LA NOCIÓN DE FUNCIÓN CONTINUA DE LEONARD EULER

JESSICA IDALY HERNÁNDEZ VILLAMIL
ROSA ALCIRA TORRES MOYA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, COLOMBIA
2014

LA NOCIÓN DE FUNCIÓN CONTINUA DE LEONARD EULER

JESSICA IDALY HERNÁNDEZ VILLAMIL
Código: 2008140031

ROSA ALCIRA TORRES MOYA
Código: 2008240070

Monografia presentada como requisito parcial para optar el título de:
Licenciada en Matemáticas

Director:

Mauricio Bautista Ballén

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, COLOMBIA
2014

Rosa Alcira Torres Moya

A mis hijos, ***Brayan David*** y ***Saray Angelina***, quienes son mi motivo para luchar y salir adelante para poderles brindar un mejor futuro.

A mi esposo, ***Alfredo Castillo,*** quien me ha estado apoyado incondicionalmente en el trascurso de mi carrera.

A mis padres, ***Rosa Moya*** y ***Reyes Torres***, quienes me permitieron vivir y desde niña me enseñaron a ser responsable de mis actos y valorar las cosas que nos da la vida.

A mis hermanos, ***Sandra***, ***Mercedes*** y ***Raúl***, quienes me han incentivado a prepararme profesionalmente y siempre están apoyando mis sueños y propósitos.

A mi abuelita ***Rosa Angelina Muñoz*** quien ya no está con nosotros pero fue quien me alegró mi infancia y me enseñó valores muy importantes.

Agradecimientos

Al dar por terminado este trabajo de grado de la Licenciatura, queremos expresar los más sinceros agradecimientos a las directivas y docentes del Departamento de Licenciaturas de Matemáticas, porque nos brindaron su apoyo y conocimientos en el trascurso de la carrera lo cual permitió que este trabajo se finalizara de manera oportuna.

Un agradecimiento especialmente con el director del trabajo de grado profesor Mauricio Bautista Ballén, quien realizó aportes significativos no sólo durante el desarrollo del trabajo, sino durante el trascurso de la carrera.

Gracias a quienes de una u otra forma contribuyeron constantemente a culminar nuestra carrera.

1.Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado de pregrado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	La noción de función continua de Leonard Euler
Autor(es)	HERNÁNDEZ VILLAMIL, Jessica Idaly. TORRES MOYA, Rosa Alcira.
Director	BAUTISTA BALLÉN, Mauricio.
Publicación	Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, 2014. 82 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	Euler, Función,Continuidad y discontinuidad.

2.Descripción
La noción de función continua es fundamental en el tema de estudio de Cálculo Diferencial e Integral, por su relación con otras nociones del cálculo. El objetivo principal del presente trabajo, consiste en hacer un recuento histórico del siglo XVIII acerca de función continua principalmente la presentada por Leonard Euler y la Ley de continuidad de Arbogast, además determinar algunos ejemplos de esta época como también de la actualidad para realizar un contraste. Contraste que puede resultar de utilidad dado que

permite determinar algunas concepciones que se evidencian en algunos estudiantes de cálculo en relación con la noción de continuidad.

3.Fuentes
Fuentes: Para realizar este trabajo se consultaron varias fuentes como libros y artículos encontrados en medios electrónicos. Los más importantes son: Apostol, T. (1980). Funciones continuas. *Calculus* (pp.155-190). Barcelona: Reverté S.A.   Boyer, C. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development.* New York: Dover Publications.   Boyer, C. (1986). *Historia de las Matemáticas.* Madrid : Alianza Editorial.   Cantoral, R. A. (2006,). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Relime, 9*(1), 7-30.   Euler, L. (2001).Euler y los infinitos (grandes y pequeños). En A. Durán y F. Pèrez (Eds)*Introducción al análisis de los infinitos* (pp.39-59). Sevilla : S.A.E.M "Thales" : Real Sociedad Matemática Española.   Grattan-Guinness, I. (1970).Issues in eighteenth-century analysis the vibrating string problem. *The development of the foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann.*(pp.6-7) Massachusetts: The colonial press inc.   Jaimes, N. (2012). *La noción de función, un acercamiento a su comprensión.*Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Facultad de ciencias. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.   Spivak, M. (1996). Funciones Continuas. *Cálculo Infinitesimal*(pp. 141-150).

Mexico D.F: Reverté.

Ugalde, W. (2013). Funciones: desarrollo historico del concepto y actividades de enseñanza y aprendizaje. *Revista digital Matematicas, Educación e Internet*, *14*, 1-48.

4.Contenidos

Este trabajo, ha sido organizado en cinco capítulos a continuación se presenta un breve recuento:

En el primer capítulo, presenta la justificación, describe los motivos principales que incentivaron a la realización de este trabajo y contiene los objetivos trazados en el trabajo.

En el segundo capítulo, se expone el marco teórico donde se presenta la noción de función continua que se encuentra en los textos Apóstol (1980), Spivak (1996), Espiral 11 Samper, C. et al (2005) y Matemáticas 11Beltrán, L. et al (2001) que actualmente se utiliza; esta noción es soportada sobre el concepto de límite, además se plantean los diferentes tipos de discontinuidades que presentan los anteriores textos. También en este apartado se enuncia dos tipos de continuidad que consideró Cantoral (2004) y algunas propiedades de la continuidad, teorema de diferenciabilidad y la definición de función presentadas en los textos anteriormente mencionados.

En el capítulo tres, inicialmente se muestra un breve recuento histórico de continuidad, enseguida se presenta las contribuciones de algunos personajes del siglo XVIII acerca de esta noción, especialmente enfatizando en Euler y Arbogast. Finalmente se enuncia la noción de continuidad de Euler y la ley de continuidad de Arbogast. Además se presentan algunos ejemplos de funciones continuas y discontinúas para la época del siglo XVIII.

En el capítulo cuatro, se presenta un contraste entre funciones continuas aceptadas por Euler, Arbogast en el siglo XVIII y las funciones que son continuas con la definición que presentan algunos textos.

Finalmente, se exponen las conclusiones articuladas con los objetivos propuestos, el marco de referencia. Además, se sugiere algunas recomendaciones para futuro de realizar posibles investigaciones de aplicaciones didácticas acerca del concepto de función continua

5.Metodología

La estructura del trabajo se planteó a partir de la noción de continuidad a lo largo de la historia, por lo cual se enfoca en el siglo XVIII; principalmente los aportes de Euler y Arbogast. Se realizó un contraste con la definición que se concibe en algunos libros. Para hacer el marco teórico se utilizaron dos textos universitarios y dos escolares, en el marco histórico se tiene en cuenta libros y documentos relacionados con la historia de las matemáticas. Finalmente se seleccionaron diferentes ejemplos de funciones para poder realizar el contraste.

6.Conclusiones

1. En cuanto al análisis de funciones, Euler no consideró como continuas las funciones definidas a trozos que en la actualidad cumplen con la condición de ser continuas globalmente, porque en este sentido, para Euler las funciones continuas tenían la característica de ser diferenciables. Además la definición de función continua presente en la actualidad excluye funciones que son consideradas continuas en el siglo XVIII e incluye algunas funciones que no son consideradas para esta época.

2. El problema de la cuerda vibrante, contribuyó al fortalecimiento de la consolidación de la noción de función en esta época, donde la solución de este problema llevó a Euler a generalizar el concepto de función, donde se

incluyen las funciones definidas por partes, siendo está definición la más general en el siglo XVIII. 3. Las funciones continuas para Leonard Euler son a su vez funciones diferenciables, esto se debe a las propiedades que están contenidas en la naturaleza misma de la función definida como una única expresión analítica. Además las funciones discontinuas para Euler corresponden a las funciones que estas compuestas por diferentes expresiones algebraicas.

Elaborado por:	HERNÁNDEZ VILLAMIL, Jessica Idaly. TORRES MOYA, Rosa Alcira.
Revisado por:	BAUTISTA BALLÉN, Mauricio.

Fecha de elaboración del Resumen:	5	07	2014

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

Se presenta un estudio sobre la noción de función continua en el siglo XVIII. La noción de continuidad es considerada básica en la enseñanza matemática universitaria especialmente en cálculo diferencial e integral. En seguida, se plantean las nociones encontradas enlibros universitarios utilizados en la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y también dos textos de secundaria, donde se presentan algunos ejemplos de funciones continuas. Además se presenta la idea intuitiva que actualmente se tiene de continuidad.

Luego se presenta un breve recuento histórico del siglo XVIII, especialmente de Euler y Arbogastde quienes se dice que se ocuparon de la noción de función y función continua; y de otros autores contemporáneos a él quienes también hicieron aportes significativos para la evolución de esta noción.

En particular, se realiza un contraste de algunos ejemplos de funciones continuas donde se hizo un análisis con la concepción que se tenía sobre la noción de función continua en el siglo XVIII y con la que actualmente está presente en los libros universitarios.

Este estudio muestra las diferentes concepciones sobre la noción de función continua que se tenía en el siglo XVIII y que permiten caracterizar los tipos de funciones que se concebían como continuas en esta época en contraste conla noción actual de función continua.

Este trabajo se desarrolla encinco capítulos. A continuación se especifica de forma breve el contenido de cada uno.

En el primer capítulo se encuentra la justificación y los objetivos que se pretenden cumplir durante el desarrollo del trabajo.

En el segundocapítulo se establece el sustento teórico donde se encuentran los referentes teóricos del estudio como: la noción de función continua y las nociones que presentan los textos universitarios y escolares seleccionados. También se presentan los diferentes tipos de discontinuidad y continuidad.

El tercercapítulo abarca la historia pertinente sobre la noción de función continua en el siglo XVIII, especialmente la desarrollada por Euler y Arbogast que permitirán caracterizar la continuidad o discontinuidad de una función.

En elcuarto capítulo se muestran algunos ejemplos de funciones continuas realizando un contraste entre la noción presentada en el siglo XVIII y la que presentan los libros seleccionados.

Por último, se presentan las conclusiones entre ellas se enuncia la siguiente:Euler no consideró como continuas las funciones que son definidas a trozos que en la actualidad cumplen con la condición de ser continuas globalmente. En este sentido, para Euler las funciones continuas tenían la característica de ser diferenciables.

1. JUSTIFICACIÓN

Debido a la forma como se introduce y enseña la noción de función continua, concepto matemático que tiene gran importancia en el análisis matemático, se considera pertinente realizar una revisión histórica acerca de la evolución de esta noción en el siglo XVIII, especialmente la contribución de Euler y de algunos matemáticos contemporáneos a él.Además,resulta fundamental para el desarrollo del trabajo tener en cuenta las definiciones presentadas en los textos como Apóstol (1980), Spivak (1996),Espiral 11 Samper, C. et al (2005) y Matemáticas 11Beltrán, L. et al (2001) que contribuye tanto a docentes como estudiantes acceder a la noción de función continua.

Por lo tanto, se pretende efectuar un análisis acerca de la noción de función continua en el siglo XVIII principalmente la presentada por Euler yArbogast, Además, se proponen ejemplos de funciones continuas aceptadas en cada época, que permitan realizar un contraste teniendo en cuenta la definición de función continua dada por Leonard Euler y la que actualmente se encuentra en los textos de cálculo.

El fin principal de este trabajo es proporcionar a docentes y estudiantes documentación sobre la evolución histórica de función continua en el siglo XVIII. Además, se espera que este estudio sirva como documentación para trabajos posteriores relacionados con la noción de función continua y temas afines.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1Objetivo general

Analizar la noción de función continua en el siglo XVIII según Leonard Euler y proponer algunos ejemplos de funciones continuas para analizarlos a luz de las definiciones de Euler y la actual.

1.1.2 Objetivos específicos

1. Revisar el desarrollo histórico de la noción de función continua en la época de Leonard Euler (siglo XVIII), identificar su contribución para este concepto y proponer ejemplos de funciones consideradascontinuas en dicho momento histórico.

2. Realizar un contraste para algunos ejemplos con la definición presentada por Euler y algunas de las definiciones que se encuentran en textos de cálculo acerca de función continua.

2. MARCO TEÓRICO

A continuación se presentan los referentes teóricos en relación con el concepto de función continua. Para establecerlos se han abordado algunos textos de matemáticas y algunas investigaciones relacionadas con la noción de continuidad global y de continuidad puntual de una función de variable real.

2.1 Definición de Función

La definición de función continua está estrechamente relacionada con la definición de función, por esta razón es necesario identificar como presentan la definición algunos textos. Se tomarán como referente los textos universitarios: *Calculus,* volumen 1 de Tom M. Apóstol (1980), *Calculus infinitesimal* de Michael Spivak (1996) y los textos escolares de *Espiral 11* de Samper (2005), Serrano, Pérez & Árdila y *Matemáticas 11 de Beltrán, L. Rodríguez. B & Dimaté, M. (2001).*

Ruiz H (1994, pág. 191) organizó el análisis histórico e identificó las siguientes concepciones, predominantes para cada época según la evolución históricade la noción de función que se describen a continuación:

*“**Relación entre cantidades de magnitudes variables:*** el estudio de los fenómenos naturales donde intervienen magnitudes físicas variables.

Razón o proporción: Situaciones ligadas a las magnitudes físicas representadas en la geometría o en la astronomía.

Gráfica: Son magnitudes físicas donde se representan gráficamente la variación como la dependencia entre dichas magnitudes.

Curva: Se basa en buscar un método de expresión de las relaciones numéricas establecidas entre determinadas propiedades de objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de las coordenadas.

Expresión analítica: Son las expresiones analíticas que permiten expresar la dependencia entre magnitudes.

Correspondencia arbitraria: Siguen surgiendo conexiones entre la física y la matemática donde se considera el concepto de función como la idea principal del análisis donde se tratan problemas existentes respecto a la continuidad de funciones.

Función como terna $\boldsymbol{f = (F,\ X, Y)}$: Una función es un conjunto de pares ordenados que tiene la propiedad especial de que si, dos pares x, y y x, z del conjunto $X \times Y$, tienen el mismo primer elemento, deben siempre tener idéntico el segundo."

A continuación se presentan las nociones y definiciones de función encontradas en los textos seleccionados.

Calculus. Apostol, 1980

La definición de función en Apóstol, (1980, p. 65) se presenta como un *conjunto de pares ordenados*enunciada de la siguiente manera:

> *"Una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento"*

En la anterior definición se plantea que para cada elemento de x existe un único y, es decir $x, y \in f$ y $x, z \in f$ entonces $y = z$. Además si f es una función, el conjunto de todos los elementos x donde es la primera componente del par ordenado (x, y) de f se llama ***el dominio*** de f.

Cálculo infinitesimal. Spivak, 1996

De forma similar, *Spivak* (1996, pág. 60) presenta la definición de función como un *conjunto de pares ordenados.* La definición hace referencia a "números" lo cual supone una relación entre subconjuntos de $\mathbb{R}$; enunciada de la siguiente manera:

“Una ***función*** *es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si* (a, b) *y* (a, c) *pertenecen ambos a la colección, entonces* $b = c$ *; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento."*

Espiral 11.Samper, C. et al. 2005

En este texto (Samper, C. et al, 2005, pág. 41) plantea la definición de función, por medio de la ***correspondencia entre elementos de dos conjuntos*** como se expresa a continuación:

“Dados dos subconjuntos A *y* B *de números reales, una función* f *de* A *en* B *es una correspondencia que asocia a* ***cada número*** $\boldsymbol{x}$ ***en*** $\boldsymbol{A}$ ***un número*** $\boldsymbol{y}$ ***en*** $\boldsymbol{B}$***.*** *Decimos que* f *es función de* x *y escribimos* $\begin{matrix} A \to B \\ x \to y \end{matrix}$ *o también* $\begin{matrix} A \to B \\ x \to f(x) \end{matrix}$*”*

Matemáticas 11.Beltrán, L. et. Al. 2001

La definición de función que plantea (Beltrán, L. et al, 2001, pág. 96)*, se presenta* por medio de la *correspondencia entre elementos de dos conjuntos*como se enuncia a continuación:

“Sea una función f *de un conjunto* A *en un conjunto* B*, notada* $f: A \to B$ *es una ley que asocia a cada elemento de* A*, exactamente un elemento de* B*; el conjunto* A *se denomina* **dominio de la función,** *el conjunto* B *se denomina* **codominio***y los elemento de B que están asociados a los elementos de* A *forman otro conjunto denominado* **recorrido o rango de función***”*

2.2 Definición de continuidad

Con el fin de realizar un contraste entre la noción de continuidad que se identifica en los trabajos de Leonard Euler y la definición de función continua que se utiliza en la actualidad, se han elegido los libros de texto escolares y de nivel superior mencionados anteriormente.En estos libros se revisan las definiciones y nociones que se presentan de función continua.

Sierra, González y López (2003) en un estudio acerca del desarrollo del concepto de continuidad en los manuales escolares de Bachillerato y curso de Orientación Universitaria de los últimos cincuenta años, en el que consideran como dimensiones de análisis: lo conceptual, lo didáctico-cognitivo y lo fenomenológico, clasifican la definición de continuidad en los siguientes tipos: clásica, topológica, métrica o geométrica. La definición clásica es enunciada a partir del límite, la topológica expresada a través del lenguaje de entornos y por último, la métrica[1] soportada sobre el concepto formal de límite. La concepción geométrica, como lo manifiesta Aparicio y Cantoral (2006, pág. 9), se centra la atención en la gráfica de las funciones.

En este apartado se presentan las nociones y definiciones encontradas en los textos ya mencionados.

Calculus. Apostol, 1980

Al inicio del capítulo de funciones continuas Apóstol (1980, pág. 155), plantea una idea intuitiva de este concepto por medio de incrementos, como se presenta a continuación:

> "*Supongamos una función f que tiene el valor $f(x)$ en un cierto punto p. Se dice que f es continua en p si en todo punto próximo x el valor de la función $f(x)$ es próximo a $f(p)$".*

[1]En el texto Tom M. Apóstol, se considerará la definición métrica de continuidad como sinónimo de la definición formal de continuidad.

Luego, enuncia la definición de límite de una función de la siguiente forma.

"Sea f una función definida en un intervalo abierto que contenga un punto p, si bien no debemos insistir en que f esté definida en p. Sea Aun número real. La igualdad

$$\lim_{x \to p} f\ x\ = A\text{''}$$

A continuación enuncia el concepto de entorno de un punto, como sigue

"*Cualquier intervalo que contenga un punto p como su punto medio se denomina entorno de p"*

Los entornos se denotan como $N(p)$, donde consta de todos los puntos x cuya distancia a p es menor que r, siendo r el radio del entorno.

A partir de la definición de entornos Apóstol (1980, pág. 157), define el límite de una función, suponiendo que A es un número real y que f es una función definida en un cierto entorno de un punto p.

"$\lim_{x \to p} f\ x\ = A$ significa que para todo entorno $N_1(A)$ existe un cierto entorno $N_2(P)$ tal que $f(x) \in N_1(A)$ siempre que $x \in N_2(P)$ y $x \neq 0$ "

Posteriormente, enuncia la definición clásica de continuidad de una función en un punto, soportada sobre la noción de límite, como se presenta a continuación (Apostol, 1980, pág. 160):

"Se dice que una función es continua en un punto p si:

a) *f está definida en p, y*

b) $\lim_{x \to p} f\ x\ = f(p)$."

Además, establece que la anterior definición puede formularse a partir de entornos lo que permite evidenciar una definición topológica de este concepto, enunciada de la siguiente manera:

“Una función f es continua en p si para todo entorno $N_1(f(p))$ existe un entorno $N_2(p)$ tal que $f(x) \in N_1(f(p))$ siempre que $x \in N_2(p)$”

También Apóstol (1980, pág. 161) plantea la definición métrica de función continua, donde se hace uso de cuantificadores y de entornos, empleando la notación ε y δ.

“Una función f es continua en p, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ siempre que $|x - p| < \delta$”.

Por otro lado, Apóstol (1980, pág. 161) hace referencia a tres tipos de discontinuidad de una función: ***discontinuidad de salto, discontinuidad infinita y discontinuidad evitable;*** se define la discontinuidad de salto y las otras se abordan por medio de ejemplos.

La **discontinuidad de salto** es aquella que se presenta cuando en un valor de x existen los límites a la derecha y a la izquierda, pero son distintos.

Ejemplo de discontinuidad de salto

Como se evidencia en la *figura 1* correspondiente a la función definida por la expresión $f(x) = x - [x]$, donde $[x]$ representa la parte entera de x. La función presenta una discontinuidad de salto en cada entero. Para cualquier entero k, se tiene que los límites laterales son $\lim_{x \to k^-} f(x) = 1$ y el $\lim_{x \to k^+} f(x) = 0$, por lo tanto los limites laterales son distintos.

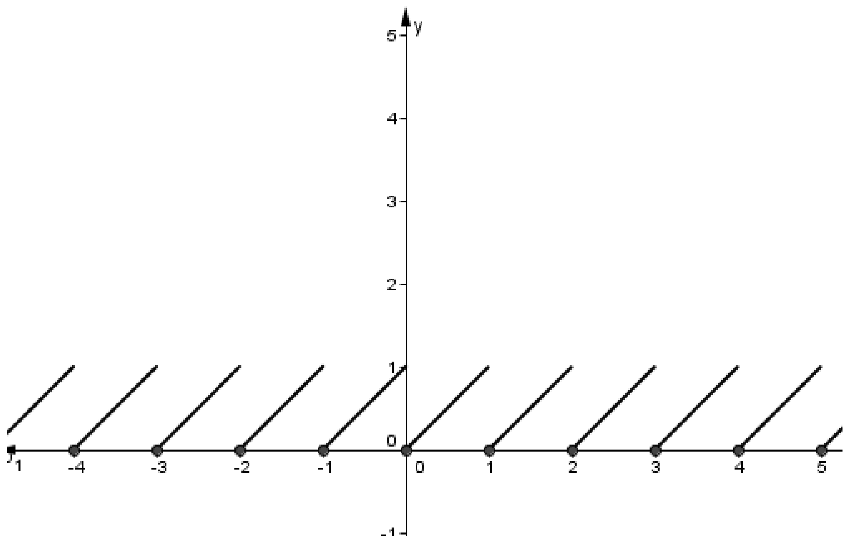


Figura 1. Función con discontinuidad de salto

La **discontinuidad infinita** es cuando alguno de los límites laterales es infinito.

Ejemplo de discontinuidad infinita

La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, es discontinua en 0. La función tiene una discontinuidadinfinita en 0. Cuando $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, lo cual quiere decir que cuando el valor del número real k sea cual sea, es posible encontrar otro número positivo δ, donde la distancia entre x y 0 es menor que δ, entonces $f(x)$ es mayor que k.

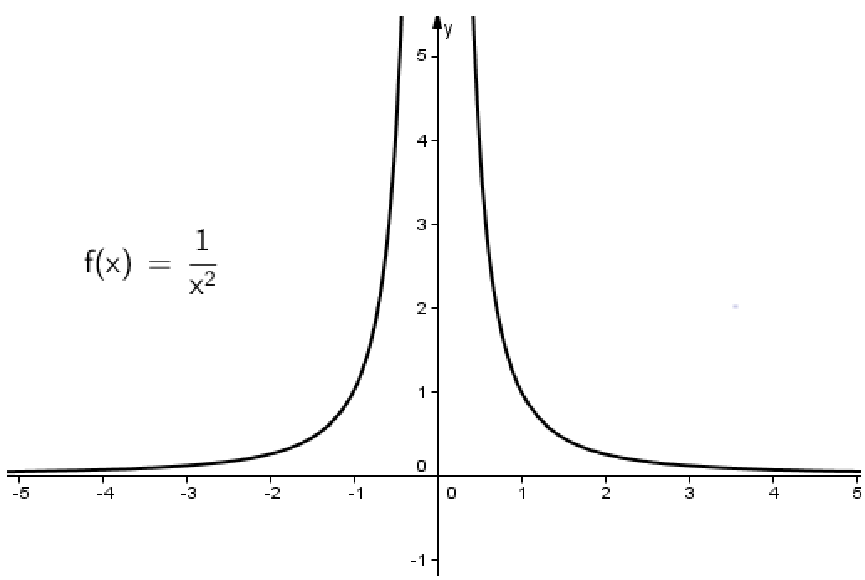


Figura 2. Función con discontinuidad infinita.

La discontinuidad evitable:Corresponde al caso en que la función tiene límite pero no coincide con el valor $f(c)$ o $f(c)$ no está definida. Se llama evitable porque para ambos casos se redefine $f(c)$ o sedefine $f(c)$ como el valor del límite de la función en c, para que la función sea continua.

Ejemplo de discontinuidad evitable

La función $f(x) = \begin{cases} 1 \ si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$. Es discontinua en 0 porque $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$. Esta discontinuidad es evitable porque se puede redefinir la función en 0, es decir $f(x) = \begin{cases} 1 \ si\ x \neq 0 \\ 1\ si\ x = 0 \end{cases}$.

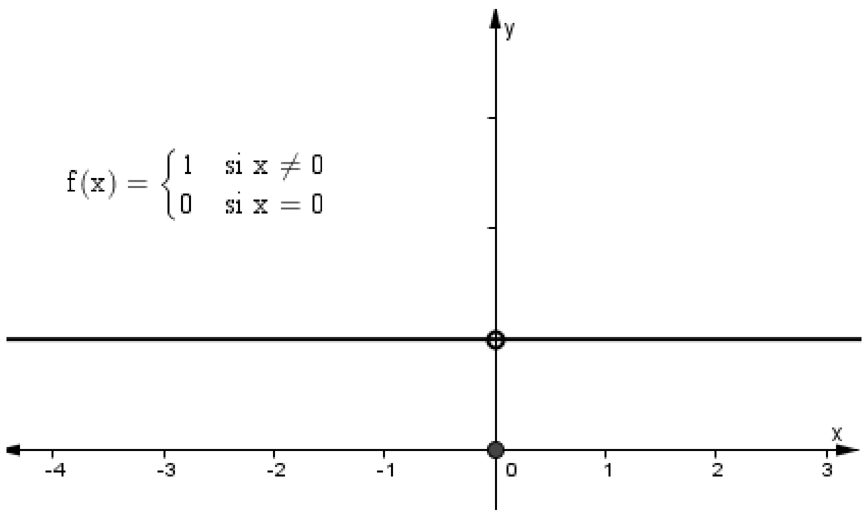


Figura 3. Función con discontinuidad evitable

Ejemplo de discontinuidad evitable

La función $f(x) = 1\ si\ x \neq 0$. Es discontinua en 0 porque f no está definida en 0. Esta discontinuidad es evitable porque se puede definir la función en 0, es decir $f(x) = \begin{cases} 1 \ si\ x \neq 0 \\ 1\ si\ x = 0 \end{cases}$ o $f(x) = 1$.

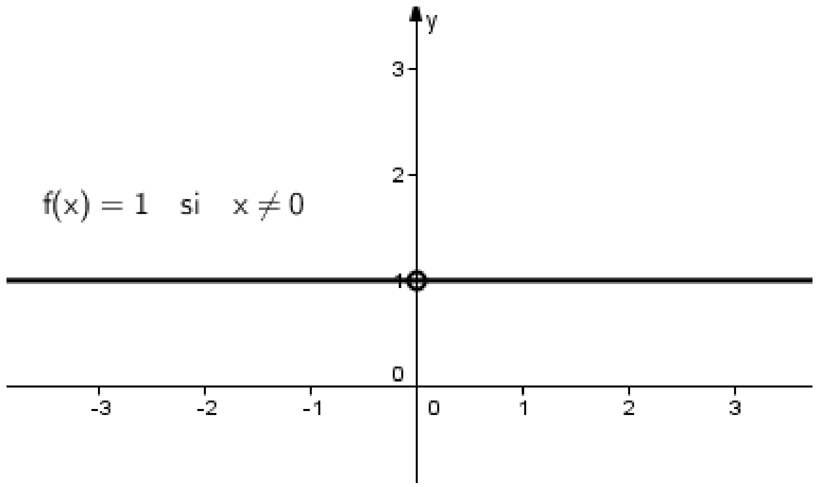


Figura 4. Ejemplo de función evitable

Cálculo infinitesimal. Spivak, 1996

Por su parte Spivak (1996, pág. 142) ilustra y enuncia de forma intuitiva la definición de función continua de la siguiente manera:

> *"una función f es continua si su gráfica no contiene interrupciones, ni saltos ni oscilaciones indefinidas".*

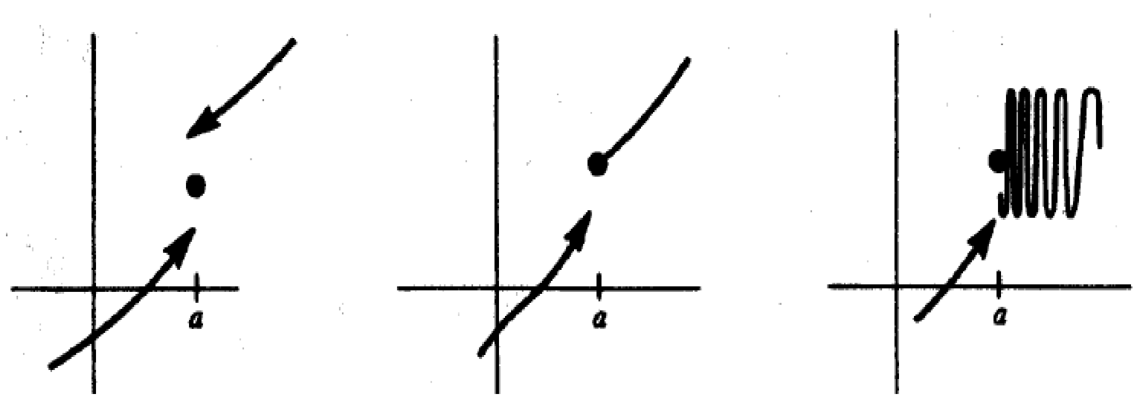


Figura 5.Tipos de discontinuidades.

A partir de la anterior noción, Spivak (1996, pág. 142) presenta la definición clásica de función continua mediante el límite, aunque las condiciones de continuidad están dadas implícitamente lo cual simplifica la definición.

> *"La función f es continua en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$"*

También en este texto Spivak (1996, pág. 145) presenta la definición métrica de función continua.

> "*Si se traduce la ecuación $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ de la definición limite se obtiene, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $x - a < \delta$, entonces $f(x) - f(a) < \varepsilon$.*
>
> *Pero en este caso, en que el límite es $f\ \ a$, la frase si $0 < x - a < \delta$*
>
> *Puede cambiarse por la condición más sencilla $x - a < \delta$, puesto que si $x = a$ se cumple ciertamente que $f(x) - f(a) < \varepsilon$"*

Espiral 11. Samper, C. et al 2005

En el texto de Samper, C. et al. (2005, pág. 138) , se plantea la noción intuitiva de función continuidad de la siguiente forma

> *"… el hecho de que su gráfica se pueda dibujar con un solo trazo, es decir, que no tenga interrupciones…".*

Posteriormente Samper C. et al, (2005, pág. 139) propone la definición clásica de función continua, donde se evidencia explícitamente que los límites laterales deben coincidir para que el límite exista.

*"Una **función f** se dice que es **continua** en un punto a si:*

i. f *está definida en* a *y* $f(a)$ *es un número real*

ii. $\lim_{x\to a} f(x)$*existe, es decir,*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

iii. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Además, Samper, C. et al, (2005, pág. 140) hace referencia a dos tipos de discontinuidades, la primera es la **discontinuidad removible o evitable** y la segunda la **discontinuidad esencial** como se muestra en la ***Figura 5***.

> *"Se dice que una función f tiene una discontinuidad* ***removible*** *en un punto a si se puede definir una función f^*, continua en a, que difiere de f sólo en el punto a. Se dice que la función f^* es la* ***extensión continua de f****. En caso contrario se dice que la discontinuidad es* ***esencial****."*

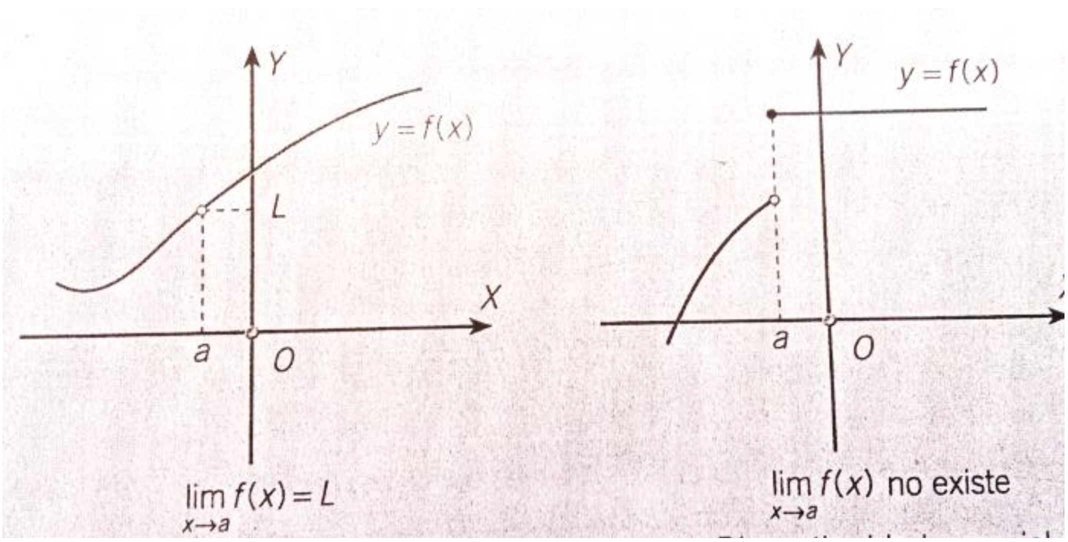


Figura 6. Discontinuidad removible y discontinuidad esencial

Matemáticas 11. Beltrán, L. et al, 2001

En el texto *Matemáticas 11* (Beltrán, L. et al, 2001, pág. 148), inicialmente se plantea un ejemplo $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$.

Para este ejemplo los autores enuncian la discontinuidad de esta función como:

> *"En $x = -1$, $f(x)$ no existe ya que $f(-1)$ no está definido; por lo tanto, la gráfica de esta función tiene un agujero o hueco en $x = -1$ … para llenar el agujero hay que redefinir la función y asignar el valor $y = -2$ para $x = -1$, así: $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & si\ x \neq -1 \\ -2, & si\ x = 1 \end{cases}$ De esta forma g es continua en $\mathbb{R}$".*

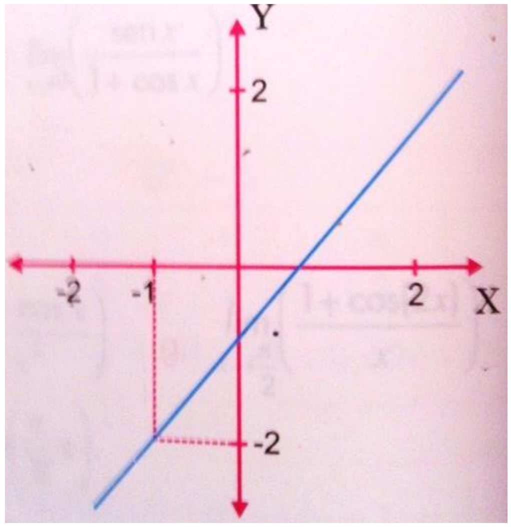


Figura 7. Ejemplo de función discontinua evitable.

A continuación de este ejemplo se plantea la definición de continuidad en un punto.

"Se dice que la función f es continua en el número a, si y solo si se cumple las tres condiciones siguientes:

a. $f(a)$ *existe*

b. $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe*

c. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$"

Si una o más de estas tres condiciones no se cumple para a, se dice que la función $f(x)$ es discontinua en a".

La definición planteada en este texto se basa en la definición de límite clásica. Además, a partir de la definición de continuidad establecen condiciones para definir si una función es discontinua.

2.3 Continuidad global y continuidad local

Cantoral (2004, pág. 171) considera dos clases de continuidad; la primera es la continuidad local que se refiere a la continuidad de una función en un punto, por lo cual se conoce también como continuidad puntual. La segunda es la continuidad global, que presenta la continuidad de una función en un intervalo dado, esto resulta de generalizar la continuidad puntual a todos los puntos del intervalo.

A continuación se presenta las definiciones de **continuidad local** y de ***continuidad global*** que se presentan en el Spivak (1996, pág. 142).

Continuidad puntual

"La función f es continua en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$"

Continuidad global

"Si f es continua en x para todo x de (a, b), entonces se dice que f es continuaen (a, b). La continuidad en un intervalo cerrado se define de modo algo diferente; una función f se dice que es continua en $[a, b]$ si:

1. *f es continua en x para todo x de (a, b)*

2. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ *"*

En la anterior definición se evidencia que la continuidad global determina la continuidad en todos los puntos del intervalo. Además, en la continuidad global en un intervalo cerrado se debe considerar; el límite por la derecha del extremo inferior del intervalo y el límite por la izquierda del extremo superior del intervalo.

2.4 Algunas propiedades de la continuidad

Sean f y g son dos funciones continuas en un punto p. La suma $f+g$, la diferencia $f-g$, y el producto $f.g$ son también continuas en p. Si $g(p)\neq 0$, también el cociente $\frac{f}{g}$ es continua.

I. Si f *y* g *son dos funciones continuas en un punto* p, entonces $f+g$ es continua en p

Como f y g son continuas entonces se tiene

$$\lim_{x\to p} f(x)=f(p) \text{ y} \lim_{x\to p} g(x)=g(p)$$

Por los teoremas delímite se tiene

$$\lim_{x\to p} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to p} f(x)+\lim_{x\to p} g(x)$$

Luego,

$$\lim_{x\to p} [f(x)+g(x)] = f(p)+g(p)$$

Por lo tanto, $f+g$ es continua en $x=c$

II. Si f *y* g *son dos funciones continuas en un punto* p , entonces $f\cdot g$ es continua en p

Como f y g son continuas entonces se tiene

$$\lim_{x\to p} f(x)=f(p) \text{ y } \lim_{x\to p} g(x)=g(p)$$

Por los teoremas de límite se tiene

$$\lim_{x\to p} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to p} f(x)\cdot\lim_{x\to c} g(x)$$

Luego,

$$\lim_{x \to p} f(x) \cdot g(x) = f(p) + g(p)$$

Por lo tanto, $f \cdot g$ es continua en $x = p$

III. Si f *y* g *son dos funciones continuas en un punto* p y si $g(p) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en p

Como f y g son continuas entonces se tiene

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p) \text{ y } \lim_{x \to p} g(x) = g(p)$$

Por los teoremas de límite se tiene

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to p} f(x)}{\lim_{x \to p} g(x)}$$

Luego,

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(p)}{g(p)}, \text{si } g(p) \neq 0$$

Por lo tanto, $\frac{f}{g}$ es continua en $x = p$

Ejemplos de funciones continuas

Continuidad de funciones constantes

Las funciones constantes son siempre continuas. Si $f(x) = k$ *para todo* x*, entonces*

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} k = f(p)$$

Para todo p*, con lo cual* f *es continua para todo* x*.*

Continuidad de la función identidad

La función identidad es continua para todo x. Si $f\ x\ = x$ para todo x, se tiene

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} x = p = f(p)$$

Para todo p, luego es continua para todo valor de x.

Continuidad de funciones polinómicas

La función f definida por $f\ x\ = P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio real, es continua para todo número real.

Sea $f\ x\ = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, i \in 1,2,3, \cdots, n$

Por los teoremas de límite se tiene

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Luego,

$$= \lim_{x \to p} a_n x^n + \lim_{x \to p} a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \lim_{x \to p} a_2 x^2 + \lim_{x \to p} a_1 x + \lim_{x \to p} a_0$$

$$= a_n \lim_{x \to p} x^n + a_{n-1} \lim_{x \to p} x^{n-1} + \cdots + a_2 \lim_{x \to p} x^2 + a_1 \lim_{x \to p} x + a_0$$

$$= a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_2 p^2 + a_1 \lim_{x \to p} p + a_0$$

$$= f\ p$$

Por tanto f es continua para todo $p \in \mathbb{R}$

Continuidad de funciones racionales

El cociente de dos polinomios se llama función racional. Si r es una función racional se tiene que

$$r\ \ x\ \ = \frac{p\ \ x}{q\ \ x}$$

Donde p y q son polinomios. La función r está definida para todo número real x tal que $q(x) \neq 0$. Como el cociente de funciones continuas es continuo en los valores de x donde $q(x) \neq 0$, la función racional es continua en todos los puntos donde está definida.

Demostración

Sea r la función definida por $r\ \ x\ \ = \frac{p\ \ x}{q\ \ x}$ donde p y q son polinomios y $q(x) \neq 0$.

Aplicando el teorema del límite de un cociente se tiene que:

$$\lim_{x \to c} r\ \ x\ \ = \lim_{x \to c} \frac{p\ \ x}{q(x)} = \frac{\lim_{x \to c}\ p\ (x)}{\lim_{x \to c}\ q\ (x)}$$

Como $p\ y\ q$ son funciones polinómicas, se tiene que son funciones continuas

Por tanto,

$$\lim_{x \to c} p\ \ x\ \ = p\ \ c\ \ \text{ y } \lim_{x \to c} q\ \ x\ \ = q\ \ c$$

Luego

$$\lim_{x \to c} r\ \ x\ \ = \lim_{x \to c} \frac{p\ \ x}{q(x)}$$

Por tanto f es continua en su dominio.

2.5 Teorema de diferenciabilidad

En los textos universitarios Apóstol y Spivak, presentan la relación entre diferenciabilidad y continuidad, expresado en el siguiente teorema:

"Si f es derivable en a, entonces f es continua en a"

Demostración

Para demostrar que f es continua en a se tiene que probar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, entonces se parte demostrando que la diferencia $f(a+h) - f(a)$ tiende a0.

Se tiene que$f$es derivable en a; es decir,

$$\lim_{h\to o} f(a+h) - f(a)$$

ahora se divide y multiplica por$h$, además se utiliza la ley del producto

$$\lim_{h\to o} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} . h$$

$$= \lim_{h\to o} h \frac{f(a+h) - f(a)}{h} . \lim_{h\to o} h$$

Al sustituir $h$por0, se tiene

$$= f'(a) \cdot 0$$

$$= 0$$

Como $\lim_{h\to o} f(a+h) - f(a) = 0$ es equivalente a $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, así, pues f es continua en a. ■

"Continuidad de las funciones que admiten derivada. Si una función f tiene derivada en un punto x, es también continua en x." (Apostol, 1980, pág. 200)

Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a, el recíproco del teorema no se cumple, es decir, que una función f es continua no implica que esta función sea diferenciable[2].

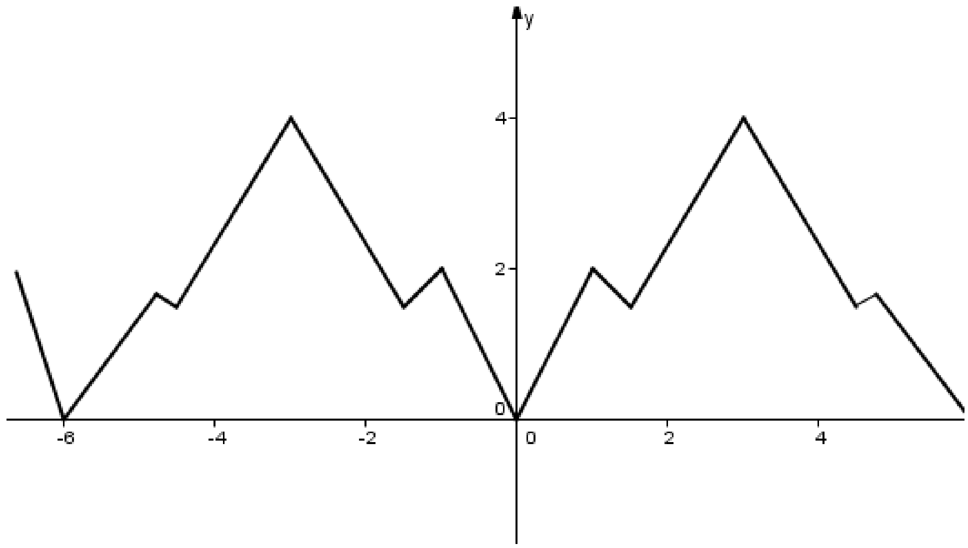


Figura 8. Representación de una función continuapero no derivable.

3. DESARROLLO HISTÓRICO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN CONTINUA

En este aparte, se describen algunas nociones de continuidad que se presentaron a lo largo de la evolución histórica de este concepto, en particular aquellas contribuciones realizadas por algunos matemáticos del siglo XVIII, ya que durante este siglo la noción de continuidad jugó un papel importante respecto a presentar soluciones a problemas de la física especialmente el de la cuerda vibrante.

3.1 Recuento histórico de continuidad

La definición actual de función continua, es resultado de una evolución histórica. Dicho concepto se ha relacionado con otros conceptos del cálculo como variable, función y límite, siendo este último de gran importancia.

[2] Una función que presenta “esquinas” o “retorcimientos” no es diferenciable, la gráfica de f no tiene tangente en dichos puntos.

El concepto de **función continua**, se consolidó con el matemático Karl Weierstrass (1815-1897) quien propuso como definición:

> *"$f(x)$ es continua en x_o si, para cualquier cantidad positiva $\varepsilon > 0$, existe otra cantidad positiva $\delta > 0$ de manera que, para todo punto del intervalo $|x - x_o| < \delta$ donde la función f esté definida, se verifica que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$"* (Boyer, 1949, pág. 287).

Bernhard Bolzano (1817) en su libro *Rein analytischer Beweis*, fue el primer matemático que definió la noción de continuidad a través del límite de la siguiente manera:

> *"… que una función $f(x)$ varíe para todos los valores de x estando dentro o fuera de ciertos límites. Simplemente significa que, si x es uno de esos valores, la diferencia $f(x+w) - f(x)$ puede hacerse tan pequeña como uno quiera tomando w suficientemente pequeño. "* (Boyer, 1949, pág. 268).

En la antigüedad ya existía una noción de continuidad. Dicha noción no estaba relacionada con la noción de función continua, pues en esta época no se contaba con las nociones generales de variable, dependencia o función.

Para los pitagóricos de acuerdo con Boyer (1986, pág. 108) y Ruiz (1994, pág. 153), todo era número, en consecuencia existía una unidad y el mundo estaba constituido por una multitud de unidades indivisibles, donde existe una magnitud indivisible que es el elemento generador de todas las otras magnitudes. En este sentido, se concibió el tiempo y el espacio como indivisibles, lo que significa que estos estaban constituidos por instantes y puntos respectivamente, dotados de una propiedad fundamental: la *continuidad.*

Asimismo, Yuste (2009, pág. 61), plantea que Aristóteles definió el continuo "*como aquello cuyos extremos son una sola cosa y sus partes se diferencian únicamente en cuanto al lugar que ocupan",* con lo anterior, Aristóteles fundamentó la idea del punto pitagórico como una unidad dotada de posición.

Por otro lado,plantean Sierra & González (1997, pág. 9), que en oposición a la idea de Aristóteles, estaban los eleáticos para quienes la unidad era un principio fundamental; Zenón de Elea fue uno de los representantes de esta escuela. Sus paradojas se referían a la imposibilidad del movimiento, en las respuestas a estas estaba implícita la noción de continuidad, porque en este periodo se tenía una concepción intuitiva de continuidad, que en principio no tenía que ver con la idea de función.

Además, a Nicole Oresme (1323-1382), según (Boyer, 1986; Ugalde, 2013), se le atribuyen los primeros intentos de representación gráfica de una función, por medio de segmentos rectilíneos para representar todo lo que varía. Estableció que lo medible se puede imaginar como una cantidad continua. En este sentido, su idea fue representar las propiedades de la magnitud observada a través de propiedades de las figuras geométricas.

A partir de esto, Oresme presentó una gráfica de velocidad-tiempo, que consistió en representar los diferentes instantes de tiempo por medio de los puntos de una recta horizontal y trazó un segmento perpendicular por algunos instantes, cuya longitud representa la velocidad.

Oresme, distinguió tres tipos de representaciones: ***la primera es uniformemente uniforme***, la *segunda* ***uniformemente deformes y*** la última **deformente deformes.**

Representación de cantidades variables según Oresme (Ruiz H. , 1994, pág. 160)

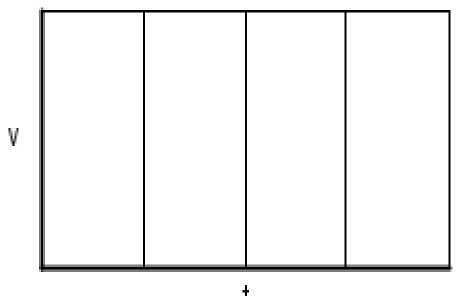


Figura 9.Representación Uniformemente uniforme

Según la representación de Oresme, la Figura 9, corresponde a la gráfica de velocidad-tiempo con una velocidad constante, por lo tanto la aceleración es nula.

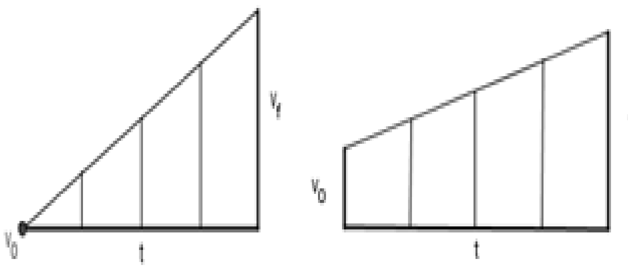


Figura 10. Representación uniformemente deformes

La Figura 10, corresponde a unas gráficas uniformemente deformes, donde la primera gráfica tiene velocidad inicial cero y la segunda una velocidad inicial diferente de cero. Las dos gráficas corresponden a un movimiento con aceleración constante.

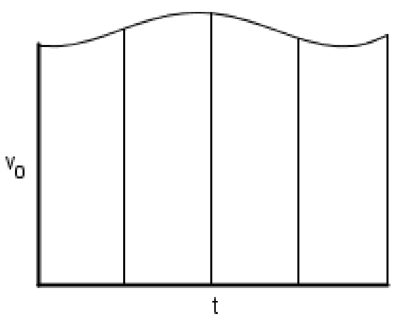


Figura 11. Representación deformemente deformes

La Figura 11, representa una gráfica deformemente deforme, en la cual los segmentos verticales representan diferentes velocidades, por lo tanto la aceleración no es constante. En este caso la línea superior no es una línea recta.

Oresme no especificó, si el área bajo la curva de la gráfica de velocidad-tiempo representa la distancia recorrida, es decir, lo que posteriormente se obtuvo a partir de la integral de la función. Oresme afirmó "*Toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua*".

A finales del siglo XVII y comienzos del siglo XVIII, se empezó a consolidar el concepto de función con el nacimiento de la geometría analítica que realizó René Descartes (1596- 1650) y Pierre Fermat (1601-1665). Adicionalmente, el estudio del movimiento ayudó a consolidar este concepto, que se vio reflejado en los trabajos de Kepler (1571-1630) y Galileo (1564-1642), donde a partir de las leyes físicas se evidenció la dependencia de cantidades variables. Otro acontecimiento importante fue la contribución de Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716) con la invención del cálculo infinitesimal, además en los trabajos de estos dos últimos; se incluyeron funciones expresadas por medio de series potencias.

En este periodo, indica Edwars (1979) que la noción de función tomó un aspecto más claro gracias a la relación entre el álgebra y la geometría a través de expresiones analíticas; representadas por gráficas. Newton planteó la curva $f\ x, y\ = 0$ como la intersección de dos líneas en movimiento, una vertical y otra horizontal que representan el comportamiento de x y y respectivamente. (Yam, 2009, pág. 11).

Newton, expuso las ideas básicas del cálculo en su obra acerca del método de fluxiones y series infinitas. A través de este expuso los dos principales problemas del cálculo infinitesimal, en términos del movimiento; la *diferenciación y la integración*. En el primer caso, a partir de la distancia recorrida determinar la velocidad y el segundo caso, a partir de la velocidad, determinar la distancia recorrida.

Newton planteó dos nociones centrales: ***las magnitudes continuas*** y **la *variación continua***. A partir de estas construyó la noción de ***fluente*** y ***fluxión***[3]. En

[3] Las *fluentes* son las magnitudes variables y la *fluxión* es la rapidez de cambio de la fluente (García, 2002, p. 33)

consecuencia, para Newton las funciones que representaban problemas de movimiento eran continuas.

Por otra parte, Leibniz en sus trabajos llegó a los mismos conceptos presentados por Newton del cálculo diferencial e integral, obtenidos a partir del estudio de la geometría de las curvas. En el manuscrito *"El método inverso de las tangentes"* de 1673, aparece por primera vez el término *función* refiriéndolo a un problema de cálculo de ordenadas a partir de cierta propiedad de las tangentes.

La idea de función era muy limitada, se reducía a funciones analíticas, es decir las que se podían expresar mediante una ecuación algebraica y posteriormente a las desarrollables en serie de potencias.

Además introdujo la notación diferencial (dx, dt) y la integral $\int$, que actualmente se utiliza.

3.2 Siglo XVIII

En la primera mitad del siglo XVIII, la noción de continuidad evolucionó y se enriqueció con el problema de la cuerda vibrante que consistió en estudiar las vibraciones de una cuerda sujeta a sus extremos; este problema físico fue abordado por matemáticos de la época como D´Alambert, Daniel Bernoulli y Euler, problema que dio origen a las series de Fourier.

El problema consiste, en considerar las vibraciones infinitamente pequeñas de una cuerda de longitud finita tensionada en sus dos extremos, el objetivo es determinar la función que describe la forma de la cuerda en cada instante. Jean D'Alambert (1717-1783) escribió la ecuación de onda para representar el movimiento. Consideró la cuerda sobre el eje x y asignó y a la distancia, a la que en un tiempo t, se encuentra del eje x cada punto de la cuerda cuando se pone a vibrar, la cual se representa por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

Abordar este problema implicó revisar términos que se habían utilizado en relación con las matemáticas, tales como funciones, continuidad y convergencia.Euler popularizó el uso de la diferenciación parcial, lo cual llevó a la búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales. Algunos matemáticos, entre ellos D'Alambert, encontraron ecuaciones para resolver varios problemas de la Física. D'Alambert propuso como solución para la ecuación de onda

$$y = F\ x + ct\ \ - F(x - ct)$$

Donde F es una función periódica de periodo $2l,$ con condiciones de frontera en los extremos de la cuerda, $y = 0,$ para todo t. Adicionalmente, consideró que en $t = 0$, $y = 0$. Un avance en la solución de la ecuación, es que para algún tiempo t se tiene, $y = Ksen\ \frac{\pi x}{l}$ D'Alambert estableció que las funciones solución deberían ser diferenciables. Hasta entonces, el cálculo implicaba la operación con funciones como las polinómicas, las trigonométricas, la exponencial y todas las expresiones algebraicas. Euler abordó el problema y propuso que la solución podría no ser diferenciable en los valores de x correspondientes a los extremos de la cuerda; incluir funciones como estas amplió el rango de las funciones que se utilizaban y llevó a redefinir función, para Euler las funciones discontinuas no podían ser expresadas analíticamente y la ecuación que daba solución al problema de la cuerda vibrante no estaba definida por expresiones analíticas.

Como señala Yam (2009, pág.14), la mayor contribución de la controversia del problema de la cuerda vibrante fue extender el concepto de función para permitir la inclusión de funciones definidas por expresiones analíticas a trozos y funciones con gráfica sin expresión analítica.

Durante este periodo la noción de continuidad se fortaleció con los trabajos realizados tanto de Euler como de Arbogast.

3.2.1 Leonard Euler

Leonard Paul Euler (1707-1783), nació en Basilea Suiza y murió en San Petersburgo Rusia, se consideró como uno de los principales contribuyentes al *Análisis Matemático;* historiadores comoBoyer valoran los trabajos de Euler como equivalentes a los realizados por Euclides con la geometría.

En 1720, Euler ingresó a la Universidad de Basilea para estudiar teología y hebreo. Gracias a sus conocimientos en matemáticas recibió clases del matemático suizo Johann Bernoulli (1667-1748) quien contribuyó profundamente al desarrollo de las ciencias matemáticas. Euler adquirió su grado académico de magíster de la Facultad de Filosofía a los diecisiete años.

Realizó importantes descubrimientos en áreas como el cálculo, teoría de números, teoría de grafos, geometría, álgebra, mecánica y astronomía. Estos resultados se presentaron en sus obras; entre ellas aparecieron tres volúmenes de *Introductio in Analysis Infinitorum, Institutiones Calculi Differentialis*e *Institutiones Calculi Integralis.*

Euler aporto significativamente a la notación matemática, particularmente en el análisis matemático la notación de función $f(x)$, las notaciones de $sen\theta,\ cos\theta$, la letra e para la base de los logaritmos naturales, el símbolo i para la raíz cuadrada de -1, el símbolo π , los diagramas de Venn y la notación de sumatoria $\sum$.

Euler recibió una invitación para laborar en la academia de ciencias de San Petersburgo en Rusia, donde trabajaron sus amigos Nicolás y Daniel Bernoulli. La oferta estaba dirigida a ocupar un cargo de la sección de medicina y filosofía. Él ocupó la cátedra de filosofía natural y luego la cátedra de Matemáticas que había dejado la vacante de Daniel Bernoulli, para luego convertirse en el matemático más importante de la academia a sus veintiséis años (Boyer, 1986). Sus trabajos abarcaron casi todas las matemáticas contemporáneas a él, pues en todas las ramas realizó descubrimientos notables.

Leonard Euler fue el matemático más destacado e importante del siglo XVIII, según (Azcárate, 1990; Boyer, 1986; Ugalde, 2013). En esta época se destacaron otros matemáticos como Jean d´Alambert (1717–1783), Daniel Bernoulli (1700-1782), Nicolás Bernoulli (1662-1716), ColinMaclaurin (1698-1746), Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) y Arbogast (1759 – 1803). Este último no tan reconocido, pero de gran importancia para el desarrollo de la noción de continuidad de una función.

Además, Euler se consideró como el maestro común de todos los matemáticos de la segunda mitad del siglo XVIII, como se manifiesta en la siguiente cita.

> *Laplace "¡Leed a Euler, leed a Euler, él es el maestro de todos nosotros!" y Gauss "el estudio de los trabajos de Euler es la mejor e insustituible escuela para los distintos campos matemáticos"* (Durán, s.f)*.*

3.2.2 Louis FrançoisAntonieArbogast

Louis Arbogast (1759-1803), nació en Mutzing y murió en Estrasburgo. Se desempeñó como abogado en el Consejo Soberano de Alsacia y en 1787 fue profesor de matemáticas en un colegio de Colmar ciudad de Alsacia, allí entró en una competencia matemática que le dio un lugar importante en el desarrollo del cálculo.

Arbogast, también presentó un ensayo donde expuso la ley de continuidad, la cual se aborda en el apartado 3.3.1. Esta coincidió con la noción de continuidad presentada por Euler. Por otra parte, Arbogast consideró condiciones para no tener continuidad, lo cual denominó discontigüidad, el trabajo realizado en este ensayo contribuyó a los trabajos de análisis que posteriormente realizó Cauchy.

En 1789, Arbogast se trasladó de Colmar a Estrasburgo donde se desempeñó como docente de matemáticas en el colegio Royal, además recopiló memorias y cartas de Fermat, Descartes, Jean Bernoulli, Varignon, de L`Hospital entre otros; presentando un informe sobre el cálculo diferencial e integral a la academia de

Sciencies de Paris, el cual no fue publicado en su momento. En 1791 fue nombrado rector de la Universidad de Estrasburgo.

En este mismo año, según, Edwards (1979, pág. 303) Arbogast en su libro de memorias publicó la ley de continuidad, la cual basó en los comportamientos gráficos de la función.

Arbogast y FrancoisFrancais eran muy amigos por lo cual trabajaron juntos en el cálculo de derivadas y operacional. Al morir Arbogast su amigo heredó todos sus escritos, los cuales fueron publicados en 1805.

3.2.3 Johann Bernoulli

Johann Bernoulli (1667-1748), nació y murió en Basilea Suiza. Inicialmente quiso realizar una carrera de comerciante pero no tuvo éxito, en 1687 estudió medicina y a su vez matemáticas en la universidad de Basilea. Dedicó la mayor parte de su tiempo al estudio de los trabajos de Leibniz sobre el cálculo. En 1691 viajó a Génova, donde enseñó cálculo diferencial. Posteriormente conoció a L`Hospital del cual recibió lecciones sobre el cálculo infinitesimal.

En 1693, comenzó a realizar intercambio de cartas con Leibniz, y sus memorias más importantes y extensas fueron publicadas en el *Acta eruditorum*, y aquellos artículos que su contenido era corto en el *Journal des Sçavans.*

Bernoulli planteó la primera noción explícita de función como expresión analítica, esta se encuentra en el artículo *Observaciones sobre los trabajos que hasta ahora se han realizado en el campo de las soluciones a problemas de isoperimetría* publicado en 1718. Para representar la característica de una función utilizó la letra griega φ, escribiendo el argumento sin paréntesis $\varphi\, x$.

Algunas de las contribuciones matemáticas de Johann Bernoulli son: el estudio de las ecuaciones diferenciales de la forma $Mdx - Ndy = 0$, donde M y N son funciones de x y y, también realizó trabajos en los cuales estudió funciones como $y = x^n$ y $y = x^x$. Para el área bajo la curva entre 0 y 1, de la función $f(x) = x^x$ encontró la representación de $y = x^x$ en una serie infinita.

3.2.4 Jean Le Rond d´Alambert

Jean Le Rondd´Alambert (1717-1783), nació y murió en París. Realizó estudios en derecho, medicina, ciencia natural, física y matemática. A los doce años ingresó al colegio de las Cuatro Naciones donde se aficionó a las matemáticas.

Luego en 1741 ingresó a la Academia de Ciencias gracias a una memoria sobre el cálculo integral, en este mismo año publicó su Tratado de dinámica. Posteriormente, en 1747 d´Alambert en su memoria *Recherches sur la courbe que forme une cordetendue mise en vibration*, publicó la primera solución al problema de las cuerda vibrante donde planteó la solución como *"La suma de dos ondas que se desplazan en direcciones opuestas* (Hersh, 1988, pág. 191; Garcia, 1997, pág. 30). Además estableció que la función debe estar sujeta a la ley de continuidad refiriéndose así a la propiedad que Euler[4] había definido.

Euler estudió la misma ecuación de onda[5]que d'Alambert,aunque trató de buscar una solución más general para este problema porqueconsideraba que la solución ded'Alambertno admitía funciones que podían ser discontinuas. En este sentido, el problema se enfocó en encontrar la naturaleza de la función.

Por otra parte, d'Alambert colaboró con Denis Diderot (1713-1784) en la redacción de la parte de matemática y filosofía de la célebre *Enciclopedia.* Además desarrolló trabajos alrededor de la mecánica celeste, logaritmos de números negativos y realizó estudios en las ecuaciones diferenciales parciales y su aplicación a la física (Ruiz A. , s.f, pág. 309).

3.2.5 Daniel Bernoulli

Daniel Bernoulli (1700-1782), nació en Groningen, Holanda y murió en Basilea, descendiente de una familia de importantes matemáticos. Estudió en la Universidad de Basilea Medicina.

---

[4]La definición de continuidad de Euler se presentará en el apartado 3.3.

[5]La ecuación de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Se desempeñó como profesor de física en la universidad de San Petersburgo donde compartió con Euler. Sus trabajos de hidrodinámica son reconocidos por el "principio de Bernoulli". Junto con su hermano Nicolaus planteó un problema que se dio a conocer como "paradoja de San Petersburgo[6]", esta paradoja tuvo gran importancia a lo largo del siglo XVIII.

Daniel Bernoulli, se destacó en matemáticas gracias a sus investigaciones relacionadas con cálculo de probabilidades, aplicado a juegos de azar. Además en su memoria publicada en 1755 por la Academia de Berlín, *Réflections et éclairissements sur les nouvellesvibrations des cordes* planteó la solución del problema de la cuerda vibrante; mediante la superposición de vibraciones producidas por movimientos simples, él planteaba que tanto la forma inicial de la cuerdacomo sus vibraciones subsiguientes se podían representar mediante series infinitas. Bernoulli concluye con la siguiente ecuación:

$$y = \alpha\ senx \cos t + \beta\ sen\ 2x \cos 2t + \gamma\ sen\ 3x \cos 3t + \cdots$$

3.2.6 Joseph Louis Lagrange

Lagrange (1736-1813**)**, nació en Turín y murió en París. En 1766 por recomendación de Euler ocupó el puesto que había dejado este, en la *Academia de Berlín*. En 1787 entró a la Academia de Ciencias de París.

Algunas contribuciones son los métodos de separación de raíces reales de una ecuación algebraica y de su aproximación por medio de fracciones continuas, funciones de raíces y sus permutaciones, y la teoría de números; donde Lagrange estudió los residuos cuadráticos. Una importante contribución de Lagrange es el cálculo de variaciones, a partir de la solución del llamado problema

[6] La paradoja de San Petersburgo dice: Pedro tira una moneda al aire tantas veces como sea necesario para sacar cara. Si esto ocurre en la primera tirada, tiene que dar a Pablo un ducado; si en la segunda 2; si en la tercera, 4; si en la cuarta, 8, y así sucesivamente, duplicando el número de ducados a cada jugada que es necesario efectuar. ¿Cuál es la esperanza de ganar correspondiente a Pablo? En otras palabras, ¿cuál es el precio justo que Pablo debe pagar por este juego?(Ruiz G. , 1999, pág. 7).

isoperimétrico[7]; comunicó a Euler la demostración acerca de este asunto, Euler decidió atrasar la publicación para darle el crédito a Lagrange (Ruiz A. , s.f, pág. 315).

Lagrange escribió los tratados *Teoría de las funciones analíticas y Lecciones sobre el Cálculo de las funciones.* Da una nueva definición de función:

> *¨Llamamos función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas¨ (Grattan, 1984, p.33).*

Además, se le atribuye un tratamiento abstracto de la función, aplicándolo a algunos temas de álgebra y geometría.

3.3 Definición de continuidad de Leonard Euler

La noción de función continua durante el siglo XVIII estuvo determinada por la teoría formal de funciones desarrollada por Euler. A continuación, se presentan las definiciones de función y la clasificación de estas en su época, para luego presentar la idea de continuidad según el mismo Euler.

Euler, en su primer tomo del libro *Introductio in analysis infinitorum (1748)* define el concepto de función. En el primer capítulo dedicado a las funciones, definió algunas nociones iníciales constante y cantidad variable, la primera se representaba por símbolos a, b, c y la segunda por x, y, z, las cuales se definen de la siguiente manera:

---

[7] El problema isoperimétrico se trata de: Hallar, de entre todas las curvas cerradas y simples de perímetro L, la que encierra una región de mayor área.(Grupo construir las matemáticas, 2002, pág. 101).

"Es cantidad constante la cantidad determinada que conserva siempre el mismo valor" (Durán, 1748-2001)

"Es cantidad variable[8] *la cantidad indeterminada o universal que comprende absolutamente todo valor determinado"* (Durán, 1748-2001)

Una variable indeterminada es algún valor definido que se asigna a esta, es decir que puede ser sustituida con cualquier valor numérico incluyendo los números complejos.
Definió una función como:

"Es función de una cantidad variable cualquier expresión analítica compuesta como quiera que sea por esa cantidad y números o cantidades constantes" (Durán, 1748-2001, pág. 1).

Es decir, la expresión analítica de cuyas cantidades la componen son cantidades constantes, excepto la variable x. Por ejemplolas funciones de $x$representadas por:$f(x) = a + 4x,\ f(x) = ax - 2x^2,\ f(x) = b\sqrt{a^2 - 3x^2}$ y $f(x) = x^5$.

Por lo tanto Euler no consideró las funciones constantes como funciones, ya que para él una función es una expresión que debe contener una cantidad variable.

La *expresión analítica* se entendió como las expresiones que se pueden obtener a partir de expresiones algebraicas (adición, la resta, la multiplicación, la división, la exponenciación y la extracción de raíces) y trascendentes (la exponencial, la logarítmica y funciones obtenidas del cálculo integral). A partir de la anterior clasificación, Euler planteó dos clases de funciones: *las funciones algebraicas y trascendentales*, las primeras se forman a partir de operaciones algebraicas y las segundas de operaciones trascendentes.

---

[8] Los valores que podía tomar una cantidad variable se contemplan en el conjunto de los números complejos o algunos de sus subconjuntos Azcárate(1990, pág. 50).

Por lo tanto, según Martínez (2008, pág. 78) lo que está detrás de estas definiciones es el hecho de que las funciones algebraicas son aquellas que se obtienen a partir de un número finito de operaciones elementales, mientras las trascendentes se obtienen a través de un número infinito de operaciones elementales, es decir que cualquier función se puede expresar mediante sumas finitas o infinitas. De ahí que una función de z puede representarse de la forma $Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} + \cdots$, en donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ son números cualesquiera.

Euler, se enfrenta al problema que si toda función podía ser representada por una curva, y si toda curva representaba una función, en consecuencia admite a las curvas mecánicas[9] como funciones.

En la noción de función que presentó Euler, la *expresión analítica* tiene el mismo significado que la planteada por primera vez en 1718 por Jean Bernoulli, "*Una función de una magnitud variable se denomina a una cantidad, compuesta de cualquier manera de esta magnitud variable y de constantes"* (Martínez, 2008, pág. 75).

En el segundo tomo de *Introductio in analysis infinitorum,* Euler planteó la relación que existe entre funciones y las curvas, que se presenta a continuación:

> *"Una función cualquiera de una variable x producirá una línea recta o curva".*
> (Martínez, 2008, pág. 79)

Además presentó la relación de curvas con funciones, para ello Euler estableció dos clases de líneas curvas, continuas y discontinuas o mixtas, determinadas de la siguiente manera:

Línea curva continua: Es aquella cuya naturaleza es expresada por una única función determinada de x.

[9] Las curvas mecánicas, son aquellas generadas por composición del movimiento.

Línea curva discontinua o mixta: Es aquella que está compuesta por diferentes porciones expresadas por varias funciones de x. En la modernidad, estas funciones son conocidas por funciones a trozos.

Por lo tanto, Euler precisa la definición de función como una expresión analítica, según lo plantea Jaimes (2012, pág. 7). Es así como se enfrenta al problema de que si toda función le corresponde una curva también toda línea curva debería representarse por una función.

Por otra parte Farfán (1996, pág. 24) afirma que Euler al definir la continuidad como una expresión analítica no se refiere a la continuidad de su trayectoria o camino que sigue la curva, por lo tanto una hipérbola constituye una curva continua. Mientras, la discontinuidad de una curva es aquella que esta expresada por diferentes funciones de x, como en el caso donde la curva está constituida por dos o más expresiones analíticas a lo largo de toda su trayectoria.

En este sentido, las funciones que en la actualidad son definidas de esta forma

$$f(x) = \begin{cases} f(x)_1, & x \in I_1 \\ f(x)_2, & x \in I_2 \\ f(x)_3, & x \in I_3 \\ \vdots & \vdots \\ f(x)_n & x \in I_n \end{cases}$$

corresponden a funciones discontinuas.

De acuerdo con Martínez (2008, pág. 80), para Euler la continuidad no era propiedad local,

> "*La continuidad es una propiedad intrínseca de cada función siempre y cuando está se encuentre expresada a partir de una única expresión analítica.A su vez esto implica que esta propiedad es una propiedad global y no local como lo es hoy día (o lo sería a partir de Cauchy)"*.

Como señala Cantoral (2006) y Ferraro (2000), la definición de función que presentó Euler (1748), se excluyeron funciones continuas que en la actualidad están definidas por expresiones de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases} \text{ y } f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \text{ es una cantidad positiva} \\ x^2 & \text{si } x \text{ es una cantidad negativa} \end{cases}$$

En la actualidad, las funciones continuas con puntos angulosos serían discontinuas en el sentido de Euler, como se evidencia en lo expuesto anteriormente.

La definición de función que se presentó anteriormente desató en la época una controversia con D`Alambert porque la solución del problema de la cuerda vibrante no podía ser expresada por una expresión analítica, lo que conllevó a Euler a replantear la definición de función en el prefacio de *Institutiones calculi differentialis (1755)*, donde apareció la nueva definición.

> *"Si x es una expresión variable, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquel se llama una función de dicha variable"* (Azcárate, 1990, pág. 51).

La anterior definición ya no consideró el término de expresión analítica que Euler presentó en su primera definición, esto fuereemplazado por la palabra cantidad.

De acuerdo con Grattan Guinness (1970, pág. 6), *"La terminología de Euler es diferente de la nuestra y la diferencia es importante. El término* ***"continuo"*** *de Euler es sinónimo con nuestro* ***"diferenciable"****, su término* ***"discontinuo"*** *corresponde a nuestro* ***"continuo"*** *e incluye las nuevas funciones que considera compuestas de trozos con expresiones algebraicas* ***"continuas".***

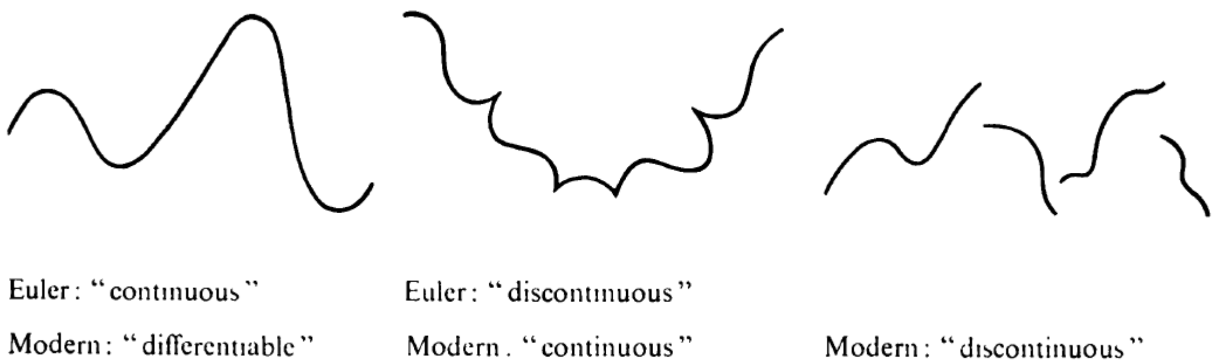


Figura 12. Continuidad, diferenciabilidad y discontinuidad.

3.3.1 Ley de continuidad de Arbogast

Arbogast presentó la ley de continuidad de la siguiente manera:

> **"***Una cantidadno puede pasar de un estado a otro sin pasar a través de todos los estados intermediarios, los cuales están sujetos a una misma ley. Una función algebraica es consideraba como continua porque los diferentes valores de estas funciones dependen de la misma manera en esas variables; y supone que las variables aumentan continuamente, la función recibirá variaciones correspondientes; pero no pasará de un valor a otro sin pasar por los valores intermedios. Así la ordenada y de una curva algebraica, cuando la abscisa x varía, no puede pasar bruscamente de un valor a otro, no puede haber saltos de una ordenada a otra desde diferentes formas de asignar cantidades; pero todos los valores sucesivos de y deben estar conectadas por una sola ley la cual marca las extremidades de las ordenadas formando una curva"* (Yam, 2009, pág. 46)

A partir de esta ley, Arbogast clasifica las funciones en continuas, discontinuas y discontigüas. La anterior clasificación se presenta en los trabajos de Cantoral (2006, pág. 10) y Yam (2009, pág. 11), de la siguiente forma:

Función discontinua: Es aquella función que cambia de forma, es decir, dada una curva en un intervalo cerrado, está no puede ser expresada por una única expresión analítica, en consecuencia, la función es definida por varias porciones de curvas continuas.

Para ilustrar lo anterior, se presenta una función en el intervalo A, D , está es discontinua porque está definida por diferentes expresiones analíticas; en el intervalo A, B está dada por una porción de parábola, en el B, C está representada por una porción de una elipse y en C, D por la porción de una circunferencia.

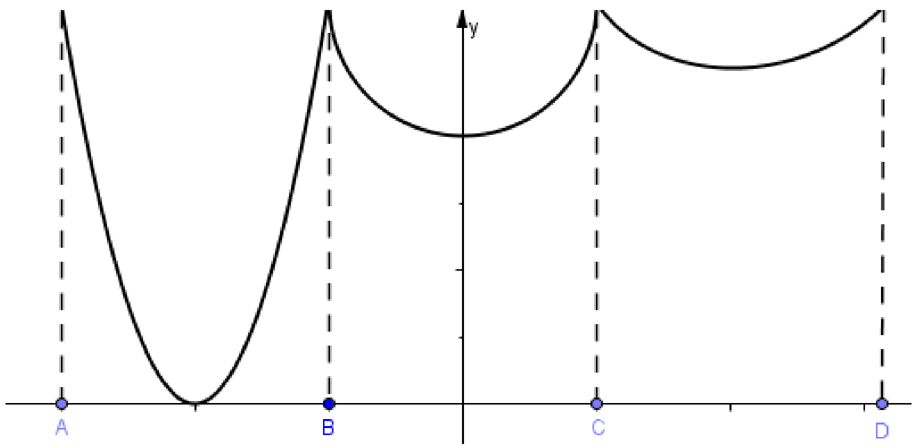


Figura 13. Función discontinua

Por ejemplo, la función definida por la siguiente expresión:

$$f\ x\ = \begin{array}{cc} x+2, & \text{si } x<-1 \\ x^2, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \overline{x}, & \text{si } x>1 \end{array}$$

En el sentido de Arbogast esta función no obedecía a una ley de continuidad, es decir no había una permanencia de la forma porque estaba definida por diferentes expresiones, en el intervalo $(-\infty.-1)$ está dada por la expresión $x+2$, para el intervalo $-1, 1$ está representada por una sección de parábola y en $(-1.\infty)$ está representa por una porción de la curva $\overline{x}$,

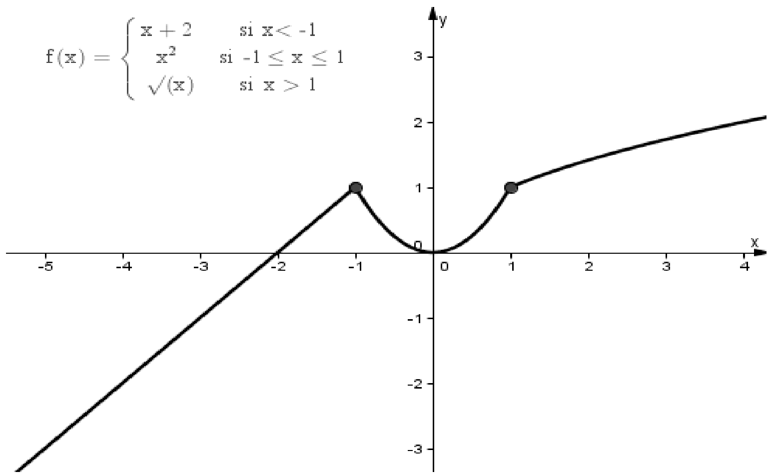


Figura 14. Ejemplo de función discontinua en el sentido de Arbogast

Función discontigüas: Son aquellas que además de ser discontinuas, las porciones de la curva no están unidas, entre sí. Para ejemplificar lo anterior se presenta la siguiente curva.

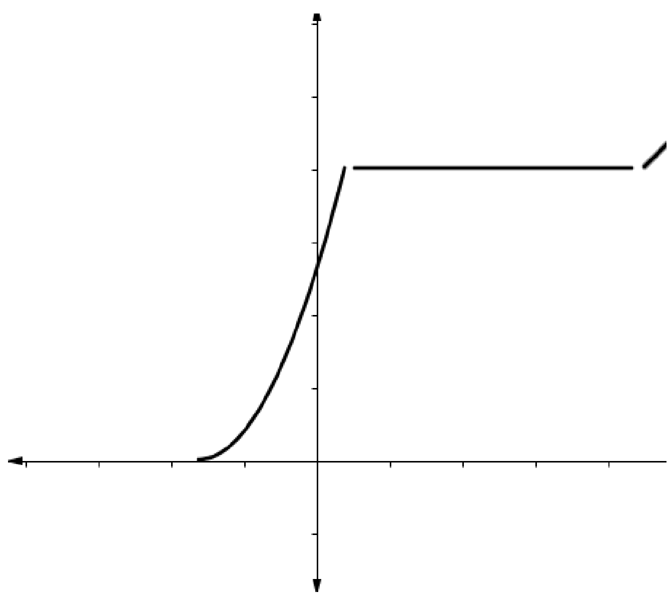


Figura 15. Función discontigüa

Por ejemplo, en el sentido de Arbogast, la función

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{si } x < -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{si} -1 < x < 1, \\ (x-2)^2 - 1, & \text{si } \quad x > 1 \end{cases}$$

es discontinua por estar definida por tres expresiones algebraicas y discontigüa porque en el trayecto de la curva hay partes que no están unidas, es decir la función $f(x)$ en los puntos $x = 1$ y $x = -1$ no está definida en $x = 1$ y $x = -1$

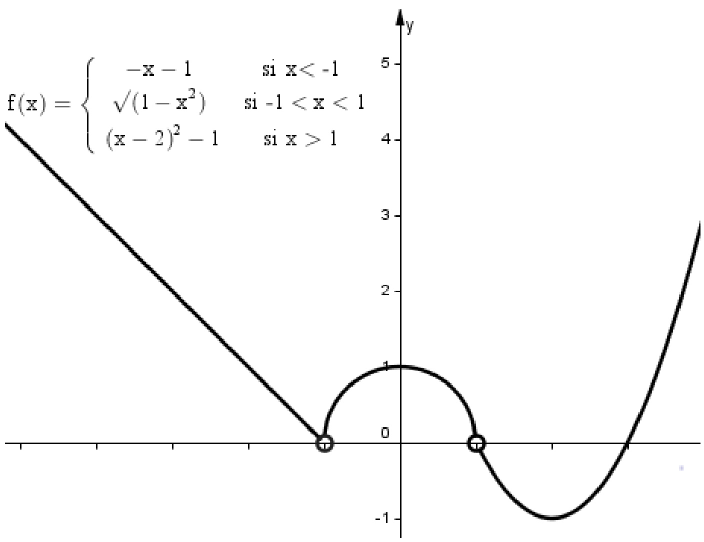


Figura 16.Ejemplo 1 de función discontigüa

De igual forma, la función

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{si } \; x < 2 \\ (x-2)^2 + 3, & si\; x > 2 \end{cases},$$

es una curva discontigüapues presenta una discontinuidad de salto en $x = 2$ (ver figura 16). En consecuencia las funciones que presentan una discontinuidad salto son discontigüas en el sentido de Arbogast.

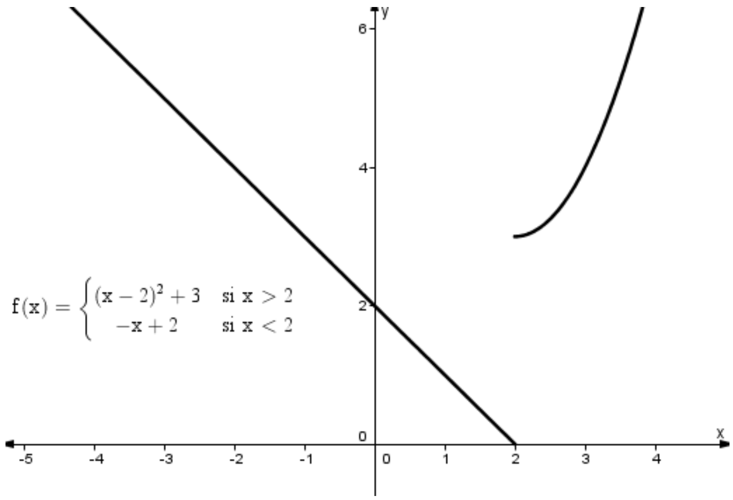


Figura 17. Ejemplo 2 de función discontigüa

Por ejemplo, la función definida por la siguiente expresión:

La función $f\ x\ = \frac{1}{x^2}$, corresponde a una curva discontigüa según Arbogast ya que el trazo de esta curva no está formado por puntos de trazo continuo.

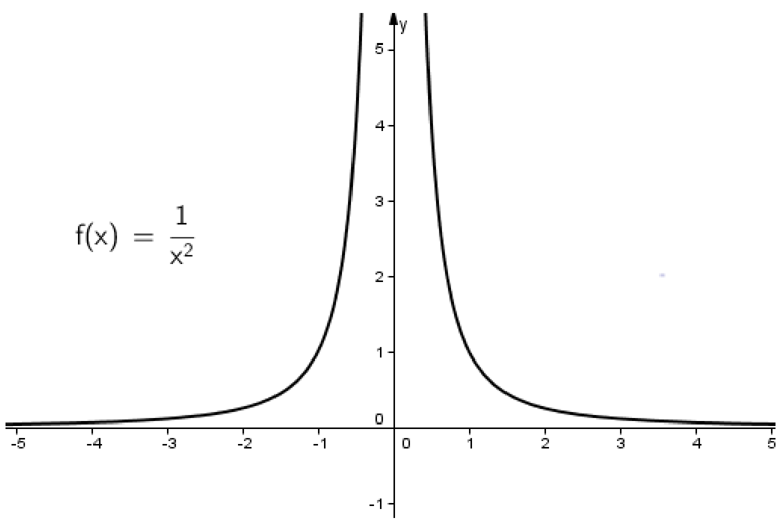


Figura 18. Ejemplo3 de funcióndiscontigüa

En conclusión, la noción de continuidad presentada por Arbogast, se basa en el comportamiento gráfico de la función donde la curva no presenta interrupciones en su trayectoria Por lo tanto, las funciones que en la actualidad presentan discontinuidad removible, discontinuidad de salto y discontinuidad infinita serían discontigüas para él. Además su forma se relaciona con una única expresión analítica.

A modo de conclusión se presenta el siguiente cuadro, donde se presentan las características de acuerdo con la noción de continuidad según Arbogast, Euler y la definición actual de continuidad.

Noción de continuidad		Definición de función continua
Arbogast	**Euler**	**Actual**
Ley de continuidad: Una cantidad no puede pasar de un estado a otro sin pasar a través de todos los estados intermediarios, los cuales están sujetos a una misma ley. **Clasificación de las funciones** **Continuas:** Función que puede ser expresada por una única ley analítica **Discontinuas:** Función que cambia de forma, la cual no puede ser expresada por una única ley analítica. **Discontigüas:**Son funciones que además de ser discontinuas, las porciones de la curva no están unidas entre sí.	**La continuidad:** significa invariabilidad, inmutabilidad de la ley de la ecuación que determinaba a la función a lo largo de todo el dominio de valores de la variable independiente. **Clasificación de las funciones** **Curvas continuas:** Es aquella cuya naturaleza es expresada por una única función determinada por x. **Curva discontinua o mixtas:**Es aquella que está compuesta por diferentes porciones expresadas por varias funciones de x.	**Funciones continuas** **Continuidad global:** *"Si f es continua en x para todo x de a, b , entonces se dice que f es continua en a, b . La continuidad en un intervalo cerrado se define de modo algo diferente; una función f se dice que es continua en a, b si:* *1. f es continua en x para todo x de a, b* *2.* $\lim_{x\to a^+} f\ x = f(a)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ **Continuidad puntual:** se refiere a la continuidad de una función en un punto: *La función f es continua en a si* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ***Discontinuidades*** ***Discontinuidad de salto:*** es aquella que se presenta cuando en un valor de x existen los límites a la derecha y a la izquierda, pero son distintos. ***Discontinuidad infinita:***Es cuando alguno de los límites laterales es infinito. ***Discontinuidad evitable:*** Corresponde al caso en que la función tiene límite, pero no coincide con el valor $f(c)$ o la función no está definida. Se llama evitable porque basta definir $f(c)$ como el límite de la función en c para que la función sea ahora continua.

4. ANÁLISIS DE FUNCIONES

En el siguiente apartado se presentan las funciones que son continuas en el sentido de Leonard Euler, además se realiza el contraste con la continuidad de acuerdo a la noción Arbogast y la definición clásica de continuidad.

Función identidad

La función identidad $f(x) = x$ para todo real x, su dominio y recorrido es el conjunto de los números reales.

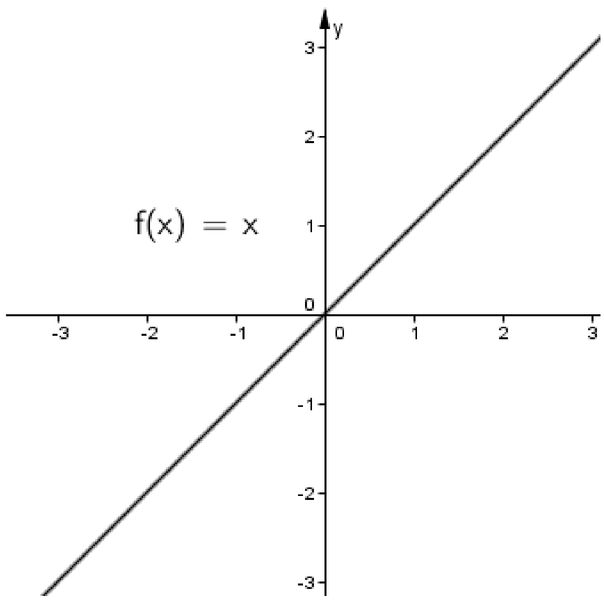


Figura 19. Función identidad, continua en el sentido de Euler, Arbogast y actualmente.

Arbogast	Euler	Clásica
La función identidad corresponde a una curva continua a causa que está definida por una expresión analítica.		La función identidad corresponde a una función continua bajo la definición clásica de continuidad. La función identidad $f(x) = x$ es continua en $\mathbb{R}$, porque para todo $a \in \mathbb{R}$, se tiene: $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a = f(a)$$

Paraanalizar si la función identidad $f(x) = x$ es derivable:

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{(x+h) - x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{h}{h} = \lim_{h \to o} 1$$

$$f'(x) = 1$$

Como se había mencionado anteriormente según GrattanGuiness, para el caso de la función identidad el término continuo de Euler es sinónimo del actual término diferenciable.

Función polinómica

La función polinómica es la definida para todo real x por una ecuación de la forma: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

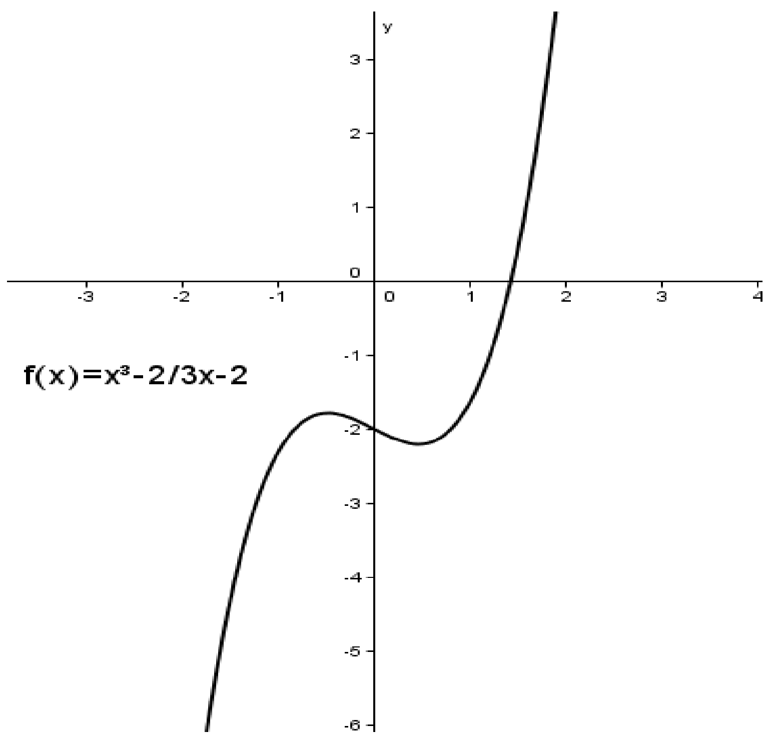


Figura 20. Función Polinómica, continua en el sentido de Euler, Arbogast y en la actualidad.

Arbogast	**Euler**	**Clásica**
Las funciones polinómicas son curvas continuas porque están representadas por una única ley analítica		La función polinómica corresponde a una función continua bajo la definición clásica de continuidad. En este caso $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un función continua en$\mathbb{R}$, porque el producto de funciones continuas es otra función continua y la suma de funciones continuas es continua.

Paraanalizar si la función polinómica$f(x) = x^3 - \frac{2}{3}x - 2$, es derivable:

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{(x+h)^3 - \frac{2}{3}(x+h) - 2 - x^3 + \frac{2}{3}x + 2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{h\left(3x^2 + 3xh + h^2 - \frac{2}{3}\right)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to o} 3x^2 + 3xh + h^2 - \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{3}$$

En el caso de la función polinómica$f(x) = x^3 - \frac{2}{3}x - 2$ se puede corroborar que para el término continuo de Euler es sinónimo con nuestro diferenciable como lo indica Grattan.

La función identidad y la función polinómica son representadas por una única expresión analítica para todo su dominio, en consecuencia estas funciones presentan una continuidad global.

Función racional

La función racional r, es el cociente de dos polinomios $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$,

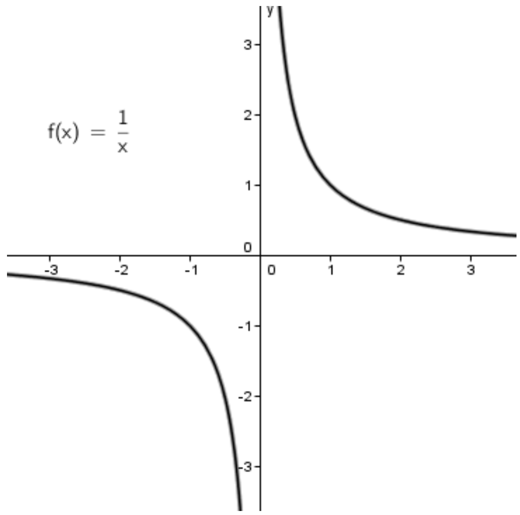


Figura 21. Ejemplo de función racional, continua en su dominio según la definición clásica de continuidad.

Arbogast	Euler	Clásica
Las curvas que representaban las funciones racionales son discontigüas, porque las curvas a pesar de estar definidas por una única ley analítica; presentan porciones de la curva que no están unidas.	Las funciones racionales son continuas, porque las curvas que representaban estas funciones están determinadas por una ley analítica. Él no se refería a la continuidad de la trayectoria de la curva, en cambio sí a la unicidad de la expresión analítica.	De acuerdo con la definición actual de continuidad, las funciones racionales son continuas en su dominio, es decir todos los números reales menos los valores que indeterminan la función. La función racional es continua en su dominio, Si para todo $a \in \mathbb{R}$, se tiene: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a)$

Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x}$, en $x = 0$ la función $f(x)$ no está definida en 0, en consecuencia el dominio de la función son $\mathbb{R} - \{0\}$. Por tanto, la función es continua en todo su dominio.

Si se analiza la continuidad de la función en todos los $\mathbb{R}$, la función presenta una discontinuidad infinita en 0, porque los límites laterales tienden a infinito,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \text{ y } \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Paraanalizar si la función racional $f\ \ x\ \ = \frac{1}{x}$, es derivable:

$$f'(x) = \lim_{h\to o} \frac{\frac{1}{(x+h)} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$f'\ \ x\ \ = \lim_{h\to o} \frac{-\frac{h}{x(x+h)}}{h}$$

$$f'\ \ x\ \ = \lim_{h\to o} \frac{-h}{h\ \ x^2 + xh}$$

$$f'\ \ x\ \ = \frac{-1}{x^2}$$

Para la función racional $f\ \ x\ \ = \frac{1}{x}$ la derivada existe para todo x en el que $q(x) \neq 0$, entonces se tiene que el término continuo de Euler es sinónimo de nuestro diferenciable.

Funciones constantes

Una función constante está definida por la expresión $f\ \ x\ \ = k$, donde k es un número real.La gráfica de una función constante corresponde a una recta paralela al eje horizontal, a distancia de k unidades.

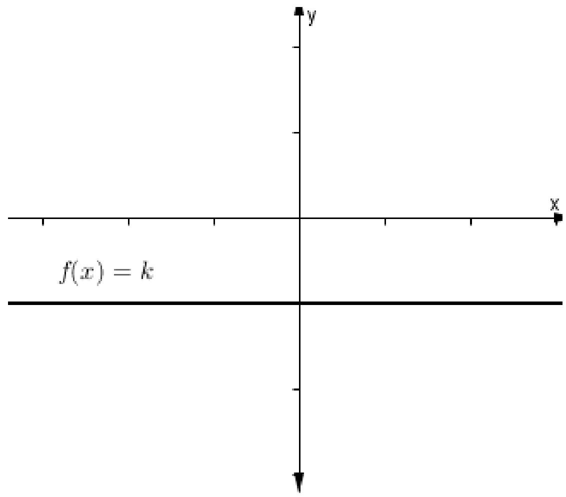


Figura 17. Función constante, discontinua en el sentido de Euler.

Arbogast	Euler	Clásica
La función constante es una función continua porque no está definida por varias porciones de curvas continuas.	Las constantes no hacen parte del concepto de función, puesto que las funciones son expresiones que contienen una cantidad variable.	La función constante $f(x) = k$ es continua en $\mathbb{R}$, porque para todo $a \in \mathbb{R}$, se tiene: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = k = f(a)$

Funciones a trozos

Para Euler, las curvas que estaban definidas por dos o más expresiones eran discontinuas, pero algunas funciones de estas son continuas desde el punto de vista de la definición clásica de continuidad,en este grupo están incluidasla función del valor absoluto de polinomios y funciones definida por partes que cumplen con la característica de ser continuas globalmente.

Función valor absoluto

La función de valor absoluto se puede definir como una función a trozos $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Esta función puede expresarse mediante una única fórmula analítica $f(x) = \sqrt{x^2}$, como lo indicó Cauchy en 1844, luego que Euler la definiera por dos expresiones analíticas. Esta función se conoce en la actualidad como la función de valor absoluto $f = |x|$.

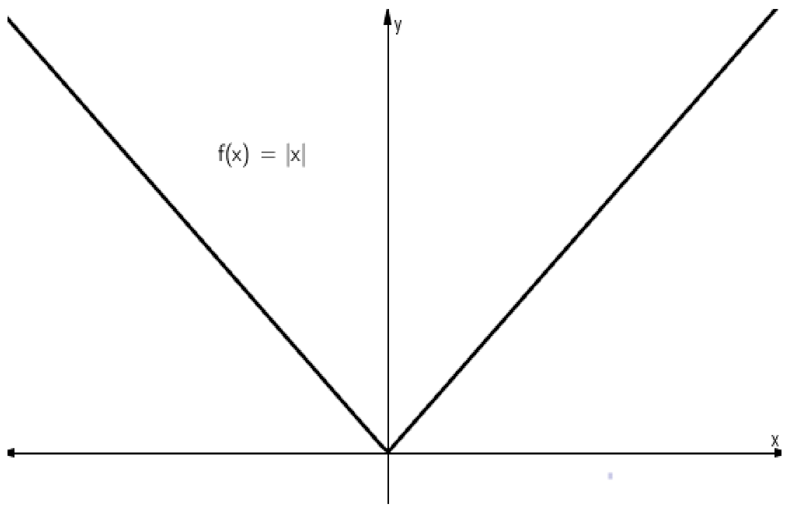


Figura 22. Gráfica de la función valor absoluto, discontinua en el sentido de Euler y Arbogast

Arbogast	Euler	Clásica
La función de valor absoluto es discontinua para Euler y Arbogast porquedefinieron la función por medio de dos expresiones analíticas. De esta forma, en la actualidad las funciones continuas con puntos angulosos serían discontinuas.		La función de valor absoluto es continua en $\mathbb{R}$. Es decir, para el punto $x = 0$ se analizan los límites laterales en dicho punto. Por consiguiente: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. En consecuencia, la función valor absoluto es continua en el punto $x = 0$.

De acuerdo con lo anterior, se puede establecer que las funciones definidas como el valor absoluto de polinomios son excluidas de la noción de continuidad presentada por L. Euler, un ejemplo de esto es la función $f(x) = x^2 - 4$, expresada como función por partes de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x^2 - 4 \geq 0 \\ -\ x^2 - 4\ , & \text{si } x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

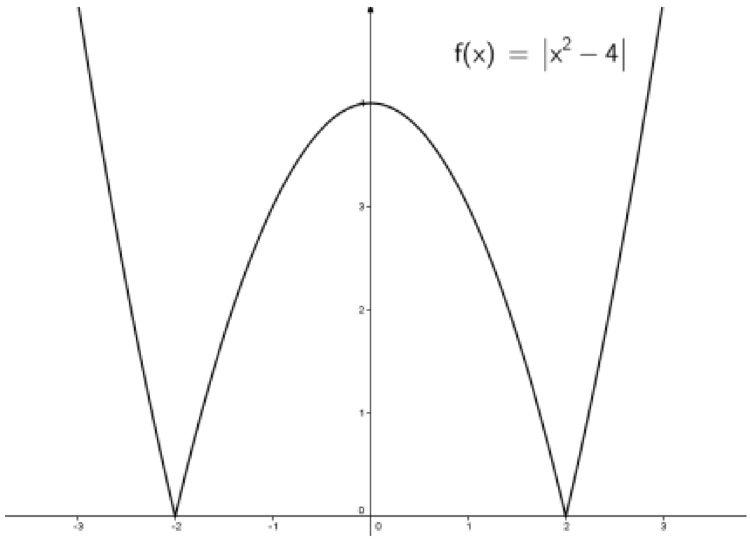


Figura 23.Gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4$

Arbogast	Euler	Clásica
La función $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4}$ **,** se define por medio de diferentes expresiones analíticas a lo largo de su trayectoria, entonces esta función es discontinua.		La función $f(x) = x^2 - 4$ es continua en $\mathbb{R}$. Para determinar la continuidad de la función $f(x)$, se revisá los puntos de la función donde experimenta un cambio de expresión analítica, es decir, en $x = 2$ y $x = -2$. Para $x = 2$, se tiene $f(2) = (2)^2 - 4 = 0$. Al analizar los límites laterales: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 0 = f(2)$. De igual forma, para $x = -2$, se tiene $f(-2) = -((-2)^2 - 4) = 0$. Al analizar los límites laterales: $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim_{x\to -2} f(x) = 0 = f(-2)$. Por tanto, $f(x)$ es continua números$\mathbb{R}$.

Función continua definida por partes

Las funciones $f(x) = \begin{cases} f(x)_1, & x \in I_1 \\ f(x)_2, & x \in I_2 \\ f(x)_3, & x \in I_3 \\ \vdots & \vdots \\ f(x)_n, & x \in I_n \end{cases}$, para cada uno de los intervalos $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n$, se definen una función elemental[10] $f(x)_1, f(x)_2, f(x)_3, \ldots, f(x)_n$.

Arbogast	Euler	Clásica
La función $\boldsymbol{f(x)}$ se considerada discontinua por no estar expresadas por una expresión analítica.		Para que las funciones que son definidas de la forma anterior, sean continuas se debe analizar la función en los puntos donde las funciones experimentan un cambio de la expresión, por lo cual se analiza los límites laterales, de tal forma que la función tenga límite y este coincida con el valor de la función en dicho punto.

[10] Denominamos funciones elementales las función constaste, función identidad, función la polinómica, función trigonométrica y la exponencial.

Por ejemplo, la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & si\ 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4}(x-2)^4 + 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

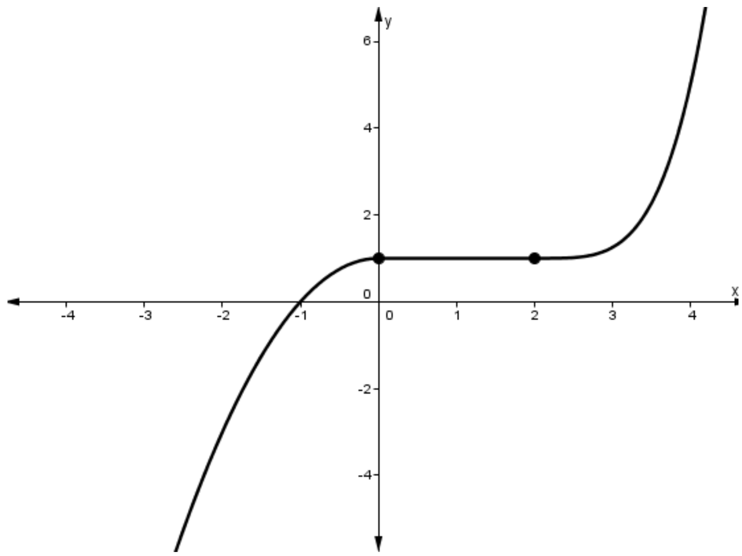
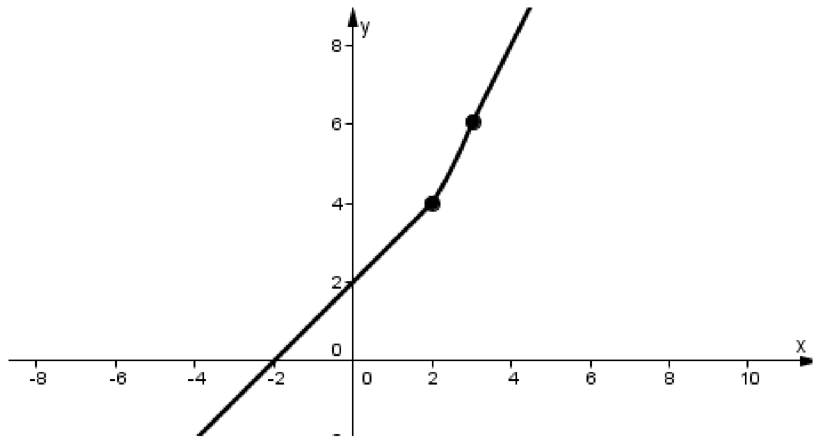


Figura 24. Ejemplo de función definida por partes,continua bajo la definición de continuidad clásica.

Arbogast	**Euler**	**Clásica**
La función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & si\ 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4}(x-2)^4 + 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$ corresponde a una curva discontinua porque su trayectoria está definida por diferentes leyes analíticas.		La función $f(x)$ es continua, como se evidencia a continuación: En $x = 0$, se tiene $f(0) = 1$. Al analizar los límites laterales: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$, En consecuencia $f(x)$ es continua en $x = 0$. En $x = 2$, se tiene $f(2) = 1$. Al analizar los límites laterales: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 2^+} f(x)$ $\lim_{x \to 2} f(x) = 1 = f(2)$, En consecuencia $f(x)$ es continua en $x = 2$. Por lo tanto, la función es continua en $x = 0$ y $x = 2$ por la definición local de continuidad.

Para estudiar la continuidad de la función definida por partes, se tiene la siguiente

función $f\ \ x \ = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & \text{si } \ 2 \leq x < 3\text{'} \\ 2x - a + b, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



<table>
<tr><th>Arbogast</th><th>Euler</th><th>Clásica</th></tr>
<tr><td colspan="2">La función
$$f\ \ x \ = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & \text{si } \ 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$
corresponde a una curva discontinua por ser una función que se define a partir de varias expresiones analíticas.</td><td>Para que la función sea continua los valores de ayb son los siguientes:
Se debe considerar la restricciones de la función f en $x = 2$ y x =3.

El límite por la izquierda en 2,
$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$ como los límites laterales deben coincidir, se tiene:
$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 = \lim_{x \to 2^+} ax^2 - bx + 3,$$
Resulta así,
$$\lim_{x \to 2^+} ax^2 - bx + 3 = 4 = 4a - 2b + 3$$
$\boxed{4a - 2b = 1}$ ecua1.

De igual forma, los límites laterales en el punto $x = 3$
$$\lim_{x \to 3^-} ax^2 - bx + 3 = 9a - 3b + 3$$
$$\lim_{\to 3^+} 2x - a + b = 6 - a + b,$$
Como los límites laterales deben coincidir se tiene,
$$-3b + 3 = 6 - a + b,$$
$\boxed{10a - 4b = 3}$ ecua 2,

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene</td></tr>
</table>

	$a=\frac{1}{2}$ y $b=\frac{1}{2}$, por lo tanto la función queda expresada de la siguiente forma: $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 2x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Figura 25.Ejemplo de función definida por partes

Por ejemplo, para estudiar la continuidad de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} xsen\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

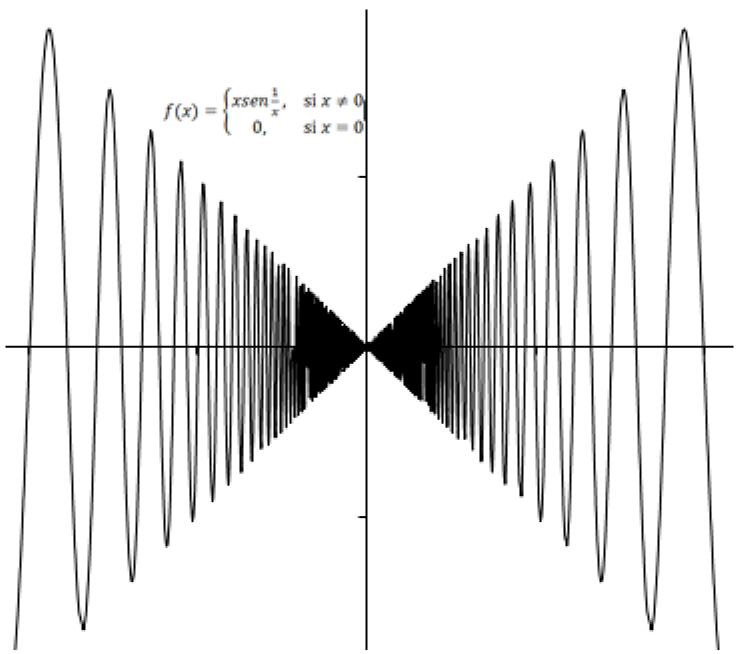


Figura 26. Ejemplo de función continua bajo la definición clásica

<table>
<tr><th>Arbogast</th><th>Euler</th><th>Clásica</th></tr>
<tr><td colspan="2">La función $f(x) = \begin{array}{ll} xsen\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{array}$ es una línea curva discontinua porque la naturaleza de esta función no es expresada por una sola función determinada por $\boldsymbol{x}$.</td><td>La función $f(x) = \begin{array}{ll} xsen\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{array}$, como se evidencia a continuación:
En $x = 0$, se tiene $f\ \ 0\ \ = 1$. Al analizar el límite se tiene:
$sen\frac{1}{x} \leq 1$ y $\lim_{x \to 0} x = 0$, se tendrá que
$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$

En consecuencia $f(x)$ es continua en $x = 0$.</td></tr>
</table>

Función definida por partes continua y derivable

En esta categoría se encuentran las funciones que son definidas por partes, además tienen la propiedad de ser continuas y diferenciables, es decir si una función f es suave a trozos y continua, entonces tiene primera derivada.

Para estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{array}{lll} x^2 & \text{si} & x < 0 \\ x^3 & \text{si} & x \geq 0 \end{array}$$

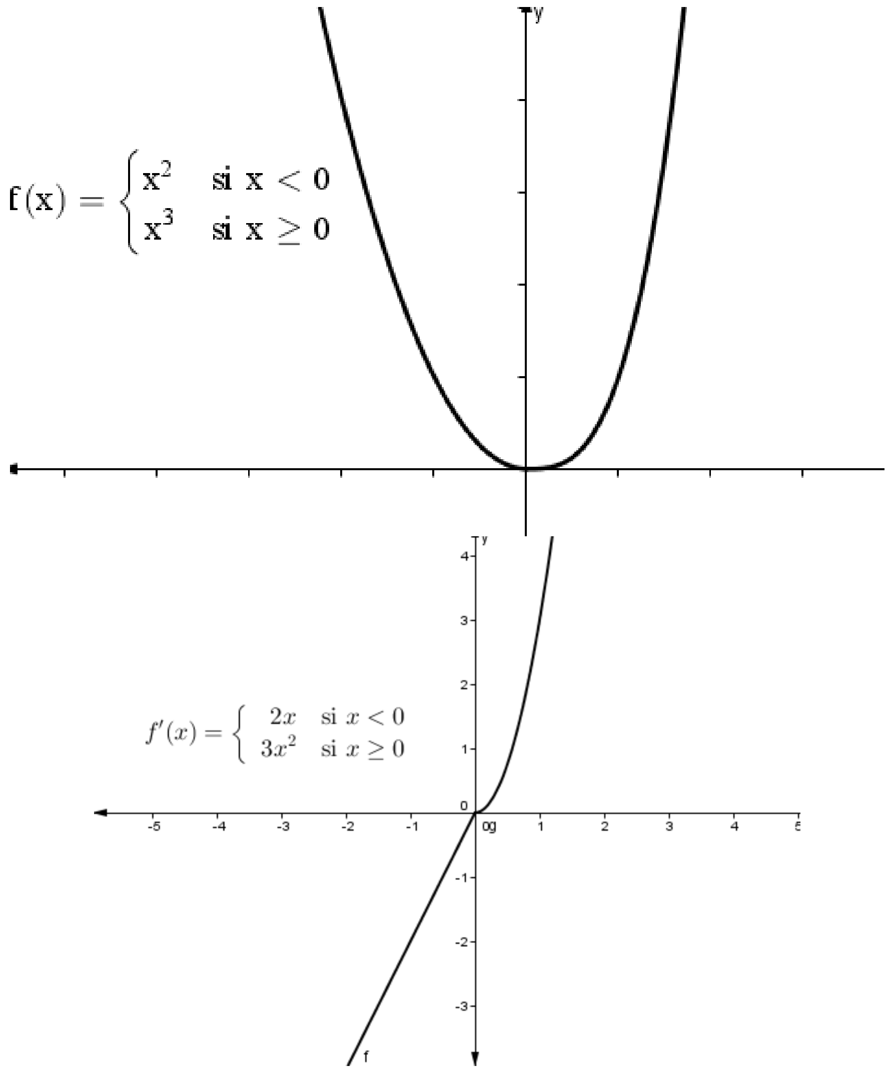


Figura 27. Ejemplo de función definida por partes continua y derivable

Arbogast	**Euler**	**Clásica**
La función $f(x) = \begin{matrix} x^2 & six < 0 \\ x^3 & six \geq 0 \end{matrix}$ corresponde a una curva discontinua al ser expresada por varias expresiones.		La función $f(x) = \begin{matrix} x^2 & six < 0 \\ x^3 & six \geq 0 \end{matrix}$ es continua y diferenciable, como se evidencia a continuación: En $x = 0$, se tiene $f\ 0\ = 0$. Al analizar los límites laterales $$\lim_{x \to 0^-} x^2 = 0 = \lim_{x \to 0^+} x^3$$ $\lim_{x \to 0} f\ x\ = 0 = f(0)$, En consecuencia $f(x)$ es continua en $x = 0$. Se deduce que la función es continua en $x = 0$, por la definición de continuidad local, además f es continua globalmente porque cualquier restricción de una función continua es continua.

Para analizar, si la función $f(x) = \begin{matrix} x^2 & \text{si} x < 0 \\ x^3 & \text{si} x \geq 0 \end{matrix}$ es derivable:

Para $x < 0$

$$f'\ x\ = \lim_{h \to o} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} 2x + h = 2x$$

Por lo tanto, f es diferenciable para cualquier $x < 0$,

Para $x \geq 0$

$$f'\ x\ = \lim_{h \to o} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} 3x^2 + 3xh^2 + h^3 = 3x^2$$

Por lo tanto, f es diferenciable para cualquier $x < 0$,

Se concluye que la función $f(x) = \begin{matrix} x^2, & \text{si} x < 0 \\ x^3, & \text{si} x \geq 0 \end{matrix}$ es continua y derivable donde la función derivada es $f'(x) = \begin{matrix} 2\,x, & \text{si } x < 0 \\ 3\,x^2, & \text{si } x \geq 0 \end{matrix}$.

Al generalizar el caso anterior, se tiene que las funciones de la forma

$f(x) = \begin{matrix} x^n, & \text{si } x < 0 \\ x^{n+1}, & \text{si } x \geq 0 \end{matrix}$, $n > 0$

Arbogast	Euler	Clásica
La familia de funciones $$f(x) = \begin{cases} x^n, & \text{si } x < 0 \\ x^{n+1}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, n > 0$$ corresponden a curvas discontinuas porque se definen por varias expresiones analíticas.		Las funciones $$f(x) = \begin{cases} x^n, & \text{si } x < 0 \\ x^{n+1}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, n > 0$$ expresadas de estas formas corresponde a funciones continuas y derivables.

Otro ejemplo, de la función definida por partes continua y derivable, en el sentido moderno $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} 2x + 6, & \text{si } x \leq -2 \\ -\frac{3}{2}x^2 - 4x, & \text{si } x > -2 \end{cases}$

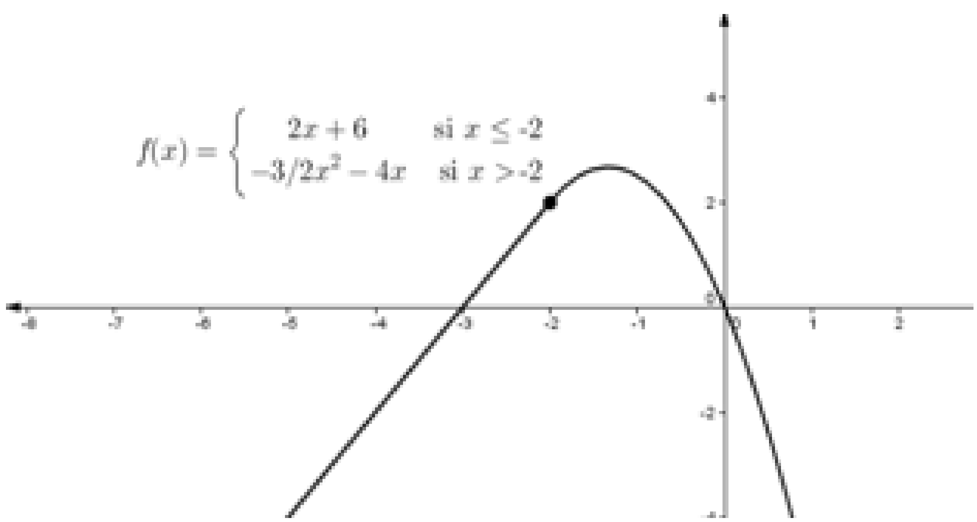


Figura 24. Ejemplo de funcion continua diferenciable y gráfica de la derivada de $f(x)$

Arbogast	Euler	Clásica
La función $f(x) = \begin{cases} 2x+6, & \text{si } x \leq -2 \\ -\dfrac{3}{2}x^2 - 4x, & \text{si } x > -2 \end{cases}$ corresponden a curvas discontinuas, por ser definida por más de una expresión analítica.		La función corresponde a función continua y derivable. En $x = -2$, se tiene $f(-2) = 2$. Al analizar los límites laterales $\lim_{x\to -2^-} 2x+6 = 2 = \lim_{x\to -2^+} -\frac{3}{2}x^2 - 4x$ $\lim_{x\to -2} f(x) = 2 = f(-2)$, En consecuencia $f(x)$ es continua en $x = -2$. Se deduce que la función es continua en $x = -2$, por la definición de continuidad local, además f es continua globalmente porque cualquier restricción de una función continua es continua.

Para analizar, si la función $f(x) = \begin{cases} 2x+6, & \text{si } x \leq -2 \\ -\frac{3}{2}x^2 - 4x, & \text{si } x > -2 \end{cases}$ es derivable:

Para $\text{si } x < -2$

$$f'(x) = \lim_{h\to -2} \frac{2(x+h)+6-2x-6}{h}$$

$$= \lim_{h\to -2} \frac{2h}{h} = 2$$

Para $x > -2$

$$f'(x) = \lim_{h\to -2} \frac{-\frac{3}{2}(x+h)^2 - 4(x+h) - (-\frac{3}{2}x^2 - 4x)}{h}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{-3xh - \frac{3}{2}h^2 - 4h}{h}$$

$$= \lim_{h\to -2} -3x - \frac{3}{2}h - 4 = 3x - 4$$

Por lo tanto, f es diferenciable para cualquier $x > -2$

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x < -2 \\ -3x - 4, & \text{si } x > -2 \end{cases}.$$

El anterior ejemplo corresponde a funciones que son definidas a trozos de tal forma que una de sus expresiones corresponde a la derivada de la otra expresión, es decir $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x < a \\ f'_1(x), & \text{si } x \geq a \end{cases}$, de tal forma que $f_1\ x$ es una función polinómica.

Para estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

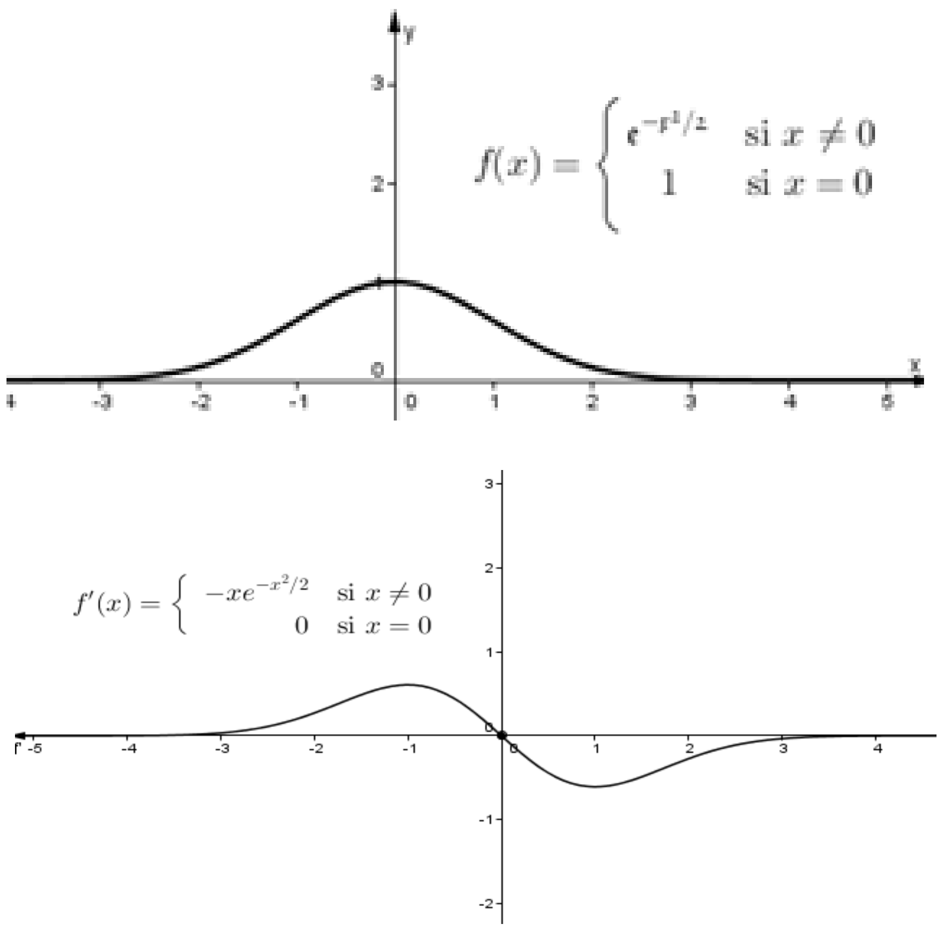


Figura 25. Ejemplo de función continua y derivable

Ejemplo de funcion continua derivable y gráfica de la derivada de $f(x)$

Para estudiar la continuidad puntual de la función $f(x)$, analizaremos la continuidad en $x = 0$

En $x = 0$, se tiene $f(0) = 1$. Al analizar los límites laterales

$$\lim_{x \to 0^-} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 = \lim_{x \to -0^+} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

En consecuencia $f(x)$ es continua en $x = 0$.

Se concluye que la función es continua en $x = 0$ por la definición local de continuidad, la f es continua globalmente porque los limites laterales coinciden entre sí, y con el valor de la función en el punto.

Para analizar, si la función es diferenciable,aplicando las reglas de derivación a cada una de las expresiones que definen la función, se tiene que

$$f'(x) = \begin{cases} -xe^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

5. CONCLUSIONES

En cuanto al análisis de funciones, Euler no consideró como continuas las funciones que son definidas a trozos que en la actualidad cumplen con la condición de ser continuas globalmente. En este sentido, para Euler las funciones continuas tenían la característica de ser diferenciables. La definición de función continua presente en la actualidad excluye funciones que eran consideradas continuas en el siglo XVIII e incluye algunas funciones que no eran consideradas para esta época.

Para Louis Arbogast, las funciones constantes eran continuas porque están definidas por una única curva, mientras que para él las funciones racionales eran discontigüasporque las curvas a pesar de estar definidas por una única ley analítica; presentan porciones de la curva que no están unidas.

El problema de la cuerda vibrante, contribuyó al fortalecimiento de la consolidación de la noción de función en esta época, donde la solución de este problema llevó a Euler a generalizar el concepto de función, donde se incluyen las funciones definidas por partes, siendo está definición la más general en el siglo XVIII.

Las funciones continuas para Leonard Euler son a su vez funciones diferenciables, esto se debe a las propiedades que están contenidas en la naturaleza misma de la función definida como una única expresión analítica. Además las funciones discontinuas para Euler corresponden a las funciones que estas compuestas por diferentes expresiones algebraicas.

De acuerdo con los trabajos de Farfán y Hitt (1990 y 1994), cuando se les pide a los profesores y alumnos que trace la gráfica de una función, tienden a representar a aquellas funciones con la propiedad de ser continuas. Dado que el concepto de función se ha asociado a una expresión algebraica que convencionalmente es representada en forma geométrica por una curva formada por puntos de trazo continuo, se ve favorecida la percepción global y se centra la atención en la forma gráfica de las funciones.

A manera de recomendación

Por ser la noción de función continua uno de los conceptos más importantes del cálculo y del análisis matemático, merece una atención especial desde lo didáctico. Se sugiere realizar un estudio relacionado con la enseñanza actual y sobre la comprensión que tienen los estudiantes acerca de la noción de función continua conociendo referentes históricos, pues la noción de continuidad presentada por Leonard Euler y Arbogast está muy marcada en los estudiantes, como se evidencia en el estudio de Sierra (1997, pág. 120), dondeenuncia que el criterio más utilizado para justificar la continuidad de una función es dibujar sin levantar el lápiz del papel y otras justificaciones que también presentan es cuando la función está definida a trozos y la función es derivable.

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T. (1980). Funciones continuas. *Calculus* (pp.155-190). Barcelona: Reverté S.A.

Azcárate, C., Deulofeu, J. (1990). *Fuciones y gráficas .* Madrid: Sintesis S.A.

Beltrán, L.,Dimaté, M., Rodríguez, B.(2001).Funciones y límites.*Matemáticas 11* (pp.148-152) Bogotá: Pretice Hall.

Boyer, C. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development.*New York: Dover Publications.

Boyer, C. (1986). *Historia de las Matemáticas.* Madrid : Alianza Editorial.

Cantoral, R. A. (2006,). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Relime, 9*(1), 7-30.

Cantoral, R. Aparicio, E. (2004). Sobre la noción de continuidad puntual: un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometria dinámica. *Epsilon*, 169-198.

Edwards, C. H. (1979).The Calculusaccording to Cauchy, Riemann and Welerstrass.*The Historical Development of the Calculus.*(pp. 301-308)New York: Springer Science & Business Media.

García G., Espitia L., Serrano C. (1998).El concepto de función en textos escolares. Colciencias, U. Pedagógica Nacional.

Euler, L. (2001).Euler y los infinitos (grandes y pequeños). En A. Durán y F. Pèrez (Eds)*Introducción al análisis de los infinitos* (pp.39-59). Sevilla : S.A.E.M "Thales" : Real Sociedad Matemática Española.

Youschkevitech, A. (1976).El concepto de función hasta la primera mitad del siglo XIX. En M. Farfán (Trad)*The concept of function up to the middle of the 19th century.*(pp.37-85). México: CINVESTAV.

Ferraro, G. (2000). Functions, Functional Relations, and the Laws of Continuity in Euler.*Historia Mathematica, 27*, 107-132.

Grattan-Guinness, I. (1970).Issues in eighteenth-century analysis the vibrating string problem. *The development of the foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann.*(pp.6-7) Massachusetts: The colonial press inc.

Berenguer, I., Berenguer, L., Cobo, B., Daza, M., Fernández, F., Pasadas, M., Pérez, R., & Paya, A. (2002). El problema isoperimétrico y el Cálculo de Variaciones. *Suma, 39*, 99-102.

Jaimes, N. (2012). *La noción de función, un acercamiento a su comprensión.*Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Facultad de ciencias. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Martínez, C. (2008). *El concepto de función en la obra de Euler:un recorrido a través de la constitución del Análisis Matemático Moderno.*Trabajo de grado, Facultad de ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Coyoacán, Ciudad de México, D.F., México.

Ruiz, A. (2003). Euler y su tiempo.*Historia y filosofía de Las Matemáticas* (pp. 309-315). San José, Costa Rica: Editorial Universidad Estatal a Distancia.

Ruiz, G. (1999). La paradoja de San Petersburgo: una reivindicacion didáctica. *Suma, 32*, 5-9.

Ruiz, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis Epistemológico y didáctico.*Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, España.

Samper, C., Serrano, C., Ardila, R., & Perez, M. (2005).. *Espiral 11*(. Bogotá: Norma.

Sirrea, M., & González, M. & Lopez, C. (1997). Desarrollo historico de los conceptos de límite y continuidad. *Los conceptos de Límite y continuidad en la educación secundaria: Transposición didáctica y concepciones del alumno* (pp. 7-20).Universidad de Salamanca.

Spivak, M. (1996). Funciones Continuas. *Cálculo Infinitesimal*(pp. 141-150). Mexico D.F: Reverté.

Ugalde, W. (2013). Funciones: desarrollo historico del concepto y actividades de enseñanza y aprendizaje. *Revista digital Matematicas, Educación e Internet*, *14*, 1-48.

Yam, E. (2009). *Función definida por partes.Un análisis histórico-didáctico referente a su tratamiento escolar.*Trabajo de grado para optar al Título de Licenciatura de Matemáticas, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, Yucatán, México.

Yuste, P. (2009). Reflexiones sobre la geometría griega. *Revista Endoxa, (23)(ISSN: 1133-5351)*, 57-81.