# Funciones semicontinuas

**Edgar Alexander Olarte Chaparro**

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia
Departamento Matemáticas)
Bogotá, Colombia
2017

# Funciones semicontinuas

**Edgar Alexander Olarte Chaparro**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de licenciado en matemáticas.

Asesor:
Alberto Donado

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia
Departamento Matemáticas
Bogotá, Colombia
2017

## Dedicatoria

**A Dios**.
Por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos, además de su infinita bondad y amor.

**A mi familia**:
Por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, que me ha permitido ser una persona honesta.

**A mis amigos.**
Que me apoyaron académica y profesionalmente gracias por haberme ayudado a realizar este trabajo. Finalmente a los maestros, aquellos que marcaron cada etapa de mí camino universitario, y que me ayudaron en asesorías y dudas presentadas en la elaboración del trabajo de grado.

Un matemático que no tenga también algo de poeta jamás será un completo matemático.

Karl Weierstrass

| | |
|---|---|
| | FORMATO |
| | RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE |

| 1. Información General | |
|---|---|
| **Tipo de documento** | Trabajo de grado. |
| **Acceso al documento** | Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central. |
| **Título del documento** | Funciones semicontinuas. |
| **Autor** | Olarte Chaparro Edgar Alexander. |
| **Director** | Gil Alberto de Jesus Donado Nuñez. |
| **Publicación** | Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017. p. 79. |
| **Unidad Patrocinante** | Universidad Pedagógica Nacional. |
| **Palabras Claves** | TOPOLOGÍA, BASE, ABIERTO, CERRADO, FUNCIÓN SEMICONTINUA SUPERIORMENTE, FUNCIÓN SEMICONTINUA INFERIORMENTE, CONTINUIDAD, SUBGRAFO, EPIGRAFO, COMPACIDAD. |

**2. Descripción**

El presente trabajo de grado es una monografía sobre las funciones semicontinuas; en la primera parte se exponen las nociones generales de topología necesarias para la comprensión de las funciones semicontinuas superior e inferiormente. Además, se explica la rectal real extendida. Después se da a conocer las funciones semincotinuas superiormente y sus caracterizaciones topológica y geométrica. De iual manera con las funciones semicontinuas inferiormente. Por últimno, se presentan algunas propiedades de las funciones semicontinuas superior o inferiormente. En el estudio de las funciones semicontinuas se propone el subgrafo y el epigrafo como herramienta para caracterizar una función semicontinua superior o inferiormente según sea el caso.

**3. Fuentes**

Diedudonné Jean, (1980). Elementos de Análisis, Tomo II. Editorial Reverte.

García, R: Campos de Espacios Métricos de Funciones, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Tesis de Magister, 1998.

García, R. ; Reyes, E. ; Varela, J.: A semicontinuous continuum. En: Boletín de Matemáticas Volumen XII No. 1 (2005), p. 1-18

Gelbaum, B.; Olmsted, J: Counterexamples in Analysis. New York : Dover Publications, 1964.

| 3. Fuentes |
|---|
| Lesmes, J. ; Abuabara, T: Elementos de Análisis Funcional. Bogotá : Universidad de los Andes, 2010. |
| Munkres, J.: Topología. Massachusetts Institute of technology : Prentice Hall, 2002. |
| Neira C.: Topología general. Universidad Naional de Colombia. 2011. |
| Neira, C. ; Varela, J.: On separation axioms of uniform bundles and sheaves. En: Applied General Topology. Volumen 5 No. 2 (2004), p. 155-171. |
| Rubiano, G.: Topología General (2da ed.). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá: Panamericana, 2002. |
| Spivak, M.: Cálculo innitesimal. Barcelona : Editorial Reverte, 1992. |
| Vallejo, F.: Clases de Baire y el concepto de semicontinuidad. 2008. |

| 4. Contenidos |
|---|
| La monografía inicia con una introducción, en la cual se describe su correspondiente contenido. Luego, aparece la justificación donde se muestran los intereses que motivaron a indagar y elaborar un texto expositivo sobre este tema; a continuación se abordan los objetivos que sirvieron como guia al comenzar este proceso. Después se exponen los preliminares en donde se muestran algunas definiciones y resultados básicos en topología que serán utilizados como la recta real extendida $\overline{\mathbb{R}}$, donde la conforma los números reales, menos infinito $(-\infty)$ y más infinito $(+\infty)$ o simplemente $(\infty)$; se incluye su respectiva topología usual en el marco teórico se presentan las definiciones y proposiciones relacionados con las funciones semicontinuas que se requieren en el trabajo. |
| En la siguiente sección se plantean las funciones semicontinuas superiormente, donde se parte de la definición puntual a partir del concepto de vecindades para aterrizar en la caracterización topológica de funciones semicontinuas superiormente, la cual permite un análisis global de la semicontinuidad superior de una función. Además, se expone la caracterización geométrica por medio del subgrafo de la función. En la presentación de cada caracterización se introducen ejemplos de diversa índole para su mejor comprensión. Gracia a la representación gráfica y la base del espacio topológico se analizan diferentes casos. |
| En la segunda sección se abordan las funciones semicontinuas inferiormente, desde luego en menor detalle que las funciones semicontinuas superiormente pero realizando la caracterización por medio del epigrafo de una función. |
| Por último, en relación con los contenidos expuestos en las anteriores seccciones se ilustran algunos resultados y propiedades de las funciones semicontinuas. |
| Para finalizar la monografía, se enuncian las conclusiones del trabajo donde se notan las principales relaciones de las caracterizaciones, las bondades de cada una y su importancia de acuerdo con su definición. |

| 5. Metodología |
|---|
| El proceso para desarrollar el presente trabajo, se inició con el estudio del concepto de semicontinuidad superior e inferior de funciones en espacios topológicos, proponiendo ejemplos y analizando casos especiales de funciones o de espacios topológicos. Por tal motivo a medida que se avanzaba, eran necesarios los conceptos topológicos subyacentes en cada ejemplo o caracterización con el fin de brindar las correspondientes validaciones o demostraciones. Además, en la caracterización geométrica, se hizó indispensable la comprensión del subgrafo y epigrafo de una función. En el transcurso del trabajo se presentaban resultados aislados que al fin se logró organizar para obtener un documento definitivo. |

| 6. Conclusiones |
|---|
| En el desarrollo del trabajo al abordar las diferentes caracterizaciones de la semicontinuidad de funciones, se puede concluir que a partir de la definición local de semicontinuidad por medio de vecindades es posible determinar la semicontinuidad global de forma topológica y geométrica. En la caracterización topológica se aprecia una disminución notable de los casos para verificar o comprobar si una función es semicontinua.<br>En la caracterización por el subgrafo o el epigrafo de una función para determinar si una función es semicontinua se distingue la importancia del bosquejo de la función porque visualmente se puede afirmar o refutar si una función es semicontinua superior o inferiormente.<br>Un aspecto de gran interés en matemáticas es detectar los elementos máximos o mínimos sin embargo en los casos donde la función es discontinua no es posible garantizar la existencia de tales elementos. Empero, gracias a la semicontinuidad y con otra característica se puede afirmar que estos elementos existen.<br>Una conclusión personal del trabajo es la satisfacción al descubrir regularidades o relaciones de la continuidad de funciones con la semicontinuidad de funciones. Una de ellas es que la intersección del subgrafo con el epigrafo de una función se obtiene el grafo de la respectiva función. Por tanto, si el grafo de la función es cerrado en el contexto de la topología producto, entonces la función es continua. Otra involucra los ejemplos, en los cuales se propuso funciones semicontinuas en subconjuntos densos del espacio topológico y a partir de esto establecer una generalización. |

| | |
|---|---|
| **Elaborado por:** | Edgar Alexander Olarte Chaparro |
| **Revisado por:** | Gil Alberto de Jesus Donado Nuñez |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Fecha de elaboración del Resumen:** | 03 | 04 | 2017 |

# Contenido

# A. Lista de símbolos y figuras

Se incluyen los símbolos y abreviaturas incluidas en el trabajo, de igual forma se rgistran las figuras.

## Símbolos y abreviaturas

| **Símbolo** | **Definición** |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | Los números reales |
| $\overline{\mathbb{R}}$ | La recta real extendida |
| $(T, d)$ | El espacio métrico, con $d$ una métrica sobre $T$ |
| $d\,(x, y)$ | Distancia de $x$ a $y$ |
| sup | El supremo de un conjunto |
| $(T, \tau)$ | El espacio topológico, con $\tau$ una topología sobre $T$ |
| $\tau_u$ | Topología usual en $\mathbb{R}$ |
| máx | El máximo de un conjunto |
| mín | El mínimo de un conjunto |
| $\tau_{cd}$ | Topología de colas a derecha cerradas en $\mathbb{R}$ |
| $\tau_{ci}$ | Topología de colas a izquierda cerradas en $\mathbb{R}$ |
| $f^{-1}\,(U)$ | Imagen inversa del conjunto $U$ a través de $f$ |
| $subg\,(f)$ | El subgrafo de la función $f$ |
| $epi\,(f)$ | El epigrafo de la función $f$ |

# Lista de figuras

# B. Introducción

El presente trabajo de grado muestra un estudio de las funciones semicontinuas superior e inferiormente, para ello se inicia exponiendo la correspondiente justificación y el interés que motivo a abordar, desarrollar e indagar sobre este tema. Después, se identifican los objetivos que se trazaron al inicio de este proceso con el fin de guiar el desarrollo de la monografía.

En la siguiente sección aparecen los preliminares en donde se muestran algunas definiciones y resultados básicos en topología que serán utilizados en el desarrollo de las restantes secciones, uno de ellos es la recta real extendida $\overline{\mathbb{R}}$, la cual la conforma los números reales, menos infinito $(-\infty)$ y más infinito $(+\infty)$ o simplemente $(\infty)$. Además, se incluye su respectiva topología usual la cual es de gran importancia en el marco teórico.

A continuación se procede a iniciar con el capítulo uno en el cual se abordan las funciones semicontinuas superiormente, donde se parte de la definición puntual a partir del concepto de vecindades para aterrizar en la caracterización topológica de funciones semicontinuas superiormente, la cual permite un análisis global de la semicontinuidad superior de una función. Además, se expone la caracterización geométrica es decir, a partir del subgrafo de la función, en este estudio se visualiza la importancia de la representación grafica de la función y la representación de los abiertos básicos del espacio topológico donde se define la función y junto con la topología definida en la recta real extendida.

En la presentación de cada caracterización se introducen ejemplos de diversa índole para su mejor comprensión. También, se realizan las correspondientes comprobaciones o demostraciones según el respectivo caso.

En el segundo capítulo se abordan las funciones semicontinuas inferiormente, desde luego en menor detalle que las funciones semicontinuas superiormente pero al igual se parte de la definición puntual por medio de vecindad para luego deducir las caracterizaciones topológica y la caracterización geométrica a través del epigrafo de una función.

En el último capítulo, en relación con los contenidos expuestos en las anteriores secciones se ilustran algunos resultados y propiedades de las funciones semicontinuas, como es el caso de que si una función es semicontinua superior e inferiormente entonces la función es continua.

Finalmente se presentan las conclusiones generales obtenidas en el desarrollo del trabajo, donde se establece el cumplimiento de los objetivos propuestos al inicio de la monografía; de modo que se explica que a partir del subgrafo y el epigrafo de una función es posible verificar si una función es semcontinua o continua; y para terminar se muestra la bibliografía empleada en el desarrollo del trabajo.

# C. Justificación

El estudio de las funciones discontinuas y en especial de las funciones semicontinuas, es un tema donde convergen diferentes áreas del conocimiento matemático como la topología y el análisis. El estudio se inició con la lectura sobre campos de espacios uniformes y campos de espacios métricos, donde las funciones semicontinuas son importantes. Luego, el interés se centró en mostrar las características de estas funciones, su representación, su respectivo análisis de las propiedades que pueden cumplir.

Baire planteo en un comienzo las funciones semicontinuas a partir de la noción de continuidad de una manera equivalente, la presente monografía consiste en estudiar la semicontinuidad de las funciones como un intéres personal por las funciones discontinuas y en la posibilidad de establecer relaciones con los conocimientos adquiridos en este tema al largo de mi formación académica.

En mi formación profesional como docente en matemáticas se hace indispensable estudiar un objeto de conocimiento con el fin de comprenderlo, de tal manera que se pueda divulgar y dar a conocer; por esta razón la semicontinuidad me permitió ampliar el estudio con el fin de realizar un documento sobre este tema.

# D. Objetivos

Objetivo general

Realizar un estudio sobre las Funciones Semicontinuas Superiormente e Inferiormente y elaborar un texto académico cos sus características y algunas propiedades.

Objetivos específicos

Comprender y dar a conocer la semicontinuidad de las funciones por medio de la caracterización topológica y la caracterización geométrica.

Encontrar ejemplos de Funciones Semicontinuas en diferentes espacios topológicos.

Describir regularidades de las funciones semicontinuas en espacios topológicos con el fin de enunciar proposiciones relacionadas con la semicontinuidad.

Identificar diferentes caracterizaciones de Funciones Semicontinuas y sus respectivas equivalencias.

Analizar algunas propiedades de Funciones Semicontinuas a través de ejemplos en espacios topológicos.

Explicar la continuidad de una función en espacios topológicos en términos de la semicontinuidad superior e inferior.

# 1 Preliminares

En esta parte, se presentarán las nociones básicas de topología y elementos de análisis matemático con el fin de brindar las herramientas para la comprensión óptima de las funciones semicontinuas. El estudio de las funciones semicontinuas, se basa en espacios topológicos, por tal motivo se expondrán ejemplos que involucren topologías necesarias en el desarrollo del trabajo.

## 1.1. Espacios métricos

La medición se encuentra relacionada con los seres humanos, nos interesamos por establecer criterios para medir. En relación con esto, en una colección de objetos, nos preguntamos sobre cómo determinar una distancia entre algún par de estos objetos. Además, gracias a la métrica podemos comprende conceptos de matemáticas como límite y continuidad.

Por tal motivo, empezaremos considerando conjuntos dotados de una distancia, a los que se denominan espacios métricos. El matemático francés Maurice Fréchet [1] introdujo esta noción, que juega un papel fundamental en las matemáticas modernas.

**Definición 1.1.1.** Una **métrica** en un conjunto no vacío $T$, es una función $d : T \times T \longrightarrow \mathbb{R}$, definida sobre el producto cartesiano $T \times T$ y con valores reales, que satisface las siguientes condiciones para $x$, $y$, $z$ elementos cualesquiera de $T$.[2]

i. $d(x, y) \geqslant 0$,

ii. $d(x, y) = 0$, si y solo si $x = y$,

iii. $d(x, y) = d(y, x)$ y

iv. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (Desigualdad triangular)

Si $d$ es un métrica sobre $T$, se dice que la pareja $(T, d)$ es un espacio métrico, algunas veces se escribe simplemente $T$, para denotar el espacio métrico.
La función $d$ se le llama función distancia y al número real $d(x, y)$ se le conoce como distancia de $x$ a $y$.

[1] *Fréchet* Introdujo en 1906 los espacios métricos y desarrolló las primeras nociones de topología.
[2] Lesmes, J. ; Abuabara, T: Elementos de Análisis Funcional. Bogotá: Universidad de los Andes, 2010

**Ejemplo 1.1.1.** El ejemplo más sencillo, pero de gran importancia en el presente trabajo, es la función distancia definida como $d(x, y) = |x - y|$, en la recta $\mathbb{R}$, ver la figura 1-1.

De aquí en adelante, a menos que se exprese lo contrario, se considera a $\mathbb{R}$ dotado de esta métrica, la cual se le denomina métrica usual en $\mathbb{R}$.

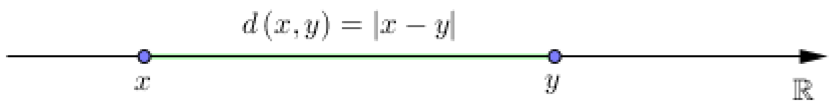


**Figura 1-1**: Distancia en la recta real

La representación geométrica de la distancia en $\mathbb{R}^2$, se muestra a continuación.

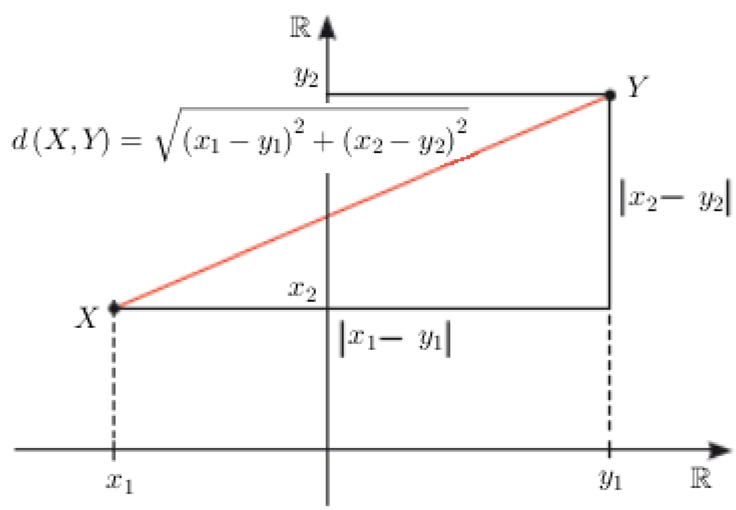


**Figura 1-2**: Distancia en el plano

Los anteriores ejemplos de espacios métricos no se utilizan en forma explicita en el estudio de la semicontinuidad de una función; sin embargo, son necesarios en los argumentos planteados para sustentar o verificar si una función es semicontinua.

**Ejemplo 1.1.2.** Sean $(T, d)$ un espacio métrico y $S$ un subconjunto de $T$.
La función $d_S : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $d_S(x, y) = d(x, y)$, es una métrica en $S$ conocida como métrica inducida por $d$ en $S$, se dice que $S$ es un subespacio métrico de $T$.

En algunos ejemplos que se analizan posteriormente, se presentan casos en los cuales no se trabaja en todo el espacio topológico sino en algún subconjunto de este. De esta forma, si tomamos $T = \mathbb{R}$ y el intervalo $S = (0, 1)$, como $S \subset \mathbb{R}$, entonces asumimos que $S$ hereda la métrica usual de $\mathbb{R}$.

En seguida se presenta un espacio métrico que se tiene en cuenta en el planteamiento de un ejemplo de funcines semicontinuas inferiormente, por tal motivo, se ofrecerá su correspondiente demostración.

**Ejemplo 1.1.3.** Sea $T$ el conjunto de todas las funciones acotadas[3] $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. La función $d : T \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\}$ es una métrica sobre $T$.

En seguida, verificamos las condiciones para que $d(f,g)$ sea una métrica.

*Demostración.* (i.) En relación con la primera condición, se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{gathered} |f(x) - g(x)| \geqslant 0, \\ \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\} \geqslant 0, \\ d(f,g) \geqslant 0. \end{gathered}$$

Por tal motivo, se cumple la primera condición.

(ii.) Ahora, en la segunda condición se comprueban las siguientes implicaciones:
Si $f(x) = g(x)$ entonces $d(f,g) = 0$. Luego,

$$\begin{gathered} f(x) = g(x), \\ f(x) - g(x) = 0, \\ |f(x) - g(x)| = 0, \\ \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \sup\{0 : x \in \mathbb{R}\}, \\ \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\} = 0. \end{gathered}$$

Por tanto, $d(f,g) = 0$.

En relación con la implicación, si $d(f,g) = 0$ entonces $f(x) = g(x)$, tenemos que:

$$\begin{gathered} \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\} = 0, \\ f(x) - g(x) = 0, \text{ porque } |x| \geqslant 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \\ f(x) - g(x) = 0, \\ f(x) = g(x). \end{gathered}$$

Luego, se cumple que $d(f,g) = 0$, si y solo si $f(x) = g(x)$.

(iii.) En relación con la tercera condición, se tiene:

$$\begin{gathered} d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \sup\{|g(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \text{ y} \\ d(g,f) = \sup\{|g(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\}. \end{gathered}$$

Es decir, $d(f,g) = d(g,f)$.

[3]Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada, si existe un número real $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(iv.) Por último, la cuarta condición:

$$
\begin{aligned}
d(f,g) &= \sup\{|f(x)-g(x)| : x\in\mathbb{R}\},\\
&= \sup\{|f(x)-h(x)+h(x)-g(x)| : x\in\mathbb{R}\},\\
&\leqslant \sup\{|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)| : x\in\mathbb{R}\}, \text{ porque } |a+b|\leqslant|a|+|b|,\\
&\leqslant \sup\{|f(x)-h(x)| : x\in\mathbb{R}\}+\sup\{|h(x)-g(x)| : x\in\mathbb{R}\},\\
&\leqslant d(f,h)+d(h,g).
\end{aligned}
$$

Finalmente, se concluye que $d(f,g)$ es una métrica sobre el conjunto de funciones acotadas definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

$\square$

En particular, cuando se toma el conjunto $T$, formado por todas las funciones continuas de $[0,1]$[4] en $\mathbb{R}$ y $d(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)| : x\in\mathbb{R}\}$, se obtiene una métrica en $T$.

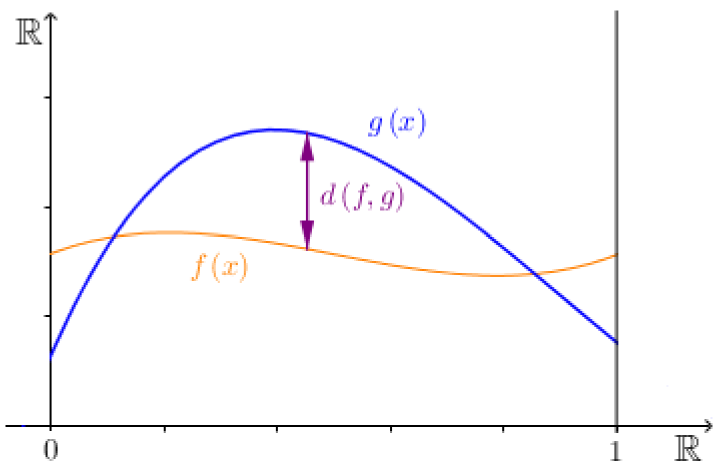


**Figura 1-3**: Distancia entre funciones

Es posible concluir a partir de la continuidad de las funciones que la distancia entre las funciones $f$ y $g$ corresponde a la mayor diferencia entre sus correspondientes valores, como se muestra en la figura 1-3.

## 1.2. Espacios topológicos

En topología existe un especial interés por las funciones continuas, de alguna manera se desea extender el concepto de continuidad a espacios diferentes al generado por la métrica usual en los números reales.

[4]Es importante aclarar que toda función continua en un intervalo cerrado es una función acotada.

Por tal motivo, es imprescindible identificar los elementos relacionados con la topología general, como son: conjunto abierto, conjunto cerrado, vecindad, base de una topología, compacidad y continuidad. Además, reconocer algunas topologías especiales definidas en los números reales, entre otros.

**Definición 1.2.1.** Sea $T$ un conjunto no vacio. Una colección $\tau$ de subconjuntos de $T$ es una topología sobre $T$ sí:

1. $T$ y el conjunto vacío, $\emptyset$, pertenecen a $\tau$,

2. la unión de cualquier número (finito o infinito) de conjuntos en $\tau$ pertencen a $\tau$, y

3. la intersección de dos conjuntos cualesquiera de $\tau$ pertencen a $\tau$.

La pareja $(T, \tau)$ se le denomina **espacio topológico**. Ademas, los elementos de $\tau$ se les llama **conjuntos abiertos** y si el conjunto $A \subseteq T$ es un conjunto abierto o simplemente abierto, entonces su complemento, el conjunto $T - A$ es un **conjunto cerrado**.

Además, la segunda condición es una herramienta útil para comprobar si un conjunto es abierto, de modo que si para cada elemento de un conjunto, es posible determinar un abierto que incluya al elemento y este contenido en el conjunto, podemos concluir que el conjunto es abierto, ya que lo podemos expresar como la unión de estos abiertos que contienen a cada elemento del conjunto.

**Ejemplo 1.2.1.** Sean $T = \{0, 1\}$ y la topología de *Sierpinski*[5] definida sobre el conjunto $T$, como $\tau = \{\emptyset, \{0\}, T\}$.

La colección $\tau$ de subconjuntos de $T$, satiface las condiciones para ser una topología sobre $T$, porque $X$ y $\emptyset$, pertenecen a $\tau$.

Además, $T \cup \emptyset = T \in \tau$, $T \cup \{0\} = T \in \tau$ y $\{0\} \cup \emptyset = \{0\} \in \tau$.

Por último, $T \cap \emptyset = \emptyset \in \tau$, $T \cap \{0\} = \{0\} \in \tau$ y $\{0\} \cap \emptyset = \emptyset \in \tau$.

Finalmente, se concluye que $(T, \tau)$ es un espacio topológico, donde el conjunto $\{0\}$ es abierto, mientras el conjunto $\{1\}$ es cerrado.

Las posibles topologías que se pueden definir en el conjunto $T = \{0, 1\}$ son:
$\tau_1 = \{\emptyset, T\}$ $\tau_2 = \{\emptyset, \{0\}, T\}$ $\tau_3 = \{\emptyset, \{1\}, T\}$ $\tau_4 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, T\}$

[5] *Sierpinski* presentó a comienzos del siglo XX, un espacio topológico que lleva su nombre, es la topología con menor cantidad de elementos diferente a la topología trivial o discreta.

**Ejemplo 1.2.2.** **Topología cofinita**[6] Sea $T$ un conjunto, la topología cofinita la conforma los conjuntos $\emptyset$ y todos los subconjuntos de $T$ cuyo complemento tenga un numero finito de elementos.

De esta forma, si $T = \mathbb{R}$, entonces $[-1, 1]$ no es abierto en la topologa cofinita porque su complemento $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ contiene infinitos elementos.

Mientras que $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ es abierto, porque su complemento es $\{0\}$.

Por tanto, los abiertos $A$ diferentes a $\emptyset$ y $\mathbb{R}$, son de la forma

$$A = \mathbb{R} - \bigcup_{i=1}^{n} \{y_i\}, \text{ donde } y_i \in \mathbb{R}, \text{ para } i = 1, 2, 3, ...n$$

**Definición 1.2.2.** **Base para una topología**. Sea $T$ un conjunto. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $T$ es una base para una topología sobre T si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\displaystyle\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = T$,
2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C$ y $C \subset B_1 \cap B_2$.

En forma literal, la primera condición nos manifiesta que la unión de los elementos de la colección $\mathcal{B}$ es el conjunto $T\cdot$ Lo cual significa que para cada elemento $t$ de $T$, es posible encontrar $B \in \mathcal{B}$ de modo que $t \in B$. Mientras la segunda, se refiere a que la intersección no vacía de dos elementos de la colección $\mathcal{B}$ se puede expresar como una unión de elementos de la misma colección.

**Ejemplo 1.2.3.** Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los intervalos abiertos en la recta real. Es decir, $(a, b) = \{x|a < x < b\}$, la topología generada por $\mathcal{B}$ se denomina *topología usual* sobre la recta real y se denota como $\tau_u$.

Ahora, verifiquemos que $\mathcal{B}$ es una base. Para cada elemento $t \in \mathbb{R}$, existe $B = (t - r, t + r)$ con $r > 0$, de modo que $B \in \mathcal{B}$ y $t \in B$, lo cual implica la relación $\mathbb{R} \subset \displaystyle\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$.

Luego, si $t \in \displaystyle\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$, entonces $t$ es elemento de algún $B \in \mathcal{B}$, donde $B = (a, b)$ con $a < b$.

Como $t \in \mathbb{R}$ y $(a, b) \subset \mathbb{R}$, se cumple que $t \in \mathbb{R}$. De esta forma, se tiene la inclusión $\displaystyle\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset \mathbb{R}$.

Por tanto, se cumple la primera condición $\displaystyle\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = \mathbb{R}$.

Segundo, si $B_1 = (a, b) \in \mathcal{B}$ y $B_2 = (c, d) \in \mathcal{B}$ y $t \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $C = (u, v)$ donde $u = \frac{t+\text{máx}\{a,c\}}{2}$ y $v = \frac{t+\text{mín}\{b,d\}}{2}$. De modo que $C \in \mathcal{B}$, $t \in C$ y $C \subset B_1 \cap B_2$.

[6] Rubiano, G.: Topología General (2da ed.). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá , la topología de complementos finitos, es también conocida como la topología de Zariski en honor al matemáatico bielorruso Oscar Zariski (1899-1986)

En el caso donde $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, se tiene que $\emptyset \in \mathcal{B}$ por definición.

Finalmente concluimos que la colección $\mathcal{B}$ es una base para la topología usual sobre $\mathbb{R}$.

En relación con los conjuntos abiertos de la topología generada por la base de los intervalos abiertos, podemos identificar que los conjuntos de la forma $V = (a, \infty)$ con $a \in \mathbb{R}$ son abiertos, ya que para cada elemento $t \in V$, existe $B = (a, t + 1)$, de tal forma $t \in B$, $B \in \mathcal{B}$ y $B \subset V$.

De igual forma, los conjuntos de la forma $U = (-\infty, b)$ con $b \in \mathbb{R}$ resultan ser abiertos. En definitiva, un conjunto abierto se puede caracterizar como la unión de intervalos abiertos.

**Ejemplo 1.2.4.** Sea $\mathcal{B} = \{[b, \infty) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$ una base para la topología sobre $\mathbb{R}$ que se llama la topología de las colas a derecha cerradas[7] y se expresa simplemente como $\tau_{cd}$.

Para verificar que $\mathcal{B}$ es una base para la topología sobre $\mathbb{R}$, se verifican las siguientes condiciones:

Primero, se comprueba la primera condición para que la colección $\mathcal{B}$ sea una base.

Como $\mathbb{R} \in \mathcal{B}$, entonces $\mathbb{R} \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.
Después, si $t \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, entonces $t$ pertenece a algún $B = [c, \infty) \in \mathcal{B}$. Como $[c, \infty) \subset \mathbb{R}$, se cumple que $t \in \mathbb{R}$, lo cual implica que $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \mathbb{R}$.
Por tanto, se cumple la primera condición $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \mathbb{R}$.
En relación con la segunda condición, se sigue:

Sea $B_1 = [n, \infty)$ y $B_2 = [m, \infty)$ ambos elementos de $\mathcal{B}$ y sea $t \in B_1 \cap B_2$. Luego, existe $C = [p, \infty)$, con $p = \text{máx}\{n, m\}$, de modo que $C \in \mathcal{B}$, $t \in C$ y $C \subset B_1 \cap B_2$, como se ilustra en la siguiente figura.

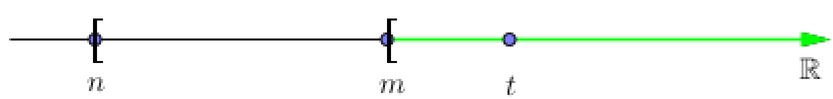


**Figura 1-4**: Topología de colas a derecha

Existe otra forma de caraceterizar los conjuntos cerrados, por medio de los puntos de acumulación.

[7]Neira, C.: Topología General. Bogotá : Universidad Nacional de Colombia Coleccion de notas de clase, 2011.

**Definición 1.2.3.** Si $A$ es un subconjunto del espacio topológico $(T, \tau)$ y si $t \in T$, se dice que $t$ es un **punto límite** o (punto de acumulación) de $A$ si todo conjunto abierto que contiene a $t$ interseca a $A$ en algún punto distinto del propio $t$. Es decir, $t \in T$ es un punto de acumulación de $A$, si todo abierto $U \in \tau$ con $t \in U$, cumple que $U \cap (A - \{t\}) \neq \emptyset$.

**Ejemplo 1.2.5.** Consideremos el conjunto $A = \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ con la topología usual.

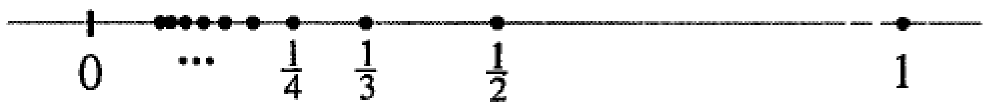


**Figura 1-5**: Bosquejo del conjunto $A = \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+\right\}$

En este ejemplo, los elementos que conforman el conjunto $A$ no son puntos de acumulación, ya que para cada elemento $t$ del conjunto se puede encontrar un abierto básico $V$ que contiene al elemento y sin embargo $V \cap (A - \{t\}) = \varnothing$.

Además, el único punto de acumulación es 0 y sin embargo, 0 no pertenece al conjunto $A$.

**Proposición 1.2.1.** Un conjunto es cerrado si, y solo si, contiene todos sus puntos de acumulación.

*Demostración.* Si $A$ es cerrado, su complemento $T - A$ es abierto. Dado que un abierto es vecindad de cada uno de sus puntos, ningún punto de $T - A$ puede ser punto de acumulación de $A$. Por tanto, $A$ contiene todos sus puntos de acumulación.

Luego, supongamos que $A$ contiene todos sus puntos de acumulación y que $t \in T - A$. Como $t$ no es un punto de acumulación de $A$, entonces es posible determinar un abierto $V$ que contiene a $t$, tal que $V$ no corta o interseca a $A$ de modo que $V$ esta contenido en $T - A$ y por consiguiente $T - A$ es abierto. Por tanto, se concluye que $A$ es cerrado.

□

Un aspecto a tener en cuenta en topología es estudiar los espacios topológicos estableciendo relaciones a través de los elementos que los conforman. Por tal motivo, las funciones y en especial las funciones continuas, nos permiten establecer algunas propiedades. En seguida se presenta la definición de función continua.

**Definición 1.2.4.** **Función continua**. Sean $(X, \tau_X)$ y $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topologicos, y sea la función $f$ definida $f : X \longrightarrow Y$. Se dice que $f$ es continua en un punto $a \in X$ si para todo $U \in \tau_Y$, con $f(a) \in U$, existe un $V \in \tau_X$, con $a \in V$, tal que $f(V) \subset U$.

Si $f$ es continua en cada punto de $X$, decimos que $f$ es continua.

Una caracterización de la continuidad de una función se enuncia como: si $(X, \tau_X)$ y $(Y, \tau_Y)$ son dos espacios topologicos, la función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y solo si para cada $U \in \tau_Y$, se tiene que $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

**Ejemplo 1.2.6.** Sea $X = (\mathbb{R}, \tau_{cd})$, $Y = (\mathbb{R}, \tau_u)$ y $f$ una función de $X$ en $Y$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{cuando} \quad x \geqslant 1, \\ 1, & \text{cuando} \quad x < 1. \end{cases}$$

Para analizar la continuidad de la función $f$, se determinan las imagenes inversas de los abiertos en la topología usual en $\mathbb{R}$ a través de la función dada.

Si $U = (0, 1)$, entonces $f^{-1}(U) = (1, \infty)$ y como para cada elemento $x \in (1, \infty)$ se tiene el abierto básico $U = [x, \infty)$, tal que $x \in U$ y $U \subset (1, \infty)$, entonces $(1, \infty)$ es abierto y por tanto se cumple la condición para que $f$ sea continua.

Si $U = (a, b)$ donde $0 < a < 1$ y $b > 1$, luego $f^{-1}(U) = \left(-\infty, \frac{1}{a}\right)$. Como $\left(-\infty, \frac{1}{a}\right)$, no es un abierto en la topología generada por $\tau_{cd}$, entonces la función $f$ no es continua.

En conclusión, la función $f$ no es continua en el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$.

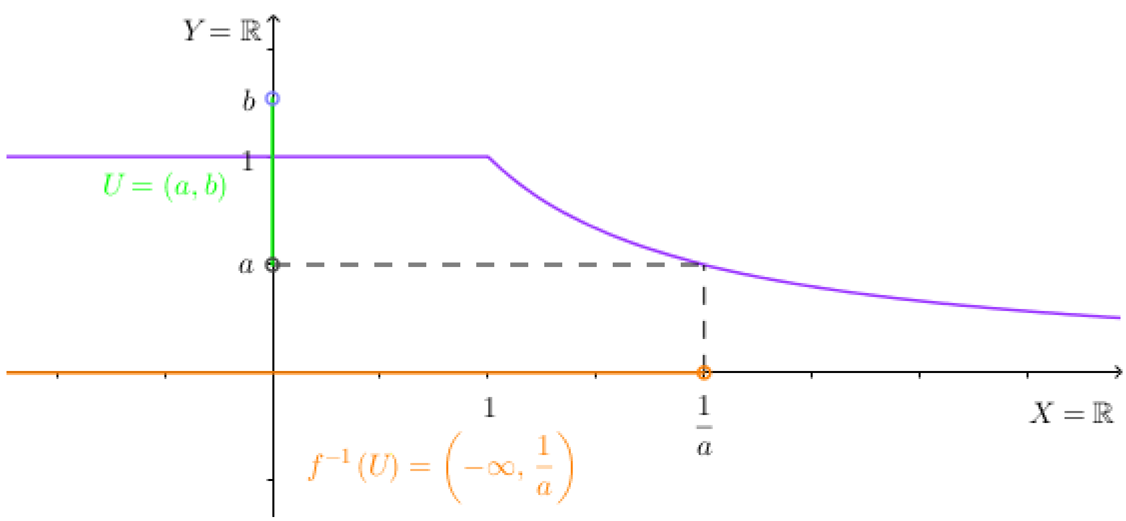


**Figura 1-6**: Bosquejo de la función $f$

En la figura, se muestra el abierto $U = (a, b)$ del espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y su preimagen a través de la función, $f^{-1}(U) = \left(-\infty, \frac{1}{a}\right)$. En este caso, el conjunto $\left(-\infty, \frac{1}{a}\right)$ no es abierto en la topología de colas a derecha en $\mathbb{R}$.

**Ejemplo 1.2.7.** La funcion de Dirichlet[8]. $f : X = \mathbb{R} \longrightarrow Y = \mathbb{R}$, la cual se define como:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{cuando} \quad x \text{ es racional,} \\ 0, & \text{cuando} \quad x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Donde $\tau_u$ es la topología usual en $X$ y $Y$.

La función de Diriclet no es continua en ningún elemento de su dominio porque:

$$f^{-1}((-\infty, 1)) = \mathbb{I} \text{ y } f^{-1}((0, \infty)) = \mathbb{Q}$$

Y como $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{I}$, no son abiertos en la topología usual sobre $\mathbb{R}$ entonces la función no es continua.

En topología es interesante construir espacios topológicos nuevos a partir de espacios conocidos. Uno de ellos es la topología producto para dos espacios topológicos, en la cual no solamente se tiene en cuenta la defnición conjuntista del producto cartesiano, sino aspectos relacionados con la estructura topológica, a continuación se propone el estudio de la topología producto, la cual es imprescindible en una forma de caracterizar las funciones semicontinuas, tanto superior como inferiormente.

**Definición 1.2.5.** Sean $(X, \tau_X)$ y $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos. La **topología producto** sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como base la colección $\mathcal{B}$ de todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde $U$ es un subconjunto abierto de $(X, \tau_X)$ y $V$ es un subconjunto abierto de $(Y, \tau_Y)$.[9]

En la mayoría de los ejemplos que se presentan de funciones semicontinuas, la base de una topología es primordial para así concluir si una función es semicontinua superiormente, inferiormente o ninguna de las dos, por tal motivo se puede expresar la topología producto en términos de las bases de los espacios topológicos dados.

**Proposición 1.2.2.** Sean $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos. Si $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$ son las bases respectivas para $X$ y $Y$, entonces $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y = \{B_X \times B_Y : B_X \in \mathcal{B}_X, B_Y \in \mathcal{B}_Y\}$ es una base para el espacio producto.

A continuación se presenta un ejemplo de topología producto.

**Ejemplo 1.2.8.** Sean $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$ y $(\mathbb{R}, \tau_u)$ espacios topológicos, para verificar que $\tau_{cd} \times \tau_u$ es una base para el espacio producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se realizan los siguientes pasos:

[8] Gustav Lejeune Dirchlet, artifice de la definición formal y contemporánea de función
[9] Munkres, J.: Topología. Massachusetts Institute of technology : Prentice Hall, 2002.

Sea $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, luego existe $U=[a,\infty)$ y $V=(b-r,b+r)$ con $r>0$. De modo que $(a,b)\in U\times V$, donde $U\in\tau_{cd}$ y $V\in\tau_u$, es decir, $U\times V\in\tau_{cd}\times\tau_u$.

Por tanto, $(a,b)\in \bigcup\limits_{U\times V\in\tau_{cd}\times\tau_u} U\times V$ y se cumple que $\mathbb{R}\subseteq \bigcup\limits_{U\times V\in\tau_{cd}\times\tau_u} U\times V$.

Ahora, si $(c,d)\in \bigcup\limits_{U\times V\in\tau_{cd}\times\tau_u} U\times V$, entonces $(c,d)$ pertence a algún $U\times V\in\tau_{cd}\times\tau_u$.

Es decir, $c\in U=[n,\infty)$, donde $n\in\mathbb{R}$ y $d\in V=(r,s)$, donde $r,s\in\mathbb{R}$ y $r<s$.

Como $U\subset\mathbb{R}$ y $V\subset\mathbb{R}$, entonces $U\times V\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Lo cual implica que $(c,d)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

En conclusión, $\bigcup\limits_{U\times V\in\tau_{cd}\times\mathcal{C}} U\times V=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

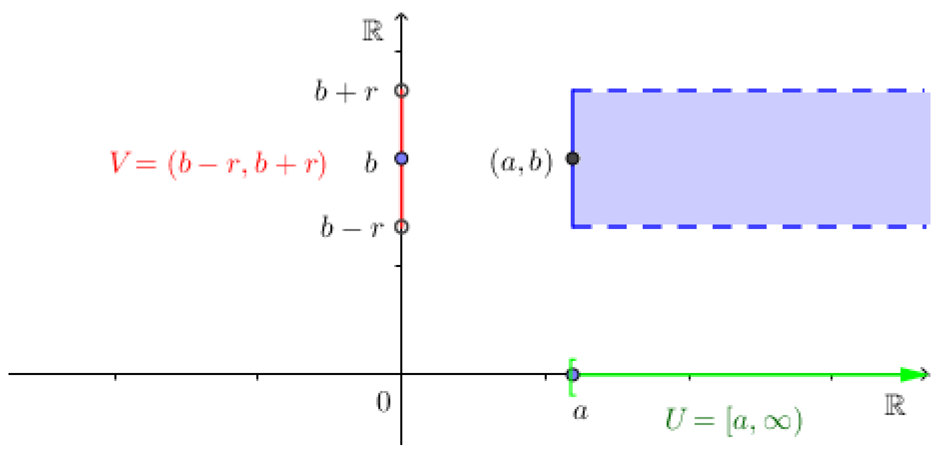


**Figura 1-7**: Representación de un abierto que contiene a $(a,b)$

En la anterior figura, se muestra el elemento $(a,b)$ que pertenece al plano cartesiano formado por el producto de los espacios topológicos $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, con las correspondientes bases planteadas en el enunciado del ejemplo.
A partir de $(a,b)$ se construyó $U=[a,\infty)$ de modo que es un abierto en la topología de colas a derecha y $V=(b-r,b+r)$ un abierto en la topología usual de manera que $U\times V$ es un abierto de $\tau_{cd}\times\tau_u$. Lo anterior garantiza la existencia de un abierto de la topología producto que contiene al elemento.

Por último, respecto con la segunda condición, se tiene:

Si $(c,d)\in U_1\times V_1\cap U_2\times V_2$, entonces $c\in U_1\cap U_2$ y $d\in V_1\cap V_2$.

Por ser $\tau_{cd}$ y $\tau_u$ bases respectivas en $\mathbb{R}$, existe

$$U_3\in\tau_{cd} \text{ de modo que } c\in U_3 \text{ y } U_3\subset U_1\cap U_2.$$

En forma similar existe

$$V_3 \in \tau_u \text{ tal que } d \in V_3 \text{ y } V_3 \subset V_1 \cap V_2.$$

Por tanto, $(c, d) \in U_3 \times V_3$, donde $U_3 \times V_3 \in \tau_{cd} \times \tau_u$ y $U_3 \times V_3 \subset U_1 \times V_1 \cap U_2 \times V_2$.

Finalmente, se concluye que $\tau_{cd} \times \tau_u$ es una base para el espacio producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Algunos abiertos del espacio producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son:

$$[x, y] \times (r, s);\ (x, y) \times (r, s);\ (a, \infty) \times (r, s).$$

Y algunos cerrados son:

$$(-\infty, y) \times [r, s];\ (-\infty, y] \times [r, s].$$

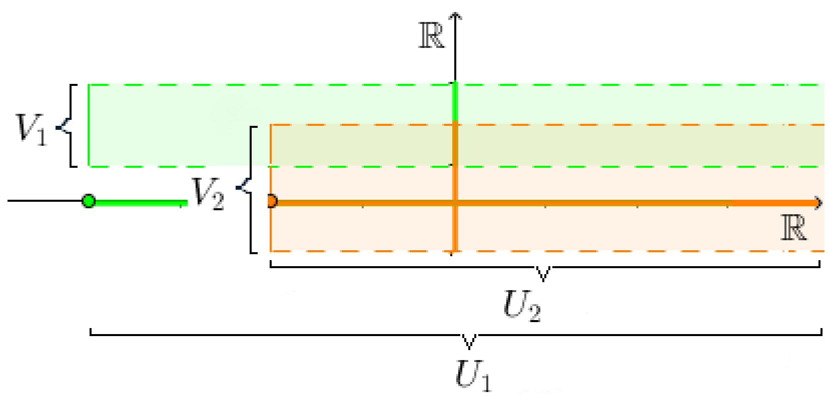


**Figura 1-8**: Representación de la intersección de abiertos

En la anterior figura, se muestra el análisis de la segunda condición.

## 1.3. Compacidad

La noción de compacidad no es cercana a nuestro estudio, sin embargo, en los cursos de cálculo diferencial e integral se analizan teoremas y propiedades importantes en intervalos cerrados como $[a, b]$.

En un principio la continuidad estuvo ligado a estos intervalos, tal vez por la existencia de los límites inferior y superior, pero al cabo de un tiempo los matemáticos formularon la continuidad en ideas más generales y débiles, surgiendo así, la idea de cubrimiento.

**Definición 1.3.1** Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio $(T, \tau)$ se dice que **cubre** a $T$, o que es un cubrimiento de $T$, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ coinicide con $T$. Se dice que $\mathcal{A}$ es un **cubrimiento abierto** de $T$ si es un cubrimiento de $T$ formado por conjuntos abiertos de $T$.

**Definición 1.3.2** Un espacio $(T, \tau)$ se dice **compacto** si de cada cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de $T$ es posible extraer una subcolección finita que también cubre a $T$.

En seguida se presenta un espacio topológico compacto que es de vital importancia en el desarrollo del presenta trabajo, la recta real extendida.

**Ejemplo 1.3.1. Recta real extendida**. La recta real extendida se define como el conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ con las propiedades usuales de campo en $\mathbb{R}$ y la misma relación de orden. El elemento más pequeño en $\overline{\mathbb{R}}$ es $-\infty$ y el más grande es $+\infty$.

Adicionalmente las siguientes reglas nuevas, para todo $a \in \mathbb{R}$.

1. $(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$
2. $(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$
3. $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$, si $a > 0$ y
   $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$ si $a < 0$
4. $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$, si $a > 0$ y
   $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty$ si $a < 0$
5. $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0$
6. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ y $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
7. $\frac{a}{+\infty} = 0$ y $\frac{a}{-\infty} = 0$
8. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ y $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
9. $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$ y $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

En la recta real extendida $\overline{\mathbb{R}}$ todo subconjunto tiene extremo superior y extremo inferior.

En relación con la topología en $\overline{\mathbb{R}}$, esta hereda la topología usual en $\mathbb{R}$ y se agrega los abiertos de la forma $(a, +\infty]$ y $[-\infty, b)$.

Es decir, la base para $\overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{B} = \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b)\} \cup \{(a, \infty], a \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty, b), b \in \mathbb{R}\}$. La topología usual en $\overline{\mathbb{R}}$ se expresa como $\tau_{us}$

.

*Demostración.* Para comprobar que $\mathcal{B}$ es una base, solamente es verifica la segunda condición así:

Si $B_1 = (a, b) \in \mathcal{B}$ y $B_2 = (c, d) \in \mathcal{B}$ y $t \in B_1 \cap B_2$, entonces ya se comprobó que existe $C = (u, v)$ de modo que $C \in \mathcal{B}$, $t \in C$ y $C \subset B_1 \cap B_2$.

Si $B_1 = (n, \infty] \in \mathcal{B}$ y $B_2 = (m, \infty] \in \mathcal{B}$ y $t \in B_1 \cap B_2$, entonces ya se comprobó que existe $C = (r, \infty]$ de modo que $C \in \mathcal{B}$, $t \in C$ y $C \subset B_1 \cap B_2$.

Si $B_1 = [-\infty, n) \in \mathcal{B}$ y $B_2 = [-\infty, m) \in \mathcal{B}$ y $t \in B_1 \cap B_2$, entonces ya se comprobó que existe $C = [-\infty, r)$ de modo que $C \in \mathcal{B}$, $t \in C$ y $C \subset B_1 \cap B_2$.

Si $B_1 = (a, b) \in \mathcal{B}$ y $B_2 = [-\infty, n) \in \mathcal{B}$ y $t \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $C = (u, v)$ donde $u = \frac{t+a}{2}$ y $v = \frac{t+n}{2}$. De modo que $C \in \mathcal{B}$, $t \in C$ y $C \subset B_1 \cap B_2$.

Si $B_1 = (a, b) \in \mathcal{B}$ y $B_2 = (m, \infty] \in \mathcal{B}$ y $t \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $C = (n, m)$. De modo que $C \in \mathcal{B}$, $t \in C$ y $C \subset B_1 \cap B_2$.

Finalmente se concluye que $\mathcal{B}$ es una base para la topología usual sobre $\overline{\mathbb{R}}$.

$\square$

Además, el conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ es compacto, ya que todo cubrimiento abierto de $\overline{\mathbb{R}}$ se puede extraer un subcubrimiento finito.

## 1.4. El subgrafo y el epigrafo de una función

En la caracterización de funciones semicontinuas superior e inferiomente, es relevante el concepto del subgrafo y el epigrafo de una función.

**Definición 1.4.1** El **subgrafo de una función**. Sea la función $f : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, se define el subgrafo de $f$ como $subg(f) = \{(t, a) : t \in T, f(t) \geqslant a\}$

**Ejemplo 1.4.1.** Sea $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y la función escalón de *Heaviside* de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida como:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{cuando} \quad t > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{cuando} \quad t = 0, \\ 0, & \text{cuando} \quad t < 0. \end{cases}$$

Para determinar el subgrafo de la función, se identifican los puntos $(t, a)$ para los cuales se cumple que $f(t) \geqslant a$. Es decir, un elemento del subgrafo se encuentra en el grafo de la función o por debajo del grafo de la función.

El bosquejo del subgrafo de la función $f$ se representa en la figura 1-9.

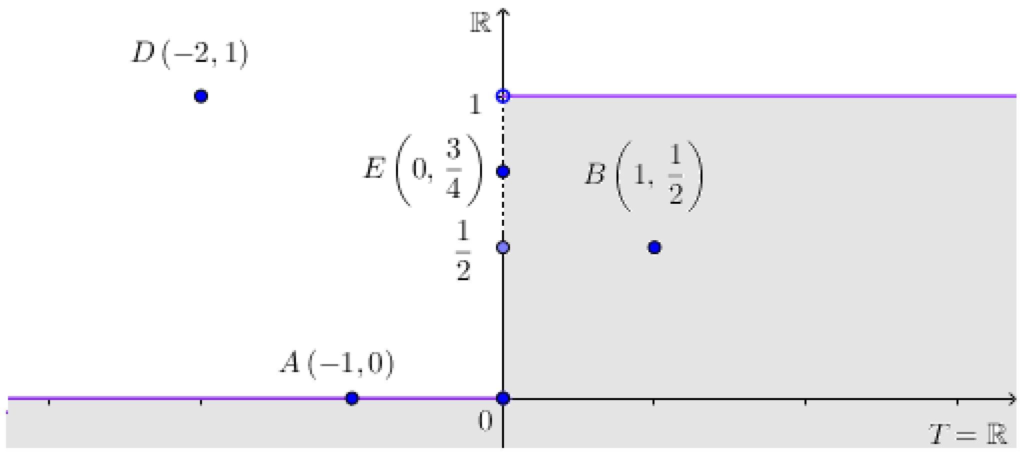


**Figura 1-9**: Bosquejo del subrafo de la función *Heaviside*

En la figura, se aprecian los puntos $A$ y $B$ que pertenecen al $subg(f)$.

$(-1,0) \in subg(f)$ porque $f(-1)=0$ y $0 \geqslant 0$.

$\left(1, \frac{1}{2}\right) \in subg(f)$ porque $f(1)=1$ y $1 \geqslant \frac{1}{2}$.

También, se observan los puntos $D$ y $E$, los cuales no pertenecen al $subg(f)$.

$(-2,1) \notin subg(f)$ porque $f(-2)=0$ y $0 \ngeqslant 1$.

$\left(0, \frac{3}{4}\right) \notin subg(f)$ porque $f(0)=\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} \ngeqslant \frac{3}{4}$.

Por último, los puntos $A$, $B$ y $E$ son puntos de acumulación del subgrafo de la función $g$, donde algunos elementos hacen parte del subgrafo y otros como el punto $E$ no pertenece al $subg(g)$.

En el anterior ejemplo, se puede concluir que el subgrafo de la función no es un conjunto cerrado porque existe por lo menos el elemento $E$ que es un punto de acumulación y sin embargo, no pertence al sugrafo.

**Ejemplo 1.4.2.** Sea $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y la función $g$ de $\mathbb{R}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ definida como:

$$g(t) = \begin{cases} \tan t, & \text{cuando} \quad t \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ \infty, & \text{cuando} \quad t = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

El bosquejo del subgrafo se muestra en la figura 1-10.

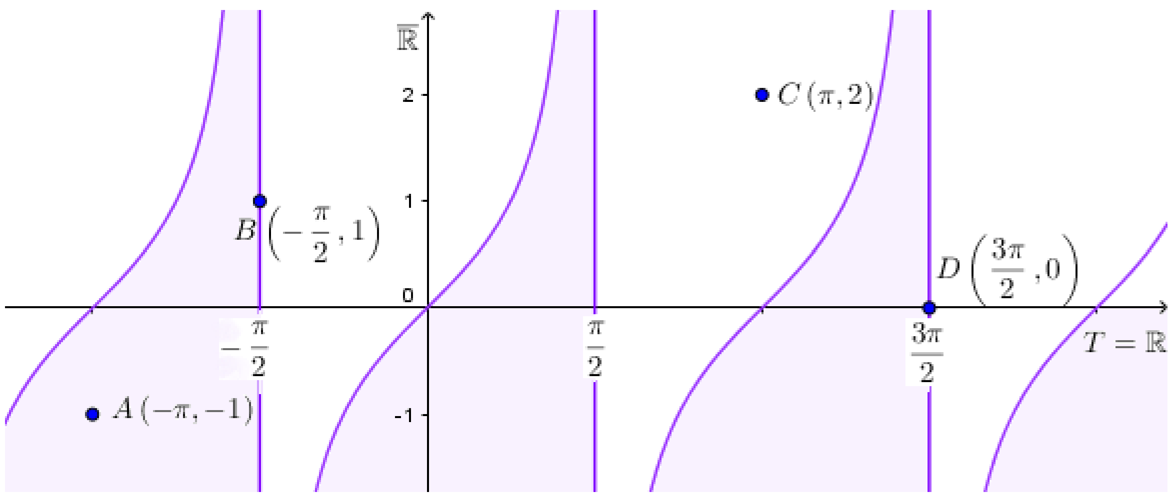


**Figura 1-10**: Bosquejo del subgrafo de la función $g$

En la figura, se aprecian los puntos $A$, $B$ y $D$ que pertenecen al $subg(g)$.

$(-\pi, -1) \in subg(g)$ porque $g(-\pi) = 0$ y $0 \geqslant -1$.

$\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right) \in subg(g)$ porque $g(-\frac{\pi}{2}) = \infty$ y $\infty \geqslant 1$.

$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) \in subg(g)$ porque $g(\frac{3\pi}{2}) = \infty$ y $\infty \geqslant 0$.

También, se observa el punto $C$, el cual no pertenece al $subg(g)$.

$(\pi, 2) \notin subg(g)$ porque $g(\pi) = 0$ y $0 \ngeqslant 2$.

Por último, los puntos $A$, $B$ y $D$ son puntos de acumulación del subgrafo de la función $g$, en este caso todos los puntos de acumulación del subgrafo de $g$ pertenecen al $subg(g)$.
A continuación se define el epigrafo de una función.

**Definición 1.4.2.** El **epigrafo de una función**. Sea la función $f : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, se define el epigrafo de $f$ como $epi(f) = \{(t, a) : t \in T, f(t) \leqslant a\}$

Un ejemplo para el epigrafo de una función se presenta a continuación.

**Ejemplo 1.4.3.** Sea $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y $h : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida como $h(t) = t^2 + 2t + 4$.

El epigrafo de la función $h$ corresponde a la figura 1-11.

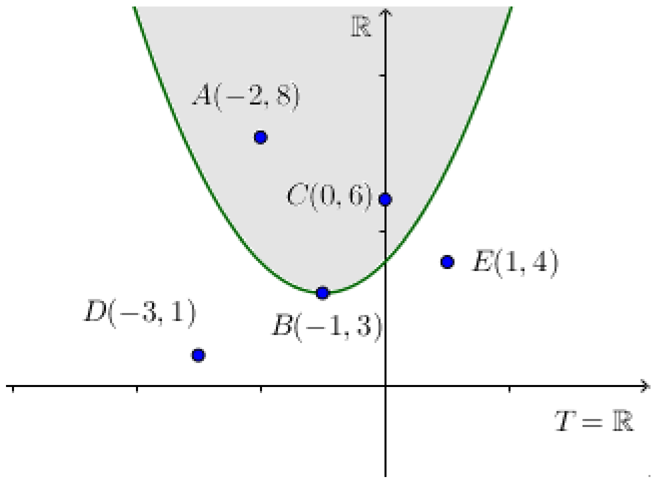


**Figura 1-11**: Bosquejo del epigrafo de la función $h$

En la figura, se aprecian los puntos $A$, $B$ y $C$ que pertenecen al $epi(h)$.

$(-2,8) \in epi(h)$ porque $f(-2) = 4$ y $4 \leqslant 8$.

$(-1,3) \in epi(h)$ porque $f(-1) = 3$ y $3 \leqslant 3$.

$(0,6) \in epi(h)$ porque $f(0) = 4$ y $4 \leqslant 6$.

También, se observan los puntos $D$ y $E$, los cuales no pertenecen al $epi(h)$.

$(-3,1) \notin epi(h)$ porque $h(-3) = 7$ y $7 \not\leqslant 1$.

$(1,4) \notin epi(h)$ porque $h(1) = 7$ y $7 \not\leqslant 4$.

Los puntos $B$, $D$ y $E$ pertenecen al subgrafo de la función $h$, en este caso el punto $B \in subg(h) \cap epi(h)$. En general, los puntos que pertencen al subgrafo y al epigrafo de la función corresponden al grafo de la función.

# 2 Funciones semicontinuas superiormente

En matemáticas el desarrollo de una teoría toma por lo general, una gran cantidad de tiempo y esfuerzos que involucran diferentes personas de diversas corrientes. La teoría de funciones de variable real no es una excepción, entre los célebres matemáticos que aportaron a esta pueden nombrarse a Baire, Borel y Lebesgue.

El concepto de continuidad tardó muchos años en madurarse y no fueron pocos los matemáticos quienes trabajaron para tratar de acuñar una buena definición, entre ellos se pueden destacar Lagrange, Cauchy y Weierstrass. En este largo proceso de evolución del concepto de continuidad surgió, de las manos de Baire, lo que hoy en día es conocido como semicontinuidad, uno de los grandes motores para el estudio de las funciones discontinuas.

René-Louis Baire tendría un papel fundamental en la puja entre las escuelas alemana y francesa, los primeros quienes hacían estudios incansables sobre funciones discontinuas, teniendo un gran éxito al hallar funciones de este tipo, pero con un alto grado de discontinuidad; los segundos eran estudiosos de las funciones continuas y despreciaban el trabajo realizado en la escuela alemana, ya que consideraban este trabajo infructuoso e innecesario con resultados monstruosos.

Sin embargo fue Baire,un francés quien le diera a conocer al mundo la importancia de las funciones discontinuas, aplicando la teoría de conjuntos de Cantor y la convergencia de funciones.

Al principio el concepto de semicontinuidad superior parecía una simple noción auxiliar usada por Baire en el estudio de funciones discontinuas y las demostraciones de sus teoremas.

A Baire, también le sirvió para encontrar en 1896 contraejemplos del segundo teorema falso de Cauchy, el cual había sido desmentido por L. Scwartz en 1872, de una manera completamente independiente, y es precisamente de esta forma que Baire obtiene su principal herramienta para clasificar las clases de funciones y definir la semicontinudad de una función.[1]

[1]La introducción de la semicontinuidad superior fue tomada de Vallejo Fabio Andres Vallejo, (2008). Clases de Baire y el concepto de semicontinuidad. Trabajo de grado, Universidad de Nariño.

Luego, este concepto se relacionaría con elementos de teoría de la medida, para caracterizar la topología de estas funciones, así como para el estudio de las funciones convexas.

En esta sección se estudia la noción de semicontinuidad superior de funciones definidas en un espacio topológico $(T, \tau)$ y con valores en la recta real extendida $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.

## 2.1. Semicontinuidad Superior

**Definición 2.1.1.** Sea $(T, \tau)$ un espacio topológico[2], $f$ una función de $T$ en $\overline{\mathbb{R}}$ y $t \in T$, se dice que $f$ es *semicontinua superiormente* en $t$ (*s.c.s.* en $t$), si para cada $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $f(t) < a$ existe una vecindad $V$ de $t$ tal que $f(s) < a$ para todo $s \in V$[3].

Es decir,

$$(\forall a \in \overline{\mathbb{R}})[(f(t) < a) \Longrightarrow (\exists V \in \mathcal{V}(t))(\forall s \in V(f(s) < a))]$$

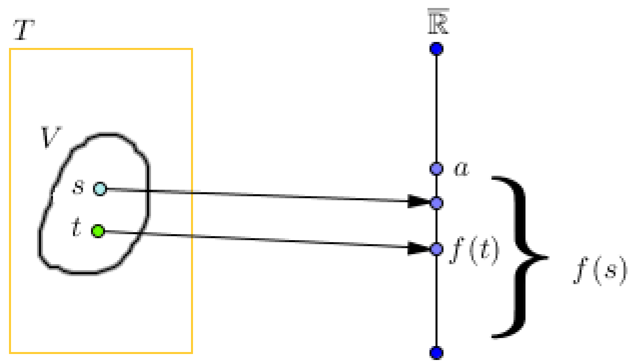


**Figura 2-1**: Representación de la semicontinuidad superior

En la gráfica se observa que para $t \in T$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a$ mayor que $f(t)$, es posible encontrar una vecindad $V$ de $t$, de tal forma que la imagen de cada elemento $s$ de $V$, por la función $f$, se ubica por debajo de $a$. Es decir, si $s$ pertenece a la vecindad $V$ de $t$, se tiene que $f(s)$ es menor que $a$ y esto ocurre, para todo $s$ que pertenece a la vecindad $V$ de $t$.

Ahora, se realizan ejemplos para analizar las funciones semicontinuas superiormente en espacio topológicos finitos, con el fin de interpretar la definición 2.1.1.

[2]Recuerde que el espacio topológico $(T, \tau)$ es la pareja formada por el conjunto $T$ y la toplogía $\tau$ sobre $T$.
[3]Diedudonne, J: Elementos de Analisis (Tomo II). Barcelona : Editorial Reverte, 1982, en la página 22 aparece la definición de semicontinuidad superior de una función.

Comencemos por presentar una función semicontinua superiormente en un espacio topológico finito.[4] Para este caso se tiene el espacio formado por la topología de *Sierpinski* en el conjunto $\{0,1\}$.

**Ejemplo 2.1.1.** Sea $T=\{0,1\}$ y $\tau=\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}$ la topología de *Sierpinski* sobre el conjunto $T$ y la función $f_*: T\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$, definida como lo ilustra la figura 2-2.

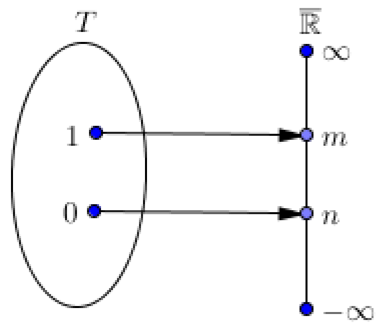


**Figura 2-2**: Representación de la función $f_*$

Para $t=1$ y todo $a>m$ donde $a\in\overline{\mathbb{R}}$ se obtiene la relación $f_*(1)$ menor que $a$.

Al apreciar la topología $\tau=\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}$, identificamos la única vecindad $V$ de $t=1$, donde $V=\{0,1\}\in\mathcal{V}(1)$.

Además, al aplicar la función $f_*$ a los elementos de la vencidad $V$ se obtienen las siguientes relaciones:

$$f_*(1)=m<a \text{ y } f_*(0)=n<m<a.$$

Lo anterior implica la semicontinuidad superior de la función $f_*$ en $t=1$.

Ahora, para $t=0$ y todo $a\in\overline{\mathbb{R}}$ con $a>n$, resulta que $f_*(0)$ es menor que $a$.

Luego, es posible encontrar la vecindad $V=\{0\}\in\mathcal{V}(0)$, en la cual se verifica la siguiente relación:

$$f_*(0)=n<a$$

Lo anterior, permite concluir la semicontinuidad superior de la función $f_*$ en $t=0$.

De esta forma, se verifica la semicontinuidad superior de la función $f_*$ en todos los elementos del espacio topológio $(T,\tau)$.

[4] Si el conjunto $X$ es finito, entonces el espacio topológico $(X,\tau)$ es finito.

En muchos casos, se distinguen funciones que resultan ser semicontinuas superiormente en algunos elementos del espacio topológico. En el siguiente ejemplo, la función no es semicontinua superiormente para un elemento del espacio topológico finito.

**Ejemplo 2.1.2.** Sea $T = \{0, 1\}$, $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ y la función $f_1 : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definida como se muestra en la figura 2-3.

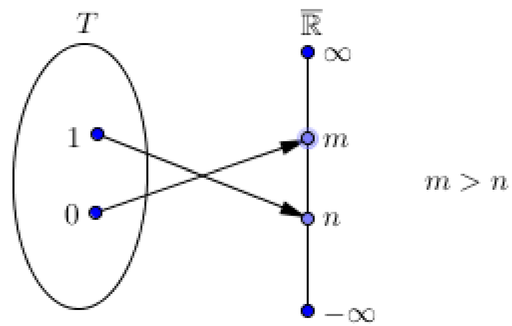


**Figura 2-3**: Representación de la función $f_1$

Para $t = 1$ y $a = \frac{n+m}{2}$, se tiene que $f_1(1) = n$ y este valor resulta ser menor que $a$. Es decir, $f_1(t) < a$.
En $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$, apreciamos que la única vecindad de $t = 1$ es $V = \{0, 1\} \in \mathcal{V}(t)$.
Además, al aplicar la función $f_1$ a los elementos de la vencidad $V$, se determinan las siguientes desigualdades:

$$f_1(1) = m < \tfrac{n+m}{2} = a \text{ y } f_1(0) = n > \tfrac{n+m}{2} = a.$$

Luego, como $f_1(0)$ resulta ser mayor que $a$, entonces no se cumple la condición par ser semicontinua superiormente. En este caso, se concluye que la función $f_1$ no es semicontinua superiormente en $t = 1$.

Cuando $t = 0$, al elegir $a > m$ se tiene que $f_1(0) < a$. Luego, existe la vecindad $V = \{0\} \in \mathcal{V}(0)$, de modo que:

$$f_1(0) = n < a$$

Por tanto, la función $f_1$ es semicontinua superiormente en $t = 0$ y no lo es para $t = 1$.

Para iniciar el análisis de funciones semicontinuas superiormente en espacios topológicos infinitos, se describe la definición 2.1.1 a partir de abiertos básicos[5] del espacio topológico.

[5]Los abiertos básicos son los elementos que pertencen a la base de la topología.

**Proposición 2.1.1.** Sea $(T,\tau)$ un espacio topológico, $f$ una función de $T$ en $\overline{\mathbb{R}}$ y $t \in T$, $f$ es *semicontinua superiormente* en $t$ (*s.c.s.* en $t$), si para cada $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $f(t) < a$, existe un abierto básico $B \in \mathcal{B}$, con $t \in B$, tal que $f(s) < a$ para todo $s \in B$. Es decir,

$$(\forall a \in \overline{\mathbb{R}})[(f(t) < a) \Longrightarrow (\exists B \in \mathcal{B})(t \in B)(\forall s \in B(f(s) < a))]$$

*Demostración.* Sea $\mathcal{B}$ es una base para el espacio topológico $(T,\tau)$ y $f$ la función definida de $T$ en $\overline{\mathbb{R}}$. De modo que para cada $t \in T$, y $a \in \overline{\mathbb{R}}$, con $f(t) < a$, existe un abierto básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $f(s) < a$ para todo $s \in B$.

Como todo abierto básico de un espacio topológico es vecindad de cada uno de los elementos que lo componen, entonces $B$ es una vecindad de $t$, donde $B \in \mathcal{V}(t)$, de tal manera se determina la vecindad $B$ tal que $f(s) < a$ para todo $s \in B$.

De esta forma, se concluye que la función $f$ es semicontiua superiormente en $t$.

□

La proposición 2.1.1, nos indica que dado un elemento $t$ del espacio topológico, de tal forma que para cada $a$ de la recta real extendida $\overline{\mathbb{R}}$, con $f(t) < a$, es posible encontrar por lo menos un abierto básico que contiene al elemento $t$, para el cual, la imagen de cualquier elemento de este abierto básico resulta ser menor que $a$, se puede concluir que la función es semicontiua superiormente en $t$.

De alguna forma es más comodo trabajar con los abiertos básicos de la base del espacio topológico que con las vecindades. La proposición 2.1.4, nos permite realizar el estudio de las funciones semicontinuas superiormente a partir de espacios topológicos definidas por sus bases. Como la topología está determinada por bases, solamente se requiere examinar lo que ocurre con los elementos que pertenezcan a un abierto básico.

A continuación se presentan algunos ejemplos relacionados con funciones semicontinuas superiormente en espacios topológicos, donde se describe alguna base que lo conforma.

**Ejemplo 2.1.3.** Sea $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$ y $f_2(t) = t$ definida de $\mathbb{R}$ en $\overline{\mathbb{R}}$.

Para cualquier elemento $t \in \mathbb{R}$, existe $a = t + 0{,}5 \in \overline{\mathbb{R}}$, de modo que $f_2(t) = t < t + 0,5 = a$.

Luego, todo abierto básico $B$ que contiene al lemento $t \in \mathbb{R}$, es de la forma $B = [b, \infty)$, donde $b \leqslant t$.

Además, es posible encontrar un elemento $k \in B$ tal que:

$$k = a + 1 \text{ y } f_2(k) = f_2(a+1) = a + 1 > a.$$

Finalmente, como para todo abierto que contiene a $t \in T$ con $f_2(t) < a$, siempre encontramos por lo menos un elemento del abierto, de modo que su imagen por la función resulta ser mayor que $a$. Por tanto, concluimos que la función $f_2$ no es semicontinua superiormente para ningún $t \in T$.

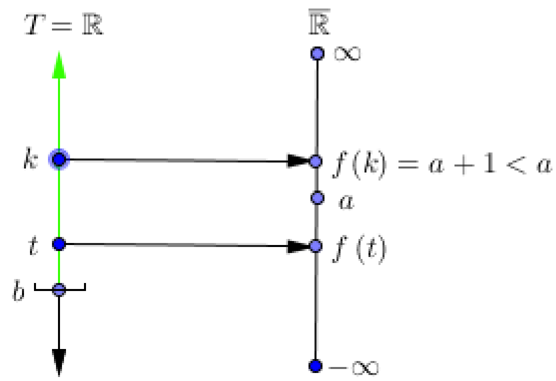


**Figura 2-4**: Representación de la función $f_2$

En la figura 2-4, se observa que para $t \in \mathbb{R}$, es posible encontrar un $a$ en la recta real extendida de modo que $f_2(t)$ es menor que $a$. Adicionalmente, en el abierto básico $B = [b, \infty)$, el cual pertence $t$, existe un elemento $k$ igual a $a+1$, tal que su imagen es $a+1$ que resulta ser mayor que $a$.

En relación con el espacio topológico del ejemplo anterior, obtenemos una función semicontinua superiormente, en cada elemento del espacio topológico.

**Ejemplo 2.1.4.** Sea $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$ y $f_3$ una función de $\mathbb{R}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ definida como:

$$f_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{cuando} \quad t \geqslant 1, \\ 1, & \text{cuando} \quad t < 1. \end{cases}$$

El bosquejo de la función $f_3(t)$, se muestra en la figura 2-5.

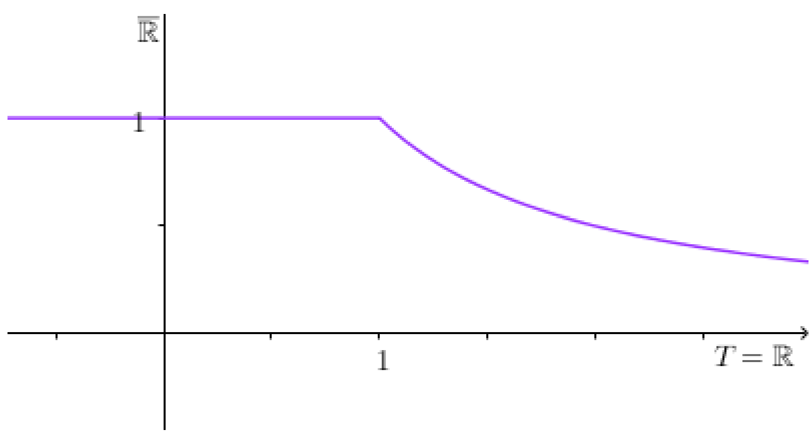


**Figura 2-5**: Bosquejo de la función $f_3$

Para $t \in \mathbb{R}$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a > 1$, se cumple que $f_3(t) = 1 < a$ o $f_3(t) = \frac{1}{t} \leqslant 1 < a$.

Luego, existe $B = [t, \infty)$ que pertenece a $\mathcal{B}$ donde $t \in B$, para el cual, si $s \in B$, se obtiene:

$$f_3(s) = 1 < a, \text{ si } s < 1 \quad \text{o} \quad f_3(s) = \frac{1}{s} \leqslant 1 < a, \text{ si } s \geqslant 1.$$

Ahora, para $t \in \mathbb{R}$ y $0 < a < 1$ con $f_3(t) < a$, se puede determinar:

$$B = [b, \infty) \in \mathcal{B}, \text{ con } b = \frac{t+f_3^{-1}(a)}{2} \text{ de modo que}$$

para todo $s \in B$, se tiene

$$f_3(s) = \frac{1}{s} \leqslant \frac{1}{b} = \frac{2}{t+f_3^{-1}(a)} < \frac{1}{t} < a.$$

Finalmente, se tiene que la función $f_3$ es semicontinua superiormente para todo $t \in \mathbb{R}$.

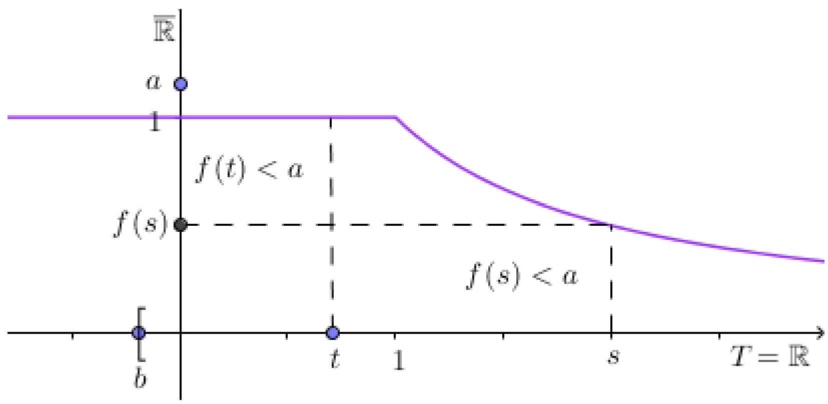


**Figura 2-6**: Semicontinuidad superior de la función $f_3$

En la figura 2-6, se observa el elemento $t \in \mathbb{R}$ y el número $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $f_3(t)$ es menor que $a$. Luego, existe el abierto básico $B = [b, \infty)$ que contiene al elemento $t$, de modo que para cualquier $s \in B$, satisface la condición de que su imagen a través de la función $f_3$ resulta ser menor que $a$.

En el siguiente ejemplo, se analiza la elección de un número en la recta real extendida, para el cual la función no es semicontinua superiormente para un elemento del espacio topológico.

En el ejemplo 1.4.1, donde $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y la función escalón de *Heaviside* de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida como:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{cuando} \quad t > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{cuando} \quad t = 0 \\ 0, & \text{cuando} \quad t < 0. \end{cases}$$

Para $t = 0$ y $a = \frac{3}{4}$, se tiene $f(0) = \frac{1}{2} < \frac{3}{4} = a$. Luego, todo abierto básico $B$ que contiene a $t = 0$, es de la forma $B = (-k, l)$, donde $k$ y $l$ son mayores que 0.
Como existe un elemento $s \in B$ de modo que:

$$\text{si } 0 < s < k, \text{ entonces } f(s) = 1 > \frac{3}{4} = a,$$

entonces, la función $f$ no es semicontinua superiormente en $t = 0$.

Sin embargo, la función $f$ resulta ser semicontinua superiormente en el resto de elementos del espacio topológico.

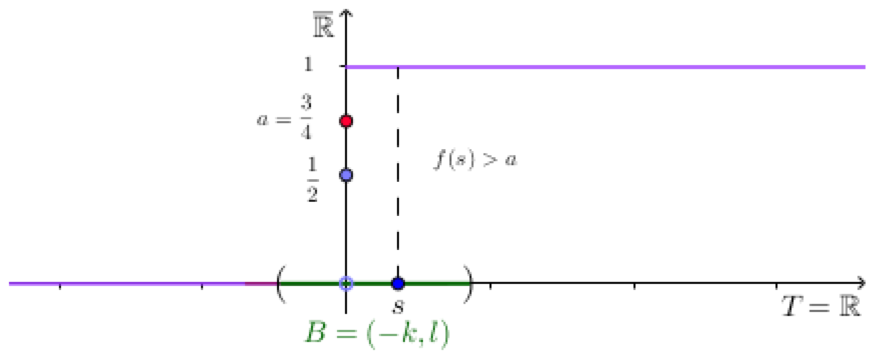


**Figura 2-7**: Semicontinuidad de la función *Heaviside*

En la figura 2-7, para $t = 0$ y $a = \frac{3}{4}$, se cumple que $f(0)$ es menor que $a$. Además, en el abierto básico $B$ se encuentra el elemento $s$, tal que su imagen a través de la función resulta ser igual a 1 y por tanto mayor que $a$, lo cual implica que la función $f$ no es semicontinua superiormente en $t = 0$.

En algunos casos cuando una función no es continua en el espacio topológico donde se definio, es posible cambiar la topología o en su defecto la base que la define; con el fin de que la función sea continua.

A continuación, se considera la misma función del ejemplo anterior, sin embargo se modifica la base de la topología sobre el conjunto $T = \mathbb{R}$, para que la función sea semicontinua superiormente en todos los elementos del espacio topológico.

**Ejemplo 2.1.5.** Sea $T = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$ una base para la topología sobre $\mathbb{R}$ que se llama la topología de las colas a izquierda cerradas[6] que se nombran como $\tau_{ci}$ y la función escalón de *Heaviside* de $f : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida como:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{cuando} \quad t > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{cuando} \quad t = 0, \\ 0, & \text{cuando} \quad t < 0, \end{cases}$$

Veamos que la función $f$ es semicontinua superiormente para $t = 0$.

[6]Neira, C.: Topología General. Bogotá : Universidad Nacional de Colombia Coleccion de notas de clase, 2011.

Para $a \in \mathbb{R}$ con $a > \frac{1}{2}$, se cumple que $f(0) < a$.

Luego, existe el abierto básico $B = (-\infty, 0]$ que pertence a $\mathcal{B}$. De modo que para todo $s \in B$, se cumple que $f(s) \leqslant \frac{1}{2} < a$.

Por tanto, se concluye que la función $f$ es semicontinua superiormente en $t = 0$.

Adicionalmente, para $t > 0$ y $a > 1$ en la recta real extendida, se obtiene que $f(t) = 1 < a$.

Luego, existe $B = (-\infty, t]$ un abierto básico que contiene $t$, tal que para cualquier $s \in B$ se cumple:

$$f(s) = 0 < 1 < a \text{ si } s < 0 \quad \text{o} \quad f(s) = \tfrac{1}{2} < 1 < a \text{ si } s = 0 \quad \text{o} \quad f(s) = 1 < a \text{ si } s > 0.$$

Por último, para $t < 0$ y $a > 0$ en la recta real extendida, se obtiene que $f(t) = 0 < a$.

Luego, existe $B = (-\infty, t]$ un abierto básico que contiene a $t$, tal que para cualquier $s \in B$ se cumple: $f(s) = 0 < a$.

Finalmente, se concluye que la función $f$ es semicontinua superiormente para todo elemento del espacio topológico.

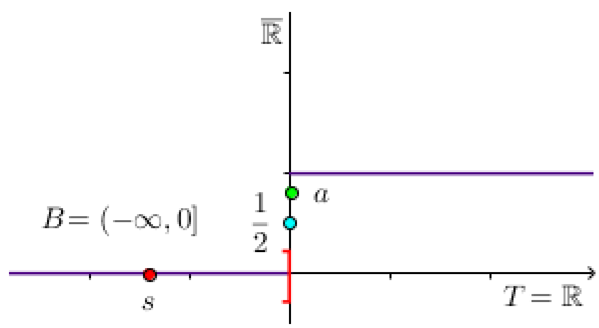


**Figura 2-8**: Semicontinuidad superior de la función *Heaviside* en $(\mathbb{R}, \tau_{ci})$

En la figura 2-8, se tienen $t = 0$ y $a > \frac{1}{2}$, donde $f(0)$ es menor que $a$. Luego, en el abierto básico $B$, se cumple que la imagen de todo elemento de $B$ por la función $f$, resulta ser menor o igual a un medio y como $a$ es mayor que un medio, entonces $a$ es mayor que la imagen de cada elemento del abierto básico y así se determina la semicontinuidad superior de $f$ en $t = 0$.

La continuidad de una función en un espacio topológico, se puede definir de la continuidad puntual. Luego, una función es continua si lo es en cada punto del espacio topológico. De igual manera, se define las funciones semicontinuas superiormente en todo el espacio topológico.

**Definición 2.1.2.** Sea $(T, \tau)$ un espacio topológico, $f$ una función de $T$ en $\overline{\mathbb{R}}$. Si $f$ es semicontinua superiormente en $t$ para todo $t \in T$, se dice que $f$ es *semicontinua superiormente.*

En los ejemplos 2.1.2; 2.1.6 y 2.1.8, se demostró que las funciones son semicontinuas superiormente en todos los elementos del espacio topológico. En el siguiente ejemplo, se estudia la semicontinuidad superior en un espacio topológico finito y se trabaja la definición 2.1.1.

**Ejemplo 2.1.6.** Sea $T = \{w, x, y, z\}$ y $\tau = \{\emptyset, T, \{w, x, y\}, \{x\}, \{y\}, \{z, y\}, \{x, y, z\}, \{x, y\}\}$. Además, la función $f_4 : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ que se representa a continuación:

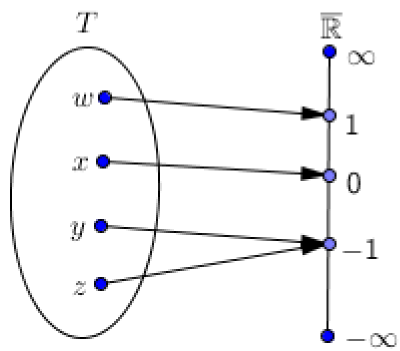


**Figura 2-9**: Representación de la función $f_4$

Para $t = w$, se tiene que si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a > 1$, entonces $f_4(w) = 1 < a$.
Como existe una vecindad $V = \{w, x, y\}$ con $V \in \mathcal{V}(w)$ tal que: $f_4(w) = 1 < a$, $f_4(x) = 0 < a$ y $f_4(y) = -1 < a$. Como $f_4(s) < a$ para todo $s \in V$, entonces la función $f_4$ es semicontinua superiormente en $t = w$.

Para $t = x$, se tiene que si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a > 0$, entonces $f_4(x) = 0 < a$.
Es posible determinar la vecindad $V = \{x\}$ con $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $f_4(s) < a$ para todo $s \in V$. Luego, la función $f_4$ es semicontinua superiormente en $t = x$.

Para $t = y$, se tiene que si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a > -1$, entonces $f_4(y) = -1 < a$.
Existe la vecindad $V = \{y\}$ con $V \in \mathcal{V}(y)$ tal que $f_4(s) < a$ para todo $s \in V$. Luego, la función $f_4$ es semicontinua superiormente en $t = y$.

Para $t = z$, se tiene que si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a > -1$, entonces $f_4(z) = -1 < a$.
Como existe una vecindad $V = \{z, y\}$ con $V \in \mathcal{V}(z)$ tal que: $f_4(z) = -1 < a$ y $f_4(y) = -1 < a$. Lo cual implica que la función $f_4$ es semicontinua superiormente en $t = z$.

Finalmente, se concluye que la función $f_4$ es semicontinua superiormente en el espacio topológico $(T, \tau)$.

Para el siguiente ejemplo, se tiene en cuenta la proposición 2.1.1 de semicontinuidad superior de una función en un punto.

En este caso, se analiza una función que no es semicontinua superiormente en ningún elemento de un espacio topológico infinito. Luego, es necesario determinar un elemento del abierto básico en el cual no se cumple la condición para que la función sea semicontinua superiormente.

**Ejemplo 2.1.7.** Sea $(T, \tau)$ el espacio topológico definido a partir de la topología cofinita de $T = \mathbb{R}$ y la función $f : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida como $f(t) = [\![t]\!]$.

Para la topología cofinita definida en $\mathbb{R}$, la colección $\mathcal{B}$ de abiertos básicos, coincide con los abiertos de la topología original. Es decir, los abiertos de la topología son los abiertos básicos del espacio topológico.
El bosquejo de la función $f(t) = [\![t]\!]$, se muestra en la figura 2-10.

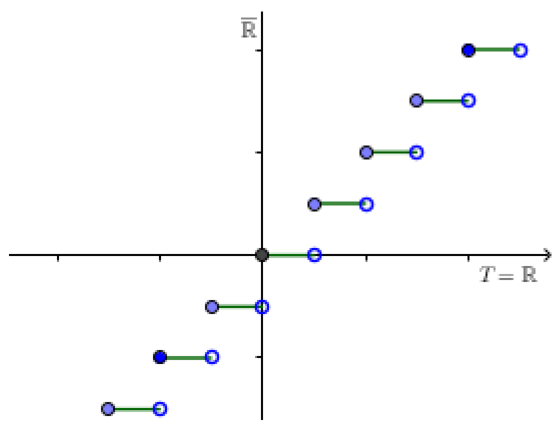


**Figura 2-10**: Bosquejo de la función parte entera

Sea $t \in T$, y $a \in \overline{\mathbb{R}}$, tal que $f(t) < a$. Luego, todo abierto básico $B$ que contiene a $t$, es de la forma

$$B = \mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{N} \{y_n\}, \text{ donde } y_1, y_2, ...y_n \text{ son números reales.}$$

Sea $y = \text{máx}\{y_1, y_2, ..., y_n, a\}$, entonces es posible encontrar un elemento $s \in B$, con la siguiente condición

$$s = y + 1, \text{ donde } s \neq y_1, s \neq y_2, ...s \neq y_n \text{ y } s \neq a.$$

Cuando se aplica la función $f$ al elemento $s$, se obtiene:

$$f(s) = [\![s]\!] = [\![y + 1]\!] > y \geqslant a.$$

Como $s \in B$ y $f(s) > a$, para todo abierto básico que contiene a $t$, entonces la función $f$ no es semicontinua superiormente.

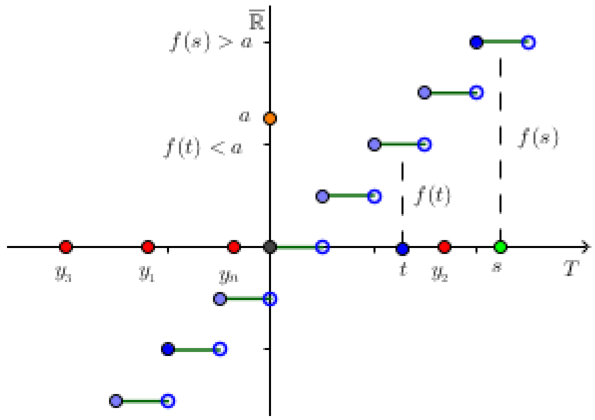


**Figura 2-11**: Semicontinuiad superior de la función parte entera

En la figura 2-11, se tiene $t \in T$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$, donde $f(t)$ es menor que $a$. Luego, para el abierto básico, que excluye los números reales $y_1, y_2, ...y_n$, existe un elemento $s \in B$ tal que su imagen por la función parte entera resulta ser mayor que $a$.

Por tal razón, la función parte defnida en el espacio topológico de los números reales con la topología cofinita no es semicontinua superiormente.

En algunos casos se puede presentar que una función sea semicontinua superiormente y sin embargo no sea continua en todo el espacio topológico. Más adelante se ofrecerán las condiciones para que una función sea continua en términos de la semicontinuidad superior e inferior.

En el siguiente ejemplo, se analiza una función de especial interes, porque es semicontinua superiormente en todo el espacio topológico y sin embargo, no es continua en algunos elementos del espacio.

**Ejemplo 2.1.8.** Sea $(T, \tau)$ el espacio topológico determinado a partir de la topología usual sobre el subconjunto $T = (0, 1)$ de la recta real, y $f(t) : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ la función definida por $F(t) = 0$ si $t$ es irracional y $F(t) = 1/q$ si es la fracción irreducible $p/q$.[7]

Es decir,

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t \text{ es irracional,} \\ \frac{1}{q}, & \text{si} \quad t = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

La representación de algunos elementos de la función $F$, se muestra en la figura 2-12.

[7] Spivak, M.: Calculo innitesimal. Barcelona : Editorial Reverte, 1992, en la página 119 se estudia el límite de la función cuando tiende a un número irracional.

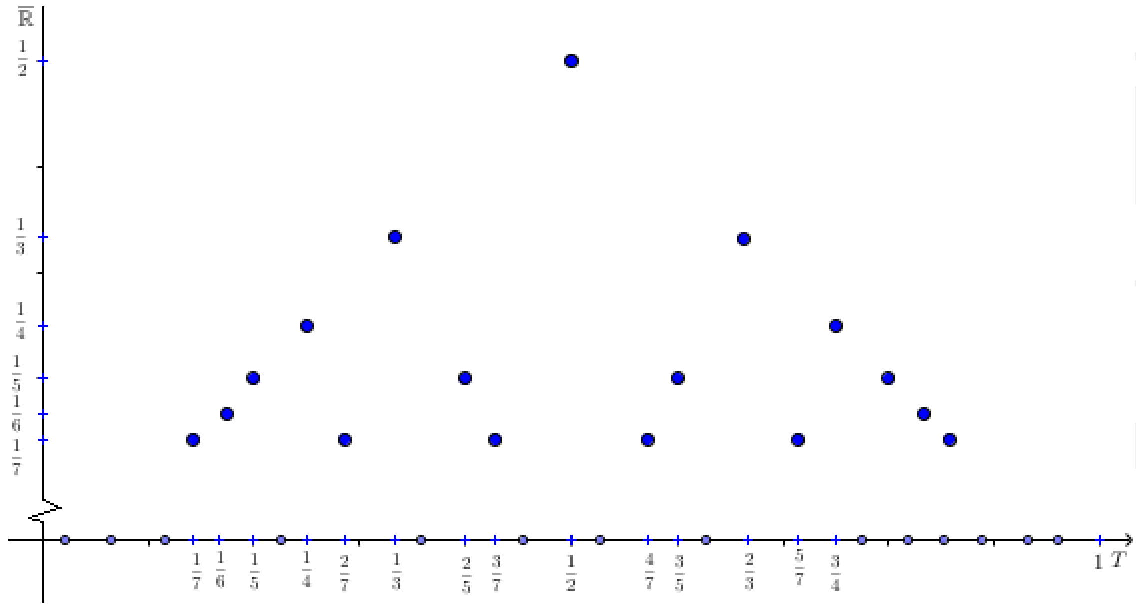

**Figura 2-12**: Bosquejo de la función $F$

Veamos que la función $F$ es semicontinua superiormente para cuando $t$ es un número racional.

Si $t$ es un número racional, que se puede expresar como $t = \frac{m}{n}$ y para cualquier $a \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a > 0$, donde $F(t) = \frac{1}{n} < a$, entonces:

Los únicos valores de $t \in T$, para los que pudiera ser falso que $F(t) < a$ son:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, ..., \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}.$$

Luego, si $s$ es un número racional, entonces $s$ podría ser uno de estos números. Por muchos que pudieran ser, son en todo caso un número finito. En cambio, si $s$ es irracional se cumple $F(s) = 0 < a$. Por tanto, entre todos estos números habrá uno que será el más cercano a $t$. Es decir, $\left|\frac{p}{q} - t\right|$ es mínimo para algún $\frac{p}{q}$ entre estos números.

Si $s$ es uno de estos números, entonces se considera solo los valores $\left|\frac{p}{q} - t\right|$ para $\frac{p}{q} \neq s$. De esta forma, es posible elegir como $r$ esta distancia mínima.

Además, es posible construir el abierto básico $(t - r, t + r)$, con $r > 0$ porque corresponde a una distancia.

De modo que si $s \in B$, entonces $s$ no es ninguno de los números,

$$\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}$$

y por tanto, se cumple que $F(s) < a$, para todo $s \in B$.

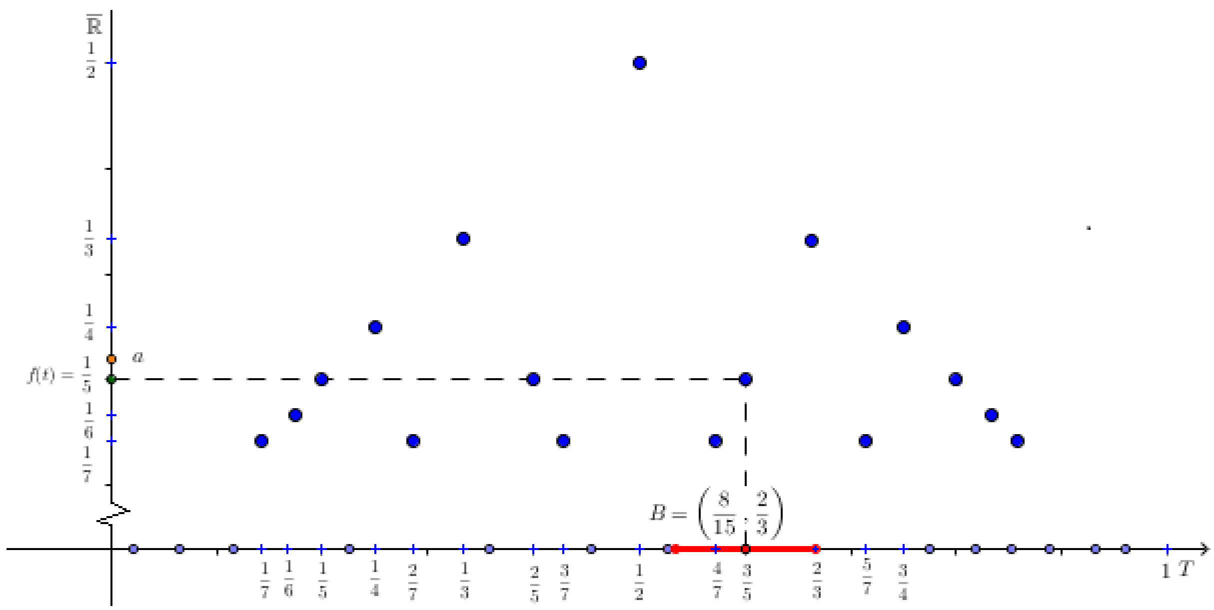


**Figura 2-13**: Análisis de la semicontinuidad superior de la función F

En la figura 2-13 se muestra $t = \frac{3}{5}$ que pertenece al espacio topológico $T$ y $a$ en la recta extendida, de modo que $F(t) = \frac{1}{5} < a$. Adicionalmente, se construye el abierto básico $B = \left(\frac{8}{15}, \frac{2}{3}\right)$, en el cual la imagen de cada uno elemento $s$ de $B$ por la función resulta ser menor que $a$.
De esta forma, se concluye que la función es semicontinua superiormente para $t = \frac{3}{5}$.

Para el caso de que $t$ sea un número irracional, se toma $a > 0$ en la recta extendida $\overline{\mathbb{R}}$. Luego, $F(t) = 0 < a$. Como $a > 0$, es posible encontrar un número natural $n$, tal que $t = \frac{1}{n} < a$, entonces para demostrar que la función es semicontinua superiormente, se sigue el mismo razonamiento que el caso cuando $t$ es un número racional. Finalmente, se concluye que la función $F$ es una función semicontinua superiormente en el espacio topológico $(T, \tau_u)$.

En relación con el anterior análisis, se puede afirmar que la función es continua para los números irracionales que pertencen al intervalo $(0, 1)$, ya que para todo $t$ irracional se cumple que todo abierto $U$ que contiene a $F(t)$, es posible determinar un abierto $V$ con $a \in V$ de modo que $F(V) \subset U$.

Ahora si $t = \frac{p}{q}$ es un número racional que pertenece al intervalo $(0, 1)$, se tiene que $f(t) = \frac{1}{q}$ y por tanto, existe $U = \left(0, 1 + \frac{1}{q}\right)$ de modo que cualquier abierto $V$ que contiene a $\frac{p}{q}$, contiene un número irracional $s$ tal que $f(s) \notin U$. Es decir, $f(U)$ no esta contenido en $U$.

Por tanto, se concluye que la función no es continua en los números racionales.

Existen caracterizaciones de las funciones semicontinuas superiormente que permiten realizar el estudio global de la semicontinuidad, una de ellas es la caracterización topológica que se presenta a continuación.

## 2.2. Caracterización topológica de las funciones semicontinuas superiormente

Las funciones semicontinuas superiormente se pueden caracterizar en forma topológica.

**Proposición 2.2.1.** Si $(T, \tau)$ es un espacio topológico y $f : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función, entonces $f$ es semicontinua superiormente si y solo si para cada $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f^{-1}([-\infty, a))$ es abierto en $T$. Es decir, $f$ es semicontinua superiormente si y sólo si $f$ es continua al dotar a $\overline{\mathbb{R}}$ de la topología cuyos abiertos son de la forma $[-\infty, a)$.

*Demostración.* Sea $f$ una función semicontinua superiormente. Si $t \in f^{-1}([-\infty, a))$, entonces $f(t) < a$. Luego, existe una vecindad $V$ de $t$, tal que $f(s) < a$, para todo $s \in V$.
De esta forma se construyo un abierto que contiene al punto y está contenido en $f^{-1}([-\infty, a))$.
Por tanto, $f^{-1}([-\infty, a))$ es abierto en $T$.

Ahora, si el conjunto $f^{-1}([-\infty, a))$ es abierto en $T$, y $t \in T$ tal que $f(t) < a$, existe una vecindad $V$ de $t$, contenida en $f^{-1}([-\infty, a))$. Luego, $f(s) < a$ para todo $s \in V$, de esta forma $f$ es semicontinua superiormente.[8]

□

A continuación se analizaran algunos ejemplos propuestos con anterioridad, pero desde la perspectiva de la caracterización topológica de las funciones semicontinuas superiormente, porque permite estudiar la semicontinuidad superior en forma global, partiendo de los valores que toma la función en la recta real extendida.

En el ejemplo 2.1.1, donde $T = \{0, 1\}$, $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ y la función $f_*$ de $T$ en $\overline{\mathbb{R}}$ definidad como:

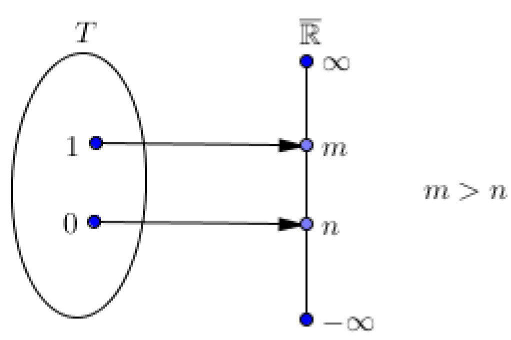


**Figura 2-14**: Representación de la función $f_*$

Para $m \in \overline{\mathbb{R}}$, se tiene que $f_*^{-1}([-\infty, m)) = \{0, 1\}$.

[8]García, R: Campos de Espacios Métricos de Funciones, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Tesis de Magister, 1998.

Como $\{0,1\}$ es un abierto del espacio topológico $(T,\tau)$, entonces $f_*$ es semicontinua superioremente en $t=m$.

Ahora, para $n\in\overline{\mathbb{R}}$, se obtiene $f_*^{-1}([-\infty,n))=\{0\}$.

Como $\{0\}$ es un abierto del espacio topológico $(T,\tau)$, entonces $f_*$ es semicontinua superioremente en $t=n$.

Por tanto, la función $f_*$ es semicontinua superiormente.

En el ejemplo 2.1.2, se tiene $T=\{0,1\}$, $\tau=\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}$ y la función $f_1:T\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$, definida como:

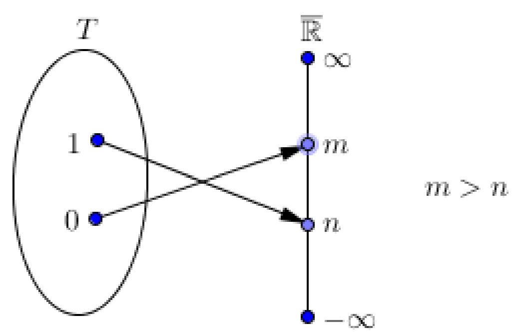


**Figura 2-15**: Representación de la función $f_1$

Para $n\in\overline{\mathbb{R}}$, se cumple $f_1^{-1}([-\infty,n))=\{1\}$.

Como $\{1\}$ no es un abierto del espacio topológico $(T,\tau)$, entonces la función no es semicontinua superiormente.

En el ejemplo 2.1.3, donde $(\mathbb{R},\tau_{cd})$ y $f_2(t)=t$, una función definida de $T$ en $\overline{\mathbb{R}}$, obtenemos:

Para $a\in\overline{\mathbb{R}}$, se cumple que $f_2^{-1}([-\infty,a))=(-\infty,f_2^{-1}(a))=(-\infty,a)$.

Donde $(-\infty,a)$ no es un abierto de la topología de las colas a derecha cerradas en el espacio $T=\mathbb{R}$, porque en paticular para el elemento $a-1$ que pertenece al intervalo $(-\infty,a)$ no existe ningún abierto básico en la topología de colas a derecha el cual pertenezca $a-1$ y que este abierto este incluido en el intervalo $(-\infty,a)$.

De acuerdo con lo anterior, se concluye que función $f_2$ no es semicontinua supeiormente.

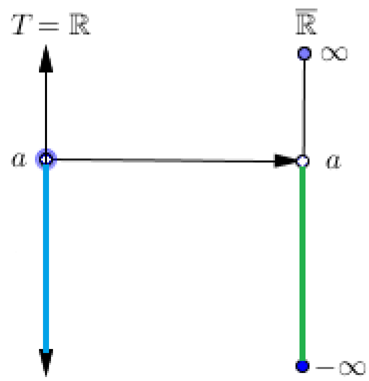


**Figura 2-16**: Análisis de la semicontinuidad superior de la función $f_2$

En la figura 2-16, se observa que para $a \in \overline{\mathbb{R}}$, la imagen inversa del conjunto $[-\infty, a)$ es $(-\infty, a)$, el cual no es abierto en la topología descrita del espacio.

En el ejemplo 2.1.4, donde $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$ y $f_3$, una función de $\mathbb{R}$ en $\overline{\mathbb{R}}$, definida como sigue:

$$f_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{cuando} \quad t \geqslant 1, \\ 1, & \text{cuando} \quad t < 1. \end{cases}$$

Para $a \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a \geqslant 1$, se cumple que $f_3^{-1}([-\infty, a)) = \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ es un abierto del espacio topológico.

Ahora, para $0 < a < 1$, se cumple que $f_3^{-1}([-\infty, a)) = \left(\frac{1}{a}, \infty\right)$, donde $\left(\frac{1}{a}, \infty\right)$ es un abierto del espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$.

Por último, para $a \leqslant 0$, se cumple que $f_3^{-1}([-\infty, a)) = \emptyset$, donde $\emptyset$ es un abierto del espacio topológico.

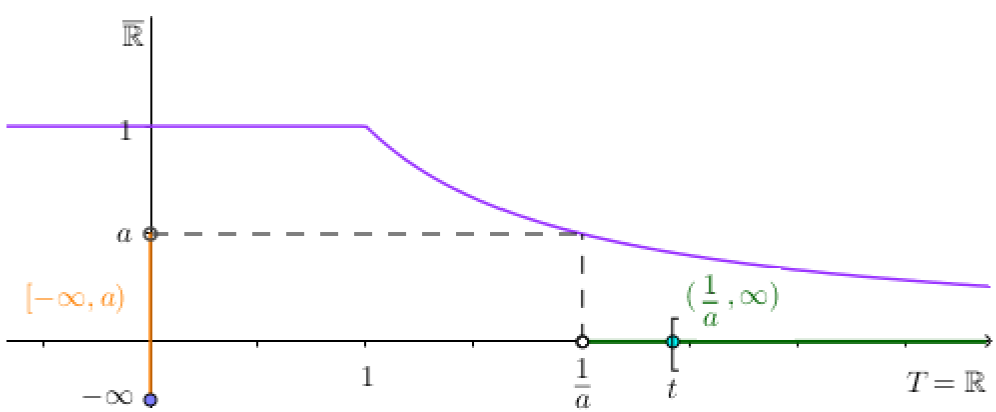


**Figura 2-17**: Análisis de la semicontinuidad superior de la función $f_3$

En la figura 2-17, se tiene el elemento $a \in \overline{\mathbb{R}}$, de tal forma que la imagen inversa del conjunto $[-\infty, a)$, resulta ser un abierto, porque para cualquier elemento $t$ que pertenezca al intervalo $\left(\frac{1}{a}, \infty\right)$, siempre es posible encontrar el abierto básico $[t, \infty)$ que contiene a $t$ y esta incluido en $\left(\frac{1}{a}, \infty\right)$.

Es decir, para cada $t \in \left(\frac{1}{a}, \infty\right)$, existe $[t, \infty)$, tal que $t \in [t, \infty)$ y $[t, \infty) \subset \left(\frac{1}{a}, \infty\right)$.

Finalmente, como se obtuvo un abierto en el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$ al determinar $f_3^{-1}([-\infty, a))$, para cualquier valor de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces podemos afirmar que la función $f_3$ es semicontinua superiormente.

En el ejemplo 1.4.1, se tiene $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y la función $f$ de $T$ en $\overline{\mathbb{R}}$ definida como:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{cuando} \quad t > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{cuando} \quad t = 0, \\ 0, & \text{cuando} \quad t < 0, \end{cases}$$

Para $a \in \overline{\mathbb{R}}$, con $\frac{1}{2} \leqslant a < 1$, se cumple que $f^{-1}([-\infty, a)) = (-\infty, 0]$. De tal forma que $(-\infty, 0]$ no es un abierto para la topología usual en $\mathbb{R}$, ya que no existe ningún abierto que contenga a $t = 0$ y el cual este incluido en $(-\infty, 0]$. Luego, la función $f$ no es semicontinua superiormente en el espacio topológico.

Sin embargo, para $a < \frac{1}{2}$, se cumple que $f^{-1}([-\infty, a)) = (-\infty, 0)$. De modo que $(-\infty, 0)$ es un abierto para la topología usual en $\mathbb{R}$, ya que para todo elemento $t \in (-\infty, 0)$, es posible determinar el abierto $V = (t-1, 0)$ que contiene a $t$ y $V \subset (-\infty, 0)$. Luego, para este caso la función $f$ resulta ser semicontinua superiormente.

De acuerdo con lo anterior es necesario analizar la semicontinuidad puntual, para identificar los valores en los cuales la función es semicontinua superiormente.
Finalmente, se concluye que la función $f$ no es semicontinua superiormente en el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

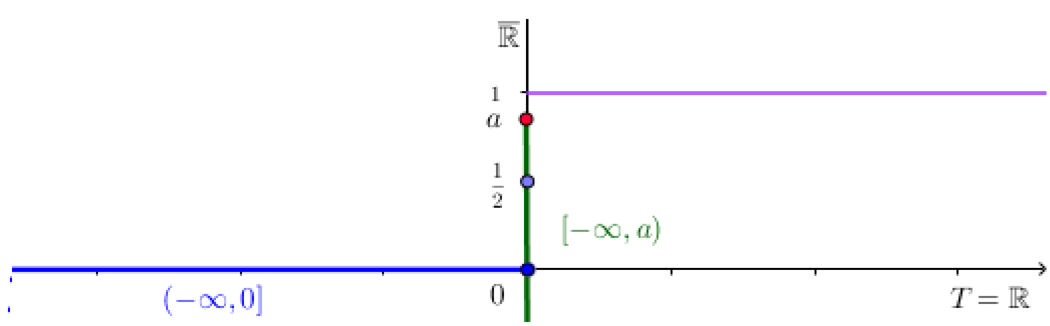


**Figura 2-18**: Análisis de la semicontinuidad de la función *Heaviside*

En la figura 2-18 se observa un valor de $a$ mayor a $\frac{1}{2}$ en la recta real extendida, luego se tiene que la imagen inversa del conjunto $[-\infty, a)$ a través de la función $f$ resulta ser el intervalo $(-\infty, 0]$, el cual no es un abierto en el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

En el ejemplo 2.1.5, donde $(\mathbb{R}, \tau_{iz})$ y la función escalón $f : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida como:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{cuando} \quad t > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{cuando} \quad t = 0, \\ 0, & \text{cuando} \quad t < 0. \end{cases}$$

En la verificación de la semicontinuidad superior de la función se analizan los siguientes casos:

- Para $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a \geqslant 1$, se cumple que $f^{-1}([-\infty, a)) = \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ es un abierto en el espacio topológico $T$.

- Luego, para $\frac{1}{2} \leqslant a < 1$, se tiene que $f^{-1}([-\infty, a)) = (-\infty, 0]$, donde $(-\infty, 0]$ es un abierto en la topología de colas a izquierda cerrada.

- Por último, si $a < \frac{1}{2}$, se tiene que $f^{-1}([-\infty, a)) = (-\infty, 0)$, donde $(-\infty, 0)$ es un abierto en la topología de colas a izquierda cerrada.

El conjunto $(-\infty, 0)$ es un abierto porque para cualquier $t \in (-\infty, 0)$, es posible determinar el abierto $V = (-\infty, t]$, el cual cumple con $t \in V$ y $V \subset (-\infty, 0)$.

En conclusión, para todo $a \in \overline{\mathbb{R}}$, se tiene que $f^{-1}([-\infty, a))$ es un abierto en el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_{iz})$. Por tanto, la función $f$ es semicontinua superiormente.

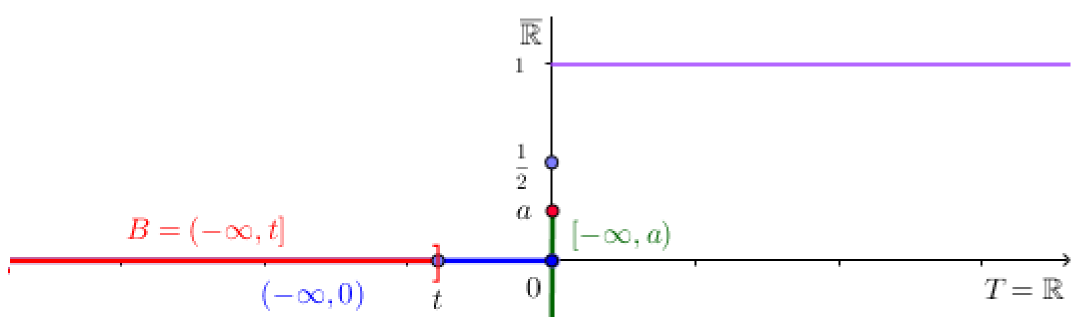


**Figura 2-19**: Análisis de la función *Heaviside* en $(\mathbb{R}, \tau_{iz})$

En la figura 2-19, se tiene $a < \frac{1}{2}$ en la recta real extendida. Además, $f^{-1}([-\infty, a)) = (-\infty, 0)$. En el intervalo $(-\infty, 0)$ se identifica el elemento $t$ y el abierto básico $B = (-\infty, t]$ que lo contiene y este a su vez se encuentra incluido en $(-\infty, 0)$. Describiendo de esta manera que la función es semicontinua superiormente en todo el espacio topológico.

En el ejemplo 2.1.7, donde $(\mathbb{R}, \tau)$ es el espacio topológico definido a partir de la topología cofinita de $\mathbb{R}$ y la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida como $f(t) = [\![t]\!]$.

Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces $f^{-1}([-\infty, a)) = (-\infty, [\![a]\!]+1)$.

Como $(-\infty, [\![a]\!]+1)$ no es abierto en la topología cofinita, porque su complemento $[[\![a]\!]+1, \infty)$ es un conjunto infinito, entonces la función no es semicontinua superiormente.

Finalmente, se concluye que la función parte entera no es semicontinua superiormente en ningún elemento del espacio topológico.

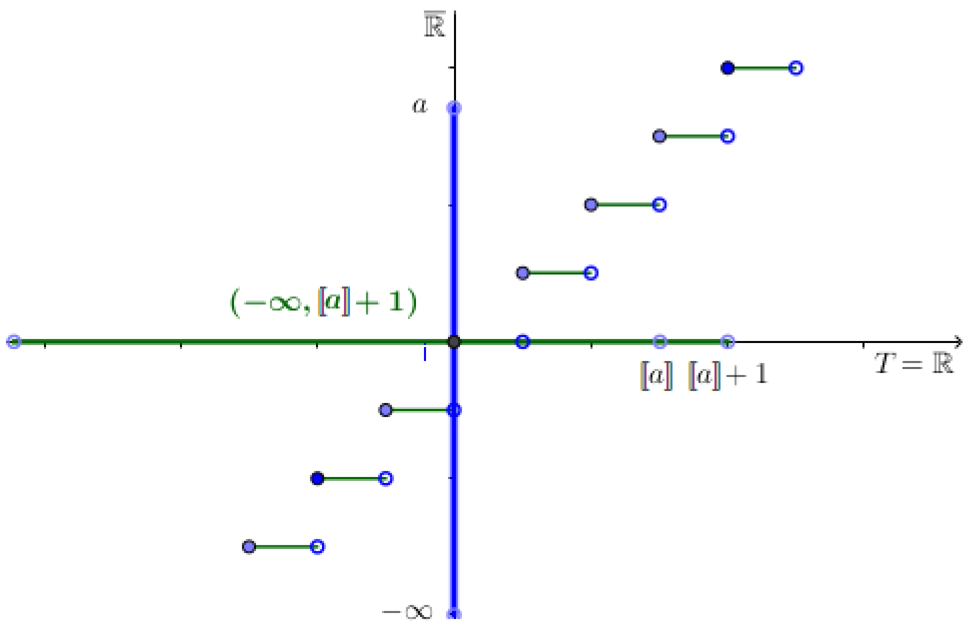


**Figura 2-20**: Análisis de la semicontinuidad de la función parte entera

En la figura 2-20, se tiene $a \in \overline{\mathbb{R}}$ y la imagen inversa por la función $f$ del conjunto $[-\infty, a)$. Como se obtiene el conjunto $(-\infty, [\![a]\!]+1)$, el cual no es abierto ya que su complemente es infinito.

En el ejemplo 2.1.8, donde el espacio topológico esta dado por $T = (0, 1)$, con la topología usual en $\mathbb{R}$ y la función $F$ definida de $T$ en $\overline{\mathbb{R}}$, como sigue:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t \text{ es irracional,} \\ \frac{1}{q}, & \text{si} \quad t = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

Para verificar que la función es semicontinua superioriormente se analizan los siguientes casos, para $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si $a > \frac{1}{2}$, se cumple que $F^{-1}([-\infty, a)) = (0,1)$, donde $(0,1)$ es un abierto del espacio topológico por definición.

- Si $a < 0$, se cumple que $F^{-1}([-\infty, a)) = \emptyset$, donde $\emptyset$ es un abierto del espacio topológico por definición.

- Por último, si $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$, se tiene que $F^{-1}([-\infty, a)) = (0,1) - \bigcup_{n=1}^{N} \{y_n\}$, donde cada $y_n$ es un número racional, para $n = 1, 2, ..., N$ y $y_{n-1} < y_n$.

  El conjunto $(0,1) - \bigcup_{n=1}^{N} \{y_n\}$ se puede expresar como la unión de abiertos básicos.

$$(0,1) - \bigcup_{n=1}^{N} \{y_n\} = (0, y_1) \cup (y_1, y_2) \cup ... \cup (y_{n-1}, y_n) \cup (y_n, \infty)$$

  Por tanto, $(0,1) - \bigcup_{n=1}^{N} \{y_n\}$ es un abierto en el espacio topológico $(T, \tau_u)$.

Finalmente, de acuerdo con lo anterior se puede concluir que la función $F$ es semicontinua superiormente en $T$.

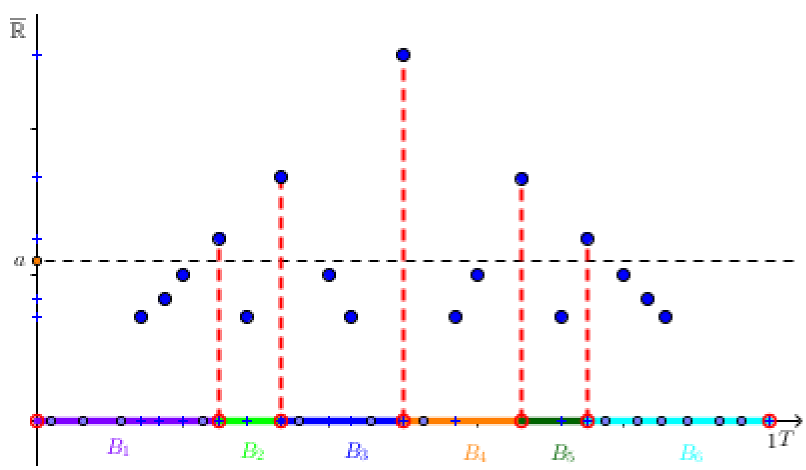


**Figura 2-21**: Semicontinuidad superior de la función $F$

En la figura 2-21, se observa $a$ en la recta real extendia, la imagen inversa de $[-\infty, a)$ por la función $F$ corresponde a todos los puntos del intervalo $(0,1)$, excluyendo los valores en lo cuales $F(t)$ se encuentra arriba de $a$. Es decir $F(t)$ es mayor que $a$.

Luego, este conjunto se puede expresar como la unión de los abiertos básicos $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, entonces el conjunto es abierto en el espacio topológico $(T, \tau_u)$. Por tanto, se concluye que la función es semicontinua superiormente.

A continuación, se presenta un ejemplo en el cual se analiza la continuidad superior de una función a partir de la caracterización topológica, porque facilita el proceso para identificar si la función es semicontinua en todo el espacio topológico.

**Ejemplo 2.2.1.** Sea $T = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{[c, d) : c, d \in \mathbb{R}\}$ una base para la topología sobre $\mathbb{R}$ que se llama la topología del límite inferior[9] y $f_5(t) = \frac{t-1}{|t-1|}$, si $t \neq 1$ y $f(1) = -1$ definida de $T$ en la recta real extendida $\overline{\mathbb{R}}$.

$$f_5(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{|t-1|}, & \text{si} \quad t \neq 1, \\ -1, & \text{si} \quad t = 1. \end{cases}$$

Veamos que la función $f_5$ no es semicontinua superiormente. Cuando tomamos $a = 0$, en $\overline{\mathbb{R}}$, se cumple que $f_5^{-1}([-\infty, 0)) = (-\infty, 1]$.

El conjunto $(-\infty, 1]$ no es un abierto para la topología del límite inferior en $\mathbb{R}$, porque cualquier abierto básico que contenga a $t = 1$, es de la forma $[1-m, 1+n)$ donde $m > 0$ y $n > 0$, y por lo menos tiene al elemento $1+\frac{n}{2}$ que pertenece a $[1-m, 1+n)$ y sin embargo $1+\frac{n}{2}$ no pertenece a $(-\infty, 1]$.

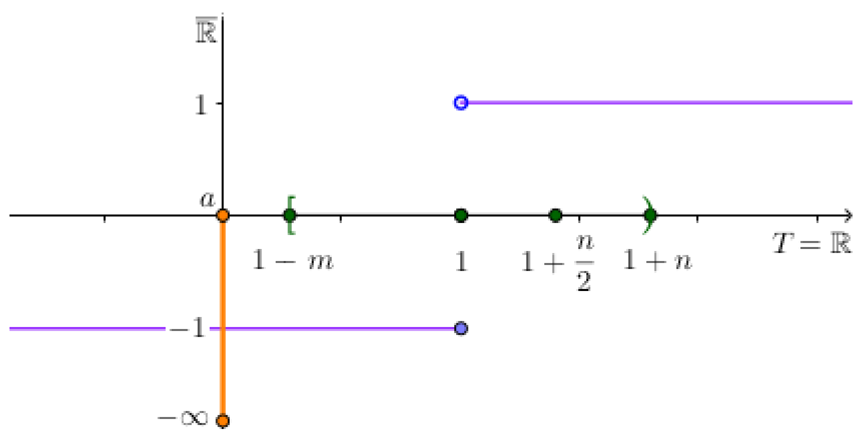


**Figura 2-22**: Semicontinuidad superior de la función $f_5$

En la figura 2-22, se tiene $a = 0$ en la recta extendida $\overline{\mathbb{R}}$, de tal forma que la imagen inversa de $[-\infty, 0)$ por la función $f_5$ es el conjunto $(-\infty, 1]$ que no es un abierto para la topología del límite inferior en $\mathbb{R}$, porque al tener el abierto $[1 - m, 1 + n)$, es posible encontrar un elemento que no pertenece al conjunto $(-\infty, 1]$, este elemento es $1 + \frac{n}{2}$ como se observa en la figura, lo cual que implica la no semicontinuidad superior de la función.

[9]Neira, C.: Topología General. Bogotá : Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2011.

## 2.3. Otra caracterización de funciones semicontinuas superiormente

Existen otras caracterizaciones de las funciones semicontinuas superiormente una de ellas se relaciona con la representación gráfica de la función. Por tal motivo, esta caracteriazación es interesante para su estudio.

**Proposición 2.3.1.** Si $(T, \tau)$ es un espacio topológico y $f$ una función $f : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, entonces $f$ es semicontinua superiormente si y solo si el conjunto $subg(f) = \{(t, a) : t \in T, f(t) \geqslant a\}$ que corresponde al subgrafo de la función $f$ es cerrado en $T \times \overline{\mathbb{R}}$, al dotar a $\overline{\mathbb{R}}$ de la topología usual de la recta extendida.

*Demostración.* Se analizan las siguientes implicaciones:

- Primero, supongamos que la función $f$ es semicontinua superiormente.

  Luego, si $(t, b) \in (subg(f))^c$ entonces $f(t) < b$.

  Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ y $f(t) < a < b$ entonces existe una vecindad $V$ de $t$ de tal forma que $f(s) < a$ para todo $a \in V$, porque $f$ es semicontinua superiormente.

  De esta forma $V \times (a, \infty]$ resulta ser una vecindad para de $(t, b)$ en $T \times \overline{\mathbb{R}}$ contenida en $(subg(f))^c$, por lo cual $(subg(f))^c$ es abierto, y finalmente se concluye que $(subg(f))$ es cerrado.

- Ahora, Si $t \in T$ y $f(t) < a$, entonces $(t, a) \in (subg(f))^c$ y existe una vecindad abierta $U = V \times W$ de $(t, a)$ tal que $U \subseteq (subg(f))^c$.

  Es decir, que si $s \in V$ entonces $f(s) < a$. Lo cual implica que la función $f$ es semicontinua superiormente.

$\square$

En seguida se muestran algunos ejemplos que se abordaron anteriormente. Una bondad de está caracterización es que al determinar el subgrafo de la función es posible decidir si la función es semicontinua superiormente en todo el espacio topológico.

En el ejemplo 2.1.4, donde $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$ y $f_3$, una función de $\mathbb{R}$ en $\overline{\mathbb{R}}$, definida como sigue:

$$f_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{cuando} \quad t \geqslant 1, \\ 1, & \text{cuando} \quad t < 1. \end{cases}$$

El bosquejo del subgrafo de la función $f_3$ se representa en la figura 2-23:

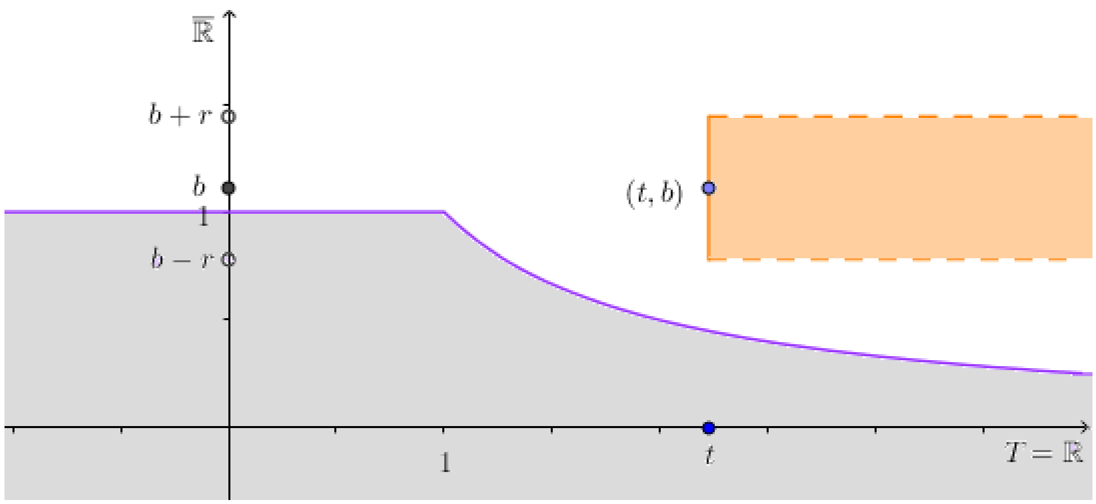


**Figura 2-23**: Subgrafo de la función $f_3$

En la figura, se observa $(t,b) \in (subg(f_3))^c$, a partir del cual se construyó el abierto $U \times V$, donde $U = [t, \infty)$ y $V = [b-r, b+r)$ con $r = \frac{d((t,b),f_3)}{2}$[10].

Por tanto, se cumple que: $(t,b) \in U \times V$ y $U \times V \subset (subg(f_3))^c$.

Finalmente como $subg(f_3))^c$ es abierto en el espacio producto $T \times \overline{\mathbb{R}}$, entonces $subg(f_3))$ es cerrado y de esta manera se concluye que la función $f_3$ es semicontinua superiormente en el espacio topológico.

En algunos casos para verificar si el subgrafo de la función es cerrado, en la topología producto, se tiene en cuenta los puntos de acumulación como se presenta en el siguiente caso.

En el ejemplo 2.2.1, donde $T = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ la base de la topología del lmite inferior y $f_5$ definida de $\mathbb{R}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ como:

$$f_5(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{|t-1|}, & \text{si} \quad t \neq 1, \\ -1, & \text{si} \quad t = 1. \end{cases}$$

En el $subg(f_5)$, se cumple que el punto $(1,0)$ es un punto de acumulación porque para cualquier abierto básico de la forma $U \times V$ que contiene al punto, con $U = [c,d) \in \mathcal{B}$ y $V = (r,s)$ con $r < 0$ y $s > 0$, contiene al punto $\left(\frac{1+d}{2}, 0\right) \in subg\,(f_5)$ ya que $f_5\left(\frac{1+d}{2}\right) = 1 \geqslant 0$.

Como $(1,0) \notin subg(f_5)$ y además es un punto de acumulación, entonces es posible afirmar que $subg(f_5)$ no es cerrado en $\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$.

Finalmente, se concluye que la función $f_5$ no es semicontinua superiormente en el espacio topológico.

[10]Es la distancia del punto $(t,b)$ a la función $f_3$.

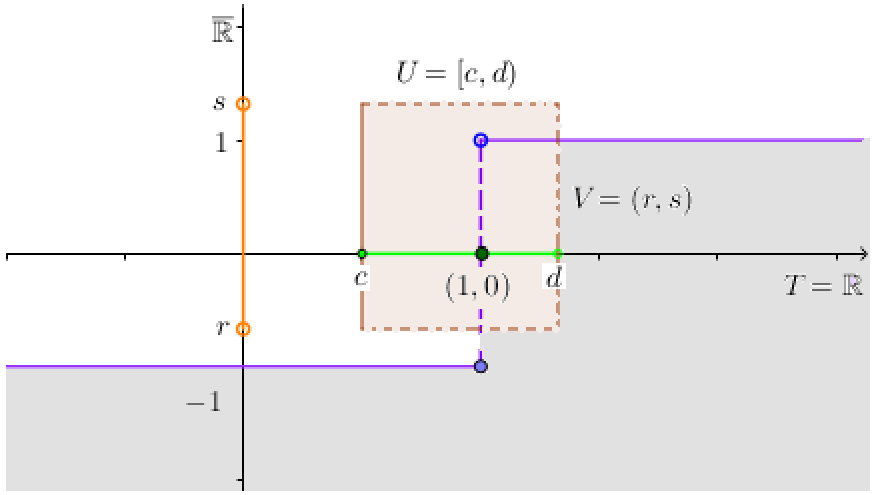


**Figura 2-24**: Bosquejo del subgrafo de la función $f_5$

En la figura 2-24, se tiene el punto $(1, 0)$, $U = [c, d)$ y $V = (r, s)$ de tal forma que $U \times V$ es un abierto que contiene al punto $(1, 0)$ tal que $U \times V \cap (subg(f_5) - \{(1, 0)\}) \neq \emptyset$.

En el ejemplo 1.4.2, donde $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y la función $g$ de $T = \mathbb{R}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ definida como:

$$g(t) = \begin{cases} \tan t, & \text{cuando} \quad t \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ \infty, & \text{cuando} \quad t = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

Dado un punto $(t, a)$ sobre alguna de las rectas verticales $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que cualquier abierto básico $U \times V = (a, b) \times (n, m)$ que contiene al punto $(t, a)$, es posible encontrar el punto $\left(t, \frac{a+d}{2}\right)$ que pertenece a $U \times V = (a, b) \times (n, m)$ y también pertenece a $subg\,(g)$ porque $g\,(t) = \infty$ y $\infty \geqslant \frac{a+d}{2}$.

Ahora, si el punto $(s, c)$ se ubica en el grafo de la función, entonces corresponde a un punto de acumulación para el subgrafo de la función, porque cualquier abierto $U \times V = (a, b) \times (n, m)$ que contiene al punto, es posible encontrar el punto $\left(\frac{s+m}{2}, c\right)$, donde $m$ corresponde al mínimo de las distancias del punto $(s, c)$ a las rectas verticales $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$, el cual pertenece a $U \times V = (a, b) \times (n, m)$ y a $subg\,(g)$.

Si el punto $(t, a)$ se ubica en otro lugar diferente a las rectas verticales $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$ o diferente al grafo de la función, entonces el punto se encuentra en el interior y por tanto es un punto de acumulacion.

De acuerdo con lo anterior, el $subg\,(g)$ contiene todos sus puntos de acumulación y por tanto, resulta ser cerrado.

Finalmente, se concluye que la función $g$ es semicontinua superiormente en el espacio topológico.

El bosquejo del subgrafo de la función con el anterior análisis, se muestra en la figura 2-25.

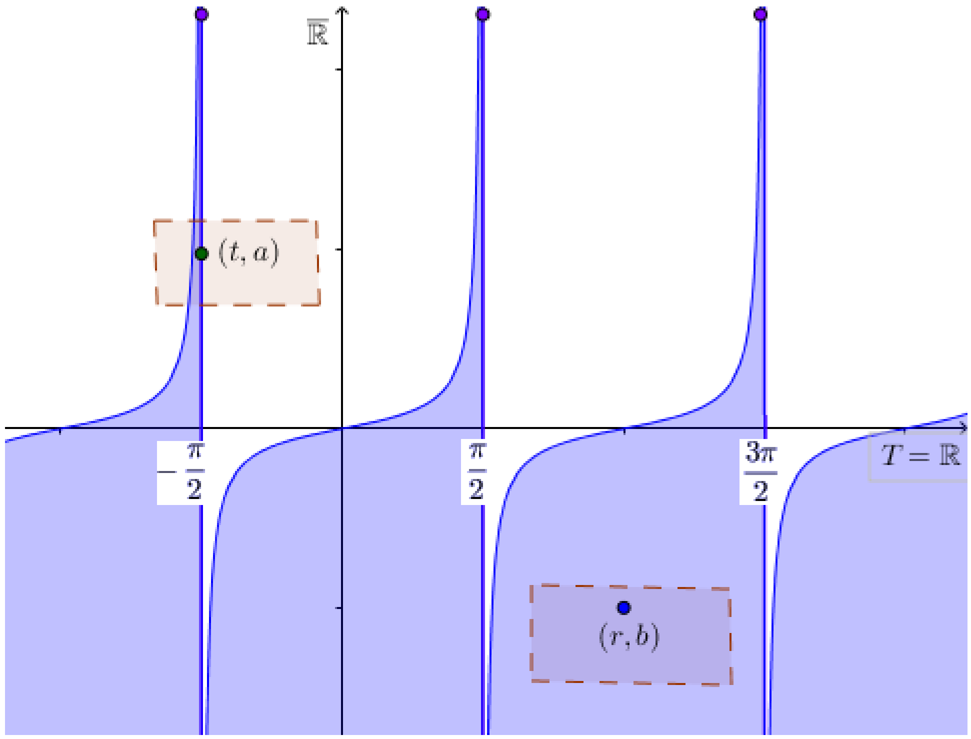


**Figura 2-25**: Semicontinuidad superior de la función $g$

En la figura, se muestran los puntos $(t, a)$ y $(r, b)$, donde alrededor de ellos se construyeron abiertos básicos de modo que intersecan al subgrafo de la función $g$ en puntos distintos a $(t, a)$ y $(r, b)$.

Por tal motivo, los puntos $(t, a)$ y $(r, b)$ son puntos de acumulación al subgrafo de la función, veficando de esta manera que este conjunto es cerrado para la topología producto generada por $T \times \overline{\mathbb{R}}$ y se afirma entonces que la función es semicontinua superiormente.

En este caso la representación geométrica es una ayuda muy valiosa para decidir si la función es semicontinua superiormente. por esta razón la caracterización por medio del subgrafo de la función se le conoce como caracteriazión geométrica de las funciones semicontinuas.

A continuación, se presenta el estudio de la funciones semicontiuas inferiormente, con la intención de no repetir algunos razonamientos, se establecerán ejemplos de funciones que sean semicontinuas inferiormente y no sean semicontinuas superiormente, que sean semicontinuas superiormente y que no lo sean infeiormente, que no sean semicontinuas ni superior ni inferiormente.

# 3 Funciones semicontinuas inferiormente

El analizar los teoremas falsos de Cauchy, le permitio a Baire plantear el estudio de las funciones discontinuas, en lugar de la continuidad tema de interés por la mayoría de matemáticos de su época.

Los teoremas falsos de Cauchy son:

**Primer teorema falso**: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge, y cada cada $f_n$ es continua entonces la funcion lımite es continua.

**Segundor teorema falso**: Si una función de varias variables $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es continua, en cada una de sus variables $x_1, x_2, ..., x_n$, entonces es continua.

En especial el segundo teorema falso de Cauchy, donde indica que si una función de varias variables es continua respecto a cada variable, entonces la función es continua; Baire, no solamente encontró diferentes funciones para contradecir este teorema, sino le permitió distinguir la característica de las funciones semicontinuas inferiormente.[1]

## 3.1. Semicontinuidad Inferior

**Definición 3.1.1.** Sea $(T, \tau)$ un espacio topológico, $f$ una función de $T$ en $\overline{\mathbb{R}}$ y $t \in T$, se dice que $f$ es *semicontinua inferiormente* en $t$, si para cada $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $f(t) > a$ existe una vecindad $V$ de $t$ tal que $f(s) > a$ para todo $s \in V$.

Es decir,

$$(\forall a \in \overline{\mathbb{R}})[(f(t) > a) \Longrightarrow (\exists V \in \mathcal{V}(t))(\forall s \in V(f(s) > a))]$$

Las funciones semicontinuas inferiormente se pueden definir en todo el espacio topológico, de la misma manera que las funciones semicontinuas superiormente, como sigue.

**Definición 3.1.2.** Si $f$ es semicontinua inferiormente en $t$ para todo $t \in T$, se dice que $f$ es *semicontinua inferiormente*.

[1]Vallejo, F.: Clases de Baire y el concepto de semicontinuidad. Pasto, Universidad de Nariño, Trabajo de grado, 2008

**Definición 3.1.3.** Una función $f$ es semicontinua en $t$, si $f$ es semicontinua superiormente $t$ o $f$ es semicontinua inferiormente en $t$.[2]

**Ejemplo 3.1.1.** Sea $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}, \{2,3\}, \{0,2,3\}\}$ la topología sobre el conjunto $T = \{0,1,2,3,4\}$ y la función $l : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definida como sigue:

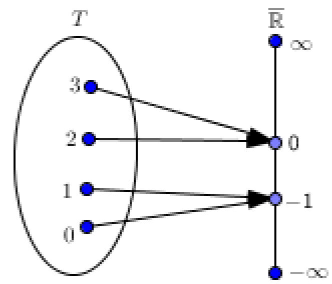


**Figura 3-1**: Representación de la función $l$

Para $t = 0$, y $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a < -1$, se cumple $l(0) = -1 > a$. Existe la vecindad $V = \{0\}$ de $\mathcal{V}(0)$ tal que: $l(0) = -1 > a$.
Luego, se encontro una vecindad para $t = 0$, de modo que la imagen de su único elemento es mayor que $a$, entonces la función $l$ es semicontinua inferiormente en $t = 0$.

Para $t = 1$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a < -1$, entonces $l(1) = -1 > a$. Existe la vecindad $V = \{0,1,2,3\}$ con $V \in \mathcal{V}(1)$ tal que $l(0) = -1 > a$, $l(1) = -1 > a$, $l(2) = 0 > a$ y $l(3) = 0 > a$.

Como $l(s) > a$ para todo $s \in V = \{0,1,2,3\}$, entonces la función $l$ es semicontinua inferiormente en $t = 1$.

Para $t = 2$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a < 0$, entonces $l(2) = 0 > a$. Existe la vecindad $V = \{2,3\}$ con $V \in \mathcal{V}(2)$ tal que $l(2) = 0 > a$ y $l(3) = 0 > a$.

Como $l(s) > a$ para todo $s \in V = \{2,3\}$, entonces la función $l$ es semicontinua inferiormente en $t = 2$.

Para $t = 3$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a < 0$, entonces $l(3) = 0 > a$. Existe la vecindad $V = \{2,3\}$ con $V \in \mathcal{V}(3)$ tal que $l(2) = 0 > a$ y $l(3) = 0 > a$.

Como $l(s) > a$ para todo $s \in V$, entonces la función $l$ es semicontinua inferiormente en $t = 3$.

Por tanto, la función $l$ es semicontinua inferiormente en el espacio topológico $(T, \tau)$.

[2]Gelbaum, B. ; Olmsted, J: Counterexamples in Analysis. New York : Dover Publications, 1964, página 22.

Sin embargo, la función $l$ no es semicontinua superiormente en $t = 1$, porque para $a = -\frac{1}{2}$ en donde $a \in \overline{\mathbb{R}}$, se cumple que $l(1) = -1 < \frac{1}{2} = a$. Además, para la única vecindad $V = \{0, 1, 2, 3\}$ con $V \in \mathcal{V}(1)$, se tiene que $l(2) = 0 > \frac{1}{2} = a$, lo cual implica que la función no es semicontinua superiormente.

Finalmente, se concluye que la función $l$ es semicontinua inferiormente en el espacio topológico $(T, \tau)$, pero no es semicontinua superiormente.

En forma igual que las funciones semicontinuas superiormente se obtienen los siguientes resultados.

**Proposición 3.1.1.** Sea $(T, \tau)$ un espacio topológico, $f$ una función de $T$ en $\overline{\mathbb{R}}$ y $t \in T$, se dice que $f$ es *semicontinua inferiormente* en $t$ (*s.c.i.* en $t$), si para cada $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $f(t) > a$, existe un abierto básico $B \in \mathcal{B}$, con $t \in B$, tal que $f(s) > a$ para todo $s \in B$. Es decir,

$$(\forall a \in \overline{\mathbb{R}})[(f(t) > a) \Longrightarrow (\exists B \in \mathcal{B})(t \in B)(\forall s \in B(f(s) > a))]$$

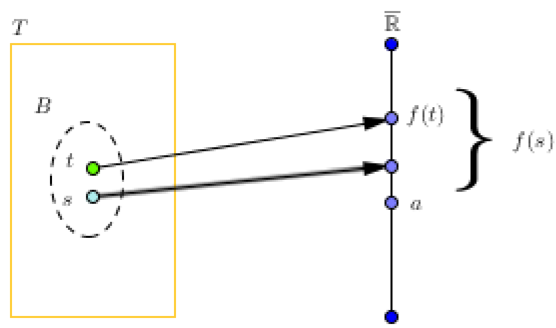


**Figura 3-2**: Representación de la semicontinuidad inferior

En la gráfica se observa que para $t \in T$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $f(t)$ mayor que $a$, es posible encontrar un abierto básico $B$ que contiene al elemento $t$, de tal forma que la imagen de cada elemento $s$ de $B$, por la función $f$, se ubica por debajo de $a$. Es decir, $f(s)$ es mayor que $a$, para todo $s$ que pertenece al abierto básico $B$.

**Ejemplo 3.1.2.** Sea $T$ el conjunto de funciones continuas en $[0,\ 1]$ y la distancia $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\} : x \in [0, 1]$ y $\mathcal{B}$ la base de la topología inducida por la distancia $d$, la *topologia de las bolas abiertas*. La función $F(t) = t(0)$ definida de $T$ en $\overline{\mathbb{R}}$.

La función $F$ es semicontinua inferiormente, como se muestra a continuación.

Para $t \in T$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$, tal que $F(t) = t(0) > a$.
Luego, existe un abierto básico (bola abierta) de radio $r = \frac{t(0)-a}{2}$ que se expresa como $B(t, r)$, el cual representa el conjunto de funciones continuas con gráfica en una *banda* de radio $r$ alrededor de la gráfica de $t$. Además, para todo $s \in B(t, r)$, se cumple que $s(0) > a$.

En relación con la semicontinuidad superior, se tiene que para $t \in T$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$, con $F(t) = t(0) < a$. Existe un abierto básico (bola abierta) de radio $k = \frac{t(0)-a}{2}$ que se expresa como $B(t,k)$, el cual representa el conjunto de funciones continuas con gráfica en una *banda* de radio $k$ alrededor de la gráfica de $t$. Además, para todo $s \in B(t,k)$, se cumple que $s(0) < a$.

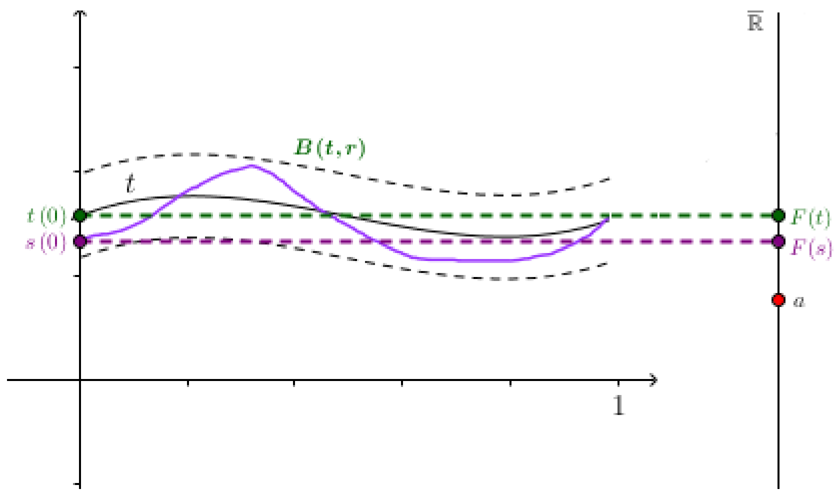


**Figura 3-3**: Análisis de la semicontinuidad inferior de la función $F$

En la figura 3-3, se tiene $t \in T$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$, donde $F(t)$ es mayor que $a$. Luego, para el abierto básico $B(t,r)$, se tiene que el elemnto $s$ de la bola abierta $B(t,r)$, se cumple que $F(t)$ es mayor que $a$. Por tal razón, la función $F$ es semicontinua inferiormente.

La función $F$, resulta ser semicontinua superiormente en el espacio topológico $(T, \mathcal{B})$. En este caso, como la función es semicontinua superior e inferiormente, también es continua.

## 3.2. Caracterización topológica de las funciones semicontinuas inferiormente

Las funciones semicontinuas inferiormente también se pueden caracterizar en forma topológica.

**Proposición 3.2.1.** Si $(T, \tau)$ es un espacio topológico y $f : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función, entonces $f$ es semicontinua inferiormente si y solo si para cada $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f^{-1}((a, \infty])$ es abierto en $T$. Es decir, $f$ es semicontinua inferiormente si y sólo si $f$ es continua al dotar a $\overline{\mathbb{R}}$ de la topología cuyos abiertos son de la forma $(a, \infty]$.

*Demostración.* Sea $f$ una función semicontinua inferiormente. Si $t \in f^{-1}((a, \infty])$, entonces $f(t) > a$, luego existe una vecindad $V$ de $t$, tal que $f(s) > a$, para todo $s \in V$.

De esta forma se encuentra un abierto que contiene al punto y está contenido en $f^{-1}((a,\infty])$, por tanto $f^{-1}((a,\infty])$ es abierto en $(T,\tau)$.

Ahora, si el conjunto $f^{-1}((a,\infty])$ es abierto en $(T,\tau)$, y $t\in T$ tal que $f(t)>a$, existe una vecindad $V$ de $t$, contenida en $f^{-1}((a,\infty])$. Luego, $f(s)>a$ para todo $s\in V$, de esta forma $f$ es semicontinua superiormente. $\square$

**Ejemplo 3.2.1.** Sea $(\mathbb{R},\tau_u)$ y la función de Dirichlet definida de $\mathbb{R}$ en $\overline{\mathbb{R}}$, como sigue:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{cuando} \quad x \text{ es racional,} \\ 0, & \text{cuando} \quad x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Cuando tomamos $a\in\overline{\mathbb{R}}$, con $0\leqslant a\leqslant 1$ se tiene que $f^{-1}((a,\infty])=\mathbb{Q}$.

Luego, como el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) no es abierto para la topolgía usual en $\mathbb{R}$, entonces la función no es semicontinua inferiormente.

Sin embargo, si escogemos $a\in\overline{\mathbb{R}}$, con $a<0$ obtenemos que $f^{-1}((a,\infty])=\mathbb{R}$.

Luego, como el conjunto de los números reales es un abierto para la topolgía usual en $\mathbb{R}$, entonces la función es semicontinua inferiormente.
De acuerdo con lo anterior, se concluye que la función no es semicontinua inferiormente. Además, se debe estudiar la semicontinuidad a partir de la proposición 3.1.1 para identificar los valores donde la función es semicontinua inferiormente.

Para $t\in\mathbb{R}$, donde $t$ es un número irracional y $a\in\overline{\mathbb{R}}$ con $f(t)=0>a$, es posible encontrar el abierto $U=(t-r,t+r)$ con $r>0$, de tal forma que:

Si $s\in U$ donde $s$ es un número irracional, entonces $f(s)=0>a$. Ahora, si $s\in U$ donde $s$ es un número racional, entonces $f(s)=1>0>a$. Es decir $f(s)>a$ para todo $s\in U$, lo cual implica que la función $f$ es semicontinua inferiormente para los números irracionales.

En cambio para $t\in\mathbb{R}$, donde $t$ es un número racional y $a\in\overline{\mathbb{R}}$ con $a=0,5$, se cumple que $f(t)=1>a$ y en todo abierto $V=(t-k,t+k)$ con $k>0$, existe un $s\in V$ número irracional de modo que $f(s)=0<0,5=a$. Por tanto, la función no es semicontinua inferiormente para los números racionales.

En relación con la semicontinuidad superior, se distingue que para $a\in\overline{\mathbb{R}}$, con $a>1$, $f^{-1}([-\infty,a))=\mathbb{R}$ y con $a\leqslant 1$, $f^{-1}([-\infty,a))=\mathbb{I}$.

Como $\mathbb{R}$ es abierto y $\mathbb{I}$ no es abierto, es posible afirmar que la función no es semicontinua superiormente.

Finalmente, se puede concluir que la función $f$ es semicontinua inferiormente para los números irracionales.

En el ejemplo 2.1.8, donde el espacio topológico esta dado por $T = (0,1)$, con la topología usual en $\mathbb{R}$ y la función $F$ definida de $T$ en $\overline{\mathbb{R}}$, como sigue:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t \text{ es irracional,} \\ \frac{1}{q}, & \text{si} \quad t = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

En la comprobación de la semicontinuidad inferior de la función $F$ se proponen los siguientes casos, para $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si $a \geqslant \frac{1}{2}$, se cumple que $F^{-1}((a,\infty]) = \emptyset$, donde $\emptyset$ es un abierto del espacio topológico por definición.
- Si $a < 0$, se cumple que $F^{-1}((a,\infty]) = \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ es un abierto del espacio topológico por definición.
- Por último, si $0 \leqslant a < \frac{1}{2}$, se tiene que $F^{-1}((a,\infty]) = \bigcup_{n=1}^{N} \{y_n\}$, donde cada $y_n$ es un número racional, para $n = 1, 2, ..., N$ y $y_{n-1} < y_n$.

  El conjunto $\bigcup_{n=1}^{N} \{y_n\}$ no es un conjunto abierto, porque cualquier abierto que contiene a $y_1$, contiene números irracionales que no hacen parte de este conjunto.

De acuerdo con lo anterior, la función no es semicontinua inferiormente en todo el espacio topológico.

Para encontrar los valores donde la función $F$ es semicontinua inferiormente, se tiene en cuenta la proposición 3.1.1.

Luego, para $t \in T$ con $t$ un número irracional se tiene que para $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a < 0$, se cumple $F(t) > a$.

Como existe $V = \left(0, \frac{t}{2}\right)$ que pertenece a $\tau_u$, de modo que para todo $s \in V$, se cumple

Si $s$ es un número racional, $F(s) > 0 > a$ y si $s$ es un número irracional, $F(s) = 0 > a$.

En cambio para $t \in T$ con $t$ un número racional se tiene que para $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a = \frac{F(t)}{2}$, se cumple $F(t) > \frac{F(t)}{2} = a$.

Como en todo abierto $U$ que contiene a $t$, existe un número irracional $s$, de modo que $F(s) = 0 < a$, entonces la función $F$ no es semicontinua inferiormente para los números racionales de $T = (0,1)$.

Finalmente, se concluye que la función es continua en los números irracionales, ya que es semicontinua superior e inferiormente para estos números.

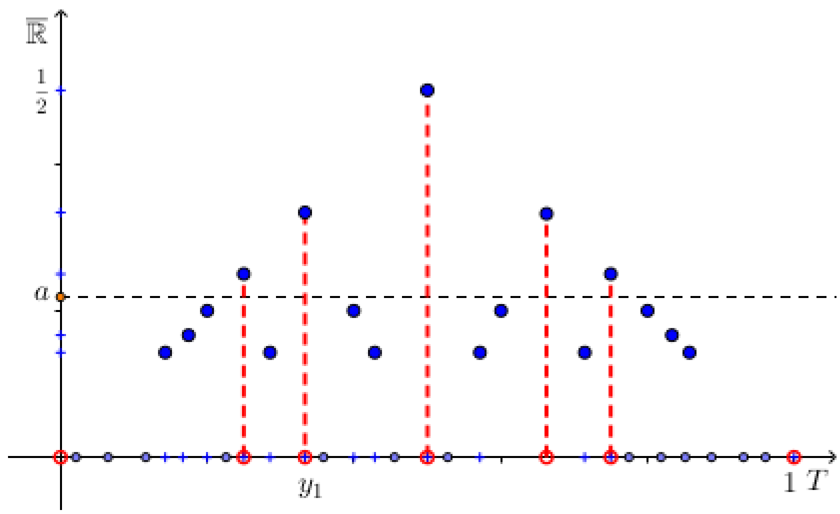


**Figura 3-4**: Semicontinuidad inferior de la función F

En la figura 3-4, se observa $a$ en la recta real extendia, la imagen inversa de $(a, \infty]$ por la función $F$ que corresponde a los puntos del intervalo $(0, 1)$, cuyos valores a través de la función $F(t)$ se encuentran arriba de $a$.
Luego, este conjunto no es un conjunto abierto. Por tanto, se concluye que la función no es semicontinua superiormente.

## 3.3. Otra caracterización de funciones semicontinuas inferiormente

Las funciones semicontinuas inferiormente se pueden caraterizar en forma geométrica.

**Proposición 3.3.1.** Si $(T, \tau)$ es un espacio topológico y $f$ una función $f : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, entonces $f$ es semicontinua inferiormente si y solo si el conjunto $epi(f) = \{(t, a) : t \in T, f(t) \leqslant a\}$ es cerrado en $T \times \overline{\mathbb{R}}$, al dotar a $\overline{\mathbb{R}}$ de la topología usual de la recta extendida.

*Demostración.* Se analizan las siguientes implicaciones:

- Primero, supongamos que la función $f$ es semicontinua inferiormente, luego si $(t, b) \in (epi(f))^c$ entonces $f(t) > b$.

  Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ y $f(t) > a > b$ entonces existe una vecindad $V$ de $t$ de tal forma que $f(s) > a$ para todo $a \in V$, porque $f$ es semicontinua superiormente.

  De esta forma $V \times [-\infty, a)$ resulta ser una vecindad de $(t, b)$ en $T \times \overline{\mathbb{R}}$ contenida en $(epi(f))^c$, por lo cual $(epi(f))^c$ es abierto, y finalmente se concluye que $(epi(f))$ es cerrado.

- Ahora, Si $t \in T$ y $f(t) > a$, entonces $(t, a) \in (epi(f))^c$ y existe una vecindad abierta $U = V \times W$ de $(t, a)$ tal que $U \subseteq (epi(f))^c$.
  Es decir, que si $s \in V$ entonces $f(s) > a$. Lo cual implica que la función $f$ es semicontinua inferiormente.

$\square$

A continuación se muestran ejemplos donde se visualiza el uso grafico de esta caracterización.

En el ejemplo 1.4.3, donde $(T, \tau_{cd})$ con $T = \mathbb{R}$ y la funcion $h$ de $\mathbb{R}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ definida como: $h(t) = t^2 + 2t + 4$.

Para analizar la semicontinuidad se realiza el bosquejo del epigrafo de la función.

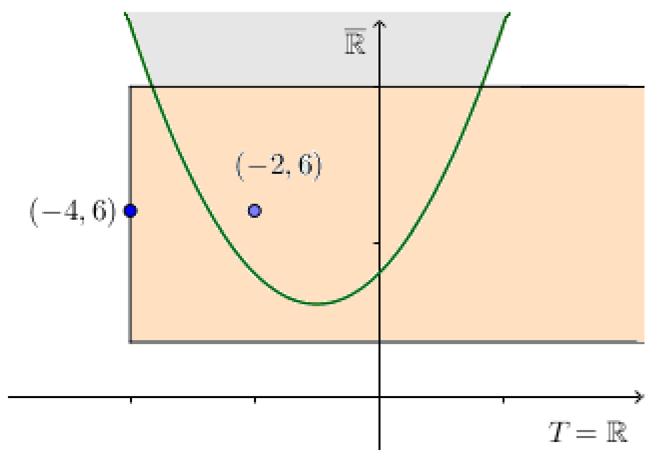


**Figura 3-5**: Semicontinuidad inferior de la función $h$

En la figura 3-5 se aprecia el punto $(-4, 6)$, el cual pertence al complemento del epigrafo de la función, es decir $(-4, 6) \in (epi(h))^c$.

Como todo abierto $U = V \times W$, donde $V$ es de la forma $V = [b, \infty)$, con $b \in \mathbb{R}$ contiene elementos que no pertencen al $(epi(h))^c$, entonces en especial para este punto no es posible encontrar un abierto que lo contenga y que sea subconjunto del $(epi(h))^c$.

Por tal motivo, $(epi(h))^c$ no es abierto y se concluye que la función no es semicontinua inferiormente en el espacio topológico generado por la topología de colas a derecha cerrada sobre $\mathbb{R}$.

En forma similar se puede verificar que la función $h$ tampoco es semicontinua superiormente en el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$

**Ejemplo 3.3.1.** Sea $T = \mathbb{R}$, con la topología usual en $\mathbb{R}$ y la función definida de $T$ en $\overline{\mathbb{R}}$, como $k(t) = 3t - 3[\![t]\!]$.

Para verificar si es semicontinua inferiormente, se analiza el complemento del epigrafo, así:

Si $(t, b) \in (epi(k))^c$, entonces es posible determinar un abierto de la forma $U \times V$ donde:

$$U = (t - r, t + r) \text{ con } r = \frac{d((t,b),k(t))}{2}{}^{3} \text{ y } V = (n, b + r) \text{ con } n < b.$$

Por tanto, se cumple que: $(t, b) \in U \times V$ y $U \times V \subset (epi(k))^c$.

Finalmente como $epi(k))^c$ es abierto en el espacio produto $T \times \overline{\mathbb{R}}$, entonces $epi(k))$ es cerrado y de esta manera se concluye que la función $k$ es semicontinua inferiormente en el espacio topológico.

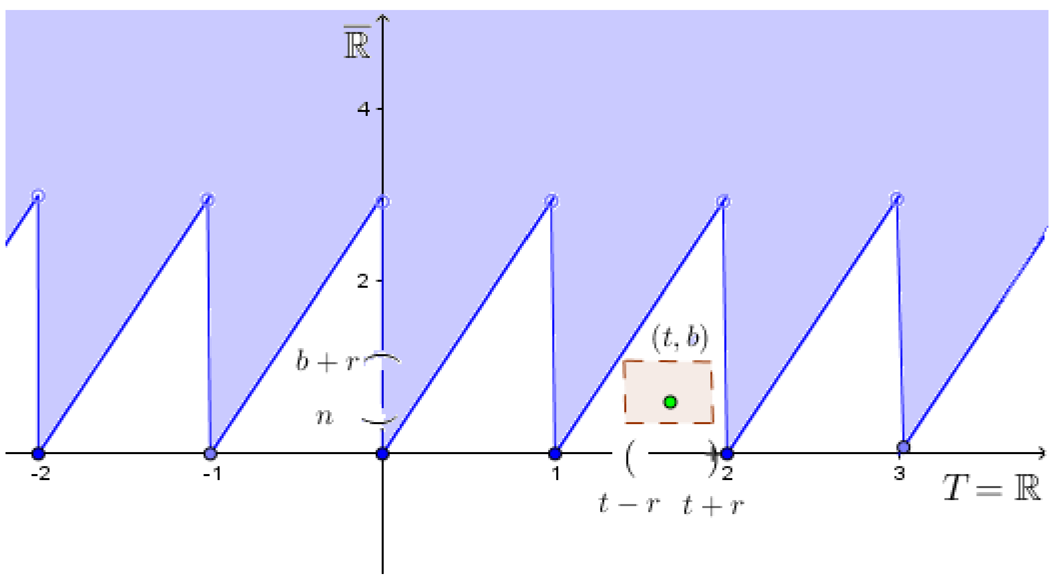


**Figura 3-6**: Semicontinuidad inferior de la función $k$

En la figura se muestra el punto $(t, b) \in (epi(k))^c$, a partir del cual se construyó el rectángulo que lo contiene y se encuentra determinado por $U \times V)$ donde $U = (t - r, t + r)$ y $V = (n, b + r)$.

Como el rectángulo es un abierto en la topología producto, y esto ocurre para cada elemento del $(epi(k))^c$, entonces $(epi(k))^c$ es abierto y su complemento $epi(k)$ sería cerrado, de esta manera se verifica que la función es semicontinua inferiormente en todo elemento del espacio topológico.

[3]Es la distancia del punto $(t, b)$ a la función $k$.

# 4 Propiedades de las funciones semicontinuas

Las siguientes proposiciones muestran algunas propiedades importantes del conjunto de las funciones semicontinuas, a pesar de no cumplir la estructura de grupo para la suma o el producto.

## 4.1. Propiedades topológicas

**Proposición 4.1.1.** Sea $(T, \tau)$ un espacio topológico y $f$ una función de $T$ en $\overline{\mathbb{R}}$. Si $f$ es una función semicontinua superior e inferiormente, entones $f$ es continua.

*Demostración.* Supongamos que la función $f$ es semicontinua superior e inferiormente en $t \in T$. Sea $U$ un abierto básico de la topología usual de $\overline{\mathbb{R}}$, con $f(t) \in U$[1].

Si $U = [\infty, b)$, entones por la semicontinuidad superior tenemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en el espacio topológico $(T, \tau)$.

Si $U = (a, \infty]$, entones por la semicontinuidad inferior tenemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en el espacio topológico $(T, \tau)$.

Ahora, si $U = (a, b)$, entonces $U$ lo podemos expresar como $U = (a, \infty] \cap [-\infty, b)$ de tal manera que:

$$f^{-1}(U) = f^{-1}((a, \infty] \cap [-\infty, b)) = \big(f^{-1}(a, \infty]\big) \cap \big(f^{-1}[-\infty, b)\big)$$

Como $f^{-1}(a, \infty]$ y $f^{-1}[-\infty, b)$ son abiertos por ser $f$ semicontinua superior e inferiormente, entonces su intersección es un conjunto abierto. Es decir, $f^{-1}(U)$ es abierto en el espacio topológico $(T, \tau)$.

Por tanto, se concluye que la función $f$ es continua en $t \in T$.

$\square$

En relación con el subgrafo y el epigrafo de una la función, podemos afirmar que una función es continua si el grafo de la función es cerrado en $T \times \overline{\mathbb{R}}$, al dotar a $\overline{\mathbb{R}}$ de la topología usual de la recta extendida.

A continuación se presenta una proposición, que permite encontrar varios ejemplos de funciones semicontinuas superior e inferiormente.

[1] La demostración se realiza con abiertos básicos de la topología usual en $\overline{\mathbb{R}}$.

**Proposición 4.1.2.** Si $(T, \tau)$ es un espacio topológico y $A$ es un subconjunto de $T$, entonces la función característica $\chi_A$ de $A$ satisface las siguientes afirmaciones.

*a)* $\chi_A$ es semicontinua superiormente en $A$.

*b)* $\chi_A$ es semicontinua inferiormente en $A^c$.

*c)* $\chi_A$ es semicontinua superiormente si y solo si $A$ es cerrado.

*d)* $\chi_A$ es semicontinua inferiormente si y solo si $A$ es abierto.

*Demostración.* En la justificación de las anteriores afirmaciones se tiene:

*a)* Si $t \in A$ y $\chi_A(t) < b$ entonces $b > 1$. Para cada $V \in \mathcal{V}(t)$ arbitraria y $s \in V$ se tiene que $\chi_A(s) \leqslant 1 < b$ y por lo tanto $\chi_A$ es semicontinua superiormente en $t$.

*b)* Si $t \in A^c$ entonces $\chi_A(t) = 0$ y si $\chi_A(t) > b$ se tiene que $b < 0$, luego $\chi_A(s) \geqslant 0 > b$ para todo $s$ en una vecindad arbitraria de $t$. Por tanto, $\chi_A$ es semicontinua inferiormente en $A^c$.

*c)* Para cada $b \in \overline{\mathbb{R}}$, se tiene que

$$\chi_A^{-1}([-\infty, b)) = \begin{cases} \emptyset, & \text{cuando} \quad b \leqslant 0, \\ A^c, & \text{cuando} \quad 0 < b \leqslant 1, \\ T, & \text{cuando} \quad b > 1, \end{cases}$$

por la Proposición 2.2.1, la caractrización topológica de una función semicontinua superiormente, se cumple que $\chi_A$ es semicontinua superiormente si y solo si $A$ es cerrado en $(T, \tau)$, porque $A^c$ sería abierto en $(T, \tau)$.

*d)* Para cada $b \in \overline{\mathbb{R}}$, se tiene que

$$\chi_A^{-1}((b, \infty]) = \begin{cases} \emptyset, & \text{cuando} \quad b \geqslant 1, \\ A, & \text{cuando} \quad 0 \leqslant b < 1, \\ T, & \text{cuando} \quad b < 0, \end{cases}$$

En este caso, se aplica la caracterización topológica para funciones semicontinuas inferiormente, es decir la Proposición 3.2.1. para concluir que $\chi_A$ es semicontinua inferiormente si y solo si $A$ es abierto en $T$.

$\square$

Ahora, al considerar el espacio $(\mathbb{R}, \tau_u)$ la funcion $-\chi_A$ como

$$-\chi_A(t) = \begin{cases} -1 & si \quad t \in A \\ 0 & si \quad t \in A^c \end{cases}$$

se tiene que para mostrar la semicontinuidad inferior en todo $t \in \mathbb{R}$, se sigue:

Sea $t \in A$, se tiene que $\chi_A(t) = -1$, por tanto para cualquier $b < -1$ y cualquier vecindad $V$ de $t$ se tiene que si $s \in V$ entonces $\chi_A(s) \geq -1 > b$.

Ahora si $t \in A^c$ entonces $\chi_A(t) = 0$ y para todo $b < 0$, existe una vecindad $V = (s - \frac{d}{2}, s + \frac{d}{2})$, siendo $d$ la distancia de $s$ a $A$, de tal modo que si $s \in V$ entonces $\chi_A(s) = 0 > b$.

De lo anterior se puede concluir que $\chi_A$ es una funcion semicontinua inferiormente, para los elementos pertenecientes a $A$ y a su complemento, es decir, $\chi_A$ es semicontinua inferiormente para todo $t \in \mathbb{R}$.

En el caso en que $(T, \tau)$ sea un espacio topológico compacto se tiene la siguiente proposición:

**Proposición 4.1.3.** Si $f$ es una función de variable real semicontinua superiormente definida sobre un espacio topológico compacto $(T, \tau)$, entonces $f$ es acotada superiormente y alcanza su extremo superior en $T$.

*Demostración.* Como $f$ es semicontinua superiormente los conjuntos de la forma

$$A_n = f^{-1}([-\infty, n),$$

con $n \in \mathbb{N}$, forman un recubrimiento abierto en $T$.

La compacidad de $T$ garantiza que existe un número natural $m$ tal que

$$T = \bigcup_{k=1}^{m} A_k = A_m,$$

entonces $f(s) < m$ para todo $s \in T$ y $f$ es acotada.

Luego, si $b = \sup_{s \in T} f(s) < \infty$. Si no existe $t \in T$ tal que $f(t) = b$ entonces para cada $t$ es posible escoger un número natural $n$ de tal forma que $f(t) < b - \frac{1}{n}$. La colección de los conjuntos

$$B_n = f^{-1}([-\infty, -\tfrac{1}{n}),$$

con $n \in \mathbb{N}$, forma un recubrimiento abierto de $T$. Una vez más la compacidad de $T$ garantiza que existe un número natural $p$ tal que

$$T = \bigcup_{k=1}^{p} B_k.$$

Por tanto, $f(t) < b - \frac{1}{p} < b$ para todo $t \in T$ lo cual contradice la elección de $b = \sup_{s \in T} f(s)$. □

## 4.2. Propiedades algebraicas

**Proposición 4.2.1.** Si $f$ es una función semicontinua supeiormente, entones $-f$ es semicontinua inferiormente.

*Demostración.* Supongamos que $(-f)(t) = -f(t) > a$, entonces $f(t) < -a$.
Como $f$ es semicontinua superiormente, existe una vecindad $V$ de $t$ de tal forma que $f(s) < -a$ para todo $s \in V$.

Finalmente como $(-f)(s) = -f(s) > a$ para todo $s \in V$, implica que $-f$ es semicontinua inferiormente. □

**Ejemplo 4.2.1.** Sea $T = \mathbb{R}$ con la topologia usual y la funcion $f$ definida de $\mathbb{R}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ como sigue:

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

La función $f$ es superiormente continua para $t = 0$, a pesar de que los limites laterales no existen, teniendo en cuenta la siguiente desigualdad, $|sen(t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para cualquier valor $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $f(0) = 1 < a$ se tiene que para $r > 0$ el intervalo $(-r, r)$ es una vecindad de $t = 0$ para la cual si $t \in (-r, r)$, $f(t) \leq 1 < a$, mostrando así que $f$ es superiormente continua en $t = 0$.

Ahora se pretende mostrar que la funcion $-f$ definida como sigue

$$-f(t) = \begin{cases} -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) & si \quad t \neq 0 \\ -1 & si \quad t = 0 \end{cases}$$

es semicontinua inferiormente en $t = 0$.

Tomando $b \in \overline{\mathbb{R}}$ de tal forma que $f(0) = -1 > b$ y considerando la vecindad de la forma $(-r, r)$ con $r > 0$, se tiene que para todo $t \in (-r, r)$ se cumple que $f(t) \geq -1 > b$, por tanto $-f$ es una funcion semicontinua inferiormente para $t = 0$.

**Proposición 4.2.2.** Si $f$ es una función positiva ($f(t) > 0$ para todo $t \in T$) y semicontinua superiormente, entonces $\frac{1}{f}$ es semicontinua inferiormente.

*Demostración.* Supongamos que $(\frac{1}{f})(t) = \frac{1}{f(t)} > a$ con $a > 0$.

Si $\frac{1}{f(t)} > a$, entonces $f(t) < \frac{1}{a}$. Como $f$ es semicontinua superiormente, existe una vecindad $V$ de $t$ de manera que $f(s) < \frac{1}{a}$ para todo $s \in V$.

Por tanto, $(\frac{1}{f})(s) = \frac{1}{f(s)>a}$ para todo $s \in V$, entonces $\frac{1}{f}$ es semicontinua inferiormente.

Para el caso $a \leqslant 0$, entonces cualquier vecindad $V$ de $t$, cumple que $\frac{1}{f} = \frac{1}{f(s)} > a$, para todo $s \in V$. $\square$

**Ejemplo 4.2.2.** Sea $T = \mathbb{R}$, con la topología usual y la función $f : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida como

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 1 & si \quad t \neq 0 \\ 2 & si \quad t = 0 \end{cases}$$

Como $t^2 \geqslant 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $t^2 + 1 > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y dado que $2 > 0$, se tiene que $f(t) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

La función $f$ es semicontinua superiormente para todo $t \in \mathbb{R}$, ya que si $t \neq 0$ se tiene una funcion continua. Luego, la funcion es semicontinua superiormente.

En el caso que $t = 0$, para cualquier $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 2 < a$, existe la vecindad $V = \left(-\sqrt{\frac{a-2}{2}}, \sqrt{\frac{a-2}{2}}\right)$ en la cual para todo $s \in V$ se tiene que $f(s) \leq \frac{a}{2} < a$.

Ahora, para probar que la funcion $\frac{1}{f(t)}$ es semicontinua inferiormente se tiene en cuenta

$$\frac{1}{f(t)} = \begin{cases} \frac{1}{t^2+1} & si \quad t \neq 0 \\ \frac{1}{2} & si \quad t = 0 \end{cases}$$

Basta probar que $\frac{1}{f(t)}$ es semicontinua inferiormente para $t = 0$, pues para todo $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ se tiene una funcion continua. Por tanto la funcion es semicontinua inferiormente.

Para ello, se considera $a > 0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $f(0) = \frac{1}{2} > a$, ya que el caso $a \leqslant 0$ es trivial.

Para cada $a$ existe la vecindad $V = \left(-\sqrt{\frac{1}{2a} - 1}, -\sqrt{\frac{1}{2a} - 1}\right)$, donde cada elemento $s$ que pertenece a $V$ satisface la desigualdad $f(s) \geqslant 2a > a$, obteniendo asi que $\frac{1}{f(t)}$ es una funcion semicontinua inferiormente para todo $t \in \mathbb{R}$.

**Proposición 4.2.3.** Si $f$, $g$ son funciones semicontinuas superiormente en $t \in T$ entonces $f + g$ también es semicontinua superiormente en $t$.

*Demostración.* Sea $a$ un número real de manera que $f(t)+g(t) < a$, es decir, tal que $f(t) < a-g(t)$. Es posible entonces escoger otro número real $b$ tal que $f(t) < b < a-g(t)$, de tal forma que se tiene $f(t) < b$ y $g(t) < a - b$.
La semicontinuidad superior tanto de $f$ como $g$ garantiza la existencia de vecindades $V$ y $W$ de $t$ tales que $f(s) < b$ siempre que $s \in V$ y $g(s) < a - b$ siempre que $s \in W$.

Donde para todo $s \in V \cap W \in \mathcal{V}(t)$, se cumple que $f(s) + g(s) < a$ y se concluye que la función $f + g$ es semicontinua superiormente en $t$. $\square$

**Ejemplo 4.2.3.** En $(\mathbb{R}, \tau_u)$ se consideraran las funciones

$$f(t) = \text{ínf}\{|t-a| \mid a \in (1,2]\}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & si \quad t \leq \frac{1}{2} \\ t & si \quad t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

las cuales, como se verifica a continuación son funciones semicontinuas superiormente en $t = \frac{1}{2}$.

Si $b \in \mathbb{R}$ y $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} < b$, entonces existe la vecindad $V_1 = \left(\frac{1}{2} - (1 - \frac{b}{2}), \frac{1}{2} + (1 - \frac{b}{2})\right)$.

Tal que para todo $s \in V_1$ se tiene que $f(s) \leqslant \frac{b}{2} < b$, teniendo asi que $f$ es semicontinua superiormente en $t = \frac{1}{2}$.

Para $c \in \mathbb{R}$ tal que $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} < c < 1$, existe la vecindad $V_2 = (\sqrt{1-c}, c)$ de tal forma que para cada $s \in V_2$ se tiene que $g(s) < c$. Pues en el caso que $c \geq 1$ se tiene la vecindad $V_3 = (0, 1)$ en la que se cumple que $g(s) < c$ para todo $s \in V_3$.

Ahora, se pretende mostrar que la funcion $f + g$ es semicontinua superiormente en $t = \frac{1}{2}$.

Esto se tiene gracias a que la vecindad $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$ es tal que cumple que para todo $s \in V$ se cumple que si $d > \frac{5}{4}$ entonces $(f + g)(s) < d$.

Finalmente, se concluye que la función $f + g$ es semicontinua superiormente en $t = \frac{1}{2}$.

**Proposición 4.2.4.** Si $f$, $g$ son funciones no-negativas y semicontinuas superiormente en $t \in T$ entonces la función producto $fg$ es semicontinua superiormente en $t$.

*Demostración.* Sea $a > 0$ tal que $(fg)(t) = f(t)g(t) < a$.

Si $f(t) = g(t) = 0$ entonces $f(t) = g(t) < a$ y existen vecindades $V$ y $W$ de $t$ tales que $f(s) < \sqrt{a}$ para todo $s \in V$ y $g(s) < \sqrt{a}$ para todo $s \in W$.

Por otra parte, si $g(t) > 0$ entonces $f(t) < \frac{a}{g(t)}$ y es posible encontrar $b > 0$ de manera que $f(t) < b < \frac{a}{g(t)}$, es decir, tal que $f(t) < b$ y $g(t) < \frac{a}{b}$.

La semicontinuidad superior de $f$ y de $g$ sustentan el resto de la demostración. Luego, existen $V$ y $W$, vecindades de $t$, tales que $f(s) < b$ para todo $s \in V$ y $g(s) < \frac{a}{b}$ para todo $s \in W$.

Finalmente, en los dos casos, $(fg)(s) < a$ para todo $s \in V \cap W$. Lo cual implica que la función $fg$ es semiconinua superiormente. $\square$

**Proposición 4.2.5.** Si $(T, \tau)$ es un espacio topológico, $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función semicontinua superiormente en $t \in T$ y $h : T \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función continua no negativa en una vecindad $U$ de $t$, entonces la función producto $fh$ es semicontinua superiormente en $t$.

*Demostración.* Supongamos que $(hf)(t) = h(t)f(t) < a$, con $t \in T$ y $a \in \mathbb{R}$ y sea $b > 0$ tal que $h(t)f(t) < h(t)f(t) + b < a$.

Es claro que para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad $V$ de $t$ tal que $f(s) < f(t) + \epsilon$ para todo $s \in V$. Además, la continuidad de $h$ en $t$ implica que dado $\xi > 0$ existe una vecindad $W \subseteq U$ de $t$ tal que $h(t) - \xi < h(s) < h(t) + \xi$ para todo $s \in W$.

Así, para cada $s \in V \cap W$ se tiene que si $x(t) + \epsilon \geqslant 0$ entonces

$$\begin{aligned} h(s)f(s) &\leqslant h(s)(f(t) + \epsilon) \\ &\leqslant (h(t) + \xi)(f(t) + \epsilon) \\ &= h(t)f(t) + \epsilon h(t) + \xi f(t) + \epsilon\xi \\ &< h(t)f(t) + b \\ &< a, \end{aligned}$$

siempre que $\epsilon$ y $\xi$ sean tales que $\epsilon h(t) + \xi f(t) + \epsilon\xi < b$.

Y si $f(t)+\epsilon \leqslant 0$, entonces, como $h(s) \geqslant 0$ para todo $s \in V \cap W$, se tiene que $h(s)f(s) \leqslant h(s)(f(t)+\epsilon)$ para todo $s \in V \cap W$.

Por tanto, como $h(t) - \xi < h(s)$ y $f(s) < f(t) + \epsilon \leqslant 0$ para todo $s \in V \cap W$,

$$\begin{aligned} h(s)f(s) &\leqslant h(s)(f(t) + \epsilon) \\ &\leqslant (h(t) - \xi)(f(t) + \epsilon) \\ &= h(t)f(t) + \epsilon h(t) - \xi f(t) - \epsilon\xi \\ &< h(t)f(t) + b \\ &< a, \end{aligned}$$

siempre que $\epsilon$ y $\xi$ sean tales que $\epsilon h(t) - \xi f(t) - \epsilon\xi < b$.

En cualquier caso, cuando se elige apropiadamente $\epsilon$ y $\xi$ se tiene la semicontinuidad superior de $hf$ en $t$. $\square$

**Ejemplo 4.2.4.** Sean las funciones $f$ y $h$, definidas como:

$$f(t) = [t] : (\mathbb{R}, \tau_{ci}) \to (\overline{\mathbb{R}})$$

$$h(t) = 1 : (\mathbb{R}, \tau_{ci}) \to (\overline{\mathbb{R}})$$

Se tiene que la funcion costante $h(t) = 1$ es continua, sin importar las topologias que se den, tanto en el espacio de partida como en el de llegada.

Se verifica que $f$ es semicontinua superiormente para $t = \frac{3}{2}$. Cuando, se toma $c > 1 = f\left(\frac{3}{2}\right)$, es posible construir la vecindad del punto $t = \frac{3}{2}$ dada por el conjunto $V = (-\infty, 2)$, de modo que para cada elemento $s$ en el conjunto $V$ es posible afirmar que $(s) \leqslant 1 < c$.

La funcion $f(t)h1(t) = [t] \cdot 1 = [t]$, la cual se mostro anteriormente que es semicontinua superiormente para $t = \frac{3}{2}$.

**Proposición 4.2.6.** Si $f$ y $g$ son dos funciones semicontinuas superiormente en $t$, entonces $\sup(f, g)$ e $\inf(f, g)$ también son semicontinuas superiormente en $t$.

*Demostración.* Para cada $t \in T$ sea $k(t) = \sup(f(t), g(t))$. Si $k(t) < a$, entonces $f(t) < a$ y $g(t) < a$.

La semicontinuidad superior de $f$ y $g$ garantiza que existen vecindades $V$ y $W$ de $t$ tales que $f(s) < a$ para todo $s \in V$ y $g(s) < a$ para todo $s \in W$.

Sea $U = V \cap W$, entonces $f(s) < a$ y $g(s) < a$ para todo $s \in U$, y $k(s) < a$ para todo $s \in U$.

Por otra parte, para cada $t \in T$ sea $h(t) = \inf(f(t), g(t))$.
Si $h(t) < a$ se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $f(t) < a$ y por lo tanto, como $f$ es semicontinua superiormente en $t$, existe una vecindad $V$ de $t$ tal que $f(s) < a$ para todo $s \in V$, luego $h(s) = \inf(f(s), g(s)) < a$ para todo $s \in V$. Si $f(t) \geqslant a$ entonces $g(t) < a$.

Finalmente, se concluye que tanto $k$ como $h$ son semicontinuas superiormente en $t$. □

El anterior resultado, se puede extender en lo que al extremo inferior respecta, a cualquier familia de funciones semicontinuas superiormente en un punto.

**Proposición 4.2.7.** Si $(f_i)_{i \in I}$ es una familia de funciones semicontinuas superiormente en $t$, $f_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$, entonces $\inf\limits_{i \in I}(f_i)$ es semicontinua superiomente en $t$.

*Demostración.* Sea $h(t) = \inf\limits_{i \in I} f_i(t)$. Si $f(t) < a$ entonces existe $j \in I$ tal que $f_j(t) < a$ y como $f_j$ es semicontinua superiormente en $t$ entonces existe una vecindad $V$ tal que $f_j(s) < a$ para todo $s \in V$. De donde $h(s) < a$ para todo $s \in V$.

El caso del extremo superior no resulta válido. En general, si $(f_i)_{i \in I}$ es una familia de funciones semicontinuas superiormente la función $\sup\limits_{i \in I} f_i$ no resulta ser una función semicontinua superiormente.

□

# 5 Conclusiones

- En el desarrollo del trabajo al abordar las diferentes caracterizaciones de la semicontinuidad de funciones, se puede concluir que a partir de la definición por vecindades, se verifica la semicontinuidad de una función en cada punto. Es decir, se trabaja en forma local. Mientras la caracterizaqción topológica permite analizar la semicontinuidad de las funciones en forma global, por tal motivo el número de casos se reduce notablemente, en comparación con la definición por vecindad o su respectiva proposición equivalente con abiertos básicos.

- En la caracterización topológica, es necesario identificar los abiertos que se definen en la topología usual en la recta real extendida y los abiertos que conforman el espacio topológico donde se define la función.

- En la caracterización por el subgrafo de una función, se puede concluir que a partir de su representación geométrica es posible determinar si la función es semicontinua superiormente en todo el espacio topológico sin analizar ningún caso.

- El epigrafo de una función es una herramienta para determinar si una función es semicontinua inferiormente. En este caso, se distingue la importancia del bosquejo de la función porque visualmente es posible afirmar o refutar si una función es semicontinua inferiormente.

- En el ejemplo 2.1.12, donde el espacio topológico esta dado por $T = (0, 1)$, con la topología usual en $\mathbb{R}$ y la función $f$ definida de $T$ en $\overline{\mathbb{R}}$, como sigue:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t \text{ es irracional,} \\ \frac{1}{q}, & \text{si} \quad t = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

  Como en un principio se verificó que la función era semicontua superiormente para los números racionales, entonces esto me permitia concluir que era semicontinua en todo el espacio topológico porque los números racionales forman un subconjunto denso del espacio de los números reales, pero al realizar el análisis de la semicontinuidad inferior, se concluyó que la función no era semicontinua inferiormente en todo el espacio topológico y si lo era en un subconjunto denso, en los números irracionales. De acuerdo con lo anterior no se puede

concluir que si una función es semicontinua en un subconjunto denso del espacio topológico, resulta ser semicontinua en todo el espacio.
La siguiente afirmación puede considerarse como ¡verdadera o falsa! si una función es semicontua en los números racionales entonces es semicontinua en los números reales.

En la anterior función se comprobó la semicontinuidad superior e inferior en los números irracionales, por tanto, se puede concluir que la función es continua en los números irracionales.

- En espacios métricos, la semicontinuidad superior se encuentra ligada a la continuidad a la derecha de la función mientras que la semicontinuidad inferior se relaciona con la continuidad a la izquierda. Por tal motivo, la noción de semicontinuidad surge de la idea de continuidad.

- Un aspecto de gran interés en matemáticas es detectar los elementos máximos o mínimos sin embargo en los casos donde la función es discontinua no es posible garantizar la existencia de tales elementos. Empero, gracias a la semicontinuidad y con otra característica se puede afirmar que estos elementos existen.

- Una conclusión del trabajo es la satisfacción al descubrir regularidades o relaciones de la continuidad de funciones con la semicontinuidad de las mismas. Una de ellas es que la intersección del subgrafo con el epigrafo de una función se obtiene el grafo de la respectiva función. Por tanto, si el grafo de la función es cerrado en el contexto de la topología producto, entonces la función es continua.

- Es importante resaltar el trabajo desarrollado por Baire, en relación al estudio de las funciones discontinuas ya que de alguna manera, no deseaba seguir la corriente de la mayoría de los matemáticos de la época.

- En relación al trabajo desarrollado de las funciones semicontinuas falta más temas por tratar y profundizar como: ¿Cuáles otras caracterizaciones existen de las funciones semicontinuas? ¿Qué es la semicontinuidad secuencial? ¿Cómo una función puede mejorar sus condiciones para ser semicontinua? ¿Cuál es la aplicación de las funciones semicontinuas inferiormente a la teoría de la medida?

# Bibliografía


[1] Diedudonne, J: *Elementos de Análisis (Tomo II).* Barcelona : Editorial Reverte, 1980

[2] García, R: *Campos de Espacios Métricos de Funciones*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Tesis de Magister, 1998

[3] García, R. ; Reyes, E. ; Varela, J.: A semicontinuous continuum. En: *Boletín de Matemáticas* Volumen XII No. 1 (2005), p. 1–18

[4] Gelbaum, B. ; Olmsted, J: *Counterexamples in Analysis.* New York : Dover Publications, 1964

[5] Lesmes, J. ; Abuabara, T: *Elementos de Análisis Funcional.* Bogotá : Universidad de los Andes, 2010

[6] Munkres, J.: *Topología.* Massachusetts Institute of technology : Prentice Hall, 2002

[7] Neira, C.: *Topología General.* Bogotá : Universidad Nacional de Colombia Colección de notas de clase, 2011

[8] Neira, C. ; Varela, J.: On separation axioms of uniform bundles and sheaves. En: *Applied General Topology.* Volumen 5 No. 2 (2004), p. 155–171

[9] Rubiano, G.: *Topología General (2da ed.).* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá : Panamericana, 2002

[10] Spivak, M.: *Cálculo infinitesimal.* Barcelona : Editorial Reverte, 1992

[11] Vallejo, F.: *Clases de Baire y el concepto de semicontinuidad.* Pasto, Universidad de Nariño, Trabajo de grado, 2008