ANÁLISIS DE TAREAS PROPUESTAS PARA FAVORECER LA GENERALIZACIÓN EN EL AULA ESCOLAR

ESNEIDER YESITH BENAVIDES RIVERA

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ 2019

ANÁLISIS DE TAREAS PROPUESTAS PARA FAVORECER LA GENERALIZACIÓN EN EL AULA ESCOLAR

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para obtener el título de Licenciado en Matemáticas

Presentado por:
ESNEIDER YESITH BENAVIDES RIVERA
Cód. 2012140071
C.C. 1.072.466.547

Directora:
CARMEN SAMPER DE CAICEDO

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ 2019

DEDICATORIAS

A mis padres, por su apoyo incondicional, ejemplo de vida y superación.

A mi compañera de vida, por su entrega y dedicación.

A mi princesa, por ser mi motor, motivación y vida.

AGRADECIMIENTOS

A mi querida Universidad Pedagógica Nacional y todo el cuerpo docente del departamento de Matemáticas por su acompañamiento y formación.

A la profesora Carmen Samper, por su paciencia, sapiencia y asesoría.

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Análisis de tareas propuestas para favorecer la generalización en el aula escolar
Autor	Benavides Rivera, Esneider
Director	Samper de Caicedo, Carmen
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 71p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional UPN.
Palabras Claves	GENERALIZACIÓN, PATRÓN, SECUENCIA, PENSAMIENTO VARIACIONAL.

2. Descripción

Trabajo de Grado que se enmarca en el estudio de tareas de *generalización* diseñadas y aplicadas en el aula escolar, que se presentan en trabajos de grado de especialización y maestría de las universidades públicas de Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Nacional de Colombia y Universidad Distrital Francisco José de Caldas. El objetivo principal es exhibir información general de las propuestas y un análisis de dichas tareas, para que sirva como insumo y orientación para el quehacer profesional de los docentes interesados en dicho proceso como alternativa para la iniciación al álgebra.

3. Fuentes

Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Madrid: SINTESIS.

Butto, M., Delgado, J., y Bazán, A. (2018). *Procesos de generalización: Una vía de acceso al pensamiento algebraico temprano en educación básica. Horizontes Pedagógicos issn-l:0123-8264, 21* (2), 25-36. Obtenido de: https://revistas.iberoamericana.edu.co/index.php/rhpedagogicos/article/view/1269

Castro, E., Cañadas, M. y Molina, M. (2010) *El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático.* Revista UNO 54, páginas 55-67.

Luque, U. y Mena, E. (2016). *La utilidad del geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el proceso de generalización del álgebra escolar*.

Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Especialización en Educación Matemática.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985*). Routes to/ Roots of Algebra.* The Open University, Walton Hall, Milton Keynes, U.K.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares-Área Matemáticas.* Bogotá: MEN. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-89869.html

Ministerio de Educación Nacional (2003). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-116042.html

Ministerio de Educación Nacional (2003). *Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas*. Bogotá: MEN Recuperado de: http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf

Merino, E. (2012). *Patrones y Representaciones de Alumnos de 5° de Educación Primaria en una Tarea de Generalización*. Universidad de Granada, Granada España.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. PNA, 3(3), 135-156.

Murcia, J y Silva, J. (2014). *Argumentos logrados por estudiantes de grado quinto de educación básica primaria al realizar una tarea que involucra patrones y procesos de generalización.* Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Especialización en Educación Matemática

Pulgarín, J. (2015). *Generalización de patrones geométricos. Proyecto de aula para desarrollar pensamiento variacional en estudiantes de 9 –12 años.* Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Medellín, Colombia

Radford, L. (2006). *Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective*, PME-NA, Vol. 1, 2-21.

Radford, L. (2013). *En torno a tres problemas de la generalización*. En L. Rico, M. C Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), Investigaci6n en Didáctica de la Matemáticas. Homenaje a Encarnación Castro (pp.3-12). Granada, España: Editorial Comares.

4. Contenidos

El presente trabajo se estructura en cinco partes. En la primera se encuentran la justificación y los objetivos que sustentan la propuesta; en la segunda, se expone el marco de referencia en torno al proceso de generalización, así como su papel en el aula escolar. De este provienen las ideas que permitieron determinar las categorías para analizar las tareas sobre generalización. En la tercera parte se presenta la metodología que se implementó en la recopilación y selección de trabajos de posgrado, así como las categorías de análisis que se usaron para el estudio de las tareas. Ese análisis se presenta en la cuarta parte. Finalmente, en la quinta parte se encuentran conclusiones y recomendaciones respecto a las propuestas encontradas, en lo relacionado al proceso de generalización, el alcance de los objetivos de la presente propuesta, y los aportes del proceso de desarrollo de este trabajo a mi práctica profesional docente.

5. Metodología

Para el desarrollo de este trabajo, inicialmente se realiza una búsqueda de tesis en los repositorios de la Universidad Nacional de Colombia, Universidad Pedagógica Nacional, y Universidad Distrital Francisco José de Caldas que en el título tuvieran las palabras “generalización, patrón o secuencia”. Se lee el RAE, para confirmar si el trabajo cumple con las siguientes características:

- Ser un trabajo de Especialización o Maestría.
- Ser una propuesta de enseñanza de matemáticas para Básica Primaria, Secundaria o Media.
- Tener referentes teóricos sobre la generalización.

Posteriormente, se hace una lectura detallada del marco teórico, para conocer las referencias en torno al proceso de generalización y su relevancia en el documento. Si dicho proceso es central, se selecciona el documento para su análisis; de lo contrario, se descarta.
Para el análisis, en un primer momento, se expone la información general del trabajo de grado y luego lo correspondiente a la tarea propuesta, de acuerdo con unas *categorías de análisis;* además, se enuncian observaciones y/o recomendaciones respecto a la pertinencia de la misma (si es necesario).

6. Conclusiones

A continuación, se presentan las conclusiones más importantes obtenidas:

- Todas las tareas propuestas ofrecen la posibilidad de hacer una representación gráfica, apoyo necesario para reconocer cómo varían las configuraciones de una posición a otra. Ello, más el uso de tablas en las que se consignan los valores, parece ayudar a expresar el cambio de un término a otro de manera aritmética, para establecer una generalización aritmética.
- Durante el proceso de generalización, como lo recomiendan los investigadores, inicialmente se deben encontrar los primeros términos, ya que se pueden representar gráficamente sin problema. Así, se "ve" cómo cambia un término respecto al anterior. Luego, se debe solicitar que determinen el valor de un término no consecutivo a los anteriores, para impulsar la identificación de regularidades y formular conjeturas. Sin embargo, se genera una inquietud en cuanto a cuál es el momento oportuno para dar ese "salto" a un término más alejado. Es decir, no hay claridad cuándo ni cuánto se debe avanzar de un término a otro.
- Durante los análisis, se logró identificar que la propuesta de Castro et al. (2010) incluye las etapas de Mason et al. (1985) y Castro et al. (2010). Lo que estos últimos proponen, podría usarse como directriz para diseñar problemas de generalización. Se destaca, además, que como nos referimos a tareas para aplicarse en el aula escolar, la etapa correspondiente a la *demostración* podría omitirse debido a su grado de rigurosidad y formalismo.
- Haber establecido el esquema de análisis de propuestas, me permitió identificar con claridad la estructura que los problemas de generalización deben tener. Considero que las categorías de análisis que establecí para el análisis de las tareas es una buena guía para profesores que van a diseñar o usar problemas de este tipo. Los referentes teóricos que se debe tener en cuenta son los siguientes:
    - ✓ Estratos de generalidad (Radford, 2006).
    - ✓ Tipos de generalización (Radford, 2013).
    - ✓ Fases del razonamiento inductivo (Castro et al.,2010).
    - ✓ Recomendaciones y orientaciones expuestas en la documentación nacional colombiana (Lineamientos, Estándares y DBA de matemáticas).
- Según se evidenció en los análisis expuestos en el presente trabajo, cuando se promueven tareas de generalización en el aula, también se puede propender por el fortalecimiento de otros procesos como la argumentación y visualización.
- Se ratifica que el uso de tareas de generalización es un buen camino para la iniciación al algebra escolar. Abordar la generalidad desde casos numéricos con representaciones geométricas, puede ser el camino para la introducción de la variable ya que tendrá más sentido, pues la interpretación de la letra ya no estará ligada a un valor específico (generalmente asociado al orden lexicográfico), sino a una forma de representar el término general.

Elaborado por:	Benavides Rivera, Esneider
Revisado por:	Samper de Caicedo, Carmen

Fecha de elaboración del Resumen:	29	08	2019

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: ***"Análisis de tareas propuestas para favorecer la generalización en el aula escolar"***, elaborado por el estudiante:

Esneider Yesith Benavides Rivera código 2012140071 y cédula 1072466547

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **43** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna X Meritoria ___ Laureada ___

En constancia se firma a los 19 días del mes de septiembre de 2019.

Director del Trabajo: Profesora Carmen Samper de Caicedo
CARMEN INÉS SAMPER DE CAICEDO

Jurado:
Profesor Felipe Fernández
FELIPE FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE DIAGRAMAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIÓN

1. INTRODUCCIÓN

Preocupados por las dificultades que el aprendizaje del álgebra ocasiona, muchos investigadores han dedicado esfuerzos para presentar formas de abordar el álgebra en el sistema escolar. Butto, Delgado y Bazán (2018) enuncian cuatro acercamientos a la enseñanza del álgebra escolar:

- La modelización de situaciones matemáticas y de situaciones concretas.
- El estudio de situaciones funcionales.
- La resolución de problemas y ecuaciones.
- La generalización de patrones numéricos y geométricos, y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas.

En este último se enfocará el presente trabajo.

El proceso de generalización consiste en descubrir un patrón o regla a partir de una secuencia de objetos, que pueden ser numéricos o geométricos. "Las investigaciones al respecto muestran que un niño puede comprender una regla, aun cuando no pueda expresarla en lo que llamamos un lenguaje algebraico; sin embargo, es capaz de construir una tabla y extrapolar o interpolar correspondencias". (Butto et al., 2018, p.30).

Teniendo en cuenta las ideas anteriores y el interés particular del autor frente a dicho proceso, se decidió consultar propuestas didácticas para el aula de educación básica que hayan sido adaptadas, diseñadas y aplicadas por estudiantes de posgrado. La intención era analizar las tareas expuestas, para ofrecer al lector información general del trabajo de grado y un análisis en torno al proceso en cuestión, tomando como referente las ideas de investigadores sobresalientes en el tema.

El presente trabajo se estructura en cinco partes. En la primera se encuentran la justificación y los objetivos que sustentan la propuesta; en la segunda, se expone el marco de referencia en torno al proceso de generalización, así como su papel en el aula escolar. De este provienen las ideas que permitieron determinar las categorías para analizar las tareas sobre generalización. En la tercera parte se presenta la metodología que se implementó en la recopilación y selección de trabajos de posgrado, así como las categorías de análisis que se usaron para el estudio de las tareas. Ese análisis se presenta en la cuarta parte. Finalmente, en la quinta parte se encuentran conclusiones y recomendaciones respecto a las propuestas encontradas, en lo relacionado al proceso de generalización, el alcance de los objetivos de la presente propuesta, y los aportes del proceso de desarrollo de este trabajo a mi práctica profesional docente.

2. JUSTIFICACIÓN

Numerosas investigaciones promueven la integración del álgebra en el currículo de educación primaria en lo que se denomina *Early-Algebra* (Molina, 2009). Una propuesta para la iniciación del álgebra desde los primeros años de educación escolar es favorecer en el aula la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas. Para ello, de acuerdo con Blanton y Kaput (2005), se recomienda un ambiente escolar en el que se propicie que los alumnos exploren, modelen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo.

Como docente de un colegio público, busco seguir las orientaciones dispuestas en documentos nacionales en cuanto a la reestructuración curricular en matemáticas (como los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos en Matemáticas y Derechos Básicos de Aprendizaje). Además, teniendo en cuenta que el proceso de *generalización* es uno de los caminos de acercamiento a la enseñanza del álgebra, mi interés particular es adquirir destreza para diseñar buenas tareas que favorezcan esa aproximación. Por ello, propongo este trabajo que se enmarca en el estudio de tareas de *generalización*, diseñadas y aplicadas en el aula escolar, que se exhiben en trabajos de grado de especialización y maestría de las universidades públicas de Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Nacional de Colombia y Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Escogí este camino debido a que son propuestas evaluadas, que muy posiblemente fueron realizadas por docentes en ejercicio. El objetivo principal es presentar información general de las propuestas y un análisis de las tareas de generalización propuestas, para que sirva de insumo y orientación para el quehacer profesional de los docentes interesados en dicho proceso como alternativa para la iniciación al álgebra.

3. OBJETIVOS

A continuación, se exponen los objetivos propuestos para este estudio.

3.1 OBJETIVO GENERAL

Reconocer y describir las etapas de generalización favorecidas por tareas presentadas en propuestas de enseñanza aplicadas en el aula escolar.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Seleccionar trabajos de grado realizados en universidades públicas de Bogotá, cuya temática está asociada a la generalización en el aula escolar.
- Determinar el marco teórico común que fundamenta el diseño de las tareas sobre generalización, propuestas en los diferentes trabajos de grado.
- Establecer categorías para realizar un análisis del proceso de generalización, que favorecen tareas aplicadas en el aula escolar.
- Proponer unas orientaciones para el quehacer docente en torno al proceso de generalización, a partir del análisis de las tareas presentado.

4. MARCO DE REFERENCIA

A continuación, se presentan los referentes teóricos en torno al proceso de generalización.

4.1 LA GENERALIZACIÓN

La generalización es una actividad que no es exclusiva de las matemáticas. Dörfler (1991) señala que, tanto en la vida cotidiana como en el pensamiento científico, las generalizaciones son de gran importancia, ya sea en la construcción de conceptos o proposiciones como en la generación de ideas, hipótesis o argumentaciones. Así mismo, la Secretaría de Educación de Antioquia (2006) afirma que la tarea permanente a la que se enfrentan las personas en su intento por clasificar objetos y tomar decisiones, a partir de la observación de una serie de sucesos que se han repetido, es una manera de generalizar.

Específicamente, en el contexto de las matemáticas, Villa (2006) se refiere a *generalizar* como un proceso que busca expresar que cierta propiedad se cumple para todos los elementos de un conjunto determinado. Dicho proceso consiste en, a partir del estudio de algunos elementos del conjunto, reconocer una o más propiedades especiales en ellos, y estudiar si todos los demás elementos del conjunto tienen dicha característica. En el caso afirmativo, se establece una conjetura de carácter general, y se procede a demostrar que la propiedad la cumplen todos los elementos del conjunto.

4.1.1 Expresiones de generalidad

Radford (2006) reconoce tres estratos de generalidad, caracterizados por los medios de expresión usados por los sujetos en su actividad, incluyendo movimientos, gestos y lenguaje natural. Para explicar cada uno, se expone el siguiente ejemplo, donde se debe establecer una expresión general que indique el número de puntos de cada término:

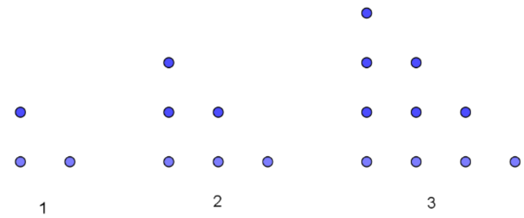


Figura 1. Representación geométrica en forma de puntos (Tomada de Azarquiel, 1993).

● *Generalización factual:* se refiere a los gestos, los movimientos y las actividades perceptuales del individuo.

Por ejemplo, el individuo señala con su mirada, su dedo o lápiz, y dice cosas como “aquí” o “este punto”, “este espacio”, etc.

● *Generalización contextual:* en este tipo de generalización no se hace uso de gestos; estos últimos son reemplazados por el uso de palabras clave.

Por ejemplo, el individuo usa expresiones como “es un triángulo” o “se puede completar un rectángulo”, “puedo repetir la figura y luego dividir entre dos”, etc.

● *Generalización simbólica:* el cambio importante que se presenta entre la generalización contextual y este tipo de generalización es que se hace un cambio de las frases clave por símbolos.

Por ejemplo, el individuo cambia las expresiones a las que se refería en la generalización contextual por expresiones simbólicas que expresen la misma idea, tales como "$1 + 2 + 3 + \cdots +$n” o “$(n + 1)(n + 2)/2$” donde n es el número de caso o término.

4.1.2 Etapas o fases de la Generalización

Desde la década de los ochenta, Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985*)* postulan que el proceso de generalización de la propiedad común de una secuencia de números o de configuraciones geométricos, desde el punto de vista didáctico, requiere que se pase por las siguientes etapas:

I. **Ver:** realizar un proceso mental, identificando un patrón o una relación. Las características comunes de los elementos pueden o no ser perceptibles a simple vista.

En esta etapa es necesario que los estudiantes se enfoquen en los primeros elementos de la secuencia e intenten encontrar el término que sigue.

II. **Decir- Expresar:** enunciar la propiedad común en lenguaje natural; esto permite decantar y puntualizar la relación que se encuentra, para luego poder comunicarla de manera precisa.

III. **Registrar:** expresar la propiedad, como conjetura, usando dibujos, dibujos apoyados con palabras, la mayor parte palabras y algunos símbolos, o la mayor parte símbolos con algunas palabras.

IV. **Verificar:** probar la conjetura con elementos específicos para comprobar si la regla es correcta; es necesario buscar relaciones entre diferentes expresiones, y explicaciones de por qué funciona el patrón hallado, para justificar la validez de la conjetura.

Debido a que el contexto de los documentos escogidos para analizar en este trabajo de grado es el aula escolar, las ideas respecto al proceso de generalización de Azarquiel[1] (1993) son importantes. Ellos complementan la propuesta de Mason et al. (1985), en lo concerniente a las primeras tres etapas.

- **Ver la regularidad:** se trata de distinguir lo que es propio de cada situación y lo que es común a todas ellas en busca de propiedades generales.

  Los investigadores afirman que los problemas que tienen como fin la percepción de regularidades en conjuntos de configuraciones geométricas y en conjuntos de números son, en parte, distintos. Por ejemplo, en los primeros es mucho más fácil "manipular" la información, reordenando, comparando y recordando configuraciones similares. De esta forma se posibilita poner en práctica habilidades de visualización y organización espacial. En las secuencias numéricas es más difícil extraer información de cada elemento, pues esta se presenta decantada y no se dispone de ayuda visual. Estas secuencias exigen razonamiento numérico pues se requiere percibir una ley o regla numérica de formación.

[1] El Grupo Azarquiel de Matemáticas es un grupo de profesores españoles que, a lo largo de muchos años, ha realizado diversos trabajos de investigación y ha publicado numerosos libros sobre la Enseñanza de las Matemáticas.

Este trabajo, aunque más abstracto, permite aprovechar la experiencia con números y sus propiedades.

- **Describir de manera verbal lo que ocurre:** se considera como un intento de describir la regularidad percibida.

  Con la expresión oral se trata de comunicar lo que se ha visto. Esta descripción admite distintos grados de precisión y puede centrarse en diversas características y formas de ver el modelo. Los investigadores recomiendan el trabajo en pequeños grupos pues facilita el intercambio de ideas. La comunicación con otros propicia la comprobación conjunta de conjeturas, la reformulación de hipótesis y el acercamiento a soluciones más precisas.

- **Escribir de manera concisa lo que sucede***:* se refiere a la expresión escrita, el registro de palabras e ideas y, en últimas (y más difícil), la expresión simbólica de la generalidad (aunque esta última es sólo una forma de registro).

  Este tipo de expresión reduce la ambigüedad, siendo más fácil de analizar y discutir, permitiendo que sea comprendida por más personas. Los investigadores recomiendan que, cuando un estudiante trata de escribir la generalización, se le impulse para que utilice palabras, dibujos, símbolos propios, generales y combinación de todos ellos. Cuando sea capaz de usar expresiones simbólicas, se le debe invitar a traducirlas con palabras para enriquecer la expresión y reforzar el significado de los símbolos.

El grupo Azarquiel (1993), además, recomienda tener cuidado con el uso incorrecto o *abusivo* de la generalización. Ellos se refieren a la **Generalización Abusiva** cuando se intenta adaptar reglas o propiedades a una situación distinta a aquella en las que se usan habitualmente, extendiendo su aplicación sin comprobar su validez en la nueva situación. Es decir, que se generaliza una propiedad, transfiriéndola de un caso particular válido a otro que no lo es. Los autores presentan un ejemplo claro: la estructura $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ se extiende fácilmente al caso de la suma $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ de un modo inconsciente y con seguridad. Para este tipo de situaciones, Azarquiel recomienda una forma de abordar estos errores: el planteamiento de una situación con valores concretos para las variables, para evidenciar la falta de consistencia de la propiedad al hacer los cálculos.

Castro et al. (2010) reconocen a la generalización como un componente importante del razonamiento inductivo. Estos autores, basados en las ideas de Pólya (1945) y teniendo en cuenta a Mason et al. (1985) y Azarquiel (1993), proponen un modelo o fases mucho más detalladas que las anteriores, por lo que serán otro referente. Dichas fases son:

I. **Trabajo con casos particulares (Fase I):** Analizar casos concretos o ejemplos para iniciar el proceso de generalización. Deben ser casos sencillos y fácilmente observables.
II. **Organización de casos particulares (Fase II):** Disponer los datos obtenidos, ya sea en una tabla, en filas y columnas, con algún orden, para que sea más fácil percibir patrones.
III. **Identificación de patrones (Fase III):** Reconocer lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones, y que se prevé puede volver a repetirse.
IV. **Formulación de conjeturas (Fase IV):** Enunciar una proposición que se supone verdadera, pero que no ha sido sometida a verificación o exploración. Dicha exploración puede dar como resultado su aceptación o su rechazo. Si se presenta un ejemplo para el que la conjetura no es válida, esta se debe rechazar.
V. **Justificación de las conjeturas (Fase V):** Proveer razones con la intención de convencer a otros o a uno mismo que la afirmación es verdadera.
VI. **Generalización (Fase VI):** Expresar la conjetura de tal forma que se refiera a todos los casos de una clase determinada; esto es, presentar una expresión analítica de la regla.
VII. **Demostración (Fase VII):** Presentar una validación formal de la conjetura, usando teoremas propios de la disciplina en la que se enmarca la secuencia, ya sea numérica o geométrica.

A continuación, se presenta la relación de las fases de Castro et al. (2010) con las de Mason et al. (1985) y Azarquiel (1993):

Tabla 1. Relación de las fases de Castro et al. (2010)) con las de Mason et al. (1985) y Azarquiel (1993).

Castro, Cañadas y Molina	**Mason**	**Azarquiel**
Fases I, II y III	Ver	Ver
Fase IV	Decir	Describir
Fase V y VI	Registrar	Escribir
Fase VII	Verificar	-------

4.1.3 Tipos de generalización

La generalización de la "característica común" (que puede ser una o varias) corresponde a lo que, según Radford (2013), Peirce define como una *abducción*. Radford afirma que, a partir de la *abducción*, la propiedad común puede ser expresada aritmética o algebraicamente. Esto lo ilustra con la siguiente secuencia figural (Figura 2):

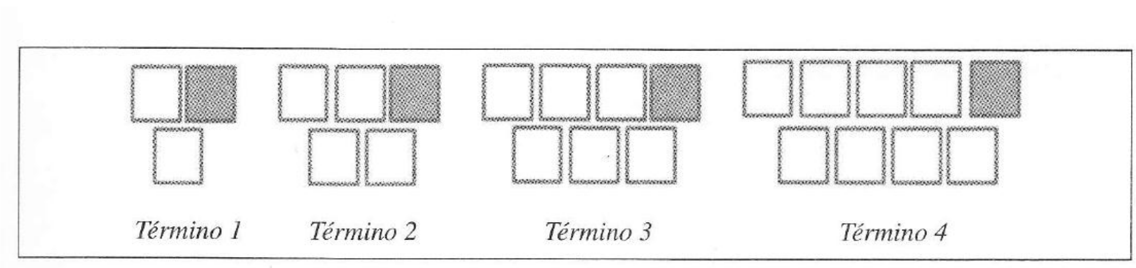


Figura 2. Secuencia figural (Tomada de Radford, 2013)

La abducción puede ser usada simplemente para expresar cómo se pasa de un término al otro. En el ejemplo, cuando los estudiantes indican que para pasar de un término al siguiente hay que añadir dos cuadrados, la generalización es aritmética. No deducen una expresión directa que permita calcular el número de cuadrados de cualquier término de la secuencia. En este caso, la abducción dio lugar a un procedimiento, pero no a una expresión directa; en otras palabras, no a una fórmula.

Para que la generalización sea algebraica, se requiere que la abducción tenga como intención expresar la característica común. Puede ser expresada de manera analítica; es decir, la abducción lleva a deducir una fórmula que permite encontrar cualquier término, que, para el caso, podría ser $2n + 1$ siendo n el número correspondiente al término.

4.1.4 Argumentación

En las ideas de los autores anteriores, se manifiesta de manera implícita la relación entre el razonamiento inductivo y la generalización. Además, algunos de ellos incluyen la justificación ligada a dicho proceso. Por ello, se considera importante destacar y mencionar lo relacionado con los argumentos. Se toma como referente las ideas de Toulmin (2007), quien se refiere a los *argumentos* como: "Los aspectos básicos (fundamentos o razones en los que se apoya, datos, hechos, pruebas, consideraciones, componentes) de los que depende el valor de una afirmación.” (p. 30). La función primaria de los argumentos es justificar, en tanto son utilizados para defender y apoyar afirmaciones.

Toulmin expone que hay tres elementos fundamentales en cada argumento: la *aserción o conclusión* (A), es aquella afirmación que se va a defender o debatir en forma oral o escrita; *los datos* (D) aportan la información en la que la aserción se basa; y la *garantía* (G), es la que justifica el uso de los datos como soporte para asegurar la aserción.

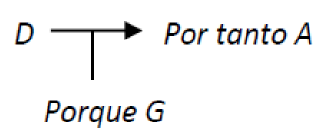


Figura 3. Modelo básico de Toulmin (Tomado de Toulmin, 2007).

4.1.5 La generalización en el aula escolar

En los documentos curriculares de matemáticas (Lineamientos, 1998; Estándares Básicos, 2003; Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas (DBA), 2016), el Ministerio de Educación Nacional de Colombia propone elementos teóricos y metodológicos sobre la estructuración curricular de la educación matemática esperada; en ellos se considera importante el proceso de generalizar en el aula. Por ejemplo, en MEN (2003) se afirma que las actividades de generalización preparan a los estudiantes para la construcción de expresiones algebraicas. Esta resulta de la formulación verbal de una regla recursiva que muestra cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes, y el hallazgo de un patrón que guíe más o menos directamente a la expresión algebraica. En las recomendaciones del documento de Lineamientos, se propone una restructuración conceptual y metodológica del álgebra escolar, enfatizada en procesos en los que se destaca el de *generalizar* como uno de los ejes fundamentales del razonamiento inductivo; allí se enuncia: "respecto al álgebra, se considera en un primer momento generalizar patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio" (p.17). Así mismo, en el documento de Estándares se reafirma la importancia de este proceso y se sostiene que el desarrollo del pensamiento variacional se puede potenciar desde los primeros años de la educación básica, centrado en el estudio de regularidades y patrones. Esto está en consonancia con las ideas de Mason et al. (1985, citado por Piedra, s.f.), quien afirma que los estudiantes, desde su ingreso en la escuela, pueden detectar patrones y expresar su generalidad. Además, asegura que tareas en las que se busca encontrar una propiedad matemática, usando sus capacidades naturales, hace que los estudiantes disfruten de esta actividad matemática.

Algunas actividades que favorecen y permiten realizar el proceso de generalización en el aula escolar son las que involucran diferentes secuencias y patrones (aritméticos y figurales). Se quiere aclarar que estos no son los únicos momentos ni medios para generalizar. Por ejemplo, cuando un niño infiere, producto tal vez de su experiencia, que la suma de dos números pares es par, también está generalizando.

Basado en los documentos nacionales, a continuación, se citan los Estándares y DBA de primero a undécimo grado relacionados con el proceso de generalización (con una breve justificación o explicación):

Tabla 2. Estándares relacionados con el proceso de generalización

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas		
Grupos de grados	**Estándar**	**Comentario**

1º a 3º	Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.).	A partir de la exploración y manipulación, se establecen regularidades. Por ejemplo, al multiplicar dos números y dividir (en la calculadora) un número entre el otro, se puede concluir que la multiplicación y división son operaciones inversas. Se relaciona con la etapa I propuesta por Mason et al. (1985), etapa I de Azarquiel (1993) y la etapa III de Castro et al.(2010)
	Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).	Las regularidades y patrones están íntimamente relacionados con el proceso de generalización. Corresponde a las etapas I y II propuesta por Mason et al. (1985), etapas I y II de Azarquiel (1993) y las etapas I, II, III y IV de Castro et al.(2010).
	Construyo secuencias numéricas y geométricas, utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.	Proponer secuencias es una aplicación de la generalización. Por ejemplo, al reconocer que si se suma a un número par el número 2 da como resultado otro número par, el estudiante puede proponer la secuencia: *2, 4, 6, 8…* Corresponde a las etapas I y II propuesta por Mason et al. (1985), etapas I y II de Azarquiel (1993) y las etapas I, II, III y IV de Castro et al. (2010)
	Explico –desde mi experiencia– la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos.	Se está justificando algo que se tiene como conjetura, a partir de la experiencia. Por ejemplo, cuando un niño ve el cielo muy nublado y gris, puede afirmar que está a punto de llover. Aunque se relaciona más con el pensamiento aleatorio, no se descarta que en alguna de las propuestas se aborde la generalización desde dicho enfoque. (Fase II, IV y V de Castro et al. (2010), Fase II de Azarquiel (1993) y Fase II de Mason et al. (1985)).
4º a 5º	Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.	Para justificar regularidades, previamente se necesita encontrar alguna generalidad o regla. Se relaciona con la Fase V propuesta por Castro et al.(2010), Fase III de Mason et al. (1985) y Fase III de Azarquiel (1993).
	Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.	Conjeturar implica haber establecido una regla general, a partir de casos o ejemplos. Aunque se relaciona más con el pensamiento aleatorio, no se descarta que en alguna de las propuestas se aborde la generalización desde dicho enfoque. Se relaciona con la Fase IV propuesta por Castro et al. (2010).
	Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.	Esto equivale a determinar regularidades y establecer generalizaciones. (Fase IV de Castro et al. (2010), Fase II de Mason et al. (1985) y Fase II de Azarquiel (1993)).
6º a 7º	Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.	Ejemplo de esto es cuando se usa la propiedad conmutativa de la adición, que se ha generalizado para ser aplicable a más de dos números. En el momento de pagar varios productos que se han comprado, y verificar que no importa cuál pague primero, la deuda inicial siempre va a ser la misma. Se relaciona con la Fase VI propuesta por Castro et al. (2010).

	Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores.	Conjeturar implica haber establecido una regla general a partir de casos o ejemplos. Se relaciona con la fase IV propuesta por Castro et al. (2010).
8º a 9º	Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.	Conjeturar implica haber establecido una regla general a partir de casos o ejemplos. Se relaciona con las Fases IV y V propuesta por Castro et al. (2010), Fase II de Mason et al. (1985) y Fase II de Azarquiel (1993).
	Generalizo procedimientos de cálculo válidos, para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.	Generalizar es reconocer las características de las regiones para decidir qué procedimientos se pueden usar para encontrar el área. Se relaciona con la Fase VI por Castro et al. (2010), Fase III de Mason et al. (1985) y Fase III de Azarquiel (1993).
	Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.	Inducir es reconocer generalidad. (Fases I, II, III, IV, V y VI de Castro et al. (2010), Fases I, II y III de Mason et al. (1985) y Fases I, II y III de Azarquiel (1993).
10º a 11º	Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales.	Usar reglas, que son generalizaciones, como garantías para justificar determinada situación o propiedad. (Fase V de Castro et al. (2010), Fase II de Mason et al. (1985) y Fase II de Azarquiel (1993).

Tabla 3. DBA relacionados con el proceso de generalización

Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas		
Grados[2]	**DBA**	**Comentario**
1º	#8 Describe cualitativamente situaciones para identificar el cambio y la variación usando gestos, dibujos, diagramas, medios gráficos y simbólicos.	Tiene que ver con la Fase II propuesta por Azarquiel (1993), Fase II de Mason et al. (1985) y Fases III y IV de Castro et al. (2010), pues hay distintos modos de descripción.
2º	#8 Propone e identifica patrones y utiliza propiedades de los números y de las operaciones para calcular valores desconocidos en expresiones aritméticas. #9 Opera sobre secuencias numéricas para encontrar números u operaciones faltantes, y utiliza las propiedades de las operaciones en contextos escolares o extraescolares.	Determinar la regularidad que se mantiene en una secuencia numérica o figural, es generalizar. Están en consonancia con las Fases I y II propuestas por Azarquiel (1993), Fases II y III de Mason et al. (1985) y Fases III, IV y V de Castro et al. (2010), pues hay distintos modos de descripción. Usar propiedades de las operaciones es reconocer que son generales, que no dependen de los números específicos.
3º	#8 Describe y representa los aspectos que cambian y permanecen constantes en secuencias y en otras situaciones de variación. #9 Argumenta sobre situaciones numéricas, geométricas y enunciados verbales en los que aparecen datos desconocidos para definir sus posibles valores según el contexto.	Reconocer invariantes y variantes lleva a generalizar. Usar lo generalizado (extendiendo la generalidad) como argumento para hallar términos desconocidos en una secuencia. Se relaciona con las Fases I y II propuestas por Azarquiel (1993), Fases II y III de Mason et al.

[2] Los grados 7º, 10º y 11º no se presentan, ya que en los DBA establecidos no se encontró un derecho relacionado con el proceso de generalizar.

		(1985) y Fases III, IV y V de Castro et al. (2010), pues hay distintos modos de descripción.
4º	#8 Identifica, documenta e interpreta variaciones de dependencia entre cantidades en diferentes fenómenos (en las matemáticas y en otras ciencias) y los representa por medio de gráficas. #9 Identifica patrones en secuencias (aditivas o multiplicativas) y los utiliza para establecer generalizaciones aritméticas o algebraicas.	Identificar variaciones de dependencia y poder expresarlas, lleva a generalizar; se relaciona con las Fases I, II y III de Mason et al. (1985), Fases I, II y III de Azarquiel (1993) y Fases I, II, III y IV de Castro et al. (2010). Reconocer patrones en secuencias numéricas es un primer paso para generalizar. Se introducen los tipos de generalización propuestos por Radford (2013).
5º	#8 Describe e interpreta variaciones de dependencia entre cantidades y las representa por medio de gráficas.	Identificar variaciones de dependencia es un indicio de identificación de regularidades (correspondería a las Fases I, II y III de Mason et al. (1985), Fases I, II y III de Azarquiel (1993) y Fases I, II, III y IV de Castro et al. (2010)).
6º	#8 Identifica y analiza propiedades de covariación directa e inversa entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).	Está inmersa la identificación de propiedades y por consiguiente se relaciona con la Fase I propuesta por Mason et al. (1985), Fase I de Azarquiel (1993) y Fases I, II y III de Castro et al. (2010).
8º	#7 Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales.	La identificación de regularidades es un paso imprescindible en la generalización. Además, la utilización de teoremas está ligado con las garantías en el proceso argumentativo. Ello conlleva el reconocimiento de la generalidad expuesta en un teorema. Corresponde a las Fases I y II propuestas por Mason et al. (1985), Fases I y II de Azarquiel (1993) y Fases I, II, III, IV y V de Castro et al. (2010).
	#9 Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.	Interviene el razonamiento inductivo que juega un papel en la posibilidad de formular conjeturas, que es precisamente generalizar. Se relaciona con las Fases III, IV y V propuestas por Castro et al. (2010), Fases I y II de Mason et al. (1985) y Fases I y II de Azarquiel (1993).
9º	#6 Conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos. #9 Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.	Formular conjeturas es reconocer patrones e intentar generalizar las propiedades que se identifican al estudiar varios ejemplos de una situación. Corresponde a las Fases I, II, III, IV y V propuestas por Castro et al. (2010), Fases I y II de Mason et al. (1985) y Fases I y II de Azarquiel (1993). Para el DBA #9, como se está usando lo generalizado, estaría inmersa la Fase VI de Castro et al. (2010).

5. METODOLOGÍA

Teniendo en cuenta el objetivo de este trabajo de grado, se hizo, inicialmente, una búsqueda de tesis en los repositorios de la Universidad Nacional de Colombia, Universidad Pedagógica Nacional, y Universidad Distrital Francisco José de Caldas que en el título tuvieran las palabras "generalización, patrón o secuencia". Se lee el correspondiente RAE, o en su defecto, se da un vistazo general al contenido, para confirmar si el trabajo cumple con las siguientes características:

- Ser un trabajo de Especialización o Maestría.
- Ser una propuesta de enseñanza de matemáticas para Básica Primaria, Secundaria o Media.
- Tener referentes teóricos sobre la generalización.

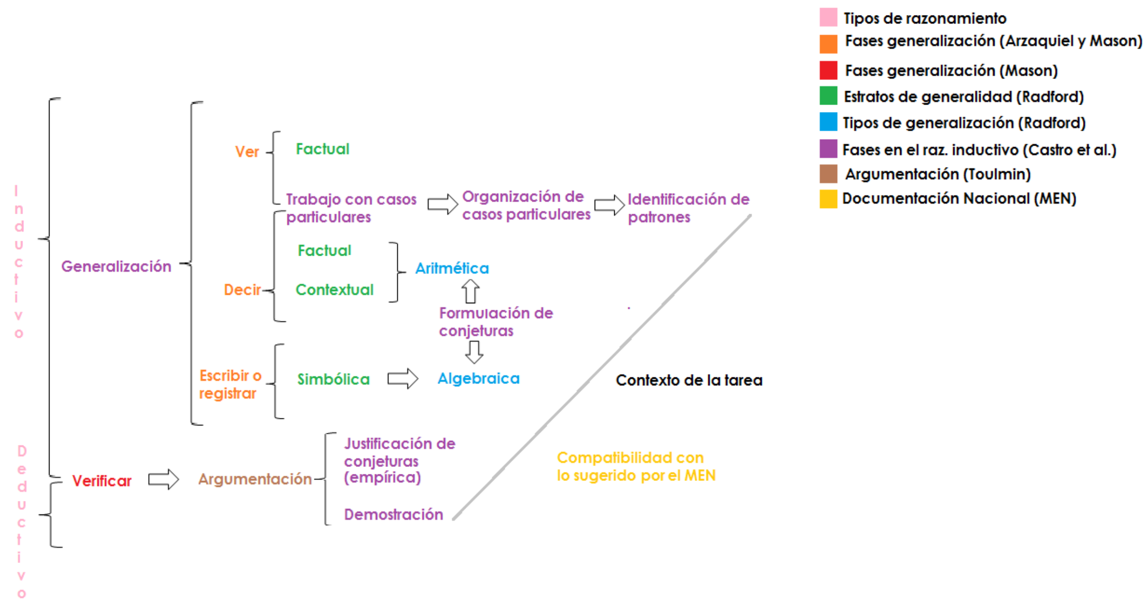
Posteriormente, se hizo una lectura detallada del marco teórico, para conocer las referencias en torno al proceso de generalización y su relevancia en el documento. Si dicho proceso era central y protagónico, se seleccionó el documento para su análisis; de lo contrario, se descartó.

Se realizó un análisis de las tareas propuestas y aplicadas en el aula, expuestas en los trabajos de grado seleccionados, teniendo en cuenta las siguientes *categorías*:

- Estratos de generalidad (Radford, 2006).
- Tipos de generalización (Radford, 2013).
- Fases de generalización (Arzaquiel, 1993 y Mason et al., 1985) / fases en el razonamiento inductivo (Castro et al.,2010).
- Recomendaciones y observaciones encontradas en la documentación nacional colombiana (Lineamientos, Estándares y DBA de matemáticas)
- Argumentación (Toulmin, 2007).

A continuación, se representa la relación entre las anteriores categorías. Los corchetes ({) se usan para abarcar todas las ideas concernientes a un concepto principal. En algunos casos, dos corchetes pueden ir enlazados con un concepto, como es el caso de la *fase de verificar*, a la cual se puede llegar tanto de manera *inductiva*, como *deductiva* (dependiendo del tipo de argumento). Las flechas ($\Longrightarrow$) representan secuencialidad (como es el caso de las fases propuestas por Castro et al. (2010), en la que las etapas se dan de manera sucesiva) o implicación, es decir, un concepto implica a otro (como es el caso de la *formulación de conjeturas*, la cual puede implicar el establecimiento de una *generalización aritmética* o *algebraica*). Finalmente, y de manera paralela, se presenta lo relacionado al *contexto de la tarea* (es decir, si ésta fue propuesta desde situaciones imaginarias o reales) y su compatibilidad o correspondencia con los *documentos nacionales*:

Diagrama 1. Relaciones entre las categorías de análisis



Para la presentación del análisis, primero se expone la información general del trabajo de grado. En cuanto a los resultados y conclusiones, se reporta lo que el autor menciona respecto al efecto de la tarea en los estudiantes y la efectividad de esta, respecto a la generalización.

En la siguiente tabla, se presenta cuáles datos generales del trabajo de grado se reportan en la ficha. Las conclusiones son las que los autores reportan.

Tabla 4. Esquema para el análisis de las tareas: Primera parte

Información general	
Nombre	
Autores	
Universidad	

Programa	
Año de publicación	
Localización	
Objetivo general	
Población a la cual está dirigida	
Metodología de estudio	
Ejemplo de tarea propuesta	
Resultados	
Conclusiones	
Bibliografía	

Posteriormente, se realiza un análisis de la tarea propuesta en el trabajo de grado bajo la mirada de las categorías expuestas anteriormente. Además, se dan algunas observaciones y/o recomendaciones respecto a la pertinencia de la misma cuando sea necesario:

Tabla 5 Esquema para el análisis de las tareas: Segunda parte.

Análisis de la tarea propuesta		
Estratos de generalidad		
Tipos de generalización		
Fases en el proceso de generalización		
Fases de razonamiento inductivo		
Argumentación		
Recomendaciones del MEN	Estándares	
	DBA	
Contexto o tipo de propuesta[3]		
Otro enfoque[4]		
Observaciones y/o recomendaciones		

[3] Se refiere a si la propuesta proviene de un escenario real o imaginario y si se usa material, TICs u otro tipo de recurso educativo.
[4] Si además de enfocarse en la generalización, el trabajo de grado buscó favorecer otro proceso matemático, aquí se realizarán los comentarios al respecto.

6. ANÁLISIS DE TAREAS SOBRE GENERALIZACIÓN

A continuación, se presentan cinco análisis de tareas asociadas al proceso de generalización.

Tabla 6. Análisis No 1

Información general	
Nombre	Argumentos logrados por estudiantes de grado quinto de educación básica primaria al realizar una tarea que involucra patrones y procesos de generalización
Autores	Jorge Arturo Murcia Pérez y Julio Armando Silva Muñoz.
Universidad	Universidad Pedagógica Nacional
Programa	Especialización en Educación Matemática
Año de publicación	2014
Localización	http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/127/TO-17475.pdf?sequence=1&isAllowed=y
Objetivo general	Describir los argumentos logrados por estudiantes de grado quinto de educación básica primaria, al realizar una tarea relacionada con patrones y procesos de generalización.
Población a la cual está dirigida	Estudiantes de grado quinto que no han tenido un acercamiento a actividades de generalización.
Metodología de estudio	Se presenta la tarea en una guía que se debe realizar de manera individual. Las respuestas consignadas en la misma y algunas grabaciones de audio y video sirvieron de insumo para realizar el análisis de los argumentos expuestos por los estudiantes.
Ejemplo de tarea propuesta	<u>Situación problema</u> Sara celebra su cumpleaños en casa y quiere invitar a sus amigos a cenar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, de manera que los niños se sientan como puedes ver en la Figura 4.  *Figura 4. Caso 3 mesas (Tomado de Murcia, 2014).* Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otros debe haber un niño sentado. 1) ¿Cuántos amigos pueden sentarse a cenar si se juntan 3 mesas? 2) ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado. 3) Y si tenemos 120 mesas, ¿cuántos amigos pueden sentarse a cenar en ellas? Explica como lo has averiguado.

4) Organiza los datos obtenidos en los puntos anteriores en la siguiente tabla, escribiendo en una casilla el número de mesas empleadas y, al lado, el número de amigos que se pueden sentar en estas mesas.

Número de mesas	Número de amigos

5) Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a cenar? Explica como lo has pensado.

6) Supongamos que la letra n representa el número de mesas que hay. Escribe las operaciones y el proceso que debo realizar para encontrar el número de amigos que se pueden sentar, cuando tengo un número n de mesas. Recuerda que n es un número del cual no conozco su valor. ¿Cómo puedo encontrar el número de amigos para una cantidad n de mesas?

Resultados

A continuación, se exponen las respuestas más relevantes:

- Para responder la primera y segunda pregunta, la mayoría de los estudiantes usaron o ampliaron la representación gráfica y contaron como se muestra en la Figura 5:

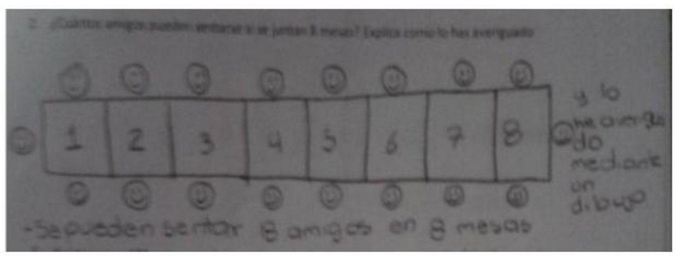


Figura 5. Representación del caso 8 mesas (Tomado de Murcia, 2014)

Sin embargo, un estudiante afirmó lo siguiente: “por cada mesa que hay, se pueden ubicar dos niños y, en todos los casos, se adicionan los dos que se encuentran en los bordes laterales”.

En las respuestas a la tercera pregunta se destacan las siguientes justificaciones de respuestas correctas:

- “Como acá hay tres mesas (va dibujando el esquema con tres mesas)… entonces en cada lado hay tres amigos… Entonces como acá era de a dos, multipliqué 2 por 120… me da 240… Entonces como acá caben dos (señalando los extremos laterales) me quedó 242”.
- “Porque multipliqué $120 \times 2 = 240$ porque, si vemos en la información, en una mesa se sientan 2 personas- arriba y bajo; después sumé 2 más porque 2 personas van sentadas a la izquierda y otra a la derecha.”

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

• "Lo averigüé multiplicando 118×2 y 2×3 y después los dos resultados los sumaba". Lo que se representaría como se muestra en la Figura 6:

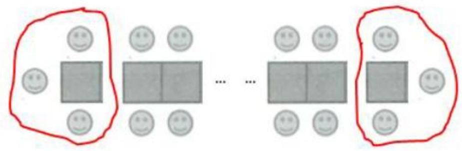


Figura 6. Ejemplo de conteo (Tomado de Murcia, 2014).

Los autores no presentan las respuestas de los ítems 4), 5) ni 6). Según ellos, ningún estudiante logró expresar de manera general la respuesta para cualquier caso mediante una fórmula.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Conclusiones</td>
<td>

Con relación a la identificación de argumentos a la luz del modelo de Toulmin, los autores afirman que los estudiantes encuentran relaciones entre el enunciado inicial y cada una de las preguntas generadas, logrando contestarlas por medio de esquemas gráficos y de forma escrita. Así, la información suministrada en cada una de las tareas, pudo ser esquematizada con el modelo de Toulmin; las garantías son representaciones con dibujos y gráficas elaborados por los estudiantes. En cuanto a la aserción o conclusión, se aclara que los estudiantes no llegaron a una generalización de tipo algebraico ($2n + 2$), sino aritmético (por ejemplo, cuando expresan respuestas para casos particulares: "118×2 y 2×3").

Por otro lado, como objetivo específico, los autores buscaban verificar si las tareas de generalización fomentaron la argumentación. Ellos afirman que los resultados registrados evidencian la viabilidad de comenzar en los primeros años de educación primaria el desarrollo del razonamiento algebraico con tareas de generalización, partiendo de conceptos y temas propuestos en el currículo de matemáticas para este nivel de enseñanza.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Bibliografía</td>
<td>

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. London: Kluwer Academic Publishers.

Merino, E. (2012). *Patrones y Representaciones de Alumnos de 5° de Educación Primaria en una Tarea de Generalización*. Universidad de Granada, Granada España.

Plantin, C. (2001). *La argumentación*. Barcelona: Ariel, 2a. Edición.

Radford, L. (2010). *Layers of Generality and Types of Generalization in Pattern Activities*. PNA, 4(2), 37-62

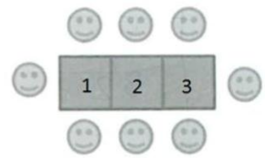
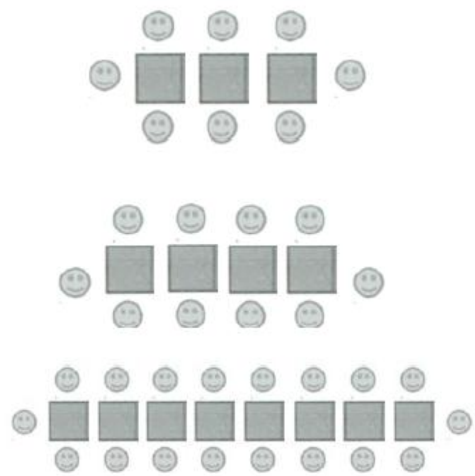
Rodríguez, L. (2004). El Modelo Argumentativo de Toulmin en la Escritura de Artículos de Investigación Educativa. *Revista Digital Universitaria, 5*(1).

Santibáñez, C. (2001). *La Argumentación. Variantes y ejemplos*. RLA: Revista de lingüística teórica y aplicada, 39, 183-202.

</td>
</tr>
</table>

	Sardà, A. (2003). Argumentar: proposar i validar models. In N. Sanmartí (coord.) (Ed.), Aprendre Ciències: tot aprenent a escriure ciència (pp. 121-148). Barcelona: Edicions 62. Toulmin, S. (2007). *Stephen Toulmin los Usos de la Argumentación. Traducción de María Morrás y Victoria Pineda*. Barcelona: Ediciones Península.

Análisis de la tarea propuesta	
Estratos de generalidad	Cuando el estudiante señala con el dedo alguno de los lados de las mesas, para indicar si se puede sentar o no algún invitado, está expresando de manera *factual* indicios de generalidad. En cuanto a expresiones como "por cada mesa se sientan 2 amigos y se adicionan 2 de los laterales" o "arriba uno y abajo otro", estas se valoran como manifestaciones propias de la *generalización contextual*. Por otro lado, a pesar de que hubo expresiones numéricas para dar respuesta a los interrogantes, el cambio de frases a símbolos no se evidenció. Por lo tanto, no se tiene certeza de haber llegado a la *generalización simbólica*.
Tipos de generalización	Las expresiones indicadas en los resultados muestran *generalización aritmética*. Podría haberse convertido en *algebraica*, pues mediante la representación gráfica o usando propiedades comunes, los estudiantes dieron estrategias para hallar términos desconocidos, aunque no de manera analítica. Ello puede deberse a que aún están primaria, pues no es usual que en estos grados estén familiarizados con el lenguaje algebraico.
Fases en el proceso de generalización	La representación gráfica fue una estrategia para dar respuesta a los primeros casos particulares mediante el conteo; esto corresponde a la etapa de *Ver*. Posteriormente, a través de una tabla (propuesta por los autores), se dispusieron los datos de forma organizada para promover la identificación de propiedades comunes o patrones. El objetivo era que se formularan conjeturas (lo que corresponde a la fase de *Decir*); algunas de las conjeturas fueron *registradas* mediante palabras o expresiones numéricas, y verificadas o justificadas de manera empírica, mostrando qué ejemplos particulares cumplían lo propuesto, logrando así generalizar dicha propiedad.
Fases de razonamiento inductivo	En consonancia con lo anterior, se puede afirmar que los estudiantes trabajaron con casos particulares (Fase I), los dispusieron bajo distintas configuraciones gráficas para identificar y obtener información relevante (Fases II y III), de manera que a partir de lo encontrado se empieza un proceso de conjeturación (Fase IV). Las justificaciones de dichas conjeturas fueron de tipo gráfica y aritmética para casos puntuales (Fase V).
Argumentación	Los datos de los argumentos se presentan en el enunciado mismo de la situación problema (y su representación gráfica): (i) Se juntan n mesas por un lado. (ii) En cada lado de las mesas, que no comparten con otra mesa, se sienta un niño. (iii) Los niños no pueden sentarse en las esquinas.

	(iv) La representación exhibida en la Figura 4:  *Figura 4. Caso 3 mesas (Tomado de Murcia, 2014).* La aserción es la respuesta encontrada sobre el número de invitados cuando se indica el número de mesas. Finalmente, las garantías son las representaciones gráficas (Figura 7) o la validez de las propiedades de las operaciones usadas.  *Figura 7. Garantía gráfica. (Tomado de Murcia, 2014).*	
Documentación nacional	Estándares	*Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica (4º a 5º).* Se puede afirmar que la tarea está acorde con el estándar anterior, ya que el estudiante debía inferir, a partir de las propiedades descubiertas la cantidad de invitados que se podían sentar y cómo varían al aumentar el número de mesas.
	DBA	*Describe e interpreta variaciones de dependencia entre cantidades y las representa por medio de gráficas.* La consonancia con el anterior DBA radica en que los estudiantes deben identificar la dependencia en el cambio de términos contiguos para posteriormente generalizar dicha propiedad a cualquier caso. Una de las evidencias de aprendizaje es que los estudiantes propusieron patrones de

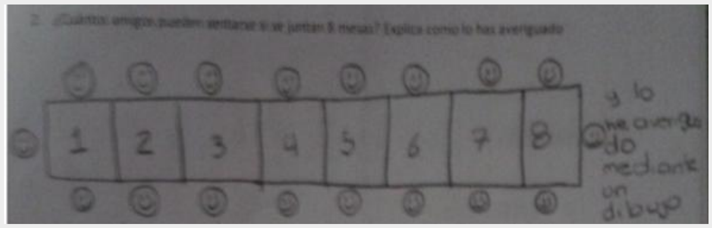
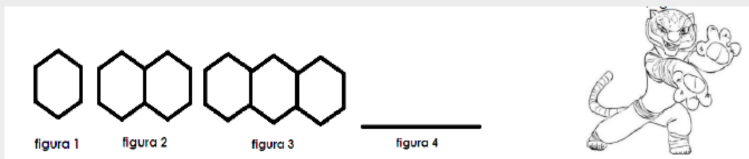
<table>
<tr><td></td><td></td><td>comportamiento numérico a través de expresiones numéricas como por ejemplo $(2 \times 120) + 2$ para el caso de 120 mesas. Usaron representaciones gráficas de casos particulares y afirmaciones basadas en las mismas. Por ejemplo, basados en la Figura 8 determinaron el número de invitados mediante el conteo:


Figura 8. Conteo mediante la representación gráfica. (Tomado de Murcia, 2014).</td></tr>
<tr><td>Contexto o tipo de propuesta</td><td colspan="2">La tarea presentada se sitúa dentro de un contexto de la vida real, ya que la disposición de las mesas e invitados es acorde a una situación real.</td></tr>
<tr><td>Otro enfoque</td><td colspan="2">No aplica (NA).</td></tr>
<tr><td>Observaciones y/o recomendaciones</td><td colspan="2">Pasar del término 3 al 8 no facilita la identificación de la relación y/o dependencia de los términos contiguos. Tal vez, por eso, la tabla no parece haber sido útil La información registrada en ella no favorece la generación de estrategias.
El ítem 6, con el que se quiere llegar a una generalización algebraica, tiene un nivel de complejidad alto para el cual los niños de grado quinto pueden no estar preparados. Mason et al. (1985) destaca que los símbolos deben surgir espontáneamente cuando los alumnos estén listos para ello.</td></tr>
</table>

Tabla 7. Análisis No 2.

Información general	
Nombre	Generalización de patrones geométricos. Proyecto de aula para desarrollar pensamiento variacional en estudiantes de 9 –12 años
Autores	Jorge Adrián Pulgarín
Universidad	Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín
Programa	Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Año de publicación	2015
Localización	http://www.bdigital.unal.edu.co/52915/1/16055320.2016.pdf
Objetivo general	Diseñar e implementar un proyecto de aula centrado en el pensamiento variacional, para la generalización de patrones geométricos por estudiantes de grado quinto de educación Básica Primaria.
Población a la cual está dirigida	Estudiantes de grado quinto cuya edad promedio es 10 años.

Metodología de enseñanza	Las actividades se realizaron de manera individual, presentándose en guías de trabajo.
Ejemplo de tarea propuesta	Contextualización: **KUNG-FU PANDA: CONOCE A LOS MAESTROS** *Todos en el Valle de la Paz conocían la leyenda del Guerrero Dragón. Se decía que este gran héroe salvaría al valle en su hora más oscura. El maestro Oogway sería el encargado de escoger al Guerrero Dragón y el maestro Shifu ya tenía sus cinco candidatos: Tigresa, Grulla, Mono, Serpiente y Mantis. El maestro Oogway conocía de los poderes de cada uno de ellos y sabía que eran muy buenos en el kung-fu, así que decidió hacerles una prueba de inteligencia. A cada uno de ellos les dio una torre de varas de bambú y les pidió que hicieran secuencias de figuras.* **Actividades:** **1.** Tigresa, valiente, fuerte y leal tenía un poderoso estilo de kung-fu que provocaba temor. Ella haciendo uso de las varas de bambú realizó la siguiente secuencia de figuras (Figura 9), y les hace la siguiente pregunta, ¿cuántas varas de bambú utilizaré en la figura cuatro?  *Figura 9. Representación realizada por Tigresa. (Tomado de Pulgarín, 2015)* Ayúdales a los demás valientes a responder la pregunta de tigresa. Para ello responde las siguientes preguntas. a) ¿Cuántas varas de bambú utilizó tigresa en la primera figura? ¿Cuántas en la segunda? Y ¿cuántas en la tercera? b) ¿Cuántas varas de bambú le agregó tigresa a la primera figura para formar la figura dos? ¿Cuántas varas de bambú agregó tigresa a la figura dos para formar la figura tres? c) Dibuja la figura cuatro. **2.** Grulla, veloz y ágil, podía agotar fácilmente a sus enemigos; su estilo de pelea parecía una danza. Con las varas de bambú realizó una secuencia con triángulos (Figura 10). Les pide a los otros guerreros que completen la tabla de acuerdo a la secuencia realizada.

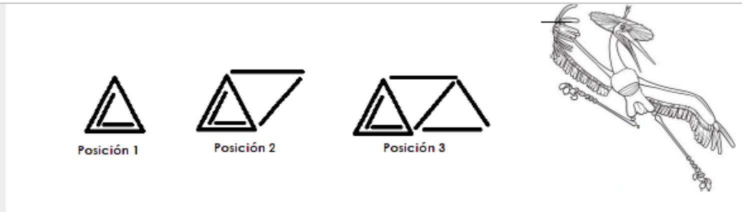


Figura 10. Representación realizada por Grulla. (Tomado de Pulgarín, 2015)

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9
# varas de bambú									

3. Mono, era el bromista del grupo, pero era un maestro para utilizar las varas de bambú. Por eso realizó una secuencia con cuadrados (Figura 11). A sus compañeros les pide que en las líneas de abajo escriban la cantidad de varas de bambú que utilizó para formar cada figura y que realicen la figura de la posición cuatro. También les hace tres preguntas que tú les ayudarás a contestar.

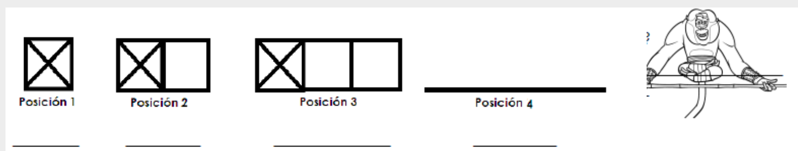


Figura 11. Representación realizada por Mono. (Tomado de Pulgarín, 2015)

a) ¿Qué parte es la que cambia en la secuencia de figuras?
b) ¿De cuánto en cuánto está cambiando?
c) ¿Qué parte no está cambiando en las figuras?

4. Serpiente es una guerrera hábil que se mueve tan rápido como un relámpago y que posee un golpe mortífero. Ella, con gran velocidad y agilidad, amarró sus varas de bambú formando cuadrados y con ellos realizó la siguiente secuencia de figuras (Figura 12).

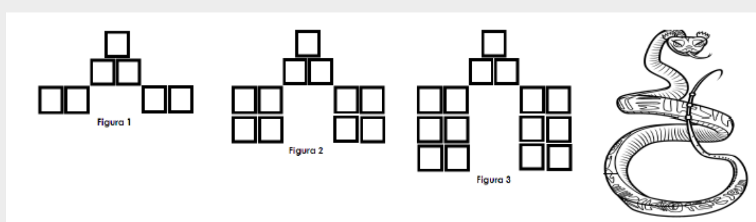


Figura 12. Representación realizada por Serpiente. (Tomado de Pulgarín, 2015)

Serpiente pide a sus compañeros que dibujen las figuras 4, 5 y 6 y que expresen la cantidad de cuadritos usados en cada figura, como una suma de lo que cambia y lo que no cambia.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Figura 1: ____ + ____ = 7
Figura 2: ____ + ____ + ____ = 11
Figura 3: ____ + ____ + ____ + ____= 15
Figura 4: ____ + ____ + ____ + ____ + ____ = _____
Figura 5: ____ + ____ + ____ + ____ + ____ + _____ = ____
Figura 6: ____ + ____ + ____ + ____ + ____ + _____ + ____ = ____

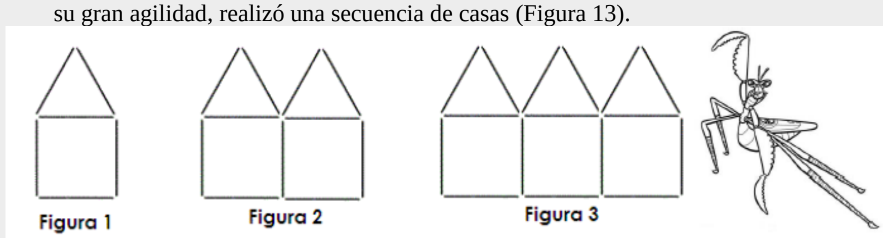
5. Mantis es el más pequeño, pero es increíblemente veloz, casi invisible en combate. Con su gran agilidad, realizó una secuencia de casas (Figura 13).


Figura 13. Representación realizada por Mantis (Tomado de Pulgarín, 2015)

Mantis propone a sus compañeros que encuentren una receta de operaciones matemáticas que le permita adivinar con mucha velocidad la cantidad de varas de bambú necesarias para formar cualquier figura de la serie, y aplicando esa receta llenar la siguiente tabla.
<table>
<tr><td>Figura</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>18</td><td>32</td><td>54</td><td>77</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Varas de bambú</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Resultados</td>
<td>El autor no presenta los resultados de las respuestas de los estudiantes. Simplemente indica los aciertos y desaciertos que tuvieron en el desarrollo de la actividad, como lo son que continuaban dibujando las secuencias de figuras adecuadamente, llenaron correctamente los espacios en blanco, dibujaron correctamente las figuras faltantes ubicando la cantidad de palitos o cuadritos que debían tener y más aún, las dibujaban en el lugar correspondiente; sabían además cuántos palitos y cuadros (para el ejercicio de la Serpiente y Mantis) debían tener las figuras que continuaban en la serie.
Además de ello, resalta que la mayoría de los estudiantes logran hallar lo que varía y los invariantes (el patrón de cambio y lo constante) y lo expresan en forma oral, escrita y a través de dibujos. Pero indica que se les dificultó proponer un procedimiento que los llevará a reproducir los términos siguientes de la serie. Por ello, no pudieron verificar si con su estrategia realmente se podía reproducir el patrón.</td>
</tr>
<tr>
<td>Conclusiones</td>
<td>Según el autor, este tipo de actividades son motivadoras, pues presentan contenido matemático de maneras no tradicionales que fomentan la participación y trabajo en grupo.
En cuanto al objetivo, el autor afirma que las actividades de generalización fomentaron el desarrollo del pensamiento variacional, ya que el desempeño de los estudiantes involucrados fue superior al de otros que no habían tenido acercamiento a este tipo de propuestas.</td>
</tr>
<tr>
<td>Bibliografía</td>
<td>Barreto, C; Gutiérrez, L; Pinilla, & Parra, C. (2006). Límites del constructivismo pedagógico., 31. Retrieved from http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=83490103</td>
</tr>
</table>

	González, E. (2001). El proyecto de aula o acerca de la formación en investigación, 1–8. Recuperado de https://es.scribd.com/doc/181807521/Que-Es-Un-Proyecto-de-Aula-Elvia-Maria-Gonzalez Mason, J. (1999). Rutas hacia el algebra y Raices del algebra. (C. Agudelo, Trad.) Tunja, Colombia. Tunja: UPTC. Sánchez, M. (2013). Intervención didáctica para la enseñanza del álgebra en la escuela primaria. DME, Cinvestav I.P.N. México, 1200–1211. Recuperado de http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/130.pd

Análisis de la tarea propuesta	
Estratos de generalidad	En los resultados no se presentan detalladamente las respuestas o interacciones de los estudiantes, por lo que no es posible determinar las expresiones de generalidad; sin embargo, el esquema de las tareas posibilitaría el paso por cada una de las etapas de generalidad, porque los estudiantes podrían señalar los palillos para indicar cómo varían, así mismo expresar verbalmente sus descubrimientos o conjeturas y finalmente plantear soluciones de manera analítica o sincopada.
Tipos de generalización	Se presume el alcance de la *generalización aritmética,* ya que, según el autor, los estudiantes acertaron completando datos, tablas y términos faltantes. Pero no expresaron algún procedimiento o algoritmo que diera cuenta de ello, por lo que parece que no lograron la *generalización algebraica.*
Fases en el proceso de generalización	Con lo que expresa el autor, se puede concluir que posiblemente los estudiantes pasaron por la fase de *ver* y *decir*. Pero, parece que el *registro* escrito se dio parcialmente, pues a los estudiantes se les dificultó proponer procedimientos para encontrar otros términos de la secuencia, sin valerse de la gráfica.
Fases de razonamiento inductivo	Cabe resaltar que la dinámica y secuencialidad de las actividades permitirían pasar por la mayoría de las fases propuestas por Castro et al. (2010). A continuación, se hace una breve explicación de cada actividad frente a las etapas: 1) *Trabajo con casos particulares*: La actividad está enfocada en la observación y conteo para deducir las figuras 4, 5 y 6, según el caso, a partir de la anterior. 2) *Organización de casos particulares:* Además de apoyarse en la visualización y conteo, se propone llevar un registro de los primeros casos (por ejemplo, en tablas). Allí, el estudiante debe relacionar la posición de la figura observada con la cantidad de varas de bambú que utiliza para su composición. 3) *Identificación de patrones*: La actividad induce al estudiante a encontrar estrategias para hallar los términos siguientes, y registrarlas de forma escrita. 4) *Formulación de conjeturas:* Enfatiza en los casos en los que la representación gráfica aun es una opción. Sin embargo, induce a la determinación de relaciones entre variantes e invariantes para determinar una regla o propiedad.

	Formulación de conjeturas y generalización: En este punto, la representación gráfica no es una opción, por lo que hay que valerse de estrategias adicionales (fortalecidas con las anteriores actividades) para encontrar cualquier término. Aquí se indaga por una fórmula que sirva para cualquier término.	
Argumentación	Debido a que no se consignan las respuestas de los estudiantes, es inviable estudiar los argumentos. Ninguna pregunta propuesta en la actividad invita a que se justifique la respuesta. Sin embargo, si los estudiantes lograron completar la tabla propuesta por Mantis, debieron usar la fórmula, producto de la generalización, y posiblemente, justificar que ella es correcta.	
Documentación nacional	Estándares	*Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica (4º a 5º)* Como la tarea está enfocada en el proceso de generalización, se relaciona directamente con el trabajo de patrones y secuencias mencionado en el estándar.
	DBA	*Describe e interpreta variaciones de dependencia entre cantidades y las representa por medio de gráficas.* Dicho DBA corresponde a la fase de *describir* propuesta por Mason et al. (1985), ya que en esta se expresan las propiedades comunes encontradas, así como la variación de dependencia entre términos.
Contexto o tipo de propuesta	Las actividades están basadas en la adaptación de un cuento infantil. Por lo tanto, son situaciones imaginarias.	
Otro enfoque	La generalización fue el único proceso al cuál se le hizo énfasis.	
Observaciones y/o recomendaciones	Es importante que se presenten los resultados de los estudiantes y su análisis de forma detallada, pues para el caso no se tiene la certeza que el diseño y aplicación haya sido efectiva, de acuerdo con los referentes que usan los autores.	

Tabla 8. Análisis No 3.

Información general	
Nombre	La utilidad del Geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el proceso de generalización del álgebra escolar
Autores	Ubaldo Luque Osorio y Edinson Mena Becerra
Universidad	Universidad Pedagógica Nacional
Programa	Especialización en Educación Matemática
Año de publicación	2016
Localización	http://repositorio.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/153

<table>
<tr><td>Objetivo general</td><td>Diseñar una cartilla para profesores con tareas que requieren el uso del Geoplano Cuadrado como instrumento articulador para potencializar el proceso de generalización.</td></tr>
<tr><td>Población a la cual está dirigida</td><td>Estudiantes de grado octavo de educación básica secundaria.</td></tr>
<tr><td>Metodología de estudio</td><td>Se propusieron guías que se debían realizar con la manipulación del geoplano cuadrado. Para esto, se conformaron grupos de tres estudiantes. Se registraron en video y audio las interacciones y comunicación de uno de los grupos (seleccionados al azar), en torno al proceso de generalización.</td></tr>
<tr><td>Ejemplo de tarea propuesta</td><td>

Con ayuda de las bandas elásticas, construyan en el Geoplano Cuadrado las siguientes figuras (Figura 14) correspondientes a una secuencia de cuadrados.

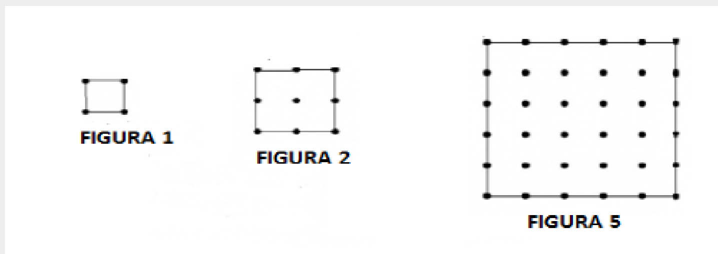


Figura 14. Representación de Figuras 1,2 y 5 (Tomado de Luque, 2016).

1. Los cuadrados anteriores se construyeron siguiendo un patrón. Como pueden ver no aparecen la FIGURA 3 ni la FIGURA 4. De acuerdo a sus observaciones, constrúyalas en el Geoplano.
2. Completen las cantidades numéricas para cada una de las casillas vacías de la siguiente tabla, de acuerdo a lo que observan y puedan deducir en las diferentes construcciones de la secuencia de cuadrados.

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>10</td><td>20</td><td>100</td><td>n</td></tr>
<tr><td>u</td><td># puntillas en un solo lado del cuadrado</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>11</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>v</td><td># total de puntillas en los cuatro lados del cuadrado</td><td>4</td><td>8</td><td></td><td>16</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>400</td><td></td></tr>
<tr><td>w</td><td># lados en el cuadrado</td><td>4</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>x</td><td># puntillas al interior del cuadrado</td><td>0</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>n-1</td></tr>
<tr><td>y</td><td># de espacios entre una puntilla</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

</td></tr>
</table>

	y otra, en un solo lado del cuadrado												
z	# de espacios entre una puntilla y otra, en los 4 lados del cuadrado	4	8										4n

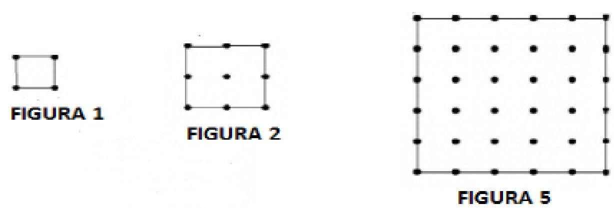
3. Escriban, para cada una de las variables, el proceso mental o patrón, que encontraron para ir obteniendo los resultados numéricos, para cada una de sus casillas, de acuerdo a la secuencia de las figuras:

u____
v ____
w____
x ____
y____
z____

Resultados	Los autores no presentan los resultados para cada ítem, sino por cada etapa (adaptada de la propuesta de Mason et al., 1985). Destacan las respuestas relacionadas, las cuales fueron tomadas de las interacciones entre los estudiantes y sus producciones escritas: • *Exploración:* Los estudiantes inician con un proceso de visualización de las puntillas, el señalamiento de figuras representadas en el Geoplano y conteo (con el dedo índice). De esta manera, comienzan a encontrar algunas características comunes en la secuencia de cuadrados. Por ejemplo, determinaron cómo aumentaba la cantidad de puntillas en un lado del cuadrado mediante el conteo. • *Desarrollo y registro de datos*: Los estudiantes registran datos en la tabla, usando palabras clave y expresiones que conducen al establecimiento de regularidades. Por ejemplo, dicen: “es una multiplicación”, “una más”, “la segunda tiene 8 pues es 2×4, la siguiente 3×4 y multiplicando se hallan todas”, (para el número total de puntillas en los cuatro lados). • *Formulación de conjeturas*: Se registraron expresiones como: “según el número de la figura, la cantidad de puntillas a un lado va un número más adelante”, “la fórmula para encontrar la cantidad de puntillas al alrededor de la figura es 4 por el número de la figura”, “el número de espacios encontrado entre una puntilla y otra es el número inicial de la figura”.
Conclusiones	Los autores destacan que sí es posible usar el Geoplano Cuadrado en tareas de generalización de patrones con esquemas geométricos; ello motiva a los estudiantes debido a la posibilidad de manipulación del material y verificación de conjeturas en el mismo. Los autores también valoran la importancia de la aplicación de actividades de generalización en el comienzo del álgebra escolar. Además de propiciar el trabajo en equipo, posibilita el intercambio de conocimientos y fortalecimiento de habilidades comunicativas.

Bibliografía	Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J. M. (1990). *El geoplano un recurso manipulable para la comprensión de la geometría.* Madrid. Álvarez, A. (1996). *Actividades Matemáticas con materiales didácticos.* Madrid. Esquinas, A. (2008). *Tesis para optar el título de doctor, titulada dificultades del Lenguaje Algebraico: del Símbolo a la Formalización Algebraica: Aplicación a la Práctica Docente.* Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España. Godino, J. D. (2003). *Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros.* Granada. Mariño, A. (2000). *El geoplano un recurso manipulable para la comprensión de la geometría.* Venezuela. Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Bogotá, C. (s.f.). Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas. Bogotá, C. E.-1. (s.f.). Mora, L. (2012). *Generalización en Primaria.* Bogotá D.C. Radford, L. (2006). *Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective*, PME-NA, Vol. 1, 2-21. Solano, U. y. (2009). *El proceso de objetivación del concepto de área en estudiantes sordos desde artefactos.* Trujillo, P. (2008). *Tesis de grado titulada proceso de generalización que realizan futuros maestros.* Universidad de Granada, Granada, España. Van, H. (1955). *El geoplano un recurso manipulable para la comprensión de la geometría.* Venezuela. Vergel, R. (2015). *Generación de Patrones y Formas de Pensamiento Algebraico Temprano.* Bogotá D.C.

Análisis de la tarea propuesta	
Estratos de generalidad	La manipulación del Geoplano posibilita diversidad de expresiones de generalidad. Por ejemplo, hacer movimientos con los dedos, señalando puntillas o espacios en blanco, corresponde a una *generalización factual.* Al momento de expresar que "la figura 3 tiene 4 puntillas más que la anterior" o que "se debe multiplicar", hacen *generalización contextual.* En cuanto a la *generalización simbólica*, en la tabla se incluye un espacio para dar expresiones algebraicas.
Tipos de generalización	La determinación de conjeturas a través de expresiones verbales y numéricas posibilitó la *generalización aritmética*. Sin embargo, no se puede afirmar que los estudiantes llegaron al establecimiento de fórmulas (para cualquier término de la secuencia) pues el autor no lo menciona. Pero, como se mencionó anteriormente, la estructura misma de la tarea conduciría a ello.

Fases en el proceso de generalización	Las fases que se presentan en los resultados están en consonancia con las propuestas por Mason et al. (1985), por lo que podríamos afirmar que la tarea condujo a los estudiantes a través de dichas etapas. En primera instancia, se presenta la situación para casos particulares que se pueden representar en el Geoplano. Posteriormente, se presenta una tabla para que registren la información obtenida de sus representaciones en el Geoplano. De esta manera se favorece la inferencia para situaciones que no se pueden representar con el material (se dan algunos datos a modo de ayuda). Además, se solicita a los estudiantes que escriban una expresión algebraica de la relación que observan entre los términos, es decir, una fórmula. Finalmente, se solicita a los estudiantes describir las estrategias que usaron para obtener los datos de cada variable, lo que tiene que ver con la generalización de la propiedad y posterior verificación (justificación).
Fases de razonamiento inductivo	Con lo expuesto en las fases del proceso de generalización, se puede inferir que los estudiantes pasaron por las Fases I, II, III, IV, V y VI del razonamiento inductivo propuesto por Castro et. al (2010) .
Argumentación	Aunque las interacciones referentes a la argumentación no se exponen, es posible que hayan surgido argumentos como los que se describen a continuación: En la tarea, se presentan los datos como el enunciado mismo de la situación problema (y su representación gráfica- Figura 14): (i) Se forman cuadrados de x lado (ii) La representación:  *Figura 14. Representación de figuras 1, 2 y 5 (Tomado de Luque, 2016).* La aserción es la respuesta encontrada sobre el número de puntillas o espacios en cada cuadrado (pueden ser en uno de sus lados, todos sus lados o interior), cuando se indica el término de la secuencia. Este depende del largo del lado del cuadrado, es decir, el primer término tendrá 2 puntillas de lado, el segundo término, 3 puntillas de lado, etc. Finalmente, las garantías son las representaciones gráficas y en el Geoplano (Figura 15):

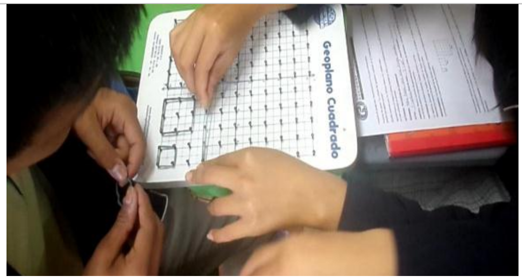
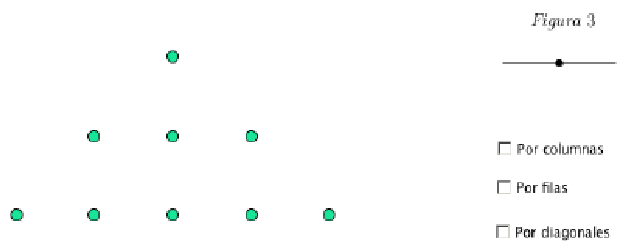
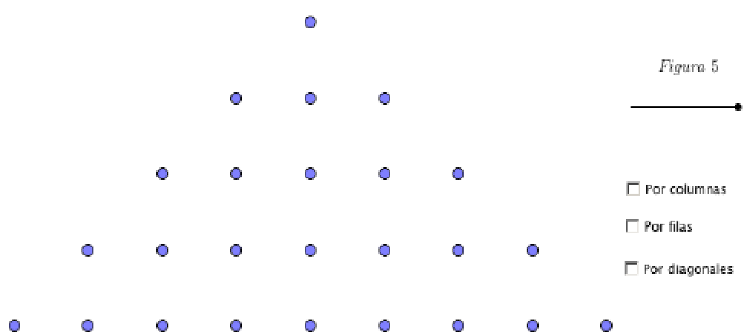
	 *Figura 15. Representación de cuadrados en el Geoplano (Tomado de Luque, 2016)*	
Recomendaciones del MEN	Estándares	*Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas (8º a 9º)* El trabajo con casos particulares para conjeturar y formular expresiones analíticas se considera un proceso inductivo.
	DBA	*Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.* Implícitamente, se están usando procedimientos inductivos a partir de la verificación de casos en el Geoplano, completando la tabla suministrada con la información encontrada a partir de la exploración y de la conjeturación.
Contexto o tipo de propuesta	A pesar de que la tarea se puede modelar con material concreto, como es el caso del Geoplano, el ejercicio es un trabajo netamente diseñado en el campo de las matemáticas.	
Otro enfoque	Se destaca el uso de material concreto para incentivar y motivar la participación de los estudiantes.	
Observaciones y/o recomendaciones	Se valora la importancia del trabajo en grupo, pues se posibilita el intercambio de ideas y como lo menciona Azarquiel (1993): "se propicia la comprobación conjunta de las conjeturas, la reformulación de las hipótesis, el acercamiento paulatino a soluciones cada vez más ajustadas". (p. 38)	

Tabla 9. Análisis No 4.

Información general	
Nombre	Estudio descriptivo de los procesos de generalización en los niños de grado sexto
Autores	Andrés Felipe Suárez Fuentes
Universidad	Universidad Pedagógica Nacional
Programa	Especialización en Educación Matemática
Año de publicación	2013
Localización	http://repositorio.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/125
Objetivo general	Desarrollar actividades que promuevan la capacidad de buscar patrones y de predecir el comportamiento de dichos patrones, utilizando el conocimiento matemático que poseen los estudiantes.

Población a la cual está dirigida	Estudiantes de grado sexto que han tenido acercamientos al significado de variable.
Metodología de estudio	Se propone el trabajo por parejas. Cada una dispone de un computador (con un applet en Geogebra) y una guía con las instrucciones a seguir. Las evidencias del trabajo fueron recolectadas mediante las respuestas escritas en la guía y las interacciones registradas en audio y video.
Ejemplo de tarea propuesta	En el applet se presenta un arreglo de puntos que cambia a medida que se mueve el deslizador. Los siguientes gráficos muestran el deslizador en posiciones 1, 3 y 5 respectivamente.  *Figura 16. Captura de pantalla: Deslizador posición 1 (Tomado de Suárez, 2013)*  *Figura 17. Captura de pantalla: Deslizador posición 3 (Tomado de Suárez, 2013)*  *Figura 18. Captura de pantalla: Deslizador posición 5 (Tomado de Suárez, 2013)* A partir de la exploración realizada, responde las siguientes preguntas: a) ¿Cómo van aumentando la cantidad de puntos a medida que cambia la figura?

b) Completa la siguiente tabla

Figura	# puntos
1	
2	
3	
5	
6	
9	
25	

La cantidad de puntos de cada figura no cambia, pero podemos contarlos de diferentes formas.

c) Completa la tabla, contando los puntos siguiendo las filas (Figura 19):

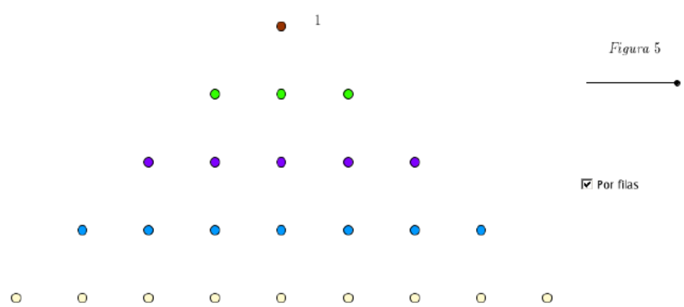


Figura 19. Captura de pantalla: Disposición por filas (Tomado de Suárez, 2013)

Figura	# puntos contando por filas
1	1
2	1 + 3
3	1 + 3 + 5
5	
6	
9	
25	

d) Completa la tabla, contando los puntos por columnas (Figura 20):

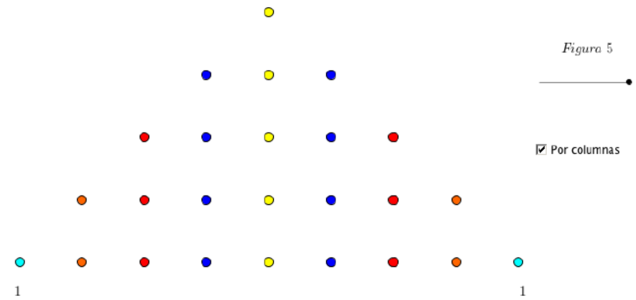


Figura 20. Captura de pantalla: Disposición por columnas (Tomado de Suárez, 2013)

Figura	# puntos contando por columnas
1	1
2	$2 + (2 * 1)$
3	$3 + (2 * 2) + (2 * 1)$
5	
6	
9	
25	

e) Completa la tabla, contando los puntos por diagonales (Figura 21):

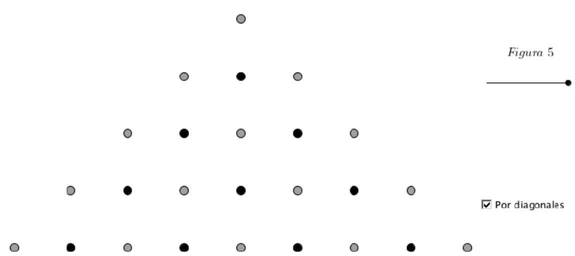


Figura 21. Captura de pantalla: Disposición por diagonales (Tomado de Suárez, 2013)

Figura	# puntos contando por diagonales
1	
2	
3	
5	
6	
9	
25	

f) Si en general te preguntaran por una figura de una posición cualquiera, ¿de qué forma o formas podríamos encontrar la cantidad de puntos de la figura?

g) ¿Qué otra forma o formas de contar los puntos se te ocurre?

h) ¿Cómo encontrarías el resultado de la siguiente suma 1+3+5+7+9+11+13+15+17 con una sola operación?

Resultados

Para cada ítem se exponen las respuestas más relevantes:

a) Se escuchan expresiones como: “van aumentando de a números impares”, “se agregan dos puntos, uno a cada extremo”.

b) La mayoría de estudiantes llegó a las siguientes respuestas, pero usando caminos diferentes (Figura 22):

Figura	Numero de puntos
1	1
2	4
3	9
5	25
6	36
9	81
25	~~650~~ 625

Figura 22. Respuesta común de los estudiantes. (Tomado de Suárez, 2013)

Algunas estrategias de conteo se ilustran a continuación (Figura 23 y Figura24), en donde los colores indican el método de conteo:

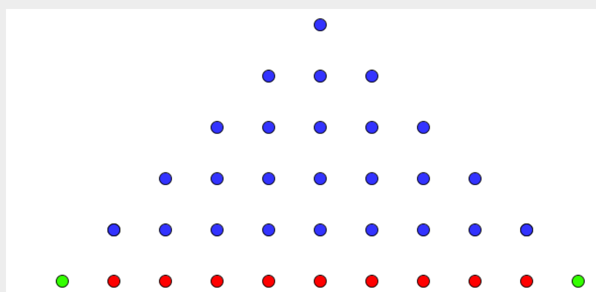


Figura 23. Configuración 1(Tomado de Suárez, 2013)

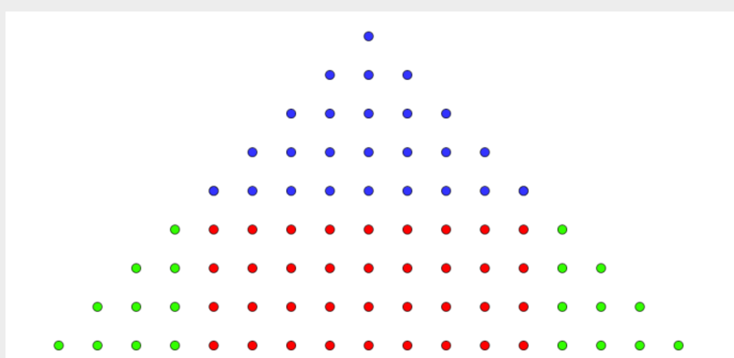


Figura 24. Configuración 2 (Tomado de Suárez, 2013)

Una de las parejas realizó las siguientes operaciones 1+3, 4+5, 9+7, 16+9, 25+11, 36+13=49, es decir que para encontrar el número total de puntos de una figura realiza las sumas consecutivamente, resultado anterior sumado al siguiente término en el listado. Posteriormente afirman que, para encontrar el número de puntos de una figura, se toma el número de la figura y se multiplica por sí mismo.

Otros estudiantes se limitaron a realizar el conteo y a representar gráficamente cada figura.

c) Todos los estudiantes asocian rápidamente los ejemplos que se dan en la tabla con los colores de las figuras que se presentan cuando en el applet se señala la casilla que dice por filas, es decir que asocian cada número con una fila de la figura (Figura 25):

Figura	Numero de puntos contando por filas
1	1
2	1+3
3	1+3+5
5	1+3+5+7+9
6	1+3+5+7+9+11
9	1+3+5+7+9+11+13+15+17+[illegible]
14	1+3+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27

Figura 25. Respuesta Disposición por filas (Tomado de Suárez, 2013)

d) Como se presentan los primeros casos para guiar a los estudiantes, una de las parejas se preocupa por asociar cada número y operación a algo particular de la figura para darle sentido. Por ejemplo, los productos en paréntesis representaban el número de columnas con determinado número de puntos, es decir, (2×2), serían 2 columnas con 2 puntos cada una (Figura 26):

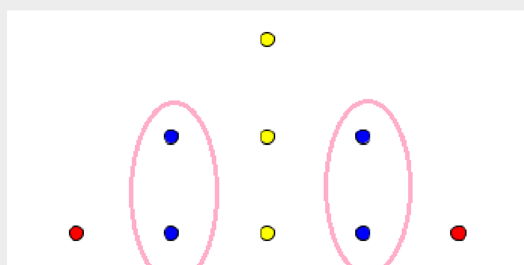


Figura 26. Relación entre columnas (Tomado de Suárez, 2013)

Usando lo anterior, llegan a (Figura 27):

Figura	Numero de puntos contando por columnas
1	1
2	2+(2*1)
3	3+(2*2)+(2*1)
5	5+(2x4)+(2x3)+(2x2)+(2x1)
6	6+(2x5)+(2x4)+(2x3)+(2x2)+(2x1
9	9+(2x8)+(2x7)+(2x6)+(2x5)+(2x4)+(2x3)+(2x2)+(2x1)
14	14+(2x13)+(2x12)+(2x11)+(2x10)+(2x9)+(2x8)+(2x7)+(2x6)+(2x5)+(2x4)+(2x3)+(2x2+(2x1)

Figura 27. Respuesta Disposición por columnas (Tomado de Suárez, 2013)

Sin embargo, el autor manifiesta que algunos malinterpretaron la multiplicación, lo que produjo respuestas como (Figura 28):

Figura	Numero de puntos contando por columnas
1	1
2	2+(2*1)
3	3+(2*2)+(2*1)
5	5+(4x4)+(3x3)+(2x2)+(2x1)
6	6+(5x5)+(4x4)+(3x3)+(2x2)+(2x1)
9	9+(8x8)+(7x7)+(6x6)+(5x5)+(4x4)+(3x3)+(2x2)+(2x1)

Figura 28. Respuesta errónea Disposición por columnas (Tomado de Suárez, 2013)

e) Debido a que no se presentaron ejemplos para esta parte de la tarea, la mayoría de los estudiantes propusieron respuestas incorrectas. Sin embargo, se destaca lo encontrado por 2 grupos. Uno de ellos interpreta la siguiente configuración, fijándose en las diagonales (Figura 29).

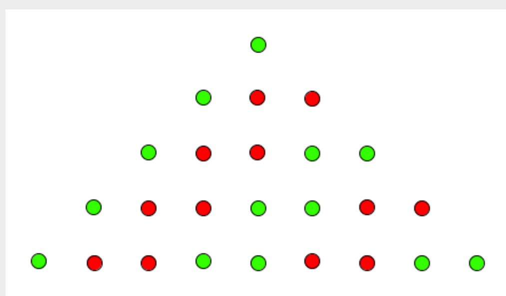


Figura 29. Configuración 1 Disposición por diagonales (Tomado de Suárez, 2013)

Por ello realizan un conteo diagonal, encontrando que se repiten el número de puntos cada 2 diagonales (exceptuando la última). Por ejemplo para la figura anterior, el número de puntos representados corresponde a la suma (1+1)+(2+2)+(3+3)+(4+4)+5, llegando a (Figura 30):

Figura	Numero de puntos contando por diagonales
1	1
2	2+(2x1)
3	3+(2x2)+(2x1)
5	5+(4x2)+(3x2)+ ~~(4x2)+(3x2)~~ +(2x2)+(2x1)
6	6+(5x2)+(4x2)+(3x2)+(2x2)+(1x2)
9	9+(8x2)+(7x2)+(6x2)+(5x2)+(4x2)+(3x2)+(2x2)+(2x1)
14	14+(13x2)+(12x2)+(11x2)+(10x2)+(9x2)+(8x2)+(7x2)+(6x2)+(5x2)+(4x2)+(3x2)+(2x2)+(2x1)

Figura 30. Configuración 1 Disposición por diagonales- Respuestas (Tomado de Suárez, 2013)

Otra interpretación fue (Figura 31):

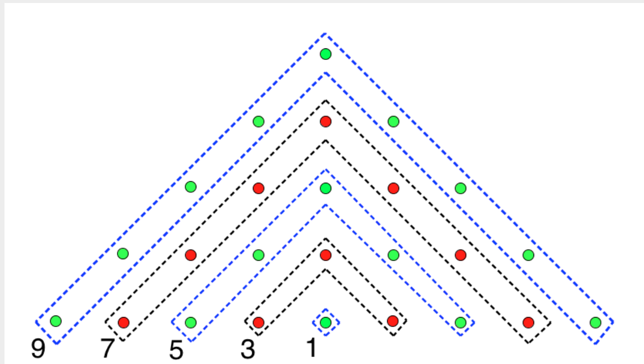


Figura 31. Configuración 2 Disposición por diagonales (Tomado de Suárez, 2013)

Lo que conduce al mismo resultado de la visualización por filas.)

f) En este punto se destacan las siguientes respuestas: "contando", "depende si es por filas, columnas, o diagonales", "multiplicando el número de figura por sí mismo".

g) Solo un estudiante propuso otra alternativa, mediante el trabajo con diagonales, teniendo en cuenta que un punto se repite (Figuras 32):

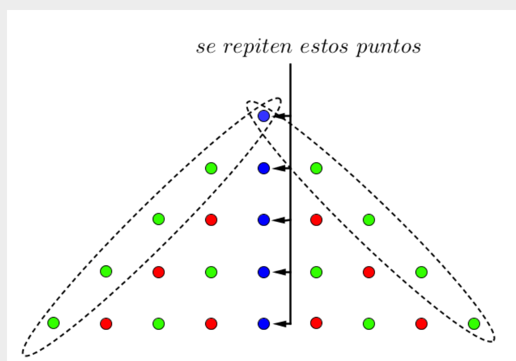


Figura 32. Configuración 3 Disposición por diagonales (Tomado de Suárez, 2013)

Llegando a la siguiente respuesta:

$$1 + \big((2 \times 2) - 1\big) + \big((3 \times 2) - 1\big) + \big((4 \times 2) - 1\big) + \big((5 \times 2) - 1\big)$$

h) El autor expone que la respuesta más relevante fue contar el número de sumandos y multiplicarlo por sí mismo o elevarlo al cuadrado; es decir, para el ejemplo "$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$" posee nueve sumandos luego sería 9×9.

Conclusiones	Según los autores, en todas las tareas se obtuvieron resultados que dan cuenta de las primeras tres etapas propuestas por Mason et al. (1985). En las primeras se hace énfasis en las fases de ver y registrar, destacando la diversidad de interpretaciones y configuraciones que los estudiantes dan a un mismo problema. La utilización de tablas permitió organizar la información, de manera que los estudiantes hallaran términos desconocidos mediante la generalización de propiedades inferidas en los casos anteriores, propiciando un razonamiento inductivo. Es importante resaltar que la prueba se aplicó a una población pequeña de estudiantes, los cuales no tuvieron una preparación previa para estas actividades y tampoco tenían conocimientos previos sobre variables. Por lo tanto, podemos afirmar que es viable proponer este tipo de actividades en cursos que no necesariamente manejen variables, teniendo como objetivo el desarrollo de la generalización, sin esperar una conjetura de índole algebraica. Claramente, la actividad se puede proponer a una población diferente, de un nivel más avanzado, en la cual el objetivo pueda ser llegar hasta la demostración de dichas generalizaciones. (Suarez, 2013, p.47). Se destaca además el trabajo en parejas, ya que se promueve la discusión e intercambio de ideas, aunque se reconoce que faltó hacer una puesta en común con toda la clase, para enriquecer aún más la actividad. En cuanto al uso de geometría dinámica, se valora la posibilidad que ofrece en hacer más llamativa la clase y de brindar herramientas que aclaran conceptos e inducen al establecimiento de conjeturas.
Bibliografía	Castro E., Cañandas M. y Molina M., (2010). *El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático*. UNO 54 (10) 55-67 Manara R. (2002). *La matematica e la realtà*, linee di metodo. Génova, Italia: Marietti. Mason J., Graham A., Pimm D. y Gowar N., (1985) *Routs to/ Roots of Algebra*. Inglaterra: The open University press.

Análisis de la tarea propuesta	
Estratos de generalidad	En las evidencias no se identifican gestos o señales que den cuenta de una *generalización factual,* pero sí de la *contextual* y *simbólica.* La primera al presentarse expresiones como "van aumentando de a números impares", "se agregan dos puntos, uno a cada extremo" que indican la identificación de propiedades o invariantes, y para el caso de la *generalización simbólica*, cuando se afirma como conclusión que para obtener el número de puntos se eleva al cuadrado el número de la figura, esto es n^2.
Tipos de generalización	Se dan expresiones que indican principalmente una *generalización aritmética*. Esto al dar respuesta a casos particulares, dependiendo de la configuración e indicación al

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">estudiante (por filas, columnas o diagonales), aclarando que (en algunos casos) se dan ejemplos para guiar e inducir a la obtención de generalidades en forma analítica. Así se posibilita la obtención de una generalización algebraica. Se puede afirmar que existe la posibilidad de alcanzar ambos tipos de generalización.</td></tr>
<tr><td>Fases en el proceso de generalización</td><td colspan="2">Debido a la exploración de las figuras se induce a la fase Ver. De manera intuitiva y basándose en las interpretaciones de cada grupo, se pueden hacer conjeturas que se pudieron expresar verbalmente, lo que corresponde a la fase Decir. Finalmente, apoyados en el applet dinámico, se pueden verificar dichas conjeturas con ejemplos puntuales (fase Verificar), que se escribirían en las guías de trabajo. En un principio, serían de manera informal y aritmética, y posteriormente posiblemente se llegarán a expresiones algebraicas (lo que corresponde a la fase Registrar).</td></tr>
<tr><td>Fases del razonamiento inductivo</td><td colspan="2">En consonancia con las fases en el proceso de generalización y su relación con las fases del razonamiento inductivo, podemos afirmar que la dinámica de las tareas posibilita pasar por todas las fases propuestas por Castro et al. (2010), a excepción de la demostración.</td></tr>
<tr><td>Argumentación</td><td colspan="2">Aunque no se expresa formalmente, en la tarea, se presentan los datos en el enunciado mismo de la situación problema (y su representación gráfica) ya que el número de la figura es determinado por el número de filas de la misma, Esto significa, por ejemplo, refiriéndonos a la figura 2, esta será la que tendrá dos filas.

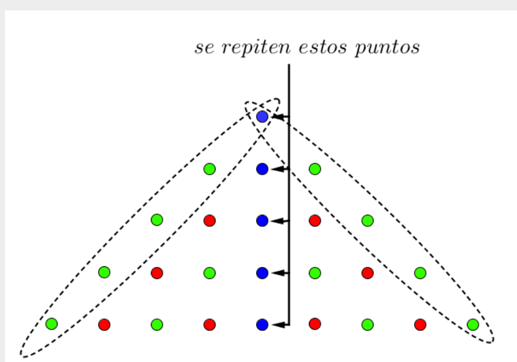
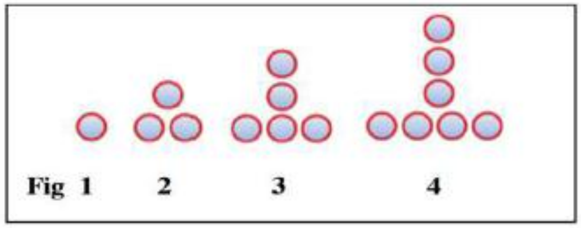
La aserción es la respuesta encontrada sobre el número de puntos cuando se indica el número de la figura. Esta se expresa dependiendo de la configuración elegida o encontrada.
Finalmente, las garantías son las representaciones gráficas (o interpretaciones geométricas) o la validez de las propiedades de las operaciones usadas.
Por ejemplo, en la Figura 32 se garantiza la respuesta mediante la explicación de la configuración encontrada en la disposición por diagonales:


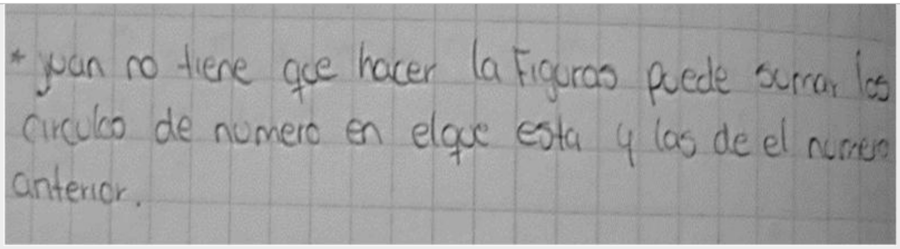
Figura 32. Configuración 3 Disposición por diagonales (Tomado de Suárez, 2013)</td></tr>
<tr><td>Recomendaciones del MEN</td><td>Estándares</td><td>Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores. (6º a 7º)</td></tr>
</table>

		Para el caso, con el uso de geometría dinámica.
	DBA	*#8 Identifica y analiza propiedades de covariación directa e inversa entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).* Para el caso, el contexto es geométrico. Allí se pretende identificar la covariación entre la figura "n" y el número de puntos de cada una.
Contexto o tipo de propuesta	Aunque la tarea se presenta en un contexto netamente matemático, puede concebirse en un contexto real; por ejemplo, puede ser la formación de personas o la construcción de una pirámide de latas que tenga la misma disposición.	
Otro enfoque	NA	
Observaciones y/o recomendaciones	El trabajo con geometría dinámica, como lo menciona el autor, motiva a los estudiantes por su interfaz e interactividad. Es importante que se introduzca su uso en el aula, ya que promueve la exploración y se facilita el proceso de construir conjeturas.	

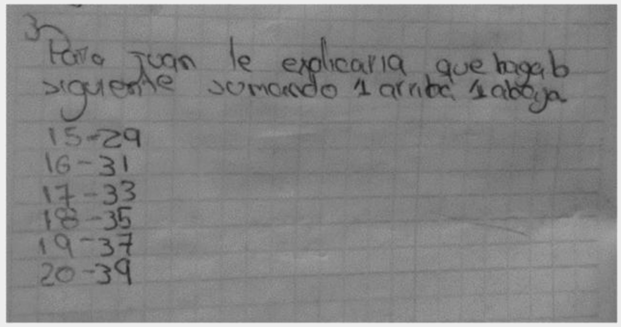
Tabla 10. Análisis No 5.

Información general	
Nombre	Generalización de patrones: una forma de desarrollar el pensamiento algebraico
Autores	Sandra Milena Ramírez Orozco
Universidad	Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Programa	Maestría en Educación con énfasis en matemáticas.
Año de publicación	2017
Localización	http://funes.uniandes.edu.co/10611/1/Gonzalez2017Procesos.pdf
Objetivo general	Identificar el tipo de generalización (aritmética-algebraica) que desarrollan los estudiantes de grado octavo del Colegio Entre Nubes Sur Oriental IED al enfrentarse a tareas de generalización de patrones de secuencias figurales.
Población a la cual está dirigida	Estudiantes de grado octavo de educación básica secundaria.
Metodología de estudio	Se proponen guías de trabajo para trabajar en grupo, de manera que se lleve registro de audio o video de las interacciones, discusiones y respuestas de los estudiantes en torno a tareas de generalización.

Ejemplo de tarea propuesta	1. Las siguientes preguntas se basan en la siguiente secuencia (Figura 33):  *Figura 33. Secuencia figural (Tomado de Ramírez, 2017).* a. Dibuja las figuras 5 y 6 b. ¿Cuántos círculos hay en la figura 5? c. ¿Cuántos círculos hay en la figura 6? 2. ¿Hay alguna manera de encontrar el número de círculos de la figura 15, sin construir la figura? Explica tu respuesta 3. Juan quiere construir la figura 20. Explica lo que debe hacer para construirla. 4. Santiago hizo una figura de esta secuencia. Él usó exactamente 25 círculos. ¿A qué número de la figura corresponde? Explica la manera en que procediste para encontrar la respuesta. 5. ¿Cómo podrías hacer para encontrar la cantidad de círculos de cualquier figura? Explica tu respuesta.
Resultados	Cuando se indaga por el proceso realizado, algunos de los estudiantes narran lo que hicieron para dar respuesta a cada una de las preguntas de la tarea. Durante las intervenciones, hacen gestos con las manos para denotar la disposición horizontal y vertical de los círculos; igualmente usan señalamientos para relacionar estructura numérica y espacial, entre otros. Inicialmente explican que la forma como percibieron la secuencia fue a través del aumento de cantidad de círculos arriba y abajo, estrategia que utilizan para graficar las figuras subsecuentes; es decir, iban sumando “un circulito arriba y uno abajo”. Posteriormente cuando se pregunta por la Figura 15, afirman: “*Para la figura quince, pues se iba sumando de a dos por cada uno, entonces en la figura 7 es 13, en la 8 es 15 y así sucesivamente hasta llegar a la quince*”, es decir a partir de la relación *+2*. En ese momento, asumen esto como regla. Esto permite afirmar que hasta ahí se realiza una generalización aritmética, que permite establecer la cantidad de elementos de figuras pequeñas (o que se pueden representar gráficamente sin problemas). Se continúa con la indagación a partir de la pregunta: *“¿es necesario siempre ir sumando dos (+2) para saber cuántos hay en cada figura?*”, a lo que responden: “*No, porque nos dimos cuenta de que en, la figura decía cinco (Figura 5), entonces abajo van cinco (bolas horizontales) y arriba va menos uno (bolas verticales), y así se suma*”, es decir, para la figura 5, se tendrían cinco círculos horizontales y cuatro verticales (5+4=9) . Se han dado cuenta que basta con sumar el número de la figura n con $n-1$. Ejemplo de una respuesta es:



Se destaca que otros estudiantes tabularon para organizar la información e inferir la relación aditiva +2 (en cada término ir agregando dos círculos), como se ilustra a continuación:



También se presenta el caso en el que estudiantes se basan en la representación gráfica (adicionando un círculo horizontal y uno vertical) para dar respuesta a figuras como la 15 o 16 (Figura 34):

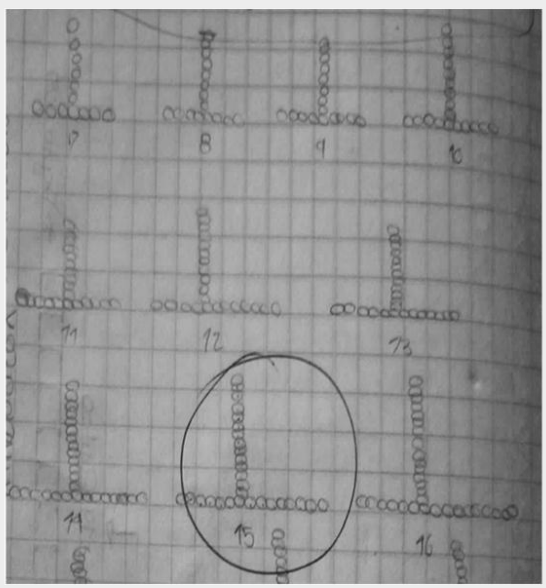


Figura 34. Respuestas mediante representación gráfica de casos particulares (Tomado de Ramírez, 2017)

Durante la plenaria realizada al finalizar, se pide a los estudiantes que manifiesten sus opiniones sobre el trabajo realizado. Ellos comentan que la tarea fue algo novedoso, aunque manifiestan haber tenido dificultades para explicar los procesos realizados en cada uno de los puntos.

Conclusiones	La autora destaca que en las tareas propuestas se evidencia que debido a que es una situación de tipo aditivo, los estudiantes pueden generar hipótesis que los lleva a la construcción de los términos consecutivos. Establecen los términos consecutivos a través de la elaboración de tablas, representación gráfica o simplemente realizando la suma mentalmente. Esto corresponde a una generalización de tipo aritmético. Al existir dificultades en la interpretación de la letra como una forma de representar el término general, no fue posible llegar a expresiones simbólicas que dieran cuenta de una generalización algebraica. Se valora, además, la realización de plenarias, pues permitieron mostrar otras formas de interpretar la tarea propuesta igualmente válidas, no con el ánimo de convencer, sino de compartir las experiencias que pueden contribuir a la formación de saberes.
Bibliografía	Callejo, M. L. (2015). Generalización y pensamiento algebraico. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas No. 68,* 5-8. Radford, L. (2006). *Introducción. Semiótica y Educación Matemática.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática, (Esp), 7-21. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509902 Rojas, P. J., & Vergel, R. (2013). *Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico.* Educación científica y tecnológica, 760-766. Vergel, R. (2015). *Generalización de patrones y formas de pensamiento temprano*. PNA, 193-215. Villa, J. (2006). *El proceso de generalización matemática: Algunas reflexiones en torno a su validación.* Tecno Lógicas (16), 139-151.

Análisis de la tarea propuesta	
Estratos de generalidad	En la realización de las tareas se presentan los siguientes estratos de generalización. La generalización factual se da cuando los estudiantes hacen movimientos con sus manos o señalan (los círculos horizontales y verticales) para indicar la variación (Ilustración 1):  *Ilustración 1. Generalización factual, señalamientos con las manos (Tomado de Ramírez, 2017)*

	 *Ilustración 2. Generalización factual, señalamientos con los dedos (Tomado de Ramírez, 2017)* La generalización contextual se evidencia cuando se manifiestan expresiones como "*sumando uno arriba uno abajo*", "*iba sumando de a dos por cada una",* para referirse a la cantidad de círculos en cada figura. En cuanto a la generalización simbólica, la autora manifiesta que no se alcanzó debido a que, para los estudiantes, la letra representa un valor específico generalmente asociado al orden lexicográfico y no a una variable.
Tipos de generalización	A pesar de que se dieron acercamientos a la expresión simbólica de la generalidad, por ejemplo, cuando se expresa que "el número de círculos es el número de la figura sumado al número de la figura menos uno", lo que se traduciría como $n + (n - 1)$, la autora manifiesta que se llega solo hasta la generalización aritmética, ya que ningún estudiante expresa simbólicamente lo anterior.
Fases en el proceso de generalización	La fase Ver (Mason et al., 1985) se evidencia cuando los estudiantes infieren la regla "+1" o "+2" para determinar el número de círculos a partir del estudio de casos particulares (basándose principalmente en la visualización). Cuando los estudiantes comparten sus ideas y las expresan verbalmente al interior de los grupos, están en la fase Describir. Los estudiantes usan el lenguaje natural para expresar las conjeturas: "el número de la figura es el número de lo de abajo y lo de arriba es menos uno". Para la fase Escribir o registro, se tiene lo que escribieron los estudiantes en las guías de trabajo, que normalmente se basa en tabulaciones o ideas informales que apuntan al establecimiento de expresiones analíticas. Cabe resaltar que no usar letras para representar cualquier término, sino expresiones como las anteriores, no significa que no se esté usando un lenguaje algebraico.
Fases del razonamiento inductivo	Las categorías para el análisis se toman de Castro et al. (2010). En los resultados presentados por la autora, se evidencia que los estudiantes trabajaron con los primeros casos para intentar encontrar alguna regla general (Fase I). Para ello, organizaron los datos bajo configuraciones gráficas o a través de una tabla. Con ello, empezaron a reconocer lo común en todos los términos, expresándolo verbalmente, usando lenguaje natural (Fase II, III y IV). En las intervenciones al interior de los grupos, se evidenció debate y justificación de lo encontrado (Fase V), que finalmente fue generalizado a cualquier caso (Fase VI).
Argumentación	Aunque la autora no hace énfasis en los argumentos, en las tareas sí solicita justificaciones. Los estudiantes sí expresan argumentos cuando indican el valor de un término. Por ejemplo,

	en el siguiente argumento, los datos son la posición del arreglo en la secuencia de la configuración geométrica, la aserción el número de circunferencias en cada configuración, y la garantía la regla "ir sumando de a dos". *"Para la figura quince, pues se iba sumando de a dos por cada uno, entonces en la figura 7 es 13, en la 8 es 15 y así sucesivamente hasta llegar a la quince*", En otros argumentos, los datos son la posición del arreglo en la secuencia, la aserción es la respuesta encontrada sobre el número de círculos presentes en cada figura y finalmente, las garantías son las representaciones gráficas, tabulares o regla que establecen.	
Recomendaciones del MEN	Estándares	*Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.* Como se mencionó anteriormente, los estudiantes pasaron por las fases de Mason et al. (1985), pero sin obtener expresiones analíticas. A pesar de ello, se reconoce el uso de lenguaje algebraico. Sin embargo, aunque se verificaron (mediante ejemplos) las propiedades encontradas, no hubo una prueba o comprobación formal de las conjeturas.
	DBA	*Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.* Se relaciona con el Estándar anterior, por lo que se reitera que a pesar que hubo un proceso inductivo, y formulación de conjeturas, no se evidencia la comprobación de las mismas, ni la expresión analítica.
Contexto o tipo de propuesta	El contexto de la tarea es matemático.	
Otro enfoque	NA	
Observaciones y/o recomendaciones	La dificultad de los estudiantes en usar las letras para representarla generalidad de manera simbólica. Se recomienda usar lo que expresan verbalmente los estudiantes para introducir la variable, y mostrar como su descripción se puede representar con variables.	

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Muchas de las conclusiones obtenidas, después de hacer este trabajo de grado, se convierten en recomendaciones para aquellos docentes interesados en el proceso de generalizar. A continuación, se listan las más relevantes:

- Si un docente decide usar tareas propuestas por otros, que involucren el proceso de generalizar, es importante resolver la tarea para determinar qué se requiere para hacerla, qué procesos matemáticos se realizan durante la resolución, cuál parece ser el objetivo del autor, y determinar si ello está acorde con los objetivos, necesidades y contextos de sus estudiantes, o si hay que hacer modificaciones.

- Se destaca lo relacionado con el contexto de la tarea, pues se reconoce que incide significativamente en el grado de interés y motivación de los estudiantes, por lo que juega un papel importante en tareas de generalización. Por ejemplo, Pulgarín (2015) valora la importancia de contextos imaginarios (como las adaptaciones de cuentos) para niños de edades iniciales, ya que son más llamativos para ellos, lo que fomenta la participación y trabajo en grupo. Cabe destacar que no toda tarea debe estar expuesta dentro de contextos reales. Las que tienen contextos netamente matemáticos (generalmente dirigidas a estudiantes mayores) también deben incluirse cuando se quiere favorecer la generalización. Suárez (2013) muestra cómo una tarea de ese estilo posibilita diversidad de estrategias y alternativas.

- Es aconsejable usar diversas herramientas para apoyar el proceso de generalización. Respecto al uso de material concreto, Luque y Mena (2016) afirman que la posibilidad de manipular y verificar ideas directamente con el material, hace que los estudiantes se interesen más por trabajar y mostrar lo que encuentran, fortalece habilidades comunicativas, y permite verificar resultados. Frente al uso de applets dinámicos, Suárez (2013) valora su importancia pues la interactividad que ofrecen promueve la exploración y por consiguiente el establecimiento de conjeturas.

- Como se evidencia en todas las propuestas, para lograr la generalización es necesario determinar algunos términos de la sucesión. Como lo recomiendan los investigadores, inicialmente se deben encontrar los primeros términos, ya que se pueden representar gráficamente sin problema. Esta posibilidad resulta ser un apoyo necesario para reconocer cómo varían las configuraciones de una posición a otra. Ello, más el uso de tablas en las que se consignan los valores, parece ayudar a expresar el cambio de un término a otro de manera aritmética, para establecer una generalización aritmética. En la propuesta de Suárez (2013), el uso del color apoya la visualización, la cual incide en lograr establecer una generalización.

  Luego de "ver" cómo cambia un término respecto al anterior, se debe solicitar que determinen el valor de un término no consecutivo a los anteriores, para impulsar la identificación de regularidades y formular conjeturas. Sin embargo, surge una inquietud en cuanto a cuál es el momento oportuno para dar ese "salto" a un término más alejado. Es decir, no hay claridad cuándo ni cuánto se debe avanzar de un término a otro, ya que, por ejemplo, en la tarea de Murcia y Silva (2014), los estudiantes tuvieron dificultad cuando se pasó del término cinco al ocho, mientras que en la tarea de Ramírez (2017) se pasa del término seis al quince, al parecer, sin inconveniente alguno. En ese sentido, se valora la propuesta de Pulgarín (2015), quien presenta la tarea de generalización de manera organizada y secuencial, preparando así a los estudiantes para abordar los "saltos entre términos", atenuando en gran medida las dificultades y confusiones inmersas en dicho proceso.

- En lo concerniente al marco teórico de referencia, se citaron las etapas que Mason et al. (1985), Azarquiel (1993) y Castro et al. (2010) proponen para el proceso de generalización y del razonamiento inductivo, respectivamente; durante los análisis, se logró identificar que la propuesta de Castro et al. (2010) incluye las etapas de los demás autores. Debido a esto, se considera que lo que estos últimos proponen, podría usarse como directriz para diseñar problemas de generalización. Se destaca, además, que como nos referimos a tareas para aplicarse en el aula escolar, la etapa correspondiente a la *demostración* podría omitirse debido a su grado de rigurosidad y formalismo.

- Haber establecido el esquema de análisis de propuestas, fue definitivo para identificar con claridad la estructura que los problemas de generalización deben tener. Las categorías establecidas para el análisis de las tareas pueden ser una buena guía para profesores que van a diseñar o usar problemas de este tipo. Los referentes teóricos que se debe tener en cuenta son los siguientes:
  - ✓ Estratos de generalidad (Radford, 2006).
  - ✓ Tipos de generalización (Radford, 2013).
  - ✓ Fases del razonamiento inductivo (Castro et al.,2010).
  - ✓ Recomendaciones y orientaciones expuestas en la documentación nacional colombiana (Lineamientos, Estándares y DBA de matemáticas).

- Según se evidenció en los análisis expuestos en el presente trabajo, cuando se promueven tareas de generalización en el aula, también se puede propender por el fortalecimiento de otros procesos como la argumentación y visualización.

Finalmente, con los resultados expuestos por los autores, se ratifica que el uso de tareas de generalización es un buen camino para la iniciación al algebra escolar. Esto se evidencia en Ramírez (2017), ya que los alumnos, en su intento por generalizar, usaron expresiones en lenguaje natural que pueden facilitar la introducción de la variable. Es decir, abordar la generalidad desde casos numéricos y geométricos, puede ser el camino para la introducción de la variable ya que tendrá más sentido, pues la interpretación de la letra ya no estará ligada a un valor específico (generalmente asociado al orden lexicográfico), sino a una forma de representar el término general.

8. BIBLIOGRAFÍA

Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Madrid: SINTESIS.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, 36(5), 412-446.

Butto, M., Delgado, J., y Bazán, A. (2018). *Procesos de generalización: Una vía de acceso al pensamiento algebraico temprano en educación básica*. *Horizontes Pedagógicos issn-l:0123-8264, 21* (2), 25-36. Obtenido de: https://revistas.iberoamericana.edu.co/index.php/rhpedagogicos/article/view/1269

Castro, E., Cañadas, M. y Molina, M. (2010). *El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático.* Revista UNO 54, páginas 55-67.

Dörfler, W. (1991). *Forms and means of generalization in mathematics.* En A. J. Bishop (Ed.), Mathematical knowledge: Its growth through teaching (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer Academic.

Luque, U y Mena, E. (2016). *La utilidad del geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el proceso de generalización del álgebra escolar*. Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Especialización en Educación Matemática.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985*). Routes to/ Roots of Algebra.* The Open University, Walton Hall, Milton Keynes, U.K.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares-Área Matemáticas.* Bogotá: MEN. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-89869.html

Ministerio de Educación Nacional (2003). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-116042.html

Ministerio de Educación Nacional (2003). *Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas*. Bogotá: MEN Recuperado de: http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf

Merino, E. (2012). *Patrones y Representaciones de Alumnos de 5° de Educación Primaria en una Tarea de Generalización*. Universidad de Granada, Granada España.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. PNA, 3(3), 135-156.

Murcia, J y Silva, J. (2014). *Argumentos logrados por estudiantes de grado quinto de educación básica primaria al realizar una tarea que involucra patrones y procesos de generalización.* Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Especialización en Educación Matemática

Peirce, C. (2011). *La teoría de la abducción de Peirce: lógica, metodología e instinto.* Universidad de Chile. Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación- Santiago, Chile.

Piedra, D. (Sin fecha). *Caracterización del proceso de generalización en Primaria.* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. – Semillero Crisalida - LEBEM (Crisálida).

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: University Press. (Traducción al castellano: J. Zugazagoitia, 1965, Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Pulgarín, J. (2015). *Generalización de patrones geométricos. Proyecto de aula para desarrollar pensamiento variacional en estudiantes de 9 –12 años.* Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Medellín, Colombia

Radford, L. (2006). *Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective*, PME-NA, Vol. 1, 2-21.

Radford, L. (2013). *En torno a tres problemas de la generalización*. En L. Rico, M. C Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), Investigaci6n en Didáctica de la Matemáticas. Homenaje a Encarnación Castro (pp.3-12). Granada, España: Editorial Comares.

Ramírez, S. (2017). *Generalización de patrones: una forma de desarrollar el pensamiento algebraico.* Maestría en Educación Énfasis en Educación Matemática. Facultad de Ciencias y Educación- Universidad Distrital Francisco José De Caldas

Secretaría de Educación de Antioquia. [SEDUCA]. (2006). *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico.* Medellín- Colombia.

Suárez, A. (2013). *Estudio descriptivo de los procesos de generalización en los niños de grado sexto.* Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Especialización en Educación Matemática.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona, España: ediciones península. Traducción de María Morrás y Victoria Pineda.

Villa, J. (2006). *El proceso de generalización matemática: algunas reflexiones en torno a su validación.* Tecno Lógicas, 16, pp. 139-151