

TAREAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS
HACIENDO USO DEL GEOPLANO EN ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

AUTORA:

JULI ALEXANDRA GARCIA MEJIA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C. 2017

**TAREAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS
HACIENDO USO DEL GEOPLANO EN ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO.**

AUTOR(A):

**JULI ALEXANDRA GARCÍA MEJÍA
1072639926**

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Licenciada en
Matemáticas

ASESORA:

LYDA CONSTANZA MORA MENDIETA

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

BOGOTÁ, D.C. 2017

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Edad media de los estudiantes</small>	FORMATO
RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 108

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Tareas para la enseñanza de la clasificación de cuadriláteros haciendo uso del geoplano en estudiantes de grado séptimo
Autor(es)	García Mejía, Juli Alexandra,
Director	Lyda Constanza Mora Mendieta
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017.108p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
PALABRAS CLAVES	CUADRILÁTERO, MODELO DE VAN HIELE, GEOPLANO

2. Descripción	
<p>El trabajo está dirigido a docentes y estudiantes interesados en implementar material didáctico en el aula de clases, específicamente se encontrarán tareas que aportan al desarrollo del concepto de cuadrilátero y su clasificación con ayuda del geoplano. Se presenta inicialmente el marco de referencia, que incluye algunas definiciones de cuadriláteros y su clasificación, halladas en libros de texto y sitios Web, el geoplano y el modelo de Van Hiele. Luego se presenta el diseño preliminar de las tareas teniendo en cuenta la estructura del modelo de Van Hiele, con estas tareas se hizo un pilotaje con estudiantes de séptimo grado lo cual fue analizado con el fin de reformular las tareas propuestas en principio. Por último se elabora una propuesta de tareas dirigida a maestros en formación o ejercicio.</p>	

3. Fuentes	
Alfonso. L. S. (2008). <i>Matemáticas Segundaria 6</i> . Grupo sm.	

- Aravena, M. Gutiérrez, Á y Jaime, A.(2016).*Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centro de enseñanza vulnerables de Educación Media de Chile*. Enseñanza de las ciencias. Volumen (34).107-128. Recuperado de file:///C:/Users/Autorizado/Downloads/1664-10725-1-PB (3).pdf
- Arraz.J.M.(2004).*Geometría activa*. Recuperado de <http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/indice.html>.
- Baldor. J. A. (1980).*Geometría plana y del espacio con una introducción a la trigonometría*. Codice, S.A.
- Berrio. I. (1994). *Matemática Universal 6*.Bedout Editores S.A.
- Bruño. G. (s.f). *Geometría curso superior*. Recuperado de <https://es.scribd.com/doc/181771408/ELEMENTOS-DE-GEOMETRIA-EDITORIAL-BRUNO-pdf>.
- Clemens, R. Daffer, P. (1998). *Geometría*. Pearson.
- Ditutor (2014). Recuperado de <http://www.ditutor.com/asignaturas/geometria.html>.
- Godino, J y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf.
- Gutiérrez, A.y Fernández, A. (1985): *Actividades con el geoplano para la E.G.B. Colección de Monografías* .Papeles de Enseñanza de la Matemática. Volumen 1. Valencia: E.U. de Profesorado de E.G.B. recuperado de <http://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>.
- Jaime, A., y Gutiérrez, Á. (1990).*Una propuesta de fundamentación para el desarrollo de la geometría: modelo de Van Hiele*. En. S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds).Teoría y práctica en educación matemática (p.295-384).Sevilla:Alfar recuperado de <http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>
- Libro I de los elementos de Euclides. Recuperado de http://newton.matem.unam.mx/geometria/menulibro_m.html.
- López, O. y. García, S.(2008). *La enseñanza de la geometría*. Recuperado de <http://www.inee.edu.mx/mape/themes/TemaInee/Documentos/mapes/geometriacompletoa.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional (2006).*Estándares básicos*. Bogotá D.C.
- Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Addison Wesley Iberoamericana S.A.
- Muñoz. (2014).*Los materiales en el aprendizaje de las matemáticas*. (Tesis de pregrado).Universidad de la Rioja. Recuperado de https://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/TFE000754.pdf
- Perchad. Sector matemática (2000). Recuperado de <http://www.sectormatematica.cl/contenidos.htm>

Profesor en línea (2015). Recuperado de <http://www.profesorenlinea.cl>

Ramírez, N. (2014). *Estrategia didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientada por el modelo de Van Hiele y geogebra*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín. Recuperada de file:///C:/Users/Autorizado/Desktop/documentos/44005486.2014.pdf.

Saavedra, A.V.(2011). Guía para docentes Matemáticas para pensar. Norma.

Samper, C. y Molina, O. (2015). *Geometría Plana: Un espacio de aprendizaje*. Universidad Pedagógica Nacional.

Velázquez. D. (2010). Zona Activa matemáticas 6. Voluntad.

4. Contenidos

El trabajo está dividido en cuatro capítulos:

El primero comprende los preliminares relacionados con la justificación del trabajo, los objetivos y la metodología.

En el segundo capítulo se presentara;

El marco de referencia que incluye la definición de cuadriláteros y su clasificación consultada en diferentes fuentes, descripción del modelo de Van Hiele haciendo referencia a los niveles y fases en el aprendizaje de la Geometría, de la misma manera la clasificación , ventajas y desventajas del uso del geoplano en el aula de clase.

En el tercero capitulo, se encuentra el diseño preliminar de las tareas basadas en la estructura de los niveles y fases de Van hiele dirigida a los estudiantes y el análisis del pilotaje de dichas tareas.

En el último capítulo se presenta la propuesta de las tareas dirigidas a profesores en formación o ejercicio.

5. Metodología

Se consultaron 14 fuentes entre ellas libros universitarios, libros de texto escolar y páginas Web en donde se buscan las definiciones y clasificación sobre cuadriláteros que allí aparecen, luego se consultó sobre el modelo que soportaría las tareas; para ello se toma el modelo de Van Hiele basados en sus niveles y fases, seguido a esto se elabora las tareas dirigidas a los estudiantes con base al modelo, posterior a esto se aplica el pilotaje a 12 estudiantes de grado séptimo del colegio Personalizado Pensamiento en Bogotá y por último, de acuerdo con lo anterior se elabora la propuesta para profesores en formación o ejercicio.

6. Conclusiones

A lo largo del desarrollo de este trabajo se puede observar la importancia de la elaboración de tareas para la enseñanza de la Geometría debe tener una secuencia y organización de tal manera que los estudiantes articulen y apliquen lo aprendido antes y avancen en su aprendizaje, además es necesario, pensando en la diversidad que se puede encontrar en el aula, hacer uso de material didáctico que fomente en los estudiantes motivación e interés hacia el aprendizaje. Para este caso el geoplano es una herramienta útil en la enseñanza de cuadriláteros y los procesos de enseñanza en geometría.

Elaborado por:	Juli Alexandra García Mejía
Revisado por:	Lyda Constanza Mora Mendieta

Fecha de elaboración del Resumen:	24	07	2017
--	----	----	------

Contenido

LISTADO DE ILUSTRACIONES	8
LISTADO DE TABLAS	9
INTRODUCCIÓN	10
1. PRELIMINARES	12
1.1. Justificación.....	12
1.2. OBJETIVOS	15
1.2.1. Objetivo general	15
1.2.2. Objetivos específicos.....	15
1.3. Metodología	16
2. MARCO DE REFERENCIA	18
2.1. CUADRILÁTEROS.....	18
2.1.1. Definición (D)	19
2.1.2. Clasificación (C)	24
2.2. MODELO VAN HIELE.....	46
2.3. GEOPLANO	49
2.3.1. Clasificación de los geoplanos	49
3.3.3. Ventajas y desventajas del geoplano.....	51
4. DISEÑO DE TAREAS Y PILOTAJE	53
4.1. DISEÑO PRELIMINAR DE LAS TAREAS	53
4.1.1. ESTRUCTURA DE LAS TAREAS SEGÚN EL MODELO.	53
4.1.2. TAREAS DIRIGIDAS A LOS ESTUDIANTES.....	54
4.2. PILOTAJE.....	66
4.2. ANÁLISIS DEL PILOTAJE.....	66
5. PROPUESTA DE TAREAS PARA LA ENSEÑANZA DE LOS CUADRILÁTEROS.	69
6. CONCLUSIONES.	84
7. BIBLIOGRAFÍA.....	87
8. ANEXO.....	89

LISTADO DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Clasificación de cuadriláteros según Euclides	25
Ilustración 2. Clasificación de cuadriláteros según Bruño	26
Ilustración 3. Clasificación de cuadriláteros según Moise & Downs	27
Ilustración 4. Clasificación de cuadriláteros según Clemens	28
Ilustración 5. Clasificación de cuadriláteros según Godino y Ruiz	29
Ilustración 6. Clasificación de cuadriláteros según Samper y Molina	30
Ilustración 7. Clasificación de cuadriláteros según Baldor	31
Ilustración 8. Clasificación de cuadriláteros según Berrio.	32
Ilustración 9. Clasificación cuadrilátero según Alfonso	33
Ilustración 10. Clasificación de cuadriláteros según Zona Activa 6. ¡Error! Marcador no definido.	
Ilustración 11. Clasificación de cuadriláteros según Profesor en línea	35
Ilustración 12. Clasificación de cuadriláteros según la página MEC.	36
Ilustración 13. Clasificación de cuadriláteros según la página Ditutor	37
Ilustración 14. Clasificación de cuadriláteros según Sector matemática.	38
Ilustración 15. Clasificación de cuadriláteros atendiendo al paralelismo entre lados.	39
Ilustración 16. Clasificación de cuadriláteros existiendo paralelismo en al menos un par de lados.	39
Ilustración 17. Clasificación de cuadriláteros atendiendo a la congruencia entre sus lados y ángulos.	40
Ilustración 18. Clasificación de paralelogramos Grupo 1.	41
Ilustración 19. Clasificación de paralelogramos. Grupo 2.	41
Ilustración 20. Clasificación de trapecios. Grupo 1.	41
Ilustración 21. Clasificación de Trapecios. Grupo 2.	42
Ilustración 22. Clasificación de cuadriláteros para el desarrollo del trabajo.	42
Ilustración 23. Cuadrilátero	44
Ilustración 24. Geoplano cuadrado	50
Ilustración 25. Geoplano circular	50
Ilustración 26. Geoplano isométrico	51
Ilustración 27. Pintura Omar Rayo	55
Ilustración 28. Figura a construir	57
Ilustración 29: Cuadriláteros en el geoplano. Clasificación	61
Ilustración 30. Tarjetas tarea fase 4 nivel 4	65
Ilustración 31. Figura a construir	72
Ilustración 32. Tarjetas 2	74
Ilustración 33. Tarjetas 3	83

LISTADO DE TABLAS

Tabla 1.Clasificación de las definiciones de cuadriláteros halladas en las fuentes consultadas	22
Tabla 2.Definiciones de polígono en las fuentes consultadas	23
Tabla 3.Características de los niveles de Van Hiele.	47
Tabla 4.Ventajas y desventajas del uso del geoplano en el aula.	52
Tabla 5.Tareas para la enseñanza de cuadriláteros a partir del modelo de Van Hiele	54
Tabla 6.Tarjetas 1	57
Tabla 7.Tarjetas 2	59
Tabla 8.Sesiones del pilotaje	66
Tabla 9.Tarjetas 1	71
Tabla 10.Instrumento análisis de Pilotaje	89

INTRODUCCIÓN

El presente documento incluye una secuencia de tareas para la enseñanza de cuadriláteros, atendiendo al modelo Van Hiele el cual aporta a que el estudiante, a través del desarrollo de sus niveles y fases adquiera conocimiento del tema.

Para dar alcance a lo anterior el documento se encuentra dividido en tres partes; en la primera, el marco de referencia sobre cuadriláteros, el modelo de Van Hiele y el geoplano. Para construir la sección correspondiente a cuadriláteros se realizó una consulta de catorce(14) fuentes entre ellas libros de texto escolares, libros de texto universitarios y páginas web, estas últimas fueron tomadas como sugerencia de las más buscadas por los algunos estudiantes de la Educación Básica para la elaboración de diferentes tareas relacionadas con Geometría, esto con el fin de encontrar un referente común o familiar a ellos, otra subsección del marco de referencia es una descripción del modelo de Van Hiele sus niveles y fases, finalizando se realiza una consulta sobre el geoplano teniendo en cuenta la definición, clasificación y las ventajas y desventajas del uso de este.

La segunda parte está constituida por el diseño y pilotaje de las tareas, se organizan las tareas partiendo del modelo de Van Hiele para la enseñanza de cuadriláteros, luego a esto se elaboran las tareas dirigidas a los estudiantes asociadas a cada uno de los niveles y fases del modelo, posterior a esto se realiza un pilotaje de dichas tareas a los estudiantes de grado séptimo de Educación Básica, luego el análisis del pilotaje realizado mostrando las diferentes evidencias obtenidas y para esta forma reformular las tareas, de tal manera que estas se constituyan en un insumo de consulta para maestros en formación inicial o titulados que estén interesados en la enseñanza de cuadriláteros y su clasificación.

Luego se muestra la propuesta dirigida a los profesores para la enseñanza del tema propuesto, indicando el tiempo que se sugiere dedicar en cada una de las sesiones correspondientes para su implementación en el aula de clase.

Por último se presentan las conclusiones obtenidas en la elaboración de este trabajo

1. PRELIMINARES

1.1. Justificación

Teniendo en cuenta el desarrollo histórico de la Geometría se puede decir que esta ha sido parte fundamental de las actividades humanas; desde la prehistoria, cuando las personas reproducían acciones de la vida cotidiana por medio de dibujos o decoraban sus utensilios con figuras geométricas simples, luego con el desarrollo de civilizaciones como la india, egipcia, griega, maya y azteca la geometría fue utilizada en procesos de medición de longitudes, áreas y volúmenes por lo que se utilizó en áreas del conocimiento como la geografía y la astronomía y específicamente con ayuda de los griegos la geometría se constituyó como una disciplina científica al comprender procesos de racionalización dando paso a una obra representativa; *Los Elementos*, libro que se convirtió en modelo de una sistematización racional para todos los campos del conocimiento. En el siglo XV se desarrolló la geometría proyectiva, en donde fue utilizada en obras de arte del renacimiento ya que cobra importancia la estética, en el siglo XVII la geometría además de utilizarse como método artístico se combinó con métodos algebraicos dando paso a la geometría analítica y en los últimos años se han desarrollado teorías como la de nudos que tiene aplicaciones en la biología y la geometría proyectiva utilizada para el diseño de programas de realidad virtual. Además Teniendo en cuenta los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) para grado séptimo, se encuentra dentro del pensamiento espacial y sistemas métricos los siguientes estándares: “*Clasifico polígonos en relación con sus propiedades*” y “*comparo y clasifico figuras bidimensionales (ángulos, vértices) y características*” lo cual, por lo general se desarrolla en el aula de clase haciendo referencia de manera general a los polígonos o centrándose solo en algunas figuras como el cuadrado, el triángulo y la circunferencia. Los cuadriláteros son un tipo de polígonos con características particulares y clasificaciones definidas desde la antigüedad, hacen parte del legado de las matemáticas

Es importante ser conscientes sobre la enseñanza de la Geometría y darle el valor que merece ya que a partir de la experiencia laboral se ha podido evidenciar el poco interés por parte de algunas instituciones educativas en desarrollar contenidos de esta área y teniendo en cuenta

lo anterior, donde se muestran algunas aplicaciones de la geometría esta rama de las matemáticas podría ser una herramienta significativa para la enseñanza y fortalecimiento de procesos como visualización, abstracción y comprensión de las matemáticas al poder plasmar situaciones y modelar el entorno bien sea matemáticamente por medio de mediciones o por medio de muestras artísticas siendo así un área tanto llamativa como fundamental en la enseñanza de las matemáticas y por esto se le debería dedicar el tiempo preciso a la Geometría.

Los métodos utilizados para la enseñanza de la Geometría como cuaderno y lápiz, software, o material didáctico pueden ser un aporte significativo para interiorizar los conceptos y fomentar el gusto por esta área. El material didáctico puede ser tomado como una estrategia metodológica en la organización de la clase ya que promueve el aprendizaje significativo al estimular los sentidos y la creatividad y ayuda al estudiante a aprender a partir de experiencias propias y de otros. El geoplano ha sido elegido ya que permite indagar sobre propiedades y características de figuras geométricas e introducir conceptos de una manera tangible para los estudiantes al poder construir formas y con ello descubrir propiedades y resolver problemas manera partir de la manipulación del material.

El geoplano tiene varios factores a favor tanto en su implementación como diseño; por ejemplo, al poder construirse en papel, madera o plástico es un material versátil y los estudiantes tienen la posibilidad de acceder a este independientemente del estrato social y pensando como una docente que va a actuar en todos los campos es más fácil que un estudiante cree un geoplano a que acceda a un software; también genera una estrecha relación con el aprendizaje porque al ser un material que se manipula es un apoyo a la memoria del estudiante siendo un estímulo o auxilio mental para el aprendizaje, además posibilita una variedad en el ambiente de clase, puesto que no limita el espacio donde se utiliza (en el salón, en el patio u otro lugar).

Según Fouz en su artículo el Modelo De Van Hiele para la didáctica de la Geometría afirma que el modelo es una “herramienta útil para organizar el currículo geométrico y su desarrollo en las clases”, además aunque el modelo no es reciente, actualmente se implementan los mismos niveles y fases. Es por eso que se hará uso de ellos en la estructura de las tareas

propuestas de tal manera que exista una secuencia didáctica para la enseñanza de cuadriláteros.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo general

Construir un conjunto de tareas para la enseñanza de los cuadriláteros y su clasificación, a ser desarrolladas con estudiantes de grado séptimo de la educación Básica Secundaria, haciendo uso del geoplano.

1.2.2. Objetivos específicos

- Sustentar conceptualmente las tareas a proponer.
- Elaborar un conjunto de tareas para la enseñanza de cuadriláteros basadas en los niveles y fases del modelo de Van Hiele, haciendo uso del geoplano.
- Realizar un pilotaje de las tareas propuestas y su correspondiente análisis.
- Elaborar una propuesta para la enseñanza de cuadriláteros que pueda constituirse en insumo para maestros en formación inicial o en ejercicio, interesados en el tema.

1.3. Metodología

Para la realización de este trabajo se siguieron varias fases, primero se realizó una búsqueda de referencias bibliográficas respecto a cuadriláteros, su clasificación y congruencia, para decidir y concretar la ruta a seguir para el diseño de las tareas, por la poca información que se encontró en las fuentes consultadas sobre congruencia de cuadriláteros, se revisaron en otras fuentes de la misma editorial y otras editoriales en diferentes grados, esto se hizo ya que en los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas congruencia aparece en octavo y noveno, de esta manera se decidió limitar la propuesta a definición y clasificación de cuadriláteros.

En una segunda fase se indagó sobre la manera cómo se iban a plantear las tareas para lograr el objetivo de este trabajo, teniendo en cuenta que “El modelo de razonamiento Van Hiele, gracias a su carácter secuencial y didáctico, ha sido transversal en el momento de diseñar estrategias por el docente para el desarrollo del pensamiento geométrico, las experiencias de enseñanza basadas en él, han permitido progreso por parte de los estudiantes en el campo de la geometría” (Ramírez, 2014, pág. 15), se opta por utilizar este modelo como fundamento de las tareas a proponer, de esta manera se construyó el marco de referencia asociado a este tema y se elaboró una de esta manera se elabora una tabla con la descripción general de las tareas a proponer a partir de los niveles y fases de este modelo (ver Tabla 5/Tabla 5).

Luego se hizo el diseño instruccional de las tareas dirigidos a estudiantes de grado séptimo, seguido a esto se realizó un pilotaje de estas a 12 estudiantes de grado séptimo en el Colegio personalizado Pensamiento ubicado en la ciudad de Bogotá, cuyas edades oscilan entre los 12 y 16 años, durante tres sesiones de clases se aplicaron las tareas en las clases de geometría; para recolección de la información se utilizaron fotografías y los registros escritos por parte de los estudiantes.

Posterior a lo anterior se elaboró un análisis de acuerdo con los resultados del pilotaje, para esto se utilizó un instrumento que condensa la información con las respectivas evidencias y decisiones acerca de cada una de las tareas, este se puede observar en el anexo 1.

Finalmente se organizó la propuesta de tareas para la enseñanza de los cuadriláteros con el fin de replicarse en otra(s) aula(s) de clase.

2. MARCO DE REFERENCIA-

1.4.2.1.CUADRILÁTEROS

En esta parte se presentan diferentes definiciones y clasificaciones de cuadriláteros tomadas de diversas fuentes como lo son libros universitarios (U), libros de texto escolar (T) y páginas web (W), esto con el fin de elegir la definición y clasificación que se utilizara como base para el desarrollo del objetivo de este trabajo.

En total se consultaron catorce (14) fuentes, así:

Libros universitarios:

1. Libro I de los elementos de Euclides. Recuperado de
http://newton.matem.unam.mx/geometria/menulibro_m.html.
2. Bruño. G. (s.f). Geometría curso superior. Recuperado de
<https://es.scribd.com/doc/181771408/ELEMENTOS-DE-GEOMETRIA-EDITORIAL-BRUNO-pdf>.
3. Moise, E. y Downs, F. (1986). Geometría Moderna. Addison Wesley Iberoamericana S.A.
4. Clemens, R. Daffer, P. (1998). Geometría. Pearson.
5. Godino, J y Ruiz, F. (2002). Geometría y su didáctica para maestros. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf.
6. Samper, C. y Molina, O. (2015).Geometría Plana: Un espacio de aprendizaje. Universidad Pedagógica Nacional

Libros de texto:

1. Baldor. J. A. (1980).Geometría plana y del espacio con una introducción a la trigonometría. Codice, S.A.
2. Berrio. I. (1994). Matemática Universal 6.Bedout Editores S.A.
3. Alfonso. L. S. (2008).Matemáticas Segundaria 6.Grupo sm.
4. Velázquez. D. (2010). Zona Activa matemáticas 6. Voluntad.
5. Saavedra.A.V.(2011). Guía para docentes Matemáticas para pensar. Norma.

Recursos Web:

Los recursos web referenciados a continuación son recomendaciones de las más buscadas por los algunos estudiantes de la Educación Básica para la elaboración de diferentes tareas relacionadas con Geometría.

1. Perich.D. Sector matemática (2000). Recuperado de <http://www.sectormatematica.cl/contenidos.htm>
2. Arraz. J.M.(2004). Geometría activa. Recuperado de <http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/indice.html>.
3. Ditutor (2014). Recuperado de <http://www.ditutor.com/asignaturas/geometria.html>
4. Profesor en línea (2015). Recuperado de <http://www.profesorenlinea.cl>

1.4.1.2.1.1. Definición (D¹)

Libros universitarios:

UD1. “De los cuadriláteros, cuadrado es el que tiene los lados iguales y los ángulos rectos; rectángulos el que es rectangular pero no equilátero; rombo el que es equilátero, pero no tiene los ángulos rectos; y romboide el que tiene los lados y los ángulos opuestos iguales, pero ni es equilátero ni tiene los ángulos rectos. Los otros cuadriláteros se llaman trapecios” (Definición 22 del libro I de Euclides²).

UD2. “Un polígono³ de cuatro lados se llama cuadrilátero” (Bruño, s.f, p.40).

UD3. “Sean A, B, C y D cuatro puntos coplanarios, si tres de ellos no están alineados y \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{DA} se intersecan solamente en sus extremos, esta unión se llama cuadrilátero. Los segmentos se llaman lados, los puntos vértices y $\angle DAB$, $\angle BCD$, $\angle ABC$ y $\angle CDA$ ángulos del cuadrilátero”. (Moise & Downs, 1986, p.245).

¹ La letra D seguida a las fuentes significa definición, ejemplo, UD1 significa:

U:Libro universitario

D: Definición de cuadrilátero en ese libro.

1: Número del libro listado con este numeral en la página anterior.

² Es de resaltar que Euclides en la definición de cuadrilátero presenta su clasificación.

³ “Se llama polígono la figura plana limitada por líneas rectas, que se llaman lados del polígono” (Bruño, s.f, p.40)

UD4. “Un cuadrilátero es la unión de cuatro segmentos determinados por cuatro puntos, tres de los cuales no son colineales. Los segmentos se intersecan solo en los extremos” (Clemens, 1998, p.260).

UD5. “Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros tienen distintas formas pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales. En todos los cuadriláteros la suma de los ángulos interiores es igual a 360° ”(Godino y Ruiz, 2002, p. 472).

UD6. “Dados cuatro puntos coplanarios cada terna de ellos no colineales. Un cuadrilátero es la unión de segmentos, cuyos extremos son esos puntos dados, tales que: Cada punto es extremo de exactamente dos segmentos. Si se intersecan, su punto de intersección es extremo de los segmentos” (Samper y Molina, 2015, p.135).

Libros de texto escolares (T)⁴:

TD1. “ Cuadrilátero es un polígono de cuatro lados” (Baldor, 1980. p, 81).

TD2. “Cuadrilátero o trapezoide es una figura plana limitada por cuatro segmentos de recta. Cada segmento es un lado del cuadrilátero” (Berrio, 1994, p.84).

TD3. “Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados” (Alfonso, 2008, p. 243).

TD4. “Un cuadrilátero es la reunión de cuatro segmentos (lados) que se encuentran determinados por cuatro puntos coplanares, de los cuales tres son no colineales. Las intersecciones de los segmentos, llamadas vértices son los puntos extremos de un segmento” (Velásquez, 2011, p.193).

TD5. “Un cuadrilátero es la figura determinada por la unión de cuatro segmentos coplanares que se intersecan únicamente en sus extremos” (Saavedra, 2011, p.199).

⁴ La letra T seguida a las fuentes significa definición, ejemplo, TD1 significa:

T: Libro de texto escolar.

D: Definición de cuadrilátero en ese libro.

1: Número del libro listado con este numeral en la página anterior.

Páginas web:

WD1. “Los cuadriláteros son figuras geométricas que tienen cuatro lados y cuatro ángulos”.

Tomada de: <http://www.profesorenlinea.cl/geometria/cuadrilateros>

WD2. “Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados, y por tanto cuatro ángulos”.

Tomada de: <http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/cuadri1.htm>

WD3. “Un cuadrilátero es un polígono de 4 lados”. Tomada de:

<http://www.ditutor.com/geometria/cuadrilatero.html>.

Las definiciones encontradas en las diferentes fuentes consultadas se pueden agrupar en tres conjuntos, así:

CONJUNTO 1: La definición utiliza como base el concepto de polígono. (6/14)

CONJUNTO 2: La definición hace referencia a características propias de los cuadriláteros, en particular la existe de cuatro lados/segmentos, cuatro ángulos o la mención a la intersección de los segmentos en los extremos. (4/14)

CONJUNTO 3: La definición incluye como elemento fundamental la determinación de cuatro puntos coplanarios⁵, tres de ellos no colineales. (4/14)

⁵ Según la RAE, la palabra aceptada es coplanario más no coplanar.

En la siguiente tabla se relacionan las fuentes en los cuales se halla cada tipo de definición:

<i>Fuente</i> <i>Definición es</i>	UD 1	UD 2	UD 3	UD 4	UD 5	TD 1	TD 2	TD 3	TD 4	TD 5	W D1	W D2	W D3
Polígono	X			X		X		X				X	X
Lados/segmentos, extremos y ángulos.							X			X		X	
Cuatro puntos, tres de ellos no colineales.		X	X		X				X				

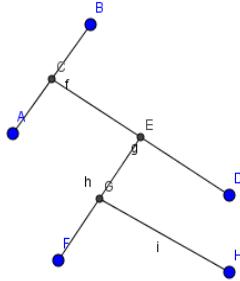
Tabla 1. Clasificación de las definiciones de cuadriláteros halladas en las fuentes consultadas

Atendiendo a las definiciones ubicadas en el primer conjunto, es pertinente revisar cuáles son las definiciones de polígono que se encuentran en las diferentes fuentes donde se utiliza este concepto. Enseguida se listan tales definiciones incluyendo ideas anteriores o posteriores que se nombran para entender la definición. Todas las definiciones están copiadas textualmente de las fuentes consultadas. (Ver Tabla 2).

Fuente	Definición de polígono	Definición de línea poligonal	Elementos de un polígono
UD1.	Toda superficie plana limitada por líneas rectas.		Cada línea se llama lado, el perímetro es el conjunto de los lados. Los puntos de intersección de los lados se llaman vértices. La diagonal de un polígono es la recta que une dos vértices no consecutivos
TD1	Se llama polígono a la porción del plano limitada por una curva cerrada, llamada línea poligonal		Los lados y vértices de la poligonal son los lados y vértices del polígono.
TD3	Región limitada por una línea poligonal cerrada.	Unión sucesiva de varios segmentos que puede ser abierta o cerrada.	Los elementos de un polígono son los lados, los vértices, los ángulos y las diagonales.
WD2	Polígono es la superficie plana, encerrada dentro de un contorno formado por segmentos rectos unidos en sus extremos.		Cada uno de los segmentos se denomina lado. El punto de unión de cada par de segmentos se denomina ángulo. El número de lados, (y por tanto de ángulos) es mayor o igual a tres. Diagonal de un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos
WD3	"Un polígono es la región del plano limitada por tres o más segmentos"		Los lados de un polígono son los segmentos que lo limitan. Los vértices de un polígono son los puntos donde concurren dos lados. Los ángulos interiores de un polígono están determinados por dos lados consecutivos. Las diagonales de un polígono son los segmentos que unen dos vértices no consecutivos.

Tabla 2. Definiciones de polígono en las fuentes consultadas

Como se observa, en esta definición TD3 de polígono falta precisión en la definición de línea poligonal por cuanto no indica, por ejemplo, cómo se unen los segmentos; esto es, podría pensarse en que la unión sucesiva de segmentos se hiciera a través de sus puntos medios, por lo cual una figura como la siguiente podría ser un polígono (ver gráfica 1).



Gráfica 1. Possible gráfica de polígono según Alfonso (2008)

De las definiciones encontradas en las fuentes que hacen alusión a polígono para definir cuadrilátero podemos hacer dos grupos.

Grupo 1: En este grupo se ubican aquellas definiciones que hacen mención al concepto de línea poligonal para definir polígono y presentar sus características.

Grupo 2: En este grupo se ubican aquellas definiciones de polígono que se refieren a este como la porción, región o fracción limitada por líneas rectas para luego presentar las características o elementos del polígono(lados, ángulos, vértices, diagonales).

1.4.2.2.1.2. Clasificación (C⁶)

Al igual que en la sección anterior se incluirá enseguida la clasificación para cuadriláteros propuesta desde diferentes fuentes, las mismas listadas en la sección 3.1. del marco de referencia.

Libros universitarios:

UC1. “De los cuadriláteros, cuadrado es el que tiene los lados iguales y los ángulos rectos; rectángulos el que es rectangular pero no equilátero; rombo el que es equilátero, pero

⁶ La Letra C luego de las iniciales utilizadas en cada una de las fuentes significa clasificación, por ejemplo UC1 indica, clasificación de cuadriláteros presente en libro universitario 1.

no tiene los ángulos rectos; y romboide el que tiene los lados y los ángulos opuestos iguales, pero ni es equilátero ni tiene los ángulos rectos. Los otros cuadriláteros se llaman trapecios” (Definición 22 del libro I de Euclides⁷). Esta clasificación se puede visualizar a través de la Ilustración 1.

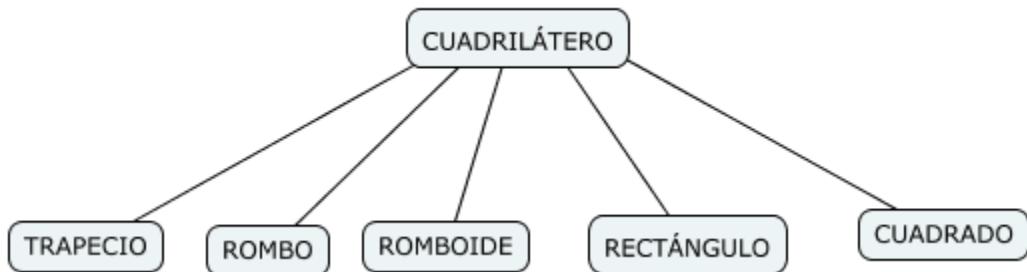


Ilustración 1. Clasificación de cuadriláteros según Euclides

UC2. Bruño (s.f , p.40-41) plantea la siguiente clasificación para cuadriláteros.

- **Rectángulo** es un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos son rectos.
- **Paralelogramo:** Cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.
- **Rombo** es un cuadrilátero con todos sus lados iguales.
- **Cuadrado** es un cuadrilátero con todos sus lados iguales y ángulos iguales, es a la vez cuadrilátero regular, rombo y rectángulo.
- **Trapecio** es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos.
 - ✓ **Trapecio rectángulo** tiene dos ángulos rectos.
 - ✓ **Trapecio isósceles** tiene iguales los lados que no son paralelos.

Esta clasificación se puede visualizar en Ilustración 2.

⁷ Es de resaltar que Euclides, presenta en la definición la clasificación de cuadriláteros.

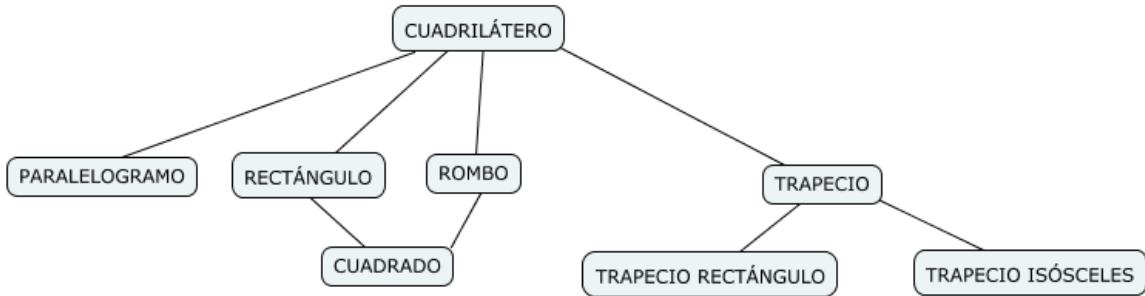


Ilustración 2. Clasificación de cuadriláteros según Bruño

UC3. La clasificación para los cuadriláteros según Moise & Downs (1986, p.247-251) es la siguiente:

Un **trapecio** es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos.

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos.

Un **rombo** es un paralelogramo cuyos lados todos son congruentes.

Un **rectángulo** es un paralelogramo cuyos ángulos son todos rectos.

Un **cuadrado** es un rectángulo cuyos lados son todos congruentes.

Esto se puede observar en la Ilustración 3.

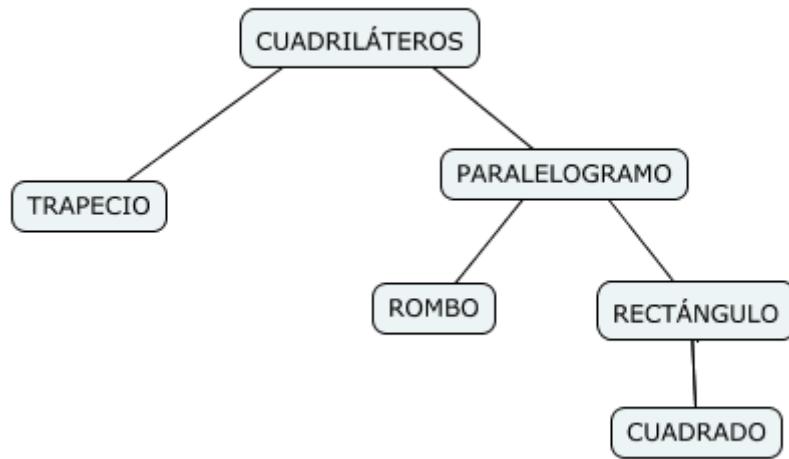


Ilustración 3. Clasificación de cuadriláteros según Moise & Downs

UC4. La clasificación que plantea Clemens (1998, p.261) en su libro de Geometría es la siguiente:

- Un trapecio es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos.
- Un paralelogramo es un cuadrilátero con ambos pares de lados paralelos.
- Un rectángulo es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos.
- Un rombo es un paralelogramo con cuatro lados congruentes.
- Un cuadrado es un rectángulo con cuatro lados congruentes.

Esta clasificación se puede observar en la Ilustración 4

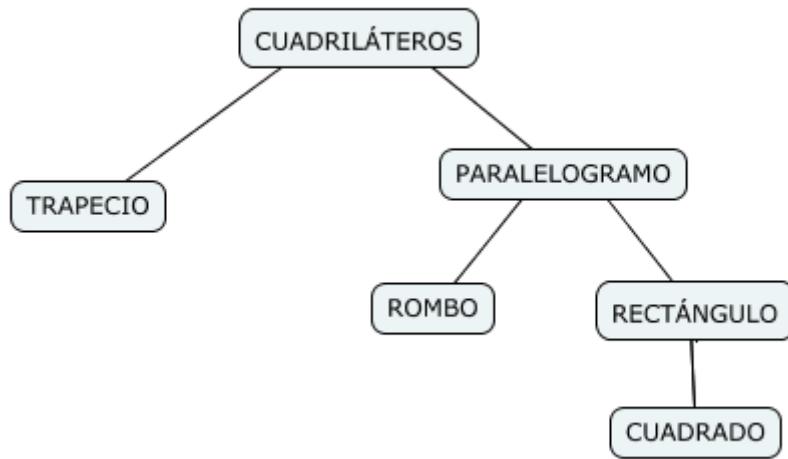


Ilustración 4. Clasificación de cuadriláteros según Clemens

UC5. Godino y Ruiz (2002) presentan la siguiente clasificación para cuadriláteros:

- Se llama **rectángulo** al paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos. El conjunto de los rectángulos está incluido en el conjunto de los paralelogramos.
- Se llama **rombo** al paralelogramo que tiene sus cuatro lados congruentes.
- Se llama **cuadrado** al paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos y sus cuatro lados congruentes. El cuadrado es rectángulo y rombo a la vez.
- Los cuadriláteros que no son paralelogramos se clasifican en trapecios y trapezoides.
 - ✓ Se llama trapecio al cuadrilátero que tiene únicamente dos lados opuestos paralelos. Cuando el trapecio tiene los lados no paralelos congruentes, se llama trapecio isósceles; en caso contrario, trapecio escaleno. Dentro de los trapecios escalenos, puede ocurrir que uno de los lados no paralelos sea perpendicular a las bases, y en tal caso se dice que el trapecio es rectángulo.
 - ✓ Trapezoide es el cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos.

Esto se puede observar en la Ilustración 5.

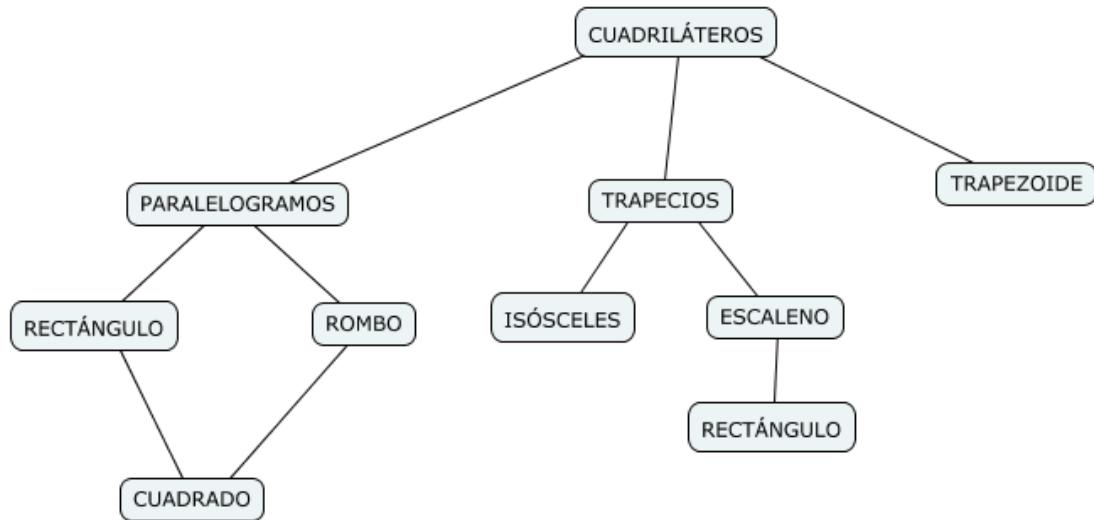


Ilustración 5. Clasificación de cuadriláteros según Godino y Ruiz

UC6. Según Samper y Molina (2015, p.143) los cuadriláteros se clasifican así:

- **Rectángulo:** Cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.
- **Rombo:** Cuadrilátero con cuatro lados congruentes.
- **Cuadrado:** Cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y cuatro lados congruentes.
- **Paralelogramo:** Cuadrilátero con dos pares de lados paralelos.
- **Cometa:** Cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes congruentes y ningún par de lados opuestos congruentes.
- **Trapecio:** Cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos.

Esto se puede observar en la Ilustración 6.

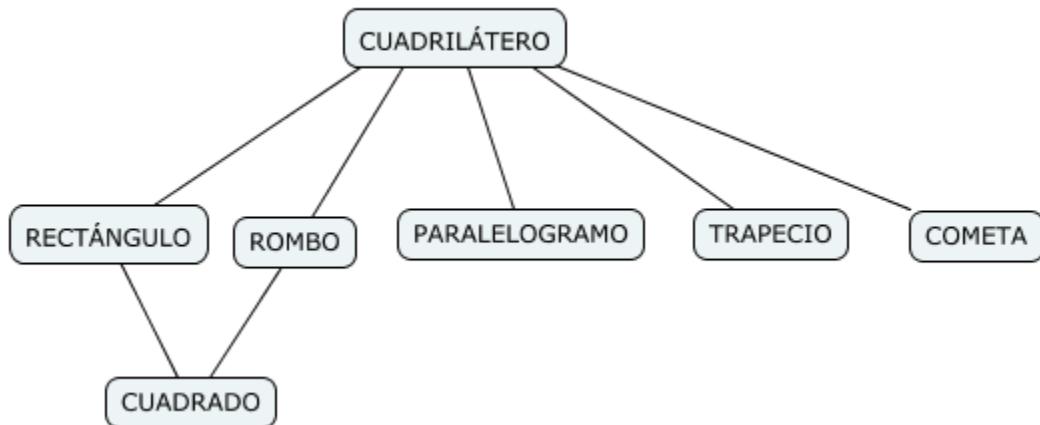


Ilustración 6. Clasificación de cuadriláteros según Samper y Molina

Libros de texto escolares:

TC1. Los cuadriláteros según Baldor (1980) se clasifican atendiendo al paralelismo de los lados opuestos de la siguiente manera:

Si los lados opuestos son paralelos dos a dos se llama **paralelogramo**. Los paralelogramos se clasifican en:

- **Rectángulo:** tiene los cuatro lados iguales y los lados contiguos desiguales.
- **Cuadrado:** tiene los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos iguales.
- **Romboide:** tiene los ángulos y los lados contiguos desiguales.
- **Rombo:** tiene los cuatro lados iguales y los ángulos contiguos desiguales.

Cuando solo hay paralelismo en par de lados opuestos, se llama **trapecio**. Los trapecios se clasifican en:

- **Rectángulos:** tienen dos ángulos rectos.
- **Isósceles:** si los lados no paralelos son iguales.
- **Escalenos:** son los que no son ni rectángulos ni isósceles.

Cuando no existe paralelismo alguno la figura se llama **trapezoide**. Dentro de los trapezoides, se tienen:

- **Simétricos:** tiene dos pares de lados consecutivos iguales pero el primer par de los lados consecutivos es diferente al segundo par.
- **Asimétricos:** son los que no son simétricos.

Esto se puede observar en la Ilustración 7.



Ilustración 7. Clasificación de cuadriláteros según Baldor

TC2. Berrio (1994) en su libro Matemática Universal 6 plantea la siguiente clasificación.

- **Trapecio:** es un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos.
 - ✓ Trapecio escaleno: los lados no paralelos son desiguales.
 - ✓ Trapecio rectángulo: es aquel que tiene dos ángulos rectos.
 - ✓ Trapecio isósceles: los lados no paralelos son congruentes.
- **Paralelogramo:** es un cuadrilátero que tiene sus dos pares de lados paralelos.
- **Rectángulo:** es un paralelogramo que tiene sus ángulos rectos.
- **Rombo:** es un paralelogramo que tiene sus cuatro lados congruentes.
- **Cuadrado:** es un rectángulo que tiene sus cuatro lados congruentes.

Tal clasificación se resume en la Ilustración 8.

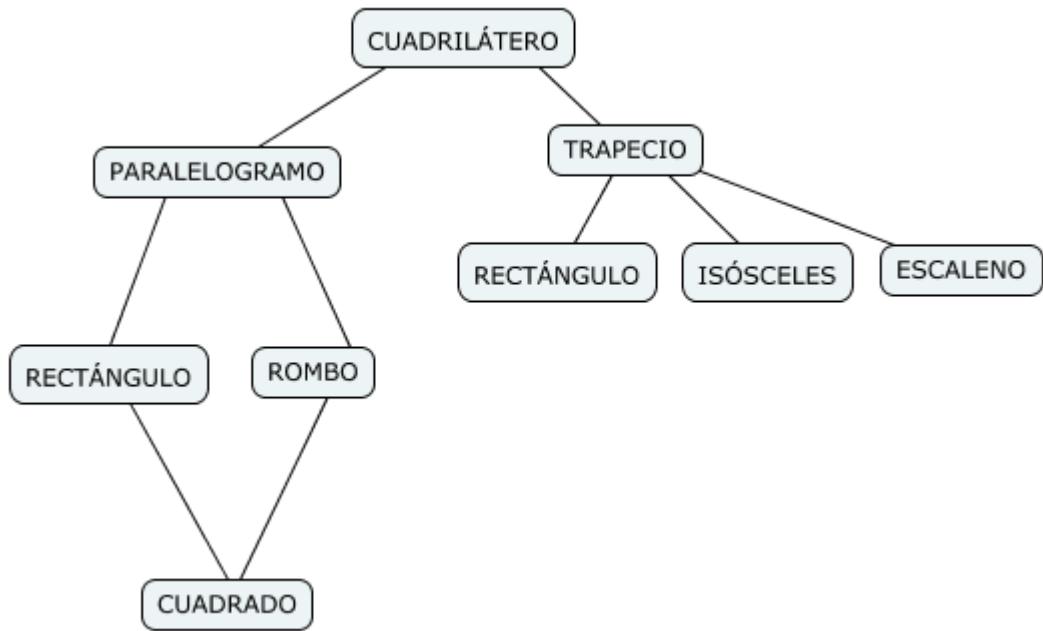


Ilustración 8. Clasificación de cuadriláteros según Berrio.

C3. Según el paralelismo de los lados, la clasificación el libro Alfonso (2008) es:

- **Trapezoides:** Ningún par de lados opuestos paralelos.
- **Trapecios:** un par de lados paralelos.
 - ✓ Isósceles.
 - ✓ Rectángulo.
- **Paralelogramos:** Dos pares de lados opuestos paralelos.
 - ✓ **Cuadrado:** Cuatro lados iguales, cuatro ángulos iguales.
 - ✓ **Rectángulo:** Lados paralelos iguales, cuatro ángulos iguales.
 - ✓ **Rombo:** Cuatro lados iguales, ángulos iguales de dos a dos.
 - ✓ **Romboide:** Lados paralelos iguales, ángulos iguales dos a dos.

Esto se puede observar en la ilustración 9.

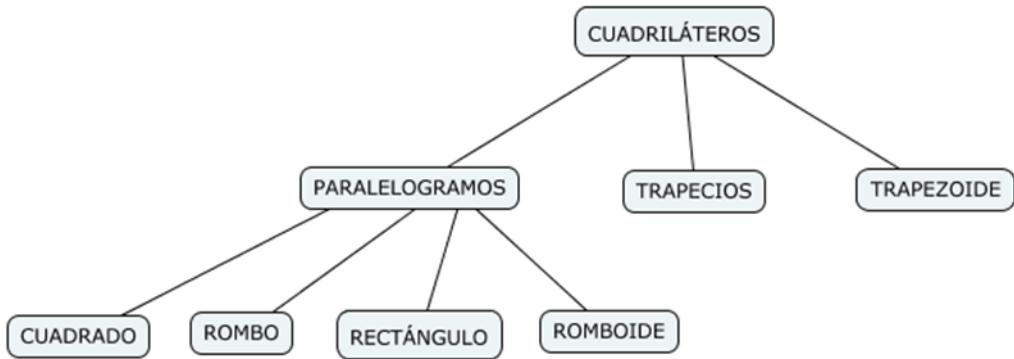


Ilustración 9. Clasificación cuadrilátero según Alfonso

TC4. Según el libro ZonActiva (Velázquez, Ed. 2011, p.193) los cuadriláteros se clasifican según las relaciones de paralelismo en:

- **Paraleogramo:** es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos.
- **Trapezoide:** es un cuadrilátero que no tiene lados opuestos paralelos.
- **Trapecio:** es un cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos paralelos.

Y con relación a la medida de sus lados se clasifican en:

- **Rombo:** es un paraleogramo con cuatro lados congruentes.
- **Rectángulo:** es un paraleogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos.
- **Cuadrado:** es un rectángulo con sus cuatro ángulos congruentes.

Esto se puede observar en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..**



Páginas Web:

WC1. La siguiente clasificación de cuadriláteros fue recuperada del sitio web Profesor en Línea el 06 de septiembre de 2016 de <http://www.profesorenlinea.cl/geometria/cuadrilateros>.

Paralelogramos: Cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos. Los paralelogramos son: el cuadrado, rectángulo, rombo y romboide. Dentro de los paralelogramos, se tienen:

- **Cuadrado:** Todos sus lados son de igual medida. Todos sus ángulos miden 90°.
- **Rectángulo:** Tiene dos pares de igual medida. Todos sus ángulos son rectos.
- **Rombo:** Todos sus lados son de igual medida. Sus ángulos no son rectos; dos son agudos y dos son obtusos (los ángulos opuestos).
- **Romboide:** Tiene dos pares de lados de igual medida. Dos pares de sus ángulos son agudos y dos pares son obtusos

Trapecios: Son cuadriláteros que tiene solamente un par de lados paralelos. Los trapecios son: trapecio isósceles, trapecio rectángulo, trapecio trisolátero y trapecio escaleno.

- **Trapecio isósceles:** tiene un par de lados paralelos de igual medida.

- **Trapecio trisolátero:** Es el que tiene tres lados de igual medida. Sus ángulos basales son de igual medida, respectivamente.
- **Trapecio rectángulo:** Es el que tiene dos ángulos rectos, es decir, un ángulo de 90° .
- **Trapecio escaleno:** Tiene todos sus lados de distinta medida. Sus ángulos basales también son diferentes.

Trapezoides: Son aquellos cuadriláteros que no tienen lados paralelos. Ellos son el trapezoide simétrico y el trapezoide asimétrico.

- **Trapezoide simétrico:** Tiene dos pares de lados de igual medida.
- **Trapezoide asimétrico:** Puede tener dos lados de igual medida, tres lados de igual medida o bien ninguno.

Esto se puede observar en la Ilustración 10.



Ilustración 10. Clasificación de cuadriláteros según Profesor en línea

WC2. La siguiente clasificación de cuadriláteros fue recuperada el 06 de septiembre de 2016 de <http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/cuadri2.htm>.

Los cuadriláteros se pueden clasificar de acuerdo al paralelismo de sus lados. Según este criterio los cuadriláteros pueden ser:

- **Paralelogramos:**
 - ✓ **Rectángulos** tiene los ángulos rectos
 - ✓ **Rombo** tiene los lados iguales
 - ✓ **Cuadrado** es el paralelogramo que es rectángulo y rombo a la vez.

- **Trapecios:** El trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos, y los otros dos no son paralelos.
 - ✓ **Trapecio isósceles:** si los lados no paralelos son iguales.
 - ✓ **Trapecio rectángulo:** si tiene dos ángulos rectos.
- **Trapezoides:** Se denomina trapezoide a un cuadrilátero que no tiene lados paralelos. Por tanto es un cuadrilátero sin más propiedades adicionales.
 - ✓ **Cometa:** es un trapezoide con dos pares de lados consecutivos iguales
 - ✓ **Deltoides:** es una cometa con un ángulo es mayor a 180 grados.

Esto se puede observar en la Ilustración 11

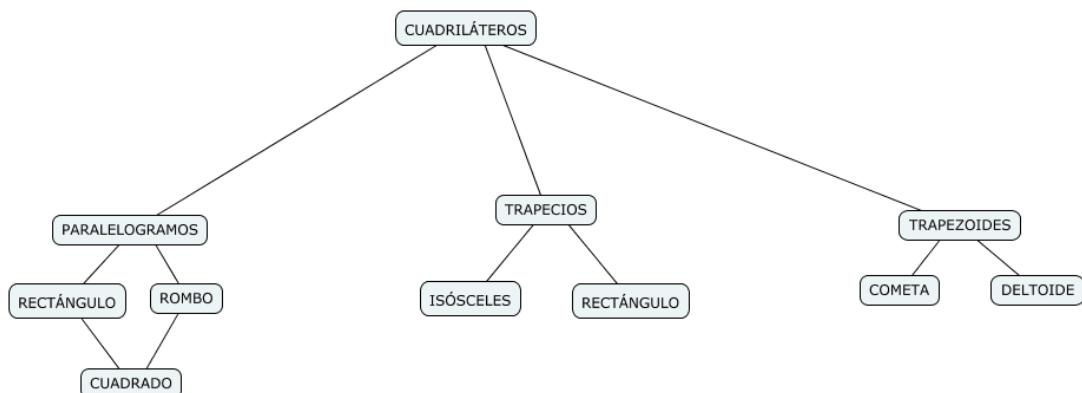


Ilustración 11. Clasificación de cuadriláteros según la página MEC.

WC3. La siguiente clasificación de cuadriláteros fue tomada 1º de octubre de 2016 de:
<http://www.ditutor.com/geometria/cuadrilatero.html>.

- **Paralelogramo** es un cuadrilátero que tiene sus lados paralelos dos a dos.
 - ✓ **Cuadrado:** es un paralelogramo que tiene cuatro ángulos y los lados congruentes.
 - ✓ **Rectángulo:** es un paralelogramo que tiene lados iguales dos a dos y los 4 ángulos rectos.
 - ✓ **Rombo:** es un paralelogramo con cuatro lados iguales.

- ✓ **Romboide:** es un paralelogramo que tiene si lados iguales dos a dos.
- **Trapecio** es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos.
 - ✓ **Rectángulo** tiene un ángulo recto.
 - ✓ **Isósceles** tiene dos lados no paralelos iguales.
 - ✓ **Escaleno** no tiene ningún lado igual ni un ángulo recto.
- **Trapezoide** no tiene ningún lado igual ni ningún lado paralelo.

Esta clasificación se visualiza en la Ilustración 12

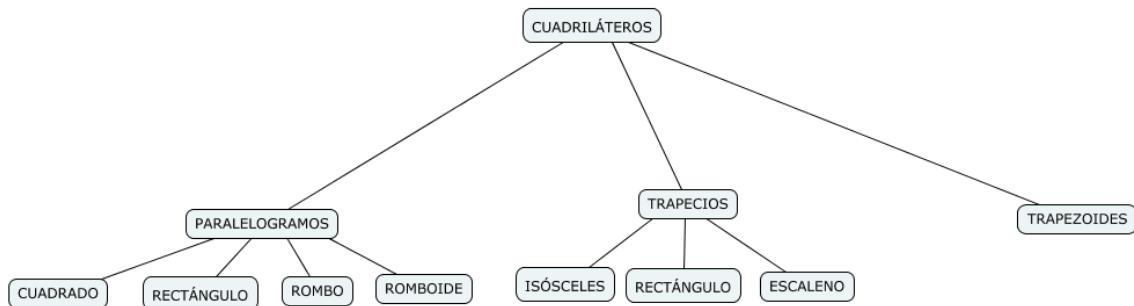


Ilustración 12. Clasificación de cuadriláteros según la página Ditutor

WC4. La siguiente información fue tomada el 25 de enero de 2017 de <http://www.sectormatematica.cl/contenidos/cuadrilat.htm>.

Paralelogramos: Cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos. Los paralelogramos son: el cuadrado, rectángulo, rombo y romboide. Dentro de los paralelogramos, se tienen:

- **Cuadrado:** Todos sus lados son de igual medida. Todos sus ángulos miden 90°.
- **Rectángulo:** Tiene dos pares de igual medida. Todos sus ángulos son rectos.
- **Rombo:** Todos sus lados son de igual medida. Sus ángulos no son rectos; dos son agudos y dos son obtusos (los ángulos opuestos).
- **Romboide:** Tiene dos pares de lados de igual medida. Dos pares de sus ángulos son agudos y dos pares son obtusos

Trapecios: Son cuadriláteros que tiene solamente un par de lados paralelos. Los trapecios son: trapecio isósceles, trapecio rectángulo, trapecio trisolátero y trapecio escaleno.

- **Trapecio isósceles:** tiene un par de lados paralelos de igual medida.
- **Trapecio trisolátero:** Es el que tiene tres lados de igual medida. Sus ángulos basales son de igual medida, respectivamente.
- **Trapecio rectángulo:** Es el que tiene dos ángulos rectos, es decir, un ángulo de 90° .
- **Trapecio escaleno:** Tiene todos sus lados de distinta medida. Sus ángulos basales también son diferentes.

Trapezoides: Son aquellos cuadriláteros que no tienen lados paralelos. Ellos son el trapezoide simétrico y el trapezoide asimétrico.

- **Trapezoide simétrico:** Tiene dos pares de lados de igual medida.
- **Trapezoide asimétrico:** Puede tener dos lados de igual medida, tres lados de igual medida o bien ninguno.

Esto se puede observar en la Ilustración 13



Ilustración 13. Clasificación de cuadriláteros según Sector matemática.

En relación con las clasificaciones presentadas para los cuadriláteros se encuentra que:

- En ningún texto (escolar ni universitario) se hace referencia a las medidas de los ángulos para presentar los diferentes tipos de cuadriláteros, la inclusión de numerales para hacer alusión a medidas se halla solamente en un sitio web (profesor en línea).
- Hay tres modelos de clasificación, así:

- Atendiendo a las posibilidades de **paralelismo** entre los lados opuestos de un cuadrilátero al compararlos dos a dos; esto es, que sean los dos pares de lados opuestos paralelos (paralelogramos), que solo sea un par de lados paralelos (trapecios) o que no exista ningún par de lados paralelos (trapezoides), lo cual se resume en Ilustración 14



Ilustración 14. Clasificación de cuadriláteros atendiendo al paralelismo entre lados.

- Atendiendo a la existencia de al menos un par de lados **paralelos**; esto es, paralelogramos (cuando los dos pares de lados opuestos son paralelos entre sí) y trapecios (cuando solo hay un par de lados opuestos paralelos). Esta idea se resume en la Ilustración 15

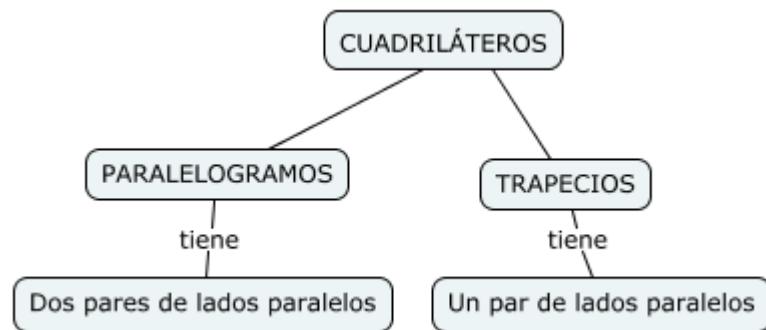


Ilustración 15. Clasificación de cuadriláteros existiendo paralelismo en al menos un par de lados.

- Atendiendo a la congruencia entre lados y ángulos, en la Ilustración 16 se puede observar la clasificación de cuadriláteros.

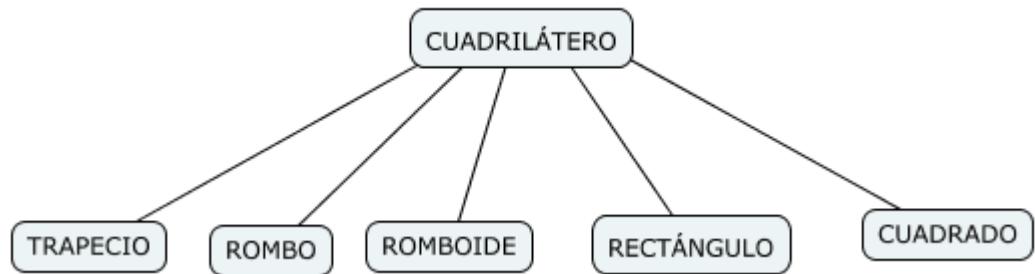


Ilustración 16. Clasificación de cuadriláteros atendiendo a la congruencia entre sus lados y ángulos.

- El paralelismo es una noción fundamental para la clasificación de cuadriláteros, de los documentos analizados, 11/14 se basan en esta relación⁸.
- Respecto a la clasificación de paralelogramos podemos encontrar dos grupos:
 - En el que no existe relación alguna entre ellos, es decir entre los paralelogramos encontramos el cuadrado, el rectángulo, el rombo y el romboide. Esto es

-
- ⁸ En este sentido podríamos incluir algunas de las definiciones sobre este concepto encontradas en las fuentes consultadas.
 - “Dos rectas son paralelas si están en el mismo plano y no se intersecan”. (Clemens, 1998. Pág., 13 y 174).
 - “Se dice que dos rectas de un plano son paralelas si al prolongarlas no tienen puntos en común”. (Baldor, 1980. Pág., 35).
 - “Dos rectas m y n son paralelas si están en el mismo plano y no se cortan”. (Saavedra, 2011, pag.187)
 - “Dos rectas que no se cortan en ningún punto son paralelas”. (Alfonso, 2008, pag.178).
 - “Dos rectas contenidas en el plano que no tienen ningún punto en común se dice que son paralelas”. (Godino y Ruiz, 2002, p. 459).

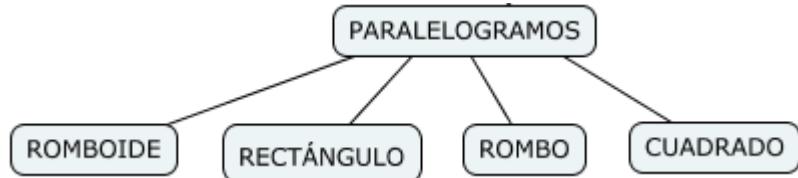


Ilustración 17. Clasificación de paralelogramos Grupo 1.

- En el que existe relación entre ellos de acuerdo a sus características; es decir entre los paralelogramos encontramos el cuadrado, el rectángulo y el rombo, estando el cuadrado relacionado con el rombo y el rectángulo. Esta idea se visualiza en la Ilustración 18.

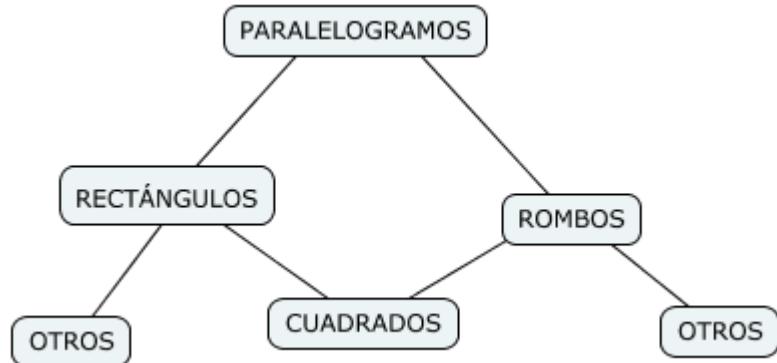


Ilustración 18. Clasificación de paralelogramos. Grupo 2.

- Respecto a la clasificación de los trapecios podemos encontrar tres grupos distribuidos de la siguiente manera:
 - En el que se presenta una clasificación según los ángulos y la relación de sus lados, esto es:

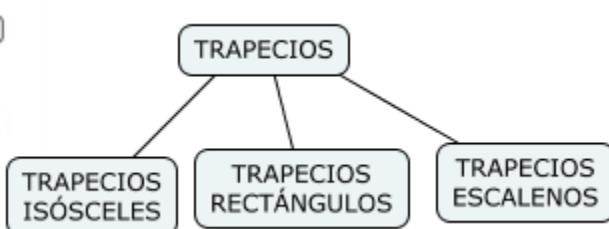


Ilustración 19. Clasificación de trapecios. Grupo 1.

- En el que presenta una clasificación teniendo en cuenta sus ángulos y sus lados y existe una relación entre ellos. Así:

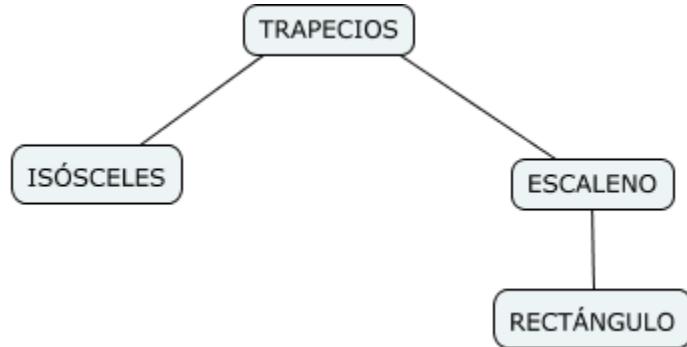


Ilustración 20. Clasificación de Trapecios. Grupo 2.

- No presentan alguna clasificación de trapecios.

Con base en lo recopilado y analizado anteriormente, para el desarrollo de este trabajo se eligió una ruta a seguir para el diseño de las tareas sobre cuadriláteros y su clasificación. En la Ilustración 21 el mapa a seguir.



Ilustración 21. Clasificación de cuadriláteros para el desarrollo del trabajo.

Esta definición parte de la definición de polígono, entendido este como la “superficie plana limitada por líneas rectas”; así, los polígonos se clasifican de acuerdo al número de lados de la siguiente manera:

Número de lados	Nombre
Tres	Triángulo
Cuatro	Cuadrilátero
Cinco	Pentágono
Seis	Hexágono
Siete	Heptágono
Ocho	Octágono
Nueve	Eneágono

Tabla 2. Clasificación de polígonos según Baldor

A partir de ello:

“Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados⁹”

Los cuadriláteros se clasifican de la siguiente manera:

Si los lados opuestos son paralelos dos a dos se llama **paralelogramo**. Los paralelogramos se clasifican en:

- **Rectángulo**: tiene los cuatro lados iguales y los lados contiguos desiguales.
- **Cuadrado**: tiene los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos iguales.
- **Romboide**: tiene los ángulos y los lados contiguos desiguales.
- **Rombo**: tiene los cuatro lados iguales y los ángulos contiguos desiguales.

Cuando solo hay paralelismo en par de lados opuestos, se llama **trapecio**. Los trapecios se clasifican en:

- **Rectángulos**: tienen dos ángulos rectos.
- **Isósceles**: si los lados no paralelos son iguales.
- **Escalenos**: son los que no son ni rectángulos ni isósceles.

⁹ Entendiendo lados de un polígono como los segmentos que lo limitan.

Cuando no existe paralelismo alguno la figura se llama **trapezoide**. Dentro de los trapezoides, se tienen:

- **Simétricos:** tiene dos pares de lados consecutivos iguales pero el primer par de los lados consecutivos es diferente al segundo par.
- **Asimétricos:** son los que no son simétricos.

Para finalizar y atendiendo a que las tareas que se diseñarán estarán dirigidas a la Educación Básica Secundaria, vale la pena precisar algunos términos que se esperan utilizar con los estudiantes, estos son:

Lados opuestos de un cuadrilátero: son los que no tienen algún vértice en común.

Lados consecutivos de un cuadrilátero: son los que tienen un vértice en común.

Vértices opuestos de un cuadrilátero: son aquellos que no pertenecen a un mismo lado.

Ángulos opuestos de un cuadrilátero: son los que tienen vértices opuestos.

Diagonal de un cuadrilátero: es un segmento cuyos extremos son vértices opuestos.

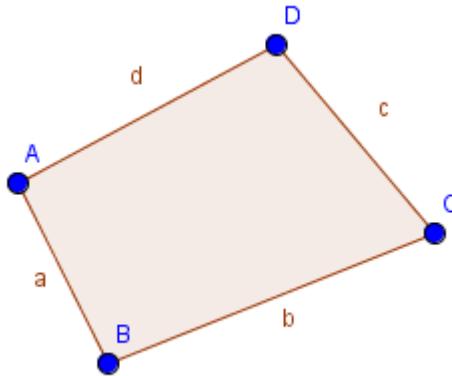


Ilustración 22. Cuadrilátero

A partir de la Ilustración 22 se tiene entonces que:

- \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{DA} son los lados del cuadrilátero ABCD.

- A, B, C y D son vértices del cuadrilátero ABCD.
- $\angle DAB$, $\angle BCD$, $\angle ABC$ y $\angle CDA$ son ángulos del cuadrilátero ABCD.
- \overline{AB} y \overline{CD} ; \overline{BC} y \overline{DA} son lados opuestos del cuadrilátero ABCD.
- \overline{AB} y \overline{BC} ; \overline{BC} y \overline{CD} ; \overline{CD} y \overline{DA} ; \overline{DA} y \overline{AB} son lados consecutivos del cuadrilátero ABCD.
- $\angle DAB$ y $\angle BCD$; $\angle ABC$ y $\angle CDA$ son ángulos opuestos del cuadrilátero ABCD.
- $\angle DAB$ y $\angle ABC$; $\angle BCD$ y $\angle CDA$; $\angle DAB$ y $\angle ABC$; $\angle ABC$ y $\angle BCD$ son lados consecutivos del cuadrilátero ABCD.

1.5.2.2. MODELO VAN HIELE

El modelo Van Hiele es una teoría de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, diseñado por el matrimonio holandés Van Hiele, Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele, en 1957 como resultado de su trabajo doctoral, el modelo está formado de dos partes:

1. Niveles de razonamiento: Son la descripción de los diferentes tipos de razonamiento geométrico a lo largo de la formación matemática.
2. Fases de aprendizaje: “Criterios para organizar la secuencia de tareas, actividades o problemas que se planteen a los estudiantes de manera que se favorezcan su aprendizaje y mejoren su nivel de razonamiento” (Aravena, Gutiérrez y Jaime, 2016, p. 110).

Los niveles que se encuentran en el modelo son los siguientes:

- Nivel 1: Reconocimiento o visualización
- Nivel 2: Análisis
- Nivel 3: Clasificación
- Nivel 4: Deducción
- Nivel 5: Rigor

En la Tabla 3 se muestra lo que el estudiante es capaz de hacer y no hacer en el proceso, para cada uno de los niveles, basado en Vargas (2013).

Niveles de Van Hiele	El estudiante...	El estudiante NO
Nivel 1	<ul style="list-style-type: none">• Reconoce figuras como un todo.• Reconoce y realiza una copia de una figura.	<ul style="list-style-type: none">• Diferencia partes y componentes de la figura.• Reconoce ni explica las propiedades de una figura.• Tiene el lenguaje geométrico suficiente para nombrar figuras por su nombre.• Generaliza características de una figura a otras.•

Niveles de Van Hiele	El estudiante...	El estudiante NO
Nivel 2	<ul style="list-style-type: none"> Reconoce y analiza las partes y propiedades de las figuras. Establece propiedades de las figuras de manera empírica a través de la manipulación y experimentación. 	<ul style="list-style-type: none"> No logra establecer relaciones o clasificaciones entre distintas familias de figuras. Elabora definiciones ya que las definiciones se establecen a partir de propiedades.
Nivel 3	<ul style="list-style-type: none"> Determina figuras por sus propiedades, las relaciona entre sí y familias de ellas. Establece condiciones que cumplen las figuras. Elaborar demostraciones informales. Deduce propiedades a partir de otras. 	<ul style="list-style-type: none"> Es capaz de entender las demostraciones en su totalidad. Es capaz de organizar una secuencia de razonamientos que justifiquen su proceso. No comprende el sistema axiomático.
Nivel 4	<ul style="list-style-type: none"> Realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales. Maneja las relaciones entre propiedades. Comprende que se puede llegar a lo mismo de diferentes maneras. Desarrolla secuencias de ideas para deducir propiedades 	<ul style="list-style-type: none"> No reconoce el rigor en los razonamientos.
Nivel 5	<ul style="list-style-type: none"> Analiza el rigor de las observaciones planteadas. Reconoce figuras abstractas. Este nivel se desarrolla por lo general en estudiantes de Educación Superior. 	

Tabla 3. Características de los niveles de Van Hiele.

Las fases de aprendizaje son:

Fase 1: Información

- El profesor plantea tareas que introduzcan al nuevo tema.

- Las actividades planteadas sirven como diagnóstico de los conocimientos previos de los estudiantes.

Fase 2: Orientación dirigida-

- Los estudiantes exploran el tema por medio del material que se les entrega.
- El objetivo de las tareas es que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan los conceptos y propiedades básicos del tema.

Fase 3: Explicación-

- Es transversal a las otras fases.
- Los estudiantes presentan y argumentan sus resultados.
- Se fomenta el dialogo y discusión entre los estudiantes.
- Los estudiantes intercambian sus experiencias y se complementan sus ideas.

Fase 4: Orientación libre-

- Los estudiantes aplican lo aprendido en las fases anteriores para resolver situaciones en diferentes formas que llamen su atención.
- Las actividades están dirigidas de tal forma que utilicen el lenguaje adquirido para dar solución a cada situación.

Fase 5: Integración-

- El profesor intenta que los estudiantes logren- una visión general de los contenidos y métodos que les proporcionó en las fases anteriores.
- Los estudiantes adquieren una idea general del contenido que se trabajó.

El uso de este modelo en la enseñanza de la geometría es importante ya que según (fouz, 2014) los niveles ayudan a secuenciar los contenidos y las fases organizan las tareas que se pueden diseñar, es por eso que en este trabajo las tareas están estructuradas y diseñadas a partir de este modelo.

1.6.2.3.GEOPLANO

El geoplano original fue diseñado por Caleb Gattegno y presentado en 1961, consistía en una plancha de madera con pivotes o clavos formando una trama ortométrica y gomas elásticas.

“El geoplano es un elemento didáctico que ayuda a introducir y afianzar gran parte de los conceptos de la geometría plana, al ser una herramienta concreta permite a los estudiantes obtener una mayor comprensión de diversos términos de esta materia” (Cáceres, 2011). Es por eso que este material es de gran utilidad, despertando así el interés del estudiante en el desarrollo del tema.

1.6.1.2.3.1. Clasificación de los geoplanos

Se puede encontrar tres tipos de geoplanos:

1. Geoplano cuadrado: “Consiste en un tablero cuadrado, generalmente de madera, el cual se ha cuadriculado y se ha introducido un clavo en cada vértice de tal manera que éstos sobresalen de la superficie de la madera unos 2cm. El tamaño del tablero es variable y está determinado por un número de cuadrículas; éstas pueden variar desde 25 (5 x 5) hasta 100 (10 x 10)”(Selva,2007)

Por su construcción el geoplano cuadrado se caracteriza por:

- Las filas son paralelas entre sí.
- Las columnas son paralelas entre sí.
- Una fila y una columna son perpendiculares entre sí.
- Las diagonales son paralelas entre sí.



Ilustración 23. Geoplano cuadrado¹⁰

2. Geoplano circular: Es una colección de puntos de una circunferencia con la misma distancia del punto al centro de la circunferencia. Permite construir polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 12 y 24 lados. Sirve también para estudiar propiedades de los elementos de la circunferencia y de las figuras inscritas. Esta definición fue tomada de <https://aprendiendomatematicas.com/el-geoplano/>.

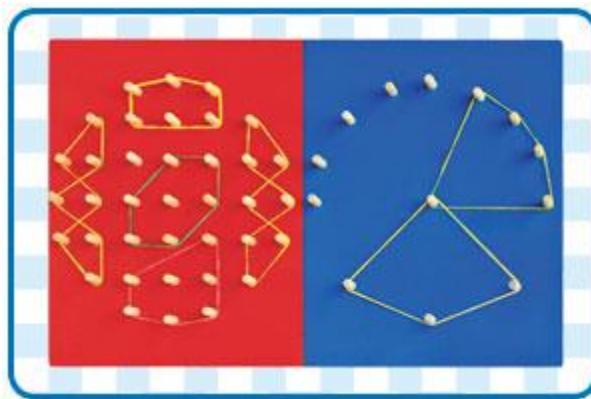


Ilustración 24. Geoplano circular¹¹

¹⁰ Recuperada el 15 de julio de 2017 de
https://www.google.com.co/search?q=geoplano&source=lnms&tbm=isch&sa=X&sqi=2&ved=0ahUKEwjMypmj44zVAhXIZiYKHaVNAuUQ_AUIBigB&biw=1517&bih=735#imgrc=Dh9NzcEiHAMf-M

¹¹ Recuperada el 15 de julio de 2017 de
https://www.google.com.co/search?q=geoplano&source=lnms&tbm=isch&sa=X&sqi=2&ved=0ahUKEwjMypmj44zVAhXIZiYKHaVNAuUQ_AUIBigB&biw=1517&bih=735#tbm=isch&q=geoplano+circular&imgrc=BoMTXo_cjCQGa_M

3. Geoplano isométrico: Según Cáceres es una trama triangular, con los clavos situados en vértices de triángulos equiláteros, la distancia entre cada punto y todos los puntos consecutivos a él es la misma, con él se pueden realizar representación de figuras geométricas en tres dimensiones (2011).

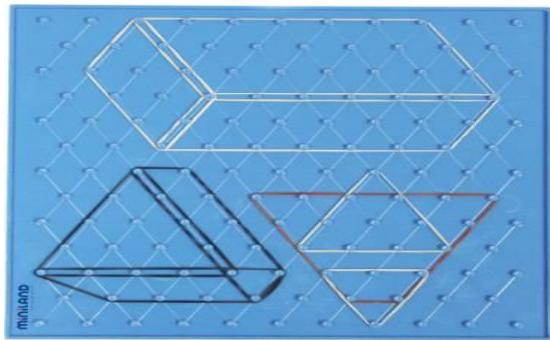


Ilustración 25. Geoplano isométrico¹²

3.3.3. Ventajas y desventajas del geoplano

En la Tabla 4 se muestra algunas de las ventajas y desventajas de usar el geoplano en el aula, estas se encuentran basadas en Muñoz (2014).

Ventajas	Desventajas
<ul style="list-style-type: none"> • Puede ser utilizado en cualquier edad escolar. • Es manipulativo, fácil y rápido. • Permite la visualización. • Permite experimentar con modelos matemáticos. • Permite reconocer figuras planas. • Permite reconocer y representar figuras geométricas. • Desarrolla la creatividad. • Desarrolla la orientación espacial. • Permite comparar figuras. • Permite componer y descomponer figuras. 	<ul style="list-style-type: none"> • Al utilizar las bandas elásticas, la noción de medida cambia al pasarla de un lugar a otro. • En algunos casos puede ser un material distractor.

¹² Recuperada el 15 de julio de 2017 de <https://www.google.com.co/search?q=geoplano&source=lnms&tbo=isch&sa=X&sqi=2&ved=0ahUKEwj>

Ventajas	Desventajas
<ul style="list-style-type: none"> • Permite visualizar figuras de diferentes formas. • Permite desarrollar simetrías y la notación de rotación. • Permite asociar formas al movimiento. • Contribuye a desarrollar el pensamiento espacial. • Desarrolla la destreza motriz. 	

Tabla 4. Ventajas y desventajas del uso del geoplano en el aula.

4. DISEÑO DE TAREAS Y PILOTAJE

El diseño de las tareas se planteó en torno a los niveles y fases del modelo de Van Hiele.

4.1. DISEÑO PRELIMINAR DE LAS TAREAS

A partir del modelo de Van Hiele se estructura el diseño para la elaboración de las tareas entorno a la enseñanza de cuadriláteros y su clasificación, de esta manera se crea una propuesta de enseñanza asociada al modelo para estudiantes de grado séptimo.

4.1.1. ESTRUCTURA DE LAS TAREAS SEGÚN EL MODELO.

Las tareas que se plantearon están basadas en el modelo de Van Hiele, haciendo uso de los niveles de reconocimiento, análisis, clasificación, y deducción formal, sin tener en cuenta el nivel de rigor ya que este es utilizado en la educación superior, además atienden a las 5 fases que presenta el modelo ,esto se puede observar en la Tabla 5,en cada una de las casillas se encuentra lo que el estudiante debe realizar respecto a los cuadriláteros y su clasificación en cada uno los niveles y fases.

NIVELES FASES	NIVEL 1 (Reconocimiento)	NIVEL 2 (análisis)	NIVEL 3 (Clasificación)	NIVEL 4 (deducción formal)
FASE 1 (Información)	Identifica cuadriláteros en una figura	Construye cuadriláteros a partir de una unas características dadas.	Explica de manera informal una clasificación para los cuadriláteros.	Reconoce cuadriláteros de una figura dada y los reproduce
FASE 2 (orientación dirigida)	Identifica características visuales de cuadriláteros y establece relaciones entre ellos.	Construye cuadriláteros a partir de uno dado e identifica sus propiedades.	Descubre a partir de la experimentación propiedades de cuadriláteros y demuestra de manera informal a partir de las características.	Reconoce la clasificación de cuadriláteros, a partir de unas características dadas.
FASE 3 (explicitación)	Expresa de manera oral o escrita la definición y características de cuadriláteros.	Argumenta de manera empírica sus conclusiones y resultados sobre las características de los cuadriláteros. (Gutiérrez, 2006)	Es capaz de explicar lo encontrado de manera escrita u oral a través de ideas complejas sobre la clasificación de cuadriláteros.	Presenta por escrito y oralmente características y clasificación de los cuadriláteros usando lenguaje formal.
FASE 4 (Orientación libre)	Utiliza la comparación para encontrar características y relaciones de cuadriláteros.	Demuestra experimentalmente y nombra propiedades de los cuadriláteros.	Establece relaciones y demuestra informalmente las características de cuadriláteros.	Establece relaciones y demuestra formalmente la clasificación de cuadriláteros.
FASE 5 (Integración)	Presenta de forma específica las características de los cuadriláteros	Reconoce propiedades de los cuadriláteros y las reconoce dada una figura.	Resume las diferentes clasificaciones de los cuadriláteros.	Elabora un resumen sobre clasificación de cuadriláteros

Tabla 5. Tareas para la enseñanza de cuadriláteros a partir del modelo de Van Hiele

4.1.2. TAREAS DIRIGIDAS A LOS ESTUDIANTES

La propuesta de tareas atiende a la estructura del modelo presentado en la sección 4.1.1, ver Tabla 5.

4.1.2.1. Tareas asociadas al Nivel 1 de Van Hiele. Reconocimiento o visualización

Fase 1: Información

De la siguiente pintura de Omar Rayo, identifique los cuadriláteros y constrúyalos en el geoplano con las bandas elásticas.

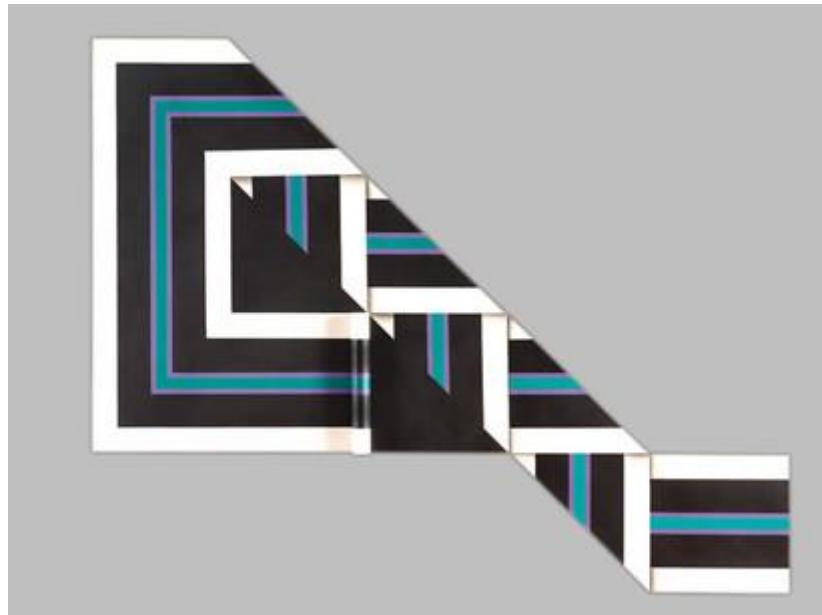


Ilustración 26. Pintura Omar Rayo¹³

Fase 2: Orientación dirigida

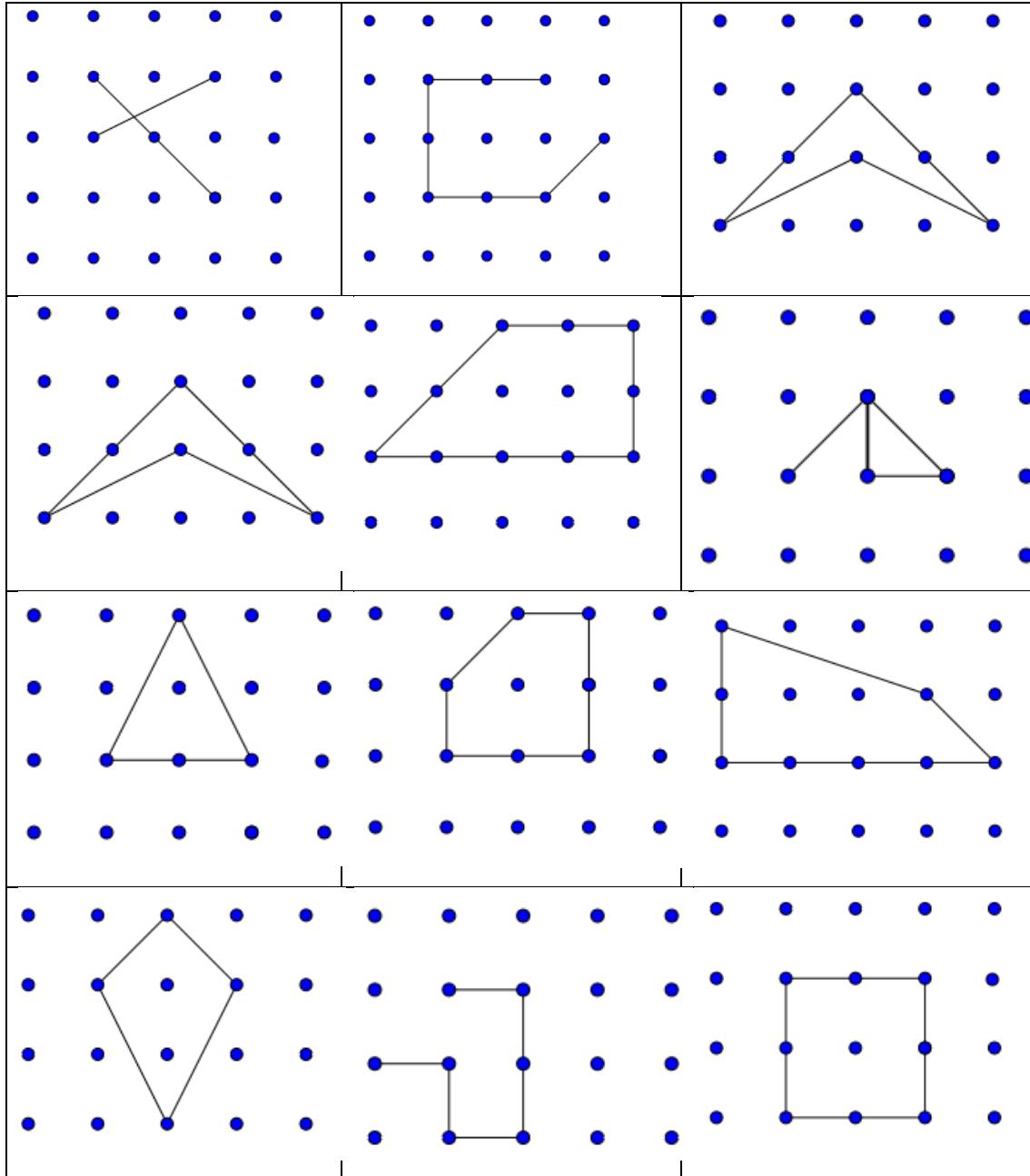
Construya en el geoplano otros cuadriláteros diferentes a los que halló en la pintura de Omar Rayo.

Fase 3: Explicitación

¹³Tomada

de:
https://www.google.com.co/search?q=omar+rayo&rlz=1C1CAFA_enCO602CO668&espv=2&source=lnms&tbo=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjnlLsI7zTAhUEQyYKHSoJAoQ_AUIBgB&biw=1366&bih=662#imgrc=EYkjcW-KCbBVwM

1. Construya en el geoplano la figura que se le indica en la tarjeta entregada, diga si es cuadrilátero o no y explique su respuesta. (Las tarjetas posibles pueden verse en la Tabla 6 se entrega una o dos tarjetas a cada estudiante)
2. Con base en lo realizado hasta ahora, describa qué es un cuadrilátero.



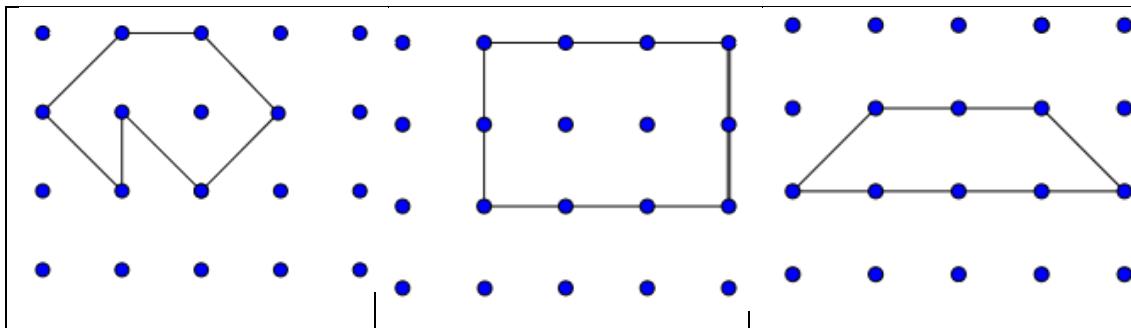


Tabla 6. Tarjetas 1

Fase 4: Orientación libre

1. Construya la siguiente figura en el geoplano (Ilustración 27).

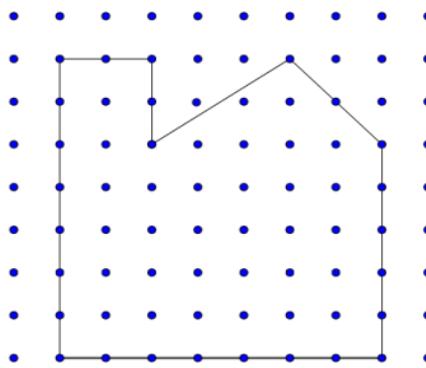


Ilustración 27. Figura a construir

2. Rellene la figura utilizando cuadriláteros de al menos tres tipos distintos, los cuadriláteros no pueden solaparse, pero sus lados sí pueden compartirse.

Fase 5: Integración

Con base en lo realizado hasta ahora, realice un diagrama donde defina qué es un cuadrilátero.

4.1.2.2. Tareas asociadas al Nivel 2 de Van Hiele. Análisis

Fase 1: Información

Construya en el geoplano el cuadrilátero con las características dadas en la tarjeta.(Ver posibles tarjetas en la Tabla 7;Para esto se entrega una tarjeta a cada estudiante, al azar)

Construya un cuadrilátero con exactamente dos pares de lados paralelos	Construya un cuadrilátero con únicamente un par de lados paralelos.	Construya un cuadrilátero con un par de lados consecutivos iguales.
Construya un cuadrilátero con un solo ángulo recto.	Construya un cuadrilátero que tenga solo dos ángulos rectos.	Construya un cuadrilátero con lados opuestos paralelos iguales.
Construya un cuadrilátero con un ángulo agudo.	Construya un cuadrilátero con un ángulo obtuso.	Construya un cuadrilátero con ningún par de lados opuestos paralelos.
Construya un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.	Construya un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y lados iguales	Construya un cuadrilátero con un solo ángulo recto y dos lados consecutivos iguales.
Construya un cuadrilátero con dos lados consecutivos congruentes y los otros diferentes.	Construya un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales pero diferentes entre sí.	Construya un cuadrilátero con un par de ángulos opuestos iguales
Construya un cuadrilátero con tres lados iguales y uno diferente.	Construya un cuadrilátero con cuyos lados opuestos midan 3 unidades.	Construya un cuadrilátero con 4 ángulos iguales y los lados consecutivos desiguales.

Construya un cuadrilátero con cuatro ángulos iguales	Construya un cuadrilátero con lados consecutivos desiguales.	Construya un cuadrilátero con cuatro ángulos iguales y lados consecutivos desiguales.
Construya un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales, pero diferentes entre sí y un ángulo mayor de 180°	Construya un cuadrilátero con lados diferentes y un ángulo mayor de 180°	Construya un cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos y dos pares de lados consecutivos iguales, pero desiguales entre sí.

Tabla 7. Tarjetas 2

Fase 2: Orientación dirigida

Intercambie su geoplano y su tarjeta con un compañero y:

- Verifique si el cuadrilátero construido por su compañero, se corresponde con lo solicitado.
- Construya otro cuadrilátero con las mismas condiciones de la tarjeta.
- Dialoguen entre sí para determinar si los cuadriláteros construidos son correctos, respecto a lo indicado en las tarjetas.

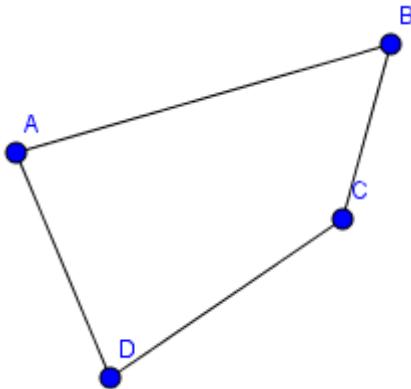
¿Hay otro tipo de cuadrilátero con las mismas características (para cada tarjeta)? Si la respuesta es sí, constrúyanlos.

Fase 3: Explicitación

Verifique si el cuadrilátero construido por la profesora (en un geoplano que se encuentra en el tablero corresponde con el construido por ustedes. Indique sus características

Fase 4: Orientación libre

A partir del cuadrilátero ABCD complete la información.



- $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y \overline{DA} _____.
- _____ vértices del cuadrilátero.
- $\angle DAB, \angle BCD, \angle ABC$ y $\angle CDA$ _____.
- \overline{AB} y \overline{CD} ; \overline{BC} y \overline{DA} _____.
- \overline{AB} y \overline{BC} ; \overline{BC} y \overline{CD} ; \overline{CD} y \overline{DA} ; \overline{DA} y \overline{AB} _____.
- $\angle DAB, \angle BCD; \angle ABC$ y $\angle CDA$ _____
- $\angle DAB$ y $\angle ABC$; $\angle BCD$; $\angle ABC$ y $\angle CDA$ _____.

Fase 5: Integración

Construya un cuadrilátero y explique que son:

- Lados opuestos.
- Ángulos opuestos.
- Lados consecutivos.
- Ángulos consecutivos.
- Vértices.

4.1.2.3. Tareas asociadas al Nivel 3 de Van Hiele. Clasificación.

Fase 1: Información

Clasifique las siguientes figuras, constrúyalas en el geoplano usando un color para cada grupo.

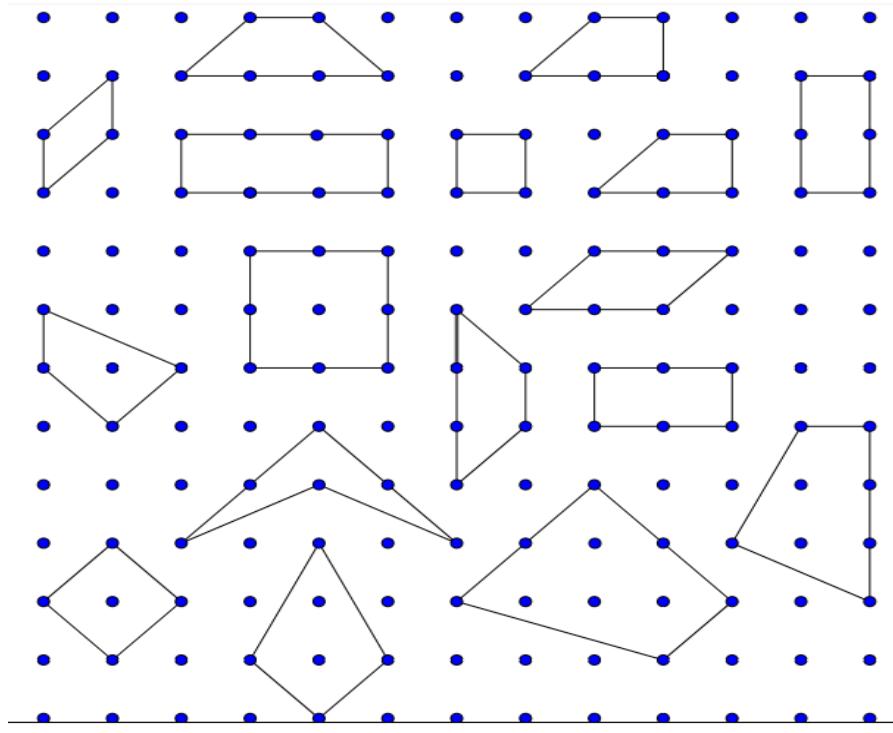


Ilustración 28: Cuadriláteros en el geoplano. Clasificación

Fase 2: Orientación dirigida

Construya un cuadrilátero diferente a los de la actividad anterior para cada uno de los grupos identificados.

Fase 3: Explicitación

Explique el porqué de la clasificación realizada para los cuadriláteros dados y construidos.

Fase 4: Orientación Libre

Fase 5: Integración

Complete el cuadro con los cuadriláteros que realizó anteriormente.

Nombre del grupo de cuadriláteros	Características.	Representación.
Ejemplo: Cuadrado	<ul style="list-style-type: none">• 4 lados iguales.• 4 ángulos iguales• 2 pares de lados opuestos paralelos.	

4.1.2.4. Tareas asociadas al Nivel 4 de Van Hiele. Deducción.

Fase 1: Información.

Observe las siguientes figuras, construya en el geoplano las figuras que vea en cada una de las ellas y escriba las características comunes de cada uno de los grupos.

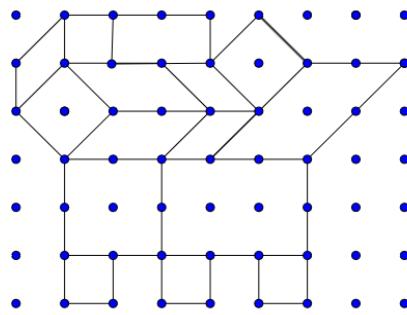


Figura 1

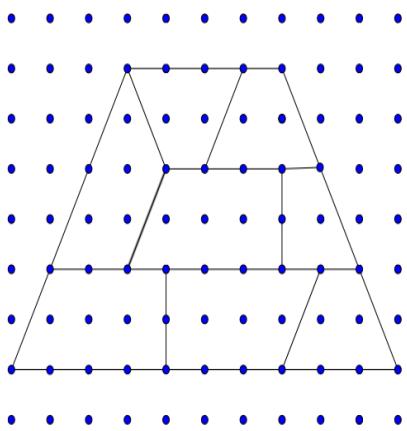


Figura 2

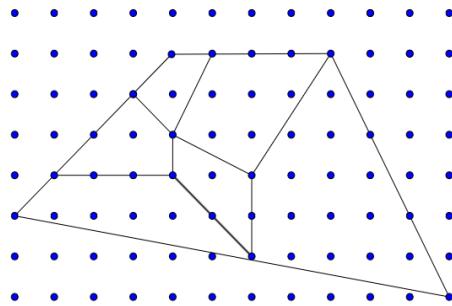


Figura 3

Fase 2: Orientación dirigida

Escriba el tipo de cuadriláteros que se pueden observar en cada una de las figuras de la tara anterior.

Figura 1	Figura 2	Figura 3

Fase 3: Explicitacion

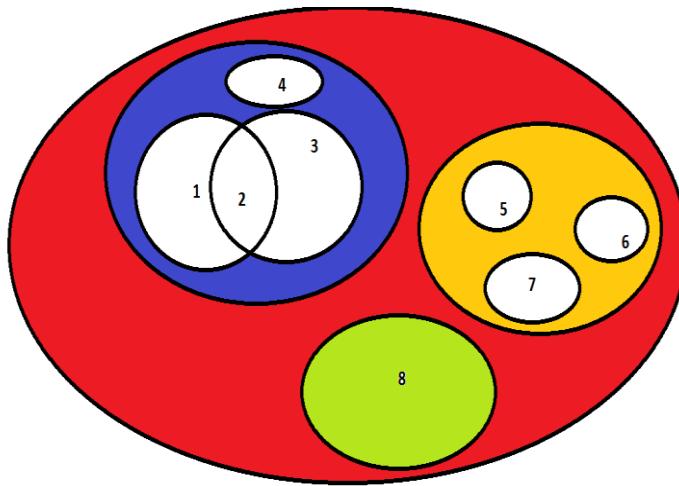


Diagrama 1. Clasificación de cuadriláteros

Recorta cada uno de los cuadriláteros de la Ilustración 29 y ubíquelos en el Diagrama 1, de tal manera que cumpla con las siguientes condiciones:

1. Exactamente dos pares de lados paralelos, 4 ángulos iguales y lados iguales.
2. Exactamente dos pares de lados paralelos, 4 ángulos iguales y lados consecutivos desiguales.
3. Exactamente dos pares de lados paralelos, ángulos opuestos iguales pero diferentes entre sí y lados iguales.
4. Exactamente dos pares de lados paralelos, ángulos opuestos iguales pero diferentes entre sí y lados consecutivos desiguales.
5. Únicamente un par de lados paralelos y un ángulo recto.

6. Únicamente un par de lados paralelos y lados opuestos no paralelos iguales.
7. Únicamente un par de lados paralelos y lados desiguales.
8. Ningún par de lados paralelos.

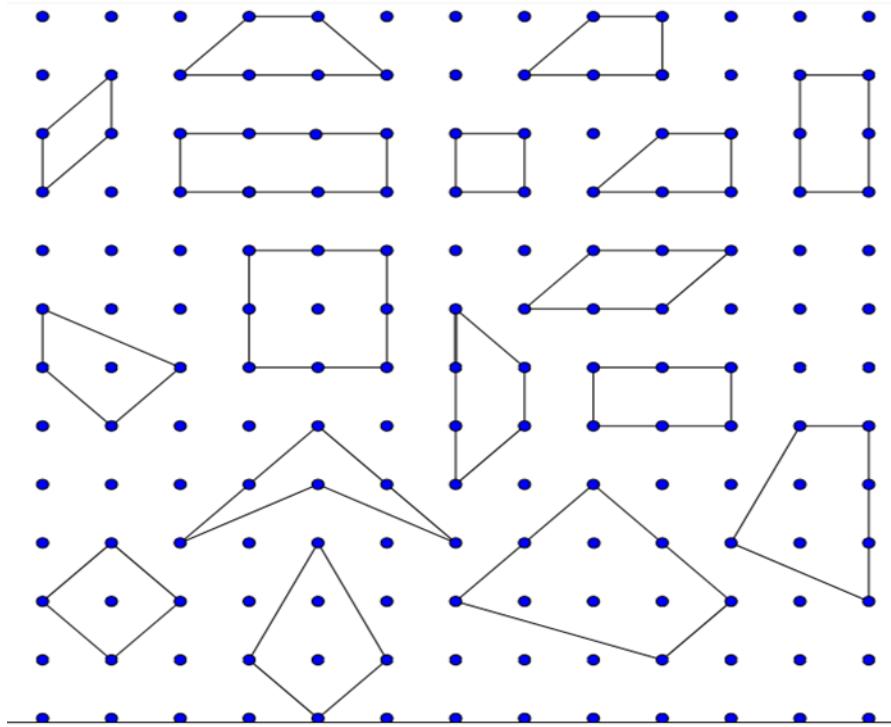


Ilustración 29. Tarjetas tarea fase 4 nivel 4

Fase 4: Orientación Libre.

Construir en el geoplano una figura que contenga los siguientes cuadriláteros:

2 cuadrados, 3 rombos, 5 rectángulos, 2 trapecios isósceles, 1 trapecio rectángulo y 1 trapezoide.

Fase 5: Integración

Realizar un mapa conceptual sobre la clasificación de cuadriláteros.

4.2. PILOTAJE.

El pilotaje de las tareas se realizó en el Colegio Personalizado Pensamiento ubicado en la localidad de Teusaquillo, esta institución cuenta con un modelo pedagógico propio, llamado *Personalizado* el cual atiende dificultades leves en el aprendizaje (trastorno déficit de atención, déficit de atención con hiperactividad, problemas de conducta, inteligencia límite, asperger, entre otros), grupos pequeños (máximo de 15 estudiantes), tiene en cuenta el proceso de aprendizaje de cada uno de ellos, manejando así una formación integral teniendo en cuenta el sentir (emoción), el pensar (razón) y el actuar (instinto).

El grado con el cual se llevó a cabo el pilotaje de las tareas anteriormente presentadas fue séptimo, conformado por 12 estudiantes, tales que sus edades oscilan entre los 12 y 16 años, las tareas estuvieron dirigidas por la docente en formación Juli Alexandra García Mejía, autora de este trabajo; y se ocuparon en tres sesiones así:

Sesión	Fecha	Tiempo empleado
Primera	Miércoles 26 de abril de 2017	150 min
Segunda	Miércoles 3 de mayo de 2017	60 min
Tercera	Miércoles 17 de mayo de 2017	30 min

Tabla 8. Sesiones del pilotaje

4.2. ANÁLISIS DEL PILOTAJE

El análisis del pilotaje se organizó en una tabla que contiene las evidencias y resultados de cada una de las tareas, lo cual se encuentra en el anexo.

Enseguida se presenta un resumen de la decisión para cada una de las tareas aplicadas, con el fin de mejorar el diseño y contar finalmente con una secuencia de tareas que pueda replicarse por otros maestros en formación o en ejercicio.

Nivel	Fase	Modificar la actividad		Observaciones
		Sí	No	
Reconocimiento	1		X	Ninguna
	2		X	Ninguna
	3		X	Ninguna
	4		X	Ninguna
	5		X	Ninguna
Análisis	1		X	Ninguna
	2		X	Ninguna
	3		X	Ninguna
	4		X	Ninguna
	5		X	Ninguna
Clasificación	1	X		En el momento en que los estudiantes necesitaron aludir a los cuadriláteros, no existía una referencia para hacerlo, por lo tanto es necesario ubicar números a las figuras.
	2		X	Ninguna
	3		X	Ninguna
	4		X	Ninguna
	5			Por lo observado en el pilotaje es necesario orientar en la actividad utilizando nombres reconocidos para todos, con un ejemplo, para lograr conclusiones generales y dialogar sobre los mismos grupos de cuadriláteros.
Deducción	1	X		En el enunciado es importante hacer claridad a que: Las siguientes figuras están conformadas por cuadriláteros, identifíquelas, constrúyalas en el geoplano y escriba las características para cada uno de los grupos de cuadriláteros.
	2		X	Ninguna
	3		X	Ninguna

	4		X	Ninguna
	5		X	Ninguna

5. PROPUESTA DE TAREAS PARA LA ENSEÑANZA DE LOS CUADRILÁTEROS.

La propuesta se encuentra dividida en 5 sesiones, la primera es el reconocimiento y exploración del geoplano, las otras sesiones una por nivel de Van Hiele, está compuesta por cinco (5) tareas que corresponden a las fases del modelo, la propuesta está dirigida a profesores en formación o ejercicio.

Sesión 1: Reconocimiento del geoplano

Tiempo estimado: 10 minutos

A cada uno de los estudiantes se le entrega un geoplano con las bandas elásticas, para realizar una exploración libre del material.

Sesión 2: Definición de cuadrilátero. Tareas asociadas al nivel 1 de Van Hiele

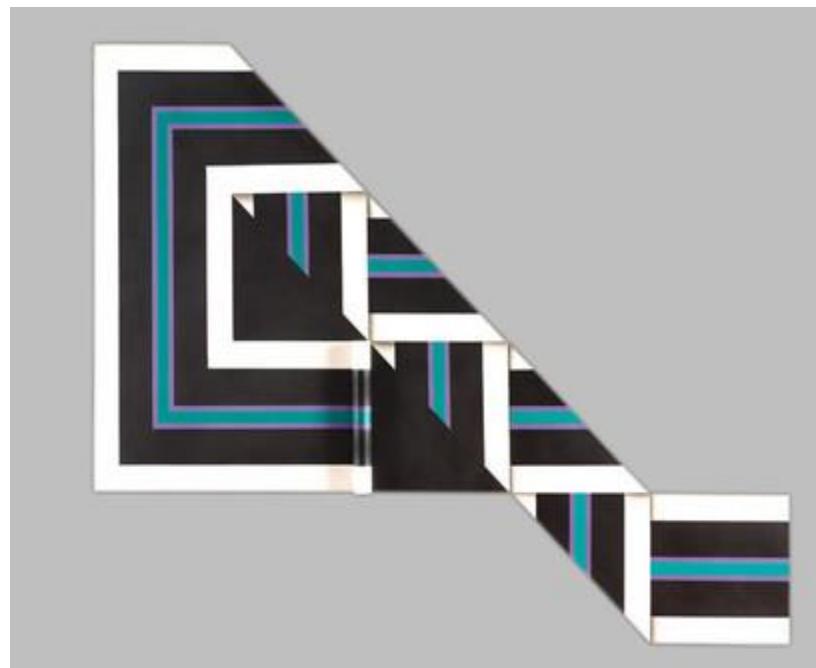
Tiempo estimado: 60 minutos

Al finalizar esta tarea se espera el estudiante proponga una definición para cuadrilátero.

Fase 1: Reconocimiento

Tiempo estimado: 10 minutos

Se le muestra a cada uno de los estudiantes la pintura de Omar Rayo si es posible con ayuda de un proyector, para que construyan en el geoplano los cuadriláteros que observen en ella.



Fase 2: Orientación dirigida

Tiempo estimado: 10 minutos

Se les pide a los estudiantes que construyan otros cuadriláteros diferentes a los que halló en la pintura de Omar Rayo.

Fase 3: Explicitación

Tiempo estimado: 20 minutos.

1. A cada uno de los estudiantes se entrega una de tarjetas dispuestas en la Tabla 9 deben construir la figura en el geoplano.

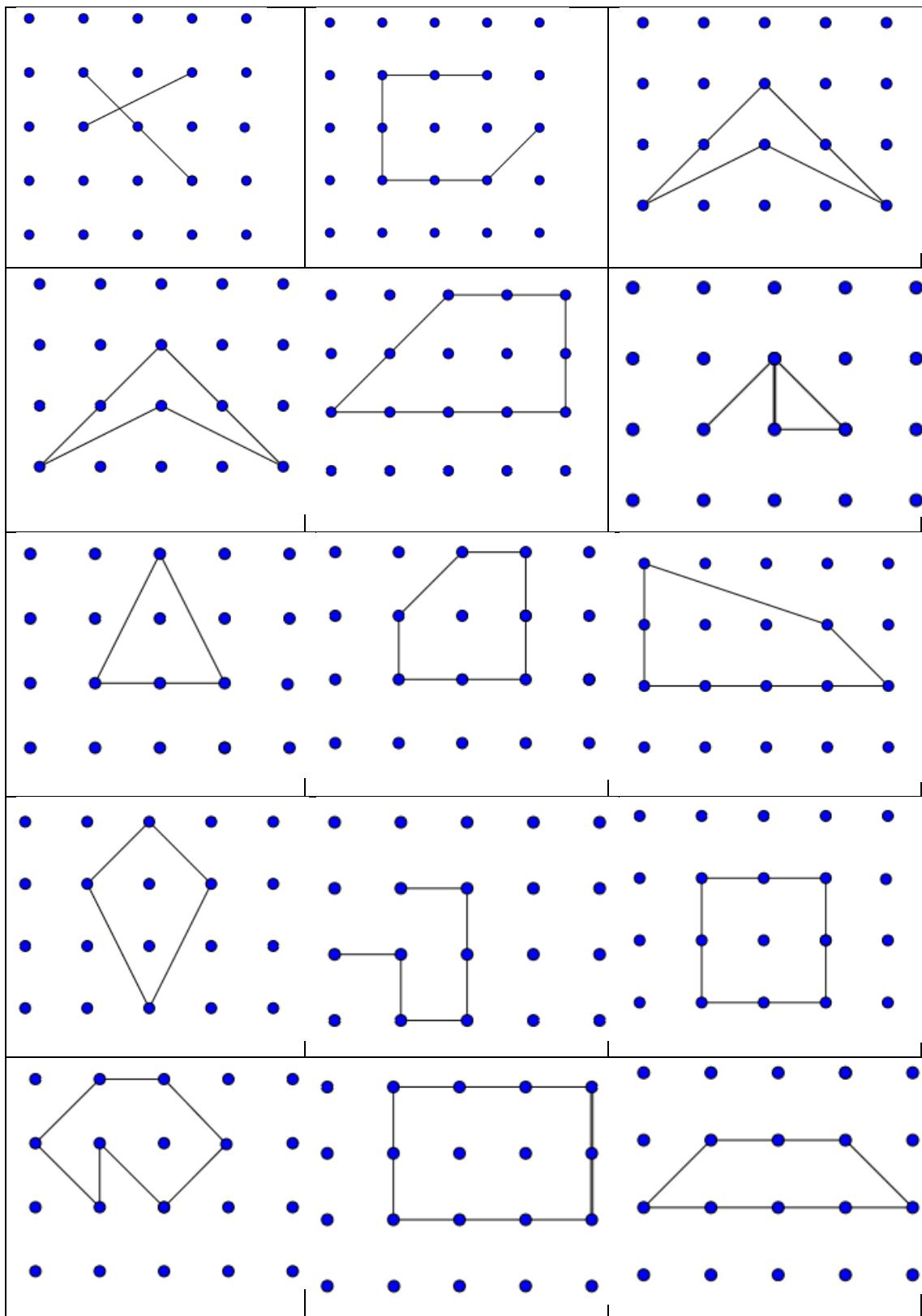


Tabla 9. Tarjetas 1

2. Los estudiantes dicen si la figura es cuadrilátero o no, justifican su respuesta de manera individual y por escrito.
 3. Cada estudiante mostrará a sus compañeros la figura que construyó, explicará sus argumentos, de esta manera se genera el diálogo y la discusión con el curso, a partir de preguntas como:
 ¿Qué opinan ustedes sobre las intervenciones de sus compañeros?
 ¿Es correcta la figura construida?
 4. Por último cada uno de los estudiantes debe dar una descripción de lo que es cuadrilátero.

Fase 4: Orientación libre

Tiempo estimado: 10 minutos.

Se muestra la figura (ver Ilustración 30) que deben construir los estudiantes en el geoplano, si es posible con un proyector, construirla en el geoplano y cumplir con las siguientes características.

- Debe tener mínimo 7 cuadriláteros.
 - Dentro de los cuadriláteros debe existir mínimo 3 tipos de cuadriláteros.
 - Los cuadriláteros no deben solaparse (cortarse en sus lados), sí pueden compartirlos.

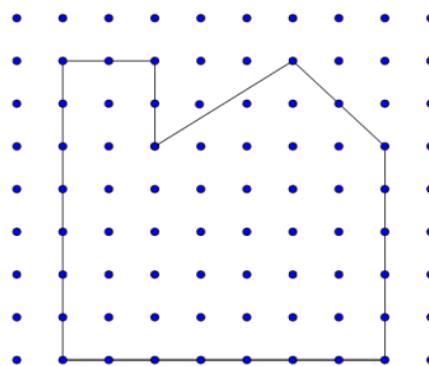


Ilustración 30. Figura a construir

Fase 5: Integración

Tiempo estimado: 10 minutos

El estudiante de manera escrita debe realizar un esquema en el que defina cuadrilátero.

Sesión 2: Propiedades de los cuadriláteros. Tareas asociadas al nivel 2 de Van Hiele

Tiempo estimado: 65 minutos

Al finalizar esta tarea se espera que el estudiante reconozca las propiedades de los cuadriláteros y las verifique en cualquiera de ellos.

Fase 1: Información

Tiempo estimado: 15 minutos

A cada uno de los estudiantes se le entrega una de las siguientes tarjetas para construir en el geoplano un cuadrilátero con las características dadas.

Construya un cuadrilátero con exactamente dos pares de lados paralelos	Construya un cuadrilátero con únicamente un par de lados paralelos.	Construya un cuadrilátero con un par de lados consecutivos iguales.
Construya un cuadrilátero con un solo ángulo recto.	Construya un cuadrilátero que tenga solo dos ángulos rectos.	Construya un cuadrilátero con lados opuestos paralelos iguales.
Construya un cuadrilátero con un ángulo agudo.	Construya un cuadrilátero con un ángulo obtuso.	Construya un cuadrilátero con ningún par de lados opuestos paralelos.
Construya un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.	Construya un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y lados iguales	Construya un cuadrilátero con un solo ángulo recto y dos lados consecutivos iguales.

Construya un cuadrilátero con dos lados consecutivos congruentes y los otros diferentes.	Construya un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales pero diferentes entre sí.	Construya un cuadrilátero con un par de ángulos opuestos iguales
Construya un cuadrilátero con tres lados iguales y uno diferente.	Construya un cuadrilátero con cuyos lados opuestos midan 3 unidades.	Construya un cuadrilátero con 4 ángulos iguales y los lados consecutivos desiguales.
Construya un cuadrilátero con cuatro ángulos iguales	Construya un cuadrilátero con lados consecutivos desiguales.	Construya un cuadrilátero con cuatro ángulos iguales y lados consecutivos desiguales.
Construya un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales, pero diferentes entre sí y un ángulo mayor de 180°	Construya un cuadrilátero con lados diferentes y un ángulo mayor de 180°	Construya un cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos y dos pares de lados consecutivos iguales, pero desiguales entre sí.

Ilustración 31.Tarjetas 2

Fase 2: Orientación dirigida

Tiempo estimado: 15 minutos.

Cada uno de los estudiantes intercambian con un compañero la tarjeta y el geoplano, primero debe verificar si el cuadrilátero construido por su compañero, se corresponde con lo solicitado.

Luego construir otro cuadrilátero con las mismas condiciones de la tarjeta.

Por ultimo deben dialogar entre sí para determinar si los cuadriláteros construidos son correctos, respecto a lo indicado en las tarjetas.

¿Hay otro tipo de cuadrilátero con las mismas características (para cada tarjeta)? Si la respuesta es sí, constrúyanlos. Argumentando su respuesta.

Fase 3: Explicitación

Tiempo estimado: 15 minutos

La profesora construye diferentes tipos de cuadriláteros en el tablero, a partir de los cuales los estudiantes deben verificar si el construido por ellos en el geoplano corresponde al de la profesora, deben indicar sus características.

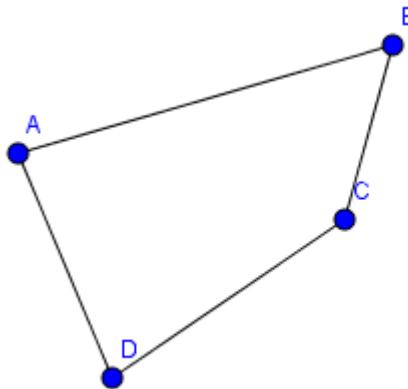
Orientando con preguntas como:

- ¿Qué cuadriláteros cumplen con las mismas características en los que se construyeron?
- ¿Se puede construir otro cuadrilátero con las mismas características?

Fase 4: Orientación dirigida

Tiempo estimado: 10 minutos

Se muestra a los estudiantes la figura la construyen en el geoplano y completan la información que aparece enseguida con respecto a las propiedades de los cuadriláteros.



- $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y \overline{DA} _____.
- _____ vértices del cuadrilátero.
- $\angle DAB, \angle BCD, \angle ABC$ y $\angle CDA$ _____.

- \overline{AB} y \overline{CD} ; \overline{BC} y \overline{DA} _____.
- \overline{AB} y \overline{BC} ; \overline{BC} y \overline{CD} ; \overline{CD} y \overline{DA} ; \overline{DA} y \overline{AB} _____.
- $\angle DAB, \angle BCD; \angle ABC$ y $\angle CDA$ _____
- $\angle DAB$ y $\angle ABC$; $\angle BCD$; $\angle ABC$ y $\angle CDA$ _____.

Fase 5: Integración

Tiempo estimado: 10 minutos

Luego de la actividad anterior el estudiante realiza una definición de los siguientes conceptos con respecto a las propiedades de los cuadriláteros.

- Lados opuestos.
- Ángulos opuestos.
- Lados consecutivos.
- Ángulos consecutivos.
- Vértices

Sesión 3. Clasificación de cuadriláteros. Tareas asociadas al nivel 2 de Van Hiele

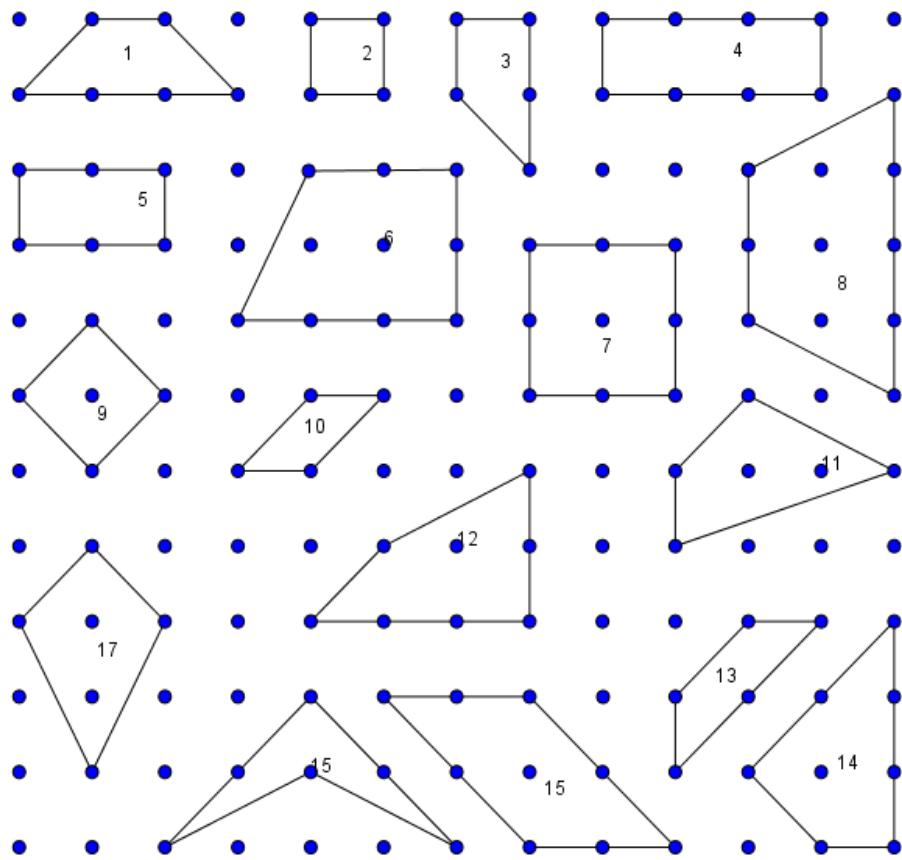
Tiempo estimado: 60 minutos.

Al terminar esta tarea se espera que el estudiante explique la clasificación de cuadriláteros y sus características.

Fase 1: Información

Tiempo estimado: 15 minutos.

Se les muestra a los estudiantes la siguiente imagen con cuadriláteros, para que realicen la clasificación de ellos utilizando bandas de colores en el geoplano, el mismo color para cada grupo de cuadriláteros.



Fase 2: Orientación dirigida

Tiempo estimado: 10 minutos.

Cada estudiante debe construir un cuadrilátero para cada una de las clasificaciones realizadas en la actividad anterior.

Fase 3: Explicitación

Tiempo estimado: 10 minutos.

Los estudiantes realizan una descripción de cada clasificación que realizó en la tarea de la fase 1.

Cada uno estudiantes debe mostrar su clasificación a los demás compañeros la cual se organizara en el tablero con el fin de generar discusión, diálogo y una generalidad de lo dicho por los estudiantes. En una tabla como la siguiente:

Grupo	Cuadriláteros que pertenecen	Características
Grupo 1		
Grupo 2		
Grupo 3		
Grupo 4		
Grupo 5		
Grupo 6		

El profesor realiza preguntas como:

- ¿Existe un cuadrilátero que pertenece a dos grupos a la vez?
- ¿Cuáles grupos de cuadriláteros comparten características? ¿cuáles características?

Las preguntas se hacen con el fin de que los estudiantes empiezan a ver relaciones entre los cuadriláteros con las mismas características

Fase 4: Orientación dirigida

Tiempo estimado: 10 minutos.

En el geoplano los estudiantes construyen una figura cualquiera utilizando un cuadrilátero de cada grupo de la clasificación que se realizó anteriormente.

Fase 5

Tiempo estimado: 10 minutos.

Los estudiantes deben completar la información del siguiente cuadro, utilizando las tareas de las fase 1, 2,3 de las tareas asociadas al nivel 3 de van Hiele. Esto con el fin de que todos estudiantes se refieran al momento de hablar al mismo grupo de cuadriláteros.

Sesión 4: Generalización cuadriláteros y su clasificación. Tareas asociadas al nivel 4 de van Hiele

Tiempo estimado: 70 minutos.

Al terminar esta tarea se espera que el estudiante presente un resumen de los tipos de cuadriláteros y su definición.

Fase 1: Información.

Tiempo estimado: 15 minutos.

Se muestran las siguientes figuras a los estudiantes, deben construir los cuadriláteros que vea en cada una de ellas en el geoplano escribiendo las características comunes en cada uno de los grupos.

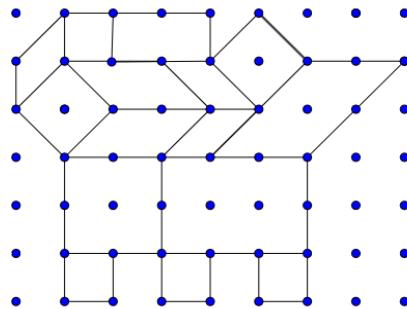


Figura 4

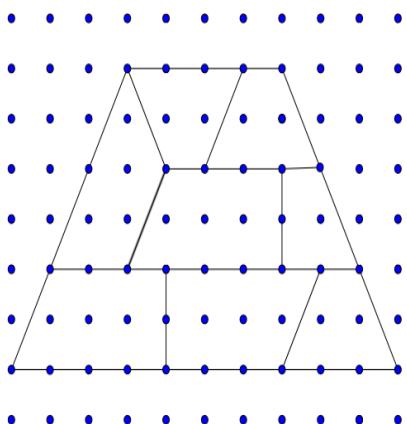


Figura 5

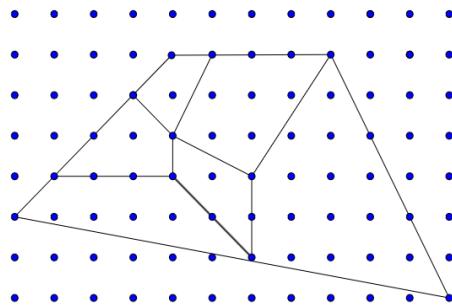


Figura 6

Fase 2: Orientación dirigida

Tiempo estimado: 10 minutos

El estudiante en el siguiente cuadro escribir el nombre de los cuadriláteros que se observan en cada una de las figuras de la actividad anterior.

Figura 1	Figura 2	Figura 3

Fase3: Explicitación.

Tiempo estimado: 15 minutos.

1. De manera escrita los estudiantes deben explicar la clasificación que realizo en las actividades anteriores.
2. Dar un nombre a cada grupo de cuadriláteros de figuras
3. Para la socialización en el tablero se realiza el siguiente cuadro para completar con los estudiantes generando así la discusión y el dialogo entre ellos, para llegar a acuerdos generales.

Figura	Características	Cuadriláteros que pertenezcan a cada figura
Figura 1		
Figura 2		
Figura 3		

Fase 4: Orientación Libre

Tiempo estimado: 10 minutos

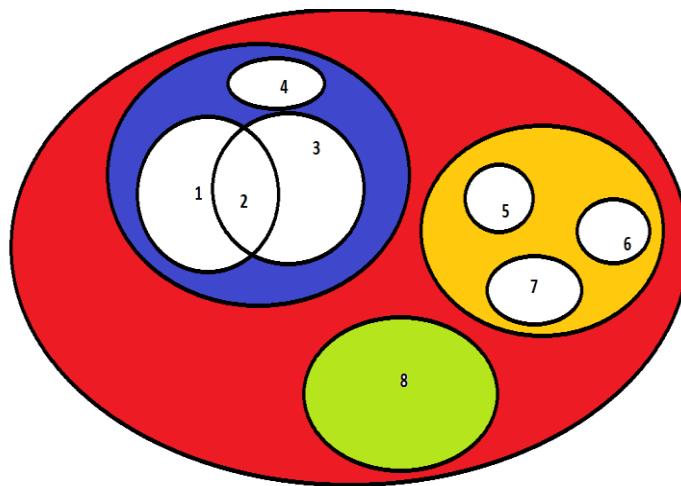


Diagrama 2. Clasificación de cuadriláteros

Se entrega a cada uno de los estudiantes un Diagrama 12 y los cuadriláteros de Ilustración 293, los cuales recortar y ubicar en diagrama 2 de tal manera que cumpla con las siguientes condiciones:

1. Exactamente dos pares de lados paralelos, 4 ángulos iguales y lados iguales.
2. Exactamente dos pares de lados paralelos, 4 ángulos iguales y lados consecutivos desiguales.
3. Exactamente dos pares de lados paralelos, ángulos opuestos iguales pero diferentes entre sí y lados iguales.
4. Exactamente dos pares de lados paralelos, ángulos opuestos iguales pero diferentes entre sí y lados consecutivos desiguales.
5. Únicamente un par de lados paralelos y un ángulo recto.
6. Únicamente un par de lados paralelos y lados opuestos no paralelos iguales.
7. Únicamente un par de lados paralelos y lados desiguales.
8. Ningún par de lados paralelos.

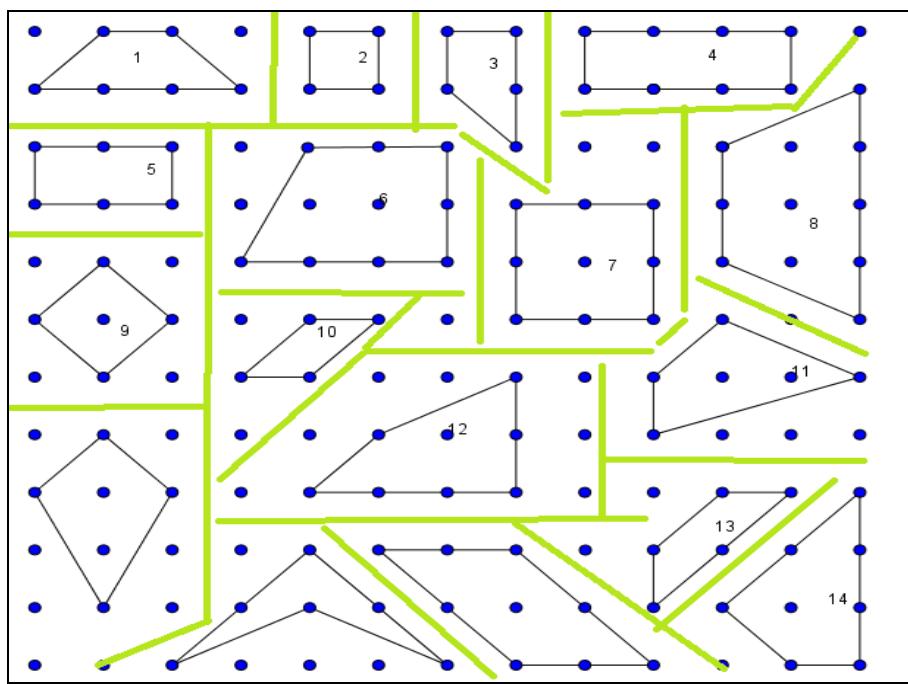


Ilustración 32. Tarjetas 3

6. CONCLUSIONES.

A lo largo del desarrollo de este trabajo se pudo observar la importancia del diseño de tareas para la enseñanza de la Geometría, estas deben tener una secuencia y organización de tal manera que los estudiantes articulen y apliquen lo aprendido antes y avancen en su aprendizaje; además, es necesario pensando en la diversidad que se puede encontrar en el aula, hacer uso de material didáctico que fomente en los estudiantes motivación e interés hacia el aprendizaje.

En el momento en el que se realiza la consulta de diferentes fuentes para recolectar información sobre la definición y congruencia de cuadriláteros se puede observar que en la mayoría de estas la clasificación que presentan está relacionada con el paralelismo de sus lados opuestos, también se encuentra la clasificación de cuadriláteros atendiendo a la congruencia de lados y ángulos. Del mismo se puede observar que la clasificación de paralelogramos está dividida en dos grupos, en el que existe relación entre ellos y el que se relaciona a partir de sus características.

En la planeación de las clases, es útil revisar varias fuentes para tener suficiente insumo para el desarrollo de esta, de tal modo que se tenga claro el que y el cómo se va a enseñar.

Al realizar el pilotaje de las tareas y su respectivo análisis surgieron estas conclusiones:

- Algunas veces, como profesores, obviamos fases como la identificación, que es fundamental para acercar al estudiante al nuevo conocimiento y para que el profesor reconozca el estado del saber de sus estudiantes.
- Para llegar a la fase de explicitación es importante que los estudiantes primero realicen un trabajo individual, donde solos se enfrenten a su conocimiento.
- La fase 3 (explicitación) es muy importante porque a través de, como su nombre lo indica, la explicitación de las ideas y la discusión entre pares, se logra ir afirmando el conocimiento de los estudiantes. Puede ser que un estudiante tenga una idea particular, pero al comunicarla a sus compañeros está se transforma a partir de los saberes de todo el grupo.

- El uso de material didáctico promueve la participación de los estudiantes así como la atención y motivación.
- El profesor se encuentra con un reto constante, lograr que los estudiantes escriban; usualmente los alumnos comunican sus ideas de manera oral pero no tienen el hábito de escribir, les da pereza.

Las conclusiones obtenidas en el pilotaje evidencian que el uso del geoplano en la enseñanza de cuadriláteros y su clasificación, cumplió con los objetivos planteados haciendo al estudiante partícipe en la construcción de su propio conocimiento.

El modelo de Van hiele es útil en la organización de las tareas ya que se genera una secuencia didáctica que permite que el estudiante a través de los niveles y fases del modelo adquiriendo un lenguaje adecuado e interiorizando el tema que se va presentando la definición y clasificación de cuadriláteros.

En algunas ocasiones impartir un tema en la clase de Geometría se ha convertido en una dificultad, olvidándonos que existen diversos materiales que se pueden utilizar para un tema específico, esto se debe a que el número de horas impartidas para la clase de Geometría no generan una continuidad, en donde el estudiante al manipular un material lo va a recordar en el momento que se le pregunte. Esto se pudo observar al realizar este trabajo ya que las sesiones en las cuales se aplicaron las tareas hubo un espacio entre ellos y a pesar de esto lo recordaban con facilidad.

Ahora quedan algunas dudas, ¿Si esta propuesta se aplicara a estudiantes de menor o mayor grado tendría el mismo efecto?, ¿Qué otro material podría haber utilizado en la elaboración de las tareas para la enseñanza de cuadriláteros?

Es importante en el diseño de cualquier tarea tener claro y sustentado teóricamente lo que se quiere enseñar y la manera como se va a hacer para lograr una secuencia útil en el desarrollo del tema.

En el desarrollo del trabajo y aplicación de las tareas pilotaje se puede observar que es necesario en el aula buscar estrategias y métodos que despierten el los estudiantes interés,

motivación y destreza en los diferentes temas, además que el uso acertado del material es de gran ayuda en el proceso de enseñanza de los estudiantes.

El geoplano es un material didáctico útil en la enseñanza de la Geometría ya que permite por la manera en cómo está construido afianzar y obtener mayor comprensión de los contenidos, además despierta el interés de los estudiantes.

En el programa de licenciatura en matemáticas, hay un laboratorio que cuenta con gran cantidad y diversidad de material didáctico, es por eso que se recomienda hacer uso de ellos en las prácticas pedagógicas para que posteriormente estos sean implementados en el quehacer docente.

7. BIBLIOGRAFÍA

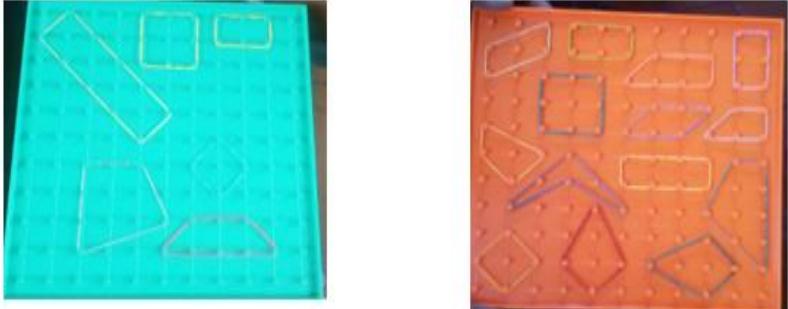
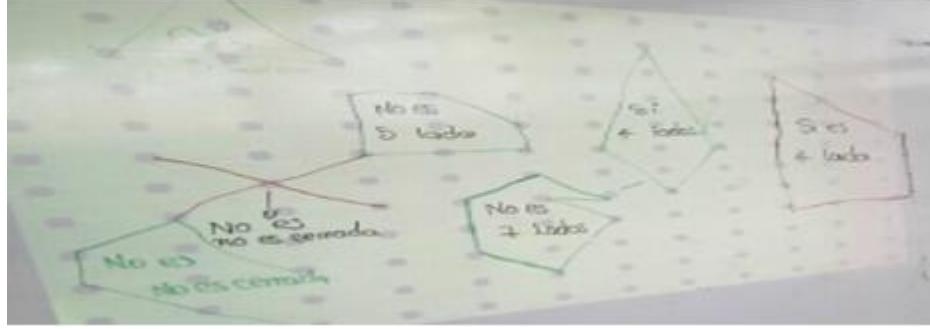
- Alfonso. L. S. (2008). *Matemáticas Segundaria 6*. Grupo sm.
- Aravena, M. Gutiérrez, Á y Jaime, A. (2016). *Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centro de enseñanza vulnerables de Educación Media de Chile*. Enseñanza de las ciencias. Volumen (34).107-128. Recuperado de file:///C:/Users/Autorizado/Downloads/1664-10725-1-PB (3).pdf
- Arraz.J.M.(2004). *Geometría activa*. Recuperado de <http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/indice.html>.
- Baldor. J. A. (1980). *Geometría plana y del espacio con una introducción a la trigonometría*. Codice, S.A.
- Berrio. I. (1994). *Matemática Universal 6*. Bedout Editores S.A.
- Bruño. G. (s.f). *Geometría curso superior*. Recuperado de <https://es.scribd.com/doc/181771408/ELEMENTOS-DE-GEOMETRIA-EDITORIAL-BRUNO-pdf>.
- Clemens, R. Daffer, P. (1998). *Geometría*. Pearson.
- Ditutor (2014). Recuperado de <http://www.ditutor.com/asignaturas/geometria.html>.
- Godino, J y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf.
- Gutiérrez, A.y Fernández, A. (1985): *Actividades con el geoplano para la E.G.B. Colección de Monografías* .Papeles de Enseñanza de la Matemática. Volumen 1. Valencia: E.U. de Profesorado de E.G.B. recuperado de <http://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>.
- Jaime, A., y Gutiérrez, Á. (1990). *Una propuesta de fundamentación para el desarrollo de la geometría: modelo de Van Hiele*. En. S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds). Teoría y práctica en educación matemática (p.295-384).Sevilla:Alfar recuperado de <http://www.uv.es/gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>
- Libro I de los elementos de Euclides. Recuperado de http://newton.matem.unam.mx/geometria/menulibro_m.html.
- López, O. y. García, S.(2008). *La enseñanza de la geometría*. Recuperado de <http://www.inee.edu.mx/mape/themes/TemaInee/Documentos/mapes/geometriacompletoa.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos*. Bogotá D.C.
- Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Addison Wesley Iberoamericana S.A.
- Muñoz. (2014). *Los materiales en el aprendizaje de las matemáticas*. (Tesis de pregrado).Universidad de la Rioja. Recuperado de https://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/TFE000754.pdf

- Perchad. *Sector matemática* (2000). Recuperado de <http://www.sectormatematica.cl/contenidos.htm>
- Profesor en línea (2015). Recuperado de <http://www.profesorenlinea.cl>
- Ramírez, N. (2014). *Estrategia didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientada por el modelo de Van Hiele y geogebra*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín. Recuperada de <file:///C:/Users/Autorizado/Desktop/documentos/44005486.2014.pdf>.
- Saavedra, A.V.(2011). Guía para docentes Matemáticas para pensar. Norma.
- Samper, C. y Molina, O. (2015). *Geometría Plana: Un espacio de aprendizaje*. Universidad Pedagógica Nacional.
- Velázquez. D. (2010). Zona Activa matemáticas 6. Voluntad.

8. ANEXO

Tabla 10. Instrumento análisis de Pilotaje

FASE 1 (Información)	NIVEL 1 (Reconocimiento)
Tarea	Identifica cuadriláteros en una figura
Observaciones del pilotaje	<p>En la pintura de Omar Rayo es posible identificar 4 tipos de cuadriláteros; así Imagen 1:</p> <p>Imagen 1: Cuadriláteros en la pintura de Omar Rayo</p> <p>Los estudiantes identificaron 3 de ellos el 1, 3 y 4. Algunos estudiantes construyeron la figura manteniendo la posición que tiene en la pintura, lo cual puede verse en la Imagen 2.</p> <p>Imagen 2</p>
FASE 2 (Orientación dirigida)	NIVEL 1 (Reconocimiento)
Tarea	Identifica características visuales de cuadriláteros y establece relaciones entre ellos.
Observación pilotaje	Los estudiantes reconocieron y construyeron cuadriláteros, algunos de ellos distintos a los identificados en la tarea anterior. Aunque un estudiante construyó un bumerán (como puede observarse en la Imagen 3), se pudo evidenciar que la mayoría de ellos no reconocen estos cuadriláteros especiales.

	 <p><i>Imagen 3</i></p>
FASE 3 (Explicitación)	NIVEL 1 (Reconocimiento)
Tarea	Expresa de manera oral o escrita la definición y características de cuadriláteros.
Observación pilotaje	<p>A cada uno de los estudiantes se entregó una tarjeta (Imagen 4).</p>  <p><i>Imagen 4. Tarjetas 1</i></p> <p>Después de que cada uno de los estudiantes construyó la figura dada (Imagen 4) en el geoplano, se procedió a hacer la socialización con sus demás compañeros, cada uno de los estudiantes pasó al tablero, mostró a sus compañeros su figura y explicó por qué es o no es cuadrilátero, para ello proyectado en el tablero un geoplano, también se iban dibujando los cuadriláteros sobre el geoplano como se puede observar en la Imagen 5.</p>  <p><i>Imagen 5. Cuadriláteros dibujados por los estudiantes</i></p>

	<p>Luego de lo anterior y de acuerdo a lo presentado por cada uno de los estudiantes, cada uno utiliza un lenguaje diferente para expresar sus ideas de si es o no cuadrilátero, en la Tabla 11 se puede observar algunas de las características presentadas por los estudiantes.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Si es cuadrilátero</th><th>No es cuadrilátero</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td> <ul style="list-style-type: none"> • Por sus cuatro lados • Posee 4 lados • Es cuadrado y tiene 4 lados iguales. </td><td> <ul style="list-style-type: none"> • No es una figura cerrada • Tiene 3 lados. • No cuenta con los cuatro lados necesarios </td></tr> </tbody> </table>	Si es cuadrilátero	No es cuadrilátero	<ul style="list-style-type: none"> • Por sus cuatro lados • Posee 4 lados • Es cuadrado y tiene 4 lados iguales. 	<ul style="list-style-type: none"> • No es una figura cerrada • Tiene 3 lados. • No cuenta con los cuatro lados necesarios
Si es cuadrilátero	No es cuadrilátero				
<ul style="list-style-type: none"> • Por sus cuatro lados • Posee 4 lados • Es cuadrado y tiene 4 lados iguales. 	<ul style="list-style-type: none"> • No es una figura cerrada • Tiene 3 lados. • No cuenta con los cuatro lados necesarios 				
FASE 4 (Orientación libre)	NIVEL 1 (Reconocimiento)				
Tarea	Utiliza la comparación para encontrar características y relaciones de cuadriláteros				
Observación pilotaje	En esta tarea se encontraron diferentes soluciones en el cual los estudiantes copiaron la imagen en el geoplano de tal manera que mantuviera la forma y el tamaño original. En la Imagen 6 se puede observar unas de estas soluciones.				

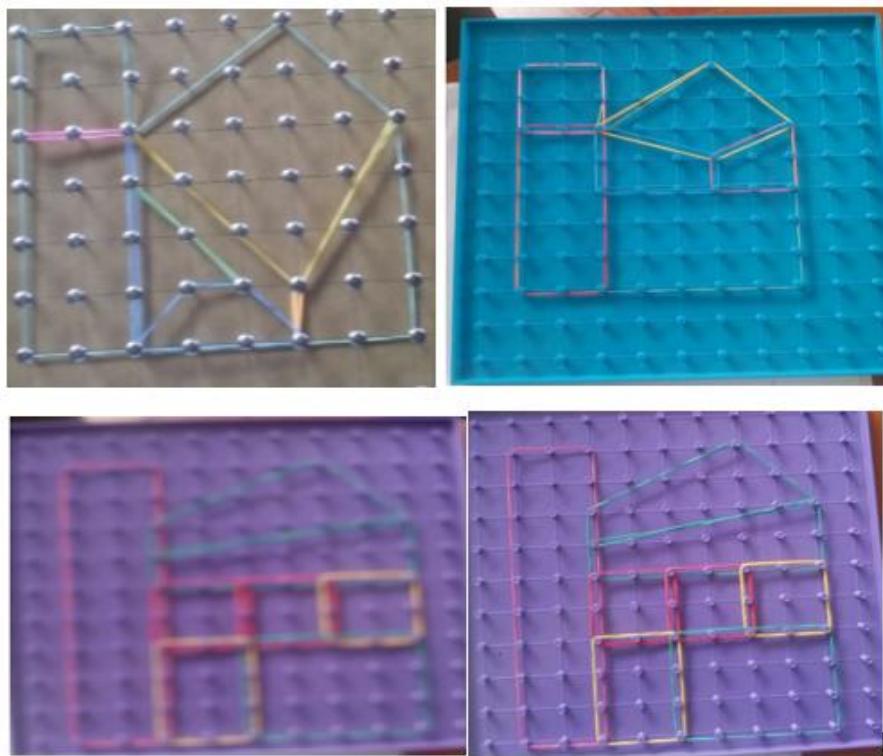


Imagen 6. Algunas soluciones presentadas por los estudiantes a la tarea

Otros estudiantes dieron solución a la tarea pero construyeron figuras que no son cuadriláteros como se puede observar en la Imagen 7.

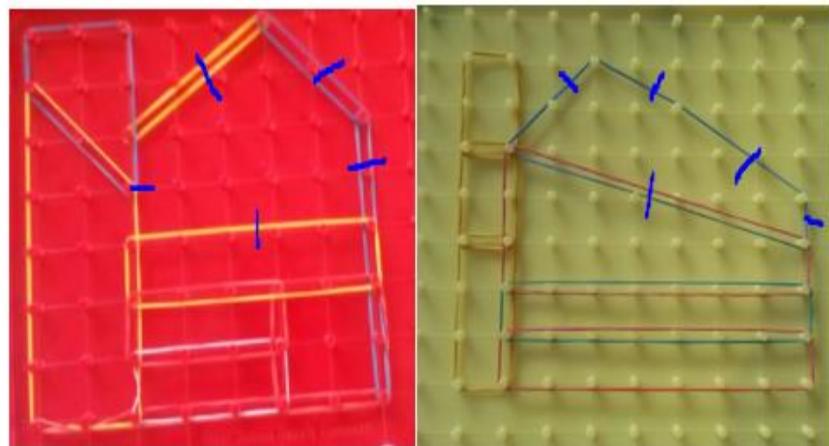
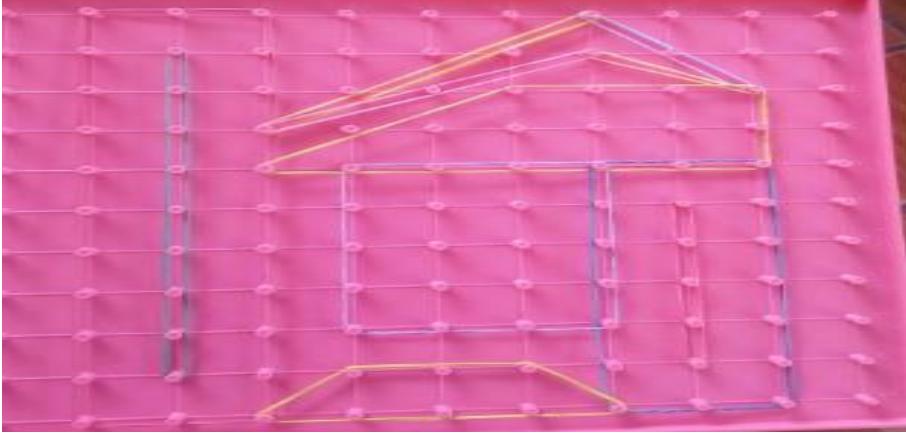
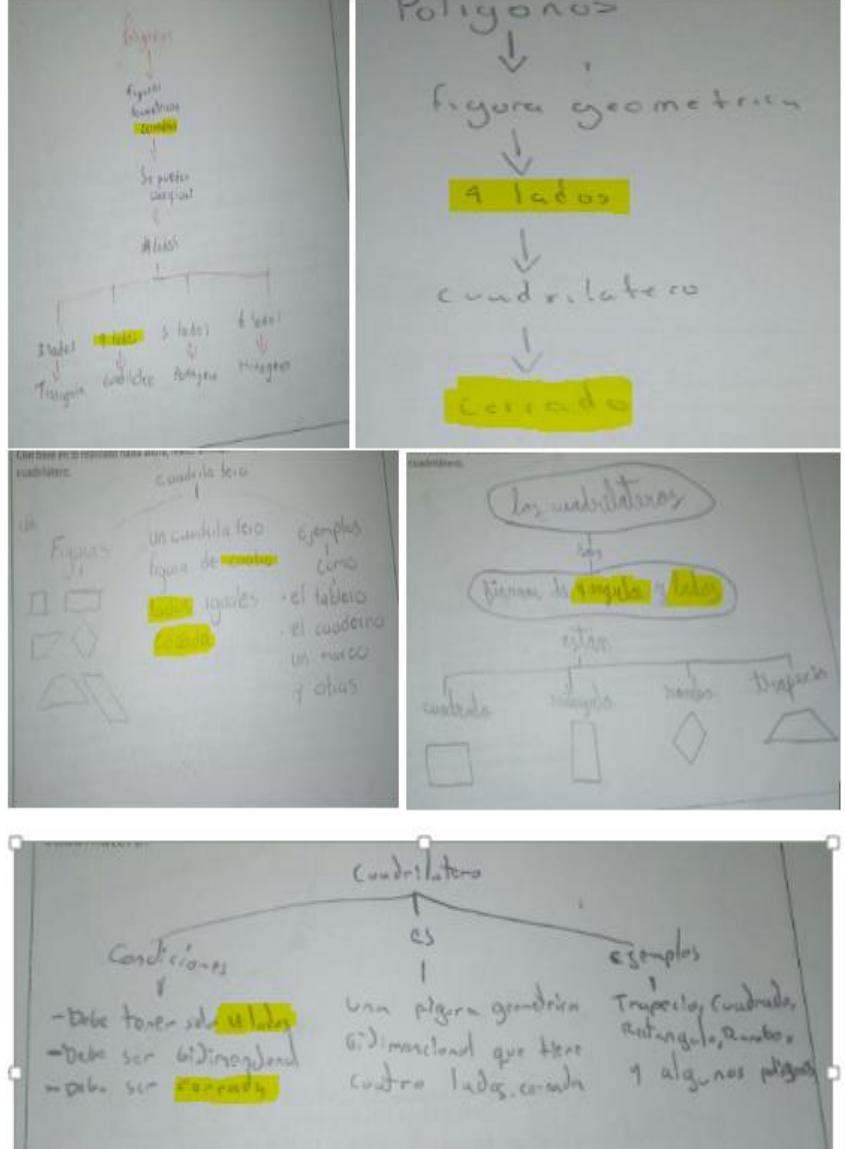


Imagen 7. Solucion a la tarea utilizando figuras no cuadriláteros

Al observar la siguiente solución de alguno de los estudiantes, se intenta reevaluar si en el enunciado no había claridad en el hecho de que la figura quedara completamente cubierta con los cuadriláteros que se pedían.

	 <p>Observando el enunciado de la tarea se evidencia que se utilizó la palabra rellenar con el fin de impedir este tipo de representaciones; no obstante y a pesar de que esta situación no afecta el objetivo de la tarea, se decide modificar la instrucción 2. De la tarea 4 del primer nivel, quedando así:</p> <p>Tésele la figura utilizando cuadriláteros de al menos tres tipos distintos, los cuadriláteros no pueden solaparse, pero sus lados sí pueden compartirse.</p> <p>Finalmente, se considera que la tarea propuesta despierta despertó la creatividad de los estudiantes al utilizar los cuadriláteros reconocidos.</p>
Decisión final	La tarea propuesta cumplió con el objetivo de la fase y nivel, por lo cual, la tarea se mantiene tal cual.
FASE 5 (Integración)	NIVEL 1 (Reconocimiento)
Tarea	Representa de forma específica las características de los cuadriláteros.
Observación pilotaje	Estas son algunos esquemas que los estudiantes realizaron:

	
Decisión final	La tarea propuesta cumplió con el objetivo de la fase y nivel, por lo cual, la tarea se mantiene tal cual.
FASE 1 (Información)	NIVEL 2 (Análisis)
Tarea	Construye cuadrilátero a partir de una unas características dadas.

Observación pilotaje	<p>Luego de entregarle a cada uno de los estudiantes una tarjeta con ciertas características para construyeran en el geoplano, como las que se observan en la Imagen 8.</p>  <p>Imagen 8. Tarjetas 2</p> <p>La mayoría de los estudiantes construyeron de manera correcta la figura que se les entrego algunas de estas se pueden observar en la Imagen 9</p>  <p>Imagen 9. Cuadriláteros construidos.</p> <p>Debido a la construcción cuanta con los siguientes características:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Las filas son paralelas entre si • Las columnas son paralelas entre sí. • Las diagonales son paralelas entre. • Una fila y una columna forman un ángulo recto. • Una diagonal una columna o fila forman un ángulo agudo.
-----------------------------	--

	Se puede observar que los estudiantes utilizan la construcción del geoplano para aplicar diferentes conceptos en la construcción de los cuadriláteros.
Decisión final	La tarea propuesta cumplió con el objetivo de la fase y nivel, por lo cual, la actividad se mantiene tal cual.
FASE 2 (Orientación dirigida)	NIVEL 2 (Análisis)
Tarea	Construye cuadriláteros a partir de uno dado e identifica sus propiedades.
Observación pilotaje	Cada uno de los estudiantes intercambiaron el geoplano con uno de sus compañeros, observaron la construcción realizada y siguiendo las características de la tarjeta construyeron otro cuadrilátero, luego de esto se realizan una comparación en que le entregó su compañero, de tal manera que se complemente, reafirme o corrija el cuadrilátero que cumple con las características dadas.
FASE 3 (explicitación)	Nivel 2 (Análisis)
Tarea	Argumenta de manera empírica sus conclusiones y resultados sobre las características de los geoplanos. (Gutiérrez, 2006)
Observación pilotaje	<p>Se proyectaron diferentes cuadriláteros en el tablero, los estudiantes verificaron que la figura construida coincide con la elaborada por ellos en el geoplano y las características dadas.</p> <p>Por ejemplo se muestra en la Imagen 10 el cuadrilátero que se les mostro numerado con 2, cumple con las características que aparecen en las tres tarjetas.</p>  <p>Imagen 10. Características comunes de cuadriláteros.</p> <p>Se evidencio que los estudiantes reconocen las propiedades de los cuadriláteros y usan lenguaje formal al momento de expresar sus ideas.</p>
FASE 4 (Orientación libre)	NIVEL 2 (Análisis)

Tarea	A partir de lo realizado nombra y define propiedades de los cuadriláteros.
Observación pilotaje	<p>Se observó que los estudiantes dada la figura reconocieron las propiedades del cuadrilátero y utilizan un lenguaje formal al escribir estos conceptos, algunas de estas propiedades se pueden observar en la Imagen 11.</p> <p> <ul style="list-style-type: none"> • $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y \overline{DA} <u>lados del cuadrilátero</u>. • _____ vértices del cuadrilátero. • $\angle DAB, \angle BCD, \angle ABC$ y $\angle CDA$ <u>ángulos del cuadrilátero</u>. • \overline{AB} y \overline{CD}; \overline{BC} y \overline{DA} <u>lados opuestos</u>. • \overline{AB} y \overline{BC}; \overline{BC} y \overline{CD}; \overline{CD} y \overline{DA}; \overline{DA} y \overline{AB} <u>lados consecutivos</u>. • $\angle DAB, \angle BCD, \angle ABC$ y $\angle CDA$ _____. • $\angle DAB$ y $\angle ABC$; $\angle BCD$; $\angle ABC$ y $\angle CDA$ _____. </p>
	<p> <ul style="list-style-type: none"> • $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y \overline{DA} <u>lados del cuadrilátero</u>. • <u>A B C D</u> vértices del cuadrilátero. • $\angle DAB, \angle BCD, \angle ABC$ y $\angle CDA$ <u>ángulos del cuadrilátero</u>. • \overline{AB} y \overline{CD}; \overline{BC} y \overline{DA} <u>lados opuestos del cuadrilátero</u>. • \overline{AB} y \overline{BC}; \overline{BC} y \overline{CD}; \overline{CD} y \overline{DA}; \overline{DA} y \overline{AB} <u>lados consecutivos del cuadrilátero</u>. • $\angle DAB, \angle BCD, \angle ABC$ y $\angle CDA$ <u>ángulos opuestos del cuadrilátero</u>. • $\angle DAB$ y $\angle ABC$; $\angle BCD$; $\angle ABC$ y $\angle CDA$ <u>ángulos consecutivos del cuadrilátero</u>. </p> <p> <input type="checkbox"/> • $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y \overline{DA} <u>lados del cuadrilátero</u>.</p> <p> <input type="checkbox"/> • _____ vértices del cuadrilátero.</p> <p> <input type="checkbox"/> • $\angle DAB, \angle BCD, \angle ABC$ y $\angle CDA$ <u>ángulos del cuadrilátero</u>.</p> <p> <input type="checkbox"/> • \overline{AB} y \overline{CD}; \overline{BC} y \overline{DA} <u>lados opuestos</u>.</p> <p> <input type="checkbox"/> • \overline{AB} y \overline{BC}; \overline{BC} y \overline{CD}; \overline{CD} y \overline{DA}; \overline{DA} y \overline{AB} <u>lados consecutivos</u>.</p> <p> <input type="checkbox"/> • $\angle DAB, \angle BCD, \angle ABC$ y $\angle CDA$ <u>ángulos secutivos</u>.</p> <p> <input type="checkbox"/> • $\angle DAB$ y $\angle ABC$; $\angle BCD$; $\angle ABC$ y $\angle CDA$ <u>ángulos opuestos</u>.</p>
	<p>Imagen 11. Propiedades de los cuadriláteros escritos por los estudiantes</p> <p>Los estudiantes completaron la información y afianzaron lo realizaron en la tarea fase 1, nivel 2, de esta manera utilizaron un lenguaje formal al referirse a los cuadriláteros y las propiedades que los caracterizan.</p>

FASE 5 (Integración)	NIVEL 2 (Análisis)
Tarea	Reconoce propiedades de los cuadriláteros y los identifica dada una figura.

Observación pilotaje	<p>Se observó que los estudiantes luego de realizar las tareas asociados al nivel 2 escriben definiciones para cada una de las propiedades de los cuadriláteros, alguno más elaboradas que otros, en algunos se puede observar en el mundo académico existe pereza en el momento de escribir de tal manera que utilizaron abreviaciones de los diferentes conceptos.</p> <p>Explique en un cuadrilátero que son:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lados opuestos. <i>son lados iguales, NO comparten vértice</i> • Ángulos opuestos. <i>no comparten lados</i> • Lados consecutivos. <i>comparten un lado</i> • Ángulos consecutivos. <i>el unión de sus lados por extremos</i> • Vértices <p>Explique en un cuadrilátero que son:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lados opuestos. <i>lados que no comparten vértice</i> • Ángulos opuestos. <i>ángulos que no comparten lados</i> • Lados consecutivos. <i>lados que comparten vértice</i> • Ángulos consecutivos. <i>ángulos que comparten lado</i> • Vértices <i>unión de los lados</i> <p>Explique en un cuadrilátero que son:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lados opuestos. <i>que no comparten vértice</i> • Ángulos opuestos. <i>que no comparten vértice</i> • Lados consecutivos. <i>que sí comparten vértice</i> • Ángulos consecutivos. <i>que sí comparten vértice</i> • Vértices <i>que comparten un lado</i> <p><i>Imagen 12. Definiciones propiedades de cuadriláteros dada por los estudiantes</i></p>
Decisión final	<p>La tarea propuesta cumplió con el objetivo de la fase y nivel, por lo cual, la actividad se mantiene tal cual.</p>

FASE 1 (Información)	NIVEL 3 (Clasificación)
Tarea	Explica de manera informal una clasificación para los cuadriláteros.

Observación pilotaje	<p>Los estudiantes realizaron diferentes clasificaciones de los cuadriláteros que se proyectaron en el tablero utilizando bandas de colores diferentes, estas son algunas de las clasificaciones hechas por ellos, ver imagen 13. Se puede observar que algunos estudiantes reconocen la clasificación de los cuadriláteros.</p> <p>Los estudiantes clasificaron los cuadriláteros sin tener en cuenta el paralelismo, dicha clasificación la hicieron de acuerdo a su forma sin tener en cuenta el tamaño de los cuadriláteros.</p>  <p><i>Imagen 13. Grupos de cuadriláteros realizados por los estudiantes</i></p>
Decisión final	<p>En el momento en que los estudiantes necesitaron hacer alusión a los cuadriláteros, no existía una referencia para hacerlo, por lo tanto a las imágenes se le colocaron unos números. Así:</p>

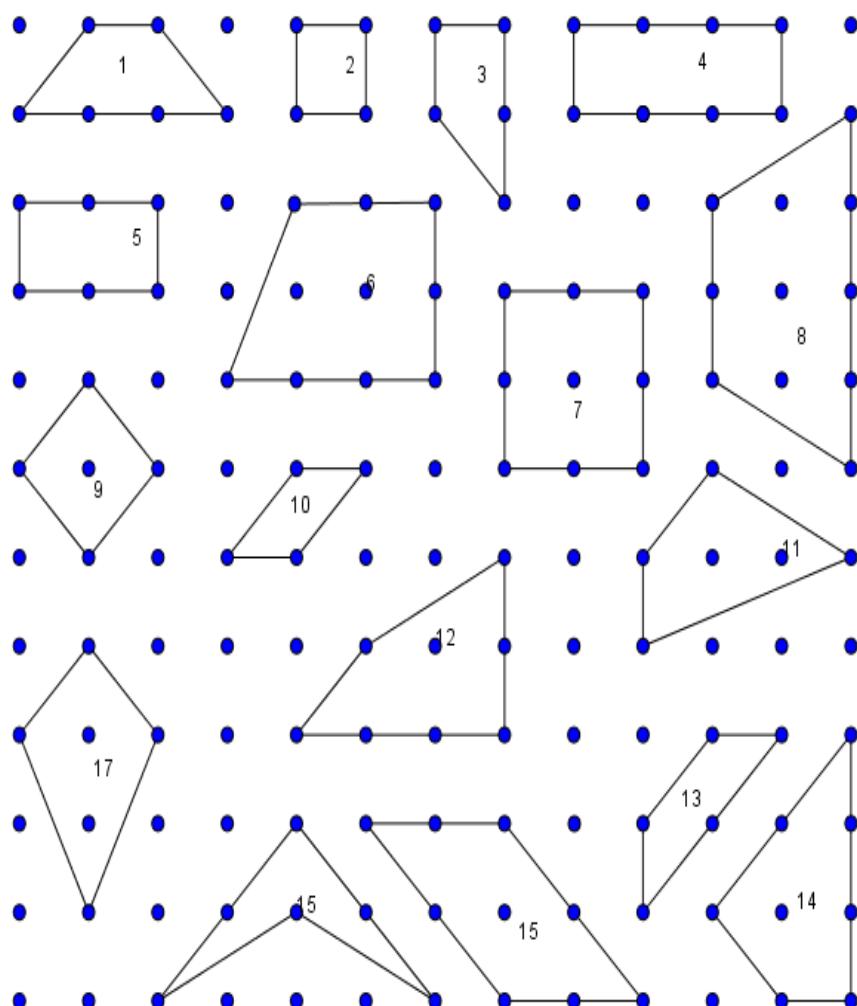
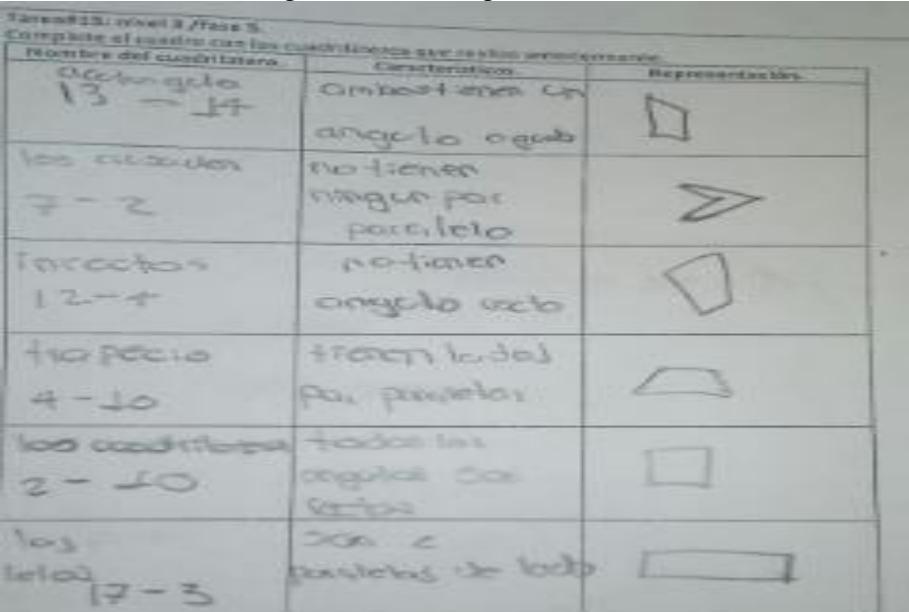


Imagen 14. Cuadriláteros con número

La tarea propuesta cumplió con el objetivo de la fase y nivel, por lo cual, **la tarea se mantiene tal cual.**

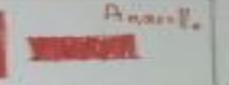
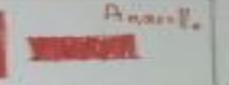
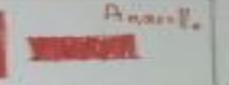
La tarea se mantiene tal cual.	
FASE 2 (Orientación dirigida)	NIVEL 3 (Clasificación)
Tarea	Descubre a partir de la experimentación propiedades de cuadriláteros y demuestra de manera informal a partir de las características.
Observación pilotaje	Cada estudiante construye un cuadrilátero diferente para cada uno de los grupos manteniendo su forma pero variando el tamaño.
FASE 3 (Explicitación)	NIVEL 3 (Clasificación)
Tarea	Es capaz de explicar lo encontrado de manera escrita u oral a través de ideas complejas.

Observación pilotaje	Para esta tarea cada uno de los estudiantes presenta de manera oral a sus compañeros la clasificación realizada. Como resultado se encuentran características de grupos según: <ul style="list-style-type: none"> • El tamaño de sus lados • Tamaño de sus ángulos • Número de lados paralelos.
FASE 4 (Orientación libre)	NIVEL 3 (Clasificación)
Tarea	Establece relaciones y demuestra informalmente las características de cuadriláteros.
Observación pilotaje	
Decisión final	
FASE 5 (Integración)	NIVEL 3 (Clasificación)
Tarea	Resume las diferentes clasificaciones de los cuadriláteros.
Observación pilotaje	Es interesante notar cómo los estudiantes intentan dar nombre a un grupo de cuadriláteros utilizando lo observado y las propiedades de ellos, incluso algunos utilizan nombres que se encuentran virales en las redes sociales. Y lo organizan de la siguiente manera.
	

Tarea 14: nivel 3 / fase 2.		
Completa el cuadro con los cuadrilateros que realizó anteriormente.		
Nombre del cuadrilatero.	Características.	Representación.
Decágonos	Tiene todos los lados iguales.	
Rectángulos	Tiene todos los lados iguales.	
Paralelogramos	Tienen los lados iguales en tamaño de forma.	
rombos	Tienen un solo vértice en tamaño de forma.	
Triángulos	Tienen todos los lados cortados iguales.	

Tarea 15: nivel 3 / fase 5.		
Completa el cuadro con los cuadrilateros que realizó anteriormente.		
Nombre del cuadrilatero.	Características.	Representación.
La Flecha	Todos los vértices iguales opuestos.	

Tarea 15: nivel 3 / fase 5.		
Completa el cuadro con los cuadrilateros que realizó anteriormente.		
Nombre del cuadrilatero.	Características.	Representación.
Simétricos (Rectángulos)	Son cuadriláteros simétricos.	
Todos los lados iguales (Rombos)	Tienen los lados iguales y unívocamente.	
Todos los lados paralelos (Paralelogramos) (Rectángulos)	Tienen los lados paralelos.	
ninguno de los 4 lados ni los 2 vértices son iguales (Triángulos)	No tiene ni lados ni vértices iguales.	

	<p>Tarea 43 Nivel 3 / Tarea 5.</p> <p>Completa el cuadro con los cuadriláteros que realizó anteriormente.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Nombre del cuadrilátero.</th><th>Características.</th><th>Representación.</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Jorge Nitales</td><td>2 lados iguales 2 lados iguales</td><td> Verde</td></tr> <tr> <td>Susana Orta</td><td>Sus Cuatro lados iguales</td><td> Rojo</td></tr> <tr> <td>Dolores del Río</td><td>2 lados iguales 2 lados desiguales</td><td> Amarillo</td></tr> <tr> <td>Era sol de Yepes</td><td>3 lados simétricos 1 asimétrico</td><td> Ceniza</td></tr> <tr> <td>Hola Kace?</td><td>2 lados iguales 2 lados desiguales</td><td> Naranja</td></tr> <tr> <td>Pa' que quiere saber eso?</td><td>2 lados iguales 2 lados desiguales</td><td> Morado</td></tr> </tbody> </table>	Nombre del cuadrilátero.	Características.	Representación.	Jorge Nitales	2 lados iguales 2 lados iguales	 Verde	Susana Orta	Sus Cuatro lados iguales	 Rojo	Dolores del Río	2 lados iguales 2 lados desiguales	 Amarillo	Era sol de Yepes	3 lados simétricos 1 asimétrico	 Ceniza	Hola Kace?	2 lados iguales 2 lados desiguales	 Naranja	Pa' que quiere saber eso?	2 lados iguales 2 lados desiguales	 Morado
Nombre del cuadrilátero.	Características.	Representación.																				
Jorge Nitales	2 lados iguales 2 lados iguales	 Verde																				
Susana Orta	Sus Cuatro lados iguales	 Rojo																				
Dolores del Río	2 lados iguales 2 lados desiguales	 Amarillo																				
Era sol de Yepes	3 lados simétricos 1 asimétrico	 Ceniza																				
Hola Kace?	2 lados iguales 2 lados desiguales	 Naranja																				
Pa' que quiere saber eso?	2 lados iguales 2 lados desiguales	 Morado																				
Decisión final	<p>Por lo observado en el pilotaje es necesario orientar la tarea utilizando nombres reconocidos para todos con un ejemplo, para lograr conclusiones generales y de este modo referirse a un mismo grupo de cuadriláteros. Completando así la siguiente tabla</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Nombre del grupo de cuadriláteros</th><th>Características.</th><th>Representación.</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Cuadrados</td><td>4 lados iguales. 4 ángulos iguales 2 pares de lados opuestos paralelos.</td><td></td></tr> <tr> <td></td><td></td><td></td></tr> <tr> <td></td><td></td><td></td></tr> <tr> <td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table>	Nombre del grupo de cuadriláteros	Características.	Representación.	Cuadrados	4 lados iguales. 4 ángulos iguales 2 pares de lados opuestos paralelos.																
Nombre del grupo de cuadriláteros	Características.	Representación.																				
Cuadrados	4 lados iguales. 4 ángulos iguales 2 pares de lados opuestos paralelos.																					
FASE 1 (Información)	NIVEL 4 (Deducción formal)																					
Tarea	Reconoce cuadriláteros de una figura dada y los reproduce																					

Observación pilotaje

Los estudiantes observan cada una de las figuras las construyen el geoplano y escriben características de cada uno de ellos.

Figura 1



Figura 2



Figura 3



En la siguiente tabla se encuentran resumidas las características para cada uno de los grupos que escribieron los estudiantes:

FIGURA 1

FIGURA 2

FIGURA 3

	<ul style="list-style-type: none"> • Cuadriláteros • Todos sus lados son paralelos. • Figuras cerradas. • Sus lados son paralelos. • Sus lados opuestos son paralelos. • Todos son paralelogramos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Son cuadriláteros. • Todos son trapezios. • Tienen un solo dos lados paralelos. • Un par de lados no es paralelo. 	<ul style="list-style-type: none"> • Todos sus lados son diferentes. • No tiene lados paralelos. • Todos sus ángulos son diferentes. • Los cuadriláteros son deformes. 							
<p>Se puede observar que en las características que presentan en la tabla algunos de los estudiantes son generales para clasificar cada uno de los grupos de acuerdo al paralelismo entre cuadriláteros.</p>										
FASE 2 (orientación dirigida)	<p style="text-align: center;">NIVEL 4 (Deducción formal)</p>									
Tarea	<p>Reconoce la clasificación de cuadriláteros, a partir de unas características dadas.</p>									
Observación pilotaje	<p>Los estudiantes identificaron los cuadriláteros y los clasificaron de la siguiente manera:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;">FIGURA 1</th><th style="text-align: center;">FIGURA 2</th><th style="text-align: center;">FIGURA 3</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td> <ul style="list-style-type: none"> • Cuadrado • rectángulo • rombos • romboideos • paralelogramos • trapezios </td><td> <ul style="list-style-type: none"> • trapezios • trapezios isósceles • trapezios escalenos. • Trapecio cuadrado. </td><td> <ul style="list-style-type: none"> • Son figuras deformes. </td></tr> </tbody> </table>				FIGURA 1	FIGURA 2	FIGURA 3	<ul style="list-style-type: none"> • Cuadrado • rectángulo • rombos • romboideos • paralelogramos • trapezios 	<ul style="list-style-type: none"> • trapezios • trapezios isósceles • trapezios escalenos. • Trapecio cuadrado. 	<ul style="list-style-type: none"> • Son figuras deformes.
FIGURA 1	FIGURA 2	FIGURA 3								
<ul style="list-style-type: none"> • Cuadrado • rectángulo • rombos • romboideos • paralelogramos • trapezios 	<ul style="list-style-type: none"> • trapezios • trapezios isósceles • trapezios escalenos. • Trapecio cuadrado. 	<ul style="list-style-type: none"> • Son figuras deformes. 								
	<p>En el momento en el que se realizó la socialización los estudiantes entran en controversia, complementan sus ideas y llegaron a un acuerdo de clasificación de cuadriláteros, dando nombre a cada uno de los grupos como se muestra en la siguiente imagen.</p>									

	Figura 1: paralelogramos	FIGURA 2: Trapezios	FIGURA 3: Deformes
	<ul style="list-style-type: none"> • cuadrado • rectángulo • rombos • romboideos 	<ul style="list-style-type: none"> • trapezios isósceles • trapezios escalenos. • Trapecio rectángulo. (Trapecio cuadrado) 	<ul style="list-style-type: none"> • Son figuras deformes.
Decisión final	La tarea propuesta cumplió con el objetivo de la fase y nivel, por lo cual, la tarea se mantiene tal cual.		
FASE 3 (Explicitación)	NIVEL 4 (Deducción formal)		
Tarea	Presenta por escrito y oralmente características y clasificación de los cuadriláteros usando lenguaje formal.		
Observación pilotaje	La tarea se realizó en grupos de 4 personas en donde se obtiene los siguientes resultados, se puede observar que la idea de geoplano se mantiene utilizado en el papel.		
Decisión final	La tarea propuesta cumplió con el objetivo de la fase y nivel, por lo cual, la tarea se mantiene tal cual.		
FASE 4 (Orientación libre)	NIVEL 4 (Deducción formal)		
Tarea	Establece relaciones y demuestra formalmente la clasificación de cuadriláteros.		
Observación pilotaje	Los estudiantes hacen uso de su creatividad construyendo figuras diferentes de manera libre, siguiendo las pautas y las condiciones para esto.		
Decisión final	La tarea propuesta cumplió con el objetivo de la fase y nivel, por lo cual, la tarea se mantiene tal cual.		
FASE 5 (Integración)	NIVEL 4 (Deducción formal)		
Tarea	Elabora un resumen sobre clasificación de cuadriláteros		

Observación pilotaje	
Decisión final	