$  es el ejército ganador al finalizar la tercera batalla, es decir que  $X_1$  es totalmente aniquilado.

De (3.51) y (3.56) se observa que sin importar el número de partes iguales en las que se divida el ejército que inicialmente gana, se debe cumplir que

$$\beta x_{1_0} < \frac{\alpha}{2} x_{2_0}^2$$

Sin embargo, no es posible que esta desigualdad se dé, dado que inicialmente se tomó como ganador en un solo enfrentamiento a  $X_1$  lo que quiere decir que  $\beta x_{1_0} > \frac{\alpha}{2} x_{2_0}^2$ . Así que, bajo este modelo el ejército  $X_2$  no tiene la posibilidad de cambiar este resultado dividiendo a su oponente en partes iguales <sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>La prueba de esta afirmación se encuentra en el anexo B.

- **Situación 2:** Dado  $x_{1_0} = kx_{2_0}$  y  $\alpha = p\beta$ , con  $k, p \in \mathbb{Q}^+$ . Se asume que la fuerza combativa inicial de  $X_2$  es mayor que la de  $X_1$ , por lo que al enfrentarse en una sola batalla el ejército ganador es  $X_2$ .

Como se quiere estudiar en qué condiciones  $X_1$  aniquila en su totalidad a  $X_2$  al dividirlo en  $n$  partes iguales y atacarlo secuencialmente se razona de manera análoga a la situación anterior, tomando inicialmente la ecuación (3.42), de donde se tiene

$$\beta x_{1_0} - \frac{\alpha}{2} x_{2_0}^2 = \beta x_{1_f} - \frac{\alpha}{2} x_{2_f}^2 \quad (3.57)$$

- **Situación 2.1:** Si  $X_2$  es dividido en dos partes iguales se tiene que la fuerza combativa inicial de este ejército para cada enfrentamiento es

$$\frac{\alpha}{2} \left( \frac{x_{2_0}}{2} \right)^2 = \frac{p\beta}{2} \left( \frac{x_{1_0}}{2k} \right)^2 = \frac{p\beta}{2} \left( \frac{x_{1_0}^2}{4k^2} \right) \quad (3.58)$$

Reemplazando (3.58) en (3.57), para el primer enfrentamiento se tiene

$$\beta x_{1_0} \left( 1 - \frac{px_{1_0}}{8k^2} \right) = \beta x_{1_{f1}} \quad (3.59)$$

Para que la igualdad tenga sentido se debe tener que

$$8 \left( \frac{x_{1_0}}{x_{2_0}^2} \right) > \frac{\alpha}{\beta}$$

De esta última desigualdad se entiende que  $X_1$  gana la primera batalla si esta se cumple. Ahora, para conocer las condiciones que se deben cumplir al ganar  $X_1$  el segundo enfrentamiento, se halla la cantidad de efectivos con la que finalizó el primer combate, para ello se despeja  $x_{1_{f1}}$  de (3.59)

$$x_{1_{f1}} = x_{1_0} \left( 1 - \frac{px_{1_0}}{8k^2} \right) \quad (3.60)$$

Ahora reemplazando (3.60) y (3.58) en (3.57)

$$\beta x_{1_0} \left( 1 - 2 \frac{px_{1_0}}{8k^2} \right) = \beta x_{1_{f2}}$$

de aquí

$$2\beta x_{1_0} > \frac{\alpha}{2} x_{2_0} \quad (3.61)$$

De (3.61) se puede afirmar que, si se cumple esta desigualdad,  $X_1$  es el ejército ganador al finalizar la segunda batalla, es decir que  $X_2$  es totalmente aniquilado.

- **Situación 2.2:** Si  $X_2$  es dividido en tres partes iguales se tiene que la fuerza combativa inicial de este ejército para cada enfrentamiento es

$$\frac{\alpha}{2} \left( \frac{x_{2_0}}{3} \right)^2 = \frac{p\beta}{2} \left( \frac{x_{1_0}}{3k} \right)^2 = \frac{p\beta}{2} \left( \frac{x_{1_0}^2}{9k^2} \right) \quad (3.62)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al descrito para el caso anterior se tiene que

$$\beta x_{1_0} \left(1 - \frac{px_{1_0}}{18k^2}\right) = \beta x_{1_{f1}} \quad (3.63)$$

Para que la igualdad tenga sentido se debe tener que

$$18 \left(\frac{x_{1_0}}{x_{2_0}^2}\right) > \frac{\alpha}{\beta}$$

Lo que significa que  $X_1$  gana la primera batalla si se cumple esta desigualdad. De (3.63) se sabe que  $X_1$  inicia el segundo enfrentamiento con la siguiente cantidad de efectivos

$$x_{1_{f1}} = x_{1_0} \left(1 - \frac{px_{1_0}}{18k^2}\right) \quad (3.64)$$

Por lo que se tiene

$$\beta x_{1_0} \left(1 - \frac{px_{1_0}}{9k^2}\right) = \beta x_{1_{f2}} \quad (3.65)$$

de aquí

$$9 \left(\frac{x_{1_0}}{x_{2_0}^2}\right) > \frac{\alpha}{\beta}$$

Al  $X_1$  ganar la segunda batalla se debe cumplir la desigualdad anterior. Luego, de (3.65) se tiene que  $X_1$  inicia la tercera batalla con el siguiente pie de fuerza

$$x_{1_{f2}} = x_{1_0} \left(1 - \frac{px_{1_0}}{9k^2}\right)$$

Reemplazando

$$\beta x_{1_0} \left(1 - \frac{px_{1_0}}{6k^2}\right) = \beta x_{1_{f3}}$$

de donde

$$3\beta x_{1_0} > \frac{\alpha}{2} x_{2_0}^2 \quad (3.66)$$

Teniendo en cuenta (3.66) se puede afirmar que, si se cumple esta desigualdad,  $X_1$  es el ejército ganador al finalizar la tercera batalla, es decir que  $X_2$  es totalmente aniquilado.

Considerando las desigualdades (3.61) y (3.66), se presume que:

Dado  $x_{1_0} = kx_{2_0}$ ,  $\alpha = p\beta$ , con  $k, p \in \mathbb{Q}^+$ , y  $X_2$  es el ganador cuando se enfrenta a  $X_1$  en una sola batalla de todos contra todos. Si  $X_1$  divide el pie de fuerza de  $X_2$  en  $n$  partes iguales y se satisface

$$\beta x_{1_0} > \frac{\frac{\alpha}{2} x_{2_0}^2}{n} \quad (3.67)$$

entonces  $X_1$  aniquila al ejército  $X_2$  en su totalidad en el  $n$ -ésimo combate<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>La prueba de esta afirmación se encuentra en el anexo C.

En resumen, el sistema asociado a este modelo de guerra se puede catalogar de igual forma que el anterior, lo que implica que la estabilidad de sus puntos de equilibrio se conjeturó desde la observación del campo de direcciones. Al igual que en los dos modelos anteriores, el resultado final del combate puede ser determinado por la comparación numérica de las fuerzas combativas de cada bando: cuando  $\beta x_1 > \frac{\alpha}{2} x_2^2$ ,  $X_1$  es el ganador del combate, mientras que  $X_2$  gana si  $\frac{\alpha}{2} x_2^2 > \beta x_1$ ; en caso de igualdad entre las fuerzas combativas el enfrentamiento finaliza en empate. En cuanto la aplicación del principio de concentración se verificó que en este modelo el ejército irregular, quien actúa bajo el modelo de fuego directo, tiene la posibilidad de cambiar el resultado del enfrentamiento a su favor al dividir al ejército regular, quien actúa bajo el modelo de fuego en área, en partes iguales para atacarlo secuencialmente, siempre y cuando la fuerza combativa inicial del ejército irregular sea mayor a la  $n$ -ésima parte de la fuerza combativa inicial del ejército regular. Por el contrario, esta estrategia de división no puede ser aplicada por el ejército regular debido a su manera de operar (fuego indirecto).

Durante el análisis de cada modelo se determinó, de manera matemática o intuitiva, que sus puntos de equilibrio son estables teniendo en cuenta el contexto, es decir, su comportamiento en el primer cuadrante. Este resultado se ajusta a la imposibilidad de reposición de efectivos, ya que en caso de que se tuviera un punto de equilibrio inestable al menos una trayectoria que se encuentra en el primer cuadrante y está cerca a dicho punto se alejaría de él, lo cual en el contexto indicaría que en algún instante de tiempo  $t$  el pie de fuerza de al menos uno de los ejércitos aumenta.

# Conclusiones

Al realizar un contraste entre los objetivos planteados y el desarrollo de esta monografía se puede establecer que, en primer lugar, si bien el marco matemático construido abarcó algunos conceptos que no fueron usados durante el análisis, el haber realizado una recopilación teórica amplia sobre los SPALH nos dio la posibilidad de aumentar nuestros conocimientos matemáticos en este aspecto; particularmente, comprender de manera general el comportamiento de las trayectorias alrededor del punto de equilibrio y de esta manera interpretar las curvas solución de los modelos en el contexto, sin recurrir solamente al uso de softwares para graficar el campo de direcciones. No obstante, atendiendo a que en un trabajo de grado se espera que toda la información consignada contribuya al alcance de los objetivos, se considera pertinente realizar en paralelo el análisis y la construcción del marco matemático para de esta manera tener certeza sobre los conceptos que son realmente indispensables.

En cuanto a la deducción de la relación que existe entre las fuerzas combativas con el resultado final del combate a través de la exploración, el objetivo no se cumplió a cabalidad, solo fue posible hacerlo para el modelo de Fuego Directo, puesto que las soluciones analíticas de los modelos Fuego en Área y Guerra de Guerrillas están definidas a trozos o presentan discontinuidades. Sin embargo, la exploración llevada a cabo para el modelo Fuego Directo nos ayudó a ejercitar, desde el inicio del análisis, procesos de discusión, formulación de conjeturas y comunicación de ideas matemáticas. Adicionalmente, durante los análisis apreciamos el papel que juegan las fuerzas combativas no solo en el resultado del combate, sino además en la comprensión y verificación matemática del principio de concentración, debido a que la relación entre las fuerzas combativas fue determinante para el desarrollo de dicha prueba. Con relación a esto último, el verificar matemáticamente lo expuesto por Lanchester respecto al principio de concentración conllevó a extrapolar el procedimiento realizado para dicha justificación matemática a la variación propuesta por Deitchman, en la que se logró comprobar la conjetura que surgía al ser este modelo una mezcla de los de Lanchester.

En lo que refiere a nuestra formación como Licenciados en Matemáticas, consideramos que elaborar esta monografía contribuyó a nuestro ámbito matemático, pedagógico y personal. En primer lugar, amplió nuestros conocimientos entorno a los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y nos dio la posibilidad de recordar y poner en juego, en otro contexto, conocimientos matemáticos construidos durante nuestra formación académica.

Adicionalmente, el realizar una consulta teórica profunda, formular hipótesis, estructu-

rar argumentos para sustentar los resultados obtenidos a través de la exploración gráfica, usar relaciones deducidas para explicar matemáticamente otros hechos, traducir entre la representación analítica y gráfica de las soluciones de cada sistema y elegir la representación de las soluciones de estos adecuada al propósito de este trabajo, al mismo tiempo que se interpretaba dicha representación en el contexto, nos permite afirmar que la estructura y el desarrollo del contenido de este trabajo de grado fortaleció nuestro conocimiento y razonamiento matemático, así como las competencias representativas y argumentativas desarrolladas durante nuestra formación docente.

En segundo lugar, realizar el análisis de los modelos desde la postura del estudiante, iniciando con una exploración gráfica e ir utilizando teoría establecida a medida que se desarrollaba dicho estudio, nos ratificó la importancia de hacer matemáticas a partir de la exploración y la intuición, lo cual generalmente es subestimado en el aula debido a que es usual que el proceso de enseñanza de esta ciencia se centre, desde el inicio, en el rigor matemático. En este orden de ideas, atendiendo a nuestro futuro rol docente consideramos importante permitirle al estudiante que construya su conocimiento matemático de manera personal a través de la experimentación o la exploración, para que posteriormente logre comprender, por medio de la institucionalización, cómo dicho conocimiento le da sentido al saber matemático. Adicionalmente, nos dio la posibilidad de reconocer que existen otros modelos susceptibles de ser llevados al aula para trabajar Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, que pueden despertar un mayor interés por parte de los alumnos y que se convierten en una alternativa a los modelos clásicos presentados en los textos académicos.

Respecto al tercer ámbito, si bien en este documento no se reportan aspectos relacionados con la indagación asociada al conflicto armado colombiano, realizarla nos permitió reconocer que ignoramos cómo el vivir en medio de una guerra repercute de manera negativa en lo social, económico y afectivo, llevándonos a cuestionarnos acerca de cómo desde nuestro rol docente podemos aportar a la formación de ciudadanos que trabajen en pro del bienestar de todos los actores de la sociedad.

Para finalizar, un aspecto que no fue abordado en este estudio, pero puede ser analizado en trabajos posteriores, es identificar las características que se deben cumplir para que al dividir en partes desiguales al ejército que gana el combate en un solo enfrentamiento el resultado cambie a favor del contrincante.

# Bibliografía

- Apóstol, T.M. (2002). Sistemas de Ecuaciones Diferenciales. En F. Vélez (Trad.) *Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades* (2 ed., Vol. 2, pp. 244, 273). Recuperado septiembre 01, 2020, de <http://www.webdelprofesor.ula.ve/nucleotrujillo/armandom/apostolv2.pdf>.
- Blanchard, P., Devaney, R. L., y Hall, G. R. (1998). Sistemas Lineales. En L. Medina, R. Garay y M. A. Toledo (Eds. y Trad.), *Ecuaciones diferenciales* (p. 258). México: International Thomson Editores S.A.
- Deitchman, S. J. (1962). A Lanchester Model of Guerrilla Warfare. *Operations Research*, 10(6), 818-827. Recuperado junio 09, 2020, de <http://www.jstor.org/stable/168104>
- Giordano, F. R., Fox, W. P., Horton, S. B. (2013). Two Military Examples. En R. Stratton (Ed.), *A first course in mathematical modeling* (5 ed., p. 548). Boston: Cengage Learning.
- Grossman, S. I., y Flores, J. J. (2012). Forma Canónica de Jordan. En P. E. Roig, M. I. Rocha y E. C. Zúñiga (Eds. y Trad.), *Álgebra lineal* (7 ed., pp. 615, 617). México: McGraw-Hill.
- Kress, M., y Mackay, N. J. (2014). Bits or Shots in Combat? The Generalized Deitchman Model of Guerrilla Warfare. *Operations Research Letters*, 42(1), 102-108. doi:10.1016/j.orl.2013.08.004.
- Lanchester, F. W. (1916). The Principle of Concentration. The N-Square Law. *Aircraft in Warfare the Dawn of the Fourth Arm*. Londres, Inglaterra. Recuperado julio 31, 2020, de <https://archive.org/details/aircraftinwarfar00lancrich/page/n23/mode/2up>.
- Lepingwell, J. W. R. (1987). The Laws of Combat? Lanchester Reexamined. *International Security*, 12(1), 89-134. doi:10.2307/2538918.
- Ochoa, G. H. (2009). Aplicación del Modelo de Lanchester de Fuego Dirigido en los Enfrentamientos del Estado en Contra del Narcotráfico (Tesis maestría, Universidad Nacional Autónoma de México). Recuperado febrero 08, 2020, de [ochoavilla.pdf\(unam.mx\)](#)



- Pinedo, C. A. (2013). Caracterización de la guerra asimétrica en el contexto de las relaciones internacionales (Tesis maestría, Universidad Militar Nueva Granada). Recuperado febrero 12, 2021, de <http://hdl.handle.net/10654/9376>.
- Romero, J. L. (2011). Simulación y Modelos (notas de clase). Universidad Nacional Abierta. El Tigre, Venezuela. Recuperado diciembre 09, 2020, de [https://www.academia.edu/1749267/Simulaci\u00f3n\\_y\\_Modelos](https://www.academia.edu/1749267/Simulaci\u00f3n_y_Modelos).
- Taylor, J. G. (1980). Lanchester-Type Models of Warfare. Recuperado octubre 08, 2020, de <https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a090842.pdf>.
- Walter, W. (1998). Linear Differential Equations. En S. Axler, F.W. Gehring y K.A. Ribet (Eds.), *Ordinary differential equations* (p. 176). Estados Unidos: Springer-Verlag New York, Inc.

# Anexos

## Anexo A: Complemento Marco Matemático

En este apartado se encuentra el complemento de la recopilación teórica que se realizó con el propósito de promover una mejor comprensión de los modelos de guerra que son objeto de estudio desde lo cualitativo y lo cuantitativo. Sin embargo, como se expresó al inicio del marco matemático, dado que esta información no sustentó el análisis de los modelos matemáticos de guerra estudiados los autores de esta monografía decidieron presentarla en este anexo.

Como en el marco matemático no se abordó en su totalidad la descripción del comportamiento de los distintos tipos de soluciones del SPALH ligado a los autovalores reales distintos, este apartado inicia con ello, seguido de la solución general de dicho sistema vinculada al tipo de autovalor junto con el comportamiento de las soluciones de igual forma relacionado a dicha clasificación expuesta en el marco matemático. Posteriormente, se encuentra teoría correspondiente a los SPANLH, que son susceptibles de ser linealizados, iniciando con la definición de SPANLH, luego se presenta el objetivo principal de la linealización de un sistema, seguido del desarrollo del procedimiento de linealización de un sistema y finalizando con un esquema en el que se puede apreciar, a modo de resumen, los casos en los que el SPANLH no es linealizable y en los que sí lo es; para este último caso se presenta el desarrollo del tratamiento cualitativo de las soluciones del sistema linealizado.

### Clasificación de Autovalores

#### ▪ Autovalores Reales Distintos

Cuando los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen el mismo signo, se dice que el punto de equilibrio es un **nodo**. Si  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  todas las trayectorias se acercan al origen cuando  $t \rightarrow \infty$  y se dice que el origen es un **nodo estable** (figura A. 1 ). En esta figura se observa que hay cuatro trayectorias especiales que son las semirrectas que componen  $E(\lambda_1)$  y  $E(\lambda_2)$  y las demás son curvas que entran en el origen tangentes (en el límite) a la recta  $E(\lambda_1)$ , con  $E(\lambda_2)$  jugando el papel de una suerte de “eje”. Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  el origen es un **nodo inestable** (figura A. 2); aquí todas las trayectorias se alejan del origen cuando  $t \rightarrow \infty$  (tienden a él cuando  $t \rightarrow -\infty$ ), saliendo, excepto las dos semirrectas que componen  $E(\lambda_1)$ , tangentes a  $E(\lambda_2)$ , y con  $E(\lambda_1)$  jugando el papel de “eje”.

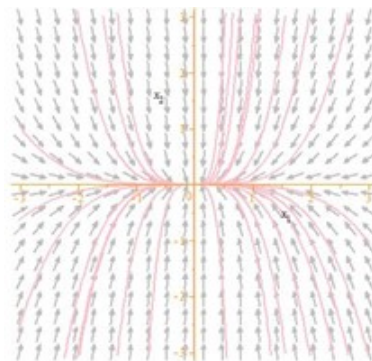


Figura A. 1: *Ejemplo gráfico de nodo estable*

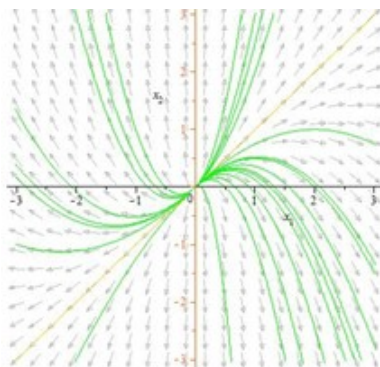


Figura A. 2: *Ejemplo gráfico de un nodo inestable*

**Nota:** Se hace evidente que tanto en el caso expuesto en el marco matemático como en este las trayectorias especiales que componen  $E(\lambda_1)$  y  $E(\lambda_2)$ , son las curvas correspondientes a las soluciones de línea recta.

#### ■ Autovalores Reales Dobles

El autovalor de una matriz  $A$  cuadrada de tamaño  $2 \times 2$ , de multiplicidad algebraica dos puede tener multiplicidad geométrica 1 o 2. Si se presenta el primer caso, se puede enunciar la siguiente proposición.

**Proposición 1**<sup>6</sup>: Suponga que la matriz  $A$  cuadrada de tamaño  $2 \times 2$  tiene un autovalor  $\lambda$  de multiplicidad algebraica dos y geométrica uno. Sea  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$  un autovector correspondiente a  $\lambda$ , entonces existe un vector  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$  que satisface la ecuación

$$(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$$

denominado autovector generalizado de  $A$  correspondiente al autovalor  $\lambda$ .

Además de lo anterior, se puede afirmar que  $A$  no es diagonalizable, sin embargo, se realizará un procedimiento similar al desarrollado en la sección de SPALH presentado en el marco matemático con el propósito de hallar la solución general de un SPALH con estas características; para esto se hará uso de la siguiente proposición.

**Proposición 2**<sup>7</sup>: Suponga que  $A$ ,  $\lambda$ ,  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  están definidos como en la proposición anterior y sea  $V$  la matriz cuyas columnas son  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , entonces  $J = V^{-1}AV$ , donde  $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  es la forma canónica de Jordan de  $A$ .

A partir de la ecuación expuesta en esta proposición, se multiplican ambos miembros de la ecuación por  $V$ , a izquierda, y por  $V^{-1}$ , a derecha.

<sup>6</sup>Demostración Grossman y Flores (2012, p. 615.)

<sup>7</sup>Demostración Grossman y Flores (2012, p. 617)

$$\begin{aligned} VJV^{-1} &= VV^{-1}AVV^{-1} \\ VJV^{-1} &= (VV^{-1})A(VV^{-1}) \\ A &= VJV^{-1} \end{aligned}$$

Desarrollando un procedimiento análogo al realizado en el apartado para autovalores reales distintos se obtiene que

$$A^k = VJ^kV^{-1}$$

Reemplazando lo anterior en (2.6)

$$e^{tA} = Ve^{tJ}V^{-1}$$

Ahora, multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por  $V$  a derecha se tiene

$$e^{tA}V = Ve^{tJ}$$

Desarrollando lo anterior

$$\begin{aligned} e^{tA}V &= \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \\ e^{tA}V &= \begin{pmatrix} v_{11}e^{\lambda t} & v_{11}te^{\lambda t} + v_{12}e^{\lambda t} \\ v_{21}e^{\lambda t} & v_{21}te^{\lambda t} + v_{22}e^{\lambda t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dado que  $e^{tA}V$  es una matriz fundamental de soluciones, por definición

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_1 \quad y \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda t}(t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema (2.4) y, por ende, la solución general de un SPALH cuando la matriz  $A$  tiene un autovalor real doble con multiplicidad geométrica 1 es:

$$\mathbf{x}(t) = c_1e^{\lambda t}\mathbf{v}_1 + c_2e^{\lambda t}(t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \quad (\text{A. 1})$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias.

Respecto al comportamiento cualitativo de las soluciones de este sistema se dice que el origen, el punto de equilibrio, es un **nodo impropio**, estable si  $\lambda < 0$  (figura A. 3) e inestable si  $\lambda > 0$  (figura A. 4); en el primer caso, todas las trayectorias tienden al origen cuando  $t \rightarrow \infty$  y en el segundo, todas se alejan del origen cuando  $t$  crece (tienden a él cuando  $t \rightarrow -\infty$ ). Aparte del origen, hay dos trayectorias especiales, las dos semirrectas que forman el  $E(\lambda)$ , es decir, la solución de línea recta  $\mathbf{x}_1(t)$ . Las demás son curvas abiertas simples que, cuando  $\lambda < 0$  (respectivamente,  $\lambda > 0$ ) entran (respectivamente, salen) en el origen tangentes a la recta  $E(\lambda)$ .

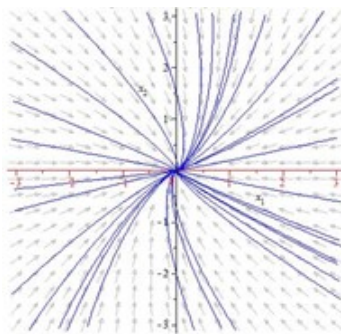


Figura A. 3: *Ejemplo gráfico de un nodo impropio estable*

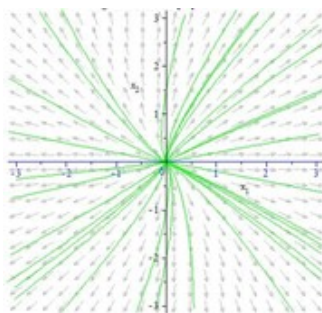


Figura A. 4: *Ejemplo gráfico de un nodo impropio inestable*

Por otro lado, si se presenta el caso en el que el autovalor de la matriz  $A$  tiene multiplicidad algebraica y geométrica dos, la matriz  $A$  es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Donde  $a = \lambda$ . Como  $\lambda$  es de multiplicidad geométrica dos entonces se puede afirmar que  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$  son los autovalores linealmente independientes asociados a  $\lambda$ . En este caso, todo vector no nulo es autovector asociado a  $\lambda$ . Así que, considerando nuevamente que  $e^{tA}V$  es una matriz fundamental de soluciones se tiene

$$e^{tA}V = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

Como  $a = \lambda$

$$e^{tA}V = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

$$e^{tA}V = \begin{pmatrix} v_{11}e^{\lambda t} & v_{12}e^{\lambda t} \\ v_{21}e^{\lambda t} & v_{22}e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Por definición de matriz fundamental

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_1 \quad y \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_2$$

forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , donde  $A$  tiene un autovalor de multiplicidad algebraica y geométrica dos y, por tanto, la solución general de un SPALH con dichas características es

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda t} \mathbf{v}_2 \quad (\text{A. 2})$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias.

**Nota:** En este caso el origen o punto de equilibrio es un tipo especial de nodo que se denomina punto de estrella, estable si  $\lambda < 0$  (figura A. 5) e inestable si  $\lambda > 0$  (figura A. 6).

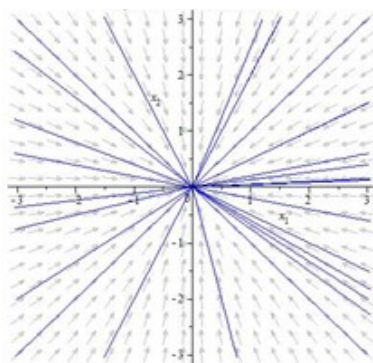


Figura A. 5: *Ejemplo gráfico de un punto de estrella estable*

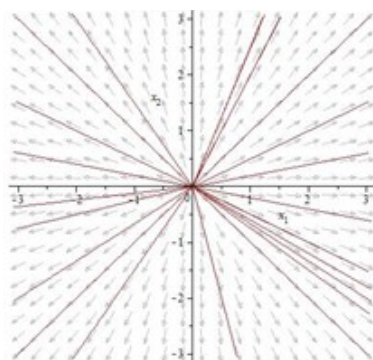


Figura A. 6: *Ejemplo gráfico de un punto de estrella inestable*

### ■ Autovalores Complejos Conjugados

Dado que en este caso los autovalores de  $A$  son dos raíces complejas conjugadas los correspondientes autovectores tienen la misma característica, es decir:

**Proposición 3:** Sean  $\lambda_1 = a + ib$  y  $\lambda_2 = a - ib$  autovalores de  $A$ . Si  $\mathbf{v}_1 = B_1 + iB_2$  es un autovector asociado a  $\lambda_1$ , donde  $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^2$  vectores arbitrarios de dos componentes, entonces  $\mathbf{v}_2 = B_1 - iB_2$  es un autovector asociado a  $\lambda_2$ .

**Demostración:** Dado que  $\mathbf{v}_1$  es un autovector asociado a  $\lambda_1$ , por definición de autovector:

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$$

Reemplazando

$$A(\mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2) = (a + ib)(\mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2)$$

Aplicando la ley distributiva se tiene

$$A\mathbf{B}_1 + Ai\mathbf{B}_2 = a\mathbf{B}_1 + ai\mathbf{B}_2 + bi\mathbf{B}_1 - b\mathbf{B}_2$$

Conmutando y asociando

$$A\mathbf{B}_1 + Ai\mathbf{B}_2 = (a\mathbf{B}_1 - b\mathbf{B}_2) + i(a\mathbf{B}_2 + b\mathbf{B}_1)$$

Como se sabe que dos números complejos son iguales si y solo si sus partes reales e imaginarias son iguales entonces

$$A\mathbf{B}_1 = (a\mathbf{B}_1 - b\mathbf{B}_2) \tag{A. 3}$$

$$Ai\mathbf{B}_2 = i(a\mathbf{B}_2 + b\mathbf{B}_1) \tag{A. 4}$$

Tomando (A. 4) y multiplicándola por  $-1$

$$-Ai\mathbf{B}_2 = -i(a\mathbf{B}_2 + b\mathbf{B}_1) \tag{A. 5}$$

Sumando (A. 3) con (A. 5)

$$A\mathbf{B}_1 - Ai\mathbf{B}_2 = (a\mathbf{B}_1 - b\mathbf{B}_2) - i(a\mathbf{B}_2 + b\mathbf{B}_1)$$

$$A(\mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2) = a\mathbf{B}_1 - b\mathbf{B}_2 - ia\mathbf{B}_2 - ib\mathbf{B}_1$$

$$A(\mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2) = \mathbf{B}_1(a - ib) - \mathbf{B}_2(a - ib)$$

$$A(\mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2) = (a - ib)(\mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2)$$

Reemplazando

$$A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$$

Como  $\lambda_2$  es un autovalor de  $A$ , por definición de autovector se puede afirmar que  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2$  es un autovector asociado a  $\lambda_2$ .

Para hallar la solución general del sistema (2.4) para este caso, se considerará la solución general expuesta en el apartado *Autovalores Reales Distintos*, pero interpretando y dando sentido al hecho de que la exponencial ahora es función compleja y a que el autovector asociado a cada autovalor puede contener elementos complejos.

Así que partiendo de

$$\mathbf{x}_1(t) = c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 \quad y \quad \mathbf{x}_2(t) = c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 \tag{A. 6}$$



Donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son los autovalores complejos conjugados (puede ser  $a = 0$ ) de la matriz  $A$  y  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  los autovectores correspondientes a dichos autovalores, respectivamente. La forma de los autovalores es

$$\lambda_1 = a + ib$$

$$\lambda_2 = a - ib$$

Con  $a$  y  $b$  números reales e  $i$  es el número imaginario. Considerando esto se tiene:

$$e^{\lambda_1 t} = e^{(a+ib)t}$$

$$e^{\lambda_2 t} = e^{(a-ib)t}$$

Aplicando las propiedades de la potenciación

$$e^{\lambda_1 t} = e^{at} e^{ibt}$$

$$e^{\lambda_2 t} = \frac{e^{at}}{e^{ibt}}$$

Usando la fórmula de Euler

$$e^{\lambda_1 t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \quad (\text{A. 7})$$

$$e^{\lambda_2 t} = \frac{e^{at}}{\cos bt + i \sin bt}$$

Multiplicando la segunda ecuación por el conjugado

$$e^{\lambda_2 t} = \frac{e^{at}}{\cos bt + i \sin bt} \left( \frac{\cos bt - i \sin bt}{\cos bt - i \sin bt} \right)$$

$$= \frac{e^{at}(\cos bt - i \sin bt)}{(\cos bt + i \sin bt)(\cos bt - i \sin bt)}$$

$$= \frac{e^{at}(\cos bt - i \sin bt)}{\cos^2 bt + \sin^2 bt}$$

$$= \frac{e^{at}(\cos bt - i \sin bt)}{1}$$

$$= e^{at}(\cos bt - i \sin bt) \quad (\text{A. 8})$$

Reemplazando (A. 7) y (A. 8) en (A. 6)

$$\mathbf{x}_1(t) = c_1 e^{at}(\cos bt + i \sin bt)(\mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = c_2 e^{at}(\cos bt - i \sin bt)(\mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2)$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores:

$$\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t) = c_1 e^{at}(\cos bt + i \sin bt)(\mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2) + c_2 e^{at}(\cos bt - i \sin bt)(\mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{at}[(c_1 + c_2)(\mathbf{B}_1 \cos bt - \mathbf{B}_2 \sin bt)] + ie^{at}[(c_1 - c_2)(\mathbf{B}_1 \sin bt + \mathbf{B}_2 \cos bt)] \\
&= e^{at}\{(c_1 + c_2)[\mathbf{B}_1 \cos bt - \mathbf{B}_2 \sin bt] + i(c_1 - c_2)[\mathbf{B}_1 \sin bt + \mathbf{B}_2 \cos bt]\}
\end{aligned}$$

Donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias y se tomará  $(c_1 + c_2) = k_1$  y  $i(c_1 - c_2) = k_2$ , así que:

$$\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t) = k_1 e^{at}(\mathbf{B}_1 \cos bt - \mathbf{B}_2 \sin bt) + k_2 e^{at}(\mathbf{B}_1 \sin bt + \mathbf{B}_2 \cos bt)$$

Siendo esta la solución general del sistema (2.4) cuando  $A$  tiene autovalores complejos.

Con relación al comportamiento cualitativo de las soluciones de este sistema se dice que si los autovalores son complejos y su parte real no es nula ( $a \neq 0$ ) el punto de equilibrio es un **foco o punto espiral**. Si la parte real es negativa ( $a < 0$ ) todas las trayectorias se acercan al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ , y se trata de un punto espiral estable (figura A. 7). Pero, si la parte real es positiva ( $a > 0$ ) todas las trayectorias se alejan del origen cuando  $t \rightarrow \infty$ , siendo el origen un punto espiral inestable (figura A. 8).

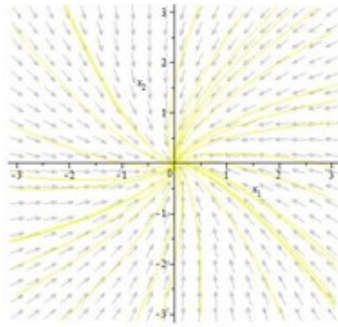


Figura A. 7: Ejemplo gráfico de un foco estable.

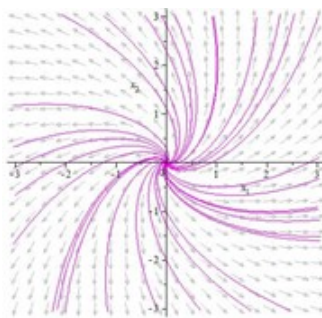


Figura A. 8: Ejemplo gráfico de un foco inestable.

Por otro lado, si los autovalores son los números imaginarios  $\pm ib$  (imaginarios puros) el punto de equilibrio se denomina **centro** (figura A. 9), aquí las trayectorias son curvas cerradas simples que rodean el origen, en general tienen forma de elipses, de modo que ninguna trayectoria tiende a él cuando  $t \rightarrow \infty$  o  $t \rightarrow -\infty$ , es decir, dichas trayectorias vuelven exactamente a sus condiciones iniciales en el plano y repiten la misma curva cerrada una y otra vez. El origen se dice que es un punto de equilibrio estable.

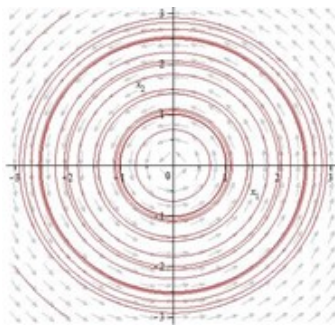


Figura A. 9: *Ejemplo gráfico de un centro.*

Una forma distinta de determinar la estabilidad del sistema es a través de la traza y el determinante de la matriz de coeficientes constantes, como se enuncia en la siguiente proposición.

**Proposición 4:** Dada una matriz real  $A$  de orden dos, notamos la traza de  $A$  como  $tr(A)$  y el determinante de  $A$  como  $det(A)$ . Entonces el sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  es:

- Inestable, si  $det(A) < 0$  o  $tr(A) > 0$ .
- Asintóticamente estable, si  $det(A) > 0$  y  $tr(A) < 0$ .
- Estable, pero no asintóticamente estable, si

$$det(A) = 0 \text{ y } tr(A) < 0 \quad \text{o} \quad tr(A) = 0 \text{ y } det(A) > 0$$

En el caso en el que  $tr(A) = det(A) = 0$  puede ser estable o inestable.

## Sistema Plano Autónomo No Lineal Homogéneo

Previamente se realizó una breve recopilación teórica de los SPALH que permite comprender el comportamiento de las soluciones de dicho tipo de sistema tanto cualitativa como analíticamente. No obstante, por lo general el tratamiento analítico de las soluciones de los SPALNH no se puede desarrollar, pero se puede hacer uso de la teoría de los SPALH para entender el comportamiento de las soluciones de dichos sistemas cerca de sus puntos de equilibrio aislados a través de la linealización del sistema plano autónomo no lineal homogéneo en dichos puntos.

**Definición 1:(*Sistema Plano Autónomo No Lineal Homogéneo*):** Si al menos una de las funciones  $f_1$  y  $f_2$  del sistema (2.1) es no lineal en las variables dependientes  $x_1$  y  $x_2$ , entonces se dice que el sistema plano autónomo es no lineal.

**Linealización del Sistema:** El objetivo principal de desarrollar el procedimiento de linealización, que se verá a continuación, es hallar un sistema lineal que permita comprender el comportamiento de las soluciones del sistema no lineal cerca de un punto de equilibrio aislado; alrededor de este punto las soluciones del sistema no lineal y su sistema linealizado permanecen cercanas entre sí, por lo menos en algún intervalo. En la mayoría de los SPANLH la información que se obtiene al estudiar el sistema linealizado es suficiente para

establecer el comportamiento a largo plazo de sus soluciones cerca del punto de equilibrio.

En primer lugar, se hallarán los puntos de equilibrio aislados de dicho sistema, debido a que son los puntos en los que se realizará la linealización. Dado que los sistemas de este tipo pueden tener más de un punto de equilibrio se debe tener en cuenta que el origen puede no ser el único, así que, para el caso en el que el punto de equilibrio sea diferente del origen, es decir,  $(a, b) \neq (0, 0)$ , se debe trasladar dicho punto al origen considerando las siguientes variables,

$$u_1 = x_1 - a \quad (\text{A. 9})$$

$$u_2 = x_2 - b \quad (\text{A. 10})$$

Nótese que si  $x_1$  y  $x_2$  están cerca del punto de equilibrio  $(a, b)$  entonces  $u_1$  y  $u_2$  tienden a 0. Ahora bien, como  $a$  y  $b$  son constantes entonces

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{d(x_1 - a)}{dt}$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{d(x_2 - b)}{dt}$$

Ya que la derivada de una diferencia es la diferencia de las derivadas y la derivada de una constante es cero. Reemplazando (A. 9) y (A. 10) en lo anterior

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{du_1}{dt}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{du_2}{dt}$$

De aquí despejando a  $x_1$  y  $x_2$  de (A. 9) y (A. 10), respectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{du_1}{dt} = f_1(u_1 + a, u_2 + b) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{du_2}{dt} = f_2(u_1 + a, u_2 + b) \end{aligned} \quad (\text{A. 11})$$

Este sistema trasladado tendrá como punto de equilibrio  $(0, 0)$ .

Antes de continuar con el procedimiento, es importante recordar que la linealización de una función vectorial  $f(x, y)$  en un punto  $(x_0, y_0)$  está dada por:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Ahora linealizando las funciones  $f_1$  y  $f_2$  del sistema (A. 11) en el punto de equilibrio aislado, el cual, gracias a la sustitución de variable anterior, es  $(0, 0)$ .

$$f_1(u_1 + a, u_2 + b) = f_1(0, 0) + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0, 0)(u_1 - 0) + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(0, 0)(u_2 - 0)$$

$$f_2(u_1 + a, u_2 + b) = f_2(0, 0) + \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(0, 0)(u_1 - 0) + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(0, 0)(u_2 - 0)$$

Por ser  $(0, 0)$  el punto de equilibrio, las expresiones anteriores quedan reducidas a:

$$f_1(u_1 + a, u_2 + b) = \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0, 0) u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(0, 0) u_2$$

$$f_2(u_1 + a, u_2 + b) = \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(0, 0) u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(0, 0) u_2$$

Por lo tanto, el sistema linealizado asociado al SPANLH en dicho punto es:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0, 0) u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(0, 0) u_2 \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(0, 0) u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(0, 0) u_2 \end{aligned} \quad (\text{A. 12})$$

El sistema (A. 12) ya es lineal, por ende, se puede aplicar la teoría cualitativa de los Sistemas Planos Lineales para el análisis del comportamiento de las soluciones en torno al punto de equilibrio.

Tomando:

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad y \quad Df(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0, 0) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(0, 0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(0, 0) & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(0, 0) \end{pmatrix}$$

el sistema (A. 12) escrito en notación matricial es:

$$\mathbf{u}' = Df(0, 0)\mathbf{u}$$

en donde la matriz de coeficientes, denotada en la sección anterior como  $A$ , corresponde a la **Matriz Jacobiana**.

**Nota:** El proceso de linealización se debe repetir tantas veces como puntos de equilibrio aislados tenga el SPANLH.

**Definición 2 (Puntos de Equilibrio Hiperbólicos):** Un punto crítico del sistema  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  es hiperbólico si la matriz jacobiana en ese punto es hiperbólica <sup>8</sup>.

**Proposición 5 (Hartman-Grobman):** Sea  $f$  de clase  $C^1$  y  $\bar{x}$  un punto de equilibrio aislado hiperbólico del SPANLH. Entonces hay una vecindad de  $\bar{x}$  en la cual dicho sistema es topológicamente equivalente a su linealización  $\mathbf{u}' = Df(0, 0)\mathbf{u}$ .

Ahora bien, como a través del proceso antes descrito se halla un sistema lineal asociado al sistema no lineal, el tratamiento cualitativo de las soluciones del sistema linealizado se desarrollará a partir de la clasificación de los puntos de equilibrio descrita en la sección anterior, pero en este caso adicionalmente se considerará la definición y teorema anteriores para dicha distribución y para dar a conocer los casos en los que comportamiento a largo plazo de las soluciones cerca del punto de equilibrio del SPANLH y su sistema linealizado es distinto, lo cual se describirá en el siguiente esquema.

---

<sup>8</sup>Se dice que  $A$  es una matriz hiperbólica si todos sus autovalores tienen parte real no nula.

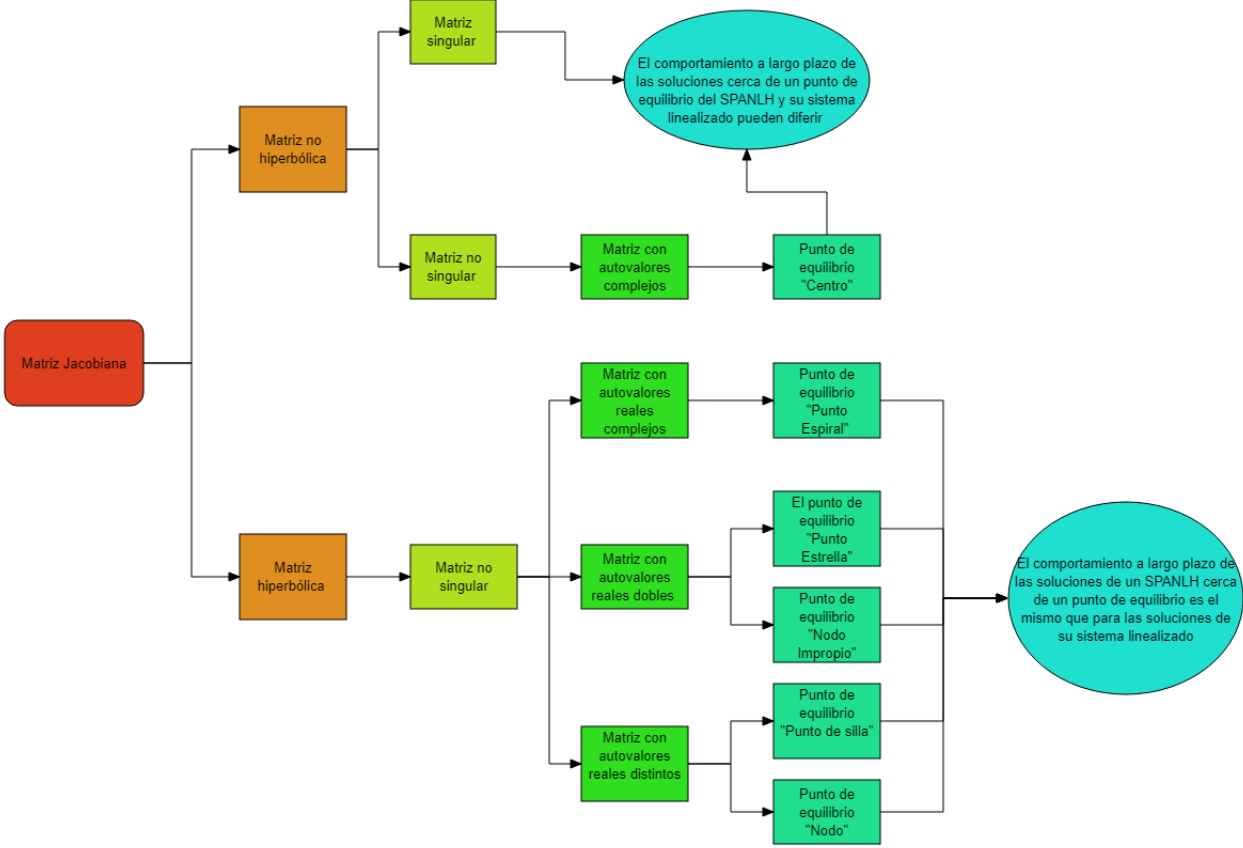


Figura A. 10: Esquema que resume los casos en los que el SPANLH es o no linealizable.

## Anexo B: Demostración Principio de Concentración en el Modelo Guerra de Guerrillas Cuando $X_2$ Divide a $X_1$

Dado un enfrentamiento bajo el modelo de Deitchman donde el ejército  $X_1$  opera bajo fuego directo y el ejército  $X_2$  opera bajo fuego en área. Si al desarrollarse una batalla de todos contra todos el ganador es  $X_1$ , el ejército  $X_2$  no tiene la posibilidad de cambiar este resultado dividiendo a su oponente en partes iguales para atacarlo en enfrentamientos secuenciales. Se asume que cada efectivo mantiene su coeficiente de aniquilamiento durante las  $n$  batallas.

**Demostración:** Supóngase que existe algún  $n \in \mathbb{N}$ , tal que al dividir a  $X_1$  en  $n$  partes iguales, el ejército  $X_2$  logra aniquilar a  $X_1$  en el  $n$ -ésimo enfrentamiento, esto quiere decir que la fuerza combativa inicial de  $X_2$  en el enfrentamiento  $n$  es mayor que la fuerza combativa inicial de  $X_1$  en dicho enfrentamiento, matemáticamente se tiene

$$\frac{\alpha}{2}x_{2f(n-1)}^2 > \frac{\beta x_{10}}{n}$$

Cabe aclarar que en la desigualdad anterior se toma la fuerza combativa de  $X_2$  de esa forma debido a que el pie de fuerza inicial de este ejército para la  $n$ -ésima batalla está dado por su cantidad de efectivos final en el enfrentamiento inmediatamente anterior. Así que

$$\frac{\alpha}{2} \left( \sqrt{2x_{20} \left( \frac{x_{20}}{2} - \frac{k(n-1)}{pn} \right)} \right)^2 > \frac{\beta x_{10}}{n}$$

Atendiendo a que  $p = \frac{\alpha}{\beta}$  y  $k = \frac{x_{10}}{x_{20}}$ , se tiene

$$\alpha x_{20} \left( \frac{x_{20}}{2} - \frac{\frac{x_{10}(n-1)}{x_{20}}}{\frac{\alpha n}{\beta}} \right) > \frac{\beta x_{10}}{n}$$

Dado que  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $n$  son positivos se tiene

$$\frac{\alpha x_{20}^2}{2} - \frac{\alpha \beta x_{20} x_{10} (n-1)}{\alpha n x_{20}} > \frac{\beta x_{10}}{n}$$

$$\frac{\alpha^2 n x_{20}^3 - 2\alpha \beta x_{20} x_{10} (n-1)}{2\alpha n x_{20}} > \frac{\beta x_{10}}{n}$$

$$\alpha^2 n x_{20}^3 - 2n\alpha \beta x_{20} x_{10} + 2\alpha \beta x_{20} x_{10} > 2\alpha \beta x_{20} x_{10}$$

$$\alpha^2 n x_{20}^3 > 2n\alpha \beta x_{20} x_{10}$$

$$\frac{\alpha}{2} x_{20}^2 > \beta x_{10} \quad (\text{B. 1})$$

Por otro lado, se tiene que  $X_1$  es el ejército ganador si se desarrolla una sola batalla, es decir que

$$\beta x_{10} > \frac{\alpha}{2} x_{20}^2$$

Pero como (B. 1) contradice este hecho, se concluye que no existe un  $n \in \mathbb{N}$ , tal que al dividir a  $X_1$  en  $n$  partes iguales, el ejército  $X_2$  logra aniquilar a  $X_1$  en el  $n$ -ésimo enfrentamiento.

## Anexo C: Demostración Principio de Concentración en el Modelo Guerra de Guerrillas Cuando $X_1$ Divide a $X_2$

Dado un enfrentamiento bajo el modelo de Deitchman donde el ejército  $X_1$  opera bajo fuego directo y el ejército  $X_2$  opera bajo fuego en área,  $x_{10} = kx_{20}$ ,  $\alpha = p\beta$  y  $X_2$  es el ganador cuando se enfrenta a  $X_1$  en una sola batalla de todos contra todos. Si  $X_1$  divide el pie de fuerza de  $X_2$  en  $n$  partes iguales y se satisface

$$\beta x_{10} > \frac{\frac{\alpha}{2} x_{20}^2}{n} \quad (\text{C. 1})$$

entonces  $X_1$  aniquila al ejército  $X_2$  en su totalidad en el  $n$ -ésimo combate. Se asume que cada efectivo mantiene su coeficiente de aniquilamiento durante las  $n$  batallas.

**Demostración:** Supóngase que  $X_1$  no aniquila al ejército  $X_2$  en su totalidad en el  $n$ -ésimo combate, esto quiere decir que  $X_2$  al ser dividido en  $n$  partes iguales aniquila al ejército  $X_1$  en el  $n$ -ésimo combate o que el  $n$ -ésimo enfrentamiento finaliza en empate. Si  $X_2$  es el ejército ganador de la  $n$ -ésima batalla, la fuerza combativa inicial de  $X_2$  es mayor que la fuerza combativa inicial de  $X_1$  para este enfrentamiento, pero si esta batalla finaliza en empate las fuerzas combativas de cada ejército al iniciar el  $n$ -ésimo enfrentamiento son iguales. Como el pie de fuerza inicial de este ejército para la  $n$ -ésima batalla está dado por su cantidad de efectivos final en el enfrentamiento inmediatamente anterior, matemáticamente esta situación se resume en la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \left( \frac{x_{20}}{n} \right)^2 &\geq \beta x_{1f(n-1)} \\ \frac{\alpha}{2} \left( \frac{x_{20}}{n} \right)^2 &\geq \beta x_{10} \left( 1 - \frac{px_{10}(n-1)}{2k^2n^2} \right) \end{aligned}$$

dado que  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $n$  son positivos se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \left( \frac{x_{20}}{n} \right)^2 &\geq \beta x_{10} \left( 1 - \frac{px_{10}(n-1)}{2k^2n^2} \right) \\ \frac{\alpha(x_{20}^2)}{2n^2} &\geq \frac{2k^2n^2\beta x_{10} - \beta x_{10}^2 p(n-1)}{2k^2n^2} \end{aligned}$$

$$\alpha k^2 x_{20}^2 \geq 2k^2 n^2 \beta x_{10} - \beta x_{10}^2 p n + \beta x_{10}^2 p$$

Reemplazando  $k = \frac{x_{10}}{x_{20}}$  y  $p = \frac{\alpha}{\beta}$  en la desigualdad anterior

$$\alpha x_{10}^2 \geq \frac{2n^2 \beta x_{10}^3}{x_{20}^2} - \alpha x_{10}^2 n + \alpha x_{10}^2$$

$$\alpha x_{10}^2 n \geq \frac{2n^2 \beta x_{10}^3}{x_{20}^2}$$

$$\frac{\frac{\alpha}{2} x_{20}^2}{n} \geq \beta x_{10} \quad (\text{C. 2})$$

Pero (C. 2) no se puede dar ya que se sabe que la desigualdad (C. 1) se cumple, lo que quiere decir que el supuesto es falso y por tanto  $X_1$  aniquila al ejército  $X_2$  en su totalidad en el  $n$ -ésimo combate.