GEOMETRÍA Y DIMENSIÓN:

REPRESENTACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE OBJETOS 2D, 3D Y 4D

SERGIO ESTEBAN CASTIBLANCO HERNÁNDEZ
MICHAEL YHAIR MONTANA PÁEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TEGNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C. 2018

GEOMETRÍA Y DIMENSIÓN:

REPRESENTACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE OBJETOS 2D, 3D Y 4D

SERGIO ESTEBAN CASTIBLANCO HERNÁNDEZ
MICHAEL YHAIR MONTANA PÁEZ

Trabajo de grado presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional como requisito para optar por el título de Licenciado en Matemáticas.

Asesora:

LEONOR CAMARGO URIBE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TEGNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C. 2018

Agradecimientos

A las personas que han intervenido en mi vida universitaria quiero agradecerles por perdonar mi ausencia en la vida real; de no haber sido por todo el tiempo valiosamente sacrificado, difícilmente habría llegado hasta aquí. Agradezco enternecidamente a mi pareja sentimental por el apoyo moral y académico brindado, a mis hermanos por la ayuda económica, a mi madre por tantísimas madrugadas en las que me despachó y en especial, a la manera en que mi padre me enseñó matemáticas, pues con ello comprendí que era posible y absolutamente necesaria una mejor forma de enseñarlas.

Sergio Castiblanco

Agradezco a mis padres, por apoyarme en cada proyecto que decido emprender, por las diferentes enseñanzas y consejos que me han dado a lo largo de los años, pues tengo claro que sin su presencia y compañía no podría haber llegado hasta aquí. Gracias por ser ejemplo y guía. A mis hermanas, por el amor y la complicidad, por sus ocurrencias y tantas alegrías. Por último, agradezco a mi editora de estilo, por confiar y creer, por estar y permanecer; por mostrarme con su ejemplo de vida que siempre se puede ser mejor, por generar un cambio y alegrarme el corazón.

Michael Montana

En general, agradecemos a la Universidad Pedagógica Nacional por ser la Institución Educativa que nos permitió formarnos, que nos deja un sinfín de recuerdos y gratas experiencias. Agrademos a la profesora Leonor Camargo por el tiempo dedicado, por la paciencia, apoyo e instrucción. Gracias por guiarnos en este camino y por aportar no solo al desarrollo de este trabajo sino también a nuestra formación profesional y personal.

Los autores

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Titulo del documento	Geometría y dimensión: Representación y caracterización de objetos 2D, 3D y 4D.
Autor(es)	Castiblanco Hernández, Sergio Esteban; Montana Páez, Michael Yhair.
Director	Camargo Uribe, Leonor.
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2018. 60 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	BIDIMENSIONAL, DIMENSIÓN, DIMENSIÓN AMBIENTAL, DIMENSIÓN INTRÍNSECA, REPRESENTACIÓN, TRIDIMENSIONAL.

2. Descripción

En el este documento presentamos los resultados que hemos encontrado al realizar un estudio respecto de la noción de dimensión. Inicialmente, logramos identificar tres interpretaciones, las cuales están relacionadas con las características intrínsecas del objeto (dimensión intrínseca), con los atributos del entorno en que viven los objetos (dimensión ambiental) y con la manera de representar y percibir objetos (dimensión en la representación). Tales interpretaciones surgen a raíz de clasificar las ideas intuitivas de la idea de dimensión que tienen las personas del común. Posterior a esto, realizamos una aproximación matemática a cada una de las interpretaciones que dimos a la idea de dimensión y presentamos las aproximaciones formales al concepto de dimensión desde distintos enfoques.

Luego, se suscita una reflexión sobre la dimensión ambiental e intrínseca, con el fin de cuestionar algunas ideas que comúnmente las personas creemos tener claras pero que resulta no ser así. También ponemos de manifiesto la hipotética y especulativa existencia de mundos en otras dimensiones, tratando de describir las características e implicaciones del comportamiento y percepción de entidades que habiten en un mundo bidimensional o uno tetradimensional.

Por último, se aborda la dimensión en la representación, en donde se exponen algunos de los acuerdos que han surgido a lo largo de la historia para representar objetos de dimensiones superiores en dimensiones inferiores.

3. Fuentes

Para el presente trabajo, se consultaron principalmente las siguientes fuentes bibliográficas:

Abbott, E. (1998). *Planilandia. Una novela en muchas dimensiones.* Mallorca, España: Torre De Viento.

Badajoz. (2018). Apuntes de Teoría de la Medida. Volumen 2.

Chamorro, M. y Belmonte, J. (1991). El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales. Editorial Síntesis. Madrid.

Colerus, E. (1962). Del punto a la cuarta dimensión: Una geometría para todos. (Tr. Carreras, S.) Barcelona: LABOR (1944).

Crowe, M. (1967). A history of vector analysis: *Giusto Bellavitis and his Calculus of equipollences.* University of Notre Dame Press.

García, S. (2015). *Antecedentes de los espacios vectoriales.* Disponible en http://blog.kleinproject.org/?p=1713&lang=es

Girón de León, G. (1991). Geometría Descriptiva Básica. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Guijarro, L. (2010). Variedades: introducción. UAM.

Guitierrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In search of a Framework. Universidad de Valencia, España.

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría especial. Revista EMA. 3(3), 193-220.

Hawk, M. (1991). Geometría Descriptiva. México, D.F, México: Interamericana de México.

Hawking, S. y Mlodinow, L. (2010). The Grand Design. Bantam Books. EE.UU.

Lafuente, J. (2014). Variedades diferenciables.

López, F.J. (s.f.) Espacios topológicos. Departamento de Geometría y Topología; Universidad de Granada, España.

López, J. (s.f). Elementos de Teoría de la Medida, Análisis Funcional y Teoría de Distribuciones. Versión online en: http://www.ugr.es/~jllopez/Cap1-TMAFyTD.pdf

Lorenz, D. (2014). Geometric Measure Theory. Institute for Analysis and Algebra. TU Braunschweig. Alemania.

Ospina, C. (2004). Nueva visita a la geometría descriptiva. Explorando la manera de aprender y de enseñar. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Orjuela, C y Rojas, C. 2006. El concepto de dimensión más que una idea intuitiva. (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Páez, J., Orjuela, C. y Rojas, C. (2008). El concepto de dimensión: errores y dificultades. Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “Seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. Educational Studies in Mathematics 19, 79-92.

Prieto, C. (2012). Topología Básica. Versión online en https://www.scribd.com/document/374191033/Carlos-Prieto-Topologia-Basica-pdf

Rucker, R. (1977). Geometry, relativity and the fourth dimension. New York, Estados Unidos: Dover Publications.

4. Contenidos

Este trabajo está estructurado en tres capítulos. En el primero hacemos un planteamiento a la idea intuitiva de dimensión a partir de tres interpretaciones que identificamos durante el desarrollo del trabajo: dimensión ambiental, dimensión intrínseca y dimensión en la representación. Luego mencionamos algunos intentos de matematizar el concepto de dimensión, dilucidando en ellos alguna de las interpretaciones propuestas. Por último, abordamos las aproximaciones formales a la dimensión según tres enfoques matemáticos: algébraico, topológico y de geometría fractal.

En el segundo capítulo centramos la atención en suscitar una reflexión sobre dos de las interpretaciones que dimos a la idea intuitiva de dimensión, particularmente la dimensión ambiental y la dimensión intrínseca. Esto con el fin de cuestionar algunas ideas comunes que las personas creemos tener claras y que pueden no ser así. Luego, consideramos la hipotética existencia de mundos alternos al nuestro, tratando de dilucidar cómo serían dichos mundos en términos de percepción, comenzando con entornos 2D para luego considerar mundos 4D. Es importante resaltar que con este capítulo, el cual es meramente especulativo e ilustrativo, pretendemos lo mismo que una película de ciencia ficción pretende: llevar al espectador a una reflexión. En este caso, una reflexión que genere un pensamiento objetivo sobre las implicaciones de nuestra dimensión y de mundos alternos de diferentes dimensiones.

En el capítulo tres retomamos la interpretación de la dimensión en la representación de objetos geométricos. Inicialmente abordamos lo que se entiende por representar a partir de los planteamientos de diversos autores y luego proponemos un conjunto de acuerdos que contribuyen a representar objetos geométricos. Transversal a esto, proponemos las condiciones requeridas para interpretar representaciones de objetos geométricos. Por último, ahondamos en algunas técnicas puntuales para representar objetos geométricos de diferentes dimensiones y las implicaciones que conlleva utilizarlas.

5. Metodología

En primer lugar, se realizó un rastreo y recopilación bibliográfica en aras de realizar un estudio sistemático y detallado de algunos documentos existentes respecto al concepto de dimensión. A partir de lo anterior, fundamentamos y seleccionamos la información, para las ideas de la monografía y el material de divulgación. Seguido a ello, determinamos las tres interpretaciones de dimensión presentadas en el desarrollo del trabajo; es decir, dimensión intrínseca, dimensión ambiental y dimensión en la representación. Luego, estructuramos el material de divulgación a partir del estudio realizado. Definimos cuáles y cuántos iban a ser los capítulos del material y comenzamos a escribirlos. Finalmente, consolidamos el documento de la monografía del trabajo de grado y editamos la versión del documento de divulgación.

6. Conclusiones

Al realizar una indagación sobre el concepto de dimensión en matemáticas, cuyo uso se presenta intuitiva e indiscriminadamente, podemos evidenciar que aunque existan varias aproximaciones desde distintos enfoques matemáticos, sigue sin haber un consenso sobre su definición puntual. Sin embargo, al abordar la idea de dimensión desde las tres interpretaciones propuestas, es posible tener un panorama más amplio de su significado y de las limitaciones que impone a objetos matemáticos y a la existencia de posibles entes de otras dimensiones.

Considerar mundos de dimensiones superiores o inferiores a la nuestra y tratar de describir la forma en que posibles entes que habiten dichos mundos conciben su entorno, nos hace enfrentarnos a un panorama diferente, en el que tenemos que dejar de lado nuestros prejuicios dimensionales para tratar de entender algo que no está al alcance de nuestros ojos, ni de nuestros sentidos, pero sí al alcance de nuestra imaginación. Podemos seguir pensando y creando nuevos entes dimensionales, describiendo la forma en que entienden su entorno, pero tenemos claro que nunca estaremos seguros de que esto sea así, siendo estos lo que buscamos: imaginar, innovar aprender, crear y fallar.

Consideramos como futuros maestros que la representación es un punto clave para mediar el conocimiento que se desarrolle en el aula. En tanto una representación evoque la mayor cantidad de información de la mejor manera, los estudiantes podrán interpretar y aprehender la idea que se quiere comunicar. Por esto, es importante tener en cuenta los acuerdos propuestos al momento de representar un determinado objeto ante nuestros estudiantes, pues esto facilitará el proceso de enseñanza y aprendizaje en tanto la aprehensión de información será más asequible.

Por último, creemos que es pertinente hacer un llamado a los profesionales de educación básica y media para institucionalizar y curricularizar el concepto de dimensión, pues este puede ser interpretado desde distintos enfoques matemáticos presentes a lo largo de la vida académica de los estudiantes.

Elaborado por:	Castiblanco Hernández, Sergio Esteban; Montana Páez, Michael Yhair
Revisado por:	Camargo Uribe, Leonor

Fecha de elaboración del Resumen:	8	11	2018

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: **"Geometría y dimensión: representación y caracterización de objetos 2D,3D y 4D."**, elaborado por los estudiantes:

Sergio Esteban Castiblanco Hernández - código 2013240015 - cédula 1032477309

Michael Yhair Montana Páez - código 2013240040 - cédula 1033771283

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **46** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna X Meritoria ___ Laureada ___

En constancia se firma a los 04 días del mes de diciembre de 2018.

Director del Trabajo: Profesora LEONOR CAMARGO URIBE

Jurado: Profesor LUIS EDUARDO ESPITIA

Índice

Índice de figuras

Índice de tablas

Introducción

En el proyecto curricular de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional se contemplan tres cursos de geometría euclidiana, en los cuales se realiza un estudio de diversos objetos geométricos y de las relaciones entre estos. En dichos cursos, la representación de objetos geométricos del espacio tridimensional (3D) y del plano bidimensional (2D) es realizada mediante bocetos en lápiz y papel y en programas de geometría dinámica como Cabri Geometry y GeoGebra. Este trabajo nos llevó a interesarnos por la forma como se podrían representar objetos geométricos de la cuarta dimensión (4D) en 2D.

A partir de este interés, realizamos una exploración informal para tratar de construir un hipercubo en un plano, partiendo de características comunes del cuadrado y del cubo. Al contrastar los resultados de nuestra exploración con representaciones de hipercubos encontrados en la web, fue evidente que nuestra aproximación a dicha construcción era bastante cercana a lo contemplado por diversos autores. Lo anterior fue el detonante principal para proponer este trabajo de grado.

Teniendo estas inquietudes en mente, surgieron interrogantes sobre cómo podíamos representar diversas figuras geométricas de distintas dimensiones en espacios 3D o de dimensiones inferiores. Nos centramos entonces en la noción dimensión.

El objetivo del trabajo de grado es elaborar un material educativo, impreso o en formato digital, de divulgación, para profesores y maestros en formación que aporte a la profundización sobre la noción de dimensión desde tres interpretaciones propuestas (intrínseca, ambiental y en la representación) y a la identificación de acuerdos para representar y caracterizar representaciones de objetos en diferentes dimensiones.

Desde nuestra perspectiva como futuros educadores es importante contribuir a divulgar información que concierne al concepto de dimensión. Esto es porque, por un lado, en la escuela suele utilizarse el término dimensión de forma indiscriminada sin exhibir claramente su significado; y, por otro lado, porque son pocos los referentes bibliográficos que aluden de forma didáctica a la dimensión, pues la mayoría de estos están enfocados netamente en el componente matemático.

Pensamos que al abordar este tema y desarrollar un material para el uso de profesores podemos dar una visión sobre la dimensión y su potencial para entender la geometría. Si los maestros no nos limitamos a las formas 2D y 3D, podemos contribuir a la creatividad de nuestros estudiantes para imaginar y representar objetos de dimensiones superiores y así impulsar y desarrollar una visión amplia de lo que entienden por geometría; y por qué no, llevarlos a tener un panorama del concepto de dimensión y de los diversos requerimientos que se deben tener en cuenta para imaginar, representar y construir objetos n-dimensionales.

Este trabajo está estructurado en tres capítulos. En el primero hacemos un planteamiento a la idea intuitiva de dimensión a partir de tres interpretaciones que identificamos durante el desarrollo del trabajo: dimensión ambiental, dimensión intrínseca y dimensión en la representación. Luego mencionamos algunos intentos de matematizar el concepto de dimensión, dilucidando en ellos alguna de las interpretaciones propuestas. Por último, abordamos las aproximaciones formales a la dimensión según tres enfoques matemáticos: algébrico, topológico y de geometría fractal.

En el segundo capítulo centramos la atención en suscitar una reflexión sobre dos de las interpretaciones que dimos a la idea intuitiva de dimensión, particularmente la dimensión ambiental y la dimensión intrínseca. Esto con el fin de cuestionar algunas ideas comunes que las personas creemos tener claras y que pueden no ser así. Luego, consideramos la hipotética existencia de mundos alternos al nuestro, tratando de dilucidar cómo serían dichos mundos en términos de percepción, comenzando con entornos 2D para luego considerar mundos 4D. Es importante resaltar que con este capítulo, el cual es meramente especulativo e ilustrativo, pretendemos lo mismo que una película de ciencia ficción pretende: llevar al espectador a una reflexión. En este caso, una reflexión que genere un pensamiento objetivo sobre las implicaciones de nuestra dimensión y de mundos alternos de diferentes dimensiones.

En el capítulo tres retomamos la interpretación de la dimensión en la representación de objetos geométricos. Inicialmente abordamos lo que se entiende por representar a partir de los planteamientos de diversos autores y luego proponemos un conjunto de acuerdos que contribuyen a representar objetos geométricos. Transversal a esto, proponemos las condiciones requeridas para interpretar representaciones de objetos geométricos. Por último, ahondamos en algunas técnicas puntuales para representar objetos geométricos de diferentes dimensiones y las implicaciones que conlleva utilizarlas.

1. Dimensión en matemáticas

1.1. Acercamientos intuitivos a la idea de dimensión

En esta primera sección haremos un planteamiento a la idea intuitiva de dimensión según cuatro interpretaciones que hemos podido identificar a lo largo del desarrollo de este trabajo. Tales interpretaciones están relacionadas con características intrínsecas de un objeto (dimensión intrínseca), con atributos del entorno en el que "viven" los objetos (dimensión ambiental), con la manera de percibir y representar objetos (dimensión en la representación) y con campos de un determinado fenómeno (dominio). La idea de dimensión parece ser entonces una propiedad intrínseca de objetos, entidades o lugares; sin embargo, parece no haber un consenso frente a su significado puntual.

En la teoría de conjuntos se pasa por alto la definición formal del término *conjunto* por sus múltiples interpretaciones. En vez de esto, se estructura y axiomatiza el comportamiento de elementos que podrían ser parte de o conformar un conjunto. De la misma manera, las varias interpretaciones del término dimensión que se resumen en este escrito, evitan definir formal y puntualmente tal concepto. En vez de eso, se establecen unos parámetros, propiedades o comportamientos de objetos, entornos, fenómenos o representaciones que puedan existir en una determinada dimensión. Esos comportamientos pueden ser entendidos y abordados desde distintos ámbitos, incluso desde diferentes enfoques matemáticos: topológico, algebraico, físico y geométrico. Este último es el enfoque de interés en este trabajo.

El término dimensión, comúnmente se abrevia con la letra D acompañada de un número que indica de cuántas características se está hablando, lo cual resulta bastante problemático porque esta determinación no es explícita respecto a cuál interpretación está aludiendo. Por ejemplo, uno podría escuchar en conversaciones de cafetería o leer en anuncios publicitarios expresiones tales como "vamos a ver una película en 3D", "debiste dimensionar las consecuencias de tus acciones", "quizás en una dimensión paralela las cosas sean diferentes" o "se realizan ecografías 4D". Pareciese que tal término es usado intuitivamente. Pero, ¿qué es exactamente eso de 3D en los cines? ¿La sala? ¿La pantalla? ¿La película?

Al indagar con distintas personas tales como programadores de videojuegos, diseñadores gráficos, sastres, campesinos, estudiantes de literatura, arquitectos y transeúntes al azar, encontramos algunas ideas meramente intuitivas sobre dimensión. Algunas de las respuestas más recurrentes asociadas a su respectiva interpretación se encuentran en la Tabla 1.

Ideas del común sobre *dimensión*	Interpretación de dimensión
• Dimensión es un eje que permite posicionar un objeto o entidad. • La dimensión es una ubicación cartesiana.	Ambiental
• Dimensión es un espectro espacial que le permite a una entidad que comparta la misma cantidad de dimensiones moverse.	
• La finca donde vivía tenía una dimensión de una hectárea. • La dimensión de *este* pedazo de tela es el largo por el ancho.	Intrínseca
• Dimensión son todas las mediciones que se realizan para hacer que un objeto luzca real al ser representado.	En la representación
• Existen 8 dimensiones humanas: cognitiva, social, física, espiritual, comunicativa, estética, emocional y ética.	Como dominio

Tabla 1: Interpretaciones de dimensión.

Grosso modo, las ideas de dimensión intrínseca evocadas al aludir a atributos de un objeto giran en torno a aspectos relacionados con tamaño, medición o movimiento; las ideas de dimensión ambiental aluden a características de lugares o espacios; giran en torno a aspectos como posición, ubicación o capacidad de movimiento de entidades u objetos; y las ideas de representación tienen que ver con mediciones, tamaños, proporciones, etc. Finalmente, las ideas sobre dominios, ramificaciones o campos las cuales se refieren a formas de clasificar no vienen al caso en este escrito; por tanto, dejaremos a un lado la interpretación que subyace en este tipo de ideas de dimensión.

Respecto a la interpretación de dimensión intrínseca o dimensión de objetos, en los trabajos matemáticos de la antigüedad se evidencia que la idea de dimensión se abordó de manera intuitiva. Por ejemplo, en Los Elementos de Euclides, en el Libro I, se definen objetos como línea y superficie caracterizándolos mediante atributos medibles como anchura y largo; aun así, tales atributos no son tenidos en cuenta para el desarrollo del contenido geométrico del libro y básicamente se mencionan como si fueran sabidos experimental o intuitivamente por el lector (Sierra y Trujillo, 2001; citado en Orjuela y Rojas, 2006). Es importante mencionar que, normalmente, la utilización de los términos línea y superficie se refiere a objetos geométricos, pese a que dichos "objetos" se comporten en ocasiones como lugares o espacios geométricos. Lo anterior hace que sea necesario distinguir las tres interpretaciones de dimensión que nos interesan. En este sentido, consideramos:

- **Dimensión intrínseca**: Mediante esta interpretación podemos considerar algunas cualidades de entidades u objetos geométricos entre las que se hallan el tamaño de sus atributos medibles.
- **Dimensión ambiental**: Según esta interpretación consideramos entidades u objetos geométricos como lugares en los que se pueden ubicar distintos objetos geométricos; las cualidades identificables giran en torno a la localización y la posibilidad de movimiento de dichos objetos.
- **Dimensión en la representación**: Esta interpretación es un puente que conecta la dimensión intrínseca de un objeto y la dimensión ambiental del lugar donde habita dicho objeto con el fin de comunicar. Lo anterior no tiene que ver solamente con el entorno donde se realiza la representación sino también de aquello que se está representando; esta cuestión será ampliada más adelante.

De manera un tanto más académica, pero igualmente intuitiva, se han propuesto otras formas de referirse a las dimensiones ambiental e intrínseca. Por ejemplo, en Orjuela y Rojas (2006), el concepto de dimensión se relaciona con una propiedad del espacio con la cual se pueden definir atributos cuantificables de los objetos que "viven" en este tales como el volumen; aunque también la idea de dimensión puede ser entendida como "la manera como se pueden ver las cosas, o el punto de vista como se presenta un determinado fenómeno en un contexto determinado" (p.90). Sin embargo, en tal acepción de dimensión prevalecen las imágenes conceptuales previas del observador, relacionadas con la percepción del mundo físico en el que habita o con la representación gráfica de objetos con los que convive (Páez, Orjuela y Rojas, 2008). Para entender mejor esta última acepción, imaginemos el fenómeno visual que percibe un observador al ver su mano sumergirse en una piscina. Este observador podrá ver cómo su mano cambia de apariencia, incrementando su tamaño, cambiando la inclinación con la que inicialmente sumergió su mano y, si el agua está ligeramente turbia, podrá incluso ver cómo su mano se distorsiona. No obstante, el mismo fenómeno de sumergir la mano en una piscina será percibido de manera distinta si existiese otro observador sumergido en la piscina. Este nuevo observador podrá, justo antes de que la mano sea sumergida, verla un tanto distorsionada; pero luego de que la mano entre en contacto con el agua, el observador podrá ver más nítidamente la mano. Por supuesto no pretendemos decir que el ambiente fuera y dentro de la piscina tenga diferente dimensión sino mostrar cómo un mismo fenómeno puede ser percibido de distintas formas según el ambiente en el que se encuentre el observador.

En síntesis, el ambiente que nos circunda afecta la manera en que percibimos la dimensión del espacio en que vivimos. Dicho en palabras de Kant, la dimensión que presenciamos es "una modalidad ineluctable del espacio" (Rucker, 1977).

1.2. Una aproximación matemática a cada interpretación de dimensión

En este apartado mencionamos algunos intentos de matematizar las interpretaciones de dimensión identificadas. La opinión de varios maestros en formación y algunos profesores titulares de matemáticas fue tenida en cuenta para dilucidar la idea de dimensión.

Matematización de la dimensión ambiental

Entre las opiniones formuladas por maestros en formación, la idea que predomina es que la dimensión es el tamaño o el cardinal de la base en un espacio vectorial. Este, desde nuestro punto de vista, está íntimamente relacionado con la dimensión ambiental y específicamente, con la localización de objetos y con la posibilidad de movimiento. Pero, ¿de dónde proviene la asociación de dimensión con un espacio vectorial? Pues bien, para ello se crea una estructura matemática que determina variables que caracterizan el ambiente que nos circunda, creando así lo que hoy día llamamos espacio vectorial. De modo que, si se tiene un primer vector, tal vector caracteriza una posible dirección y ubicación de objetos que habiten en el espacio vectorial determinado por dicho vector, el cual será una línea o espacio unidimensional (Figura 1, a). Ahora, si se agrega otro vector que sea independiente del primero, la composición de ambos vectores caracteriza todas las posibles direcciones y ubicaciones de objetos que habiten en el espacio vectorial determinado por tales vectores, el cual será una superficie o espacio bidimensional (Figura 1, b). Análogamente, tres vectores independientes caracterizan la posible dirección y ubicación de objetos que circunden el ambiente en que vivimos los seres humanos, un espacio tridimensional (Figura 1, c).

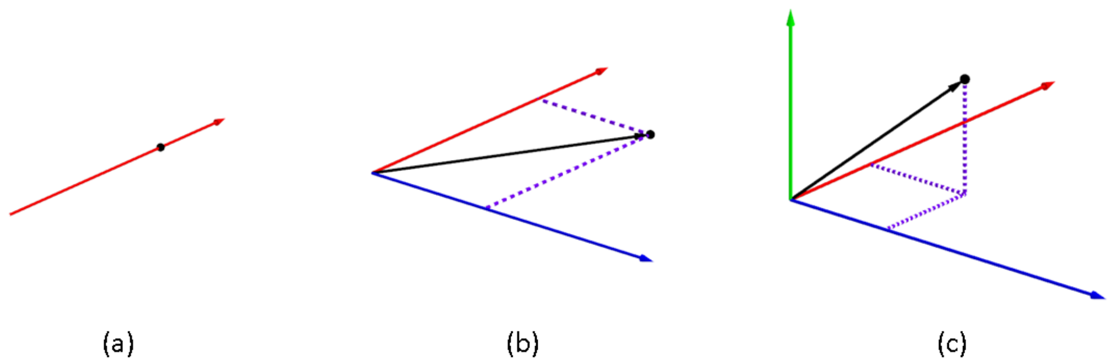


Figura 1: Espacios vectoriales uni-, bi- y tridimensionales

Algunos físicos como Einstein han supuesto un cuarto vector independiente a los que caracterizan un espacio tridimensional, para intentar caracterizar un espacio 4D (tetradimensional); este vector es asociado con lo que denominamos el *tiempo*.

En tal espacio tetradimensional, llamamos *momentos* a lo que en el espacio tridimensional llamamos *lugares*. Así, si consideramos un objeto cualquiera, como por ejemplo un martillo que esté dentro de una habitación totalmente cerrada, y nos preguntamos cómo pudo llegar allí tal martillo, una posible respuesta sería que el martillo estuviera en el mismo lugar en donde la habitación fue construida. Dimensionalmente hablando, el martillo necesitó estar en el mismo *lugar* tridimensional en el que la habitación fue construida y además, en algún *momento* tetradimensional anterior a la habitación para que la situación anteriormente expuesta tuviera sentido.

Bajo esta idea, el tiempo junto con otras tres variables espaciales configuraría un espacio tetradimensional. Como en los demás espacios dimensionales, el vector tiempo tendría una dirección única en dos sentidos, en este caso, futuro y pasado. Pero, ¿por qué naturalmente nos movemos únicamente en la dirección del tiempo que va en sentido del futuro? ¿Será que la fuerza de atracción del espacio tridimensional que hemos llamado *gravedad* es similar a la fuerza tetradimensional que nos hace avanzar hacia el futuro? Si el pasado es otro sentido de la dirección del tiempo, ¿por qué no podemos avanzar hacia el pasado? ¿Acaso la plena libertad de movimiento en un espacio dimensional es posible únicamente para entidades que compartan dicha dimensión? ¿Importan todas estas preguntas? Puede que sí o puede que no, pero sin duda alguna, son preguntas de este estilo las que permiten cuestionarnos de manera más objetiva sobre nuestra existencia y la del espacio en el que habitamos, como veremos en el capítulo 2.

Matematización de la dimensión intrínseca

Como mencionamos anteriormente, la dimensión intrínseca es una interpretación de dimensión que considera las características y atributos medibles de los objetos. El concepto de medida surge del estudio de atributos medibles como la longitud, el área y el volumen y de la necesidad de calcular. Para que sea posible medir, de acuerdo a la teoría de la medida, es necesario que exista un σ-algebra en el conjunto de magnitudes en el que se quiere realizar una medida, el cual es un anillo cerrado para uniones o intersecciones finitas (Badajoz, 2018; Lorenz, 2014; López, s.f), Lo anterior, al igual que el significado de espacio vectorial, desborda la idea intuitiva de medir.

El proceso de medir se entiende como una repetición de un patrón o unidad con el fin de cubrir un cierto atributo que quiera ser medido y luego contar la cantidad de veces que se utilizó dicha unidad, lo cual hace que este procedimiento pueda entenderse como aditivo. Aun así, al utilizar una unidad para establecer una medida, no siempre se logra cubrir el atributo que se está midiendo con una cantidad exacta de unidades. En situaciones así, surge la necesidad de fraccionar la unidad para hacer más precisa la medida, lo cual hace natural el uso de números racionales. Esto implica que el procedimiento para establecer la medida pase de ser aditivo a ser multiplicativo, hace que el proceso de medir sea en realidad multiplicativo.

En palabras de Chamorro y Belmonte (1991), la medida “es una identidad entre el conjunto de cantidades de una magnitud con su composición y su orden, y un subconjunto de números reales con su suma y el orden natural definido en los conjuntos numéricos” (p. 144).

Matematización de la dimensión en la representación

En un intento por matematizar la idea de dimensión según la representación de objetos, Rucker (1977) propone una posible ruta para representar el objeto geométrico llamado teseracto, el cual pertenece a un espacio 4D y es análogo al cuadrado (2D) y al cubo (3D). La idea de la ruta es considerar una propiedad que relaciona dimensiones inferiores con las superiores mediante extensión de objetos. Por ejemplo, al tomar un objeto y extenderlo en una dirección que no sea propia de la dimensión intrínseca de dicho objeto, el resultado es un objeto dimensionalmente "más grande"que el objeto anterior; dimensionalmente en el sentido de que, sin importar cómo se extienda el objeto original en una dimensión que no sea propia de la dimensión intrínseca de este, siempre obtenemos un objeto del mismo "tamaño dimensional". Es decir, el punto puede generar una línea, una circunferencia, una hélice o cualquier otra curva, pero todos estos nuevos objetos tienen la misma dimensión intrínseca: 1D. Así, la extensión de objetos 0D generan objetos 1D, objetos 1D generan objetos 2D, etc.

1.3. Aproximaciones formales a la dimensión

Aunque en este escrito no profundizamos en el concepto de dimensión desde otros enfoques distintos al geométrico, sí vale la pena señalar que existen algunas otras aproximaciones de dimensión tanto en el sentido intrínseco como en el ambiental en otros campos de la matemática de los cuales nos ocuparemos en esta sección. Además, hemos de aclarar que aunque en la actualidad el formalismo matemático sugiere hablar de recta y plano, consideramos que los términos *línea* y *superficie* adoptan la idea de dimensión en su carácter intrínseco y ambiental de forma más cómoda, en tanto existen superficies que no son necesariamente planas y también son bidimensionales, como se ejemplifica en el capítulo 2. Por esto, pedimos al lector ser flexible con el uso que haremos de dichos términos.

Enfoque algebraico

De acuerdo con García (2015), en el siglo XVII, precisamente en 1636, surgieron las primeras ideas sobre espacio vectorial provenientes de los trabajos de Fermat y Descartes sobre geometría analítica, matrices, plano cartesiano y sistemas de ecuaciones lineales, en un intento de matematizar el espacio. Posteriormente en 1844, el matemático alemán Hermann Grassmann introdujo la idea de espacio vectorial, aunque la estructura algebraica fue llamada inicialmente como “números hipercomplejos”. No obstante, el término también se le atribuye al trabajo de Hamilton en 1853 titulado *Lectures on Quaternions*, quien inventó además el nombre de vector y su notación actual i, j y k, aunque la definición formal de vector se le atribuye al matemático italiano Giusto Bellativis. Luego en 1898, el matemático italiano Giuseppe Peano retomó el trabajo de Grassmann y estableció los axiomas que fundamentan un espacio vectorial, los cuales fueron aceptados por la comunidad académica hasta 1918 (Crowe, 2002).

Sin ánimo de mostrar todos los axiomas propuestos por Peano, presentamos uno específico que hace evidente la ruptura entre la percepción intuitiva de vector en el espacio y lo que matemáticamente puede evocar. Básicamente, según Peano (1891), un espacio vectorial V está compuesto de vectores independientes ($\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$,...) que deben cumplir ciertas propiedades con dos operaciones: interna ($+$) y externa ($*$) con respecto a un dominio determinado. Algunas de las propiedades que se deben cumplir son del siguiente estilo y rigurosidad:

- $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V | \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) = (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z}$ (*Propiedad asociativa*)
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \overline{x} \in V | (\alpha + \beta) * \overline{x} = (\alpha * \overline{x}) + (\beta * \overline{x})$ (*Propiedad distributiva*)

Lo anterior no es para nada próximo a la percepción de dimensión en la física pues allí, la idea de matematizar la ubicación de una entidad que pertenezca a un espacio puede ser pensada como determinar una trayectoria descrita con vectores. Mientras que, matemáticamente hablando, los vectores que describen una posición o una trayectoria hacen parte de una estructura matemática y deben cumplir ciertas propiedades. Además, los objetos tratados en ambos campos de estudio tienen su propia y diferente naturaleza: los objetos matemáticos son imaginarios mientras que los físicos son reales.

Teniendo en cuenta la formalización algebraica de dimensión ambiental y la aceptación del término espacio vectorial, esta idea de dimensión puede interpretarse si se considera como el grado de libertad de movimiento de los objetos en un espacio determinado. Se entiende esta libertad como el número de direcciones ortogonales diferentes que los objetos pueden tomar al moverse (Orjuela y Rojas, 2006). Dicho grado de libertad de movimiento es análogo a la cantidad de vectores independientes de un espacio vectorial. De modo que, una línea considerada como un habitat de ciertos objetos tiene dimensión uno ya que un objeto contenido en esta se podrá mover en una sola dirección pero en dos sentidos, lo cual atiende a la interpretación de dimensión ambiental al considerar una línea como un espacio vectorial de un solo vector. Análogamente se alude a que una superficie tiene dimensión ambiental dos porque para un objeto contenido en ella es posible moverse en dos direcciones; y que el espacio tiene dimensión ambiental tres porque un objeto contenido en este podrá moverse en tres direcciones diferentes.

Enfoque topológico

Según Orjuela y Rojas (2006): "una figura es unidimensional, si su frontera está compuesta de puntos; bidimensional, si su frontera está compuesta de curvas y tridimensional, si su frontera está compuesta de superficies" (p.91). Topológicamente se entiende la frontera de un conjunto como el conjunto de puntos que pertenecen simultáneamente al cierre del conjunto y al de su complementario (López, s.f.). Es decir, la frontera es el conjunto de puntos que separan el interior del exterior de un objeto. Tal aproximación determina las propiedades geométricas necesarias para clasificar la dimensión a la que naturalmente pertenecen ciertos objetos.

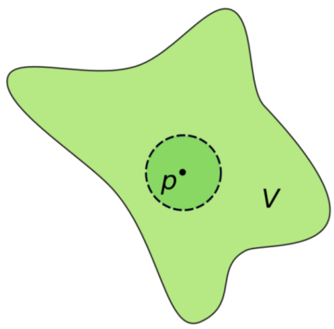


Figura 2: Vecindad matemática.

https://es.wikipedia.org/

Otra manera de adoptar la idea de dimensión mediante la frontera consiste en identificar la forma en que un determinado objeto puede recorrer el espacio al cual pertenece. La dimensión de un objeto es una medida topológica del tamaño de sus posibilidades de cubrimiento o llenado del espacio. Dicho formalmente, una variedad topológica (Guijarro, 2010; Lafuente, 2014; Guillemin y Pollack, 1974) es un espacio topológico que localmente tiene una estructura euclidiana tal que, para cada punto que pertenezca a un espacio, existe una vecindad homeomorfa a un conjunto abierto (Figura 2). Dicho de manera más simple, para cada punto que pertenece al espacio, existe una vecindad que la contiene y que es transformable (homeomorfa) en otra vecindad en la que se podrá desplazar, tanto como las leyes físicas le permitan (euclidiano). Una manera de ilustrar esto es considerar la situación de una persona que habita en el planeta tierra, la cual está contenida en una región, zona o vecindad del planeta en la cual puede moverse tanto como las leyes físicas le permitan. Siendo precisamente esta libertad de movimiento la que determina la dimensión ambiental propia del objeto considerado, en este caso, la tierra.

Aunque dotadas de la rigurosidad que requiere el caso, las variedades topológicas cumplen dos características más que explican de mejor manera la idea de dimensión. La primera condición es que deben ser un espacio de Hausdorff; es decir, que puntos distintos del espacio tienen vecindades disjuntas, lo cual implica que cada uno de los puntos pertenecientes al espacio tiene su propia vecindad junta pero separada de las demás vecindades. La segunda condición es que cada variedad topológica debe satisfacer el segundo axioma de numerabilidad; esto quiere decir que alguna de sus bases es numerable (Prieto, 2012). En términos de espacios vectoriales o grados de libertad, cualquiera de los puntos del espacio puede ser localizable con una cantidad numerable de vectores independientes. Así, las variedades topológicas pueden dar una idea de dimensión, así como la sumatoria de partes infinitamente pequeñas da una idea de integral.

Ejemplificando la idea anterior, un objeto que habite en un espacio que permita n cantidad de direcciones de movimiento podrá recorrer dicho espacio moviéndose de n maneras posibles, siempre y cuando n sea numerable (1, 2, 3...). No obstante, la dimensión no se limita a números enteros, como veremos en el siguiente apartado.

Enfoque de la geometría fractal

Como hemos visto, las interpretaciones de dimensión ambiental e intrínseca atienden a propiedades de espacios y objetos, respectivamente. Nos referimos a espacios y objetos como si fueran entes distintos pero, de manera general, estamos hablando de conjuntos de puntos. Por un lado, podemos considerar a los espacios como conjuntos donde pueden existir puntos u objetos; pero al considerar un objeto, también es posible entenderlo como el conjunto de puntos que lo conforman. Así, hablar de espacios y objetos es en esencia, hablar de conjuntos de puntos, lo cual facilita la interpretación de la siguiente aproximación y ampliación a la idea de dimensión.

La geometría fractal estudia objetos geométricos que son producto de iterar un procedimiento, bien sea geométrico o polinómico, infinitamente. Dichos objetos son conjuntos de puntos llamados fractales, los cuales son especiales por mantener una relación de auto-similaridad en la que intervienen 2 parámetros fundamentales: la cantidad de partes en que se divide el objeto base del fractal (N) y el tamaño de estas partes ($\frac{1}{r}$). Hausdorff libera a la idea de dimensión de considerar bases necesariamente numerables, proponiendo un intento de definición de dimensión (intrínseca) para conjuntos de puntos, también conocida como dimensión fractal. Para entender la expresión que Hausdorff propuso, vamos a realizar la siguiente explicación. Todo parte de dividir un objeto en cierta cantidad de partes de tal manera que cada parte esté escalada por un factor $\frac{1}{r}$. Al decir escalada nos referimos a que los atributos medibles del objeto sean divididos por r. Por ejemplo, si tomamos un segmento, un cuadrado y un cubo, podemos dividirlos en varias partes de acuerdo a un factor (Figura 3).

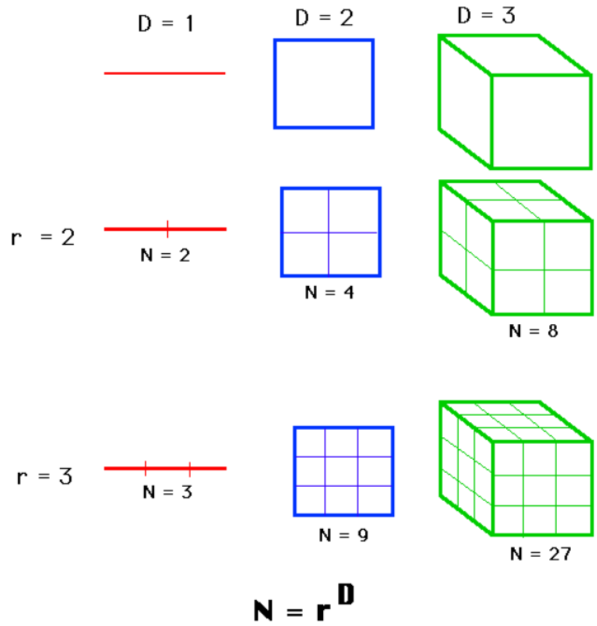


Figura 3: División de objetos en partes escaladas.

http://www.incytde.org/incytde/content/dimensi-n-fractal

Lo cual significa que, por ejemplo, dado un cubo que dividimos en 8 cubos que midan la mitad del inicial ($r = 2$), si queremos obtener el cubo inicial a partir de uno de los 8 cubos, solo tendremos que magnificarlo por un $r = 2$ obteniendo la siguiente expresión $r^D = 2^3 = 8$. Así, utilizando algunas propiedades básicas de los exponentes y logaritmos en las que se relaciona el logaritmo natural con el número e se puede obtener lo siguiente:

$$N = r^D$$
$$ln(N) = ln(r^D)$$
$$ln(N) = D * ln(r)$$
$$D = \frac{ln(N)}{ln(r)}$$

Ahora mostramos un ejemplo de la dimensión fractal y luego introduciremos el aspecto formal de esta aproximación, así podemos explicar la razón por la cual se usa el logaritmo natural para obtener la dimensión fractal. Supongamos que queremos saber la dimensión de la curva de Koch (Figura 4). La generación de tal fractal inicia con un segmento. La primera iteración consta de dividir el segmento en tres segmentos iguales. Luego, se construye un triángulo equilátero cuyo lado mide un tercio de la medida de dicho segmento, sobre el segmento del medio, y finalmente se remueve tal segmento dejando como resultado cuatro segmentos. La segunda iteración resulta de aplicar en cada uno de los cuatro segmentos resultantes en la iteración anterior el mismo procedimiento. Subsecuentemente, cada iteración siguiente sigue la misma regla hasta la iteración en el infinito.

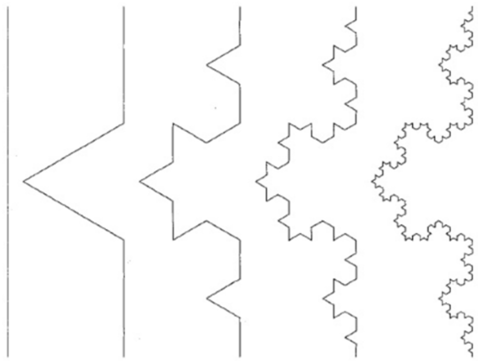


Figura 4: Curva de Koch

http://ciencia-hoy.blogspot.com/2008/05/fractales-y-la-dimension-fractal-de-la.html

Para determinar la dimensión de tal fractal hace falta establecer los parámetros que entran en juego. La iteración genérica de la curva de Koch consta de cuatro copias auto-similares de un tercio de longitud, donde N es la cantidad de figuras auto-similares a la original, $\frac{1}{r}$ es el tamaño de las figuras auto-similares y D es la dimensión del fractal. Así, $N = 4$, $r = 3$ y por tanto, la dimensión de la curva de Koch será $D = \frac{ln(4)}{ln(3)} \approx 1,26$.

De manera formal, dado un subconjunto A de un espacio metrizable X, es decir, que tenga una distancia definida, la dimensión Hausdorff de dicho subconjunto $D(A)$ se define como el límite inferior más grande $d \geq 0$ tal que la medida d-dimensional Hausdorff de A es 0 (Lorenz, 2014).

La idea de cubrimiento del espacio sigue permeando la idea de dimensión, incluso con objetos fractales. Para verlo, calculemos ahora la dimensión de otro fractal famoso como lo es el Triángulo de Sierpinski (Figura 5). La iteración genérica de dicho fractal consta de dividir el triángulo en otros cuatro tal que la medida de cada uno de estos es la mitad del anterior y se elimine el triángulo que queda en la mitad, dejando como resultado tres nuevos triángulos por cada triángulo en cada iteración.

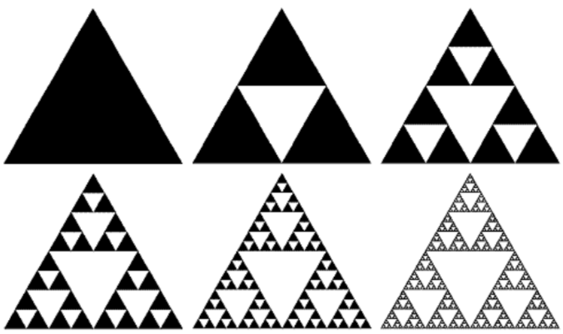


Figura 5: Triángulo de Sierpinski

https://batchdrake.wordpress.com/2009/01/12/el-area-del-triangulo-de-sierpinski/

Para calcular la dimensión podemos tomar un cuadrado de lado igual a la base del triángulo inicial y así, cubriríamos por completo el fractal (Figura 6, a). Ahora, si tomamos cuadrados de lado igual a la mitad de la longitud de la base del triángulo, necesitaremos tres cuadrados para cubrir el fractal (Figura 6, b). De modo que, siguiendo la definición de Hausdorff y la generalidad de las iteraciones del Triángulo de Sierpinski, tenemos que los parámetros de dicho fractal son $N = 3$ porque se necesitan tres cuadrados para cubrir el triángulo, $r = 2$ porque la medida de cada triángulo es la mitad del anterior y por tanto, la dimensión D hasta el momento es $D = \frac{ln(3)}{ln(2)} \approx 1,58$ y la expresión que determina la dimensión de Hausdorff sería $3 = 2^{\frac{ln(3)}{ln(2)}}$. No obstante, aunque la dimensión del fractal ya la hemos conseguido, podemos seguir refinando el cubrimiento cuanto queramos. Si tomamos cuadrados de lado igual a un cuarto de la longitud de la base del triángulo, necesitaremos 9 cuadrados para cubrir el fractal (Figura 6, c); obteniendo así la expresión $9 = 4^{\frac{ln(3)}{ln(2)}}$. Análogamente, si tomamos cuadrados de lado igual a un octavo de la longitud del triángulo, necesitaríamos 27 cuadrados para cubrir el fractal (Figura 6, d) y así obtendríamos la expresión $27 = 8^{\frac{ln(3)}{ln(2)}}$.

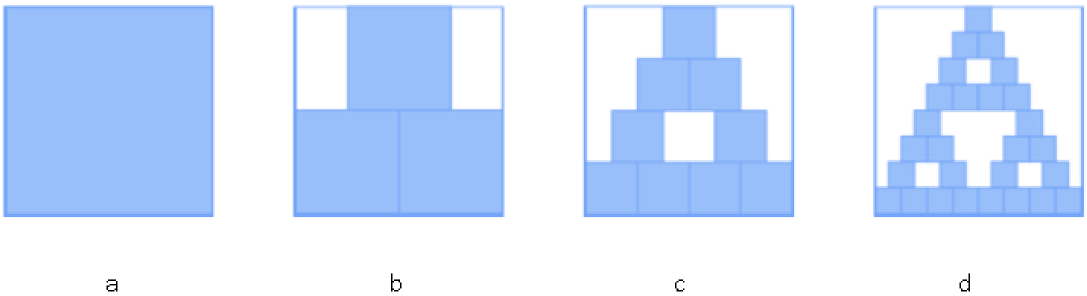


Figura 6: Dimensión del triángulo de Sierpinski mediante cubrimiento

http://blog.kleinproject.org/?p=1713&lang=es

A diferencia de los espacios euclidianos, los cuales son considerados por tener dimensiones enteras y no mayores a tres, los fractales amplían en gran medida el alcance del concepto de dimensión dado que proporcionan una medida de la complejidad de objetos abstractos. Vemos entonces cómo la noción de dimensión es importante en matemáticas ya que da una parametrización precisa de la complejidad conceptual o visual de cualquier objeto geométrico o del entorno en donde vive. Por lo cual, pareciese que la dimensión es una forma de matematizar no solo el espacio o ambiente circundante sino también a los objetos matemáticos. Aclararemos esta aparente distinción en el siguiente capítulo.

2. Dimensión ambiental e intrínseca y posibles mundos

Hemos dicho que la idea de dimensión surgió intuitivamente y que posteriormente ha sido matematizada a partir de diferentes enfoques desde los cuales se puede interpretar. Lo que pretendemos en este capítulo es suscitar una reflexión sobre dos de las cuatro interpretaciones que dimos a la idea intuitiva de dimensión, particularmente la dimensión ambiental y la dimensión intrínseca; esto con el fin de cuestionar algunas ideas comunes que todas las personas creemos tener claras y que pueden no ser así. Para el desarrollo de dicha reflexión, abordamos tres aspectos en particular. Inicialmente, pretendemos cuestionar si realmente los seres humanos vivimos en la tercera dimensión. Luego, nos enfocamos en considerar la hipotética existencia de mundos alternos al nuestro, tratando de describir cómo serían dichos mundos, comenzando con uno bidimensional para luego imaginar mundos tetradimensionales o pentadimensionales.

Es importante resaltar que el presente capítulo no pretende ir más allá de razonamientos especulativos e ilustrativos. No tiene un soporte matemático particular y está basado en las ideas abordadas en el capítulo anterior. Pero lo consideramos útil ya que permite ilustrar las ideas presentadas previamente. Además de eso, consideramos que abre la imaginación a la existencia de mundos alternos al nuestro y que de este modo podemos dar una visión más amplia respecto de la idea de dimensión y su potencial para entender la geometría, ya que si no nos limitamos a las formas 2D y 3D podemos fomentar y desarrollar la creatividad para imaginar y crear mundos u objetos de dimensiones superiores o inferiores a la nuestra.

2.1. ¿Vivimos realmente en la tercera dimensión?

Vivimos en un mundo donde los objetos tienen tres dimensiones y nos hemos acostumbrado a describir esquemáticamente estos objetos haciendo referencia a su largo, alto y a su profundidad. Lo anterior es, a grandes rasgos, una de las ideas que todos hemos escuchado en algún momento de nuestra vida, pero ¿estamos realmente seguros de que los terrícolas vivimos en un mundo de tres dimensiones? ¿consideramos esto como una verdad absoluta? Pues bien, a partir de las preguntas mencionadas a priori tenemos un punto de partida para abordar la presente sección, cuyo propósito no es otro que ahondar un poco más en estos interrogantes.

Habitualmente, por supuesto, decimos que habitamos en un espacio tridimensional, pero ¿exactamente qué es lo que entendemos por esto? Pues bien, dos argumentos ayudan a revalidar esta idea:

- El primer argumento alude a la dimensión intrínseca, ya que podemos describir los objetos pertenecientes a este mundo mediante tres atributos particulares, como la longitud, la altura y la profundidad.

- El segundo argumento alude a la dimensión ambiental, particularmente entendida como el tamaño o cardinalidad de la base en un espacio vectorial; es a partir de lo anterior que se determina la libertad de los tres posibles movimientos que podemos realizar los seres humanos.

Con relación al segundo argumento dijimos que si se tiene un primer vector, tal vector caracteriza una posible dirección y ubicación de objetos que habiten en el espacio vectorial determinado por dicho vector, el cual será una línea o espacio *unidimensional.* Al agrega otro vector que sea independiente del primero, la composición de ambos vectores caracteriza todas las posibles direcciones y ubicaciones de objetos que habiten en el espacio vectorial determinado por tales vectores, el cual será una superficie o espacio *bidimensional.* Por último y haciendo un razonamiento análogo, tres vectores independientes caracterizan la posible dirección y ubicación de objetos que circunden el ambiente en que vivimos los seres humanos, un espacio *tridimensional.* Según este último argumento matemático afirmaríamos que en efecto habitamos en un espacio tridimensional.

Un ejemplo que ayuda a ilustrar lo descrito previamente, puede ser imaginar el vuelo de un ave. Matemáticamente hablando, las curvas de barrido descritas en el vuelo de un ave son de gran complejidad. Pero es posible dividir cualquier curva espacial en tres tipos de movimientos, a saber: La primera dirección que puede tomar es este-oeste; la segunda norte- sur y por último puede elevarse o descender. Al combinar los tres tipos de movimiento mutuamente perpendiculares, podemos trazar cualquier curva posible en nuestro espacio. No se necesitan más de tres direcciones, y no menos de tres direcciones, por lo que es posible inferir, nuevamente, que nuestro espacio es tridimensional. Otro ejemplo, similar al anterior, es describir una determinada ubicación a una persona para que pueda llegar a un encuentro, dándole únicamente tres datos como referencia. "Diríjase dos cuadras hacia el norte, gire a la derecha y camine cuatro cuadras por esa calle, luego ingrese al edificio y suba en el ascensor hasta el décimo piso". Nuevamente fue posible describir el espacio que nos circunda únicamente con tres direcciones.

Los razonamientos que hasta el momento hemos realizado, no nos dejan pensar otra cosa diferente a que la Tierra es tridimensional. Pero podemos analizar esta situación de manera diferente valiéndonos de la geografía, disciplina que estudia la descripción o representación gráfica de la Tierra. Ahora bien, partiendo de imaginar que la Tierra tiene casi la forma de una esfera, olvidando por un momento que está ligeramente achatada en los polos, se han establecido algunos cortes imaginarios denominados meridianos y paralelos. Se denomina paralelo al círculo formado por la intersección entre el eje de rotación de la Tierra y un plano imaginario perpendicular al eje y se denominan meridianos a los círculos máximos que pasan por los polos y que permiten dividir a la Tierra en dos mitades (Figura 7).

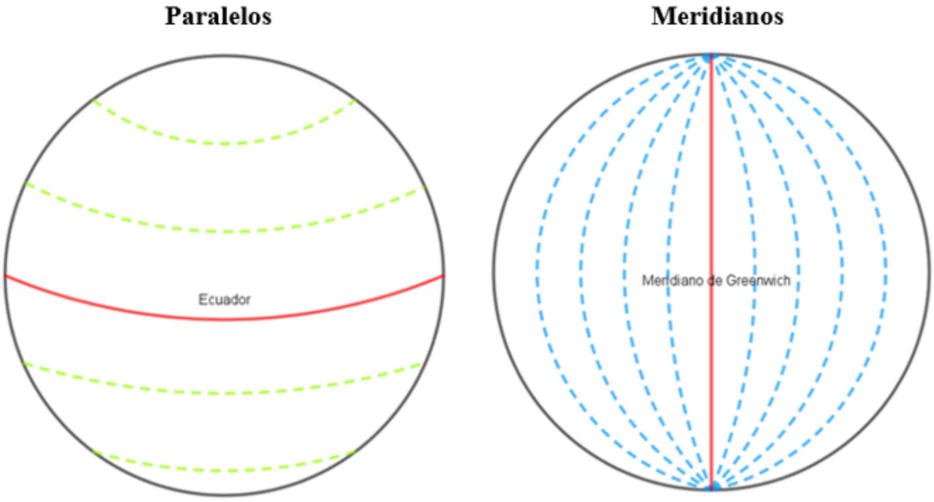


Figura 7: Meridianos y paralelos terrestes

Teniendo los meridianos y los paralelos como referencia, es posible aludir al sistema de coordenadas geográficas. Este es un sistema de referencia que únicamente utiliza dos coordenadas angulares, latitud (norte o sur) del párelo del Ecuador y longitud (este u oeste) del meridiano de Greenwich para determinar la posición de los puntos de la superficie terrestre. Con ese sistema podemos describir la ubicación de cualquier punto sobre la Tierra, teniendo como punto de partida la intersección del paralelo del Ecuador y el meridiano de Greenwich. Luego, sobre el Ecuador avanzamos una cierta amplitud medida por un ángulo (longitud) para posteriormente subir a lo largo de un meridiano la amplitud indicada por otro ángulo (latitud) y así llegaremos a nuestro destino.

Como cada lugar sobre la Tierra está perfectamente determinado por la latitud y la longitud, es evidente que solo necesitamos de estas dos coordenadas para localizar un lugar cualquiera sobre la Tierra. Esto nos permite afirmar que la superficie terrestre es bidimensional, pues solo tenemos libertad de dos movimientos sobre la superficie. Ahora bien, es importante centrar la atención en la situación que queríamos problematizar; es decir, en el hecho de saber si realmente vivimos en un mundo tridimensional o en un mundo bidimensional. Respecto a esto, podemos concluir que siempre hablamos informalmente de que la Tierra es tridimensional, pero no siempre es claro a qué nos estamos refiriendo con dicha expresión. Afirmamos que vivimos en un mundo tridimensional si estamos considerando la Tierra, como la superficie más lo que está tanto fuera como dentro de ella; pero aludimos a que la Tierra es esférica y bidimensional cuando esta es considerada solamente como la superficie; es decir, lo que es bidimensional es tan solo la *cáscara* de la superficie de la Tierra.

La anterior es una de las reflexiones que queremos suscitar en la presente sección, pues al hablar de dimensión es importante puntualizar respecto a qué nos estamos refiriendo, si a la dimensión intrínseca de los objetos o la dimensión ambiental, si nos referimos a la superficie de un determinado objeto o nos referimos a la superficie más lo que está tanto adentro como afuera de ella. Dependiendo a qué nos estemos refiriendo, es posible determinar no solo desde qué interpretación de dimensión puede ser abordado un determinado problema sino también es posible inferir si dicho objeto es bidimensional, tridimensional o de una dimensión superior a estas.

Para finalizar, queremos reafirmar la idea de que con esta sección no pretendíamos otra cosa que cuestionar al lector sobre afirmaciones dimensionales que puede considerar como ciertas y hacerlo reflexionar sobre las dos interpretaciones de dimensión que mencionamos (dimensión ambiental y dimensión intrínseca). De este modo, mediante el ejemplo particular de la Tierra, se pueden evidenciar las marcadas diferencias entre estas dos interpretaciones y llegar al entendimiento de que la respuesta a la pregunta ¿Qué dimensión tiene la Tierra? No es tan trivial como siempre hemos pensado.

2.2. Planilandia, un mundo imaginario y bidimensional

En la sección anterior pudimos evidenciar que bajo una interpretación de dimensión, particularmente la dimensión ambiental, concluimos que la superficie de la Tierra es bidimensional. En esta segunda sección, pretendemos tomar esta idea como punto de partida y vamos a aceptar la existencia de un mundo bidimensional para tratar de entender las posibles limitantes que tengan los habitantes de este nuevo mundo, las características particulares de los entes que habitan allí y poner de manifiesto cómo sería vivir en un mundo plano y quién "puede vivir allí". Desarrollamos el tema, teniendo como referencia dos formas de percibir el entorno en este nuevo mundo; es decir, en primera instancia, seremos parte del entorno bidimensional. Luego, seremos entes externos a la dimensión ambiental del mundo plano y reflexionamos respecto a cómo se ven las cosas desde afuera de este mundo, teniendo la característica particular de tener por lo menos una dimensión más que el mundo bidimensional.

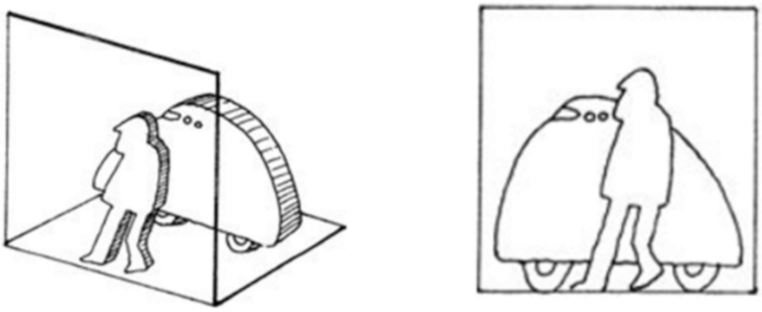
Queremos hacer referencia a un mundo bidimensional, tratando de entender cómo es "vivir" allí. Es por esto por lo que creemos que no hay una mejor forma de hacerlo si no es visitando Planilandia, aunque es importante tener como referencia las dos diferentes formas mencionadas que tenemos para percibir el entorno.

Planilandia, novela de Edwin Abbott publicada por primera vez en 1884, es la historia del Cuadrado A, quien realiza un viaje a dimensiones más elevadas, tratando de entender lo que allí ocurre. Esta es una novela muy conocida no solo por el abordaje dimensional que allí se encuentra, sino también por la exposición sobre la dimensión de diversos objetos geométricos, en una época en la que hablar de esto, es decir, de asuntos dimensionales no era bien recibido según lo menciona Abbott en su libro. Haciendo uso de Planilandia queremos plantear un ejemplo que permita dilucidar lo que es estar inmerso en un mundo bidimensional.

Comenzamos con una pregunta, ¿Qué verías tú si "vivieras" en un mundo bidimensional? Pues bien, eso es lo que Abbott intenta ilustrar. Es por ello por lo que el primer paso es describir este nuevo mundo. Imaginemos una hoja de papel en la que las distintas representaciones que allí se encuentran no son estáticas. Estas pueden moverse libremente por toda la superficie aunque con un condicionante particular; no tienen la capacidad de elevarse por sobre la hoja ni hundirse por debajo de ella. En otras palabras la composición vectorial que modela todas las posibles direcciones y ubicaciones de objetos que habiten este espacio está determinada únicamente por dos vectores linealmente independientes, obteniendo así una superficie o espacio bidimensional.

Teniendo lo anterior como referencia, surge un primer problema en este nuevo mundo bidimensional. Este se relaciona con la manera en que los entes propios de esta dimensión pueden ver o percibir su propio entorno ¿De qué manera el Cuadrado A puede saber que quien está frente a sus ojos es el Triángulo A y no el Pentágono B? ¿De qué manera los entes bidimensionales construyen la idea de un mundo bidimensional a partir de la visualización que tienen de su entorno? Pues bien, Abbott propone dos soluciones para este problema. Inicialmente, menciona que el Cuadrado A rodea a las figuras y cuenta los lados; a partir de esto identifica con facilidad con quién está hablando. Cabe resaltar que nosotros en nuestro entorno tridimensional no podemos hacernos una idea completa de un determinado objeto con un simple vistazo, sino que tenemos que verlo desde diferentes ángulos para poder hacer una composición mental de las partes y así entender el todo. Esto mismo pasa con los habitantes de Planilandia, y es por ello por lo que tienen que rodear a las figuras para lograr percibir sus características propias y así identificarlas. La segunda forma en que se perciben las cosas en Planilandia tiene relación con el color que tiene cada uno de los entes que allí habitan, pues, según Abbott este es un indicador creado en este mundo para que las diversas figuras geométricas puedan ser identificadas como entes pertenecientes a una determinada dimensión, creamos experiencias con el ambiente que nos circunda y aprendemos a entender con naturalidad las características propias de la dimensión a la que pertenecemos; pero es claro que no vamos a poder explicar cabalmente lo que pasa en otra dimensión, por el simple hecho de que no somos partes de ella y no tenemos la capacidad de percibir el entorno de la misma forma como lo hace un ser de Planilandia.

La forma en que los habitantes de Planilandia perciben su entorno puede parecer un tanto artificial, pero dejemos de lado los prejuicios y pensemos en nuestra propia dimensión, en la forma en que nosotros construimos una imagen mental de nuestro mundo tridimensional. Pensemos por un momento en una persona que al mirar por la ventana puede observar un auto, pero justo en ese momento alguien pasa frente al auto, es decir, queda entre el observador y el auto (Figura 8a). Es claro para nosotros que, dependiendo del ángulo y del lugar desde donde se esté observando la situación, se van a tener percepciones diferentes de la misma; sin embargo, hay un ángulo y un momento particular en el que parece que la persona que va caminando frente al auto está sobrepuesta en él (Figura 8b); y aun cuando en ese instante dicha idea parece tener sentido, el observador sabe que no lo tiene, pues posee la capacidad de distinguir los atributos físicos que le proporciona el ambiente por el simple hecho de vivir en este (Figura 8).



(a) (b)

Figura 8: Percepción de superposición

http://www.rudyrucker.com/thefourthdimension/

Respecto a los atributos físicos propios del ambiente bidimensional o tridimensional, queremos destacar que para nosotros, entes de la tercera dimensión, resulta simple representar por medio de un dibujo un cubo, pero ¿qué percibiría un ente (digamos el Cuadrado A) que habite en el mismo espacio bidimensional en el cual yace la representación del cubo? ¿Podría este ente bidimensional *ver* los segmentos en el "interior" del cuerpo bidimensional que hemos llamado "representación de un cubo"? (Figura 9).

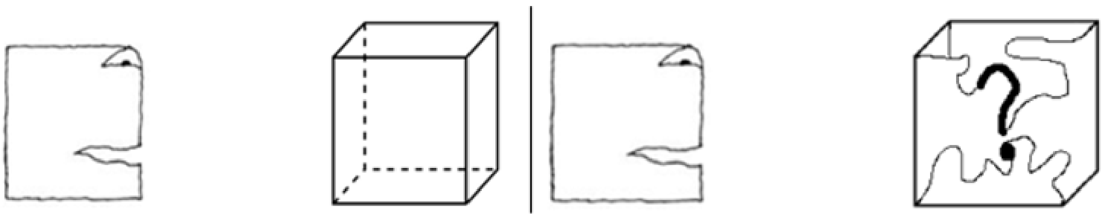


Figura 9: Cuadrado A observando un ente bidimensional llamado representación de un cubo.

Nuestro ente bidimensional (siguiendo las reglas de identificación corporal dadas en su mundo; es decir, rodeando al objeto para identificar la cantidad de lados que tiene) podría fácilmente confundir la representación con un objeto bidimensional llamado hexágono. ¿Podría el Cuadrado A ver las líneas interiores de la representación? Por supuesto que no, asumiendo análogamente que los cuerpos bidimensionales, al igual que los tridimensionales, no son usualmente transparentes. Es decir, no podemos ver el corazón, el cerebro, los órganos, las tripas, etc. de otro humano; sin lastimarlo, por supuesto.

Supongamos por un momento que la representación está hecha para que la pueda percibir, además, un ente bidimensional. Para lograrlo, tendríamos que afectar de alguna manera la composición rígida e impenetrable a la vista del material de la representación. Por ejemplo, podríamos considerar que los segmentos externos (la silueta de la representación) está hecha con segmentos transparentes, como si de un vidrio bidimensional se tratara. De esta manera el Cuadrado A, asumiendo que pueda ver a través de los segmentos de la silueta, se haría una idea mucho más clara de lo que es un cubo visto desde una posición muy particular; aun así, sería confuso para el Cuadrado A identificar la configuración de los segmentos internos. Con esta reflexión queremos puntualizar las complicaciones que tiene "sacar" a los objetos geométricos de su dimensión y además de ello, poner de manifiesto las marcadas diferencias existentes entre la naturaleza de los entornos dimensionales.

Ahora bien, pensamos que estos problemas, es decir, el tratar de entender otras dimensiones desde las características mismas de la dimensión a la que pertenecemos, no son propios de los habitantes de Planilandia, sino nuestros, ya que tratamos de trasladar los atributos físicos de nuestro entorno al de ellos. Tratamos de entender y explicar su mundo teniendo como referencia únicamente el nuestro. Esto se vio reflejado en Planilandia, en el momento en el que un ser superior (tridimensional) hizo una visita inesperada al Cuadrado A.

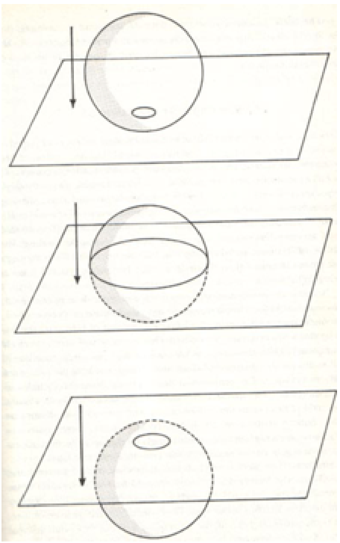


Figura 10: Secciones de Esfera A que atraviesan Planilandia

http://www.rudyrucker.com

La Esfera A es un cuerpo cuya existencia ambiental yace en un espacio tridimensional, sin que esto signifique que la dimensión intrínseca de la superficie de la Esfera A deba ser también tridimensional. Cuando la Esfera A entra lentamente a Planilandia, el Cuadrado A percibe secciones (arcos de circunferencia) de esta, cada vez más grandes. Pero al no lograr identificar con claridad lo que pasa en su entorno, decide rodear las secciones que aparecen en dicho momento, identificando así que estas en realidad son circunferencias cuyo radio cambia según el movimiento (tridimensional) de la Esfera A (Figura 10). Con percibir nos referimos a lo que en nuestro mundo tridimensional se entiende por ver.

De modo que, si tratamos de "meter" en una dimensión ambiental $n-1$ una entidad que naturalmente habite en una dimensión ambiental n, solo podremos "meter" secciones $n-1$ dimensionales de dicha entidad. Por ejemplo, si en vez de una esfera dejamos caer un humano en Planilandia, las entidades que vivan en Planilandia percibirán curvas de las secciones del humano que cambian su tamaño (Figura 11).

Figura 11: Humano cayendo y atravesando en Planilandia.

http://www.rudyrucker.com/thefourthdimension/

Pero aunque las entidades que viven en Planilandia logren percibir las diferentes secciones del humano o de la Esfera que atravesaron su entorno, debemos tener claro que por más que las perciba, el Cuadrado A está limitado por su propio entorno y esto lo imposibilita para poder hacerse una idea completa de un objeto perteneciente a otra dimensión. Damos por hecho que las puede percibir, que en efecto puede ver las diferentes secciones dimensionales que se crearon en su mundo, pero estas van a ser insuficientes para que pueda hacerse una idea del objeto n-dimensional.

Al inicio de esta sección planteamos la idea de la existencia de un mundo bidimensional y a partir de esto hicimos un recorrido por Planilandia, tratando de esclarecer cuestiones propias del entorno de este mundo. Edwin Abbott (1884), en su libro, alude a que el Cuadrado A realizó una visita a la tercera dimensión guiado por la Esfera A. En dicha visita el Cuadrado A, tuvo contacto con seres de otras dimensiones y ahora sabe que en ese mundo existe un tercer atributo medible que él no logra percibir. Esto es lo mismo que pasa con nosotros, los habitantes de la tercera dimensión, que sabemos que hay un atributo perteneciente a la cuarta dimensión que no podemos ver, que por más que intentemos no logramos percibir. Esto se da por una simple razón y es que no somos parte de la cuarta dimensión; por lo tanto, estamos imposibilitados a ver los seres de ese espacio de forma completa.

Hablar de dimensión ambiental implica ubicación, movimiento y dirección; hablar de dimensión intrínseca implica medición. Dado que estamos inmersos en una determinada dimensión siempre vamos a estar sujetos a las interpretaciones propias del mundo que habitamos. Si somos seres de Planilandia no podremos percibir un atributo de la tercera dimensión, esto porque en nuestro entorno no estamos capacitados para percibir este atributo. Lo mismo pasa con la cuarta dimensión. Nosotros como seres tridimensionales no estamos en la capacidad de ver, ni de medir, ni de percibir el cuarto atributo de dicha dimensión; sin importar cómo seamos, o a qué dimensión pertenezcamos todos somos proclives a no entender las cuestiones propias de un ambiente dimensional superior al nuestro. Somos esclavos de nuestros respectivos prejuicios y limitantes dimensionales. Vemos lo que estamos acostumbrados a ver y nos cuesta imaginar cómo podrían ser las cosas en una dimensión ajena a la nuestra.

2.3. Posibles mundos más allá de la tercera dimensión

En la sección anterior nos planteamos la idea de un mundo bidimensional, y vimos diversas implicaciones que surgen al considerar la existencia de este mundo. Tratamos de entender el entorno en el viven los entes bidimensionales, llegando a plantear algunas cuestiones de difícil explicación como la manera en que tales entes perciben el entorno que los rodea. Argumentamos que, como seres de la tercera dimensión estamos imposibilitados para tratar de explicar la naturaleza y los atributos propios de su dimensión ya que no hacemos parte de ella. Teniendo lo anterior como referencia, si nos planteamos que existen mundos bidimensionales ¿por qué no podemos pensar que hay mundos de dimensiones superiores a la nuestra? Mundos tetradimensionales y hasta pentadimensionales. Esto es lo que pretendemos hacer en esa sección: dar como cierta la idea de la existencia de estos mundos en aras de hacernos una idea hipotética de cómo serían.

Inicialmente, tratamos de hacer una analogía con uno de los ejemplos de la sección anterior, particularmente cuando la Esfera atravesó el plano en donde se encontraba el Cuadrado A. Teniendo esto como referencia, podemos afirmar que si un objeto que naturalmente pertenezca a un espacio tetradimensional estuviera "cayendo" y atravesando nuestro espacio tridimensional, entonces veríamos este fenómeno como secciones tridimensionales de dicho objeto. Para hacernos una idea completa del objeto que está atravesando nuestro entorno deberíamos, al igual que en su momento lo hizo el Cuadrado A, rodear el objeto y veremos entonces cortes transversales tridimensionales del objeto tetradimensional.

Si consideramos que la figura tetradimensional que atraviesa nuestro entorno tridimensional es un simplejo (que intentamos representar bidimensionalmente como en la Figura 12), es decir, un objeto tetradimensional análogo al triángulo bidimensional o al tetraedro tridimensional, veríamos los cortes de secciones transversales en nuestra dimensión (Figura 13). Al igual que los seres bidimensionales, percibían los cortes de la Esfera nosotros veríamos poliedros (composición de todas las secciones que percibimos al rodear las secciones) que aparecen, se transforman y desaparecen a medida que avanzan en la dirección de la cuarta dimensión mientras el simplejo atraviesa nuestro espacio de la tercera dimensión.

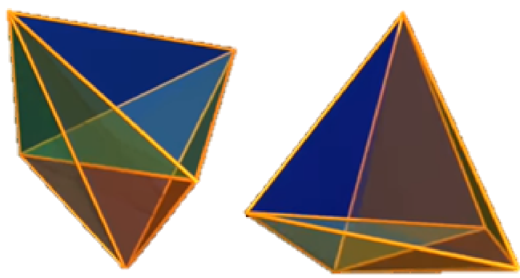


Figura 12: Representaciones bidimensionales de un simplejo.

https://www.youtube.com/watch?v=k1NM7r1wvrQ

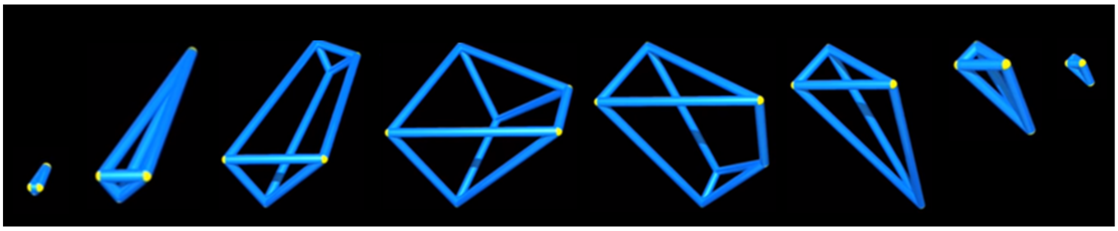


Figura 13: Secciones de un simplejo atravesando el espacio tridimensional.

https://www.youtube.com/watch?v=k1NM7r1wvrQ

Lo anterior, no obstante, hace referencia al espectro visual (o perceptual) que experimentaría un observador que habite en un espacio n-dimensional cuando un ente perteneciente a una dimensión ambiental mayor que n entra o atraviesa dicho espacio n-dimensional. Lo anterior quiere decir que el observador no está visualizando el objeto de dimensión superior sino secciones de este, al igual que pasó cuando le Esfera A se introdujo en el Planilandia. Es claro, que ni el Cuadrado A logra hacerse una idea real los atributos propios de la Esfera, ni nosotros podemos hacerlo con el simplejo. Si bien creemos tener una idea por la composición realizada a partir de las diferentes secciones que podemos observar, no estamos capacitados para ver a cabalidad los atributos propios de dicha figura geométrica. Al no ser parte de su dimensión, esto nos imposibilita verla como realmente es; por esto centramos nuestros esfuerzos en tratar de explicar sus características desde la naturaleza misma de nuestra dimensión.

Hemos esclarecido algunos acuerdos para tratar de percibir objetos de dimensiones superiores en nuestra dimensión, pero hasta el momento no hemos aludido puntualmente a cómo serían dichos mundos. Pues bien, no es fácil imaginar algo como esto. Creemos que ahora entendemos los problemas que tuvo el Cuadrado A con las visitas dimensionales que recibió. Aunque no sea tarea fácil imaginar cómo es un mundo en una dimensión superior, hay algunas aspectos que creemos tener claros y que planteamos a continuación.

En el primer capítulo abordamos la idea de dimensión ambiental a partir de la independencia vectorial concluyendo que tres vectores independientes caracterizan la posible dirección y ubicación de objetos que circunden el ambiente en que vivimos los seres humanos, determinando así un espacio *tridimensional*. Siguiendo este mismo camino, deberíamos poder construir un nuevo vector linealmente independiente a los tres ya mencionados. Sin embargo, esto es un problema porque estamos imposibilitados para determinar la dirección que va a tener el nuevo vector. Por ello no vamos a poder construirlo ni identificar de ninguna manera cuál sería el *nuevo* atributo medible que va a tener la cuarta dimensión. En los modelos de la física se presume que es el tiempo, pero por supuesto es algo que nunca vamos a poder corroborar.

Lo anterior, podemos ilustrarlo retomando un ejemplo presentado en la sección 2.1

para referirnos a la información sobre la ubicación de alguien: "Diríjase dos cuadras hacia el norte, gire a la derecha y camine cuatro cuadras por esa calle, luego ingrese al edificio y suba el ascensor hasta el décimo piso". Ahora, si nuestro mundo fuera tetradimensional ¿de qué forma sería la instrucción para que alguien pueda encontrarnos? Especulamos algo como lo siguiente "Diríjase dos cuadras hacia el norte, gire a la derecha y camine cuatro cuadras por esa calle, luego ingrese al edificio, suba en ascensor al décimo piso y al salir camine a través de tres niveles de realidad"¿Por qué lo expresamos de esta forma? Pues bien, no hay una forma diferente a la especulativa. Nosotros podemos decirlo así, alguien puede decirlo de otro modo y no va a ser falso, porque estamos imposibilitados para entender la cuarta o la quita dimensión. Pero logramos algo muy importante en esta sección y es pensar que existen otras dimensiones 4D, 5D, etc. y podemos tratar de entender entornos a los cuales no podemos acceder.

3. Dimensión en la representación de objetos

3.1. Aproximaciones a la idea de representar

En la primera sección del capítulo tres retomamos una de las cuatro interpretaciones que dimos a la idea intuitiva de dimensión en el primer capítulo. Particularmente, la interpretación de dimensión como representación y la vinculamos a la idea de la dimensión intrínseca. En el capítulo uno mencionamos que dicha interpretación podía ser entendida como la manera de representar un determinado objeto porque los resultados de la indagación allí mencionada nos mostraron que las ideas de representación tienen que ver con mediciones, tamaños, proporciones, etc. Posteriormente, diferenciamos la dimensión ambiental y la dimensión intrínseca; llegamos al punto de abrir nuestra mente a dimensiones ambientales superiores a las dimensiones intrínsecas de los objetos y tratamos de comunicar la forma en que concebimos estos posibles mundos en la segunda dimensión y mundos más allá de la tercera dimensión. En este recorrido siempre estuvo inmersa la idea intuitiva de percepción que podría ser entendida como una representación mental, producto de la visión. Sin embargo, en este capítulo nos enfocamos en las representaciones externas. Esta sección pretende abordar lo que puntualmente se entiende por representar, partiendo desde la necesidad histórica que tuvo el hombre por hacerlo, para luego dar una idea de representar a partir de los planteamientos de diversos autores.

En primera instancia es importante mencionar que uno de los medios más antiguos con que ha contado el hombre para poder plasmar y expresar sus ideas es el dibujo. Mediante este, hemos llegado al conocimiento de las diferentes culturas en sus distintas épocas. En el origen de un dibujo siempre está inmersa la idea de comunicar o de mostrar de una u otra forma objetos o sucesos en un determinado momento de la historia. Para lograrlo, el hombre ha tenido que recorrer un largo camino hasta el descubrimiento de la fotografía, ya que una de sus mayores dificultades ha sido describir en superficies planas (bidimensionales), como las paredes de sus cavernas, el lienzo de los artistas o las cúpulas de las grandes catedrales, los objetos tridimensionales que constituyen nuestro mundo.

Esta dificultad, planteada por la necesidad de representar fielmente las características de los objetos de tres dimensiones en superficies bidimensionales ha sido resuelta paulatinamente a través del tiempo, con el empleo de las formas y las sombras, con una mejor comprensión de la perspectiva y con ayuda de la fotografía. Debido a ello, las diferentes sociedades y los diversos entornos culturales lograron la representación de objetos 3D de distintas maneras.

Hasta el momento hemos aludido a la necesidad de representar distintas formas y objetos que percibimos. Pero no hemos puntualizado teóricamente a qué nos referimos cuando acudimos al término representar. Respecto a esto, y tomando como referencia los planteamientos de Ospina (2004), aludimos a que cuando queremos captar y registrar una imagen 3D mediante una proyección en un plano, estamos haciendo una representación 2D de esta. La cual consiste en presentar en un plano ante los ojos de otro observador, lo que el primero ha observado. Lo anterior no nos supone una limitación para extrapolar el ejercicio de representación de objetos tridimensionales mediante otros objetos tridimensionales como esculturas, tallados, maquetas, etc.

Es importante mencionar que los medios de representación de objetos tridimensionales en el plano no trasladan a las dos dimensiones la totalidad de las características de las cosas representadas. Como ya mencionamos, la representación se está haciendo sobre un plano y por ende estamos limitados a él. Al hacer una representación se busca fidelidad con lo que se está representando, pero dicha fidelidad está notoriamente disminuida en virtud de que el representante es bidimensional y el representado es tridimensional; de tal manera que en la representación algo se pierde, bien sea una vista del objeto, la resolución de este, la escala, etc.

Habiendo dicho lo anterior, queremos centrar nuevamente la atención en la idea de dimensión y aclarar cómo lo que hemos dicho de representación aporta a ese fin. En el primer capítulo, planteamos diferentes aproximaciones a la idea de dimensión. Mencionamos que no se define puntualmente el concepto, sino que las aproximaciones matemáticas determinan las propiedades necesarias para clasificar la dimensión a la que pertenecen ciertos objetos. Partiendo de ello, podemos clasificar un determinado objeto geométrico en una dimensión a partir de sus características y atributos particulares. Más allá de la clasificación de determinados objetos geométricos en una u otra dimensión, el hombre siempre necesitó de un recurso que le diera la posibilidad de representar los objetos y poder plasmarlos de manera concreta para trasmitir a otras personas información sobre los objetos sin tenerlos de manera presencial.

Un ejemplo de este tipo de recursos es la geometría descriptiva. Esta disciplina brinda la posibilidad de representar objetos 3D en 2D contribuyendo a resolver complejos problemas de ingeniería o arquitectura. Permite al constructor, que generalmente no es el mismo diseñador, hacer representaciones con gran fidelidad. Pero no queremos enfocarnos en esas grandes construcciones arquitectónicas, sino más bien queremos sintetizar la forma en la que el hombre utiliza los medios y los sistemas de representación para lograr plasmar un objeto geométrico 3D en 2D o cómo hace para dibujar en el papel 2D un objeto perteneciente a la cuarta dimensión. Son estas razones las que hacen que representar cobre tanta importancia. Introducimos la idea de representar para aludir a la forma en que estamos presentando a otros objetos en diferentes dimensiones, para comunicar características o propiedades de los objetos que estamos observando.

3.2. Acuerdos y técnicas para representar objetos geométricos y condiciones para interpretar tales representaciones

En esta sección proponemos un conjunto de acuerdos que contribuyen a representar objetos geométricos. Transversal a esto, establecemos las condiciones que se requieren para interpretar representaciones de objetos geométricos. Finalmente, ahondamos en algunas técnicas puntuales para representar objetos geométricos y en las implicaciones que conlleva utilizarlas.

3.2.1. Acuerdos para representar

Como mencionamos anteriormente, en esta sección mostramos los acuerdos y condiciones que se deben tener en cuenta al representar o al interpretar representaciones de objetos geométricos n-dimensionales en espacios de dimensión ambiental n o inferiores. Los acuerdos técnicos que mostramos son síntesis de pautas para representar objetos geométricos de acuerdo a distintas técnicas propuestas por otros autores; aun así, hacemos referencia a estas pautas como acuerdos para mantener un lenguaje uniforme. La clasificación de los acuerdos en contextuales, de notación y dimensionales es autoría propia, la cual surgió de discusiones entre nosotros, los autores.

Acuerdos contextuales

Imaginemos un observador cuyos antecedentes académicos y experiencias previas le permiten reconocer algunos objetos geométricos bidimensionales y tridimensionales como triángulos, cuadriláteros y sólidos e incluso puede diferenciarlos a partir de características tales como relaciones de congruencia, perpendicularidad, paralelismo o por la cantidad de vértices, aristas y caras o también por la medida de ángulos internos. Sin embargo, si dicho observador no conoce las propiedades geométricas del objeto geométrico llamado *simplejo* y observa la representación de la Figura 12, muy seguramente no podrá interpretar o caracterizar tal representación como un objeto tetradimensional. En vez de eso, en el mejor de los casos, podría pensar que se trata de una pirámide (irregular y de base cuadrilátera) en donde se evidencian las diagonales de la base.

Esto, por supuesto, no es problema del observador y tampoco de la representación misma sino que es asunto del proceso denominado *visualización*. De acuerdo con Hershkowitz et al. (1996), la visualización es "la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa"(p. 163). Es importante mencionar que el objeto mental evocado en la mente de cada observador a partir del proceso de visualización no tiene por qué ser el mismo para todos los observadores. De esta manera, un objeto se puede representar mediante alguna técnica de dibujo en la que se muestren configuraciones geométricas más simples, de dimensión ambiental menor o igual que el objeto original, las cuales también están unidas a afirmaciones matemáticas.

De acuerdo con Duval (1998), la identificación visual de las figuras que componen un dibujo (de objetos 1D, 2D o 3D en 2D) se basa en leyes de organización perceptiva; y estás figuras pueden representar objetos reales o netamente matemáticos. La correcta interpretación de estas figuras hace que el observador pueda *ver matemáticamente* el objeto al que alude la representación, lo cual se entiende como *aprehensión*. Según Duval (1998), existen tres tipos de aprehensión: perceptiva, discursiva y operativa.

La aprehensión perceptiva se considera como la identificación global de una representación que el observador puede caracterizar a partir de lo que ve. Así, por ejemplo, la representación mostrada en la Figura 14 puede ser vista como la representación de un objeto geométrico (un cuadrado, un rectángulo, un paralelogramo, un plano, etc.), como el techo de una habitación o incluso como cuatro segmentos dibujados en el papel. Todas estas interpretaciones son válidas para un tipo de aprehensión perceptiva.

Figura 14: Representación de ejemplo

La aprehensión discursiva es la acción cognitiva que asocia una representación con un enunciado o afirmación matemática tal como definiciones, propiedades, relaciones, etc., la cual se puede presentar de dos maneras.

Por una parte, se puede acompañar la representación *hecha* con un enunciado, bien sea oral o escrito, que amplíe información sustancial sobre el objeto al que alude la representación. Por ejemplo, si en el momento de realizar la representación de la Figura 14 se le asocia el enunciado: *considere el siguiente cuadrado*, el observador constituirá una imagen mental de lo que significa para este un *cuadrado*. Por supuesto, el observador necesita conocer lo que es un cuadrado, bien sea por sus propiedades o por la apariencia del mismo. De lo contrario, incluso con la asociación de una afirmación matemática, la interpretación del objeto puede verse afectada.

La otra manera en la que se presenta la aprehensión discursiva consiste en partir directamente de la afirmación matemática; esta evoca al observador una imagen mental del objeto que se quiere representar; y desde luego, esta imagen no será igual para cada observador. Es decir, llamamos aprehensión discursiva a la acción de realizar una representación a partir de una afirmación matemática resaltando las propiedades, definiciones o relaciones matemáticas declaradas en el enunciado.

Consideremos el siguiente ejemplo de enunciado que se le propone a un estudiante: *Un albañil apoya una escalera de 5 metros contra un muro vertical. El pie de la escalera está a 2 metros del muro. Calcula la altura a la que se encuentra la parte superior de la escalera.*

Aquí, la aprehensión discursiva consiste en realizar una representación que dilucide el anterior enunciado atendiendo a las características matemáticas relevantes (Figura 15, a) y no a la situación misma (Figura 15, b).

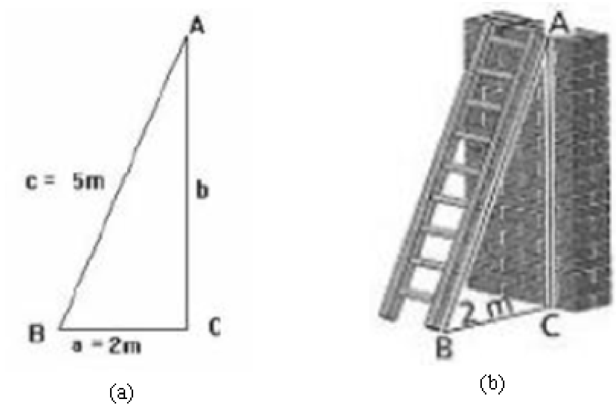


Figura 15: Aprehensión discursiva

Torregrosa y Quesada (2007). Versión digital en https://bit.ly/2yxPl7P

Por último, y consecuente al anterior tipo de aprehensión, cuando el observador necesita dar respuesta a algún problema geométrico, llamamos aprehensión operativa a la modificación visual como ayuda para resolver dicho problema. Es decir, si el observador realiza trazos auxiliares en la representación dada con el fin de esclarecer relaciones o propiedades matemáticas o descompone una configuración y recompone la pieza de otra manera, consideramos que se está realizando una aprehensión operativa.

En síntesis, para que un observador pueda interpretar una representación es necesario que este posea un contexto apropiado que le permita hacerse una idea mental del objeto representado. En caso de no disponer de dicho contexto, la representación tiene que ir acompañada de un enunciado que facilite al observador la aprehensión de la representación y así pueda interpretar correctamente la representación. Aunque existen otras ayudas visuales que contribuyen a la interpretación de representaciones geométricas, como veremos en seguida.

Acuerdos de notación

"No todo lo que se ve es". La frase anterior, fue una de las primeras que nos mencionaron en la clase de geometría al comenzar la universidad. Con el paso de los años nos hemos dado cuenta que dicha frase quedó acuñada en nosotros y que es momento de retomarla. Una habilidad sustancial para el trabajo en distintos ámbitos geométricos es poder desconfigurar o reconfigurar una determinada figura. Es decir, poder mitigar alguna información inicial de la figura mediante un proceso mental, para de ese modo centrarse en lo que realmente queremos "ver", poder extraer lo "relevante" y trabajar con ello.

Ahora bien, no podemos dejar de lado que cuando trabajamos en geometría, debemos ser cuidadosos con las inferencias que obtenemos tan solo con la observación. Muchas veces y en muchos momentos cometimos el error de afirmar que un determinado ángulo era recto por el simple hecho de verlo así. También aseveramos que dos rectas serían paralelas porque visualmente no se intersecaban, pero resulta que lo hacían. En este momento era que constantemente se nos recalcaba “No todo lo que se ve es”.

Mediante el uso de un programa de geometría dinámica podemos realizar diversas exploraciones de algunas figuras geométricas y de ese modo determinar sus propiedades para ahora sí, afirmar con seguridad, que dicho ángulo es recto o que las rectas son paralelas. Sin embargo, el uso de la geometría dinámica no es la única forma en que se garantizan ciertas propiedades de los objetos geométricos. Muchas veces, lo que nos garantiza el cumplimiento de una determinada característica de un objeto es la notación. En diversos momentos durante nuestra formación vimos representaciones en el tablero, en hojas y cuadernos, en que el triángulo no parecía ser rectángulo, bien sea porque el ángulo recto no se veía así, porque los segmentos estaban algo curveados por la falta de pulso de quien los dibujó o por diversos factores que dejamos de lado al ver la notación de la representación en la Figura 16.

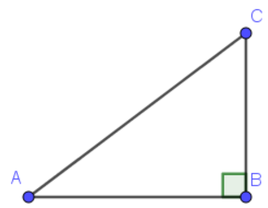


Figura 16: Triángulo rectángulo

Al observar la representación junto con su notación rápidamente dejamos de lado las falencias que pueda presentar la representación y para todos es claro que es un triángulo rectángulo a pesar de no verlo de esa forma.

Lo anterior, es un ejemplo de la importancia que tiene la notación cuando realizamos una representación geométrica; es a partir de la notación que podemos garantizar el cumplimiento de una determinada característica en la representación sin llegar a una conclusión no válida de la misma. En las representaciones geométricas, hay notaciones para garantizar la congruencia entre dos segmentos (Figura 17, a) o entre dos ángulos (Figura 17, b).

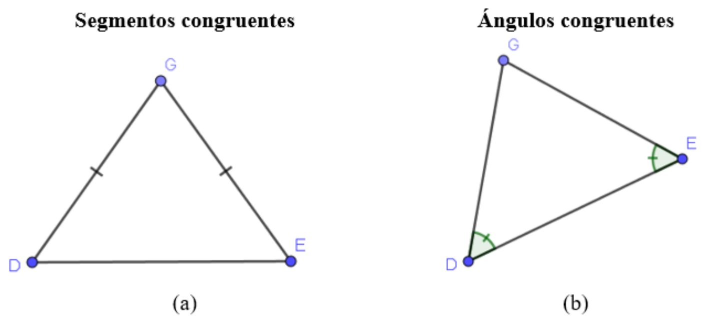


Figura 17: Notación de congruencia en una representación

También hay acuerdos para garantizar que dos rectas son paralelas (Figura 18, a) o de nuevo para aludir a un ángulo recto y por ende a rectas perpendiculares (Figura 18, b).

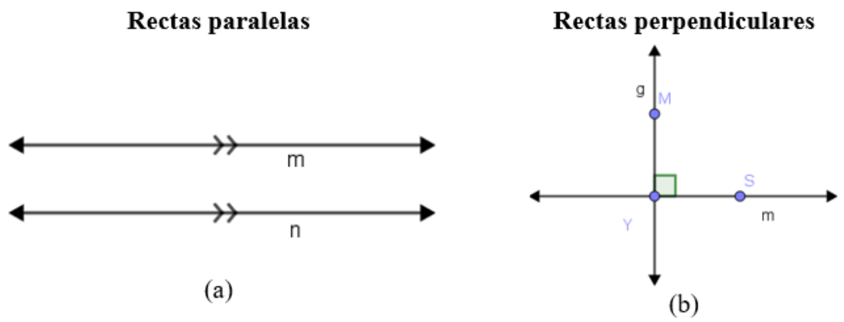


Figura 18: Notación de rectas paralelas y rectas perpendiculares

Lo anterior, son a grandes rasgos algunos de los acuerdos de notación geométrica con los que contamos, que nos dan por hecho el cumplimiento de determinadas características en una representación. Dichos acuerdos de notación se han desarrollado y aceptado con el paso de los años para representar objetos de la geometría euclidiana. Queremos resaltar que hay muchos más acuerdos ligados a la notación; por ejemplo, aceptar que dos segmentos se intersecan en un único punto por el simple hecho de estarlo viendo. También está el caso de aceptar que dos ángulos son opuestos por el vértice, que tres o más puntos son colineales, que existe un ángulo, apoyados siempre en la razón anterior, que es la representación. Con esto, es posible afirmar que hay objetos geométricos que se aceptan por el simple hecho de verlos en la representación pero hay otros, para los que la notación cobra una importancia particular para no llegar a conclusiones no ciertas, ya que aunque la representación de los objetos no se vea como esperamos, mediante la notación podemos garantizar que son así.

Acuerdos dimensionales

La representación de un objeto geométrico, como ya se ha mencionado, tiene como objetivo comunicar a un observador las características geométricas que caracterizan dicho objeto. Entre estas podemos encontrar la dimensión ambiental a la que pertenece el objeto geométrico representado.

Si se pretende representar objetos n-dimensionales en espacios de dimensión ambiental n, se dibujan de tal manera que las características propias del objeto resalten y puedan ser percibidas visualmente. Es decir, un cuadrado se representa en un plano de tal manera que, aparentemente, los ángulos sean rectos y los segmentos congruentes. Sin embargo, representaciones como la Figura 14 también son aceptadas siempre y cuando disponga, como se mencionó anteriormente, de un enunciado que permita la aprehensión discursiva o de la respectiva notación. Este tipo de representaciones en las que las propiedades geométricas del objeto representado no son identificables por el ojo humano únicamente, sugieren al observador que el representador estaba en un lugar exterior a la dimensión en la que yace el objeto representado.

Por ejemplo, para nosotros, seres tridimensionales, resulta fácil reconocer y representar un cuadrado en distintas posiciones. Por su puesto, nos referimos a *posiciones* como los lugares desde donde podemos ver el cuadrado y no a distintos lugares en los que puede estar tal cuadrado; pues un cuadrado es un cuadrado independiente de su posición (girado o inclinado con respecto a una recta en el plano). Esto sucede porque somos seres que habitamos en una dimensión ambiental superior a la dimensión ambiental del objeto representado, lo cual nos permite percibir dicho objeto desde distintos puntos de vista.

Ahora, al realizar representaciones de objetos n-dimensionales en espacios de dimensiones ambientales inferiores a n para interpretarlas es necesario atender al siguiente acuerdo. Es necesario recordar al lector que los objetos de los que estamos hablando corresponden a aquellos que poseen propiedades geométricas características en todas sus componentes (un cubo y la perpendicularidad entre caras o un rombo y la congruencia entre segmentos) y no a aquellos objetos geométricos que no poseen ninguna propiedad geométrica característica (sólidos irregulares). Esto lo contemplamos por cuestiones netamente explicativas.

En primera instancia, cualquier representación debería incluir la mayor cantidad de partes del objeto (vértices, aristas, caras, etc.). En caso de que una representación superponga partes u oculte algunas de estas, la interpretación se verá inmediatamente viciada por la cantidad de información percibible. Ahora, siguiendo la anterior recomendación, la dimensión ambiental en la que habita el objeto representado se identifica en la representación por aquellas partes que, visualmente violan alguna de las propiedades características del objeto. Por ejemplo, en la representación de un cubo en un plano, las aristas que comparten un mismo vértice deberían verse perpendiculares entre sí pero una de éstas viola visualmente dicha perpendicularidad. Si el observador asume que la perpendicularidad se mantiene pese a esta violación, entonces se dice que tal segmento está en la tercera dimensión.

De manera general, el anterior acuerdo sugiere que en caso de que se asuma que una parte del objeto representado conserva y mantiene una determinada propiedad geométrica pese a que visualmente la viole, quiere decir que esa parte del objeto no *pertenece* a la dimensión ambiental del espacio de representación. En la siguiente sección retomamos este acuerdo considerando la representación de un teseracto en el espacio.

Este acuerdo es manejable siempre y cuando la representación implique un solo *salto dimensional.* Es decir, cuando el objeto representado es n-dimensional y el espacio de representación es de dimensión ambiental $n-1$, como por ejemplo representaciones de objetos 4D en 3D, 3D en 2D o 2D en 1D. Pero cuando la representación implica dos o más saltos dimensionales (*e.g.* 4D en 2D o 3D en 1D), la interpretación de esta adquiere un nivel de complejidad más alto porque hay que discernir las dimensiones ambientales a las cuales pertenecen determinadas partes del objeto representado.

A continuación, mostramos distintas técnicas para representar en las cuales esclarecemos los acuerdos técnicos puntuales para representar y retomamos algunos de los acuerdos mencionados en esta sección.

3.2.2. Técnicas para representar

Para orientar al lector en la organización de las ideas mediante las cuales mostramos distintas técnicas para representar, le sugerimos pensar en una escalera dimensional, en donde cada escalón representa una dimensión. Empezamos mostrando las representaciones desde el escalón de la cuarta dimensión y luego iremos descendiendo escalón por escalón. En cada escalón, ponemos en manifiesto distintas representaciones posibles y la caracterización de las mismas. Es decir, en cada escalón nos detendremos a mirar hacia la dimensión correspondiente al escalón y hacia dimensiones inferiores.

Objetos n-dimensionales en espacios n-dimensionales

Tratemos de representar un teseracto en la cuarta dimensión, el cual, como se mencionó en el capítulo 1, es el objeto geométrico 4D análogo al cuadrado 2D y al cubo 3D. En la cuarta dimensión, en la cual existe naturalmente el teseracto, no suponemos que haya problemas para representarlo. Similarmente, en el espacio tridimensional podemos representar sólidos por medio de esculturas, tallados, impresiones 3D, etc. De la misma manera y como ya asumimos en el capítulo anterior, los objetos bidimensionales podrían ser representados en un espacio bidimensional. En general, la representación de un objeto que pertenezca a una dimensión ambiental n en un espacio cuya dimensión ambiental también sea n, se hace mediante la recreación del objeto por algún proceso similar a lo que en la tercera dimensión conocemos como esculpir, moldear, diseñar o imprimir en 3D.

Objetos 4D en 3D

Generalmente un teseracto se representa de dos maneras en la tercera dimensión. Una, mediante secciones tridimensionales que vemos de un teseracto al atravesar nuestro espacio 3D. Estas no componen la representación del teseracto por sí solas (Figura 19). Esto es un problema porque no nos dan una idea clara de las características geométricas del teseracto. En vez de eso, solo nos muestran algunas partes o secciones de este. Otra forma de representación consiste en sumergir la estructura de un cubo en agua enjabonada y luego, retirarla del agua. Se forman caras de jabón que se deforman y curvan hacia el interior por la presión atmosférica, creando así un cubo de jabón dentro del cubo de la estructura. Esta disposición del cubo dentro del cubo es una representación del teseracto (Figura 20). Esto es porque, como mencionamos anteriormente en los acuerdos dimensionales, una de las 4 aristas ortogonales que comparten uno de los vértices de un teseracto está visualmente violando la ortogonalidad. Esta representación, es realizada por Antón Aubanell, profesor de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Barcelona.

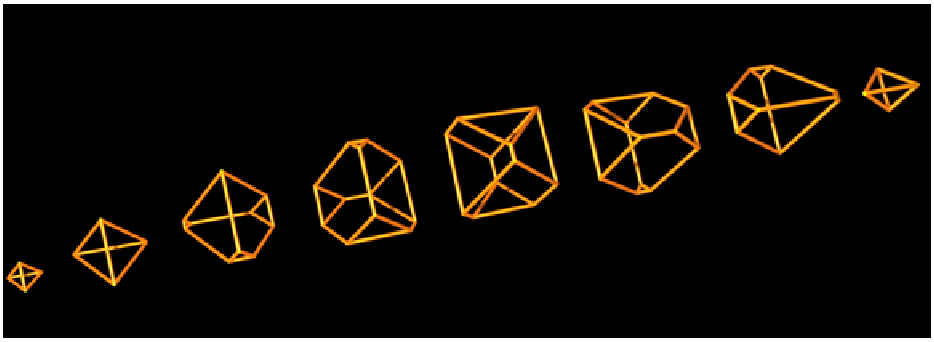


Figura 19: Secciones de teseracto atravesando al espacio tridimensional.

https://youtu.be/k1NM7r1wvrQ

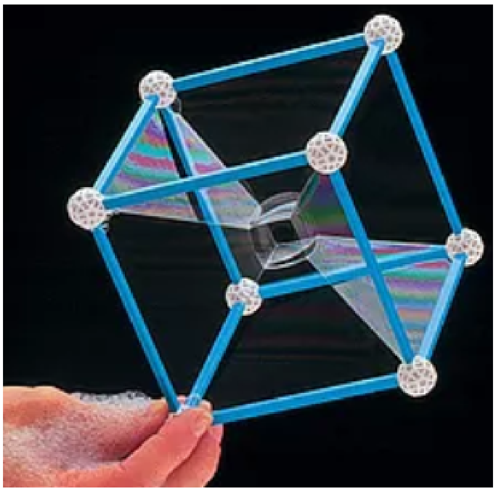


Figura 20: Representación de un teseracto hecha con jabón.

https://youtu.be/lmkCjeEjVbo

Un argumento que apoya que dicha representación corresponde a un teseracto corresponde al hecho de que el material de las caras permite percibir las aristas internas de la representación, tal cual como lo planteamos en el capítulo anterior con el Cuadrado A, cuando observaba la representación del cubo. Lo anterior no supone decir que para visualizar objetos de la cuarta dimensión en un espacio tridimensional baste con tener visión que "traspase" objetos tridimensionales. En vez de eso, pretendemos resaltar el acuerdo dimensional que hace que las aristas que están en el interior del cubo evoquen al observador la sensación de que son objetos que están "dentro de la cuarta dimensión". Esto sucede porque una de las 4 aristas que comparten un mismo vértice del teseracto, las cuales son perpendiculares entre sí, viola visualmente dicha perpendicularidad. Este mecanismo es análogo a la forma como representamos un sistema coordenado tridimensional en un espacio bidimensional y dibujamos uno de los vectores inclinado para indicar que está "en la tercera dimensión".

Objetos 4D en 2D

Para representar el teseracto en la segunda dimensión, Rucker (1977) propone una posible ruta en la que subyace una relación intrínseca entre objetos de diferentes dimensiones, mediante la extensión. Se toma un punto cuya existencia yace en la dimensión cero o 0D, pues este no tiene ningún atributo medible y no ocupa espacio alguno (Figura 21, a). Se dibuja una imagen del punto una unidad a la derecha y se une el punto original y la copia para determinar un segmento 1D (Figura 21, b). Luego se dibuja una imagen del segmento hacia abajo una unidad, conectando los extremos del segmento original con la imagen, produciendo así un cuadrado 2D (Figura 21, c). Ahora se dibuja una imagen del cuadrado una unidad hacia más allá del papel, uniendo los vértices respectivos obteniendo así un cubo 3D (Figura 21, d). Acá, el segmento diagonal, representa la dirección *más allá-más acá*, del papel.

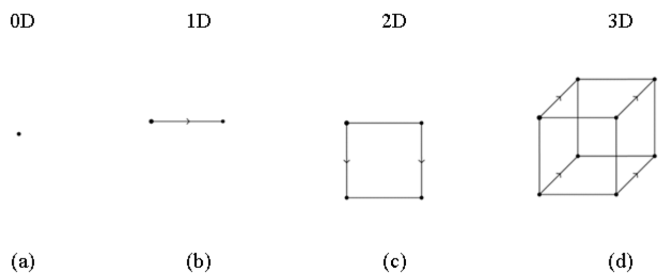


Figura 21: Posible ruta para representar objetos n-dimensionales en 2D

Tomado de Rucker (1977)

Se podría intentar representar la cuarta dimensión en el plano mediante un segmento que sea perpendicular a los segmentos que están en las direcciones que el papel permite y también a la dirección *más allá-más acá* del papel. De esta manera, se puede continuar la ruta sugerida dibujando una imagen del cubo una unidad hacia la dirección de la cuarta dimensión y uniendo los vértices respectivos, obteniendo así una representación 2D del teseracto (Figura 22).

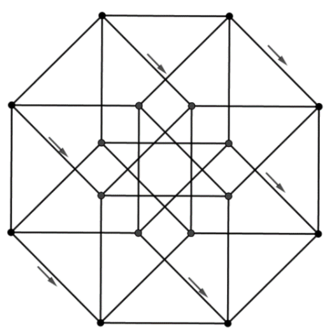


Figura 22: Representación de una teseracto en 2D.

Teniendo en cuenta que todas las imágenes que se dibujaron fueron a una unidad, independientemente de la dirección, valdría la pena preguntarse: ¿Por qué los segmentos diagonales de la Figura 21 tienen notablemente menor longitud que los demás segmentos? Y, ¿por qué los segmentos que están en dirección de la tercera y cuarta dimensión tienen igual longitud que los demás segmentos en la figura 22? De acuerdo con Gaulin y Puchalska (1987, citado en Gutiérrez, 1998), hay convenciones para representar objetos tridimensionales que incluyen decidir qué segmentos se trazan a paralelos, congruentes, etc.

Objetos 3D en 2D

El trabajo realizado por Gutiérrez (1998) se orienta a la representación de los sólidos más utilizados en clase de matemáticas o de geometría, como lo son: cubos, pirámides, prismas, multicubos, etc. Propone distintos tipos de representación de los objetos ya mencionados. Por ejemplo, para representar estructuras de cubos propone cinco tipos de representación (Figura, 23). Por supuesto que cualquier representación que se utilice tiene sus ventajas y desventajas sobre otras técnicas para representar. Cabe resaltar que algunas de estas técnicas resultan obsoletas al tratar de representar ciertos objetos porque son limitadas (un sólido con más de un nivel de profundidad mediante la representación por niveles) o no resaltan las propiedades geométricas características del objeto representado (un tetraedro mediante la proyección paralela).

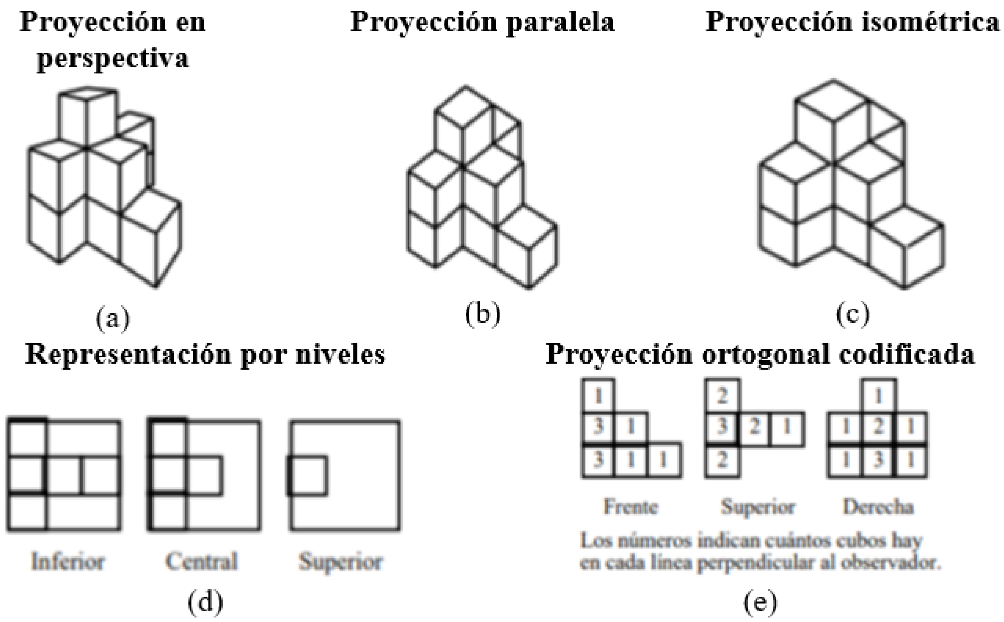


Figura 23: Representaciones propuestas por Gutiérrez.

Tomado de Gutiérrez (1998)

En la Figura 23, Gutiérrez (1998) realiza la representación de un mismo sólido usando diferentes técnicas para representarlo. Nos enfocaremos en cada una de las técnicas de representación para dilucidar los acuerdos inmersos en cada técnica.

Proyección perspectiva

Según Blanco (2009) La perspectiva es una técnica que se encarga de proyectar objetos tridimensionales sobre una superficie plana, con el objeto de recrear la ubicación relativa y la profundidad de dichos objetos. Fue desarrollada por los artistas desde el siglo XIV para dar la sensacion espacial a nivel visual. Da la ilusión óptica de profundidad lograda a través de líneas que llegan a un mismo punto. Geométricamente, estas representaciones se obtienen a partir de la intersección de un plano (el plano del dibujo) con un conjunto de líneas visuales (las rectas o rayos que unen los puntos del objeto representado con el punto desde el que se observa (denominado el punto de fuga).

Hay distintas maneras de realizar una representación en perspectiva (Figura 23, a); por ejemplo, tomando como referencia uno o más puntos de fuga. Si solo se tiene un punto de fuga la ilusión óptica de profundidad se genera a través de las líneas que llegan a un mismo punto (Figura 24).

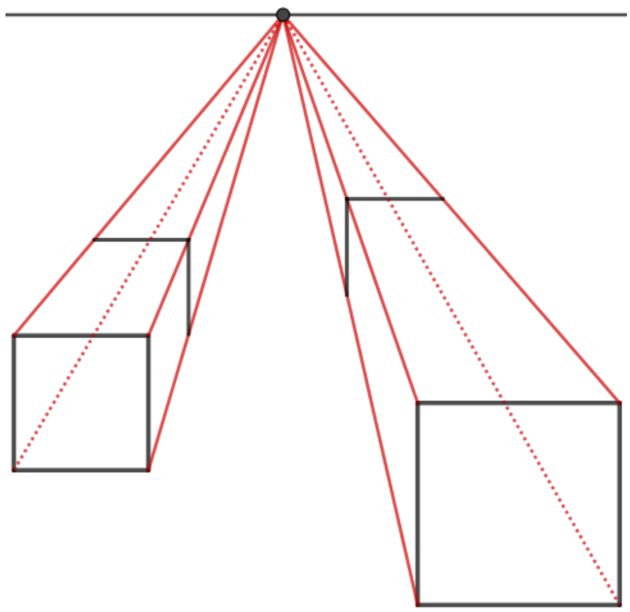


Figura 24: Perspectiva con un punto de fuga

La perspectiva con dos puntos de fuga, parte del hecho que los puntos pueden ubicarse arbitrariamente en el horizonte. Se suele usar para dibujar los mismos objetos que se representan en una perspectiva de un punto, pero cuando están rotados. Por ejemplo, al observar hacia la esquina de una casa, uno de los puntos de fuga representa un conjunto de líneas rectas paralelas, y el segundo representa otro. Vistas desde una esquina, las aristas horizontales de una de las paredes de una casa convergerían hacia un punto de fuga, mientras que las de la otra pared se dirigirían hacia el punto de fuga opuesto.(Figura 25)

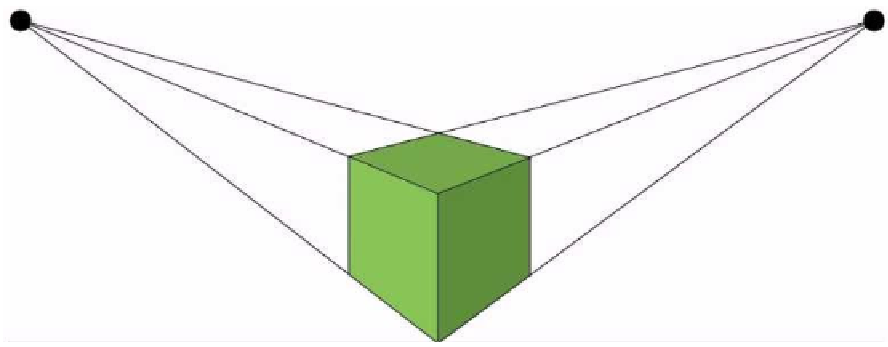


Figura 25: Perspectiva con dos puntos de fuga

Como se dijo anteriormente, la forma de representación que parece ser más fiel a la realidad y que por lo tanto es más utilizada en el diseño gráfico de cuerpos geométricos, es la representación en perspectiva. Esta forma de representación no es sencilla y así como en la historia de la humanidad llevó siglos el dominio de sus técnicas, y necesitó de la construcción de conocimientos matemáticos de la geometría proyectiva, también requiere de habilidades para su utilización por parte de los estudiantes.

Proyección paralela

La proyección paralela es un sistema para representar objetos tridimensionales en un plano. Al realizar una representación mediante esta técnica, las líneas paralelas se dibujan siempre como paralelas, independientemente de cuál sea su dirección y longitud. Lo anterior puede entenderse como un acuerdo técnico puntual que atañe a este tipo de representación.

Existen dos tipos de proyección paralela: ortogonal u oblicua. En la ortogonal se proyectan los puntos perpendicularmente con respecto al plano de proyección. La oblicua (Figura 23, b) pretende representar el objeto con las características visuales más próximas a como lo percibimos pero respetando el acuerdo mencionado anteriormente.

Este tipo de representación encuentra sus limitaciones al representar objetos que no posean paralelismo alguno entre sus partes. Además, si la representación no cuenta con un apropiado contexto que la respalde ni con la respectiva notación geométrica para objetos paralelos, no podrá comunicar al observador las características propias del objeto representado. Esta es una condición necesaria y trasversal a cualquier técnica de representación.

Proyección isométrica

Este es un caso particular de la proyección paralela, en la que, además de mantener el paralelismo entre partes paralelas, los cubos están situados de tal forma que las tres aristas que se intersecan en un determinado vértice se dibujan con la misma longitud y forman ángulos de 120° (Figura 23, c). Este es un acuerdo técnico para este tipo de representación en el que también cobra sentido el acuerdo dimensional mencionado sobre partes del objeto representado que violan visualmente una determinada propiedad geométrica.

La isometría es una de las formas de proyección que tiene la ventaja de permitir la representación a escala pero la desventaja de no reflejar la disminución aparente del tamaño (proporcional a la distancia que percibe el ojo humano). Esta desventaja permite representaciones de objetos que pueden resultar paradójicos, en los que la altura y la profundidad son difíciles de determinar, como la escalera de Penrose (Figura 26).

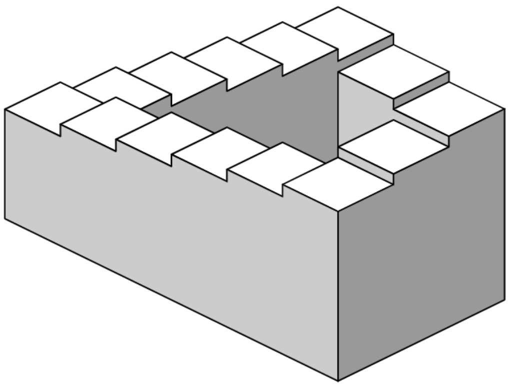


Figura 26: Escalera de Penrose

Tomado de https://bit.ly/2cMoxE2

Esta técnica provee las bases para lo que se conoce como dibujo isométrico o, en términos de Gutiérrez (1998), representación por niveles, como se verá más adelante.

Proyección ortogonal codificada

La proyección ortogonal codificada, mantiene la información sobre la estructura de los cuerpos (cantidad de elementos, posiciones relativas, etc.), pero la representación pierde su aspecto visual similar a la representación de sólidos mediante técnicas como la perspectiva, la proyección paralela o la isométrica. La proyección ortogonal añade algún tipo de código para indicar la cantidad de cubos que se encuentran en la figura dependiendo desde dónde se esté observando.

Centrando la atención en la Figura 23,(e). podemos dilucidar los códigos inmersos en la proyección ortogonal codificada. Inicialmente, se realizan las tres vistas del sólido. En estas se evidencian las posiciones relativas de los cubos y se enfatiza en que los números que aparecen en la representación indican cuántos cubos hay en cada línea perpendicular al observador.

Proyección mediante vistas del sólido

Para explicar esta representación partimos de la idea de Hawk (1991), quien afirma que con las representaciones mediante varias vistas lo que se busca es dar a entender una disposición lógica de dos o más vistas ortogonales de un objeto tridimensional. Se denominan vistas principales de un objeto, a las proyecciones ortogonales de este sobre seis planos, dispuestos en forma de cubo. Otra manera en que podemos definir las vistas es a partir de las proyecciones ortogonales de un objeto, según las distintas direcciones desde donde lo estemos observando.

Si situamos un observador según las seis direcciones indicadas por las flechas, obtenemos las seis vistas posibles de un sólido (Figura 27).

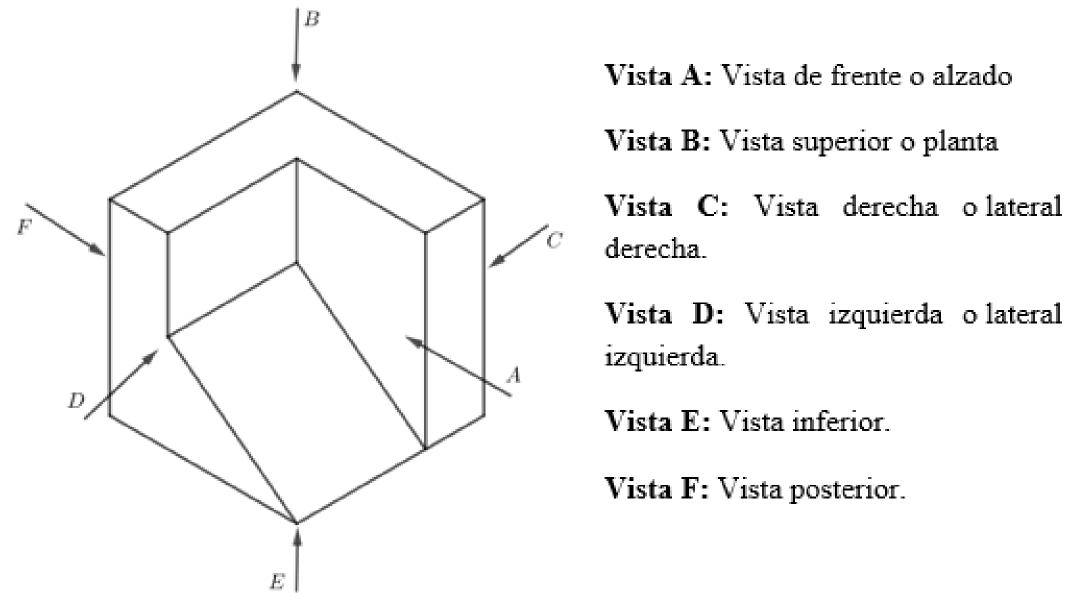


Figura 27: Vistas de un sólido

Es importante mencionar que todas las vistas están relacionadas entre sí. Como aludimos previamente, las vistas dan a entender la disposición lógica del sólido que están representando. Por lo que, la relación entre determinadas vistas tiene lugar cuando dos de estas son proyectadas sobre planos de imagen perpendiculares entre sí. ¿Qué quiere decir esto? Pues bien, inicialmente entendemos “disposición lógica” como uno de los primeros acuerdos contextuales que se tienen para representar sólidos tridimensionales en un plano. Esto nos indica que no podemos dibujar las vistas de una forma aleatoria, sino que es necesario seguir el orden que se ha estipulado para la ubicación de las vistas. De modo que, al dibujar las vistas, otra persona distinta a quien hace la representación del sólido pueda unirlas como un rompecabezas, y al verlas no solo vea vistas independientes sino que se logre una representación mental y gráfica del sólido.

Teniendo lo anterior como referencia, la idea de dimensión en este tipo de representaciones está centrada fundamentalmente en dos aspectos. El primero, en hacer una trasposición de las cualidades del espacio en donde habitan los objetos. El segundo, en traducir en representaciones bidimensionales los diferentes lugares desde donde podemos observar un determinado sólido. Así, quien observe la representación puede, paulatinamente, desarrollar su capacidad espacial mediante el ejercicio de pasar del solido a las vistas isométricas o viceversa, entendiendo la dimensión a la que pertenece el sólido y la dimensión a la que pertenece su representación.

Otro de los aspectos relevantes para la disposición de las diferentes vistas sobre el papel, es que se pueden utilizar al menos dos variantes de proyección ortogonal de igual importancia entre sí. Estas son (Figura 28):

- Método de proyección del primer diedro o también denominado método Europeo.
- Método de proyección del tercer diedro o también denominado método Americano.

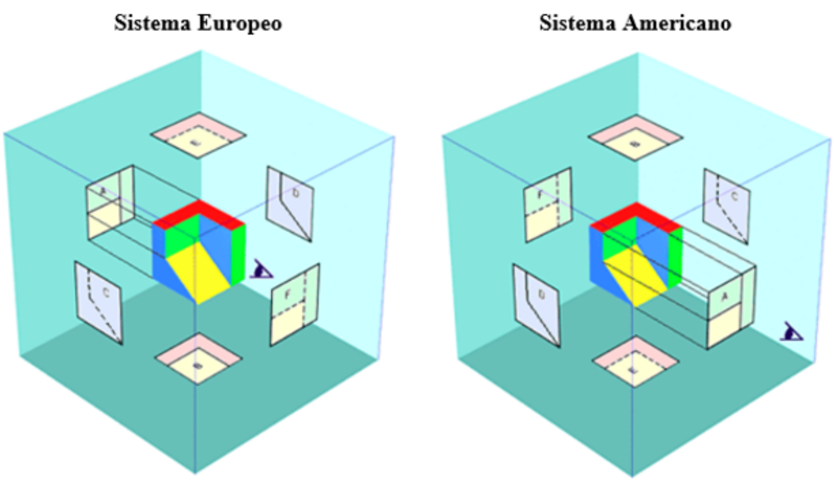


Figura 28: Sólido isométrico

http://www.dibujotecnico.com/obtencion-de-las-vistas-de-un-objeto/

En aras de ejemplificar y puntualizar las diferencias de cada uno de los métodos de proyección, vamos a usar el mismo sólido de la Figura 27 para las dos proyecciones. En ambos métodos, el sólido está dispuesto dentro de un cubo, sobre cuyas seis caras, se realizarán las correspondientes proyecciones ortogonales.

En la Figura 28 se puede evidenciar que hay un "ojo" tanto en el sistema europeo como en el sistema americano. Este se dispuso allí para puntualizar en la diferencia entre los dos sistemas. La diferencia estriba en que, mientras en el sistema europeo, el objeto se encuentra entre el observador y el plano de proyección, en el sistema americano, es el plano de proyección el que se encuentra entre el observador y el objeto.

Hasta el momento, hemos realizado las proyecciones ortogonales de cada una de las vistas del sólido sobre las seis caras de cubo respectivamente. Es por lo anterior, que el cubo recibe el nombre de cubo de proyección. Al querer plasmar en un solo plano cada una de las caras del cubo de proyección (Figura 28) las posiciones relativas de las vistas cambian su ubicación dependiendo del sistema en el que se esté trabajando. Por ejemplo, la vista principal del sólido, “vista A”, cambia su ubicación sobre las caras de cubo dependiendo de los sistemas de proyección.

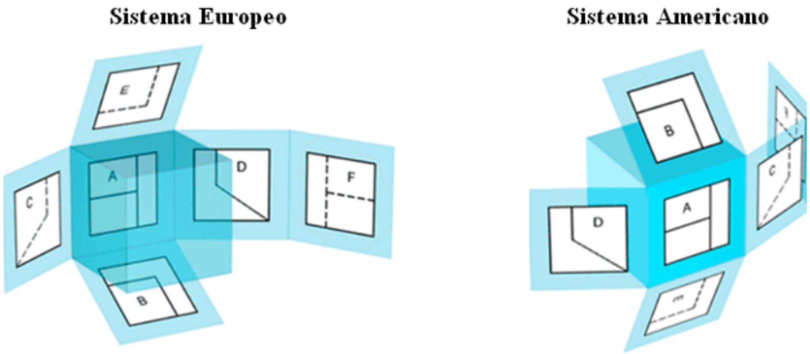


Figura 29: Desarrollo plano del cubo de proyección

http://www.dibujotecnico.com/obtencion-de-las-vistas-de-un-objeto/

A raíz de lo anterior y al plasmar cara una de las caras del cubo sobre un único plano se deriva la siguiente disposición de vistas para cada uno de los sistemas.

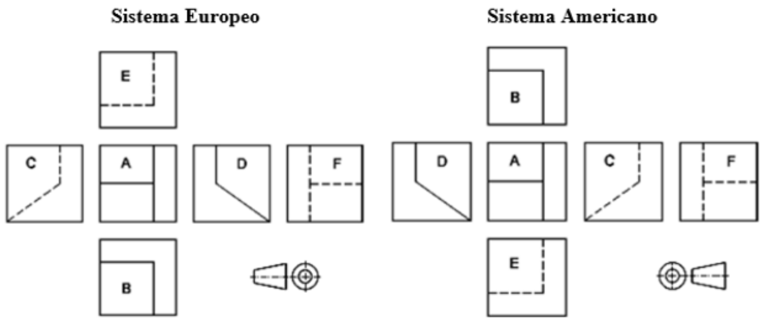


Figura 30: Vistas del sólido isométrico en el cubo de proyección

http://www.dibujotecnico.com/obtencion-de-las-vistas-de-un-objeto/

Como se puede observar en las figuras anteriores, existe una correspondencia obligada entre las diferentes vistas. Estas se relacionan de la siguiente forma:

- El alzado, la planta, la vista inferior y la vista posterior, coincidiendo en anchuras.
- El alzado, la vista lateral derecha, la vista lateral izquierda y la vista posterior, coincidiendo en alturas.
- La planta, la vista lateral izquierda, la vista lateral derecha y la vista inferior, coincidiendo en profundidad.

Ahora bien, haciendo uso de la geometría descriptiva Girón de León (1991) afirma que todo sólido tiene longitud, altura y profundidad. Por lo que la proyección en un solo plano no será suficiente, ya que allí tan solo aparecen su largo y altura (denominado plano vertical). Para que aparezca la tercera dimensión, es decir la profundidad, es necesario proyectarlo sobre otro plano (plano horizontal). Basando en lo anterior, Girón de León (1991) afirma que son tan solo tres las vistas o proyecciones fundamentales que se requieren para poder hacer la composición lógica de determinado sólido.

En la Figura 31, a. podemos observar el sólido que se está trabajando. Girón de León (1991) afirmar que tan solo son necesarias tres vistas (Figura 31, b) para que una persona que no ha visto el sólido pueda hacerse una composición mental a partir de las vistas y logré pasar de las vistas al sólido o viceversa.

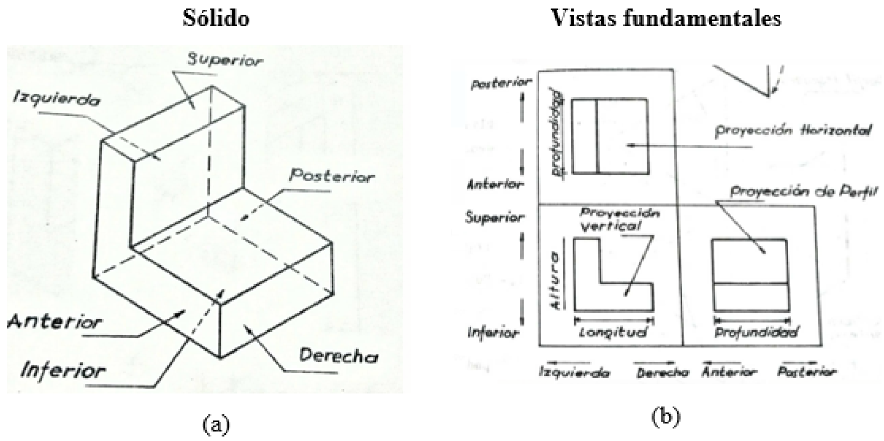


Figura 31: Proyecciones fundamentales

Tomado de Girón De León (1991)

Proyección estereográfica

Existe otra forma para representar objetos tridimensionales en el plano, mediante bases de geometría proyectiva y la representación en perspectiva: la proyección estereográfica. En esta, se proyectan puntos que pertenecen a una esfera en un plano que es tangente a la esfera. Las rectas de proyección parten de un punto llamado foco que está situado en el punto diametralmente opuesto al punto de intersección de la esfera y el plano de proyección (Figura 32). Esto implica que todos los puntos de la esfera tienen una proyección en el plano salvo el foco, el cual tiene su proyección en el infinito (Rucker, 1977).

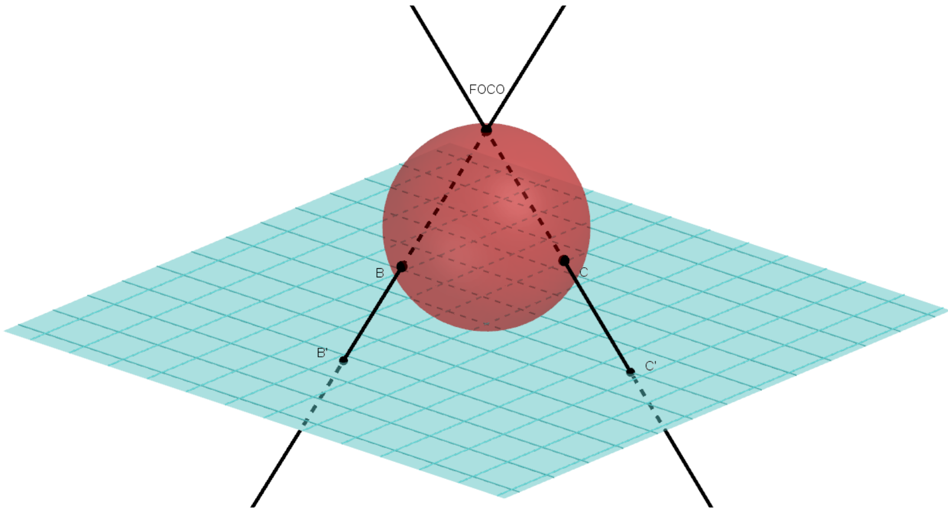


Figura 32: Proyección estereográfica.

Al circunscribir sólidos dentro de la esfera de proyección y efectuar la proyección estereográfica, se pueden obtener las respectivas representaciones estereográficas de dichos sólidos. Hay que tener en cuenta que, si se rota la esfera, el punto focal permanecerá en la misma ubicación: en el lugar diametralmente opuesto al punto de intersección de la esfera y el plano de proyección. Sin embargo, no basta con que los sólidos estén circunscritos sino que estos deben estar además "proyectados"desde el centro de la esfera hacia la esfera. Para entender mejor la idea anterior, imaginemos que inflamos tanto un sólido hasta el punto de deformarlo y volverlo similar a una pelota de fútbol. Consideremos puntualmente el sólido llamado dodecaedro, el cual es un sólido de 12 caras (Figura 33).

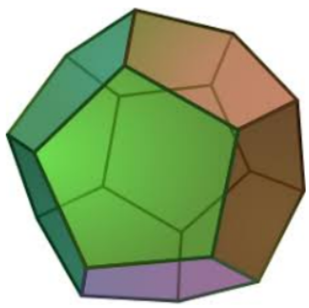


Figura 33: Dodecaedro

https://es.wikipedia.org/wiki/Dodecaedro

Para interpretar las representaciones estereográficas de un dodecaedro que mostramos a continuación (Figura 34), sugerimos al lector tener en cuenta tres aspectos importantes. Primero, el lugar desde el cual el observador percibe las representaciones está en un punto que pertenece a la recta que determina el foco y su punto diametralmente opuesto; y por supuesto, en el exterior de la esfera. Segundo, el sólido circunscrito puede rotar dentro de la esfera, causando así que se generen distintas representaciones del mismo objeto. Por último, el tercer aspecto está relacionado con la frontera de la representación. Esta frontera, aunque en la Figura 34 es rectangular, no está limitada a esta forma. En realidad, no existe ninguna forma que delimite la representación estereográfica, pese a que la circunferencia parezca la más apropiada. Esto es porque la proyección del foco yace en el infinito. Por eso, sugerimos al lector interpretar la frontera de la representaciones de la Figura 34 como una limitación netamente de forma y no como parte misma de la representación, pues en realidad su frontera debería corresponder a la proyección del foco: en el infinito. Esto último constituiría una condición fundamental para interpretar representaciones estereográficas.

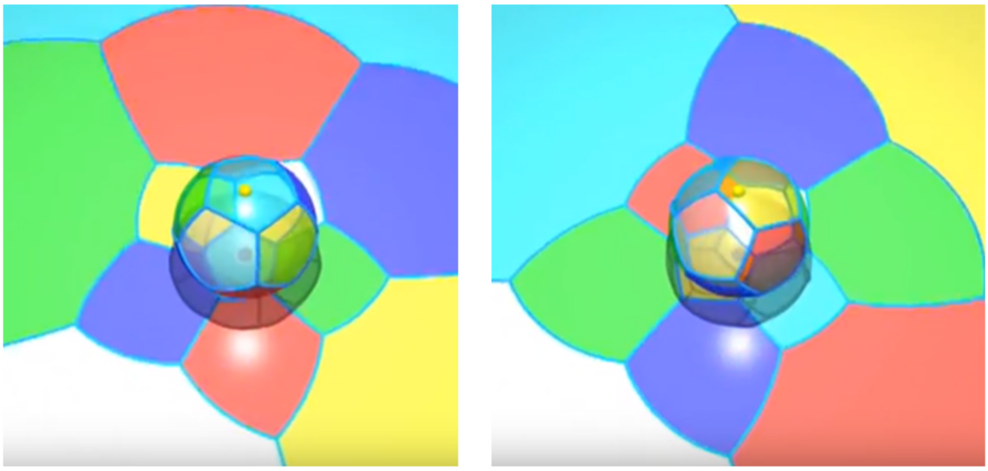


Figura 34: Dos representaciones estereográficas del dodecaedro.

https://youtu.be/6ijTDOKEhVQ

Para hacernos una idea de lo complicado que es para entes bidimensionales caracterizar objetos 3D mediante representaciones 2D, a continuación mostramos dos representaciones estereográficas de 2 sólidos, de los cuales no diremos su nombre, para que el lector experimente por sí mismo (Figura 35). La dificultad se aprecia incluso con la enorme ventaja de observar la representación desde un lugar exterior al plano bidimensional donde yace la representación. He aquí una pista: todas y cada una de las caras de los sólidos tiene un color diferente. Pruebe a contar la cantidad de colores que se aprecian en cada representación para determinar los sólidos representados.

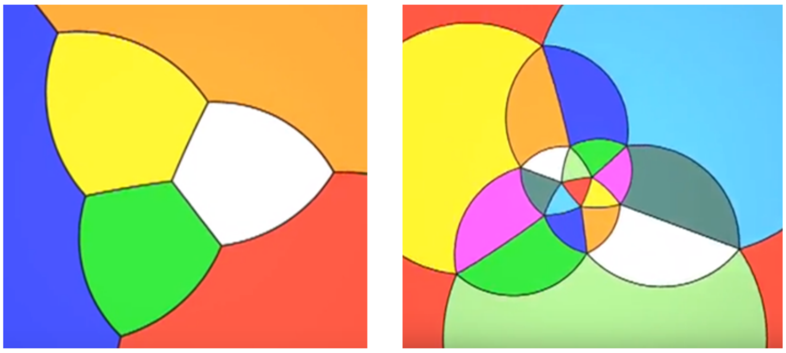


Figura 35: Representaciones estereográficas de dos sólidos.

https://youtu.be/6ijTDOKEhVQ

Como se habrá imaginado, las representaciones corresponden a un cubo (izquierda) y a un icosaedro (derecha). Sin embargo, y dotando de la rigurosidad que hemos mostrado en términos de los acuerdos, lo máximo que podemos asegurar a partir de dichas representaciones es que aluden a un sólido de 6 y 20 caras, respectivamente.

Objetos 4D, 3D y 2D en 1D

Antes de mostrar una posible forma de representar objetos 4D, 3D o 2D en un espacio dimensional 1D, es adecuado alertar al lector que resulta más complejo caracterizar las representaciones hechas que hacer las representaciones en sí. Por tanto, la siguiente forma de representar, la cual está basada en proyecciones, es complejo de interpretar para nosotros los seres tridimensionales, a quienes se nos dificulta en gran medida concebir la forma en que entes bidimensionales perciben su mundo. Ahora imagínese el aprieto que sería imaginar la forma en que perciben seres unidimensionales su entorno. Veamos de qué se trata tal forma si tratamos de representar un cubo en un espacio unidimensional. Para ello, basta con proyectar (mediante una proyección ortogonal) la representación ya hecha en un espacio unidimensional, digamos una recta (Figura 36). Lo mismo sucedería para cualquier objeto geométrico.

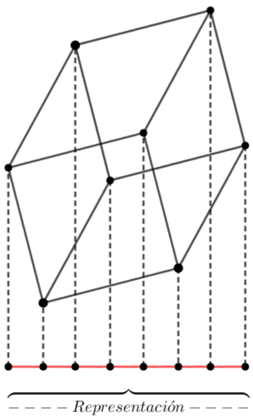


Figura 36: Representación de un cubo en un espacio unidimensional.

Resulta bastante complejo interpretar la representación unidimensional de un objeto tridimensional, pues tal representación es un segmento conformado por más segmentos que son producto de la proyección realizada.

Finalmente, faltaría representar cualquier objeto geométrico que pertenezca a una dimensión ambiental superior a 0 en un espacio 0D. Como en espacios 0D solo existen los puntos, no cabe duda de que la representación de cualquier objeto debe ser también un punto. Sin embargo, resulta aún más complejo pensar en este espacio. Quizá los espacios 0D solo admiten la existencia de entes solitarios, únicos y absolutos, pero esto ya es una cuestión filosófica que se sale de lo que pretendemos mostrar.

Así pues, hemos mostrado distintas formas de representar objetos pertenecientes a dimensiones ambientales n en espacios de dimensión ambiental inferiores a n; hacemos énfasis en los acuerdos técnicos y las condiciones que debería tener en cuenta un observador al representar un objeto y al interpretar una representación de un objeto geométrico. A continuación, resumimos los acuerdos contextuales, de notación y dimensionales que recomendamos se deberían tener en cuenta al representar y caracterizar representaciones de objetos geométricos (Tabla 2).

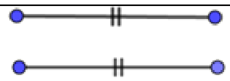
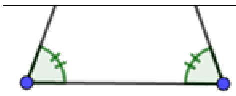
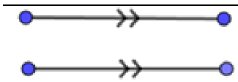
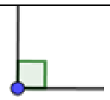
<table>
<tr><th>Acuerdos</th><th colspan="2">Descripción</th></tr>
<tr><td>Contextuales</td><td colspan="2">Conocer previamente el objeto geométrico a partir de las propiedades matemáticas que lo caracterizan. En caso de no ser así, es necesario atender al discurso o enunciado que acompaña la representación.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">De notación</td><td></td><td>Segmentos congruentes</td></tr>
<tr><td></td><td>Ángulos congruentes</td></tr>
<tr><td></td><td>Segmentos paralelos</td></tr>
<tr><td></td><td>Ángulo recto</td></tr>
<tr><td>Dimensionales</td><td colspan="2">Asumir que algunas partes del objeto representado conservan ciertas propiedades geométricas, pese a lo que visualmente se muestra en la representación, indica que dichas partes no pertenecen a la dimensión del espacio de representación sino a dimensiones ambientales superiores. En representaciones en las que se puede apreciar el objeto constituido como un todo (proyección paralela, en perspectiva o isométrica), la cantidad de segmentos constituidos por vectores independientes que comparten un mismo vértice, puede indicar la dimensión ambiental a la cual pertenece el objeto representado. En representaciones que dilucidan el objeto representado mediante partes o secciones de este, los segmentos pertenecientes a dimensiones superiores son dibujados en otro estilo (punteado, difuminado, en diferente color, etc.)</td></tr>
</table>

Tabla 2: Acuerdos contextuales, de notación y dimensionales para representar y caracterizar representaciones.

4. Conclusiones

Al realizar una indagación sobre el concepto de dimensión en matemáticas, cuyo uso se presenta intuitiva e indiscriminadamente, podemos evidenciar que aunque existan varias aproximaciones desde distintos enfoques matemáticos, sigue sin haber un consenso sobre su definición puntual. Sin embargo, al abordar la idea de dimensión desde las tres interpretaciones propuestas, es posible tener un panorama más amplio de su significado y de las limitaciones que impone a objetos matemáticos y a la existencia de posibles entes de otras dimensiones.

Considerar mundos de dimensiones superiores o inferiores a la nuestra y tratar de describir la forma en que posibles entes que habiten dichos mundos conciben su entorno, nos hace enfrentarnos a un panorama diferente, en el que tenemos que dejar de lado nuestros prejuicios dimensionales para tratar de entender algo que no está al alcance de nuestros ojos, ni de nuestros sentidos, pero sí al alcance de nuestra imaginación. Podemos seguir pensando y creando nuevos entes dimensionales, describiendo la forma en que entienden su entorno, pero tenemos claro que nunca estaremos seguros de que esto sea así, siendo esto lo que buscamos: imaginar, innovar, aprender, crear y fallar.

Consideramos como futuros maestros que la representación es un punto clave para mediar el conocimiento que se desarrolle en el aula. En tanto una representación evoque la mayor cantidad de información de la mejor manera, los estudiantes podrán interpretar y aprehender la idea que se quiere comunicar. Por esto, es importante tener en cuenta los acuerdos propuestos al momento de representar un determinado objeto ante nuestros estudiantes, pues esto facilitará el proceso de enseñanza y aprendizaje en tanto la aprehensión de información será más asequible.

Por último, creemos que es pertinente hacer un llamado a los profesionales de educación básica y media para institucionalizar y curricularizar el concepto de dimensión, pues este puede ser interpretado desde distintos enfoques matemáticos presentes a lo largo de la vida académica de los estudiantes.

Referencias

[1] Abbott, E. (1998). *Planilandia. Una novela en muchas dimensiones.* Mallorca, España: Torre De Viento.

[2] Badajoz.(2018).*Apuntes de Teoría de la Medida* Volumen 2.

[3] Blanco (2009).Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones (Tesis de Maestría). Instituto Politécnico Nacional, México.

[4] Chamorro, M. y Belmonte, J. (1991). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales.* Editorial Sintesis. Madrid.

[5] Colerus, E. (1962).*Del punto a la cuarta dimension: Una geometría para todos.* (Tr. Carreras, S.) Barcelona: LABOR (1944).

[6] Crowe, M. (1967). A history of vector analysis:*Giusto Bellavitis and his Calculus of equipollences.* University of Notre Dame Press.

[7] Duval, R. (1999). Semiosis y lenguaje en la didáctica de las matemáticas.*Funes.*

[8] García, S. (2015).*Antecedentes de los espacios vectoriales.* Disponible en: *http://blog.kleinproject.org/?p=1713& lang=es*

[9] Girón de León, G. (1991).*Geometría Descriptiva Básica.* Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

[10] Guijarro, L. (2010). *Variedades: introducción.* UAM.

[11] Gutiérrez, A. (1996).*Visualization in 3-Dimensional Geometry: In search of a Framework.* Universidad de Valencia, España.

[12] Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría especial.*Revista EMA. 3(3)*, 193-220.

[13] Guillemin, V. y Pollack, A. (1974).*Differential Topology.* American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.

[14] Hawk, M. (1991). *Geometría Descriptiva.* México, D.F, México: Interamericana de México.

[15] Hawking, S. y Mlodinow, L. (2010).*The Grand Design.* Bantam Books. EE.UU.

[16] Hershkowitz, R., Parzysz, B. Y Van Dermolen, J. (1996). Space and shape. In Bishop & others (Eds.),*International Handbook of Mathematics Education* (Part 1, pp. 161-204). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Plublishers.

[17] Lafuente, J. (2014). *Variedades diferenciables.*

[18] López, F.J. (s.f.) *Espacios topológicos* Departamento de Geometría y Topología; Universidad de Granada, España.

[19] López, J. (s.f).*Elementos de Teoría de la Medida, Análisis Funcional y Teoría de Distribuciones.* Versión online en: *http://www.ugr.es/ jllopez/Cap1-TMAFyTD.pdf*

[20] Lorenz, D. (2014).*Geometric Measure Theory.* Institute for Analysis and Algebra. TU Braunschweig. Alemania.

[21] Ospina, C. (2004).*Nueva visita a la geometría descriptiva. Explorando la manera de aprender y de enseñar.* Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

[22] Orjuela, C y Rojas, C. (2006).El concepto de dimensión más que una idea intuitiva. (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

[23] Páez, J., Orjuela, C. y Rojas, C. (2008). El concepto de dimensión: errores y dificultades. *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.*

[24] Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "Seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures.*Educational Studies in Mathematics 19*, 79-92.

[25] Peano, G. (1891). *Calcolo geometrico.* Versión online en: *https://archive.org/details/glielementidica00peangoog*

[26] Prieto, C. (2012). *Topología Básica.* Versión online en: *https://www.scribd.com/document/374191033/Carlos-Prieto-Topologia-Basica-pdf*

[27] Rucker, R. (1977).*Geometry, relativity and the fourth dimension.* New York, Estados Unidos: Dover Publications.