Comentarios sobre la relación de divisibilidad y el diagrama de Hasse asociado a los divisores de un número.

Nancy Esperanza Zainea Maya

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

2019

Comentarios sobre la relación de divisibilidad y el diagrama de Hasse asociado a los divisores de un número

Nancy Esperanza Zainea Maya

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

Licenciatura en Matemáticas

Director(a):

Gil Alberto de Jesús Donado Nuñez

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

2019

Agradecimientos

A Carlos Zainea, Esperanza Maya, Andrea Zainea, Jorge Zainea, Julio Zainea e Isaac Zainea, mi familia, que siempre estuvieron ahí apoyándome y animándome.

A Alberto Donado por su acompañamiento, por sus críticas que fueron muy importantes para el desarrollo del trabajo.

A Angela Ariza, Angela Esteban (Angelas al cuadrado), Jefferson Salazar y Michael Cardozo, mis grandes amigos, que muchas veces me sacaron de ese averno de emociones y me animaron en cada momento.

1. Información general	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Título del documento	Comenarios sobre la relación de divisibilidad y el diagrama de Hasse asociado a los divisores de un número.
Autor(es)	Zainea Maya, Nancy Esperanza
Director	Donado Núñez, Gil Alberto de Jesús
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2019, 71p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Clavez	RELACIÓN DE EQUIVALENCIA; POSETS; DIVISIBILIDAD; RETÍCULOS; DIAGRAMA DE HASSE.

2. Descripción

Este trabajo, presenta algunas características comunes de los diagramas de Hasse asociados al conjunto de los divisores de un $n \in \mathbb{N}^*$, que se hallaron por medio de la exploración de cada uno de los distintos tipos de diagramas y se determinan las clases de cada $k \in \mathbb{N}^*$.
Por otra parte, se determina la cantidad de los niveles de algunos diagramas y la de que hay en cada uno de los niveles.

3. Fuentes

ABELLANAS, M. & LODARES, D. (1990), *Matemática discreta.* Marcrobit Corporation,Miami - Florida.

ACOSTA, L. (2016) *Temas de teoría de retículos.* Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

CUBILLOS, A. (2017). *Entropía algebraica de un poset.* Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

JIMÉNEZ, R.,GORDILLO, E. Y RUBIANO, G. (2004). *Teoría de números para. principiantes.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

MUÑOZ, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos.* Universidad Nacional de Colombia, sede de Bogotá.

PETTOFREZZO, A. Y BYRKIT, D. (1972). *Introducción a la teoría de númerios.* España: Ediciones del Castillo, S.A.

SORA, A. Y PACHECO, D. (2013). *Particiones y composiciones de números multi-. partidos.* II Encuentro Interncional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática, 2013. Universidad Pedagógica y Tecnología de Colombia.

VÁCLAV, P. (2015). *Quantum Hilbert Hotel.* Phys. Rev. Lett. DOI:10.1103/Phys RevLett.115.160505.

ZALAMEA,F. (2007). *Fundamentos de matemáticas.* Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.

4. Contenidos

El documento cuenta con 4 capítulos. En el primer capítulo se establece unos conceptos premilinares que son necesarios para el desarrollo del trabajo, como definiciones y teoremas. En el segundo capítulo, se le asocia a cada uno de los distintos tipos de conjuntos de divisores de $n \in \mathbb{N}^*$ un diagrama de Hasse, se establece una relación de equivalencia , algunas clases de equivalencia y un paralelo del hotel ínfinito de Hilbert. En el tercer capítulo, características de la cantidad de niveles y la cantidad de elementos que hay en cada uno de los niveles de los diferentes diagramas y en el cuarto, capítulo, se presenta proyecciones del trabajo.

5. Metodología

Se presentará las etapas más importantes para el desarrollo del trabajo de grado:

1. Consulta acerca de los conceptos premilitares: relaciones, posets, retículos, diagramas de Hasse y divisibilidad en el conjunto de los números naturales.

2. Determinar un paso a paso para la construcción de los diagramas de Hasse.

3. Asociar un diagrama de Hasse para los conjuntos $D(p^\alpha), D(p^\alpha q^\beta), D(p^\alpha q^\beta r^\gamma)$ y $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\phi)$, donde p, q, r, s primos y $\alpha, \beta, \gamma, \phi \in \mathbb{N}^*$.

4. Asociar los diagramas con el segmento, paralelogramo, prisma o el hipercubo propuesto por Bragdon.

5. Se definió una relación de equivalencia usando los diagramas de Hasse y se estudió la clase de equivalencia de la relación encontrada sobre el conjunto de los $\mathbb{N}^*$.

6. Con las clases de equivalencia, se hizo una asociación con la paradoja del Hotel Infinito de Hilbert y se realizó un paralelo a la paradoja.

7. Se encontró una relación que hay entre la cantidad de niveles y la cantidad de elementos que hay por niveles con los exponentes α, β, γ y ϕ.

6. Conclusiones

Se estudió los diagramas de Hasse correspondientes de algunos conjuntos de los divisores de un número natural distinto de 0, en particular $p^\alpha, p^\alpha q^\beta, p^\alpha q^\beta r^\gamma$ y $p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\phi$, donde p, q, r, s son primos y $\alpha, \beta, \gamma, \phi$ son números naturales distintos de 0. La representación de los diagramas es mediante la cantidad de primos distintos y los exponentes de los números estos, además se asocian con segmentos, paralelogramos, primas e hipercubos. Por otra parte, se determinó una relación de equivalencia sobre los diagramas, de tal manera que al superponerse los diagramas coincidan.

Se realizó un paralelo de la paradoja del Hotel Infinito de Hilbert, ubicando algunos turistas del hotel a los buses usando un distintivo con los diagramas de Hasse estudiados.

Por último, se encontró algunas características comunes de los distintos tipos de diagramas, sobre la cantidad de niveles y la cantidad de elementos que hay por cada uno de ellos.

Elaborado por:	Zainea Maya, Nancy Esperanza
Revisado por:	Donado Núñez, Gil Alberto de Jesús

Fecha de elaboración del resúmen:	12 - 11 - 2019

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: **""**, elaborado por la estudiante:

Nancy Esperanza Zainea Maya código 2015240089 y cédula 1031162736.

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **41** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna X Meritoria ___ Laureada ___

En constancia se firma a los doce (12) días del mes de marzo de 2020.

Director del Trabajo: Profesor ______________________
ALBERTO DONADO NUÑEZ

Jurado:
Profesor ______________________
LUIS GUAYAMBUCO QUINTERO

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

INTRODUCCIÓN

Considerando el conjunto de los divisores de un número $n \in \mathbb{N}^*$ y la relación de divisibilidad cumple ciertas propiedades para que sea de equivalencia, se representa los respectivos diagramas de Hasse. Se pretende en el siguiente trabajo determinar algunas características comunes de las representación de los diagramas.

En el capítulo 1, teniendo como referencia a Sora (2012) y Rubiano (2004) se usa conceptos de diagramas de Hasse y de divisibilidad en el conjunto de los números naturales, teniendo en cuenta las definiciones y ejemplos de relaciones, posets, diagramas de Hasse y retículos. Por otra parte, se da un paso a paso de la construcción de un diagrama de Hasse.

En el capítulo 2, se asocia el conjunto de los divisores de un número natural con los diagramas de Hasse y se determinan unas características comunes de cada uno de los conjuntos y los respectivos diagramas. Luego, se determina una relación de equivalencia sobre los diagramas generados y algunas clases de equivalencia de estos.

En el capítulo 3, se hace un estudio de la cantidad de niveles que tiene cada tipo distinto de los diagramas y el conteo de elementos que hay en cada uno de los niveles de los diferentes tipos de diagramas de Hasse del conjunto de los divisores de un número natural.

Por último, se realizan cierta conclusiones y proyecciones del trabajo.

OBJETIVOS

Objetivo General

Estudiar la relación de equivalencia definida sobre los naturales a partir de los diagramas que forman los divisores de un número y encontrar características de los mismos.

Objetivos Específicos

- Estudiar relación de divisibilidad en el conjunto de los números naturales.
- Identificar para cada número natural la representación en diagrama de Hasse de sus divisores.
- Identificar los números que tienen el mismo diagrama.
- Encontrar propiedades que tiene cada tipo distinto de diagrama y/o características comunes a todos.
- Identificar las clases de equivalencia de la relación.

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS PRELIMINARES

1.1. Relaciones

En este trabajo se pretende presentar algunas características de un conjunto ordenado usando diagramas, para ello se presenta algunas definiciones, características y representaciones. La primera parte del capítulo se establece la definición de relación, tipos de relación y ejemplos. Luego, algunas representaciones de Posets, diagramas de Hasse y retículos.

Definición 1 *Sean A y B dos conjuntos. El producto cartesiano de A y B es el conjunto de las parejas ordenadas $A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$, entonces la relación R de A en B es el subconjunto de $A \times B$.*

Si $R \subseteq A \times B$ y $(a,b) \in R$, se dice que a esta relacionado con b por medio de la relación R y se escribe aRb, es decir, $(a,b) \in R$ si y sólo si aRb.

Ejemplo 1 Si $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{1,2\}$. El conjunto $R = \{(a,1),(a,2),(b,2)\}$ es una relación de A en B, donde $aR1, aR2$ y $bR2$.

Las siguientes definiciones son tomadas de Abellanas y Lodares (1990).

Sea R una relación en un conjunto A.

Definición 2 *Se dice que R es reflexiva si y sólo si, todo elemento de A está relacionado con el mismo.* $(\forall a)(a \in A \to aRa)$.

Definición 3 *Se dice que R es simétrica si y sólo si, a relacionado con b implica que b relacionado con a.* $(\forall a)(\forall b)(a, b \in A \wedge aRb \to bRa)$.

Definición 4 *Se dice que R es antisimétrica si y sólo si, a relacionado con b y b relacionado con a, implica que a es igual a b.* $(\forall a)(\forall b)(a, b \in A \wedge aRb \wedge bRa \to a = b)$.

Definición 5 *Se dice que R es transitiva si y sólo si, a relacionado con b y b relacionado con c, implica que a relacionado con c.* $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a, b, c \in A \wedge aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Definición 6 *Una relación R definida en un conjunto no vacío A es de equivalencia, si y soló si, cumple la propiedad reflexiva, transitiva y simétrica.*

Definición 7 *Una relación R definida en un conjunto no vacío A es de orden, si y soló si, cumple la propiedad reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

Los conjuntos que cumplen la relación de orden se conocen como conjuntos ordenados.

Un ejemplo de conjunto ordenado es:

Ejemplo 2 Sea la relación $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c)\}$ sobre el conjunto $A = \{a, b, c\}$, entonces R es una relación de orden.

1. La relación R es reflexiva, ya que están las parejas $(a, a), (b, b), (c, c)$, para todo elemento de A.

2. La relación R es antisimétrica, ya que para todo elemento del conjunto A, se muestra $(a, a), (b, b), (c, c)$, luego $a = a, b = b$ y $c = c$.

3. La relación R es transitiva porque para todo elemento del conjunto A:

- Las parejas (a, a) y (a, a), implica que (a, a) está en la relación.
- Las parejas (b, b) y (b, b), implica que (b, b) está en la relación.
- Las parejas (c, c) y (c, c), implica que (c, c) está en la relación.
- Las parejas (a, a) y (a, c), implica que (a, c) está en la relación.

Por tanto, la relación R sobre el conjunto A es una relación de orden.

Por otra parte, sea R es una relación de orden en A; un subconjunto B de A se llama *totalmente ordenado* por R, si

$$(\forall x, y \in B)[(xRy) \vee (yRx)]$$

es decir, si todos sus elementos son comparables mediante R (Muñoz, 2002).

1.2. Posets

Sea $\mathcal{P} \neq \emptyset$ un conjunto y $\leq$ una relación sobre $\mathcal{P}$. Decimos que la pareja $(\mathcal{P}, \leq)$ es un poset si la relación $\leq$ es de orden (Cubillos, 2017).

Existen dos tipos de posets finitos e infinitos.

Ejemplo 3 Dos ejemplos de posets son:

i. Si $X = \{a, b\}$ y $P(x) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\}$ con la relación $\subseteq$ es un poset. En realidad para cualquier X, $P(X)$ es un poset.

ii. $(\mathbb{R}, \leq)$ es un poset.

Los posets finitos se pueden representar gráficamente en un sistema de puntos y flechas, donde cada punto representa un elemento, las flechas indican la relación que hay entre cada uno de los elementos (Cubillos, 2017). La representación debe cumplir lo siguiente:

1. A cada punto se le asocia un elemento del conjunto $\mathcal{P}$.

2. Si $a, b \in \mathcal{P}$, $a < b$ y no existe un $c \in \mathcal{P}$, tal que $a < c < b$ se le asigna una flecha que conecta los puntos que están asociados los elementos a, b.

3. Si $a < b$, entonces el punto que está asociado al elemento a está debajo al punto que está asociado con el elemento b.

4. El punto que está asociado con z no pertenece a la flecha que conecta con los puntos asociados con los elementos a y b, si $z \neq a$ y $z \neq b$ [1].

La representación gráfica que cumple las 4 condiciones anteriores son llamados diagramas de Hasse del poset $\mathcal{P}$.

1.3. Diagramas de Hasse

Los pasos que debe seguir para construir un diagrama de Hasse de la relación de orden R sobre un conjunto A son los siguientes:

1. Ubicar en una fila los elementos del conjunto A, donde cada elemento representa un punto en el plano.

2. Dado relación ordenada R, se usa flechas para relacionar todos los elementos.

[1]Según Sora, A.(2012), en el trabajo de *Particiones restringidas de orden superior*. Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá establece ciertas reglas para la construcción de la representación gráfica de un Poset

3. Como R cumple la propiedad reflexiva, cada elemento que tiene flechas dirigidas a si mismo, se suprimirán.

4. Se suprime flechas que estén repetidas, de tal manera que exista soló un camino en cada una de las relaciones, debido a que la relación es transitiva.

5. Ubicar los elementos por niveles[2], respetando la flechas que se habian establecido anteriormente. En el primer nivel está el que no tiene flechas guiadas a ese elementos, en el segundo nivel los que tienen solo una flecha en ese elemento, en el tercero los que tienen dos flechas para llegar a ese elemento y así sucesivamente.

6. Se reemplazan las flechas por segmentos.

Ejemplo 4 Se representan con palitos los dígitos del 0 al 9, como se muestra en la siguiente figura:

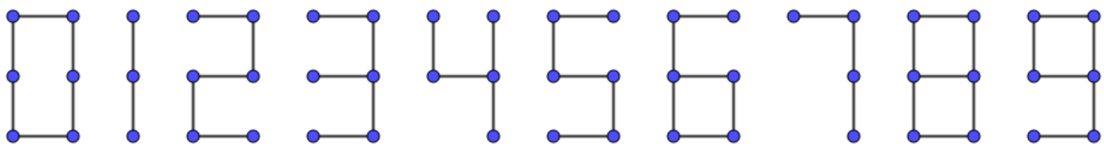


Figura 1.1: Dígitos del 0 al 9

Se observar que la cantidad de palitos del 0 son 6, 1 son 2 palitos, 2 son 5 palitos, 3 son 5 palitos, 4 son 4 palitos, 5 son 5 palitos, 6 son 6 palitos, 7 son 3 palitos, 8 son 7 palitos y 9 son 6 palitos. Teniendo en cuenta lo anterior se va a construir el diagrama de Hasse de la siguiente relación:

Sea $A = \{1, 7, 2, 5, 17, 9, 0, 6\}$ y $a, b \in A$. Sea aRb si y sólo si:

i. La cantidad de palitos de a es menor o igual a la cantidad de palitos de b.

ii. Si $a \neq b$ y tienen la misma cantidad de palitos, entonces $a \not R b$.

[2] Nivel de un diagrama de Hasse se define como el número de filas del diagrama

Paso 1 Se ubicarán los elementos del conjunto A en fila, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 1.2: Elementos en fila

Paso 2 El número 1 se relaciona con todos los elementos del conjunto, luego las flechas negras representan las relaciones de 1 con todos los elementos; el 7 se relaciona con $2, 7, 5, 17, 9, 0, 6$ y se representa con flechas rosadas; el 2 se relaciona con $2, 9, 0, 6$ y se representa con flechas rojas; el 5 con $5, 9, 0, 6$ y se representa con flechas verdes; el 17 con $17, 9, 0, 6$ y se representa con las flechas azules; el 9 se relaciona con 9 y se representa con una flecha morada; el 0 se relaciona con 0 y se representa con una flecha amarilla; por último el 6 se relaciona con 6 y se representa con una flecha café.

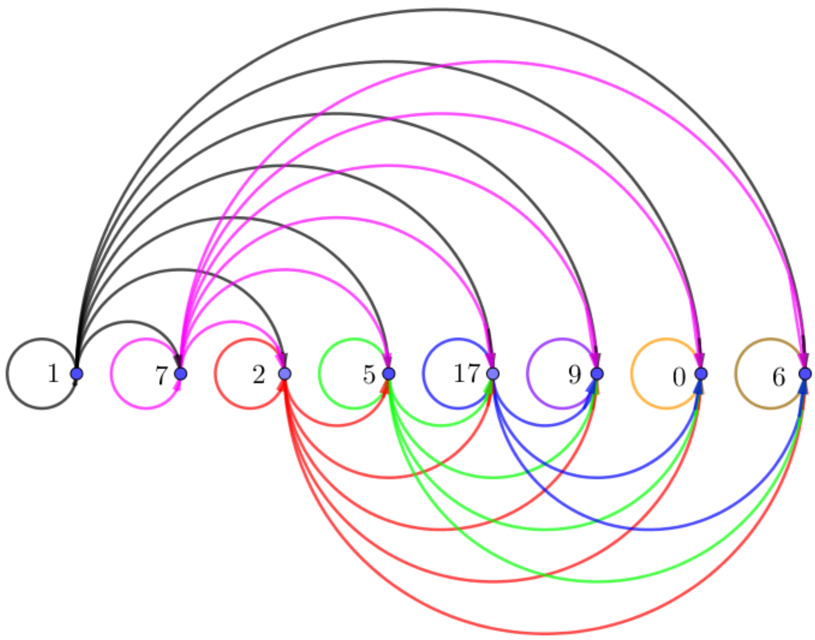


Figura 1.3: Relaciones entre elementos

Paso 3 Se eliminarán las flechas que representa la propiedad reflexiva en el conjunto A, es decir, las flechas que representan la relación de mismo elemento.

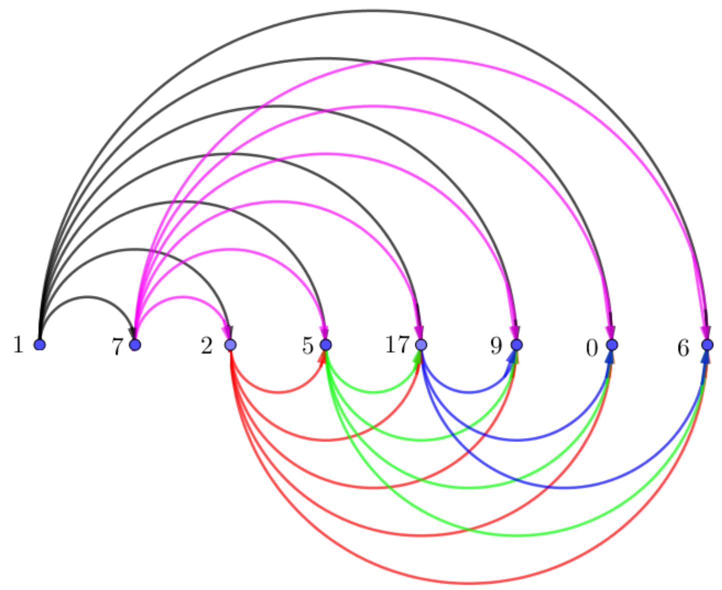


Figura 1.4: Relaciones entre los elementos, suprimiendo las flechas de la propiedad reflexiva

Paso 4 Se eliminarán las flechas que estén repetidas para que exista solo un camino.

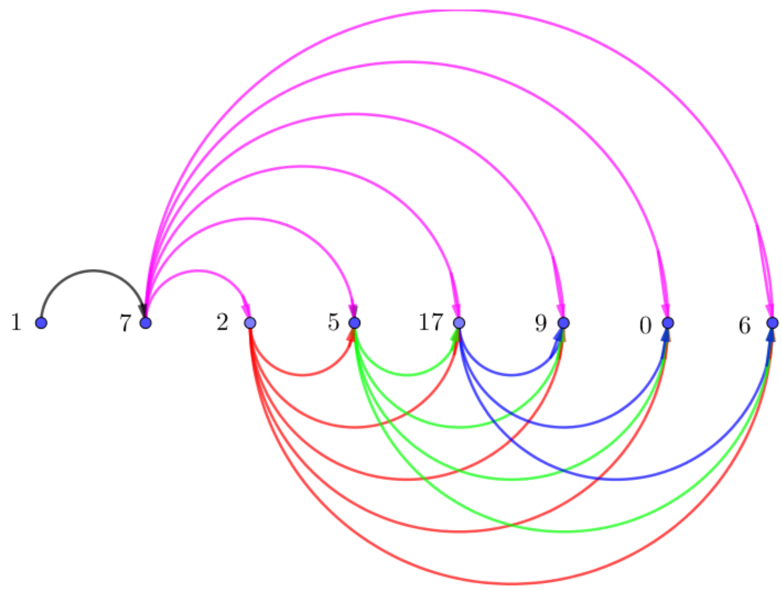


Figura 1.5: Relaciones entre los elementos, suprimiendo las flechas de la propiedad transitiva

Paso 5 Se ubican los elementos por niveles, en el primer nivel se encuentra el 1 porque no hay flechas guiadas a ese elemento; en el nivel 2 se ubica el 7 porque solo hay un camino guiado desde el uno hasta este por una flecha; en el nivel 3 se ubica el 2, 5 y 17 porque hay un camino desde el uno hasta cada uno de ellos de dos flechas ; en el nivel 4 se ubica el 9, 0 y 6 porque para cada elementos existen tres caminos de tres flechas guiados desde el uno hasta cada uno de ellos.

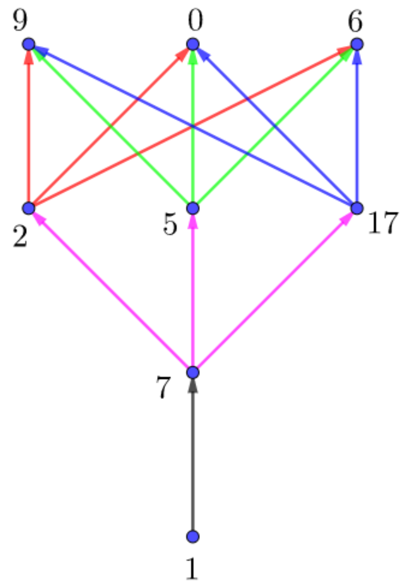


Figura 1.6: Elementos ubicados por niveles.

Paso 6 Se reemplaza cada unas de las flechas por segmentos.

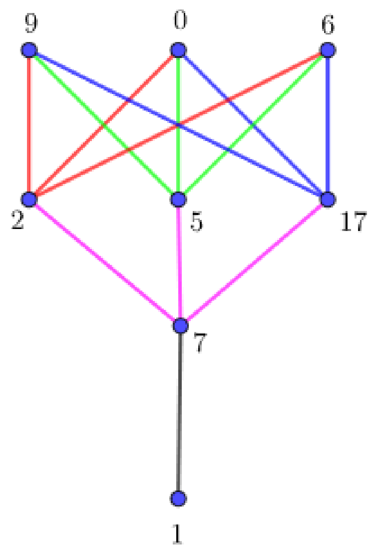


Figura 1.7: Diagrama de Hasse de la relación R sobre el conjunto A

1.4. Retículos

Un retículo es un conjunto ordenado no vacío en el cual todo par de elementos tiene extremo superior y extremo inferior (Acosta, 2016).

Ejemplo 5 Sea $X = \{a, b, c\}$ y $P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$, entonces $(P(X), \subseteq)$ es un retículo. El extremo inferior de $\{A, B\}$ es $A \cap B$ y el extremo superior de $\{A, B\}$ es $A \cup B$.

El diagrama de Hasse asociado al retículo es:

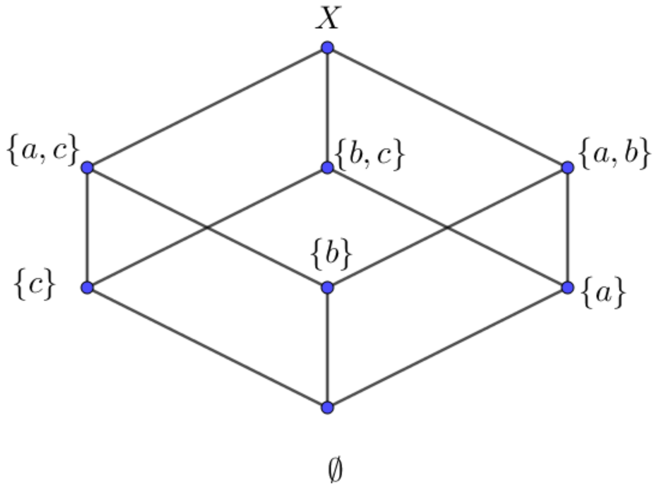


Figura 1.8: Retículo $(P(X), \subseteq)$

Se observa que en la figura 1.7 cada par de elementos tiene extremo superior y extremo inferior, por ejemplo, $\{a, c\} \cap \{b, c\} = \{c\}$ y $\{a, c\} \cup \{b, c\} = X$.

El ejemplo 4 presentado en el apartado 1.3 no genera un retículo, porque no hay $sup\{9, 0\}$, $sup\{6, 0\}$ o $sup\{9, 6\}$.

CAPÍTULO 2

DIAGRAMAS DE HASSE ASOCIADO A LOS DIVISORES

Este capítulo inicia con la noción de divisibilidad en los naturales y la relación que hay entre los posets, diagramas de Hasse y retículos, cabe resaltar que el trabajo se centra en el conjunto de los números naturales.

2.1. Conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$)

La siguiente definición y proposiciones son tomadas de Rubiano, Gordillo y Jiménez (2004).

Definición 8 Sean a, b números enteros con a diferente de 0. Decimos que a divide a b si existe un entero c tal que $b = ac$, es decir, a es divisor de b.

En el libro *Teoría de números para principiantes* se define la divisibilidad para el conjunto de números enteros, pero como se mencionó anteriormente el trabajo se centra para el conjunto de los números naturales.

Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces cumplen las siguientes proposiciones:

i. Si $a \neq 0$, entonces $a|0$ y $a|a$.

ii. $1|a$

iii. Si $a|b$, entonces $a|bc$.

iv. Si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.

v. Si $a|b$ y $b|a$ entonces $a = b$.

Se prueba que la relación de divisibilidad en el conjunto de los números naturales es una relación de orden.

Teorema 1 Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y $a|b$ si existe un $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = ac$, entonces $|$ es una relación de orden.

Prueba: Sea $a \in \mathbb{N}$, como existe $1 \in \mathbb{N}$ tal que $a = a(1) = (1)a$, por la propiedad modulativa y conmutativa en los naturales, entonces la relación $|$ es reflexiva.

Ahora, sean a, b y $c \in \mathbb{N}$, existen $t, s \in \mathbb{N}$ tal que $b = at$ y $c = bs$, luego por sustitución se tiene que $c = (at)s$, por asociativa de la multiplicación en el conjunto de los números naturales, se tiene que $c = a(ts)$, como $ts \in \mathbb{N}$, entonces $a|c$, por tanto la relación $|$ es transitiva.

Por último, sean $a, b \in \mathbb{N}$, donde existe un $t, s \in \mathbb{N}$, tal que $b = at$ y $a = bs$, por sustitución se obtiene que $a = (at)s$, luego por asociativa de la multiplicación en el conjunto de los números naturales, se muestra que $a = a(ts)$, luego $ts = 1$ y $t = s = 1$, por tanto, se reemplaza t y s respectivamente. Ahora $b = a(1)$ y $b = a$, entonces la relación $|$ es antisimétrica.

Luego, la relación es reflexiva, transitiva y antisimétrica, entonces la relación es una relación de orden.

Se le asocia un diagrama de Hasse a la relación de divisibilidad sobre un subconjunto de los números naturales. A continuación, se presenta una sección del diagrama de Hasse.

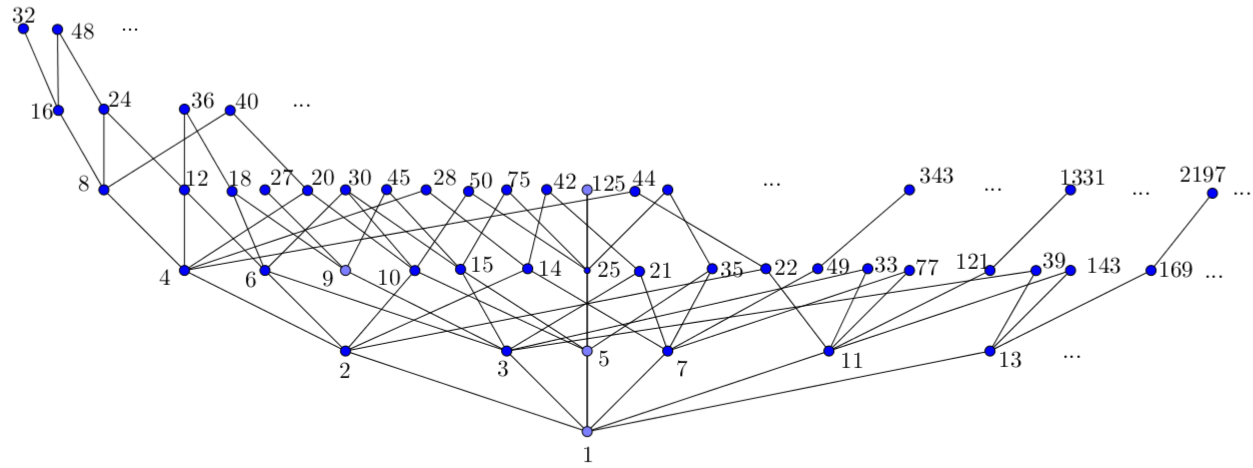


Figura 2.1: Diagrama de divisibilidad para el conjunto de los $\mathbb{N}$

En esta primera parte se va a presentar los diagramas para los casos donde n es igual a $p^{\alpha}, p^{\alpha}q^{\beta}, p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}$ y $p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\phi}$, donde p, q, r, s son números primos y $\alpha, \beta, \gamma, \phi \in \mathbb{N}^*$.

2.2. Conjunto $D(p^{\alpha})$

Para $n = p^{\alpha}$ se determina los divisores y se representa en un diagrama de Hasse.

Ejemplo 6 Considere el conjunto $D(2^5)$ y la relación de divisibilidad R.

- Si $n = 2^5$ entonces $D(2^5) = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.
- Se representa los elementos del conjunto $D(2^5)$ menos el 1, como descomposición prima, es decir, $2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4$ y $32 = 2^5$.
- Considerando el conjunto $D(2^5)$ y la relación R, se construye el diagrama de Hasse (Ver Figura 2.1).

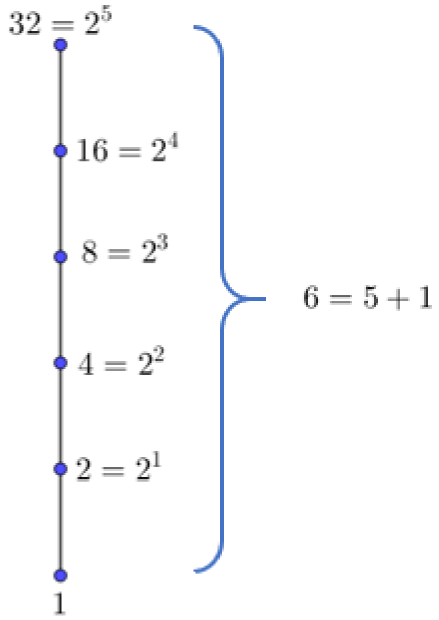


Figura 2.2: Diagrama de Hasse para $D(2^5)$

Se evidencia en la Figura 2.2 que a cada punto se le asigna un elemento del conjunto $D(32)$, el primer punto es el 1,el segundo es $2 = 2^1$, el tercero es $4 = 2^2$, el cuarto es $8 = 2^3$, el quinto es $16 = 2^4$ y el sexto es $32 = 2^5$; respetando la relación de divisibilidad para construir el diagrama de Hasse. Luego la cantidad de divisores que tiene el conjunto es la misma cantidad de puntos que tiene cada el diagrama, es decir, la cantidad de elementos del conjunto $D(32)$ es igual a 6 y la cantidad de puntos es igual a 6. El exponente de la descomposición prima es 5, para determinar la cantidad de divisores se le suma uno al 5, $6 = 5 + 1$.

Los elementos del conjunto $D(p^\alpha)$, donde p es un número primo y $\alpha \in \mathbb{N}^*$ son:

$$D(p^\alpha) = \{1, p, p^2, p^3, ..., p^{\alpha-2}, p^{\alpha-1}, p^\alpha\}$$

El diagrama de Hasse correspondiente al conjunto de $D(p^\alpha)$ es

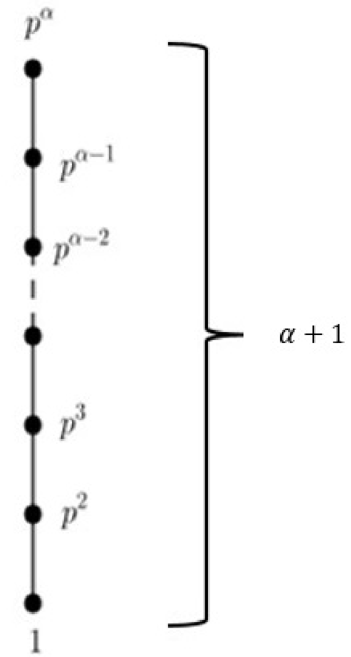


Figura 2.3: Diagrama de Hasse para $D(p^\alpha)$

Se muestra que se cumple la relación de divisibilidad, p^α es el supremo de todos los elementos del conjunto $D(p^\alpha)$ y 1 es el ínfimo de todos los elementos del conjunto $D(p^\alpha)$, como tiene ínfimo y supremo el diagrama de Hasse es un retículo

Cualquier diagrama del poset $D(p^\alpha)$ se identifica en el diagrama de Hasse de la Figura 2.1, como se muestra a continuación:

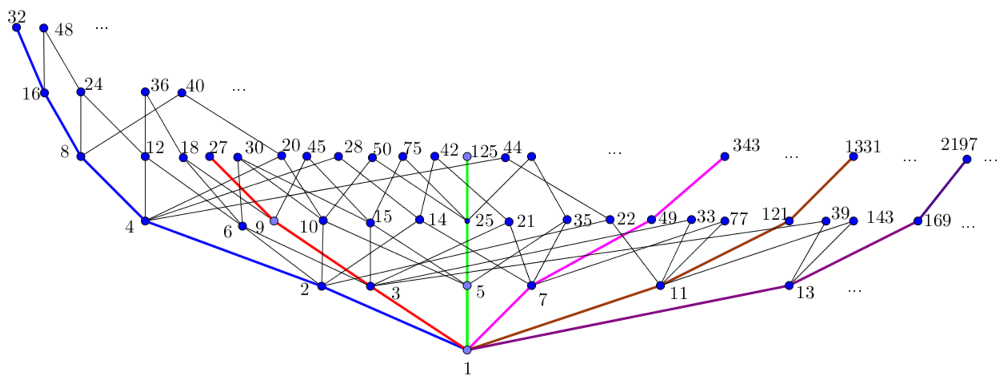


Figura 2.4: Relación del diagrama de los naturales con $D(p^\alpha)$

El diagrama de la Figura 2.2, se identifica en azul en el diagrama de Hasse de divisibilidad. Los otros colores son ejemplos para cualquier $D(p^\alpha)$, es decir, para

$D(27), D(125), D(343), D(1331)$ y $D(2197)$.

En la siguiente sección se muestra la exploración de este conjunto $D(p^\alpha q^\beta)$, siguiendo el mismo orden de esta sección, caracterizando los elementos del conjunto, la representación gráfica y resultados de la relación entre ellos.

2.3. Conjunto $D(p^\alpha q^\beta)$

Se realizará un estudio para el conjunto $D(p^\alpha q^\beta)$, pero como primer paso se mostrará algunos ejemplos para explorarlos y evidenciar algunas características de posets, diagramas de Hasse y retículos.

Ejemplo 7 Considere el conjunto $D(2^2 5^1)$ y la relación de divisibilidad $|$.

- Si $p^\alpha q^\beta = 2^2 5^1$, entonces $D(2^2 5^1) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.
- Se representa los elementos del conjunto $D(2^2 5^1)$ menos el 1, como descomposición prima, es decir, $2 = 2^1, 5 = 5^1, 4 = 2^2, 10 = (2)(5)$ y $20 = 2^2 5^1$.
- Considerando el conjunto $D(2^2 5^1)$ y la relación $|$ se construye el diagrama de Hasse (Ver Figura 2.5).

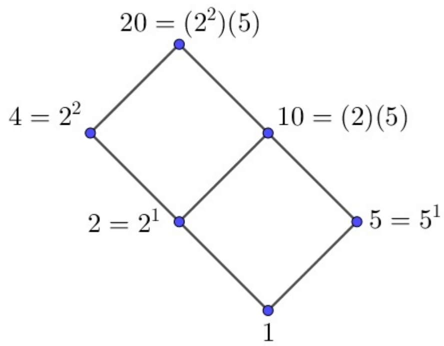


Figura 2.5: Diagrama de Hasse para $D(2^2 5)$

Se muestra en la Figura 2.5 que a cada punto se le asigna un elemento del conjunto $D(20)$, se le asigna el 1, que es el primer punto, segundo los puntos para $2 = 2^1$ y $5 = 5^1$, tercero los puntos para $10 = (2)(5)$ y $4 = 2^2$, por último el punto para $20 = 2^2 5^1$; respetando la relación de $|$ para construir el diagrama de Hasse. Se observa que en cada par de elementos hay un supremo y un ínfimo; por ejemplo, $sup\{4, 10\} = 20$ y el $inf\{4, 10\} = 2$, por tanto, el diagrama es un retículo. Por último, la cantidad de puntos del diagrama es igual a la cantidad de elementos del conjunto $D(2^2 5^1)$.

El diagrama que se construyó se puede asociar con un paralelogramo de tal manera que la medida de sus lados es 1 y 2 unidades respectivamente, donde 2 es el exponente del número primo 2 y 1 es el exponente del número primo 5.

Se va a considerar otro ejemplo del conjunto $D(p^\alpha q^\beta)$ siguiendo los mismos pasos del anterior ejemplo, para así identificar características similares al anterior.

Ejemplo 8 Considere el conjunto $D(2^1 3^2)$ y la relación de divisibilidad $|$.

- Si $p^\alpha q^\beta = (2^1)(3^2)$, entonces $D(2^1 3^2) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

- Se representa los elementos del conjunto $D(2^1 3^2)$ menos el 1, como descomposición prima, es decir, $2 = 2^1, 3 = 3^1, 6 = (2)(3), 9 = 3^2$ y $18 = (2^1)(3^2)$.

- Considerando el conjunto $D(2^1 3^2)$ y la relación $|$ se construye el diagrama de Hasse (Ver Figura 2.6).

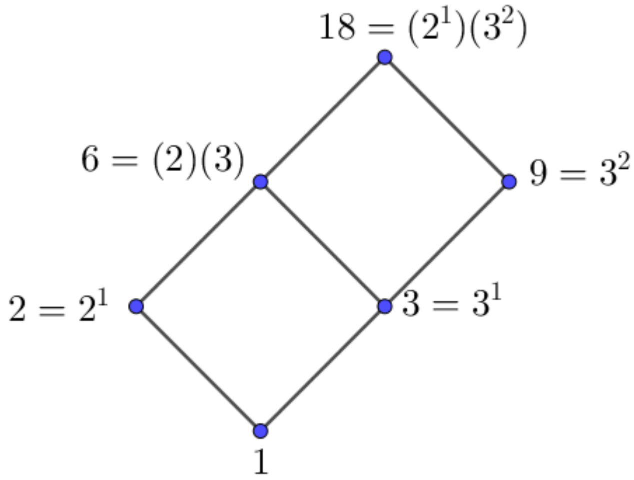


Figura 2.6: Diagrama de Hasse para $D(2^1 3^2)$

Se evidencia en la Figura 2.6 que a cada punto se le asigna un elemento del conjunto $D(18)$, se le asigna el 1, para el primer punto, para los puntos 2 y 3 los elementos $2 = 2^1$ y $3 = 3^1$, para los puntos 3 y 4 los elementos $6 = (2)(3)$ y $9 = 3^2$, por último $18 = (2^1)(3^2)$; representando la relación $|$ en la construcción del diagrama de Hasse. Se observa que para cada par de puntos hay un extremo superior y un extremo inferior; por ejemplo, $sup\{2, 9\} = 18$ y el $inf\{2, 9\} = 1$, por tanto, el diagrama es un retículo. La cantidad de puntos del diagrama es igual a la cantidad de elementos del conjunto $D(2^1 3^2)$.

Se asocia el diagrama que se construyó con un paralelogramo, de tal manera que la medida de los lados es 1 y 2 unidades respectivamente, donde el 2 es el exponente del número primo 3 y 1 es el exponente del número primo 2.

Teniendo en cuenta con los ejemplos 7 y 8, podemos decir que para el caso $D(p^\alpha q^\beta)$, se concluye que:

1. La cantidad de divisores y la cantidad de puntos del diagrama es $\tau(n) = (\alpha+1)(\beta+1)$.

2. El diagrama es un retículo, porque para cada par de elementos tiene extremo supe-

rior e inferior.

3. El diagrama se asocia con el paralelogramo, tal que la medida de sus lados es igual a β y α respectivamente.

A continuación, se presenta el diagrama general del conjunto de los divisores de $p^\alpha q^\beta$.

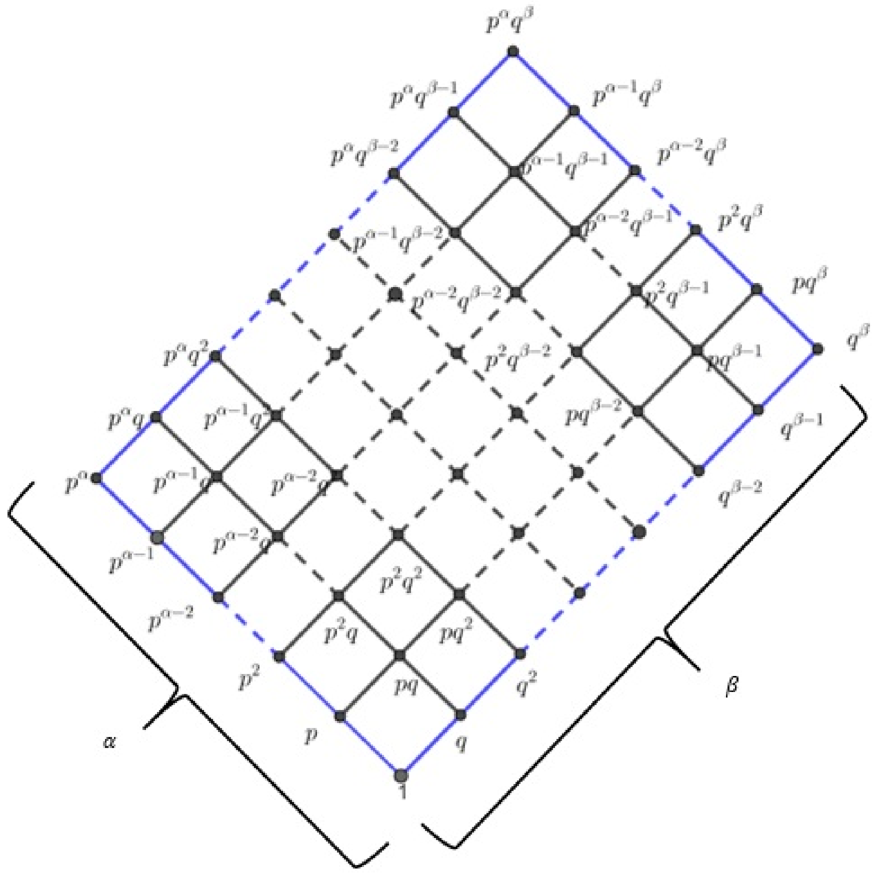


Figura 2.7: Diagrama $D(p^\alpha q^\beta)$

El diagrama de la Figura 2.5, se identifica en azul en el diagrama de Hasse de divisibilidad. Los otros colores son ejemplos para cualquier $D(p^\alpha q^\beta)$, es decir, para $D(2^2 5^1)$ y $D(7^1 11^1)$.

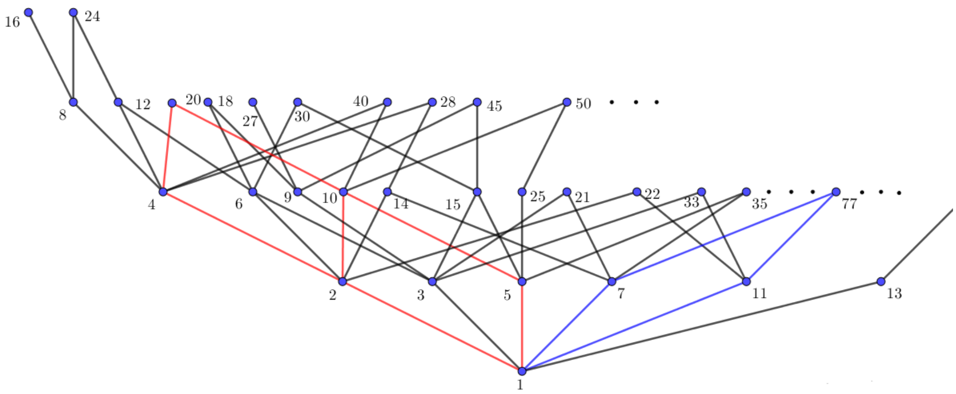


Figura 2.8: Relación de diagrama de los naturales con $D(p^{\alpha}q^{\beta})$

2.4. Conjunto $D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma})$

Se realizará la exploración para el conjunto $D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma})$, siguiendo el mismo paso a paso de las anteriores secciones, para así llegar a una característica común de este tipo de diagrama.

Ejemplo 9 Considere la relación $|$ sobre el conjunto $D(2^1 3^1 5^1)$

- Si $p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma} = 2^1 3^1 5^1$, entonces $D(2^1 3^1 5^1) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.
- Se representa los elementos del conjunto $D(2^1 3^1 5^1)$ menos el 1, como descomposición prima, es decir, $2 = 2^1, 3 = 3^1, 5 = 5^1, 6 = 2^1 3^1, 10 = 2^1 5^1, 15 = 5^1 3^1$ y $30 = 2^1 3^1 5^1$.
- Considerando la relación $|$ sobre el conjunto $D(2^1 3^1 5^1)$ se construye el diagrama de Hasse (ver Figura 2.9).

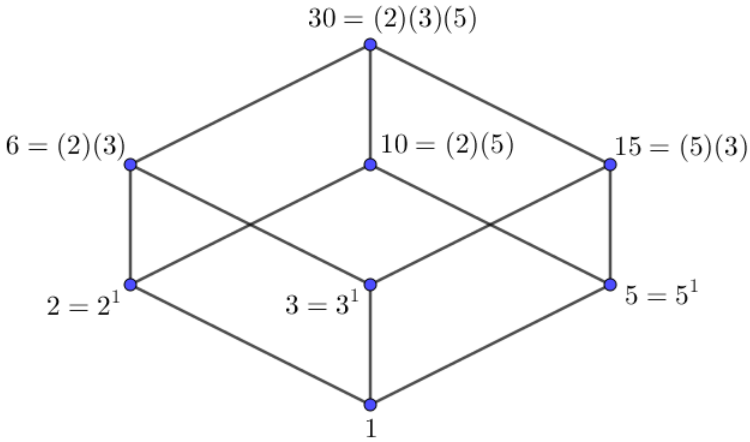


Figura 2.9: Diagrama $D(2^1 3^1 5^1)$

En la Figura 2.9 a cada punto se le asigna un elemento del conjunto $D(30)$, se le asigna el 1, para el primer punto, para los puntos 2, 3 y 4 les corresponden a los elementos $2 = 2^1$ y $3 = 3^1$ $5 = 5^1$ respectivamente, para los puntos 5, 6 y 7 les corresponden los elementos $6 = (2)(3), 10 = (2)(5)$ y $15 = (3)(5)$, por último, para el punto 8 le corresponde el elemento $30 = (2)(3)(5)$; respetando la relación $|$ en la construcción del diagrama de Hasse. Se observa que para cada par de elementos tiene extremo supremo e inferior; por ejemplo, $sup\{6, 10\} = 30$ e $inf\{6, 10\} = 2$, por tanto el diagrama es un retículo.

El diagrama se asocia con un prisma de lado 1, que corresponde al valor de los exponentes de la descomposición prima.

Ejemplo 10 Considere la relación $|$ sobre el conjunto $D(2^3 3^2 5^1)$.

- Si $p^\alpha q^\beta r^\gamma = 2^3 3^2 5^1$ entonces $D(2^3 3^2 5^1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360\}$.

- Se representa los elementos del conjunto $D(2^3 3^2 5^1)$ menos el 1, como descomposición prima, es decir, $2 = 2^1$, $3 = 3^1$, $4 = 2^2$, $5 = 5^1$, $6 = 2^1 3^1$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2^1 5^1$, $12 = 2^2 3^1$, $15 = 3^1 5^1$, $18 = 2^1 3^2$, $20 = 2^2 5^1$, $24 = 2^3 3^1$, $30 = 2^1 3^1 5^1$, $36 = 2^2 3^2$,

$40 = 2^3 5^1$, $45 = 2^1 3^2 5^1$, $60 = 2^2 3^1 5^1$, $72 = 2^3 3^2$, $90 = 2^2 3^2 5^1$, $120 = 2^3 3^1 5^1$, $180 = 2^2 3^2 5^1$ y $360 = 2^3 3^2 5^1$.

- Considere el diagrama de Hasse con la relación $|$ sobre el conjunto $D(2^3 3^2 5)$ (ver Figura 2.10).

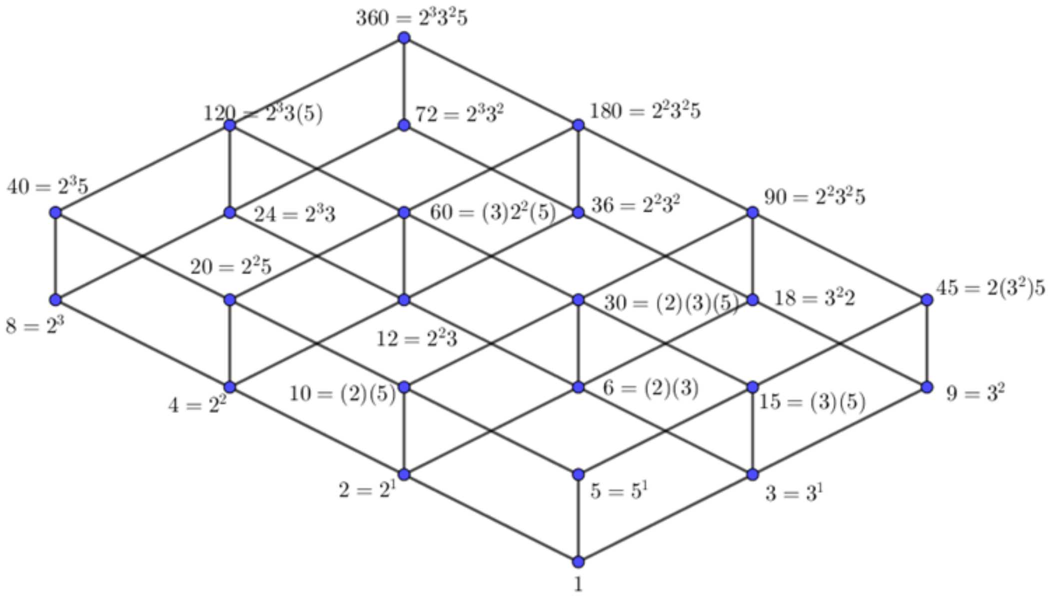


Figura 2.10: Diagrama $D(2^3 3^2 5)$

En la Figura 2.10 se observa que a cada punto se le asigna un elemento del conjunto $D(360)$, como en el anterior ejemplo al primer punto le corresponde el 1; los siguientes tres puntos los números primos 2, 3 y 5; los siguientes 5 puntos el producto de dos primos; para los siguientes 5 puntos el producto de tres números primos; los siguientes 5 puntos el producto de 4 números primos; los siguientes 3 puntos el producto de 5 números primos y el último punto el elemento 360 que es igual al producto de 6 primos. Por otro lado, el diagrama también se asocia con un prisma de lados 1, 2 y 3 que corresponde a los exponentes de los números primos 5, 3 y 2 respectivamente, representando la relación $|$ sobre el conjunto. Se evidencia que cada par de elementos del diagrama tiene extremo superior y extremo inferior; por ejemplo, $sup\{20, 30\} = 60$ y el $inf\{20, 30\} = 10$, luego el diagrama es un retículo.

Teniendo en cuenta los $D(30)$ y $D(360)$ se generalizó para la relación $|$ sobre el conjunto $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma)$ que:

1. La cantidad de elementos del conjunto es igual a $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$ que es igual a $\tau(p^\alpha q^\beta r^\gamma)$.

2. La cantidad de vértices del diagrama es igual a $\tau(p^\alpha q^\beta r^\gamma)$.

3. El diagrama es un retículo, porque cada par de elementos tiene extremo superior e inferior.

4. El diagrama se asocia con un prisma de lado α, β y γ.

Se presenta un diagrama general para el conjunto $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma)$, teniendo en cuenta los items 1, 2, 3 y 4 mencionados anteriormente.

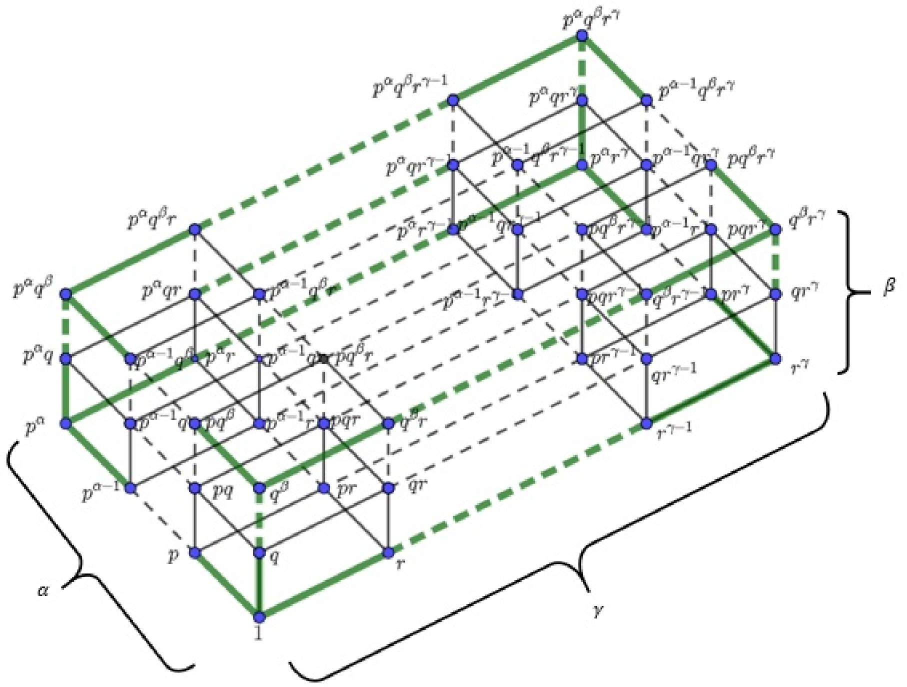


Figura 2.11: Diagrama $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma)$

El diagrama de la Figura 2.9, se puede identificar en el diagrama general de divisibilidad del conjunto de los números naturales. A continuación, se muestra de color azul el diagrama de $D(30)$.

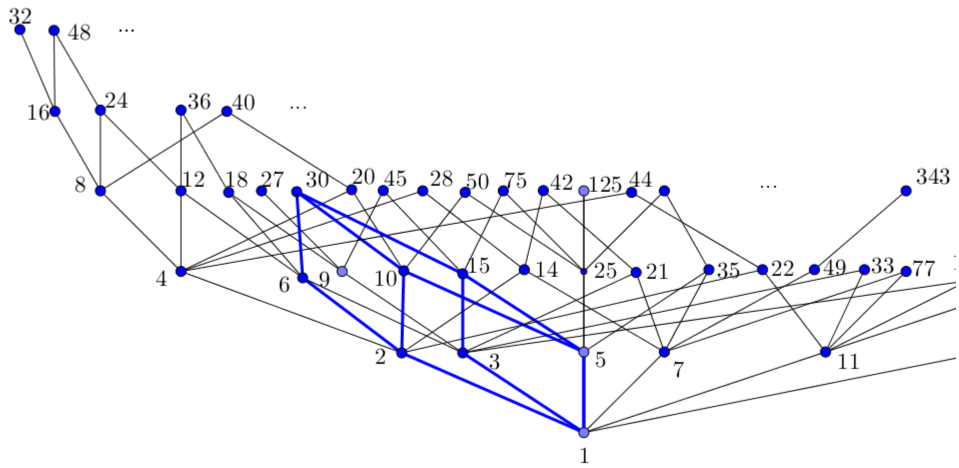


Figura 2.12: Diagrama $D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma})$

Se identifica en el diagrama general de divisibilidad otros ejemplos de $D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma})$. En las secciones anteriores las representaciones para los diagramas de $D(p^{\alpha}), D(p^{\alpha}q^{\beta})$ y $D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma})$ se pueden asociar con un segmento, un paralelogramo y un prisma respectivamente, debido a que tenemos una representación gráfica hasta una tercera dimensión, por tanto, se asocian hasta los diagramas del producto de tres primos distintos.

2.5. Conjunto $D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\theta})$

Para el conjunto $D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\phi})$ se asociaría con una representación gráfica de la cuarta dimensión. Se usa la proyección del hipercubo propuesta por Claude Bragdon (Pérez y Aguilar, 2001, p2).

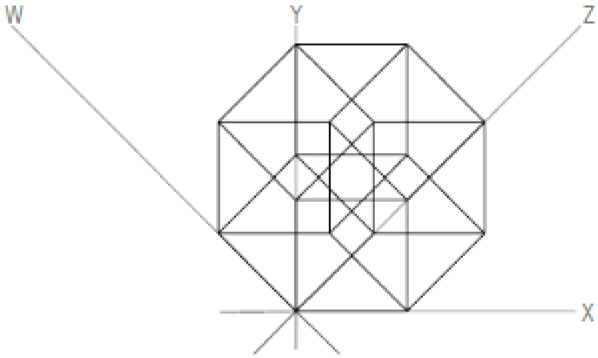


Figura 2.13: Hipercubo con proyección de Bragdon

Como se ve en la figura 2.13 (Pérez y Aguilar, 2001, p2), hace una proyección de un cubo y esa proyección la determina en un eje w. A partir del hipercubo con proyección de Bragdon se puede hacer un boceto de las representaciones de los diagramas de Hasse para el conjunto de $D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\theta})$.

Usando la representación del hipercubo con proyección se usa la misma exploración de las anteriores secciones.

Ejemplo 11 Considere la relación $|$ sobre el conjunto $D(210)$.

- Si $p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\theta} = 2^1 3^1 5^1 7^1$, entonces $D(2^1 3^1 5^1 7^1) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$.

- Se representa los elementos del conjunto $D(2^1 3^1 5^1 7^1)$ menos el 1, como descomposición prima, es decir, $2 = 2^1$, $3 = 3^1$, $5 = 5^1$, $6 = 2^1 3^1$, $7 = 7^1$, $10 = 2^1 5^1$, $14 = 2^1 7^1$, $15 = 3^1 5^1$, $21 = 3^1 7^1$, $30 = 2^1 3^1 5^1$, $35 = 5^1 7^1$, $42 = 2^1 3^1 7^1$, $70 = 2^1 5^1 7^1$, $105 = 3^1 5^1 7^1$ y $210 = 2^1 3^1 5^1 7^1$.

- Considere el conjunto diagrama de Hasse con la relación $|$ sobre el conjunto $D(2^1 3^1 5^1 7^1)$, ver Figura 2.14.

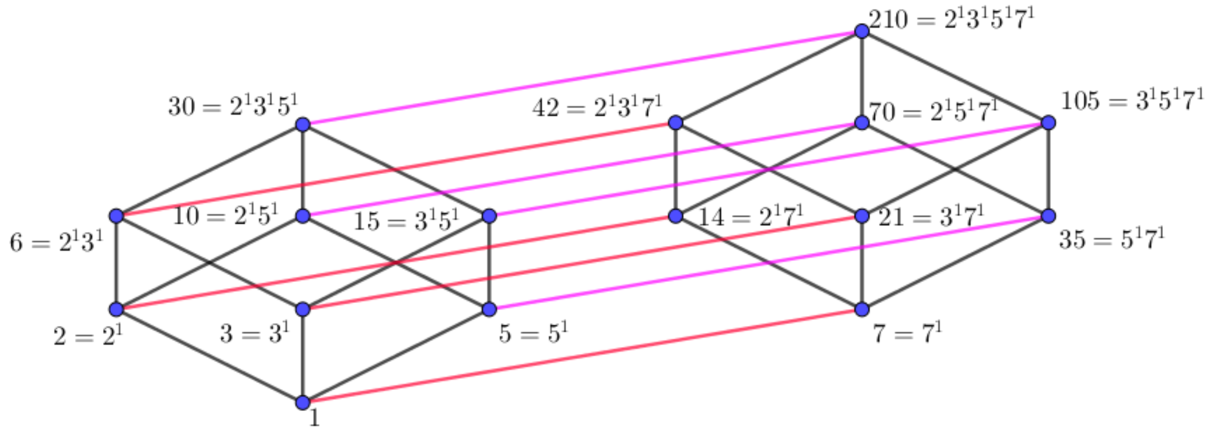


Figura 2.14: Diagrama $D(2^1 3^1 5^1 7^1)$

En el anterior diagrama se observa que cada punto se le asigna un único elemento del conjunto $D(2^1 3^1 5^1 7^1)$, se determina que el primer punto le corresponde el elemento 1, para los siguientes 4 puntos les corresponden los primos $2, 3, 5$ y 7, los siguientes 4 puntos son los productos de dos primos, los siguientes 4 son los productos de tres primos y el último punto le corresponde 210, es decir, $2^1 3^1 5^1 7^1$.

Por otro parte, se observa que el diagrama forma dos prismas de lado 1, pero un prisma es proyección del otro. Los prismas que son de lado 1, ya que 1 corresponde al exponente de los primos $2, 3$ y 5, mientras para el exponente de 7 que es 1 se le asigna las proyecciones, que en este caso es una proyección.

Se observa que cada par de elementos tiene extremo superior y extremo inferior; por ejemplo, $sup\{15, 35\} = 105$ y el $inf\{15, 35\} = 5$, por tanto, el diagrama es un retículo.

Se presenta otro ejemplo para evidenciar la generalidad de la representación gráfica del conjunto $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\theta)$.

Ejemplo 12 Considere la relación $|$ sobre el conjunto $D(2^2 3^1 5^1 11^1)$.

- Si $p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\theta = 2^2 3^1 5^1 11^1$, entonces $D(2^2 3^1 5^1 11^1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 20, 22, 30, 33, 44, 55, 60, 66, 110, 132, 165, 220, 330, 660\}$.

- Se representa los elementos del conjunto $D(2^2 3^1 5^1 11^1)$ menos el 1, como descomposición prima, es decir, $2 = 2^1$, $3 = 3^1$, $4 = 2^2$, $5 = 5^1$, $6 = 2^1 3^1$, $10 = 2^1 5^1$, $12 = 2^2 3^1$, $15 = 3^1 5^1$, $20 = 2^2 5$, $22 = 11^1 2^1$, $30 = 2^1 3^1 5^1$, $33 = 3^1 11^1$, $44 = 2^2 11^1$, $55 = 5^1 11^1$, $60 = 2^2 3^1 5^1$, $66 = 2^1 3^1 11^1$, $110 = 2^1 5^1 11^1$, $132 = 2^2 3^1 11^1$, $165 = 3^1 5^1 11^1$, $220 = 2^2 5^1 11^1$, $330 = 2^1 3^1 5^1 11^1$ y $660 = 2^2 3^1 5^1 11^1$.

- Considere el diagrama de Hasse con la relación $|$ sobre el conjunto $D(2^2 3^1 5^1 11^1)$, ver Figura 2.15.

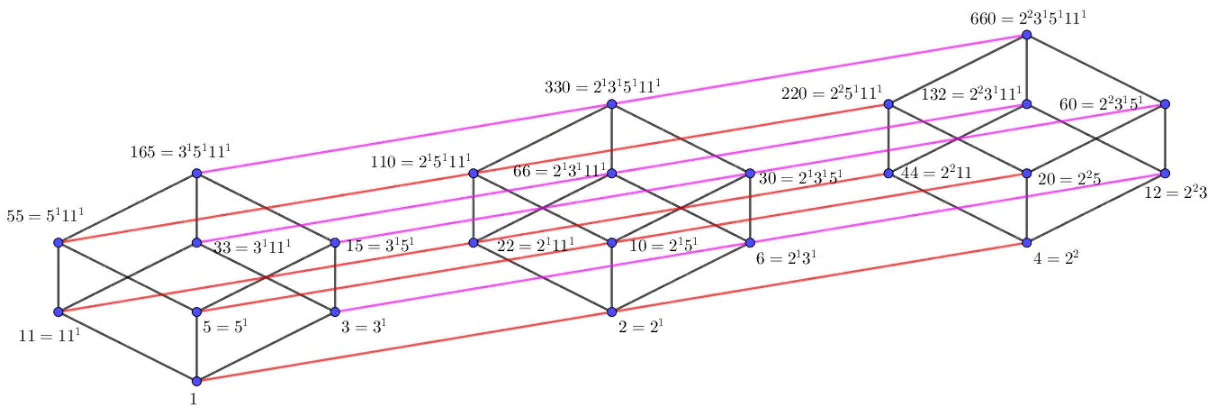


Figura 2.15: Diagrama $D(2^2 3^1 5^1 11^1)$

En el diagrama de la Figura 2.15, se observa que cada punto se le asigna un único elemento del conjunto $D(2^2 3^1 5^1 11^1)$, se determina que el primer punto le corresponde el 1, para los siguientes 4 primos son los primos $2, 3, 5$ y 11, los siguientes 7 puntos le corresponde el producto de dos primos, los siguientes 7 puntos se les asigna el producto de tres primos, los siguientes 4 primos el producto de 4 primos y el último punto le corresponde $2^2 3^1 5^1 11^1$ (660). Cada par de elementos tiene extremo superior y extremo inferior, por ejemplo, $sup\{22, 6\} = 66$ y el $inf\{22, 6\} = 2$, por tanto, el diagrama es un retículo.

Teniendo en cuenta los anteriores 2 ejemplos se realiza una generalización para la relación $|$ sobre el conjunto $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\theta)$, esto es:

1. La cantidad de elementos del conjunto es igual a $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\theta+1)$ por la función $\tau(n)$, luego la cantidad de vértices es igual a la misma cantidad de divisores.

2. El diagrama es un retículo, porque para cada par de elementos tiene extremo superior e inferior.

3. El diagrama se asocia con un proyecciones de prismas de lado α, β y γ, por otra parte, la cantidad de proyecciones es igual a θ.

A continuación se muestra el diagrama de Hasse general de conjunto $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\theta)$:

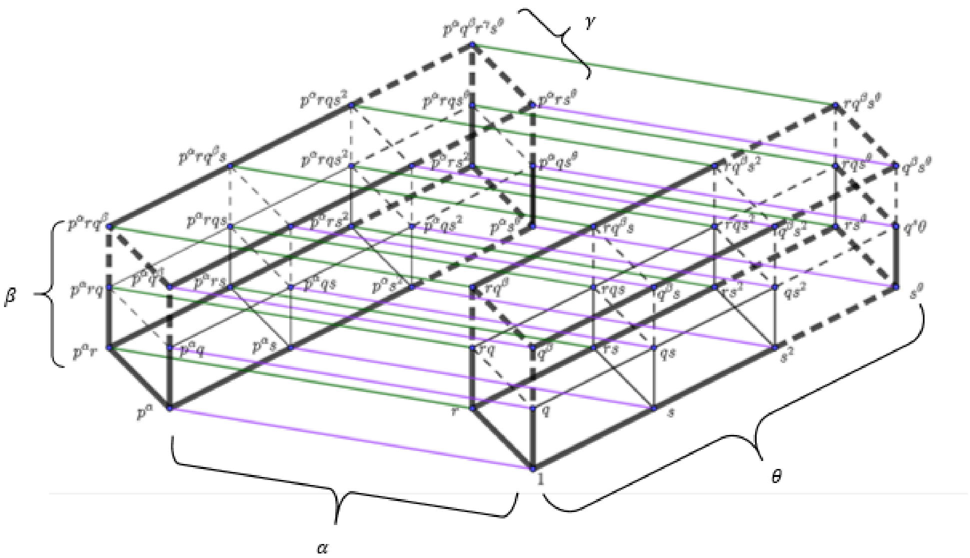


Figura 2.16: Diagrama $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\theta)$

Por otro lado, el diagrama del poset $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\theta)$ de la Figura 2.16 se identifica en el diagrama general de divisibilidad del conjunto de los números naturales, luego se muestra un ejemplo del conjunto que se identifica en el diagrama general, ver Figura 2.17.

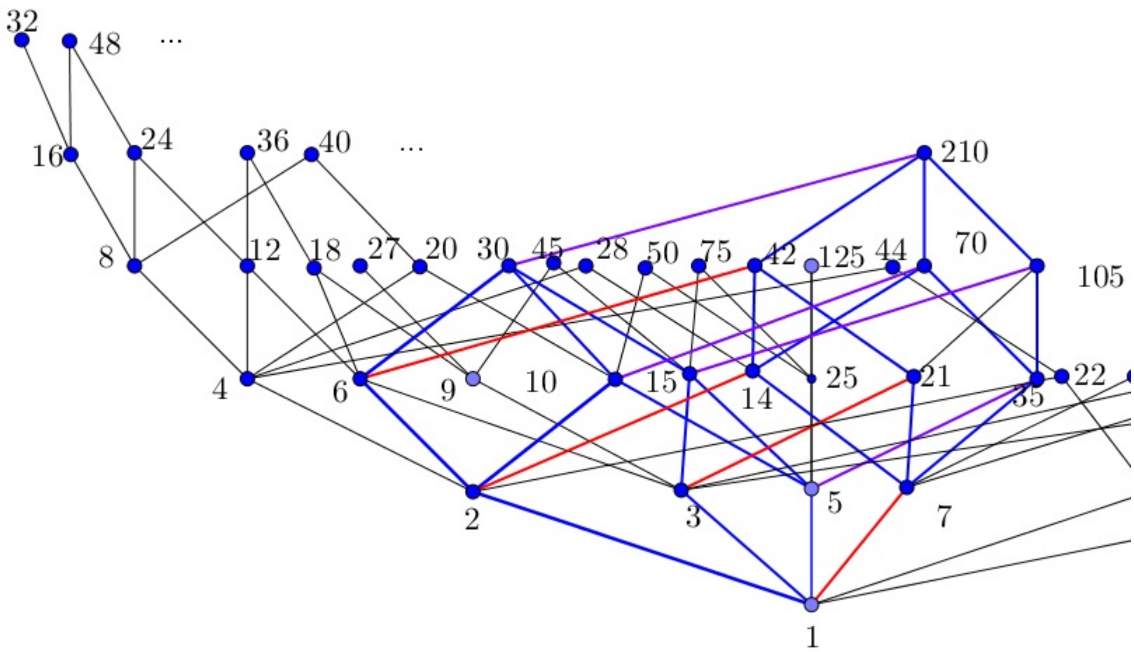


Figura 2.17: Diagrama $D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\theta})$

El diagrama de la Figura 2.14 se identifica de color azul , rojo y morado en el diagrama de Hasse de divisibilidad, como se muestra en la Figura 2.17, los prismas se identifican de color azul y las proyecciones de color rojo y morado. De igual manera se puede encontrar los otros ejemplos de posets de la forma $D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\theta})$.

Los diagramas de Hasse de los conjuntos $D(p^{\alpha}), D(p^{\alpha}q^{\beta}), D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma})$ y $D(p^{\alpha}q^{\beta}\ r^{\gamma}s^{\theta})$, se construyen teniendo en cuenta la cantidad de primos y los exponente de cada uno de los números primos, por otra parte, cada uno de las representaciones de los diagramas se pueden asociar con segmentos, paralelogramos, prismas y proyecciones de los primas, respectivamente.

Por último, se mostró una parte del diagrama de divisibilidad para el conjunto de los números naturales y se evidencia que cada uno de los conjuntos se identifican en el diagrama de divisibilidad.

2.6. Relación de equivalencia

Si $X = \mathbb{N} - \{0\}$, con los diagramas de Hasse, podemos definir sobre X una relación de equivalencia

$D(i) \approx D(w)$ si y sólo si el diagrama de $D(i)$ se puede superponer con el diagrama de $D(w)$ y coincidan

Ejemplo 13 En la siguiente figura se muestra los diagramas de Hasse respectivos de $D(20)$ y de $D(18)$

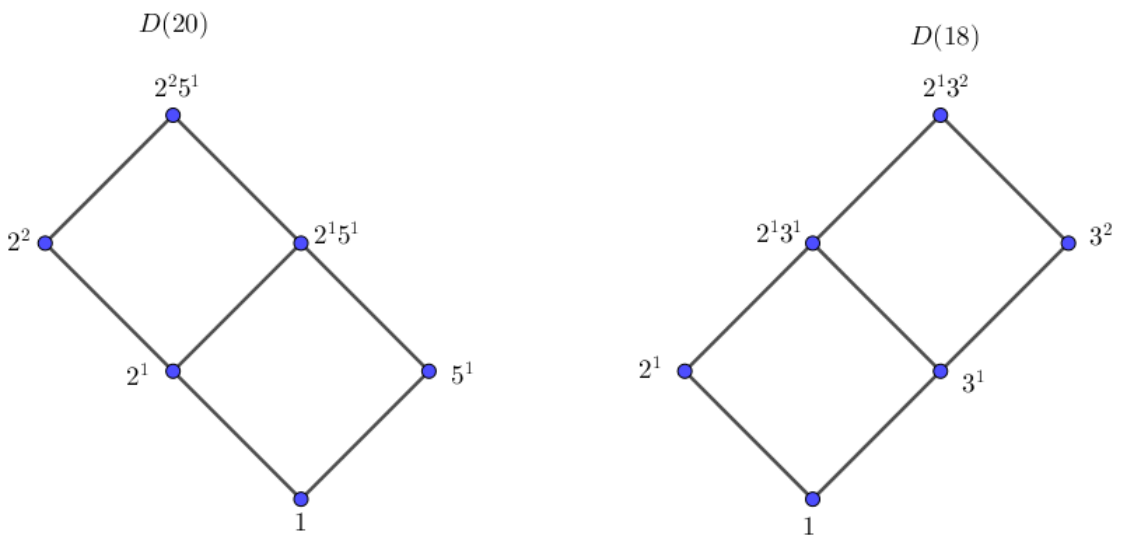


Figura 2.18: Diagramas de $D(20)$ y de $D(18)$

Si superponemos los dos diagramas van a coincidir. Se va acomodar el diagrama de $D(18)$ para que coincida con el diagrama $D(20)$, como ve en le Figura 2.19

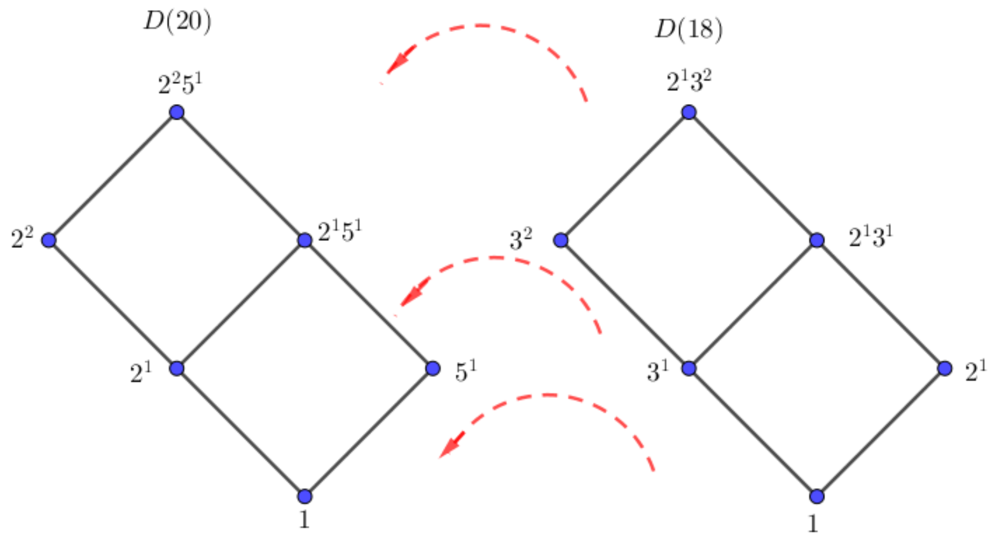


Figura 2.19: Superponer los diagramas $D(20)$ y $D(18)$

Como el diagrama de $D(20)$ y $D(18)$ al superponerse coinciden, entonces $20 \approx 18$.

La $\approx$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de $\mathbb{N}$. Para cada $a \in \mathbb{N}$, la clase de equivalencia de a, al conjunto formado por todos los elementos de $\mathbb{N}$ que estén relacionados con él. La notaremos $[a]$, es decir, $[a] = \{x \in \mathbb{N} : x \approx a\}$.

Ejemplo 14 Para $1 \in \mathbb{N}$ se tiene que $1 \approx 1$, luego no existe otro número natural que se relacione con el 1, por tanto,

$$[1] = \{1\}$$

Ejemplo 15 Para $2 \in \mathbb{N}$ se tiene que $2 \approx 2, 2 \approx 3, 2 \approx 5, 2 \approx 7, 2 \approx 11, 2 \approx 13, ...$, luego

$$[2] = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\} = \{n \in \mathbb{N} : n = p \text{ donde } p \text{ es primo}\}$$

Ejemplo 16 Para $4 \in \mathbb{N}$ se tiene que $4 \approx 4, 4 \approx 9, 4 \approx 25, 4 \approx 49, 4 \approx 121, ...$, luego

$$[4] = \{4, 9, 25, 49, 121, ...\} = \{n \in \mathbb{N} : n = p^2 \text{ donde } p \text{ es primo}\}$$

Ejemplo 17 Para $20 \in \mathbb{N}$ se tiene que $20 \approx 12$, $20 \approx 18$, $20 \approx 28$, $20 \approx 44, ...$, luego

$$[20] = \{12, 18, 28, 44, ...\} = \{n \in \mathbb{N} : n = p^2 q \text{ donde } p, q \text{ son primos distintos}\}$$

Teniendo en cuenta los ejemplos 14, 15, 16 y 17 se dice que:

- Para $1 \in \mathbb{N}$ se tiene que la $[1] = \{1\}$.
- Para $n, k, \alpha \in \mathbb{N}$, $n = {p_1}^{\alpha_1} {p_2}^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ donde p_i es primo y $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$

$$[n] = \{m \in \mathbb{N}^* : m = {q_1}^{\alpha_1} {q_2}^{\alpha_2} ... q_k^{\alpha_k} \text{ donde } q_i \text{ es primo}\}$$

Si ordenamos los primos $2 < 3 < 5 < ... < r_k < r_{k+1} < ...$ y se escoge como representante de la clase a $2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} ... r_k^{\alpha_k}$ que es el menor elemento de la clase.

2.7. Hotel de Hilbert

El matemático alemán David Hilbert reconocido a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, contribuyó a la teoría de invariantes, axiomatización de la geometría y la noción del espacio de Hilbert, fundamentos del análisis funcional. En 1900 presentó en el **Primer Congreso Internacional de Matemáticas**, celebrado en París, la compilación de los 23 problemas matemáticos que estableció gran parte de investigación del siglo XX, parte del trabajo se relacionó con la teoría de conjuntos y números transfinitos de Cantor, donde explico algunas paradojas del infinito.

Hilbert para explicar los conceptos relacionados con el infinito, utilizaba el ejemplo de ubicar infinitos turistas que llegan en infinitos buses en un hotel especial que contaba con infinitas habitaciones enumeradas como $1, 2, 3, 4, ...$ y así hasta el infinito, la solución de la paradoja la encuentra en Válvac (2015).

Supongamos que los infinitos turistas del hotel se van a devolver en los buses. Cada bus tiene un diagrama de Hasse distintivo y cada habitación de los turistas le corresponde un número natural distinto de 0, entonces cada turista debe ubicar el bus que tenga el diagrama correspondiente al número de la habitación, por tanto, cada turista menos el de la habitación 1, debe descomponer el múmero como producto entre números primos, cumpliento el Teorema Fundamental de la Aritmética. Cabe resaltar que no todos los turistas se van a devolver, porque no se tiene todos los diagramas de los números correspondientes, ya que solo se pueden ubicar los que tengan la descomposición de la forma $p^{\alpha}, p^{\alpha}q^{\beta}, p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}$ o $p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\phi}$. Primero el turista que está en la habitación 1, que se ubicará en el bus que tiene como distintivo un punto porque es el diagrama correspondiente a 1, luego es el único elemento que le corresponde este diagrama, por tanto, ese bus tiene un pasajero; segundo, ubicamos los números primos que están el mismo bus porque tienen el mismo distintivo; tercero, ubicamos los que están en las habitaciones $4, 9, 16, ...$ que es el producto de dos primos iguales, es decir, $2(2), 3(3), 4(4), ...$ y están en el mismo bus; y así sucesivamente porque ubicamos en cada bus los que tengan el mismo diagrama de Hasse.

Sólo hay un bus que va con un pasajero que es el 1 y el resto de buses van con infinitos turistas.

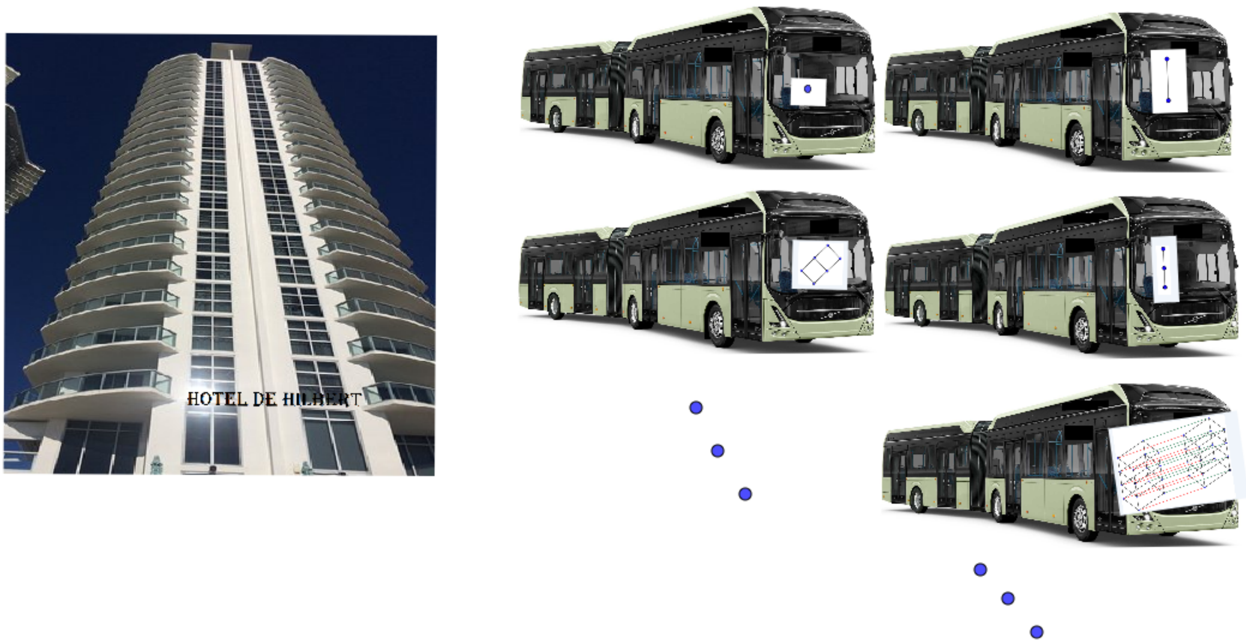


Figura 2.20: Representación del hotel Hilbert y los buses con el distintivo.

CAPÍTULO 3

CONTEO DE NIVELES Y ELEMENTOS

Uno de los objetivos del trabajo es encontrar propiedades de cada tipo distinto de los diagramas de Hasse (posets de $D(n)$) o características comunes. En este capítulo se estudiará características de conteo, es decir, la cantidad de niveles del diagrama y la cantidad de elementos que tiene cada nivel.

3.1. Cantidad de niveles del conjunto $D(n)$

Como se mencionó en el anterior capítulo, el trabajo se desarrolla para $n = p^\alpha, p^\alpha q^\beta, p^\alpha q^\beta r^\gamma$ y $p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\theta$, por tanto, se realizará un estudio para cada uno de los conjuntos tratados.

3.1.1. Niveles del conjunto $D(p^\alpha)$

Para determinar la cantidad de niveles del conjunto $D(p^\alpha)$, se presentará en la siguiente tabla la relación que hay entre la cantidad de elementos del conjunto y la cantidad de niveles, para así llegar a una generalidad. La tabla se divide en tres columnas, el valor de α, el diagrama de Hasse y la cantidad de niveles.

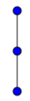
α	**Diagrama de Hasse**	**Cantidad de niveles**
1		$2 = 1 + 1$
2		$3 = 2 + 1$
3		$4 = 3 + 1$
α		$\alpha + 1$

Tabla 3.1: Número de niveles para p^{α}

En la tabla 3.1 se evidencia que la cantidad de niveles depende del valor de α, es decir, el exponente de p, por tanto, la cantidad de niveles que hay en el diagrama correspondiente para $D(p^{\alpha})$ es igual a $\alpha + 1$, que a su vez es igual a la cantidad de elementos $\tau(p^{\alpha})$, esto es:

$$\#Niveles \text{ (diagrama } D(p^{\alpha})) = \#D(p^{\alpha}) = \tau(p^{\alpha}) = \alpha + 1$$

3.1.2. Niveles del conjunto $D(p^{\alpha}q^{\beta})$

En el conjunto $D(p^{\alpha}q^{\beta})$ se construye tres tablas similares, debido a que se debe dar valores a α y β independientemente para así llegar a una generalidad. Las tres tablas se divide en cuatro columnas, el valor de α, el valor de β, diagrama de Hasse y cantidad de niveles.

Se dejará un valor fijo para el valor de α y se va variando el valor de β. En cada tabla se mostrará los primeros tres valores para β, es decir, para $\beta = 1, \beta = 2$ y $\beta = 3$, de tal manera que se evidencie alguna regularidad entre los valores, el diagrama y la cantidad de niveles.

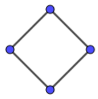
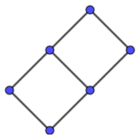
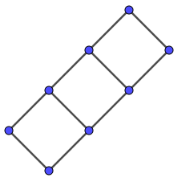
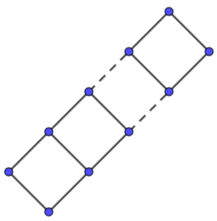
α	β	**Diagrama de Hasse**	**Cantidad de niveles**
1	1		$3 = (1+1)(1+1) - 1(1)$
	2		$4 = (1+1)(2+1) - 1(2)$
	3		$5 = (1+1)(3+1) - 1(3)$
	β		$(1+1)(\beta+1) - 1(\beta)$ $= 1 + \beta + 1$

Tabla 3.2: Número de niveles para $D(pq^{\beta})$

En la tabla 3.2 se dejó fijo el valor de α que es 1, mientras el valor de β iba variando, se determinó que la cantidad de niveles que tiene el diagrama $D(pq^{\beta})$ es igual a $1 + \beta + 1$.

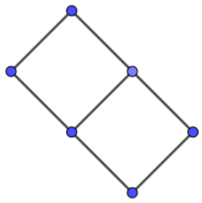
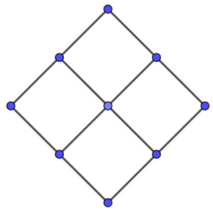
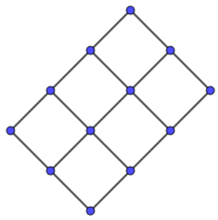
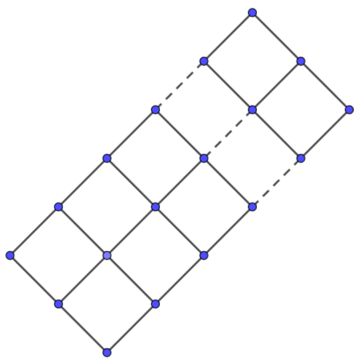
α	β	**Diagrama de Hasse**	**Cantidad de niveles**
2	1		$4 = (2+1)(1+1) - 2(1)$
	2		$5 = (2+2)(2+1) - 2(2)$
	3		$6 = (2+1)(3+1) - 2(3)$
2	β		$(2+1)(\beta+1) - 2\beta$ $= 2 + \beta + 1$

Tabla 3.3: Número de niveles para $D(p^2q^\beta)$

En la tabla 3.3 se fijó el valor de α igual a 2, pero sigue variando el valor de β, de igual manera se obtiene que la cantidad de niveles es igual a $2 + \beta + 1$.

Si se va fijando un valor para α y variando el valor de β se llegará a la misma conclusión de que la cantidad de niveles es igual al valor que se esta fijando más el valor de β más 1. Se cumple de forma análoga, si se fija un valor para β y va variando el valor de α, luego se puede determinar la cantidad de niveles que tiene el valor del diagrama $D(p^\alpha q^\beta)$, esto es:

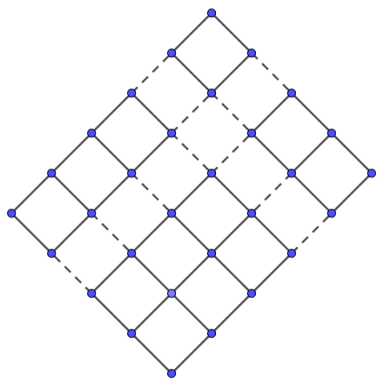
α	β	**Diagrama de Hasse**	**Cantidad de niveles**
α	β		$\alpha+\beta+1$

Tabla 3.4: Número de niveles para $D(p^{\alpha}q^{\beta})$

En la tabla 3.12 se evidencia que la cantidad de niveles depende del valor de α y β, como se presentó en el anterior conjunto, por tanto, la cantidad de niveles que hay en el diagrama correspondiente para el conjunto $D(p^{\alpha}q^{\beta})$ es igual a $\alpha+\beta+1$, que a su vez es la cantidad de elementos del conjunto menos $\alpha\beta$, esto es:

$$\begin{aligned}
\#Niveles(D(p^{\alpha}q^{\beta})) &= \#D(p^{\alpha}q^{\beta})-\alpha\beta \\
&= \tau(p^{\alpha}q^{\beta})-\alpha\beta \\
&= (\alpha+1)(\beta+1)-\alpha\beta \\
&= (\alpha\beta+\alpha+\beta+1)-\alpha\beta \\
&= \alpha+\beta+1
\end{aligned}$$

Luego, el número de niveles del diagrama de Hasse de $D(p^{\alpha}q^{\beta})$ es igual a $\alpha+\beta+1$.

3.1.3. Niveles del conjunto $D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma})$

Para este conjunto se usará la tabla de la sección anterior, pero se le anexará una columna para asignarle el valor a γ, por tanto, la tabla esta conformada por cinco columnas: el valor de α, el valor de β, el valor de γ, el diagrama de Hasse y la cantidad de niveles.

Para la primera tabla $\alpha = \beta = 1$ y se considera para los casos $\gamma = 1$ y $\gamma = 3$.

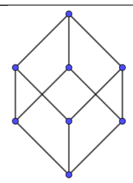
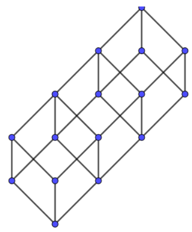
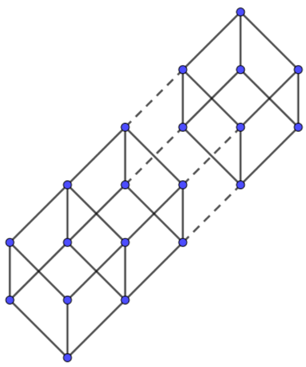
α	β	γ	**Diagrama de Hasse**	**Cantidad de niveles**
1	1	1		$4 = 1 + 1 + 1 + 1$
		3		$6 = 1 + 1 + 3 + 1$
		γ		$1 + 1 + \gamma + 1$

Tabla 3.5: Cantidad de niveles para $D(pqr^{\gamma})$

El número de niveles del diagrama $D(pqr^{\gamma})$ depende del valor de α, β y γ como se evidencia en la tabla 3.5, por tanto, la cantidad de niveles que hay en diagrama $D(pqr^{\gamma})$ es igual a $1 + 1 + \gamma + 1$, que a su vez es igual a la cantidad de elementos del conjunto.

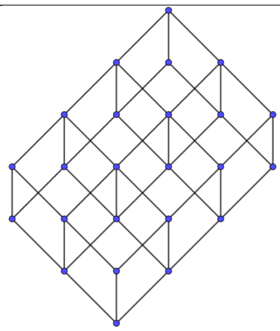
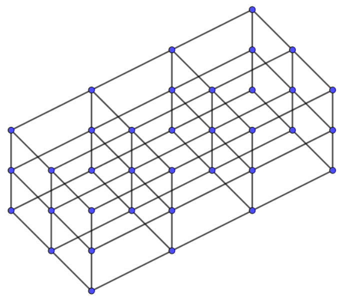
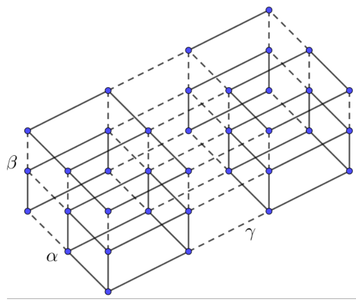
α	β	γ	**Diagrama de Hasse**	**Cantidad de niveles**
2	3	1		$7 = 2 + 3 + 1 + 1$
2	2	3		$8 = 2 + 2 + 3 + 1$
α	β	γ		$\alpha + \beta + \gamma + 1$

Tabla 3.6: Número de niveles para $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma)$

El número de niveles del diagrama $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma)$ depende del valor de α, β y γ, como se evidencia en la tabla 3.6, luego la cantidad de niveles del diagrama es igual a

$$\alpha + \beta + \gamma + 1.$$

3.1.4. Niveles del conjunto $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\phi)$

Se mostrará algunos ejemplos de conjuntos de la forma $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\phi)$, para así establecer la relación de los valores de α, β, γ y ϕ. Cabe aclarar que se anexa una nueva columna en esta tabla para el valor de *phi*. La tabla se divide en seis columnas: el valor de α, el valor de β, el valor de γ, el valor ϕ, el diagrama de Hasse y la cantidad de niveles.

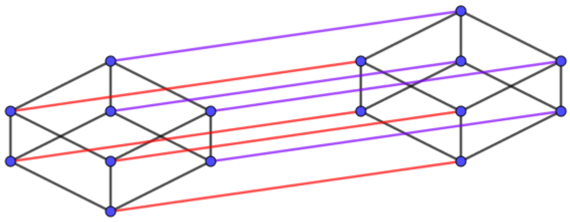
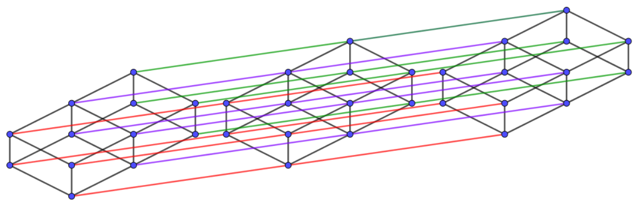
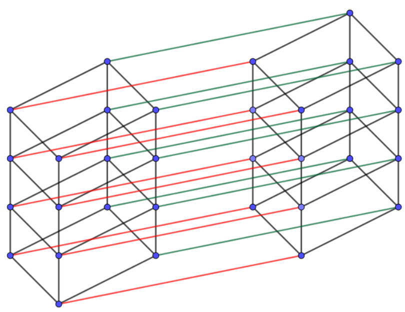
α	β	γ	ϕ	**Diagrama de Hasse**	**Cantidad de niveles**
1	1	1	1		$5 = 1+1+1+1+1$
1	2	1	2		$7 = 1+2+1+2+1$
1	1	3	1		$7 = 1+1+3+1+1$

Tabla 3.7: Cantidad de niveles de algunos $D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\phi})$

Se evidencia en la tabla 3.7 que la cantidad de niveles depende de los valores de α, β, γ y ϕ, por ejemplo para el conjunto $D(pqr^3s)$, la cantidad de niveles es $1+1+3+1=6$. A continuación, se mostrará una tabla general para la cantidad de niveles del diagrama de Hasse para el conjunto $D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\phi})$:

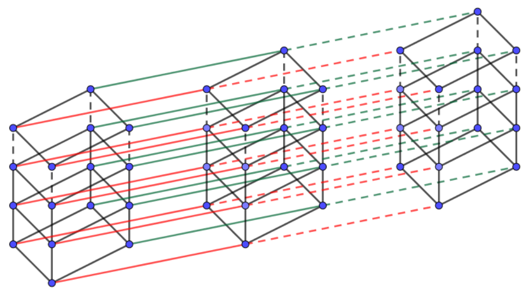
α	β	γ	ϕ	**Diagrama de Hasse**	**Cantidad de niveles**
α	β	γ	ϕ		$\alpha+\beta+\gamma+\phi+1$

Tabla 3.8: Cantidad de niveles para $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\phi)$

En la tabla 3.8 se evidencia que la cantidad de niveles depende del valor de los exponentes de los primos p, q, r y s, por tanto, la cantidad de niveles es igual a $\alpha+\beta+\gamma+\phi+1$:

$$\#Niveles(D(p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\phi)) = \alpha+\beta+\gamma+\phi+1$$

Teniendo en cuenta las tablas para los cuatro tipos distintos de diagramas de Hasse, se concluye que la cantidad de niveles es igual a la suma de los exponentes de los números primos más uno. Por otra parte, se presentó una manera distinta para el caso $D(p^\alpha q^\beta)$ para determinar la cantidad de niveles como la diferencia entre la cantidad de elementos del conjunto y el producto de los exponentes de los números primos p y q.

3.2. Cantidad de elementos por niveles

En cada uno de los niveles de los distintos tipos de diagramas hay una cantidad de elementos. A continuación, se mostrará para los diferentes grupos de diagramas la cantidad de elementos que hay en cada uno de los niveles.

3.2.1. Cantidad de elementos para $D(p^{\alpha})$

En el primer nivel del diagrama hay un elemento que es el número 1, en el segundo nivel están los números primos, en el tercero el producto de dos primos, en el tercer nivel el producto de tres primos y así sucesivamente hasta el último nivel que se encuentra el producto de α primos, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 3.1: $D(p^{\alpha}q^{\beta})$

En cada uno de los diagramas $D(p^{\alpha})$ se evidencia que en cada nivel hay exactamente un elemento. La suma de la cantidad de elementos que hay por niveles es igual a la cantidad de elementos del conjunto, es decir:

$$1(\#Niveles(D(p^{\alpha}))) = \#D(p^{\alpha})$$

Reemplazamos $\#D(p^{\alpha})$ y $\#Niveles(D(p^{\alpha}))$

$$1(\alpha + 1) = \alpha + 1$$

Al multiplicar por 1 se evidencia que se cumple la igualdad

$$\alpha + 1 = \alpha + 1$$

3.2.2. Cantidad de elementos para $D(p^{\alpha}q^{\beta})$

Se mostrará algunos ejemplos de algunos diagramas para determinar la cantidad de elementos que hay por cada uno de los niveles, luego se establecerá alguna relación entre la cantidad de los elementos y los niveles del conjunto.

Ejemplo 18 Se considera el conjunto $D(20)$ con su respectivo diagrama dividido por niveles.

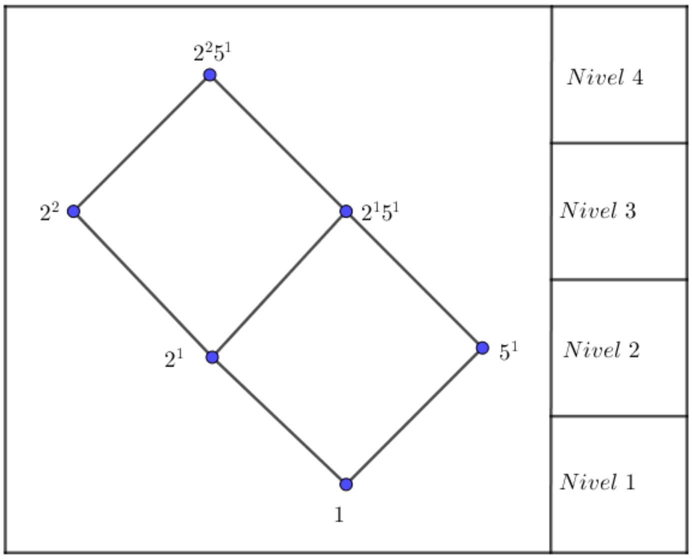


Figura 3.2: Conteo $D(20)$

Se usa los exponentes de la descomposición prima de cada uno de los elementos del conjunto, para mostrar en la siguiente tabla una relación hay entre la cantidad de elementos y los niveles, como se muestra en la siguiente tabla:

Nivel	**Punto**	$\alpha + \beta$
1	1	$0 + 0 = 0$
2	2^1	$1 + 0 = 1$
	5^1	$0 + 1 = 1$
3	2^2	$2 + 0 = 2$
	$2^1 5^1$	$1 + 1 = 2$
4	$2^2 5^1$	$2 + 1 = 3$

Tabla 3.9: Suma de los exponentes por niveles para $D(20)$

El primer sumando de cada una de las sumas es menor o igual a 2, porque el exponente de 2^2 es 2 y el segundo sumando de cada una de las sumas es menor o igual a 1, porque el exponente de 5^1 es 1.

En el nivel 1 hay una posible suma para obtener el 0, en el nivel 2 hay dos posibles sumas para obtener el 1, en el nivel 3 hay dos posibles sumas para obtener 2 y en el nivel 4 hay una posible suma para obtener el 3.

Ejemplo 19 Se considera el conjunto $D(1225)$ con su respectivo diagrama de Hasse.

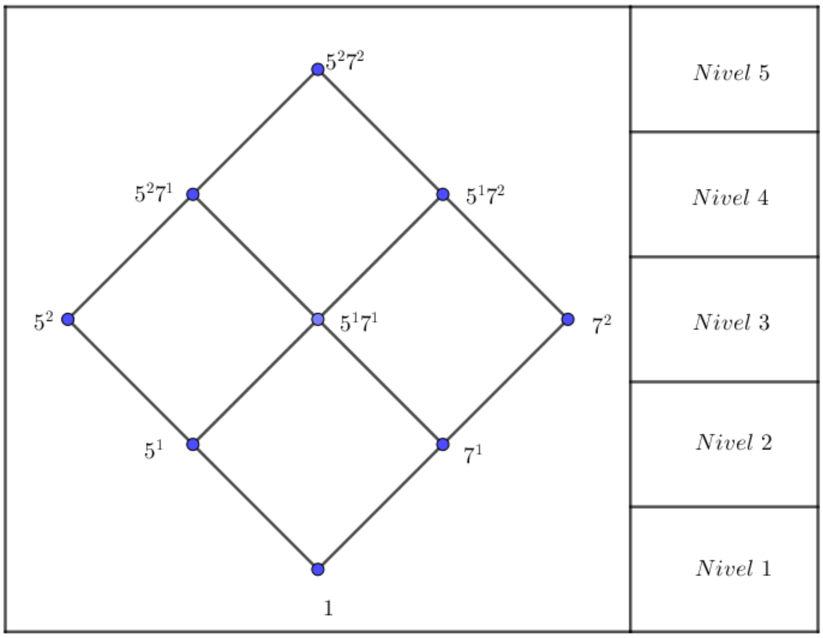


Figura 3.3: Diagrama $D(1225)$ dividido por niveles

De igual manera como en el ejemplo anterior, se usa los exponentes de la descomposición prima de cada uno de los elementos del conjunto, para identificar la relación que hay entre la cantidad de elementos y los niveles, como se muestra en la siguiente tabla:

Nivel	**Punto**	$\alpha+\beta$	**Nivel**	**Punto**	$\alpha+\beta$
1	1	$0+0=0$	3	7^2	$2+0=2$
2	5^1	$1+0=1$	4	$5^2 7^1$	$2+1=3$
	7^1	$0+1=1$		$5^1 7^2$	$1+2=3$
3	5^2	$2+0=2$	5	$5^2 7^2$	$2+2=4$
	$5^1 7^1$	$1+1=2$			

Tabla 3.10: Suma de los exponentes por niveles para $D(1225)$

El primer sumando de cada una de las sumas es menor o igual a 2, porque el exponente de 5^2 es 2 y el segundo sumando de cada una de las sumas es menor o igual a 2, porque el exponente de 7^2 es 2. Por otra parte, en el nivel 1 hay una posible suma para obtener el 0, en el nivel 2 hay dos posibles sumas para obtener el 1, en el nivel 3 hay tres posibles sumas para obtener el 2, en el nivel 4 hay dos posibles sumas para obtener el 3 y en el nivel 5 hay una posible suma para obtener el 4.

En los ejemplos 14 y 15, se evidencia que en el conjunto $D(p^\alpha q^\beta)$ y k nivel tal que

$$k \leq \alpha+\beta+1$$

1. El número de elementos del nivel k es igual a las posibles sumas con dos sumandos, tal que el primer sumando es menor o igual a α y el segundo sumando es menor o igual a β y que sea igual a $k-1$.

3.2.3. Cantidad de elementos para $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma)$

Se presentará dos ejemplos para así realizar una relación entre la cantidad de niveles y cantidad de elementos, pero se considera cuando los exponentes de los números primos son iguales, además si los exponentes son números pares o impares.

Caso I, exponentes impares:

Ejemplo 20 Se considera el conjunto $D(30)$ con su respectivo diagrama dividido por niveles.

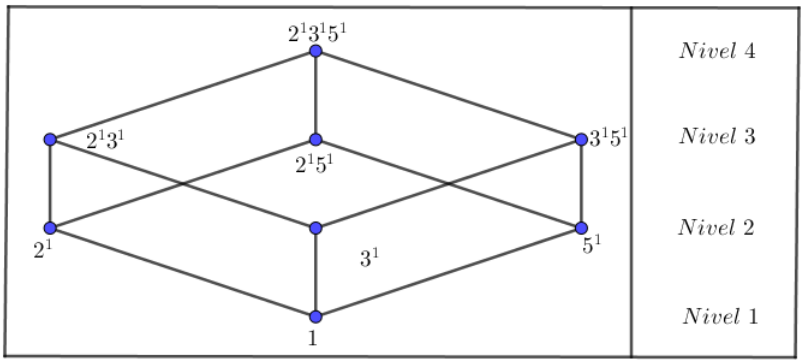


Figura 3.4: Diagrama $D(30)$ dividido por niveles

Se suma los exponentes de cada uno de los primos que le corresponde a cada uno de los puntos, tal que los sumandos son menores o iguales a 1, como se muestra en la siguiente tabla:

Nivel	**Punto**	$\alpha + \beta + \gamma$
1	1	$0+0+0=0$
2	2^1	$1+0+0=1$
	3^1	$0+1+0=1$
	5^1	$0+0+1=1$
3	$2^1 3^1$	$1+1+0=2$
	$2^1 5^1$	$1+0+1=2$
	$3^1 5^1$	$0+1+1=2$
4	$2^1 3^1 5^1$	$1+1+1=3$

Tabla 3.11: Suma de los exponentes por niveles para $D(30)$

Se observa en la tabla 3.11 que en el nivel 1 hay una posible suma para obtener 0, en el nivel 2 hay 3 posibles sumas para obtener 1, en el nivel 3 hay 3 posibles sumas para obtener 2 y en el nivel 4 hay una posible suma para obtener 3.

Caso II, exponentes pares:

Ejemplo 21 Se considera el conjunto $D(900)$ con su respectivo diagrama dividido por niveles.

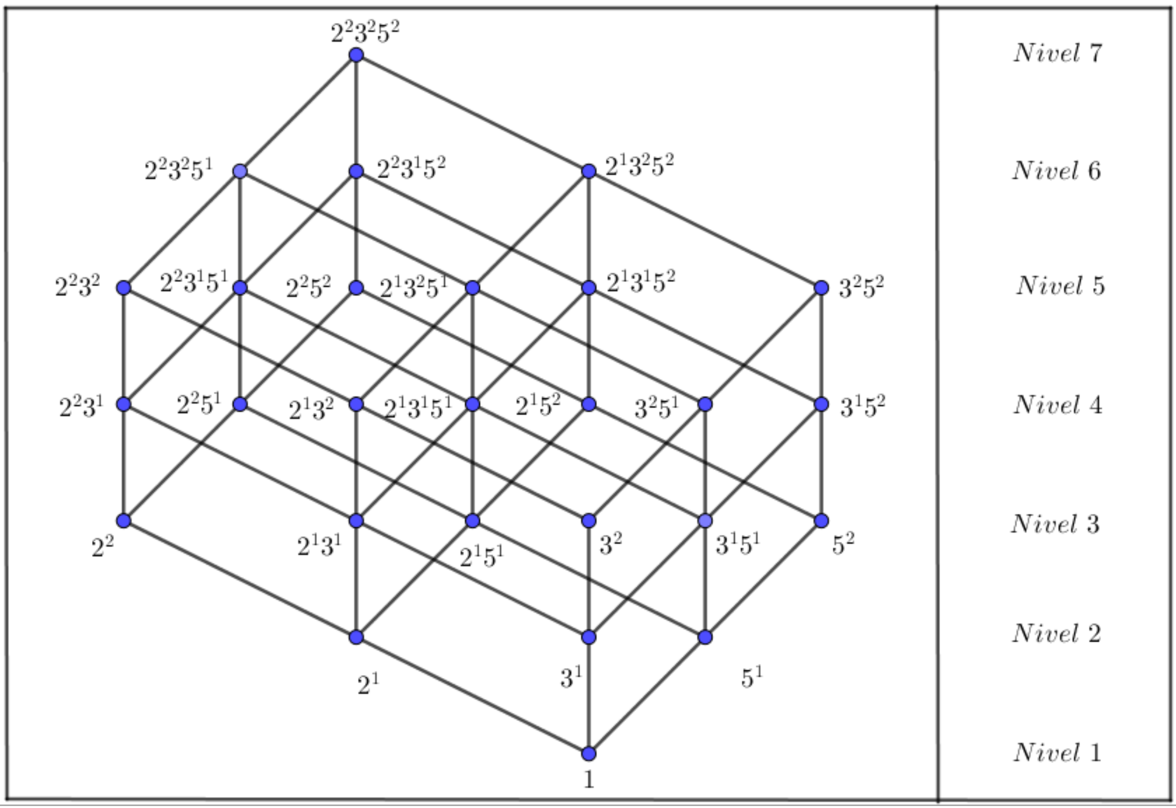


Figura 3.5: Diagrama $D(900)$ dividido por niveles

Se suma los exponentes de cada uno de los números primos que les corresponde a cada uno de los puntos, tal que los sumando sean menores o iguales a 2, como se muestra en la siguientes tabla:

Nivel	**Punto**	$\alpha+\beta+\gamma$	**Nivel**	**Punto**	$\alpha+\beta+\gamma$
1	1	$0+0+0=0$	4	$2^1 5^2$	$1+0+2=3$
2	2^1	$1+0+0=1$		$3^2 5^1$	$0+2+1=3$
	3^1	$0+1+0=1$		$3^1 5^2$	$0+1+2=3$
	5^1	$0+0+1=1$	5	$2^2 3^2$	$2+2+0=4$
3	2^2	$2+0+0=2$		$2^2 3^1 5^1$	$2+1+1=4$
	$2^1 3^1$	$1+1+0=2$		$2^2 5^2$	$2+0+2=4$
	$2^1 5^1$	$1+0+1=2$		$2^1 3^2 5^1$	$1+2+1=4$
	3^2	$0+2+0=2$		$2^1 3^1 5^2$	$1+1+2=4$
	$3^1 5^1$	$0+1+1=2$		$3^2 5^2$	$0+2+2=4$
	5^2	$0+0+2=2$	6	$2^2 3^2 5^1$	$2+2+1=5$
4	$2^2 3^1$	$2+1+0=3$		$2^2 3^1 5^2$	$2+1+2=5$
	$2^2 5^1$	$2+0+1=3$		$2^1 3^2 5^2$	$1+2+2=5$
	$2^1 3^2$	$1+2+0=3$	7	$2^2 3^2 5^2$	$2+2+2=6$
	$2^1 3^1 5^1$	$1+1+1=3$			

Tabla 3.12: Suma de los exponentes por niveles para $D(900)$

Se observa en la tabla 3.12 que en el nivel 1 hay una posible suma para obtener 0, en el nivel 2 hay 3 posibles sumas para obtener 1, en el nivel 3 hay 6 posibles sumas para obtener 2, en el nivel 4 hay 7 posibles sumas para obtener 3, en el nivel 5 hay 6 posibles sumas para obtener 4, en el nivel 6 hay 3 posibles sumas para obtener 5 y en el nivel 7 hay una posible suma para obtener 6.

3.3. Otras características de la cantidad de elementos y los niveles

Se determinaron algunas características distintas a las que se evidenciaron anteriormente con la cantidad de elementos y niveles, para los conjuntos $D(p^\alpha q^\beta)$ y $D(p^\alpha q^\beta r^\gamma)$.

3.3.1. $D(p^\alpha q^\beta)$

En los ejemplos 14 y 15, se evidencia que en cada uno de los niveles $\alpha+\beta+1$ se usan dos sumandos que deben ser menores o iguales a α y β para obtener $\alpha+\beta$, pero se presentan dos casos, cuando $\alpha=\beta$ y $\alpha<\beta$.

1. Si $\alpha=\beta$, entonces

- ***i.*** La mayor cantidad de sumas está en el nivel $\frac{\alpha+\beta+2}{2}$.
- ***ii.*** La cantidad de sumas en el nivel $\frac{\alpha+\beta+2}{2}$ es $\alpha+1=\beta+1$.

2. Si $\alpha<\beta$, entonces

- ***i.*** La mayor cantidad de sumas es de $\alpha+1$.
- ***ii.*** La cantidad de niveles que tiene $\alpha+1$ sumas son $\beta-\alpha+1$.

Se cumple de forma análoga para $\alpha > \beta$ el caso 2.

Por otra parte, se presentan otras generalidades que se cumplen para los dos casos anteriores:

1. En el primer y último nivel hay exactamente un elemento.

2. En el segundo nivel hay dos elementos que son las composiciones de 1 con dos cifras significativas, es decir, $1 + 0$ y $0 + 1$.

A continuación, se muestra de forma general los diagramas de los dos casos para los exponentes.

Caso $\alpha = \beta$

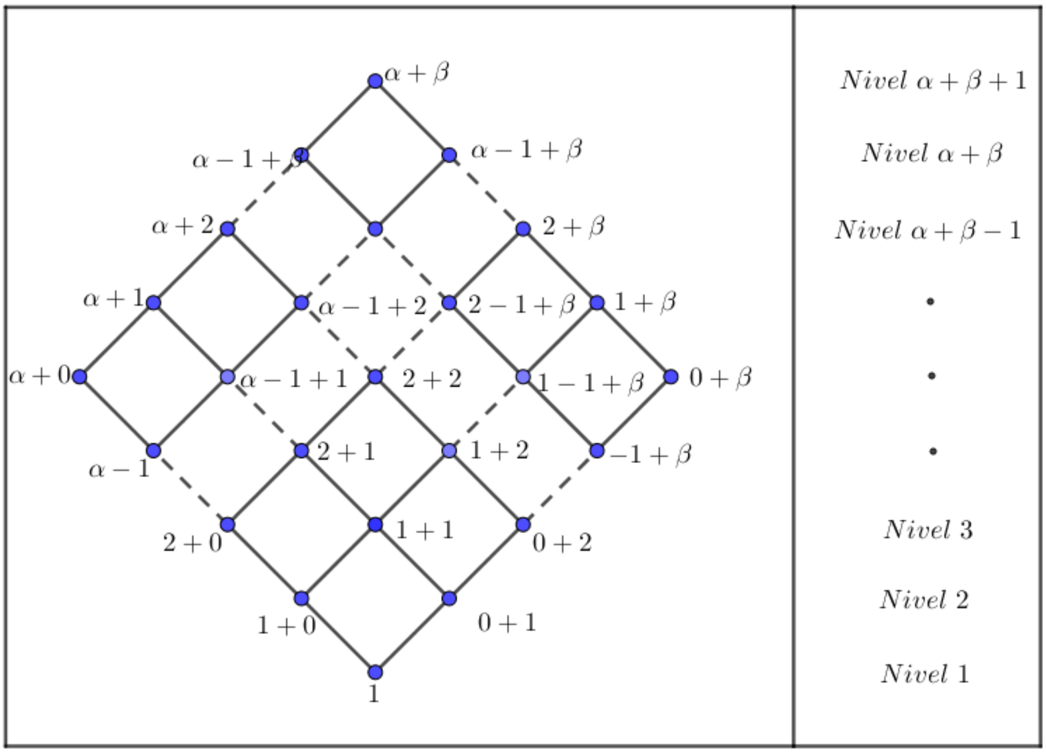


Figura 3.6: Conteo $D(p^\alpha q^\beta)$, para $\alpha = \beta$

En cada uno de los diagramas $D(p^\alpha q^\beta)$ de la tabla 3.4, donde $\alpha = \beta$ se evidencia que:

i. En el primer y último nivel tienen exactamente un elemento.

ii. Desde el primer hasta el nivel $\frac{\alpha+\beta+2}{2}$ aumenta de a un elemento.

iii. Desde el nivel $\frac{\alpha+\beta+2}{2}$ hasta el último disminuye de a un elemento.

Caso $\alpha < \beta$

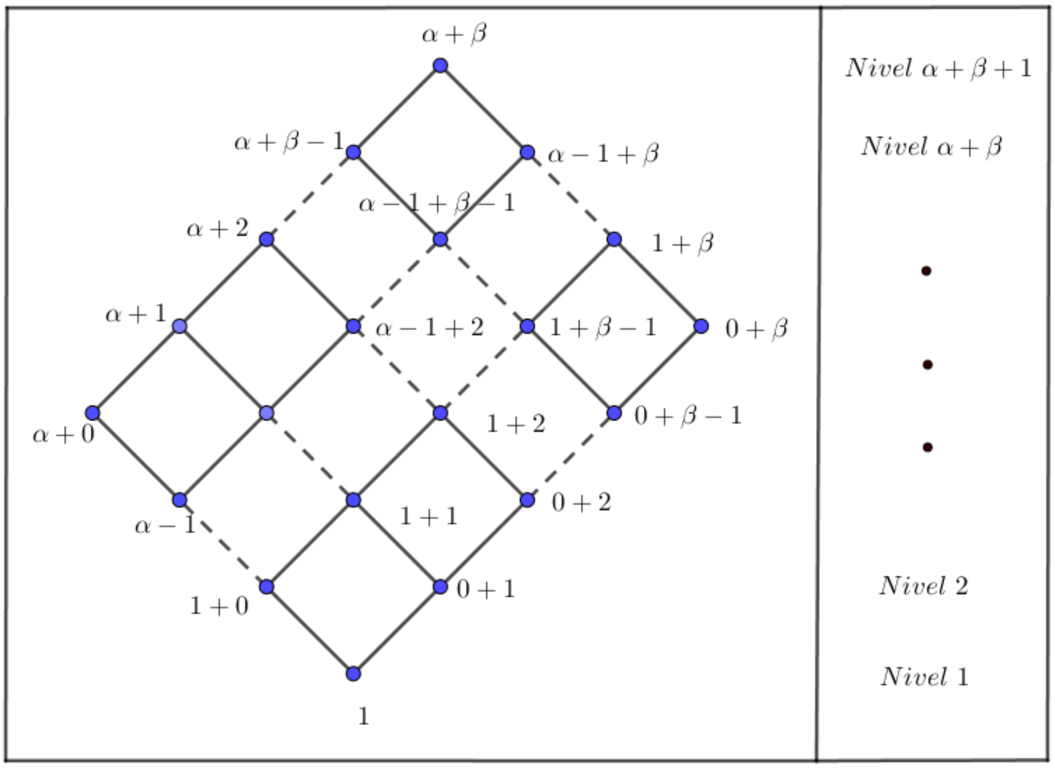


Figura 3.7: Conteo $D(p^{\alpha}q^{\beta})$, para $\alpha < \beta$

i. El primer y último nivel tienen exactamente un elemento.

ii. Desde el primer nivel hasta el nivel $\alpha+1$ aumenta de a un elemento.

iii. En cada uno de los niveles r, donde $\alpha+2 \leq r \leq \beta+1$, hay $\alpha+1$.

iv. Desde el nivel $\beta+2$ hasta el nivel $\alpha+\beta+1$ disminuye de a un elemento.

3.3.2. $D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma})$

En los ejemplos 16 y 17, se evidencia que en cada uno de los niveles $\alpha+\beta+\gamma+1$ se usan tres sumandos que deben ser menores o iguales a α, β y γ, para obtener $\alpha+\beta+\gamma$. Por otra parte, se presentan otras características independientes para el caso I y II.

1. Si α, β y γ son números impares, entonces

- ***i.*** La mayor cantidad de sumas está en los niveles $\frac{\alpha+\beta+\gamma+1}{2}$ y $\frac{\alpha+\beta+\gamma+1}{2}+1$.

2. Si α, β y γ son números pares, entonces

- ***i.*** La mayor cantidad de sumas está en el nivel $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}+1$.

Para el diagrama que le corresponde a $D(p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}r^{\phi})$ no se va considera la cantidad de elementos por niveles en este trabajo, porque cada vez que α, β, γ y ϕ crece, la representación gráfica es difícil de analizar por la cantidad de puntos.

CAPÍTULO 4

PROYECCIONES

Durante el trabajo se realizó diferentes tipos de diagramas, donde se utilizó como recurso el software GeoGebra, se presentaró algunas dificultades, ya que se construyó uno por uno o por la opción de rastreo para que mostrará un boceto sin los elementos que se le asigna a cada uno de los puntos. Una de las proyecciones es crear un programa de tal manera que al asignar los valores de los primos y los exponentes respectivos muestre el diagrama correspondiente.

Como futura docente de matemáticas es importante diseñar un software que facilite la apropiación de los conceptos de mínimo común múltiplo y máximo común divisor, usando los diagramas de Hasse, asociados a la relación de divisibilidad.

Conclusiones

1. Se encontró una forma que permite representar el diagrama de Hasse correspondiente para el conjunto $D(n)$, en particular para $n = p^\alpha, n = p^\alpha q^\beta, n = p^\alpha q^\beta r^\gamma$ y $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\phi$, es mediante la cantidad de primos distintos y los exponentes de los números estos.

2. Los diagramas de Hasse para el conjunto de los divisores de $p^\alpha, p^\alpha q^\beta, p^\alpha q^\beta r^\gamma$ y $p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\phi$ se asocian con un segmento, un paralelogramo, un prisma y un hipercubo con proyección, respectivamente. Las dimensiones del segmento, paralelogramo, prima y el hipercubo dependen de los valores de α, β, γ y ϕ.

3. Se determinó una relación de equivalencia sobre los diagramas de Hasse, de tal manera que al superponerse dos diagramas coincidan.

4. Dada la relación de equivalencia se determinó la clase de equivalencia sobre el conjunto de los números naturales sin el 0 ($\mathbb{N}^*$).

5. Se realizó un paralelo de la paradoja del Hotel infinito de Hilbert, a partir de la clase de equivalencia definida, ubicando los turistas del hotel a lo buses usando como distintivo los diagramas de Hasse.

6. Se encontrarón algunas características comunes en los distintos tipos de diagrama de Hasse sobre la cantidad de niveles y la cantidad de elementos que hay por niveles, a partir de α, β, γ y ϕ.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Abellanas, M. & Lodares, D. (1990), *Matemática discreta.* Marcrobit Corporation, Miami-Florida.

[2] Acosta, L. (2016). *Temas de teoría de retículos.* Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

[3] Aguilera, A. y Pérez, F.(2001). *Un método para la obtención del teseracto a partir del desenvolvimiento de un hipercubo (4D).* Recuperado https://www.researchgate.net/publication/268420268_Un_metodo_para_la_obtencion_del_teseracto_a_partir_del_desenvolvimiento_1_de_un_hipercubo_4D

[4] Cubillos, A. (2017). *Entropía algebraica de un poset.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

[5] Jiménez, R., Gordillo, E. y Rubiano, G. (2004). *Teoría de números para principiantes.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

[6] Muñoz, J.(2002). *Introducción a la teoría de conjuntos.* Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.

[7] PETTOFREZZO, A. y BYRKIT, D. (1972) *Introducción a la teoría de los números* España: Ediciones del Castillo, S. A.

[8] SORA, A. y PACHECO, D. (2013). *Particiones y composiciones de números multipartidos.* II Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática 2013. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

[9] VÁCLAV, P. (2015). *Quantum Hilbert Hotel.* PHYS. REV. LETT. DOI: 10.1103/PHYSREVLETT.115.160505

[10] ZALAMEA, F.(2007). *Fundamentos de matemáticas.* Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.