UN RECORRIDO POR EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

A TRAVÉS DE PROBLEMAS HISTÓRICOS

Wilmar Asdrúbal Ayala Morales

2014140010

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad De Ciencia Y Tecnología

Departamento De Matemáticas

Licenciatura En Matemáticas

Bogotá D. C

2021

UN RECORRIDO POR EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

A TRAVÉS DE PROBLEMAS HISTÓRICOS

Wilmar Asdrúbal Ayala Morales

Trabajo de grado como requisito para optar por el título de:

Licenciado en Matemáticas

Director:

Mg. Benjamín Rafael Sarmiento Lugo

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D. C

2021

AGRADECIMIENTOS

A mi madre, María Herminda quien ha sido mi seguidora y apoyo incondicional todo este tiempo; a mi padre Absalón, que con sus consejos y enseñanzas logró hacerme la persona que soy.

A mis hermanas, Marcela y Erika, que siempre han estado ahí para escucharme y guiarme en los momentos difíciles.

A mi asesor de trabajo, el profesor Benjamín Sarmiento por su compromiso y motivación.

A todos mis profesores, quienes a lo largo de la carrera me permitieron aprender de ellos e inculcaron en mí la curiosidad por las matemáticas, y también por su voz de aliento y apoyo constante.

A mis amigos y compañeros del programa, por poner cada uno su granito de arena en el momento apropiado para que pueda llegar hasta este momento.

CONTENIDO

JUSTIFICACIÓN

La realización de este trabajo se debe a un interés particular de ahondar en la historia de las probabilidades, interés que surge gracias a cierto tipo de problemas que encontramos con frecuencia en los libros de textos y que llaman nuestra atención por tener una gran similitud con problemas planteados y discutidos por grandes matemáticos en siglos anteriores. Por otra parte, también es motivador ver en la historia de la matemática un elemento fundamental para mostrar a los estudiantes que cada concepto que se les enseña ha surgido gracias al trabajo disciplinado y perseverante de muchos expertos que han empleado muchos años de sus vidas para construir dicho concepto. Pensando que este ingrediente histórico puede ayudar a que los estudiantes valoren más los conocimientos que se les lleva al aula, se ha propuesto la elaboración de un recurso bibliográfico de carácter histórico que recoja algunos de los problemas más importantes que han acompañado al desarrollo de la teoría de probabilidades.

Por otra parte, vale resaltar que, en las dos últimas décadas, los currículos nacionales e internacionales han reservado un espacio para la enseñanza de la estadística y probabilidad por las posibilidades de modelación que brindan los diferentes métodos que se estudian en esta área. Autores como (Anturi, Bernal, y Oviedo, 2016) mencionan que *“la probabilidad se puede implementar para modelar situaciones que se presentan en campos de la vida cotidiana a través de diferentes ciencias como la física, química, economía, biología, etc.*” Además, de que juega un papel primordial en el desarrollo de nuevas técnicas y tecnologías para la enseñanza en los salones de clase, por ejemplo, implementando el uso de paradojas de probabilidad para introducir temas que involucran eventos aleatorios. De esta manera, como menciona (David, 2003) “todo el conocimiento matemático se debe emplear como una herramienta, con la que se puede lograr desarrollos educativos a través de otras ciencias, para así poder reconocer y solucionar los problemas que aquejan a la naturaleza y la sociedad”.

Otra razón para realizar un trabajo de este tipo es el reconocimiento del efecto motivador que tienen los problemas, las anécdotas y las curiosidades históricas en la enseñanza de cualquier concepto. (Barragués y Guisasola, 2009) afirman que, las investigaciones sobre las dificultades de aprendizaje de los conceptos elementales de la teoría de la probabilidad revelan que los estudiantes tienen inconvenientes a la hora de aprender o comprender los conceptos y procedimientos que involucran el azar. Esto se debe en parte a la presentación monótona de los ejercicios que se usan para la enseñanza de estos temas en los libros de texto. Al respecto, estos autores proponen que los estudiantes aprendan matemáticas construyendo activamente nuevos significados a partir de la experiencia, partiendo de los conocimientos que ya tienen, y que para facilitar esa construcción deben participar en actividades destinadas a que tomen conciencia de sus conocimientos y estrategias de aprendizaje individuales, y que desarrollen su capacidad de razonamiento y argumentación. De acuerdo con este enfoque de aprendizaje, los docentes en formación tienen la importante tarea de proponer a los estudiantes problemas interesantes que involucren la historia de las matemáticas, en particular de la probabilidad, para involucrarlos en tareas matemáticas significativas.

Es por esta razón, que realizar una revisión bibliográfica acerca de los problemas que fueron la génesis de la construcción del conocimiento de la teoría de la probabilidad resulta pertinente, ya que la historia se puede llevar a los salones de clase (o también fuera de ellos) para ayudar a los estudiantes a comprender de una manera más intuitiva conceptos como azar y valor esperado, entre otros. Del mismo modo, al presentar desde diferentes puntos de vista un mismo problema, se puede mostrar a los estudiantes la importancia de reconocer la ambigüedad que en ocasiones se presenta en los problemas que se estudian en probabilidades, al igual que los retos que afrontaron aquellos que hicieron sus aportes para el desarrollo de la teoría de probabilidades.

INTRODUCCIÓN

Para el desarrollo de este trabajo inicialmente se hace una revisión de varios documentos con el fin de determinar cuáles son los primeros trabajos relacionados con "posibilidades o suertes" en juegos de azar, cuáles son los problemas y métodos de solución que nos muestran cómo es que surge y evoluciona la noción de probabilidad.

La revisión bibliográfica no se redujo a transcribir problemas clásicos en la historia de las probabilidades, también se buscó entender cómo se abordaban y se resolvían los problemas cuando aún no se habían formalizado muchos conceptos.

Vale aclarar que en la revisión bibliográfica no se consideraron los libros de textos usados normalmente en un curso de probabilidades, ya que en estos se hace poca alusión a la historia. Por ello, se comenzó consultando documentos sobre la historia de cada uno de los conceptos tratados en un curso de probabilidades, llegando así a los personajes que desarrollaron estos conceptos y a los problemas que ellos estudiaron para impulsar la evolución de dichos conceptos.

En esta búsqueda de documentos se encontraron libros clásicos como el titulado *Doctrine of the chances* de De Moivre, traducciones con errores y problemas con varias soluciones. Se seleccionaron aquellos problemas y soluciones que más aportaron a la evolución de las probabilidades.

El documento que se presenta como producto final de este trabajo está conformado por ocho capítulos. En el primer capítulo se presenta un recuento histórico de los eventos más relevantes para el desarrollo de la probabilidad, desde los inicios cuando se juega con dados (con el hueso Astrágalo), hasta la axiomática de Kolmogórov. En el capítulo dos se presentan cuatro problemas que involucran la combinatoria. En el capítulo tres se presentan los problemas de probabilidad planteados por Christian Huygens en su obra *De Ratiocinnis in ludo aleae,* al igual que los dos problemas que planteó el Caballero de Méré a través de correspondencia con

Pascal y Fermat, el problema de la apuesta interrumpida y el problema de obtener un doble seis con dos dados en una cierta cantidad de jugadas. En el capítulo cuatro se trabaja la independencia de eventos según la definición de De Moivre. El capítulo cinco se dedica a la probabilidad a posteriori y al teorema de Bayes. En el capítulo seis se trabajan problemas relacionados con las distribuciones discretas binomial, Poisson e hipergeométrica. El capítulo siete se menciona la distribución normal como la trabajó De Moivre. Por último, en el capítulo 8 se presentan seis problemas clásicos relacionados con curiosidades y paradojas, tales como el problema de Monty Hall y el concurso de las tres puertas, los cuales están asociados a la probabilidad condicional.

En varios momentos de este trabajo también se muestran las dificultades que vivieron los matemáticos antiguos y los errores que ellos cometieron antes de que se consolidaran los métodos y técnicas que se utilizan actualmente.

Como producto final de este trabajo se ha logrado un documento rico en problemas y reseñas históricas que se espera sirva como material de consulta a los estudiantes que están cursando el espacio académico de probabilidad.

Con este documento no se pretende sustituir libros de historia de las matemáticas ni estudios realizados por historiadores investigadores, es un ejercicio de revisión bibliográfica que busca rescatar algunos problemas clásicos que podrían utilizarse en un primer curso de probabilidades como elemento motivacional, que a la vez puede constituirse en la puerta para entrar a un estudio profundo y sistemático de los problemas clásicos olvidados por muchos autores de libros de texto.

“En la medida en que usted se aparte de la igualdad, sí es a favor de su contrincante, usted es tonto, y si es al suyo propio, usted es injusto.”

Girolamo Cardano (1501 – 1576)

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Elaborar un recurso bibliográfico para docentes y estudiantes interesados en conocer algunos problemas clásicos que hacen parte de la evolución de la teoría de las probabilidades.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Identificar y discutir problemas históricos que hayan tenido presencia en la evolución de la teoría de las probabilidades.
- Consultar material bibliográfico que presente el análisis y las soluciones de los problemas encontrados.
- Compilar en un documento escrito la descripción, análisis y solución de los problemas históricos encontrados.

METODOLOGÍA

En este apartado se describirá el proceso desarrollado para lograr un recurso bibliográfico sobre problemas clásicos en la historia de las probabilidades, tomándose como hilos conductores tres interrogantes: ¿Cuáles son los orígenes de la noción de probabilidad?, ¿Cómo evolucionó la probabilidad, a partir de las soluciones a los problemas planteados por los matemáticos de la época? o ¿Por qué la correspondencia entablada entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat se considera de vital importancia para el estudio de la evolución de la probabilidad?.

Para llegar a respuestas para estos interrogantes, primero se analizó la evolución de los juegos de azar, así como los métodos para tratar de predecir los resultados, ya que las ansias de ganar o de tener ventaja en los juegos prácticamente fueron los detonantes que motivaron buscar la manera de conocer los posibles resultados. Todo esto se realizó a partir del análisis de textos como *De ratiociniis in ludo aleae* de Huygens, del cual se obtuvieron varios problemas para analizar.

En la revisión documental que se hizo, lo que se encontró respecto a la importancia de la correspondencia entre Pascal y Fermat, para el desarrollo de la probabilidad, radicó en el interés que despertó en los demás el tipo de problemas que desarrollaban en sus cartas y los diferentes puntos de vista que se podían generar con un “simple” problema, así como los métodos para su solución, y el reconocer que había todo un mundo de matemáticas sin descubrir.

Un aspecto igual de importante que se estudió, además de los métodos de solución de los problemas que se produjeron a partir del intercambio de la correspondencia, fue analizar cómo se dio el proceso de formalización de la teoría de la probabilidad, que empezó con Pascal y Fermat, de donde posteriormente los conocimientos se renovaron con nuevos problemas para desarrollar, que implicaban el uso de herramientas originales, que exigían a su vez no sólo la evolución de los métodos de solución sino también la evolución hacia la formalización a gran escala de los conocimientos que se tenían de probabilidad hasta ese entonces.

Por último, se recopilaron algunos problemas y los métodos de solución empleados por distintos matemáticos, y se seleccionaron los que cumplían con los objetivos del trabajo, es decir, los que dan respuesta a los interrogantes planteados anteriormente.

CAPÍTULO 1: EVOLUCIÓN DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Un hueso con algunas marcas hallado en unas excavaciones, puede ser la clave para mostrar que los juegos de azar tienen una antigüedad de más de 40.000 años; este hueso llamado Astrágalo o Talus, es un hueso extraído del talón de animales como ovejas, ciervos o caballos, y al parecer es el precursor del dado moderno. Los Sumerios y Asirios los tallaban y les realizaban distintas marcas en sus caras, para identificar que pudieran caer de cuatro formas diferentes; así mismo Heródoto un historiador griego del siglo V a.C., describe como los antiguos griegos los implementaron en sus múltiples juegos que implicaban la suerte, y denominaron este mismo hueso como “taba”; es así como en diferentes piezas observables de mármol o cerámica, hasta en la misma literatura podemos encontrar figuras y descripciones de personas jugando tabas, como la escultura hecha por el célebre Policleto, en el siglo V a.C., una de sus obras más renombradas, en honor a la *Astrogolizonta* (Imagen 1), es decir, “la jugadora de tabas”.

Imagen 1. Astrogolizonta [Fuente Wikipedia]

Aunque también los astrágalos se pueden vincular con las divinidades, ya que los sacerdotes griegos usaban las diferentes combinaciones de los resultados al lanzar estos huesos de cuatro caras, para expresar los deseos de sus dioses, y para poder adivinar el futuro.

A pesar de que las culturas antiguas disfrutaban de una afición por los juegos que involucraban el lanzamiento de “dados”, y de que trataron de analizar el juego para poder determinar (predecir) la ocurrencia o no de determinado resultado, lo cierto es que no lograron identificar, que, después de realizar una gran cantidad de lanzamientos de un “dado” con pocas irregularidades en sus caras (dado balanceado), este tendía a arrojar un número similar de resultados de cada cara, lo que conocemos hoy en día con el nombre de equiprobabilidad. Algunas de las causas de que no visualizaran este comportamiento al realizar múltiples veces el mismo juego, se deben en parte a los mismos dados y su imperfección, al igual que a las ideas religiosas de ese entonces, ya que eran muy deterministas (según Ruiz (2012)), puesto que no se permitía encontrar una causa diferente de que se diera cierto resultado al lanzar los dados, más que por la voluntad divina. Además que no se tenía la idea de modelar situaciones que involucraban el azar, mediante las matemáticas; es precisamente por estas cuestiones que el desarrollo del cálculo de probabilidades se retrasó muchos siglos.

Es justo en el Renacimiento donde a este problema de contabilizar la cantidad de posibles resultados al lanzar reiteradas veces un mismo dado, se le sumaron problemas cotidianos como la forma de repartir ganancias entre jugadores a los que se les interrumpe un juego antes de finalizarlo; la finalidad de solucionar estas inquietudes era encontrar la manera más justa para repartir ganancias, o también la forma de obtener cierta ventaja al conocer los posibles resultados.

En el poema de Richard de Fournival (1200-1250) llamado *De Vetula*, se encuentra registrado uno de los primeros problemas sobre enumerar la cantidad de posibles combinaciones al lanzar tres dados. En este poema se muestra de forma correcta que la cantidad de combinaciones posibles al lanzar tres dados es 216; esto era algo que hasta ese momento se había calculado de forma errónea por los estudiosos de las matemáticas, ya que no tenían en cuenta las formas en que se puede permutar los resultados en una misma combinación.

Según Charles (1981), en Italia, en el siglo XV, se encuentran los primeros intentos de aplicar el álgebra recién aprendida en los problemas asociados al juego y al azar. El más importante de entre ellos era el problema de la repartición o "división" de ganancias, que en general Charles describe así "Dos o más jugadores compiten por un premio que se logrará cuando alguno de ellos haya ganado *n* juegos. Si el juego se interrumpe de mutuo acuerdo antes de ese momento, ¿cómo repartir o "dividir" el premio?". Un problema similar con un juego de pelota es abordado por Luca Pacioli (1445-1517) en su obra *Summa di Arithmetica, Geometria e Proporcionalita.* El cuál analizaremos en el desarrollo de este trabajo.

Girolamo Cardano (1501-1576) y Niccolo Tartaglia (1499-1557), también trabajaron sobre este problema de la repartición, pero fue Cardano quien escribe alrededor de 1546 su obra *Liber de Ludo Aleae*, publicada en 1663, un intento de solución a este problema, utilizando inconscientemente los teoremas de unión e intersección de sucesos. A pesar de que ya hace tiempo se sabía que el número de las posibles combinaciones al lanzar tres dados era 216, fue Galileo Galilei (1564-1642), quien en su obra titulada *Sul punteggio nel lancio dei dadi* (Sobre la puntuación en tiradas de dados) llegó a la misma conclusión, asignándole a esta cantidad de posibles combinaciones la igualdad de $216 = 6^3$. Sin embargo, el mayor aporte de Galileo al desarrollo de la probabilidad fue la teoría de la medida de errores. Por medio de ella clasificó los errores en dos tipos: "sistemáticos" y "aleatorios", clasificación que se mantiene todavía y estableció las propiedades de los errores aleatorios. Este descubrimiento fue clave para la creación de la Estadística y la Probabilidad.

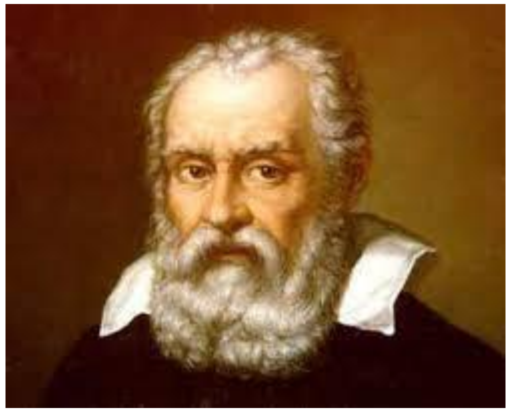


Imagen 2. Galileo Galilei (1564-1642).(Fuente (UJI, S.f))

Para Ruiz (2012) la probabilidad comenzó a estudiarse de manera más exhaustiva debido a una conversación que tuvo el matemático francés Blaise Pascal (1623-1662), en un viaje que realizó en 1654 junto al reconocido jugador y escritor también francés Antoine Gombaud (1607-1684), a quien llamaban el caballero de Meré. Antoine era un apasionado por los juegos con dados y cartas. Él creía que en el juego de los dados había una “falsedad” en los resultados, ya que afirmaba que el comportamiento de los dados cambiaba según la cantidad de ellos que se empleaban en el juego; el supuesto error se basaba en una comparación mal hecha por su parte en las probabilidades de obtener un seis con un dado o la de tener un seis con dos dados.

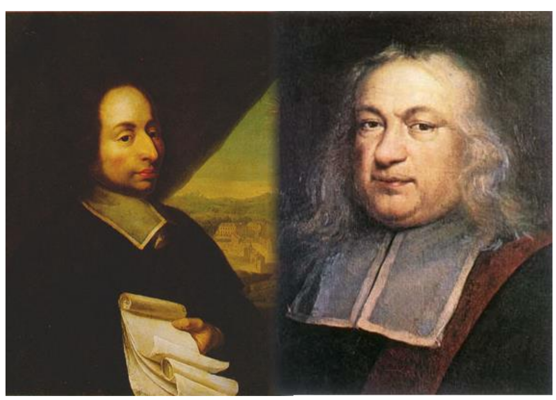


Imagen 3. Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665) (Fuente (UJI, S.f)

Para Gombaud, la relación que existía entre la cantidad de lanzamientos necesarios para obtener cualquiera de los dos resultados debía ser una relación de proporcionalidad, y es allí donde radica su error, pues no se dio cuenta que en el segundo caso cuando se trata de obtener un seis con dos dados se estaba ante una probabilidad compuesta, es decir que todas las posibles probabilidades se calculan multiplicativamente.

Debido a las problemáticas planteadas por el caballero de Meré al señor Pascal referentes a los juegos de azar, surgió una de las correspondencias más importantes en la historia de la probabilidad; y es la correspondencia que involucra a Pascal y a varios de sus amigos y conocidos matemáticos, de entre los que destaca Pierre de Fermat (1601-1665), un abogado francés con una fascinación por las matemáticas.

De las cartas que se enviaron de parte y parte, y sobre las soluciones de muchos problemas relacionados con juegos de azar y probabilidades que Pascal y Fermat resolvieron, se formaron las bases de lo que hoy conocemos como la formalización de la teoría de la probabilidad. Pero no fue, hasta que el astrónomo y matemático Christiaan Huygens (1629-1695), inspirado por los resultados propuestos sobre los problemas tratados por Pascal y Fermat, publicó en su tratado llamado *De Ratiocinnis in ludo aleae* (sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados), la correspondencia que mantenían estas dos grandes mentes; aunque Huygens no sólo publicó dicha correspondencia, sino que también extendió algunos de los resultados de Pascal, y a su vez elaboró trabajos relacionados con la filosofía y matemática cartesiana.

Más adelante los trabajos de Pascal sobre probabilidad llegaron a estudiarse en diversos campos como el de la filosofía y la teología, donde se intentaba argumentar la existencia de Dios con métodos probabilísticos y en términos de ganancia, deduciendo así que *probabilísticamente es mejor creer que no creer*.

Imagen 4. Christiaan Huygens (1629-1695) (Fuente (UJI, S.f)

A medida que el tiempo avanzaba, la cantidad de matemáticos que se interesaban en el tema de las probabilidades iba en aumento; matemáticos como Jacob Bernoulli (1654-1705), quien en su obra *Ars conjectandi* (El arte de la conjetura), publicada en 1713 ocho años después de su muerte, es el primero en dar la definición clásica de probabilidad, mostrando proporciones de posibilidades respecto del total; pero a la cual Abraham de Moivre (1667-1754) un matemático exiliado en Inglaterra, reformularía en los siguientes términos: "fracción en la que el numerador es igual al número de apariciones del suceso y el denominador es igual al número total de casos donde ese suceso pueda o no pueda ocurrir*".* En este mismo libro Jacob encuentra probabilidades de eventos donde era imposible calcular la cantidad de casos favorables y menciona: "lo que no se puede hallar a priori se puede obtener a posteriori, mediante la observación múltiple de resultados de pruebas similares..." También para estas fechas, según comenta Pérez Hidalgo (2015), citando a (Todhunter, 1865), el matemático francés Pierre Rémond de Montmort (1678-1719), publica su libro sobre la probabilidad *Essay d'Analyse sur les Jeux Hazard* (Ensayo de análisis sobre los juegos aleatorios) y menciona que *"*en 1708 publicó su trabajo sobre Probabilidad donde, con la valentía de Colón, reveló un nuevo mundo a los matemáticos*".*

Imagen 5. Jacob Bernoulli (1654-1705) (Fuente (UJI, S.f))

Es así como introduce el concepto de probabilidad “estadística” (actualmente conocida como probabilidad frecuentista), otorgándole el significado como probabilidad de un suceso, al resultado que se obtiene de repetir un número grande de veces el mismo proceso en condiciones similares. Sin embargo, las condiciones mencionadas anteriormente no fueron suficientes para brindar una definición rigurosa, ya que se menciona el concepto de *número grande,* pero no se menciona cuán grande debe ser este número, así como tampoco se aborda el significado de *pruebas similares,* ni tampoco si había un error máximo permitido. Cabe resaltar que para estas épocas aún no se tenía presente la equiprobabilidad de los eventos, al trabajar en estas definiciones.

En *El arte de la conjetura* también se encuentra, entre otras cosas, la proposición conocida como el Teorema de Bernoulli por medio del cual, la teoría de la probabilidad pasó de ser un conjunto de soluciones de problemas particulares a un área de gran importancia general. Aunque Cardano muchos años antes afirmó sin prueba alguna que *la precisión de las estadísticas empíricas tiende a mejorar con el número de intentos,* fue Jacob Bernoulli quien por su afán de precisar lo que se debía entender por *número grande de intentos*, y de querer calcular el error del valor obtenido de un evento frente al valor teórico, lo que lo motivó a desarrollar en su obra, de manera intuitiva, el teorema fundamental de la ley de los grandes números, el cual nos indica que si repetimos muchas veces (tendiendo al infinito) un mismo experimento, la frecuencia de que suceda un cierto evento tiende a ser una constante, y esta será a su vez la probabilidad de que ocurra este mismo evento. Este trabajo sobre la ley de los grandes números será retomado años después y estudiado más a fondo por el físico y matemático Simeón Denis Poisson (1781-1840).

Imagen 6. Thomas Bayes (1701-1761) (Fuente. BBC NEWS)

Durante el siglo XVIII se desarrollaron algunos de los teoremas más importantes de teoría de la probabilidad clásica, entre ellos se destaca el teorema de la adición desarrollado por Jacob Bernoulli, que más adelante sería formalizado por Thomas Bayes (1701-1761) quien se desempeñaba como ministro presbiteriano; está también el teorema de la multiplicación estudiado por De Moivre, ya mencionado Thomas Bayes con su teorema de la probabilidad condicional; aunque cabe aclarar que los conceptos que trabajan estos dos teoremas ya habían sido mencionados y analizados por Pascal, Fermat y Huygens. A pesar de estos desarrollos hechos en la teoría de la probabilidad por todos los matemáticos de la época, quien realiza uno de los aportes más importantes fue Pierre Simon Laplace (1749-1827), al formalizar y desarrollar la teoría analítica de la probabilidad clásica, en su obra titulada *Théorie Analytique des Probabilités* (Teoría Analítica de las Probabilidades) publicada en 1814: También Laplace estudió la teoría de la decisión, pues en sus trabajos existen elementos básicos para afrontar problemas que implican la toma de decisiones.

Otra obra de Laplace con grandes aportes a la teoría de la probabilidad es *Memoire sur la probabilité des causes par les évènemens* (Memorándum sobre la probabilidad de las causas a los hechos) publicada en 1774; en esta memoria el célebre físico y matemático, enseña los principios para estimar las probabilidades sobre las causas por la cuales se puede producir un suceso observable; aunque estas estimaciones ya las había trabajado Bayes con su probabilidad inversa.

La forma como Laplace abordó y analizó los temas trabajados sobre probabilidad y estadística, supuso un cambio en el paradigma de los matemáticos que lo antecedían; y es que Laplace comienza a "domesticar" el azar al iniciar una formalización más rigurosa de la probabilidad, que permite esa ampliación panorámica de la teoría y que inicia ese movimiento que estaba estancado en el "concepción clásica" hacia la "concepción frecuencial" y "bayesiana", en cambio con él, se comenzó el proceso de formalizar la teoría de la probabilidad, para así poder abordar problemas más generales y de diferentes campos. Es así como en su *memoria Sur les naissances, les mariages et les morts á Paris* (En los nacimientos, matrimonios y defunciones en París), donde menciona que "*en el fondo de la teoría de las probabilidades es sólo sentido común expresado en números*"; incluso trabaja un problema que involucra la inferencia estadística respecto a una población; dando inicio a múltiples campos de investigación para la aplicación de la estadística en las ciencias sociales, como problemas demográficos, jurídicos, además de problemas de astronomía. Gracias a la variedad de temas trabajados, a su análisis e innovación sobre las matemáticas, así como por formalizar sus objetos de estudio, Laplace se convierte en uno de los personajes fundamentales para el avance de la probabilidad.

La introducción de la teoría de límites al estudio de las probabilidades, por parte de Laplace, trajo consigo que el análisis combinatorio desarrollado por Bernoulli perdiera su fuerza, con la que años antes había permitido desarrollar toda la base matemática de la teoría de las probabilidades

El alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los matemáticos más grandes del siglo XIX, realizó otro gran aporte que revolucionó la teoría de la probabilidad, es la llamada teoría de los errores, trabajada a la par con Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) y con Laplace; juntos lograron implementar el método de los mínimos cuadrados como procedimiento básico para resolver los problemas que se presentaban en esta nueva teoría. Entre ellos los problemas que involucraban el cálculo de mediciones exactas, como en la astronomía, y es que esta ciencia fue la primera en preocuparse de la medida de los errores en la presencia de varias observaciones diferentes de un mismo objeto.

Así mismo y de manera independiente Gauss y Laplace aplican sus conocimientos sobre probabilidad, para analizar los errores sobre las medidas de las observaciones tanto físicas como astronómicas. Esta teoría de los errores adquiere tal importancia, que grandes científicos como James Clerk Maxwell (1831-1879), Ludwig Boltzmann (1844-1906) y Josiah Willard Gibbs (1839-1903) la implementaron junto a otras aplicaciones de la probabilidad en su obra titulada *Mecánica Estadística.* Otro aporte importante en el desarrollo de la teoría de los errores fue realizado por Simeon Denis Poisson (1781-1840), quien descubrió que en ciertas mediciones la media aritmética no es la medida estadística más acertada para representar un conjunto de datos.

Imagen 7. Andréi Nikoláievich Kolmogorov (1903-1987) (Fuente. (Fernández, Ruiza, y Tamao, 2004))

A finales del siglo XIX e inicios del siglo XX se llevó a cabo una reestructuración de las escuelas de pensamiento, que se dedicaban al estudio de las matemáticas específicamente en el área de la teoría de la probabilidad. Entre las escuelas que más destacaban en estos estudios estaban, la escuela rusa dirigida principalmente por Kolmogórov y Khintchine, la francesa a la cabeza de Nevev y Fortret, aunque influida en mayor medida por Paul Levy, la estadounidense creada por Feller y Doob, siendo el mayor exponente de estos estudios el ruso Andréi Nikoláyevich Kolmogórov (1903-1987), ya que en los temas referentes a estadística y probabilidad los rusos llevaban la delantera durante la segunda mitad del siglo XIX. Para inicios del siglo XX exactamente en 1925 junto a su amigo Alexandre Khintchine (1894 –1959) publican el *teorema de las tres series,* (Nualart, 2004) muestra como Kolmogórov y Khintchine, formulan la convergencia de una serie, si y solo si, converge en probabilidad, considerando para ello tres supuestos fundamentales[1]. Con el estudio de este teorema empezó a complementar el trabajo realizado por Jacob Bernoulli y posteriormente retomado por Francesco Cantelli (1875-1966) sobre la suficiencia y condiciones necesarias para la ley débil de los grandes números, obteniendo con este estudio en 1930 el nacimiento de la ley fuerte de los grandes números.

Un año antes en 1929 Kolmogórov publicó un artículo llamado *La Teoría General de la Medida y el Cálculo de Probabilidades*, donde muestra su primera versión de su axiomática sobre la fundamentación de la teoría de la probabilidad, dicha axiomática tiene sus raíces en las propiedades fundamentales de la probabilidad clásica y de la frecuentista; tiempo después pasó a conocerse como la *axiomática de Kolmogórov*. En 1933 publicó el *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Conceptos básicos de la teoría de la probabilidad), allí menciona Kolmogórov que "La axiomática de la probabilidad debe estar construida sobre las bases de la teoría general de la probabilidad y teoría métrica de las funciones. El comportamiento de la teoría a partir de los estudios de propiedades de las funciones depende exclusivamente de la medida de los conjuntos cuando las funciones toman este o aquel conjunto de valores" (Gónzalez, s.f.), es por ello por lo que esta axiomática fundamental es la base de una teoría totalmente rigurosa. Kolmogórov plantea que las probabilidades son valores de una función de conjunto, también conocida como espacio de probabilidad, esta función asigna números reales a subconjuntos de un espacio muestral Ω, como se muestra a continuación:

[1] En (Nualart, 2004) pg. 8 se enuncia y muestra las tres series que deben ser convergentes, para que la serie de las variables aleatorias independientes también converja.

Sea Ω un espacio muestral y sea $\bar{A}$ una colección de subconjuntos del espacio muestral Ω, es decir un conjunto de sucesos. Se define la probabilidad como una función $P: \bar{A} \to [0,1]$, (donde a cada $A \in \bar{A}$ le asigna un $P(A)$), que cumple los siguientes axiomas:

Axioma 1. Si A es un elemento de $\bar{A}$, existe un número $P(A) \geq 0$, denominada probabilidad del suceso A.

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3. Dada una sucesión numerable de sucesos $A_1, \ldots, A_j$, disyuntos dos a dos, es decir $A_1 \cap A_i = \emptyset$, se verifica que: $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

También, como se cumple que $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, usando el axioma 3, se tiene que

- $P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset)$

De lo cual se dedujo lo siguiente:

a) $P(\emptyset) = 0$

b) $\forall B, P(B^c) = 1 - P(B)$, donde B^c representa el complemento del evento B.

c) $\forall B, 0 \leq P(B) \leq 1$

Entre otros resultados.

Gracias al estudio y desarrollo de los tres axiomas propuestos por Kolmogórov, se han encontrado muchas de las propiedades que se trabajan hoy en día en la teoría de la probabilidad; y debido a ello la probabilidad se desarrolló de una manera “enteramente lógica” (Ruiz, 2012), aplicándose en diferentes áreas de investigación como en la física, donde se ha implementado el estudio de la mecánica cuántica. Un ejemplo de la aplicación de la probabilidad en la física está dada en la formulación del principio de indeterminación o de incertidumbre de Heisenberg en 1927, creada por el físico alemán Werner Heisenberg (1901-1976). Este principio afirma que

> *"no se puede determinar, simultáneamente y con precisión arbitraria, ciertos pares de variables físicas, como son, por ejemplo, la posición y el momento lineal de un objeto dado."* (García, hiberus blog, 2012).

Este principio de incertidumbre ejerció una profunda influencia en la física y en la filosofía del siglo XX, ya que supone dejar de imaginar las partículas ocupando una posición determinada en el espacio, para pasar a un mundo de comportamientos aleatorios. Esta situación, unida al desarrollo de otras disciplinas en las que la comprensión del azar ha tomado un importante auge, ha provocado que sea necesario promover y desarrollar la comprensión de esta disciplina desde los primeros años de la educación básica.

CAPITULO 2. PROBLEMAS DE COMBINATORIA Y TÉCNICAS DE CONTEO:

DEFINICIÓN DE COMBINACIÓN DE MONTMORT

> *Algunas veces se entiende por este término combinación, la manera en que varias cosas pueden ser tomadas diferentemente dos a dos. Yo le daría aquí una significación más extensa, y entendería por esta palabra la manera de encontrar de forma general todas las disposiciones que pueden tener sean dos, sean varias cosas, según las que se quiera tomar, o dos a dos, o tres a tres, o cuatro a cuatro, o cinco a cinco, o en fin de todas las maneras posibles.* (Pérez Hidalgo, 2015)

PINGALA Y SU FORMA DE COMBINAR n SILABAS DE UN VERSO.

Este problema es de gran importancia para las matemáticas, ya que durante su resolución Pingala trabajó (sin saberlo) temas como lo números binarios, la sucesión de Fibonacci, utilizó lo que se conoce hoy en día como el triángulo de Pascal para encontrar combinaciones, además que trabajó el concepto de combinaciones con orden.

Pingala (पिङ्गल), fue un matemático indio que vivió aproximadamente en el IV a.C. Autor del libro *Chandra-shastra*, escrito en sánscrito, el cual trata acerca de las métricas, la cual es una parte de la teoría literaria que enseña a contar las sílabas de un verso. Según (Shah, 2013), en este libro, Pingala buscaba la manera de clasificar los miles de versos que conformaban los Vedas (los cuatro textos más antiguos de la literatura india). Para ello primero reconoce que los versos están compuestos por sílabas, y estas a su vez al estar escritas en sánscrito se pueden encontrar en dos formas, las de forma larga también llamadas गुरु *Guru*, descritas por Shah como G, y las de forma corta también llamadas लघु *Laghu*, denotadas por Shah como L. Por ejemplo, la sílaba *Kha* es una silaba corta, a su vez que *Khaa* es una silaba larga.

En su búsqueda, Pingala desarrolla en su libro seis “algoritmos” (definidos así en (Shah, 2013)) encaminados a contar y ordenar las diferentes formas para escribir y cantar un verso con n sílabas. En este caso sólo se mostrarán los algoritmos número uno llamado *Prastāra (Propagar)*, donde se enlista sistemáticamente todas las combinaciones teóricamente posibles de un verso con un número fijo de sílabas; el algoritmo número cuatro llamado *Lagakriyā,* (*Ejercicio corto-largo*), donde calcula el número de combinaciones con un número específico de sílabas cortas L (o sílabas largas G); y el algoritmo cinco llamado *Adhvayoga (contar)*, donde calcula el número total de combinaciones teóricamente posibles de un verso con n sílabas[2].

- ***Prastāra***

Pingala comienza con el problema de enlistar todas las combinaciones de una métrica de n sílabas. Su procedimiento recursivo es el siguiente:

- Comience con las dos formas de la métrica de 1 sílaba: G, L en forma vertical.

- Luego, para obtener las primeras columnas de las combinaciones de una métrica de n sílabas, haga dos copias de las columnas de la métrica de sílabas $(n-1)$, y júntelas de forma vertical (una sobre la otra).

- Para completar con la siguiente columna, agregue G a cada fila en la primera copia, y agregue L a cada fila en la segunda copia. Por ejemplo, con $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$, obtenemos

[2] Pingala utiliza los algoritmos 2, 3 y 6, para encontrar una determinada combinación de sílabas en un verso, cuando se tiene k sílabas largas o cortas, o para calcular el espacio requerido para escribir todas las formas de un verso.

$n = 1$	$n = 2$			$n = 3$		
			Columna Agregada			Columna agregada
G	1ra Copia	G	G	1ra copia	G G	G
L		L	G		L G	G
	2da Copia	G	L		G L	G
		L	L		L L	G
				2da copia	G G	L
					L G	L
					G L	L
					L L	L

Tabla 1. Construcción del listado de las combinaciones de una métrica de n sílabas

Obsérvese que la primera columna de la lista consta de G y L alternados, la segunda columna tiene pares parejas alternadas de G y L, la tercera tiene cuádruples alternados de G y L, y así sucesivamente. Esto proporcionó una forma alternativa de construir la lista de las posibles combinaciones de las sílabas, columna por columna, de izquierda a derecha. También es importante resaltar como Pingala muestra las combinaciones de sílabas LGG, GLG, y GGL, como diferentes, agregando la noción de orden entre estos posibles versos.

Una vez enlistadas las posibles combinaciones, Pingala utiliza su "algoritmo" número cuatro, para identificar la cantidad de posibles combinaciones de versos de n silabas que tengan k sílabas largas (L) o cortas (G).

- ***Lagakriyā***

Esta parte, responde a la pregunta: De todas las posibles combinaciones de una métrica (verso) de n sílabas, ¿cuántas tienen exactamente k sílabas largas (L) o cortas (G)? o expresado en notación moderna: ¿cómo calcular el coeficiente binomial nCk? (Shah, 2013) afirma que en el último texto con las enseñanzas de Pingala se refiere al *Meru-prastāra* (el triángulo de Pascal), y cita a Pingala con instrucciones detalladas para la construcción. *"Primero escribe una celda cuadrada en la parte superior. Debajo, escriba dos celdas, extendiéndose hasta la mitad en* *ambos lados. Debajo de ese tres, debajo de eso nuevamente, cuatro, hasta que se obtenga el número deseado de lugares. Comience escribiendo 1 en la primera celda. En las otras celdas, anote la suma de los números de las dos celdas que están encima. ⋯".* Así, para $n = 6$, obtenemos la siguiente tabla:

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

Tabla 2. Representación del *Meru-prastāra* con $n = 6$

Los números de la fila inferior son el número de versos con 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 L (eles) respectivamente, es decir que, de todas las posibles combinaciones de versos con 6 sílabas, hay 1 (una) combinación con 0 (cero) sílabas largas (L); hay 6 combinaciones con 1 L, hay 15 combinaciones con 2 L, y así hasta llegar a que hay 1 (una) combinación con 6 sílabas largas (6L).

Así mismo, si se suman los números $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$, los que actualmente conocemos que corresponden a los valores de $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \binom{6}{2}, \binom{6}{4}, \binom{6}{5}, \binom{6}{6}$, y se obtiene lo siguiente:

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$$

Con lo cual se obtiene el primer resultado de la pregunta de cuantas formas ordenadas se pueden combinar 6 sílabas entre L, y G.

- ***Saṅkhyā***

Shah muestra, como Pingala usaba la recurrencia en su quinto algoritmo, en el cual calcula el número S_n de todas las combinaciones posibles de una métrica. Señala que el número de combinaciones de la métrica de n sílabas es el doble del número de formas de la métrica de sílabas $(n-1)$. Así puede calcular S_n simplemente duplicando repetidamente la cantidad de sílabas, entonces, el número de formas de un verso que tiene 21 sílabas es 2^{21}. Pero, ¿cuál es el valor de 2^{21}? Pingala proporciona un método recurrente para calcular 2^n y se basa en el hecho de que, si n es par, $2^n = \left(2^{\frac{n}{2}}\right)^2$. Entonces, la recurrencia es: si n es par, $2^n = \left(2^{\frac{n}{2}}\right)^2$ y si n es impar, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$. Pingala lo configura de la siguiente manera:

Digamos que quiero calcular el valor de a^{21}. Como 21 es un número impar puedo escribir

$$a^{21} = a \times (a^{20})$$

Ahora como 20 es par

$$= a \times [(a^{10})^2]$$

$$= a \times [((a^5)^2)^2]$$

$$= a \times [((a \times a^4)^2)^2]$$

$$= a \times [((a \times (a^2)^2)^2)^2]$$

Ahora, esto se ha convertido en un proceso de 6 pasos en lugar de un proceso de 20 pasos.

Usando este método para calcular $S_{21} = 2^{21}$.

$$S_{21} = 2^{21} = 2 \times [((2 \times (2^2)^2)^2)^2]$$

$$= 2 \times [((2 \times 4^2)^2)^2]$$

$$= 2 \times [((2 \times 16)^2)^2]$$

$$S_{21} = 2 \times [(32^2)^2] = 2 \times [(1024)^2]$$

$$= 2 \times 1048576$$

$$= 2097152$$

Se puede tener $2'097{,}152$ de versos diferentes con 21 sílabas[3].

[3] Tiempo después el Prosista y matemático Virahāṅka estudia los resultados de Pingala y encuentra otra forma para calcular el número de combinaciones de tiempos en un verso con n sílabas, llegando por recurrencia, lo que hoy conocemos como los números de Fibonacci $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. Se puede estudiar en (Raja y Srinivas, 2015).

EL DUQUE DE TOSCANA Y EL PROBLEMA DE LOS TRES DADOS

Como menciona (Hernández, 2018), los juegos de azar animaron a importantes pensadores a estudiar los fenómenos que se producían en entorno a estos. En un dado bien equilibrado se puede esperar que al lanzarlo obtengamos, por ejemplo, una posibilidad entre seis de sacar cualquier número de 1 a 6. Pero más que eso, se asume de forma incuestionable la ley de los grandes números, de modo que cuando lanzamos un dado enumerado del 1 al 6 seiscientas veces, se espera que cada número salga aproximadamente cien veces, lo que actualmente conocemos como equiprobabilidad.

Precisamente la equiprobabilidad fue uno de los primeros problemas que trabajaron los matemáticos del siglo XVII y XVIII; ya que trataban de determinar o de distinguir, cuando dos eventos aleatorios tenían la misma "suerte" de ocurrir en los juegos que involucran el azar; y para solucionar esta cuestión basaron sus respuestas en múltiples observaciones, ya que en muchas ocasiones cuando se repetía varias veces un evento aleatorio que involucra dos sucesos, estos ocurrían con la misma frecuencia.

Aunque la equiprobabilidad en ese entonces se reducía a un problema netamente aritmético, donde solo se debía contar la cantidad de veces que ocurría un suceso, se presentaban equivocaciones como *el error de D'Alembert* (1717-1783), el cual dice lo siguiente:

Se lanzan una vez dos monedas al aire: ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos una vez cara? D'Alembert razonó de esta manera. Los casos posibles que pueden obtenerse al lanzar las monedas son tres: dos caras (C,C), dos cruces (X,X), una cara y una cruz (C,X); el número de casos favorables son dos (C,C), y (C,X); en consecuencia, la probabilidad es de $2/3$. (Barrio Gutierrez, 1984).

En este caso D'Alembert no tuvo en cuenta que hay dos formas diferentes de obtener una cara y una cruz, y ellas son $(C,X),(X,C)$, y es que, a pesar de que dos monedas parecen ser visualmente iguales, ellas son diferentes, por lo que sus resultados también lo son. Por lo tanto, la probabilidad pedida a D'Alembert es $3/4$.

Mantilla (2020) indica que es justo a causa de esta equivocación, que el Duque de la Toscana acude a Galileo para que sea él quien dé una solución a su inquietud, y es que en el problema que hoy en día conocemos como *el problema de los tres dados* o también conocida como *la paradoja de los tres dados*, el Duque menciona que tras jugar y analizar un juego que consiste en lanzar tres dados una vez, o lanzar un solo dado tres veces seguidas, observó que al sumar los puntos obtenidos por los tres dados, aparecía con mayor frecuencia un resultado de 10, que un 9 como resultado de dicha suma; algo que a él le parecía absurdo, puesto que (según él) ambos resultados pueden descomponerse de seis formas diferentes como suma de tres valores del uno al seis, y por lo tanto los dos valores deberían ser igual de probables de salir. Las sumas mencionadas son:

$$9 = 1 + 2 + 6 \qquad 10 = 1 + 3 + 6$$

$$9 = 1 + 3 + 5 \qquad 10 = 1 + 4 + 5$$

$$9 = 1 + 4 + 4 \qquad 10 = 2 + 2 + 6$$

$$9 = 2 + 2 + 5 \qquad 10 = 2 + 3 + 5$$

$$9 = 2 + 3 + 4 \qquad 10 = 2 + 4 + 4$$

$$9 = 3 + 3 + 3 \qquad 10 = 3 + 3 + 4$$

En este caso el Duque de la Toscana, no tuvo en cuenta la diferencia entre las formas en que un número se puede descomponer como la suma de tres números entre uno y seis, y la forma de obtener este mismo número al lanzar los tres dados. Un ejemplo que muestra esta equivocación sería la forma de obtener un 5 como la suma de los puntajes de los tres dados, ya que la única manera de lograr este resultado es con la descomposición $5 = 1 + 1 + 3$, pero en esta descomposición el 3 pudo salir en el primer, segundo o tercer dado, de tal manera que hay una forma de descomponer el número 5, pero con tres diferentes formas de que ocurra este evento al lanzar los tres dados. Este error se debió a que el Duque creía que los dados eran iguales e indistinguibles.

La idea que tuvo Galileo para resolver este problema, surgió en el momento en que reconoció que se debía tener en cuenta no solo los números requeridos para que su suma dé el valor esperado, sino que también se debía tener en cuenta el resultado individual de cada dado; ya que, por ejemplo, de la tripleta $(6,2,3)$, la cual quiere decir que el primer dado arrojó un 6, el resultado del segundo dado fue un 2, y en el tercer dado se obtuvo un 3; se pueden utilizar estos mismos valores para formar la tripleta $(2,3,6)$, donde el primer dado saca un 2, el segundo un 3 y el tercero un 6. Partiendo de esta información Galileo dedujo que las tripletas de números que dan como resultados al sumarlos un 9 o 10, pueden salir ordenados de formas diferentes; con el ejemplo de la tripleta $(6,2,3)$, se pueden obtener las siguientes:

$$(2,3,6), (2,6,3), (3,2,6), (3,6,2), (6,2,3), (6,3,2)$$

Al utilizar este mismo procedimiento con cada tripleta de números que al sumarlos dan como resultado 9 o 10, todas sus diferentes maneras en las que se pueden ordenar son:

$9 = 1 + 2 + 6$	(6 maneras)	$10 = 1 + 3 + 6$	(6 maneras)
$9 = 1 + 3 + 5$	(6 maneras)	$10 = 1 + 4 + 5$	(6 maneras)
$9 = 1 + 4 + 4$	(3 maneras)	$10 = 2 + 2 + 6$	(3 maneras)
$9 = 2 + 2 + 5$	(3 maneras)	$10 = 2 + 3 + 5$	(6 maneras)
$9 = 2 + 3 + 4$	(6 maneras)	$10 = 2 + 4 + 4$	(3 maneras)
$9 = 3 + 3 + 3$	(1 manera)	$10 = 3 + 3 + 4$	(3 maneras)
Maneras totales	25 maneras		27 maneras

Es así como Galileo mostró, que, el 9 como resultado de la suma de los puntos de los tres dados, puede aparecer de 25 maneras diferentes, en cambio que el número 10 como el resultado de la misma suma, puede encontrarse de 27 diferentes formas posibles; con lo cual responde a la inquietud del Duque de la Toscana, de porque salía con mayor frecuencia la suma de 10 que la de 9 al lanzar los tres dados. Con ello Galileo realizó un gran aporte a la probabilidad y al estudio de los eventos y de los sucesos equiprobables.

EL PROBLEMA DE LAS CARTAS MAL DIRIGIDAS

El problema en general dice así:oo

> *Determinar el número de permutaciones de n elementos en los que ningún elemento ocupa su lugar natural.* (Ibañez, 2017)

Este problema fue considerado por primera vez por Nicolaus Bernoulli (1687 1759), sobrino de los dos grandes matemáticos Jacob y Johann Bernoulli. Posteriormente, Leonhard Euler se interesó por el problema, al que denominó *a quaestio curiosa ex doctrina combinationis* (un curioso problema de la teoría de combinaciones), y lo resolvió independientemente de Bernoulli. El problema se puede plantear de una forma algo más concreta, como el problema de las cartas mal dirigidas:

> *Alguien escribe n cartas y escribe las direcciones correspondientes en n sobres. ¿De cuántas formas diferentes hay de colocar todas las n cartas en los sobres incorrectos (es decir que la dirección del sobre no corresponde a la carta que lleva adentro)?* (Ibañez, 2017)

Este problema es particularmente interesante por su ingeniosa solución.

Las cartas se identifican como $c_1, c_2, \dots, c_n$, y los sobres correspondientes como $S_1, S_2, \dots, S_n$. Así mismo el número de permutaciones de n número de cartas extraviadas o mal colocadas en sus sobres, se designa como $D(n)$. Después, como afirma (Ibañez, 2017) se deben considerar dos casos:

Caso 1*:* Las permutaciones de los objetos, esto es, las maneras de poner las cartas en los sobres, de tal forma que la carta c_1 esté en el sobre S_2 y la carta c_2 esté en S_1

Además en este caso, las cartas $c_3, c_4, \dots, c_n$ se encuentran en los sobres $S_3, S_4, \dots, S_n$, pero cada una de las $n-2$ cartas c_i no está en el sobre correcto S_i ($i = 3, 4, \dots, n$). Por tal razón, la cantidad de las permutaciones es $D(n-2)$, o también se puede expresar como el número de permutaciones de $n-2$ objetos de forma que ninguno esté en su correcta posición.

Caso 2: Las permutaciones donde la carta c_1 está en el sobre S_2, pero la carta c_2 no está en el sobre S_1.

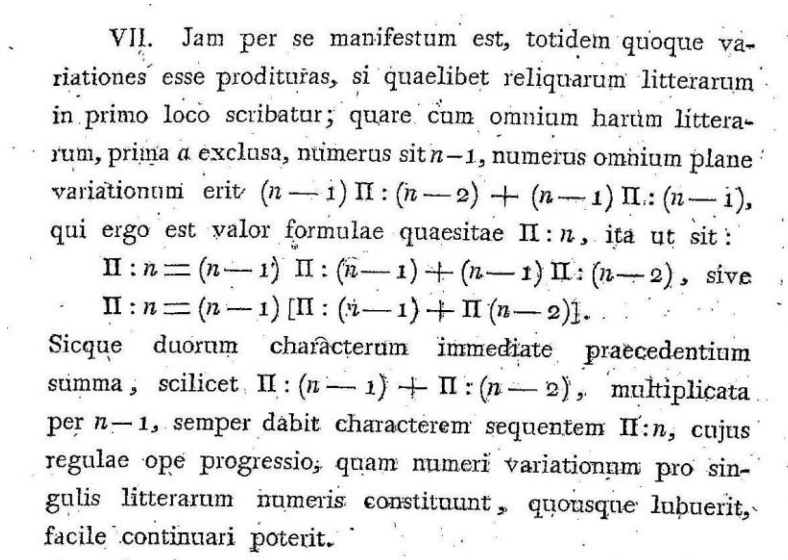
En este caso hay que distribuir las cartas $c_2, c_3, c_4 \dots, c_n$ en $S_1, S_3, S_4, \dots, S_n$, de forma que c_2 no esté en S_1, así como c_3 no debe estar en S_3, c_4 no esté en el sobre S_4, y así sucesivamente hasta la carta c_n que no puede estar en el sobre S_n. Entonces el número de permutaciones donde la carta c_1 está en el sobre S_2, pero la carta c_2 no está en el sobre S_1 es $D(n-1)$.

Entonces el número de todos los casos en los que la carta c_1 termina en el sobre S_2 es:

$$D(n-2) + D(n-1).$$

Dado que cada operación de colocar " c_1 en S_3", "c_1 en S_4,"… produce un número igual de casos, el número total $D(n)$ de todos los casos posibles es:

$$D(n) = (n-1) \cdot [D(n-2) + D(n-1)].$$



VII. Jam per se manifestum est, totidem quoque variationes esse prodituras, si quaelibet reliquarum litterarum in primo loco scribatur; quare cum omnium harum litterarum, prima a exclusa, numerus sit $n-1$, numerus omnium plane variationum erit $(n-1)\,\Pi:(n-2) + (n-1)\,\Pi:(n-1)$, qui ergo est valor formulae quaesitae $\Pi:n$, ita ut sit:

$$\Pi:n = (n-1)\,\Pi:(n-1) + (n-1)\,\Pi:(n-2),\ \text{sive}$$

$$\Pi:n = (n-1)\,[\Pi:(n-1) + \Pi\,(n-2)].$$

Sicque duorum characterum immediate praecedentium summa, scilicet $\Pi:(n-1) + \Pi:(n-2)$, multiplicata per $n-1$, semper dabit characterem sequentem $\Pi:n$, cujus regulae ope progressio, quam numeri variationum pro singulis litterarum numeris constituunt, quousque lubuerit, facile continuari poterit.

Imagen 8. Parte del documento «*Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum*» (1811), de Leonhard Euler. [Fuente (Ibañez, 2017)]

Esta fórmula también se puede transformar así:

$$D(n) = (n-1) \cdot D(n-2) + (n-1) \cdot D(n-1)$$

$$D(n) = (n-1) \cdot D(n-2) + n \cdot D(n-1) - D(n-1)$$

$$D(n) - n \cdot D(n-1) = (n-1) \cdot D(n-2) - D(n-1)$$

Para finalizar en:

$$D(n) - n \cdot D(n-1) = -[D(n-1) - (n-1) \cdot D(n-2)] \qquad (1)$$

De donde podemos afirmar que:

- $D(1) = 0$ (no hay manera de no poner una carta en cualquiera de los sobres).
- $D(2) = 1$ (hay una sola manera de poner 2 cartas en 2 sobres equivocados).
- $(-1)^{n-2} = (-1)^n$.

Remplazando n por los valores 3, 4, 5…n, en la fórmula (1), se obtiene

$$D(3) - 3 \cdot D(2) = -[D(2) - (2) \cdot D(1)]$$

$$D(4) - 4 \cdot D(3) = -[D(3) - (3) \cdot D(2)]$$

$$D(5) - 5 \cdot D(4) = -[D(4) - (4) \cdot D(3)]$$

$$\vdots$$

$$D(n) - n \cdot D(n-1) = -[D(n-1) - (n-1) \cdot D(n-2)]$$

Ahora hace una sustitución consecutiva, en donde en cada paso se va bajando el valor de $D(k)$ en una unidad y se alterna el signo de la expresión $(-1)^n$, el resultado es:

$$D(n) - n \cdot D(n-1) = (-1)^{n-2}[D(2) - 2 \cdot D(1)]$$

Y aplicando las tres propiedades mencionadas anteriormente, se tiene que:

$$D(n) - n \cdot D(n-1) = (-1)^n$$

(Dörrie, 1965) comenta que Euler decide dividir esta nueva función entre $n!$

$$\frac{D(n)}{n!} - \frac{D(n-1)}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Y de nuevo asignando a n los valores esta vez de $2, 3, 4, \ldots, n,$ se obtiene

$$\frac{D(2)}{2!} - \frac{D(1)}{(1)!} = \frac{(-1)^2}{2!}$$

$$\frac{D(3)}{3!} - \frac{D(2)}{(2)!} = \frac{(-1)^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$\frac{D(n)}{n!} - \frac{D(n-1)}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Y al sumar estos $n-1$ términos, da como resultado

$$\frac{D(n)}{n!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Es decir que, con notación más actual, se tiene

$$D(n) = n! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Es por ello que el número de permutaciones que se pueden formar a partir de n elementos en los que ningún elemento se encuentra en su lugar correcto es

$$n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

En este caso para un valor de n cartas, se calcula que hay $D(n)$ permutaciones posibles para que ninguna de ellas quede en el sobre que le correspondiente. Por ejemplo, si $n = 3$, entonces $D(3) = 2$, si $n = 4$, entonces $D(4) = 9$, es decir que para las cartas c_1, c_2, c_3, c_4, hay 9 permutaciones posibles donde ninguna de ellas queda en su sobre correspondiente S_i $i = 1, 2, 3, 4$, y esas permutaciones son $(S_2S_1S_4S_3)$, $(S_2S_3S_4S_1)$, $(S_2S_4S_1S_3)$, $(S_3S_1S_4S_2)$, $(S_3S_4S_1S_2)$, $(S_3S_4S_2S_1)$, $(S_4S_1S_2S_3)$, $(S_4S_3S_1S_2)$, $(S_4S_3S_2S_1)$.

EULER Y EL PROBLEMA DE LOS PUENTES DE KONIGSBERG

Este problema es de gran importancia ya que según (Bueno, Dianéz, Elías, Nuñez, y Pérez, 2004) fue el promotor de la teoría de grafos. Además, que en el aula se puede implementar para introducir las primeras nociones de combinatoria.

LA CIUDAD DE KÖNIGSBERG

En la pintoresca ciudad de Königsberg, Prusia, a orillas del río Pregel; se encontraban 7 puentes que conectaban las cuatro partes que conformaban la ciudad.

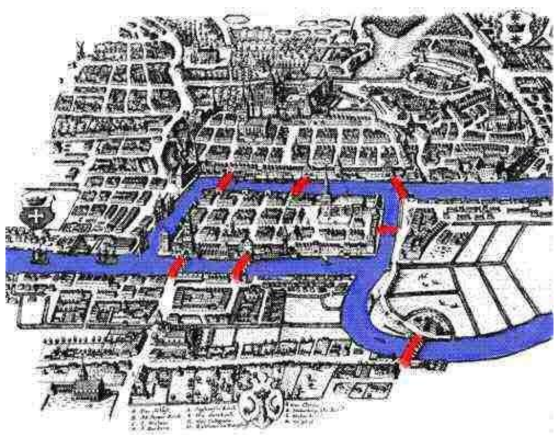


Imagen 9. Ciudad de Königsberg, y sus 7 puentes [fuente (Paoletti, 2011)]

Los siete puentes se llamaron Puente de herrero, Puente de conexión, Puente verde, Puente del comerciante, Puente de madera, Puente alto y Puente de miel. Según cuentan las historias, los ciudadanos de Königsberg pasaban las tardes de los fines de semana caminando por su ciudad. Mientras lo hacían, se decidió crear un juego para ellos mismo, con la finalidad de conocer la ciudad, pero con una condición, se debía cruzar cada uno de los siete puentes solo una vez. Lastimosamente ninguno de los ciudadanos de Königsberg pudo crear una ruta que les permitiera cruzar cada uno de los puentes una única vez, aunque tampoco pudieron probar que hacer esto era imposible. Es por ello por lo que consultaron esta inquietud con el matemático Leonard Euler quien vivía no muy lejos de allí.

Según (Paoletti, 2011) Euler rechazó al principio trabajar en este problema, pues en una carta dirigida al entonces alcalde de la ciudad Carl Leonhard Gottlieb Ehler, afirma que

“. . . Así ve, muy noble señor, cómo este tipo de solución tiene poca relación con las matemáticas, y no entiendo por qué espera que un matemático la produzca, y no cualquier otro, porque la solución se basa únicamente en la razón y su descubrimiento. no depende de ningún principio matemático.”

A pesar de que para Euler este problema era muy trivial, despertó en él una gran intriga, y es por ello que en el año de 1736 le escribe una carta al ingeniero y matemático Giovanni Marinoni, comentándole lo siguiente

“Esta pregunta es tan banal, pero me pareció digna de atención en el sentido de que ni la geometría, ni el álgebra, ni siquiera el arte de contar eran suficientes para resolverla.” (Paoletti, 2011)

Para Euler este problema tenía relación con un tema que había trabajado Gottfried Leibniz llamado *geometriam situs,* o geometría de la posición, lo que actualmente se conoce como teoría de grafos. Como menciona (Bueno, Dianéz, Elías, Nuñez, y Pérez, 2004) Euler aborda este problema específico (con 7 puentes) como una solución general con cualquier cantidad de regiones y cualquier número de puentes.

El 26 de agosto de 1735 Euler escribe un artículo con la solución a este problema, llamado *Solutio problematis ad geometriam situs pertinente*, publicado más tarde en 1741, y está dividido en veintiún párrafos enumerados y, a continuación, se presenta un análisis que (Paoletti, 2011) hace de los mismos.

Euler tenía la creencia de que este problema se puede resolver a través de la geometría, pero no a la geometría que se conocía en ese entonces, que involucraba medidas y cálculos, sino a un nuevo tipo de geometría, la ya mencionada geometría de posición, y explica cómo funciona el problema de los puentes de Königsberg, al proporcionar un esquema del problema (véase la imagen 4) y llamando a los siete puentes como: a, b, c, d, e, f y g. En este párrafo, también plantea la pregunta general del problema: *"¿Se puede saber si es posible o no cruzar cada puente exactamente una vez?"*, a su vez que propone un problema general como sigue:

> *"... (de este problema particular) yo he formulado el problema general: cualquiera sea el arreglo y división del rio en minas, y sin importar cuantos puentes hay ¿puede uno determinar si es o no posible cruzar cada puente exactamente una vez? Mientras nuestro interés sea el problema de los siete puentes de Königsberg, este puede ser resuelto construyendo una lista exhaustiva de todas las rutas posibles para luego determinar si alguna de las rutas satisface las condiciones del problema. Debido al número de posibilidades, este método de solución sería demasiado difícil y laborioso y en otros problemas con más puentes sería imposible ..."* (Hevia, 1996).

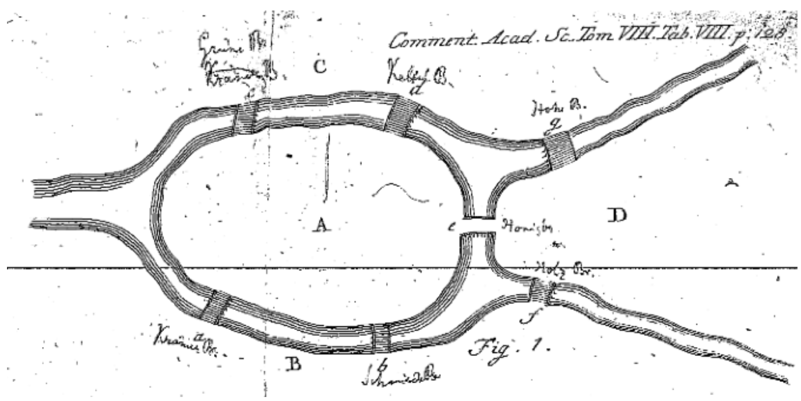


Imagen 10. Figura 1 de Euler en *'Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis,'* [Fuente (Paoletti, 2011)]

Después comienza a explorar diferentes métodos para encontrar una solución. Afirmando que, una manera de solucionar el problema de los 7 puentes sería escribiendo todos los caminos posibles, pero este método de solución tomaría mucho tiempo y no se podría aplicar para configuraciones más grandes con más puentes y regiones. Debido a esto, Euler decide elegir un método diferente para resolver este problema.

Luego comienza a simplificar el problema, inventando un sistema conveniente para representar el cruce de un puente; es por ello que decide que, en lugar de usar letras minúsculas para representar dicho cruce, escribiría las letras mayúsculas que representan las regiones que unen. Por ejemplo, (como se representa en la imagen 10), la ruta AB representa un viaje que empezó en la región A y terminó en B. Por lo tanto, si después de viajar de A, a B, alguien decide trasladarse a la parte de tierra llamada D, esta ruta se denotaría como ABD.

Euler explica que en la ruta ABDC, aunque hay cuatro letras mayúsculas, sólo se han cruzado tres puentes. Luego explica que no importa cuántos puentes se crucen, siempre habrá una letra de más. Debido a esto, el problema de los puentes de Königsberg requería que se cruzaran siete puentes y, por lo tanto, habría diferentes combinaciones de rutas con ocho letras mayúsculas; y prosigue con su explicación, mencionando que, si hay más de un puente con el que se puede cruzar de una región a otra, no importa qué puente se use; ya que, por ejemplo, aunque hay dos puentes, a y b, que pueden llevar a un viajero de la región A, a la región B, no importa qué puente se cruce con la notación de Euler, ya que la ruta se denominaría en cualquier caso AB. También, menciona que usando su figura original (imagen 10), se necesita de exactamente ocho letras, donde las parejas (A, B) y (A, C) deben aparecer juntas exactamente dos veces sin importar qué letra aparezca primero, puesto que hay cuatro puentes que unen estas regiones. Además, los pares (A, D), (B, D) y (C, D) deben ocurrir juntos exactamente una vez, para que exista un camino que cruce cada puente solo una vez.

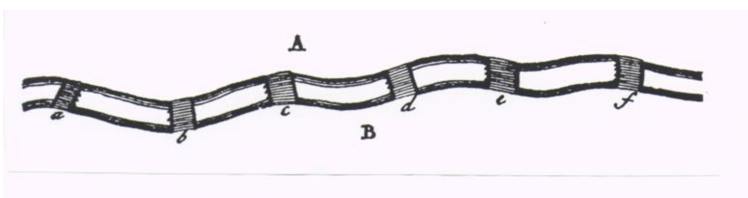


Imagen 11. Figura 2 de la solución de Euler [Fuente (Paoletti, 2011)]

Euler continua, mencionando que es necesario hallar una combinación de ocho letras mayúsculas que solucione el problema, o demostrar que tal combinación no es posible. Pero antes de hacer esto para el problema específico con los 7 puentes, decide encontrar una regularidad para ver si existe una combinación de letras (camino) para un problema más general. Para ello diseña un ejemplo mucho más simple de regiones y puentes. Es así, como dibuja la Figura 2 que se muestra (en la imagen 11), y plantea las diferentes situaciones en las que se puede recorrer la región A. Euler comenta que, si el puente a se recorre una vez, A era el lugar donde comenzó o terminó el viaje y, por lo tanto, solo se usó una vez. Si los puentes a, b y c se recorren una sola vez, hacia A se llega exactamente dos veces, sin importar si es el lugar de inicio o finalización. De manera similar, si cinco puentes conducen hacia A, la región A se encontraría exactamente tres veces en el viaje. Euler afirma que

> *en general, si el número de puentes es un número impar, y si se incrementa en uno, entonces el número de apariciones de A es la mitad del resultado*.

En otras palabras, si hay un número impar de puentes que conectan A con otras regiones, donde cada puente se usa una única vez, se debe agregar uno al número de puentes y dividirlo entre dos, para averiguar cuántas veces aparece la región A en el camino, es decir, que las ocurrencias totales de A, donde A tiene un número impar de puentes = $(número\ de\ puentes + 1)/2$.

Usando esta afirmación, Euler resuelve el problema de los 7 puentes de Königsberg. Diciendo que dado que hay cinco puentes que conducen hacia A, esta región debe aparecer tres veces en el recorrido (ver imagen 10). Del mismo modo, las regiones B, C y D deben aparecer dos veces, ya que todos tienen tres puentes que conducen hacia ellos. Por lo tanto, contando las ocurrencias o apariciones de cada una de las regiones se tiene, 3 (para A) + 2 (para B) + 2 (para C) + 2 (para D) = 9, como se muestra a continuación:

Número de puentes = 7, Número de puentes + 1 = 8

Región	Puentes	# de veces que debe aparecer la región
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2

Al sumar el número de apariciones que se requieren se obtiene $3 + 2 + 2 + 2 = 9$, pero esto contradice lo que Euler ya había dicho, que para 7 puentes solo debe haber ocho apariciones de todas las regiones. Por lo tanto, concluye que es imposible recorrer los 7 puentes de la ciudad de Königsberg una y solo una vez.

Si bien la gente de Königsberg podía estar contenta con la solución propuesta, para el gran matemático Leonhard Euler no era suficiente. Es por ello que continúa con su demostración para hacer frente a situaciones más generales; explica entonces, que si el problema involucra que se debe pasar por todas las regiones disponibles y hay un número impar de puentes, se pueden presentar dos situaciones:

SITUACIÓN 1: Si la suma del número de veces que debe aparecer cada letra (región) es igual al número de puentes más uno, entonces si se puede realizar un viaje.

Como sucede en la figura 2 de la imagen 11 donde hay 2 regiones y 6 puentes, entonces la cantidad de veces que deben aparecer las dos regiones sin importar donde inicie el recorrido es 7 veces, por lo tanto este sistema de puentes si tiene solución.

SITUACIÓN 2: Si la suma del número de veces que una región aparece es mayor, que el número de puentes más uno, entonces no se puede realizar un viaje, como el problema de los puentes de Königsberg.

Esto se debe a que la regla propuesta por Euler para un número impar de puentes (imagen 11), es verdadera para la situación general, ya sea que haya solo una región o más de una.

Para el caso donde el número de puentes es par, Euler determina que, si la suma del número de veces que debe aparecer las regiones es menor en una unidad o igual al número de puentes más uno, entonces el viaje por cada uno de los puentes cruzándolos una sola vez es posible.

CAPITULO 3. PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

EL PROBLEMA DE LA APUESTA INTERRUMPIDA, O EL PROBLEMA DE LOS PUNTOS

Luca Pacioli (1445-1517) en su obra *Summa Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita (1494),* Formuló un problema que se dividió en dos, el problema es nombrado el problema de los puntos o división de las apuestas; cada uno de los enunciados del mismo problema varían dependiendo de si los jugadores son igualmente hábiles, o si hay uno de ellos con una habilidad superior.

Para esta parte se mostrará la formulación e intento de solución de Pacioli, Cardano, y Tartaglia, basado en los trabajos de (Arenzana, 2018), (Basulto, Camuñez y Ortega, 2009), (García, 200), y (Hald, 2003). Con este análisis del problema, Cardano comenzó a revelar algunos principios que son promotores de la teoría moderna de probabilidad.

Como ya se mencionó la primera persona en publicar los enunciados en los que se divide este problema fue Pacioli. Para el desarrollo del trabajo se implementará la versión del problema presentada por (Cantillo, 2011), ya que es quien más se aproxima a la traducción del enunciado del libro de Pacioli, y quien lo muestra de la siguiente forma:

> *Dos jugadores juegan un partido de pelota hasta que uno de los dos haya alcanzado 60 puntos, cada gol representa 10 puntos (es decir que un jugador gana si hace seis goles). Ellos apuestan 10 ducados en total, entonces el ganador obtiene 10 ducados y el jugador que no gana tendrá 0 ducados. Debido a ciertos incidentes no pueden terminar el juego; un jugador tiene 50 puntos (anotó 5 goles) y el otro jugador obtuvo 20 puntos (anotó dos goles) La pregunta que surge es ¿qué parte de la apuesta se le debe a cada jugador?*

Como el juego no terminó, los 10 ducados se deben dividir entre los dos jugadores. Para ello es primordial tener un criterio de equidad y la noción matemática de dividir las apuestas. Siendo este último el enfoque que parece más "racional" de solucionar el problema y, por tanto, el más justo. El problema yace en evaluar (medir) los resultados del juego hasta donde se interrumpe, para poder relacionarlo con la apuesta que está en juego y que se debe dividir bajo un criterio racional y justo; teniendo en cuenta que no hay forma de saber cómo iba a terminar el juego de no haber sido interrumpido.

Pacioli, según (Cantillo, 2011), considera primero, el número máximo de goles que se pueden anotar entre los dos jugadores, que en este caso es 11, esta cifra corresponde a que cada jugador ha anotado 5 goles, es decir 10 goles en total (junto a 50 puntos cada uno), más el gol de la victoria para uno de ellos (y con esto completar los 60 puntos), lo que suma un total de 11 anotaciones; este será el denominador (casos totales) de las fracciones que se forman para determinar la parte que le corresponde a cada uno.

Como un jugador a obtenido 50 puntos (anotó 5 goles) se representa con la fracción $\frac{5}{11}$, así como al jugador que ha conseguido 20 puntos (anotando 2 goles) se representa con $\frac{2}{11}$, luego suma las dos partes da $\frac{7}{11}$, lo que representa la parte del juego que se ha realizado (7 goles) en relación con la cantidad de goles máxima que se puede anotar (11). Entonces los $\frac{7}{11}$ representan los 10 ducados que se deben repartir, ahora la pregunta es ¿Cuántos de esos 10 ducados se le deben al jugador que anotó 5 goles y cuántos al que anotó 2?

Para ello, al que tenga 50 puntos (anotó 5 goles) le vendrán $7\frac{1}{7}$ ducados y $2\frac{6}{7}$ ducados al que tiene 20 puntos. Este resultado se obtiene, ya que, como $\frac{7}{11} = 10$ ducados, y como 7 fueron los goles anotados en total al finalizar la partida, entonces la parte que le corresponde al jugador que anotó 5 goles de los 7 que se marcaron en total es $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{11} = \frac{5}{7} \cdot 10$ ducados, lo que da como premio $\frac{50}{7}$ ducados= $7\frac{1}{7}$ ducados; de igual forma para el jugador que anotó 2 goles de los 7 anotados (y por tanto obtuvo 20 puntos), le corresponden $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{11} = \frac{2}{7} \cdot 10$ ducados, lo que da como premio $\frac{20}{7}$ ducados= $2\frac{6}{7}$ ducados.

En este caso la solución que Pacioli da tiene como base el asumir que los juegos jugados y ganados son un referente justo para decidir quién obtiene que parte del premio, como también lo son para decidir qué parte de la apuesta les corresponde sobre lo juegos que no se terminaron de jugar.

EL INTENTO DE SOLUCIÓN DE TARTAGLIA.

Para Niccolo Tartaglia (1499-1557), la solución encontrada por Pacioli no fue satisfactoria y por ello la objetó de la siguiente manera:

> *Esta regla suya no me parece ni hermosa ni buena, porque si por casualidad una de las partes tenía 10 (puntos) y la otra ninguno, uno procedería de acuerdo con su regla, que la parte que tenía los 10 mencionados debe tomar todo, y el otro no debe tomar nada, lo cual está completamente fuera de razón, ese uno con 10 podría tomar el total. Y por eso digo, que la resolución de tal problema es más judicial* (Cantillo, 2011)

Después establece un ejemplo, donde dos jugadores juegan un juego de pelota a 60 puntos y apuestan 22 ducados cada uno, y al igual que en el problema anterior, por diversas causas se da por terminada la partida, pero en este caso los puntajes obtenidos por los dos jugadores son 10 para el primero y 0 para el segundo.

Para solucionar el problema planteado Tartaglia menciona que, primero hay que ver qué parte de los puntos necesarios para ganar el juego tiene cada jugador, es decir, si uno de los jugadores tuvo 10 puntos, y el otro, 0 puntos, entonces el jugador con 10 puntos, tendrá la sexta parte $\left(\frac{10}{60} = \frac{1}{6}\right)$ de los puntos necesarios para ganar el juego (60); y, por tanto, debería recibir la sexta parte del dinero que el otro jugador apostó, es decir $22 \cdot \frac{1}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$ ducados, es decir que el ganador se queda con $25\frac{2}{3}$ ducados, mientras que quien obtuvo 0 puntos, se quedará con $18\frac{1}{3}$ ducados.

Del mismo modo Tartaglia plantea una segunda situación, donde, en lugar de tener 10 puntos o 0 puntos, uno de los jugadores tiene 50 puntos y el otro jugador 30 puntos, se debe restar 30 de 50, quedando 20 puntos, y estos 20 representan un tercio $\left(\frac{1}{3}\right)$ de todo el juego (de los 60 puntos para ganar), es por esto que, un jugador debe tomar, además de los propios 22 ducados, una tercera parte del dinero del otro jugador, por lo tanto, el jugador que obtuvo 50 puntos debe tomar $\frac{1}{3}$ de la apuesta de su oponente, $\frac{1}{3} \cdot 22 = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$ ducados, quedando este jugador con un total de $29\frac{1}{3}$ ducados, mientras que su contrincante queda con $14\frac{2}{3}$ ducados. Terminando este ejercicio con esta frase *"Y procediendo así, no se encontrará ningún inconveniente, como se hace en la solución del hermano Luca."* (Cantillo, 2011).

La principal razón de debate de Tartaglia, es que Pacioli no tiene en cuenta, que hay un factor que tiene que ver con el desconocimiento de la resolución del juego. Ya que esta incertidumbre implica que ambos jugadores tenían la posibilidad de ganar el juego, y con ello de ganar la totalidad de la apuesta. Es por ello que Tartaglia calcula las proporciones para ganar, utilizando los puntos necesarios (60), de los cuales, los puntos conseguidos (10) son la parte que ya se jugó. Luego usando esas proporciones divide el valor apostado del oponente del jugador que gana.

En la solución de Pacioli al problema, las proporciones son calculadas a partir de la suma de los puntos conseguidos de los dos jugadores, y se utilizan sobre el total de la apuesta, para calcular las ganancias de cada jugador; mientras que Tartaglia, en cambio, utiliza los puntos necesarios para ganar, como el total, para luego multiplicar estas proporciones por el valor apostado en total y así realizar el reparto correspondiente.

LA SOLUCIÓN PROPUESTA POR FORESTANI

Cantillo,(2011) cita el enunciado del problema propuesto por Lorenzo Forestani (1585-1660), en su obra, escrita en 1602 *"Practica D'Arithmetica e Geometria"*, así:

> *Un Caballero ya anciano, que se encontraba de nuevo en su villa y disfrutaba mucho del juego de pelota, llamó a dos jóvenes Obreros y les dijo: "Aquí tienen 4 ducados para jugar en mi presencia con la pelota. Y quién de ustedes gana primero 8 juegos, ojalá haya ganado los 4 ducados. Y por eso empezaron a jugar; cuando uno de ellos había ganado 5 juegos[4], y el otro había ganado 3, perdieron la pelota, y no pudieron terminar, y el señor dijo: "Aquí tiene el dinero, divídalo entre ustedes"*.

En este caso, la pregunta es la misma. ¿Cuánto dinero recibe cada uno? Además, que el dinero no lo ponen los jugadores, sino que lo pone un tercero.

Lo primero que asume Forestani es que la apuesta es de 4 ducados. También, que un jugador para ganar el premio, tendrá que ganar 8 juegos, y como consecuencia, el otro jugador no podrá ganar más de 7 juegos. Por tanto, sumando los partidos ganados entre ambos jugadores, no pueden ser más de 15 juegos. Es por esto que el primer jugador, habiendo ganado 5 juegos, debería obtener $\frac{5}{15}$ (juegos ganados por el jugador, divididos entre los puntos máximos que se pueden hacer entre los dos jugadores). Lo que representa una ganancia de $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ de los 4 ducados; y para el segundo jugador que ganó 3 partidos le corresponderá $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ de 4 ducados, Por lo tanto, sumando las partes que les corresponden a los dos jugadores, se obtiene un total de $\frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$ de los 4 ducados, por lo que quedan $\frac{7}{15}$ ducados sin repartir entre los jugadores, y es aquí donde Forestani decide dividir esos $\frac{7}{15}$ en partes iguales, correspondiéndole a cada uno entonces $\frac{7}{15} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{30}$ de los 4 ducados, más las partes que ya les correspondía; de este modo el primer jugador (que obtuvo 5 anotaciones) recibirá $\frac{1}{3} + \frac{7}{30} = \frac{17}{30}$ de los 4 ducados lo que equivale

[4] En (Cantillo, 2011) en la página 8 del documento, en el párrafo inicial, Cantillo escribe que las partidas ganadas por uno de los jugadores son 6, pero en la solución trabaja con 5 juegos ganados, por lo que creo que se cometió un error en esa parte del enunciado.

a $\frac{17}{30} \cdot 4 = \frac{68}{30} = 2\,\frac{4}{15}$ ducados, por lo que a su contrincante le corresponde $\frac{1}{5} + \frac{7}{30} = \frac{13}{30}$ del premio lo que representan $\frac{13}{30} \cdot 4 = \frac{52}{30} = 1\,\frac{22}{30} = 1\,\frac{11}{15}$ ducados. Terminando así Forestani con el problema.

A diferencia de Pacioli, quien no dudaría en repartir esos $\frac{7}{30}$ del premio, de forma proporcional a partir de los juegos ganados por cada jugador, Forestani decide dividir lo que él llama *"el beneficio de la duda"*, entre ambos jugadores por igual.

EL INTENTO DE CARDANO DE ENCONTRAR UNA SOLUCIÓN

El Enunciado que Cardano utiliza como su versión del problema de los puntos dice:

> *Dos jugadores apuestan 7 piezas de oro cada uno (14 piezas en total), en un juego donde gana el primero en anotar 10 goles. En algún momento del juego, un jugador ha anotado 7 goles, mientras que el otro jugador anotó 9 goles. Uno de los jugadores pregunta ¿cuánto debería obtener cada jugador, en el caso de que tengan que repartir el total del valor apostado, si el juego no se finaliza?*

Para solucionarlo, Cardano propone restar la cantidad de goles anotados por cada uno de los jugadores (no importa por cuál de los dos jugadores comience), por ejemplo, del jugador que anotó 7 goles, restarlos de los 10 goles que son necesarios para ganar la apuesta, dando como resultado 3. Luego realiza el mismo paso con los goles anotados por el otro jugador, en este caso, restarle 9 a 10, cuya respuesta es 1. Ahora utiliza las progresiones de cada residuo, por ejemplo, la progresión de 3 es 6, ya que $1 + 2 + 3 = 6$. La progresión de 1 es 1, y las utiliza para dividir el valor total de la apuesta (14 piezas de oro) en 7 partes (lo que corresponde a la suma de las progresiones $6 + 1 = 7$); por lo tanto, se le dará 6 partes al jugador que anotó 9 goles, y una (1) parte al jugador con 7 anotaciones. Como cada parte corresponde a 2 piezas de oro (ya que $\frac{14}{7} = 2$), a quien anotó 9 goles le corresponden 12 piezas de oro (6 partes * 2 piezas de oro), por ende, al otro jugador se le deben 2 piezas de oro (1 parte * 2 piezas de oro). Por lo tanto, en este caso el jugador con menos goles habrá perdido $\frac{5}{7}$ del capital apostado.

Cantillo también muestra un segundo ejemplo planteado por Cardano, suponiendo un juego con dos contrincantes, donde gana la primera persona en anotar 10 goles; el juego termina abruptamente y presenta los siguientes resultados de las anotaciones de los jugadores, primer jugador anotó 3 goles y el segundo jugador anotó 6 goles, lo que Cardano hace con estos resultados es restarlos de la cantidad de goles necesarios para ganar (10), es decir que resta, 10 – 7 = 3 y 10 – 6 = 4, luego toma estos resultados para encontrar sus respectivas progresiones; la progresión de 7 es 28 (1+2+3+4+5+6+7=28) y la progresión de 4 es 10, para luego tomar estas progresiones y sumarlas 10 + 28 = 38, siendo este resultado las partes en las que divide el valor que se haya apostado, de esta manera al jugador que tiene 6 goles se le da 28 de las 38 partes del premio, y al que anotó 3 goles se le dará 10 de las 38 partes del premio.

Este método aplicado por Cardano, tiene en cuenta que al inicio del juego, ambos jugadores están en las mismas condiciones, ya que tienen que hacer la misma cantidad de goles para ganar; cuando el juego es interrumpido y uno de los jugadores lleva una ventaja en el marcador, este debería recibir una compensación proporcional al esfuerzo que debe hacer el segundo jugador para poder ganar, y para medir este esfuerzo, Cardano utiliza las progresiones, en particular la progresión que se obtiene del resultado de restar la cantidad de goles anotados al total de goles necesarios para ganar; estas progresiones, según Cantillo, son los puntajes hipotéticos que le harían falta para ganar a un jugador, cuando el otro jugador ya ha ganado.

Es así como Cardano es el único que reparte una apuesta entre dos jugadores cuando se interrumpe el juego, teniendo en cuenta los puntos necesarios para ganar de cada jugador, y no los puntos que han obtenido.

Las soluciones aportadas a este problema fueron estudiadas por Pascal, quien propone una solución utilizando técnicas combinatorias que no estaban a la disposición de Cardano y sus contemporáneos.

SOLUCIÓN DE PASCAL AL "PROBLEMA DE LOS PUNTOS"

Cantillo (2011) muestra los siguientes principios propuestos por Pascal:

1) *Si la posición de un jugador dado es tal que una determinada suma le pertenece, ya sea que gane o pierda, [entonces] debería recibir esa suma incluso si el juego se detiene.*
2) *Si la posición de los dos jugadores es tal que, si uno de ellos gana, una determinada suma le pertenece, y si pierde, (dicha suma) le pertenece al otro, y si ambos jugadores tienen las mismas posibilidades de ganar, deben dividirse la suma igualmente, si no pueden continuar el juego.*

Una anotación que hace Pascal sobre el juego es que la división de la apuesta se determina a partir de la cantidad de juegos restantes para ganar el premio. De forma similar a como lo trabajó Cardano, pero con procedimientos diferentes. Es así como Pascal propone su enunciado del problema así:

> *Suponga que al primer jugador le faltan r juegos para ganar la apuesta, mientras que al segundo jugador la faltan s juegos para ganar, con* $r, s \geq 1$.
>
> *Si en este punto la partida se interrumpe, entonces la apuesta debe dividirse, de tal forma que el primer jugador obtenga una proporción del total apostado, que en notación moderna, se expresa como*
>
> $$\sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k} \text{ es a } \sum_{k=s}^{n} \binom{n}{k}$$
>
> *Donde* $n = r + s - 1$,

De modo que n representa la totalidad de juegos posibles hasta que un jugador gane; y 2^n representa los diferentes resultados posibles de las n rondas.

Un ejemplo de ello es mostrado en (Arenzana, 2018), así: *"*Consideremos el problema de dos jugadores igualmente hábiles que juegan al mejor de seis partidas, el jugador A lleva cinco partidas ganadas y el B lleva tres*."*; es decir que si se interrumpe la partida en ese momento, al jugador A le hará falta ganar una partida para llevarse la totalidad del premio, en cambio al jugador B le haría falta ganar 3 partidas consecutivas (sin dejar que A gane una sola partida o sino A se llevará el premio); en el siguiente diagrama de árbol se visualizan las posibilidades que gane A o B.

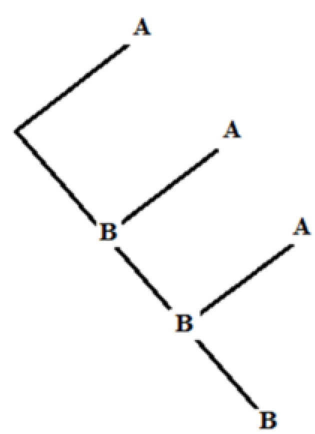


Imagen 12. Diagrama de árbol con las posibilidades de que gane A o B (Arenzana, 2018)

Como el jugador A terminó con 5 partidas ganadas, y el jugador B terminó con 3, entonces harían falta un máximo de 3 partidas para declarar un ganador.

El jugador B tiene solo una oportunidad de llevarse la apuesta, ganando las tres partidas siguientes (BBB), en cambio A tiene 3 oportunidades de ganar, ganando la primera partida (A), perdiendo la primera y ganando la segunda (BA), o perdiendo la primera y la segunda partida, pero ganando la tercera (BBA), visto en forma de probabilidades se tendría que:

$$P(gana\ B) = P(BBB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Por su parte, la probabilidad de que A gane es:

$$P(gana\ A) = P(A) + P(BA) + P(BBA) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

De modo que A tienen 7 posibilidades de ganar de ocho partidas posibles, así como el jugador B tiene una (1) posibilidad frente a 8, por lo que el premio se debe dividir en 8 partes de las cuales 7 partes le corresponderán al jugador que ganó 5 partidas (jugador A), y una de las ocho partes del premio le corresponde al jugador que ganó 3 partidas (jugador B).

Implementando la fórmula de sumatoria se obtiene que:

$$\sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{3-1} \binom{3}{k} = \sum_{k=0}^{2} \binom{3}{k} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 3 + 3 = 7$$

Lo que corresponde a la proporción que le toca a A al repartir el premio, así como

$$\sum_{k=s}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=3}^{3} \binom{3}{k} = \binom{3}{3} = 1$$

Representa la proporción del premio que le corresponde al jugador B.

Algo interesante que resulta de este ejercicio, es que en este caso, las proporciones que se presentaron para los resultados de ganar 5 y 3 partidas (7 y 1 respectivamente) en un juego que se gana cuando alguno llegó a 6 partidas ganadas, se pueden aplicar también a juegos donde por ejemplo, se gana cuando se llega a 100 partidas y el juego se interrumpe cuando un jugador tenía 99 ganadas y el otro 97; ya que este método tiene en cuenta es la cantidad de partidas que le faltan por ganar a cada jugador.

EL PROBLEMA DE OBTENER UN DOBLE SEIS EN LOS DADOS EN CIERTA CANTIDAD DE JUEGOS

Imagen 13. Dos dados sacando 6 (Fuente (123RF, 2021))

En el libro escrito por Cardano *Liber de Ludo Aleae* (Libro de Juegos de Azar), impreso por primera vez en el año 1663, escribe 11 capítulos introductorios a las reglas del cálculo de posibilidades en los juegos de azar.

EL MÉTODO DE CARDANO

En el capítulo 11 como muestra (Basulto y Camúñez, 2007) Cardano aborda un problema que más de un siglo después será propuesto por el Caballero de Méré a Pascal; en el cual un jugador lanza dos dados de forma consecutiva repetidas veces hasta conseguir un doble seis, y se pregunta ¿cuál es el número de partidas necesarias para conseguir un doble seis?

Para solucionar esta inquietud Cardano primero aborda un tema el cual denomina *Razonamiento sobre la ganancia media*, el cual (Basulto y Camúñez, 2007) lo explican a partir del lanzamiento de un dado, diciendo que la probabilidad de obtener cualquier numero en un único lanzamiento es de $\frac{1}{6}$, con lo cual Cardano afirma que dos lanzamientos darán una posibilidad de $2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, y para tres lanzamientos dicha posibilidad aumenta[5] a $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$;

[5] La probabilidad de que aparezca por ejemplo una única vez un 4 en tres lanzamientos de un dado es 75/216, y de que aparezca al menos una vez es 91/216.

Lo que no notó Cardano, es que este método lleva a cometer errores si se emplea para solucionar este tipo de problemas, ya que, si por ejemplo se decidiera mirar que sucede en 6 partidas, la posibilidad de obtener cierto resultado se sonvierte en $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$ (caso seguro), y si se jugara 7 veces la posibilidad sería mayor que uno. Lo que en realidad estaba calculando Cardano era la esperanza de una variable aleatoria de tipo binomial con probabilidad $\frac{1}{6}$, y con la cantidad de lanzamientos n, tomando esta medida como la posibilidad de que ocurra el evento.

Con todo ello, Cardano decide genralizar su razonamiento diciendo que, si p es la posibilidad de tener éxito en una prueba individual, la posibilidad de tener éxito al realizar n pruebas será de np, diciendo que si este valor se iguala a $\frac{1}{2}$ se obtiene la igualad de posiblidades (es decir igual chance de ganar o de perder), por ello el número de intentos necesarios para llegar a esta igualdad es $n = \frac{1}{2p}$.

Para el caso del problema propuesto en el capitulo 11, se tiene que la probabilidad (hablando en terminos actuales) de obtener un doble 6 al lanzar dos dados es de $\frac{1}{36}$, por lo que usando la solución porpuesta por Cardano, se tendria que la cantidad de lanzamientos necesarios para obtener un doble seis al lanzar dos dados es $n = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{36}} = 18$, por lo que según Cardano se necesitarían 18 partidas; este valor de 18 lanzamientos como se verá a continuación difiere sustancialmente del resultado propuesto por Huygens (24 o 25)

EL MÉTODO DE HUYGENS

En su libro *Ratiocinnis in ludo aleae* (Razonamientos sobre los juegos de azar), Huygens propone 3 proposiciones muy importantes sobre este problema, las proposiciones 10, 11 y 12. Las cuales (Basulto y Camúñez, 2007) describen así:

"PROPOSICIÓN 10: Encontrar en cuántas veces se puede aceptar lanzar un seis con un dado."

Es decir que lo que se busca es encontrar el número mínimo de lanzamientos para que el jugador obtenga una ventaja para obtener el resultado esperado, en este primer caso Huygens analiza la situación identificando la esperanza (el valor esperado al lanzar un dado), obteniendo que hay seis opciones al lanzar un dado 1,2,3,4,5 y 6; de las cuales la probabilidad que se obtenga un seis es de $\frac{1}{6}$ (éxito), en el otro caso de obtener otro número $\frac{5}{6}$ (fracaso). Esto sería solo para el primer lanzamiento, pero ¿qué sucede con los demás lanzamientos? Pues bien, se debe realizar el mismo análisis, sólo que se teniendo en cuenta la esperanza de los lanzamientos anteriores, como se muestra en la siguiente figura:

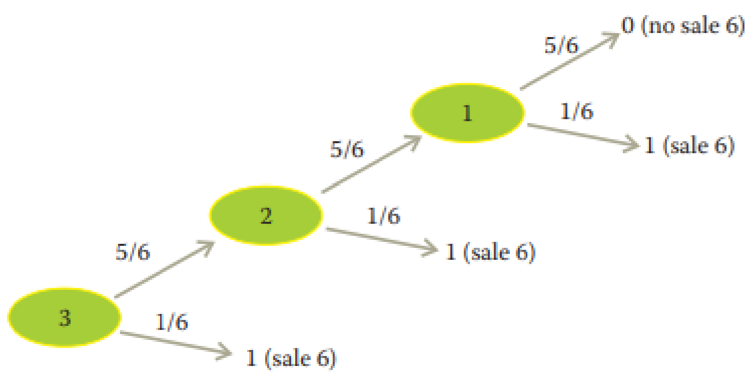


Imagen 14. Probabilidad de obtener al menos un seis al lanzar un dado. [Fuente (Basulto y Camúñez, 2007)]

En este caso se tiene en cuenta toda la sucesión de probabilidades, pero con la esperanza matemática y la fórmula para obtener la probabilidad de cada caso, obteniendo así:

Lanzamientos	Esperanza de obtener al menos un 6
1	$1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$
2	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$

3	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$
4	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

Tabla 3. Esperanza de un jugador de obtener al menos un 6 en n lanzamientos (Fuente propia)

Obteniendo así que la esperanza en n lanzamientos es $e_n = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{6^n-5^n}{6^n}$

A partir de esta esperanza Huygens también realiza el siguiente análisis con tres funciones:

$f(n)$ = número de alternativas favorables al jugador que lanza.

$g(n)$ = número total de alternativas.

$h(n)$ = número de alternativas desfavorables al jugador que lanza.

Y concluye que $f(n) = 6^n - 5^n, g(n) = 6^n$ y $h(n) = 5^n$.

Toma n_0 el número mínimo de lanzamientos de tal forma que el número de alternativas favorables de obtener al menos un seis supere al número de alternativas desfavorables. Verificándose que $f(n_0) \geq h(n_0)$. Con esta desigualdad se puede concluir que:

$$6^n - 5^n > 5^n \text{ entonces } \; 6^n > 2 \cdot 5^n$$

En la siguiente tabla se muestran los valores que pueden tomar los miembros de esta desigualdad, para los sucesivos números de lanzamientos y comprueba que $n_0 = 4$, es decir, que para 4 lanzamientos se produce el cambio de sentido en la desigualdad, con lo que, con 4 lanzamientos consecutivos de un solo dado hay ventaja para el jugador que apuesta a ganar si obtiene al menos un seis (Basulto y Camúñez, 2007).

N.º de lanzamientos n	$2 \cdot 5^n$	Total de alternativas 6^n	Alternativas favorables $6^n - 5^n$	Alternativas desfavorables 5^n
1	10	6	1	5
2	50	36	11	25
3	250	216	91	125
4	1250	1296	671	625

Tabla 4. Análisis de lanzamientos necesarios para obtener un seis (Basulto y Camúñez, 2007)

Luego en la *PROPOSICIÓN 11*, Huygens estudia un problema similar pero esta vez cuando se lanzan dos dados a la vez y se quiere obtener al menos dos seises; el cual es el caso que inquietaba al caballero de Meré. La solución que propone implica cambiar los chances 1 y 5 (1 chance de obtener el seis y 5 de no obtenerlo) que surgen del lanzamiento de un dado, por los chances 1 y 35 (1 chance de obtener el doble seis y 35 de no obtenerlo) con el lanzamiento de dos dados, con lo cual la esperanza del primer jugador que lanza los dos dados es $\frac{1}{36}$ de obtener el doble 6 y $\frac{35}{36}$ de no obtenerlo. Es decir que $e_1 = \frac{1}{36}$ es la esperanza del primer lanzamiento.

Para la esperanza del segundo lanzamiento Huygens afirma que $e_2 = \frac{35}{36}e_1 + \frac{1}{36}$, y realizando la correspondiente sustitución se obtiene

$$e_2 = \frac{71}{1296}$$

Con lo cual, el chance de los dos jugadores en el segundo lanzamiento está en relación de 71 (para el jugador que lanza los dados) a 1225 (al restar 1296 – 71), para el otro jugador, esto resulta ser muy desfavorable para quien realiza los lanzamientos. También con estos resultados Huygens formula la expresión de la esperanza del jugador en el lanzamiento n

$$e_n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{35^n - 36^n}{36^n}$$

Y prosigue de forma similar al caso de un solo dado, realizando el siguiente análisis:

$f(n)$ = número de alternativas favorables al jugador que lanza.

$g(n)$ = número total de alternativas.

$h(n)$ = número de alternativas desfavorables al jugador que lanza.

Y concluye que $f(n) = 36^n - 35^n, g(n) = 36^n \; y \; h(n) = 35^n$.

Sea ahora n_0 el número mínimo de lanzamientos, tal que el número de alternativas favorables al seis supere al de las desfavorables. Se ha de verificar $f(n_0) \geq h(n_0)$; y esa desigualdad es:

$$36^n - 35^n > 35^n \text{ entonces } 36^n > 2 \cdot 35^n$$

En esta opción el proceso es mejor mecanizarlo con las propiedades del logaritmo obtenido:

$$log(36^n) > log(2 \cdot 35^n)$$

$$n \cdot log(36) > log(2) + n \cdot log(35)$$

$$n \cdot log(36) - n \cdot log(35) > log(2)$$

$$n \cdot (log(36) - log(35)) > log(2)$$

$$n > \frac{log(2)}{(log(36) - log(35))}$$

$$n > 24{,}6$$

Esto quiere decir que para obtener un doble seis hay que tirar los dos dados aproximadamente 25 veces; es decir, para que el jugador que lanza los dados tenga una ventaja sobre su contrincante de obtener un doble seis, deber realizar por lo menos 25 lanzamientos. Cabe resaltar que Huygens no realizó la solución de estos problemas con propiedades de lo logaritmos, sino con aproximaciones matemáticas.

N.º de lanzamientos del gran dado	36^n	$2 \cdot 35^n$
24	$2{,}24 \cdot 10^{37}$	$2{,}28 \cdot 10^{37}$
25	$8{,}08 \cdot 10^{39}$	$7{,}99 \cdot 10^{39}$

Tabla 5. Análisis de lanzamientos necesarios para obtener un doble seis (Basulto y Camúñez, 2007).

En la *PROPOSICIÓN 12*, Huygens presenta el siguiente problema:

> *Encontrar el número de dados con el que se puede aceptar lanzar 2 seises en la primera tirada. (*Basulto y Camúñez, 2007).

Es decir, ¿con cuántos dados decidiría apostar un jugador con ventaja, para conseguir dos seis en un solo lanzamiento de todos ellos? Esto es una generalización de las proposiciones 10 y 11

Pero luego Huygens reformula el problema como sigue:

> *Encontrar cuántas tiradas de un dado son necesarias para tener al menos un chance igual de conseguir dos seises.*

Afirmando también que

> *La probabilidad de obtener al menos 2 seises en n+1 lanzamientos es igual al producto de la probabilidad de obtener al menos 1 seis en primer lanzamiento por la probabilidad de obtener al menos 1 seis en los n lanzamientos últimos más la probabilidad de no obtener seises en el primer lanzamiento por la probabilidad de obtener al menos 2 seises en los n lanzamientos últimos*.

Con lo cual, si la apuesta se determina como 1, y teniendo en cuenta que la probabilidad de obtener al menos un 6 en n lanzamientos es igual a la probabilidad del complemento de no obtener ninguno, es decir

$$P(\text{de obtener al menos un 6 en } n \text{ lanzamientos}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Con lo que se puede definir la esperanza del lanzamiento $n+1$, como:

$$e_{n+1} = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) + \frac{5}{6} \cdot e_n$$

Ahora, si se parte de $e_2 = \frac{1}{36}$, se encuentra que $e_3 = \frac{16}{216}$ y así hasta e_{10}, donde encuentra que su valor es ligeramente superior a 0,5; por lo que menciona que, si se quiere obtener lanzar con ventaja para obtener dos seises, se debe pautar que lanzará al menos 10 veces seguidas.

Es interesante mencionar la cita que hace *(*Basulto y Camúñez, 2007) sobre (Korteweg, 1920) al resaltar que Huygens no utiliza logaritmos para facilitar el cálculo, señalando que ese hecho ha impedido a Huygens la generalización del problema; y se pregunta

> *¿Por qué Huygens se limitó en su tratado de 1657 al caso de uno y dos dados y no ha sabido resolver el problema en este último caso nada más que por unos cálculos que debían ser bastante penosos?*

Y agrega

> *Es cierto que el cálculo de los logaritmos no parece haber formado parte de los cursos enseñados por van Schooten y que se encuentra en los manuscritos de Huygens, alguno escrito antes de 1661… Sin embargo, parece inadmisible que Huygens no haya tenido conocimiento antes de 1657 de una rama tan importante de la matemática, sin duda bien conocida en Holanda por los trabajos de Vlack*.

LOS 5 PROBLEMAS DE HUYGENS

En la parte final de la obra *De Ratiocinnis in Ludo Aleae*, Huygens plantea 5 problemas no resueltos, pero para tres de ellos da su solución más no su desarrollo.

Estos 5 problemas se volvieron un desafío para los matemáticos e investigadores de aquella época, tales como Jacob Bernoulli, Spinoza y Montmort, quienes los desarrollaron en parte o en su totalidad. Estas soluciones, comenta (Pérez Hidalgo, 2015), así como las respectivas interpretaciones de los problemas promovieron el desarrollo del estudio de la probabilidad.

El mismo Huygens años después fue encontrando solución a cada uno de los problemas (aunque no se ha encontrado la solución del tercero), pero sus descubrimientos no serían revelados hasta que la Sociedad Holandesa de las Ciencias los publicara a finales del siglo XIX.

Las soluciones de los 5 problemas que se mostrarán fueron estudiadas por (Pérez Hidalgo, 2015), basándose en las soluciones de Huygens y que mostró la Sociedad Holandesa de las Ciencias, así como las presentadas por Montmort en su obra *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, en las ediciones de 1708 y 1713. Pérez además comenta que Montmort no conocía las soluciones propuestas por Huygens.

Para contextualizar al lector, sobre las soluciones que se mostrarán, es preciso mencionar lo que representa para Huygens la esperanza del juego, ya que en esa época era sinónimo de las palabras "suerte" o de probabilidad. Para ello (Díaz, 2010) señala que Huygens propone las siguientes tres proposiciones:

Sobre la mesa de juego hay una cantidad definida de dinero t; el valor del juego se mide entonces en las mismas unidades de t, de acuerdo a lo siguiente:

Proposición I: Sí existe igual chance de recibir a y b, entonces el valor del juego o esperanza matemática es

$$\frac{a+b}{2}$$

Proposición II: Sí existe igual chance para recibir a, b, c , entonces el valor del juego es

$$\frac{a+b+c}{3}$$

Proposición III: Sí el número de chances que producen a es p, y el número de chances que producen b es q, y todos los chances tienen las mismas posibilidades entonces el valor esperado de ese juego es

$$\frac{pa+qb}{p+q}$$

Al igual que menciona que utilizando estas tres proposiciones, es posible resolver los siguientes problemas.

PRIMER PROBLEMA

El enunciado propuesto por Huygens y descrito por (Pérez Hidalgo, 2015), dice:

A y B juegan juntos con dos dados con la condición siguiente: A habrá ganado si lanza 6 puntos, B si lanza 7. A hará en primer lugar un solo lanzamiento; a continuación, B 2 lanzamientos sucesivos; después de nuevo A 2 lanzamientos; y así sucesivamente, hasta que uno u otro haya ganado. Se pide la relación de la suerte de A a la de B. Respuesta: como 10355 es a 12276.

En este enunciado Huygens da la respuesta, pero para la solución de este ejercicio lo primero que hace es mostrar la regularidad con la que los jugadores A y B van a participar, siendo esta $ABBA\ ABBA$ ..., para luego encontrar cuales son los casos favorables en los que al lanzar los dos dados se obtenga una suma de seis (5 casos), del mismo modo para los casos donde se obtiene una suma de siete (6 casos); luego asigna a x, como la esperanza o valor esperado del juego para A, y menciona que si previamente se han realizado varios lanzamientos, y A en su primer lanzamiento no obtienen una suma de seis, antes de que haga su segundo lanzamiento *"tendrá* la misma apariencia de ganar que al inicio de juego*"* [6], es decir, x.

[6] Lo que da a entender que Huygens comprendía de antemano la independencia de los eventos de lanzar los dados.

Como los turnos de juego se pueden representar con las formaciones $ABBA$, Huygens soluciona este problema usando únicamente 4 esperanzas de juego, e_1, e_2, e_3, e_4; siendo e_1 la esperanza al inicio de la partida del jugador A, antes de realizar el primer lanzamiento, e_2 representa la esperanza del jugador B cuando va a realizar el primero de sus dos intentos (es decir cuando el lanzamiento de A es fallido y le corresponde jugar a B), e_3 es la esperanza del jugador B cuando se finaliza el primer turno del mismo (es decir cuando B no acierta en su primer lanzamiento), así como e_4 representa la esperanza después de que ha finalizado la tercera partida, cuando es de nuevo el turno del jugador A, (donde el segundo lanzamiento del jugador B fue fallido). Y dice que si el valor apostado es a, las cuatro esperanzas se pueden representar así:

- $e_1 = \frac{5}{36} \cdot a + \frac{31}{36} \cdot e_2$, lo cual representa, que antes de hacer el primer lanzamiento el jugador A tiene 5 posibilidades de acertar (sólo hay 5 formas de obtener una suma de 6 con dos dados), y el jugador B tiene 31 posibilidades de que pase a ser su primer intento.
- $e_2 = \frac{6}{36} \cdot 0 + \frac{30}{36} \cdot e_3 = \frac{30}{36} \cdot e_3$, lo que corresponde a que en el primer lanzamiento del jugador B, A tienen 6 posibilidades de perder (ya que hay 6 maneras de obtener un 7 como la suma de los puntos de dos dados) es decir que el valor apostado o premio es 0, y 30 de que sea el segundo turno de B.
- $e_3 = \frac{6}{36} \cdot 0 + \frac{30}{36} \cdot e_4 = \frac{30}{36} \cdot e_4$, al igual que en el caso anterior, para el segundo lanzamiento del jugador B, el jugador A tiene 6 posibilidades de perder, así como 30 posibilidades para que pase a ser el primero de sus dos intentos.
- $e_4 = \frac{5}{36} \cdot a + \frac{31}{36} \cdot e_1$, esta esperanza muestra el caso donde, en el primero de los dos intentos de A, hay 5 posibilidades de ganar y 31 de pasar a realizar su segundo lanzamiento, llegando al inicio de un nuevo ciclo de juego.

Realizando las sustituciones correspondientes para encontrar el valor de e_1, es decir la esperanza del jugador A antes de iniciar el juego, se tiene:

$$e_1 = \frac{5}{36} \cdot a + \frac{31}{36} \cdot e_2 = \frac{5}{36} \cdot a + \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot e_3$$

$$e_1 = \frac{5}{36} \cdot a + \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot e_4$$

$$e_1 = \frac{5}{36} \cdot a + \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \left(\frac{5}{36} \cdot a + \frac{31}{36} \cdot e_1\right)$$

$$e_1 = \frac{5}{36} \cdot a + \frac{139500}{1679616} \cdot a + \frac{864900}{1679616} \cdot e_1$$

$$e_1 - \frac{864900}{1679616} \cdot e_1 = \frac{233280 + 139500}{1679616} \cdot a$$

$$e_1 \cdot \left(1 - \frac{864900}{1679616}\right) = \frac{372780}{1679616} \cdot a$$

$$e_1 \cdot \frac{814716}{1679616} = \frac{372780}{1679616} \cdot a$$

$$e_1 = \frac{372780}{814716} \cdot a$$

$$e_1 = \frac{10355}{22631} \cdot a$$

Lo que significa que la esperanza del jugador B en ese mismo instante es la fracción complementaria $\frac{12276}{22631} \cdot a$. Es decir que las posibilidades de los dos jugadores tienen la relación $10355\!:\!12276$ (los mismos valores ya mencionado por Huygens). Esto también indica que el jugador B tiene ventaja sobre el jugador A[7].

SEGUNDO PROBLEMA

El segundo problema planteado por Huygens es muy interesante porque, por primera vez se plantea la distinción de muestreo con y sin remplazamiento; llegando a esto gracias a un diálogo entre Huygens y su amigo Johannes Hudde (1628-1704).

Esto dice el problema enunciado:

[7] También es posible proponer una solución del problema 1 de Huygens con base en la serie geométrica, e incluso con la serie basada en la idea de la solución más general de Montmort. Dichas soluciones se muestran en el apéndice 1.

> *Tres jugadores A, B y C toman 12 fichas de las que 4 son blancas y 8 negras; juegan con esta condición de que ganará el que primero haya, escogiendo a ciegas, sacado una ficha blanca, y que A elegirá el primero, B a continuación, después C, después de nuevo A, y así sucesivamente, por turnos. Se pide la relación entre sus posibilidades.* (Pérez Hidalgo, 2015)

Jacob Bernoulli en su tratado *Ars Conjectandi* plantea tres posibles interpretaciones para este problema:

i. Se reponen (o se vuelve a colocar) cada ficha negra después de la extracción.
ii. No se reponen las fichas, y hay una sola caja con las 12 fichas para los tres jugadores A, B, C.
iii. Cada uno de los jugadores tiene su propia caja, y al hacer una extracción no se realiza reposición.

En la solución planteada por Huygens, se supone que las extracciones realizadas son con reposición, puesto que, de las doce fichas, asigna cuatro y ocho posibilidades respectivamente, es decir, que la suerte de cada jugador no cambia con cada extracción.

En este caso la regularidad que muestra para los jugadores y sus respectivas extracciones es $ABC\ ABC$ ... Ya que el autor designa para este problema, las esperanzas de los jugadores antes de dar inicio al juego como x, y, z, se cree conveniente para el lector y también, para tener una continuación con el primer problema, que las esperanzas respectivas sean e_1, e_2, e_3, y a es el valor apostado.

Si en la primera extracción el jugador A saca una ficha blanca ganará el juego, pero si no, este jugador pasa a ser el tercero en volver a extraer, por lo que en ese caso su esperanza se convierte en e_3 (esperanza en el turno del tercer jugador en extraer una ficha); por tal razón el jugador A tiene 4 posibilidades de ganar la apuesta y 8 posibilidades de que sea el tercero en extraer en la siguiente ronda (con esperanza e_3), es por ello que usando la *proposición iii* (mencionada anteriormente), la esperanza para el jugador A es:

$$e_1 = \frac{4a + 8e_3}{8 + 4} = \frac{4a + 8e_3}{12} = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}e_3$$

Para la suerte del jugador B antes de iniciar el juego, se tiene en cuenta que, hay 4 posibilidades de que A gane el juego (en cuyo caso el premio sería de 0), y 8 oportunidades de convertirse en el primero en extraer en la nueva serie del juego, y por lo tanto tener la esperanza e_1. Es decir que su suerte está dada por:

$$e_2 = \frac{0 + 8e_1}{8 + 4} = \frac{8e_1}{12} = \frac{2}{3}e_1$$

Para el jugador *C*, antes de que inicie el juego, sus posibilidades son: de 4 para que si no gana A, gane B; y de 8 para convertirse en el segundo jugador después de que extraiga y no acierte el jugador A. De este modo su esperanza es:

$$e_3 = \frac{0 + 8e_2}{8 + 4} = \frac{8e_2}{12} = \frac{2}{3}e_2$$

Ahora solo resta encontrar el valor de la esperanza de e_1 realizando las correspondientes sustituciones se tiene:

$$e_1 = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}e_2 = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}e_1$$

$$e_1 = \frac{1}{3}a + \frac{8}{27}e_1$$

$$e_1 - \frac{8}{27}e_1 = \frac{1}{3}a$$

$$\frac{19}{27}e_1 = \frac{1}{3}a$$

$$e_1 = \frac{27}{57}a = \frac{9}{19}a$$

Por tal razón $e_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{19}a = \frac{6}{19}a$, y del mismo modo $e_3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{19}a = \frac{4}{19}a$, y con estos resultados podemos afirmar que las razones de las posibilidades son $9:6:4$; respecto a estos resultados

Montmort expresa que *"si se quiere que el juego sea de diecinueve escudos, será necesario que Pedro ponga nueve, Pablo seis, y Jacobo cuatro."* Siendo Pedro, Pablo y Jacobo, los jugadores A, B, C respectivamente.

Una respuesta general al anterior problema con diferente probabilidad de acierto en una extracción con reposición la da (Hald A. , 1990), donde indica que si la probabilidad de éxito en una extracción es p y como el juego es con reposición entonces esa probabilidad no cambia, entonces la probabilidad de fracaso es $q = 1 - p$, entonces las esperanzas son:

$$e_1 = \frac{p}{1-q^3}, \quad e_2 = \frac{p \cdot q}{1-q^3}, \quad y \quad e_3 = \frac{p \cdot q^2}{1-q^3}$$

TERCER PROBLEMA

Este problema fue principalmente propuesto por Fermat, y enviado a su colega y amigo Pierre Carcavy (1608-1684) y que con su respuesta dice así:

> *A apuesta contra B, que, de 40 cartas, donde hay diez de cada color, extraerá 4 de manera que tenga una de cada color. Se encuentra en este caso que la suerte de A es a la de B como 1000 es a 8139.* (Pérez Hidalgo, 2015)

Huygens no presenta en su obra una respuesta a este enunciado, portal razón se mostrará la solución propuesta por Montmort, donde menciona que decide enunciar este problema como sigue:

> *Pedro apuesta contra Pablo, que, sacando, con los ojos cerrados, cuatro cartas entre cuarenta, a saber, diez rombos, diez corazones, diez picas y diez tréboles, sacará una de cada clase. Se pide cuál es la suerte de estos dos Jugadores, o lo que ellos deben poner en el juego para apostar con igualdad.* (Pérez Hidalgo, 2015)

Para su solución Montmort emplea la combinatoria como un método rápido y eficaz, pero antes de proceder con la solución, recuerda una proposición (Proposición VII) que ya había demostrado en su obra, cuyo enunciado es:

PROPOSICIÓN VII. Pedro, teniendo entre sus manos un número cualquiera de fichas de todos los colores, blancas, negras, rojas, verdes, y así, apuesta contra Pablo, que sacando al azar un número cualquiera determinado de fichas, él sacará tantas blancas, tantas negras, tantas rojas, tantas verdes, y así. Se pide cuántas posibilidades tiene Pedro para hacer lo que se propone. (Pérez Hidalgo, 2015).

La solución a esta proposición indica que se debe multiplicar, la cantidad que expresa de cuantas formas diferentes Pedro puede extraer las fichas blancas al azar, de entre el número de fichas blancas totales; por, el número que expresa de cuantas formas diferentes Pedro puede extraer las fichas negras al azar, de entre el total de fichas negras dispuestas; y a su vez multiplicar eso por el número que expresa de cuantas formas diferentes Pedro puede extraer al azar las fichas rojas, de entre el número de fichas rojas propuestas, continuado con la multiplicación por el número que expresa de cuantas formas diferentes Pedro puede extraer al azar las fichas verdes, de entre el número de fichas verdes totales, y continuando del mismo modo, se obtendrá el número de posibilidades pedido.

Entonces implementando la forma de solución de la proposición VII al tercer problema, y teniendo en cuenta que el número que expresa de cuantas formas diferentes Pedro puede extraer al azar una carta de rombos entre el número de cartas de rombos totales es $\binom{10}{1}$, del mismo modo para extraer una carta de trébol, una de corazón y una de pica; ahora, para la cantidad de formas diferentes que se tiene de seleccionar cuatro cartas de cuarenta, se tiene el número $\binom{40}{4}$, con lo cual ya se puede dar solución al problema, y por tanto encontrar la suerte de Pedro, así:

$$\frac{\binom{10}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{10}{1}}{\binom{40}{4}} = \frac{10^4}{\binom{40}{4}} = \frac{10000}{91390} = \frac{1000}{9139}$$

Es decir que la suerte de Pedro está relacionada a la de Pablo, como 1000 está relacionado con 8139[8].

Pérez comenta que el método empleado para la solución del problema es el método que actualmente se utilizaría para encontrar la suerte de los dos jugadores.

CUARTO PROBLEMA

Este problema es muy similar al anterior, puesto que también involucra extracciones, aunque en este caso sin reposiciones, y en su momento gracias a este, se generó una discusión entre Huygens y Hudde, puesto que el enunciado presentado dice así:

> *Se toma, como más arriba, 12 fichas de las que 4 son blancas y 8 negras. A apuesta contra B que entre 7 fichas que él sacará a ciegas, se encontrarán 3. Se pide la relación entre la suerte de A y la de B.* (Pérez Hidalgo, 2015)[9]

Hudde comprendió este enunciado como que se podía "extraer al menos 3 blancas", por lo que Huygens en uno de los Apéndices (II) de su libro, replantea su enunciado de la siguiente manera:

> *A apuesta contra B que, entre 12 fichas, de las cuales 4 son blancas y 8 negras, él tomará a ciegas 7 fichas, de las cuales 3 serán blancas, y no más. Se pide la relación de la suerte de A, a la de B. Respuesta: como 35 es a 64.* (Pérez Hidalgo, 2015)

Agregando las palabras *"y no más"* para corregir el malentendido. Una vez hecha esta reformulación, procede a empezar la solución, suponiendo que en el instante donde se ha sacado b fichas blancas, y n fichas negras, quedarían en la urna (o caja) donde estén depositadas todas las fichas, $4 - b$ fichas blancas y $8 - n$ fichas negras, quedando en total $12 - b - n$ fichas. Supone que la esperanza del jugador A en dicho instante es $e(b, n)$, donde, en la siguiente extracción puede sacar una ficha blanca (ya que hay $4 - b$ posibilidades de lograrlo), llegando con esto a un juego donde la nueva esperanza de A es $e(b + 1, n)$, aunque también está la

[8] (Pérez Hidalgo, 2015) muestra en la página 171 del documento, dos ejemplos más de la implementación de este método con sus respectivas respuestas, aunque sin su desarrollo.

[9] No es claro si Perez Hidalgo omitió por error transcribir que de las 7 fichas extraidas, las tres fichas mencionadas deben ser blancas (solo dice se encontrarán 3) o si es que así figura en la obra original de Huygen.

posibilidad de que la ficha extraída sea negra (pues se tiene $8-n$ fichas negras posibles), en cuyo caso la nueva esperanza para el primer jugador sería $e(b, n+1)$. Al igual que en el tercer problema es indispensable utilizar la *proposición iii* para llegar a la solución pues con ella determina que:

$$e(b,n) = \frac{(4-b)\cdot e(b+1,n) + (8-n)\cdot e(b,n+1)}{12-b-n}, \text{donde } 0 \leq b \leq 4;\ 0 \leq b+n \leq 7$$

Con esta esperanza, si el jugador A extrae 3 fichas blancas y 4 fichas negras ganará la apuesta, y por tanto $e(3{,}4) = a$; del mismo modo, la esperanza de $e(b, 7-n) = 0$ en cualquier otro caso. Ahora suponiendo el caso en que el jugador A haya extraído 3 fichas blancas y 3 fichas negras, es decir que le faltaría extraer una ficha negra[10] para ganar, Huygens plantea que la esperanza de extraer la cuarta ficha negra es $e(3{,}3) = \frac{5}{6}a$, ya que, si ha sacado 3 blancas y 3 negras, quedarán sólo 6 fichas de las 12 iniciales y de las cuales 5 serán negras.

Pues bien, partiendo de que $e(3{,}3) = \frac{5}{6}a$, y tras plantear todas las posibles esperanzas diferentes y luego de realizar 19 sustituciones e igualdades, en un método según Pérez *"largo y tedioso"* Huygens logra llegar a la situación $(0{,}0)$, es decir el punto inicial antes de empezar el juego, y para este momento enuncia que $e(0{,}0) = \frac{35}{99}a$, con lo cual llega a la conclusión de que la suerte entre A y B tiene la misma relación que entre 35 y 64 (pues 64 es el complemento de 35 para ser 99).

[10] En el documento de (Pérez Hidalgo, 2015) plantea que para ganar faltaría extraer una ficha blanca, lo cual se cree que es un error, ya que el enunciado del problema indica que se gana si únicamente se extrae 3 fichas blancas y 4 negras, y no al revés.

QUINTO PROBLEMA

Este problema fue propuesto por Pascal a Fermat, y por medio de Carcavy, también a Huygens; es conocido como "La Ruina del Jugador", o también como de "La Duración del Juego", y Huygens al final de su tratado lo enuncia así:

> *Habiendo tomado cada uno 12 fichas, A y B juegan con 3 dados con esta condición de que, a cada tirada de 11 puntos, A debe dar una ficha a B, y que B debe dar una ficha a A en cada tirada de 14 puntos, y que ganará aquel que sea el primero en poseer todas las fichas. Se encuentra en este caso que la suerte de A es a la de B como 244140625 es 282429536481.* (Pérez Hidalgo, 2015).

La solución planteada por Huygens, tiene la particularidad de ser la primera en la historia en incluir diagramas de tipo árbol para visualizar y comprobar los resultados de las probabilidades. Para solucionar este problema comienza con la situación inicial $(0,0)$ es decir donde ninguno de los dos ha obtenido algún punto, y siendo el ganador, el jugador que llegue a 12 puntos y por tanto el otro jugador se quede con 0 puntos.

Es así como enumera las posibilidades que tiene A de obtener un 11, como la suma de los puntos de los dados, siendo estas 27, así mismo las posibilidades de B de obtener un 14 como suma de los dados que son 15, a lo que propone tomar como $p = \frac{27}{42} = \frac{9}{14}$, y $q = \frac{15}{42} = \frac{5}{14}$. En este caso no tiene en cuenta los otros 174 casos donde ninguno de los dos sale beneficiado. Luego supone que la esperanza que tiene A de ganar cuando este tiene a puntos, y cuando B tiene b puntos, es $E(a, b)$; al igual que en el problema anterior la dificultad radica en encontrar el valor de $E(0,0)$.

Después de esto comienza su solución analizando un caso donde para ganar se necesita que uno de los dos jugadores llegue a tener dos puntos, representando los posibles resultados, así como sus respectivas posibilidades en el siguiente diagrama de tipo árbol presentado con un lenguaje actual:

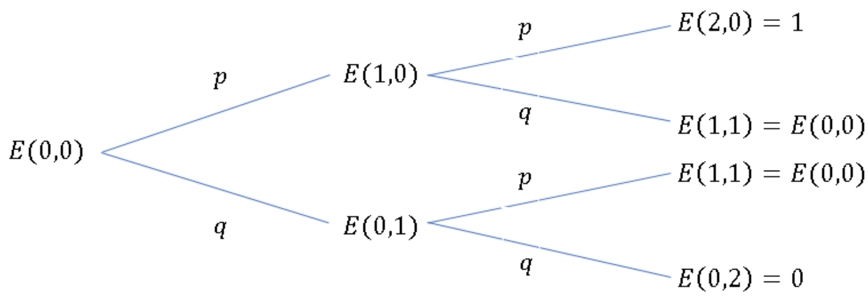


Imagen 15. Diagrama de árbol donde gana el primer jugador con 2 puntos [Fuente (Basulto y Camúñez, 2007)]

En este caso el total apostado se toma como 1, de donde con este esquema se puede deducir que:

$$E(0,0) = p \cdot E(1,0) + q \cdot E(0,1)$$

$$E(0,0) = p\big(p \cdot E(2,0) + q \cdot E(1,1)\big) + q(p \cdot E(1,1) + q \cdot E(0,2))$$

$$E(0,0) = p\big(p + q \cdot E(0,0)\big) + q(p \cdot E(0,0) + q \cdot 0)$$

$$E(0,0) = p^2 + 2pq \cdot E(0,0)$$

Es importante recordar que $p + q = 1$, con esto ya podemos despejar $E(0,0)$

$$E(0,0) = p^2 + 2pq \cdot E(0,0)$$

$$E(0,0) - 2pq \cdot E(0,0) = \ p^2$$

$$E(0,0) \cdot (1 - 2pq) = p^2$$

$$E(0,0) \cdot \big((p + q) - 2pq\big) = p^2$$

Ahora multiplicando convenientemente por 1 o sea por $p + q$, se tienen que:

$$E(0,0) \cdot \big((p + q) \cdot (p + q) - 2pq\big) = p^2$$

$$E(0,0) \cdot \big((p^2 + 2pq + q^2) - 2pq\big) = p^2$$

$$E(0,0) \cdot (p^2 + q^2) = p^2$$

$$E(0,0) = \frac{p^2}{(p^2 + q^2)}$$

Por lo tanto, en el caso donde se gana cuando uno de los dos obtiene primero 2 puntos, la esperanza del primer jugador será a la del segundo jugador, como p^2 es a q^2.

De este mismo modo Huygens aborda el caso donde se debe conseguir 4 puntos para ganar, y aunque no ofrece una explicación llega a la solución:

$$E(0,0) = \frac{p^4}{(p^4 + q^4)}$$

Siendo entonces la esperanza de cada uno de los jugadores en relación a $p^4 : q^4$

Señalando a su vez que si la ventaja pedida para ganar el juego fuera de 8 puntos, la esperanza del juego sería:

$$E(0,0) = \frac{p^8}{(p^8 + q^8)}$$

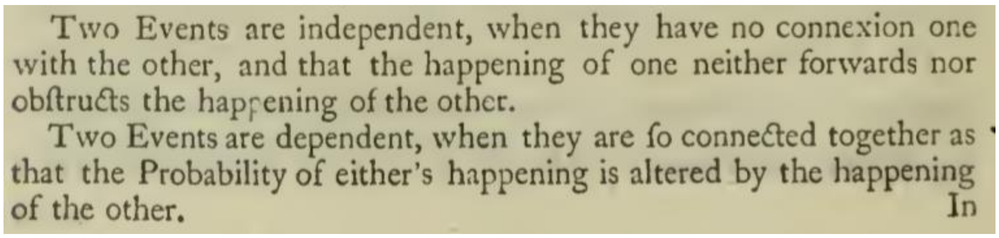
Después de encontrar que la esperanza del juego donde se pide ganar con 3 puntos es

$$E(0,0) = \frac{p^3}{(p^3 + q^3)}$$

De donde generaliza que la ratio de las esperanzas entre A y B, es p^n y q^n. Por lo que en el caso del problema planteado inicialmente se puede resolver diciendo que la suerte de A respecto a la suerte de B, está en relación con $9^{12} : 5^{12}$, con lo que se puede afirmar que el primer jugador en lanzar (A), tiene ventaja sobre el segundo jugador (B).

CAPITULO 4. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE EVENTOS

Una de las primeras personas en hacer referencia a los términos de independencia y dependencia de eventos fue Abraham de Moivre en el año 1718 en su libro *Doctrine of the chances,* donde define un evento independiente y dependiente de la siguiente manera:



Two Events are independent, when they have no connexion one with the other, and that the happening of one neither forwards nor obſtructs the happening of the other.

Two Events are dependent, when they are ſo connected together as that the Probability of either's happening is altered by the happening of the other. In

Imagen 16. Definición de Moivre sobre eventos dependientes e independientes [fuente (De Moivre, 1718, p.6)]

Lo que se traduce como:

Dos eventos son independientes, cuando no tienen ninguna conexión uno con el otro, y el acontecimiento de uno obstruye el acontecimiento del otro.

Dos eventos son dependientes, cuando están conectados, la probabilidad de que alguno de los dos suceda es alterada por la ocurrencia del otro.

Para ilustrar la definición que Moivre propone sobre independencia y dependencia, se plantea un problema para cada uno respectivamente. El primero para independencia dice lo siguiente:

> *Supongamos que hay un montón de 13 cartas de un color y otro montón de 13 cartas de otro color, ¿cuál es la probabilidad de que, tomando una carta en una extracción de cada montón, saque los ases?* (De Moivre, 1718, p. 7)

Su solución está dada de la siguiente manera, Moivre dice que la probabilidad de tomar un as del primer montón es de $\frac{1}{13}$; y es muy sencillo ver que tomar o no tomar un as de ese montón, no va influir en tomar un as del segundo montón; de esto se deduce que, suponiendo se haya sacado el as del primer montón de cartas, la probabilidad de tomar un as del segundo montón seguirá siendo $\frac{1}{13}$, de esta manera se puede decir que estos eventos son independientes.

Para el segundo problema Moivre plantea que partiendo de la suposición de un solo montón de 13 cartas, se debe sacar el as en primer lugar y luego sacar el dos y se requiere evaluar la probabilidad de ocurrencia de este evento; para esto se debe considerar la probabilidad de que el as este en primer lugar sea de $\frac{1}{13}$ y que la probabilidad de sacar el dos en segundo lugar se también de $\frac{1}{13}$, siempre y cuando el segundo evento no tenga relación con el primero; sin embargo hay que tomar en cuenta que el as se sacó en primer lugar por lo cual quedan 12 cartas en el montón y por lo tanto como suponemos que el as salió al principio, la probabilidad de sacar el dos a continuación será $\frac{1}{12}$, y por lo tanto esta probabilidad se verá alterada.

De los dos problemas planteados, Moivre pudo inferir que la probabilidad de ocurrencia de los dos eventos dependientes es el producto de la probabilidad de que ocurra uno de ellos por la probabilidad que tendrá el otro por ocurrir. Pero para determinar de la manera más sencilla posible, la probabilidad de que ocurran varios eventos dependientes será conveniente distinguir el orden de esos eventos y suponer que uno de ellos es el primero y el otro es el segundo; de esta manera la probabilidad de que ocurra el primero puede considerarse independiente, la probabilidad de que ocurra el segundo, se determinará a partir del supuesto de que haya sucedido el primero, y la probabilidad del tercer suceso se determinará con el supuesto de que haya ocurrido el primero y el segundo, y así sucesivamente, la probabilidad de que sucedan todos será el producto de varias probabilidades.

CAPITULO 5. LA PROBABILIDAD A POSTERIORI Y ELTEOREMA DE BAYES

LA OBRA DE THOMAS BAYES

Entre las muchas obras escritas por Thomas Bayes están *Divine Benevolence or an Attempt to prove that the Principle End of Divine Providence and Government is the Happiness of this Creatures* (Benevolencia divina o un intento de probar que el fin principal de la divina providencia y el gobierno es la felicidad de estas criaturas) publicada en 1731, también está *An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defense of The Analyst (*Introducción a la doctrina de las fluxiones y defensa del analista*),* entre otras; pero la que resulta de mayor interés para el estudio de las probabilidades a priori es *An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chance* (Un ensayo encaminado a resolver un problema en la doctrina del azar); escrita en 1764 por Richard Price tras la muerte de Thomas Bayes, a quien, como comenta (Gómez, 2001) le hicieron entrega unos acreedores de Bayes, de una documentación original del mismo para juzgar su relevancia. En esta obra se presenta en la sección 1, 7 proposiciones, 5 corolarios y 2 definiciones, donde se presenta la siguiente definición de probabilidad:

> *La probabilidad de cualquier suceso es el cociente entre el valor de la esperanza del suceso que debe ser calculada dependiendo de su ocurrencia, y el valor de la esperanza una vez que ha ocurrido*. (Gómez, 2001).

Además, se presenta el problema que dará inicio al teorema de Bayes, cuyo enunciado es:

> *Dado el número de veces en las que un suceso ha ocurrido y no ha ocurrido: Se requiere el azar de que la probabilidad de que ocurra en una sola tirada esté comprendida entre dos grados de probabilidad arbitrarios* (Girón, S.F.).

Con lo cual se pretende calcular la probabilidad $P(a < \theta < b|X = n)$, es decir que se pretende conocer la causa θ por su efecto con X, una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y θ.

De estas primeras 7 proposiciones vale la pena mencionar las dos siguientes.

Proposición 3: La probabilidad de que dos sucesos consecutivos ocurran es el cociente que resulta de multiplicar la probabilidad del primero y la probabilidad del segundo bajo la suposición de que ocurra el primero. (Landázuri, 2016)

Lo que en notación actual se puede escribir como: Si se tiene dos eventos E_1 y E_2, consecutivos, se verifica que

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

Lo que se conoce actualmente como probabilidad condicional.

Proposición 5: Si hay dos sucesos consecutivos, de modo que la probabilidad del segundo es $\frac{b}{N}$ y la de los dos juntos $\frac{P}{N}$, y se descubre primero que el segundo suceso ha ocurrido, de lo que deduzco que el primer suceso también ha ocurrido, la probabilidad de que esté en lo cierto es $\frac{P}{b}$. (Gómez, 2001)

A lo que (Girón, S.f.) afirma que esto representa lo que conocemos hoy en día como el teorema de Bayes, donde con dos eventos E_1 y E_2 consecutivos, se verifica que

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

Después de presentar estas dos proposiciones, en la sección II del libro escrito por Price, es donde Bayes enuncia dos postulados y un lema, que ejemplifica con un experimento de Bernoulli que involucra lanzar una bola sobre una tabla conocida como “la mesa de billar”;

Postulado 1: hacer rodar una bola $(b1)$ sobre un plano horizontal limitado por un cuadrado $(ABCD)$, de modo que la probabilidad de que la misma se detenga en un punto particular, sea la misma para todos los puntos del plano;

Postulado 2: hacer rodar n veces una segunda bola $(b2)$, tomando en consideración la frecuencia (X_n) del evento M (que $b2$ se detenga a la derecha de $b1$). (González y Landro, 2013)

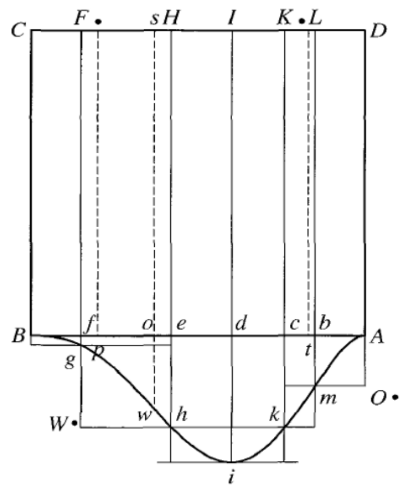


Imagen 17. Tabla llamada "mesa de billar" de Bayes. [Fuente (Gómez, 2001)]

Ahora como indica (González y Landro, 2013), se debe suponer (sin perder generalidad) que el área del plano $ABCD$ es igual a 1, de igual modo que el punto A tiene coordenadas $(0{,}0)$, siendo a su vez θ la abscisa del punto del plano $ABCD$ donde se detuvo la bola $b1$. A partir de estas hipótesis Bayes (según Price), postula que las variables que representan el punto donde se han de detener las bolas $b1$ y $b2$ (b y f respectivamente), están distribuidas uniformemente en el plano $ABCD$, así como la variable θ está distribuida uniformemente en el intervalo $[0{,}1]$, por lo que para todos los valores de θ, tales que $0 < b < \theta < f < 1$, Bayes verifica que:

I. Lema 1: La probabilidad de que un punto θ caiga entre dos puntos cualesquiera de la línea AB es la razón de las distancias entre los dos puntos y la longitud de toda la línea AB. Lo que es igual a *P(b <* θ *< f)= f – b*

II. Proposición 8:

$$P[(b < \theta < f) \cap (x = p)] = \int_b^f \binom{n}{p} \theta^p (1-\theta)^{n-p}\, d\theta$$

III. Usando el Corolario de la proposición 8: con $b = 0$ y $f = 1$ se obtiene que

$$P(X_n = p) = P[(0 < \theta < 1) \cap (X_n = p)] = \int_0^1 \binom{n}{p} \theta^p (1-\theta)^{n-p}\, d\theta = \frac{1}{n+1};\ \forall p$$

IV. Finalmente, la proposición 9:

$$P(b < \theta < f|X = p) = \frac{P(b < \theta < f) \cap (X = p)}{P(X = p)}$$

$$\frac{\int_b^f \binom{n}{p} \theta^p (1-\theta)^{n-p}\, d\theta}{\int_0^1 \binom{n}{p} \theta^p (1-\theta)^{n-p}\, d\theta}$$

Por último, Bayes propone un "*scholium"* (escolio)*,* con la finalidad de generalizar el resultado obtenido en la *proposición 9*, para que pudiera ser implementado en cualquier problema que implique variables aleatorias, y cuyos resultados se consideren como simétricos ante cualquier prueba.

V. Escolio:

$$P(b < \theta < f \mid M^*) = \frac{\int_b^f \binom{n}{p} \theta^p (1-\theta)^{n-p}\, d\theta}{\int_0^1 \binom{n}{p} \theta^p (1-\theta)^{n-p}\, d\theta} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \int_b^f \theta^p (1-\theta)^{n-p}\, d\theta$$

Como menciona (Girón, S.f.) para Bayes el "*no saber nada"* representa que en las n pruebas que se realicen, lo posibles valores de la variable aleatoria X serían equiprobables.

EL PROBLEMA SOBRE LA EXISTENCIA DE LOS MILAGROS

Richard Price en 1767 presenta su obra titulada *Four Dissertations* (cuatro disertaciones) donde haciendo uso del teorema de Bayes (Por primera vez después del ensayo de *An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chance*), muestra que, una violación de lo que se entendía como las leyes de la naturaleza (un milagro) no era tan improbable como se creía. Ya que Price según (Stigler, 2017), parte de la suposición de que ha ocurrido $1´000.000$ de veces seguidas, sin excepción, un evento de la naturaleza, como por ejemplo que la marea suba o que sale el sol en un día (amanece), es decir que estos $n = 1´000.000$ representan ensayos binomiales, y puesto que han ocurrido de manera secuencial, la cantidad de *"excepciones milagrosas"* son de $X = 0$. Pero… ¿esto implica que siendo p la probabilidad de que en la siguiente observación ocurra un milagro, esta probabilidad es igual a cero? Pues para Price la respuesta era que no, y para justificarla utilizó el recién creado teorema de Bayes; pues afirmó que el valor de la probabilidad condicional de que la probabilidad de un milagro ocurriera en el siguiente evento fuera mayor que $\frac{1}{1{,}600.000}$ (una cifra arbitraria para poder hacer el cálculo) dado que no había ocurrido ningún milagro antes $(X = 0)$, era de

$$P\left(p > \frac{1}{1{,}600.000}\middle| X = 0\right) = 0.5353$$

Lo que da una probabilidad mayor que el 50%, aun así, a pesar de que $\frac{1}{1{,}600.000}$ es un número muy pequeño, no representa que un milagro sea un evento imposible; es por ello que Price decidió encontrar la probabilidad de que ocurriera al menos un milagro en los siguientes $1{,}0000.000$ ensayos, y se dio cuenta que era

$$1 - \left(\frac{1{,}599.999}{1{,}600.000}\right)^{1{,}000.000} \approx 0.465$$

Lo que está cerca de ser el 50%, y con esto había mostrado que la posibilidad de que ocurriera un milagro era mayor de lo pensado.

CAPITULO 6. DISTIBUCIONES DISCRETAS

USO DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL PARA EL PROBLEMA DE LA "*SEX RATIO*"

Como ya se ha mencionado con antelación, los matemáticos Blaise Pascal y Pierre de Fermat sostuvieron una correspondencia en el año 1654 que cambiaría el mundo de la probabilidad; entre las múltiples cartas que intercambiaban, trabajaban problemas como el del reconocido Caballero de Meré, pero, según (Stahl, Másmela y Rincón, 2008) abordaron temas como la distribución binomial, que en términos actuales se describe como:

$$\sum_{k=i}^{j} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Donde estas sumas representan la probabilidad de que ocurran entre i y j éxitos (de un experimento cuyos únicos resultados sean éxito y fracaso), en n ensayos (repeticiones del experimento), con probabilidad de éxito p (probabilidad de que ocurra el éxito en un experimento individual). El $k - ésimo$ término de la serie, representa la probabilidad de que ocurran k éxitos de los n ensayos.

Aunque ellos no trabajaron con grandes valores de n (es decir la cantidad de ensayos de acierto o error), y por lo tanto no trabajaron con la generalización de sumas de ese estilo.

A pesar de que la correspondencia anteriormente nombrada fue de gran importancia para el desarrollo de las matemáticas, Fermat y Pascal no fueron los únicos en intercambiar cartas con problemas interesantes de probabilidad, como muestra (Ruiz, 2018), Nicolas Bernoulli y Willem's Gravesande, también desarrollaron una comunicación continua en 1712, con temas relacionados a la matemática, y es que entre tanta de su correspondencia se encuentra enunciado y desarrollado el problema de la *sex ratio* (proporción de nacimientos de niños y niñas), propuesto por Nicolas a Gravesande; quien implementó la distribución Binomial para su solución. Y es que para aquella época un médico escocés llamado John Arbuthnot (1667-1714), se mostró asombrado con los datos obtenidos de la *sex ratio* de Londres entre los años 1629 y 1710 (imagen 18), ya que se dio cuenta que, la cantidad de niños bautizados cada año era mayor que la cantidad de niñas.

594 *Lettre de M. Bernoulli à M. de M ...*

Catalogue des Enfans mâles & femelles nés à Londres depuis 1629 jusqu'à 1710.

	mâles.	*femell.*		*mâles.*	*femell.*
1629	5218	4683	1670	6278	5719
30	4858	4457	71	6449	6061
31	4422	4102	72	6443	6120
32	4994	4590	73	6073	5822
33	5158	4839	74	6113	5738
34	5035	4820	75	6058	5717
35	5106	4928	76	6552	5847
36	4917	4605	77	6423	6203
37	4703	4457	78	6568	6033
38	5359	4952	79	6247	6041
39	5366	4784	80	6548	6299
40	5518	5332	81	6822	6533
41	5470	5200	82	6909	6744
42	5460	4910	83	7577	7158
43	4793	4617	84	7575	7127
44	4107	3997	85	7484	7246
45	4047	3919	86	7575	7119
46	3768	3395	87	7737	7114
47	3796	3536	88	7487	7101
48	3363	3181	89	7604	7167
49	3079	2746	90	7909	7302
50	2890	2722	91	7662	7392
51	3231	2840	92	7602	7316
52	3220	2908	93	7676	7483
53	3196	2959	94	6985	6647
54	3441	3179	95	7263	6713
55	3655	3349	96	7632	7229
56	3668	3382	97	8062	7767
57	3396	3289	98	8426	7626
58	3157	3013	99	7911	7452
59	3209	2781	1700	7578	7061
60	3724	3247	1	8102	7514
61	4748	4107	2	8031	7656
62	5216	4803	3	7765	7683
63	5411	4881	4	6113	5738
64	6041	5681	5	8366	7779
65	5114	4858	6	7952	7417
66	4678	4319	7	8379	7687
67	5616	5322	8	8239	7623
68	6073	5560	9	7840	7380
69	6506	5829	10	7640	7288

Imagen 18 Número de bautizos en Londres entre 1629-1710 [Fuente (Ruiz , 2018)]

Nicolas en sus cartas le comenta de este tema a Gravesande, quien lo aborda convirtiéndolo en un experimento aleatorio, enunciándolo así:

> *A apuesta contra B que, entre 11429 monedas, arrojadas al mismo tiempo, el número de las que caigan cara no será más de 6128 y no menos de 5745, sino que estará entre ambos números. Pregunto la suerte de A y de B. Yo he hecho el cálculo y he encontrado que si la suerte de A es 1, la suerte de B es expresada por un número de 44 cifras, lo que hace ver claramente que si el mundo es conducido por el azar, hay un número de 44 cifras*

> *contra 1, que lo que ha ocurrido no debe ocurrir, de lo que se debe concluir que es un Ser Inteligente quien ha dirigido el nacimiento de los niños y no un azar ciego.* (Ruiz, 2018)

Para ver cómo llegó a este resultado de 44 cifras (Ruiz, 2018) muestra los 4 pasos seguidos por Gravesande:

1. Lo primero es que supone que, el número anual de bautizados es igual al número de nacimientos, a su vez supuso que esta cifra era constante y correspondía al promedio aritmético de nacimientos durante los 82 años de la toma de datos (1629-1710), es decir sumó todos los nacimientos (de niñas y niños) y los dividió entre los 82 años

$$\frac{938223}{82} \approx 11442$$

   Según comenta (Ruiz, 2018) por un error Gravesande toma es el valor de 11429.

2. Toma arbitrariamente dos años 1661 y 1703, de los cuales calcula la proporción de nacimientos de niños sobre el total de nacimientos en ese año, encontrando que $\frac{4748}{8855} \approx 0.5362$, y $\frac{7765}{15448} \approx 0.5027$ correspondientemente a cada año, para luego multiplicarlos por la media obtenida anteriormente, $x_{min} = 0.5027 \times 11429 \approx 5745$, y $x_{máx} = 0.5362 \times 11429 \approx 6128$ obteniendo así un nuevo número mínimo y máximo de niños nacidos con relación a la media de nacimientos.

3. Luego implementa la distribución binomial con $B\left(11429; \frac{1}{2}\right)$, es decir con media igual a 11429 y probabilidad de acierto de $\frac{1}{2}$, esta probabilidad de $p = \frac{1}{2}$ hace referencia a la probabilidad de obtener el nacimiento de un varón en un parto. Queriendo encontrar la probabilidad de que el número de nacimientos de varones en un año estuviera entre[11] 5745 y 6128.

[11] En (Stahl, Másmela y Rincón, 2008) cuando se va a calcular la probabilidad, se comete el error de escribir 6182, en vez de 6128.

$$P\left(5745 \leq x \leq 6128 \middle| p = \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=5745}^{6129} \binom{11429}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11429-k}$$

$$P\left(5745 \leq x \leq 6128 \middle| p = \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=5745}^{6129} \binom{11429}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11429}$$

Para solucionar esta expresión, Gravesande se dio cuenta que todas las sumas tenían el factor de $\left(\frac{1}{2}\right)^{11429}$, Por lo que el resultado sólo dependía de los coeficientes binomiales, los cuales calculó utilizando un método por recursión donde

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

Y luego de utilizar este método para los 384 términos del intervalo $[5745{,}6129]$, obtiene que

$$P\left(5745 \leq x \leq 6128 \middle| p = \frac{1}{2}\right) \approx \frac{3849150}{13196800} = \frac{1}{1 + 2\frac{32987}{76983}} \approx 0.2917$$

Es decir que la probabilidad de que el número de nacimientos de varones en un año estuviera entre 5745 y 6128 es del 29.17%

4. Ahora Gravesande multiplica 82 veces este resultado para así obtener, la probabilidad de que el número de nacimiento de varones estuviera entre los límites 5745 y 6129, durante los 82 años del estudio, siendo esta

$$\left(\frac{1}{1 + 2\frac{32987}{76983}}\right)^{82} \approx 1.32 \times 10^{-44}$$

Siendo esta una cifra ínfima, muy próxima a cero, y por lo cual según (Ruiz G. , 2018), lleva a Gravesande a concluir que, la probabilidad encontrada afirmaba el hecho de que en los 82 años el número de nacimientos de niños fuera mayor que el de nacimientos de niñas, y que esto no era causado por el azar sino por una cuestión divina. Así como lo demuestra este fragmento de su carta a Nicolas Bernoulli

> *Pero este Ser Inteligente ha podido producir este efecto extraordinario de dos maneras: o para una dirección particular por la que Dios actuaría contra las leyes establecidas por Él mismo, lo que sería un verdadero milagro; o bien estableciendo desde los comienzos una ley, por la cual los nacimientos de niños sean más probables que los de las niñas. Este último medio es del que Dios se sirve según Mr. Arbuthnot. Usted hace ver que, suponiendo la existencia de Dios, el nacimiento de los niños podía llegar naturalmente; es decir, siguiendo esa ley que ese Ser ha establecido. Mr. Arbuthnot sostiene lo contrario, que, si el azar conduce el mundo, los nacimientos no pueden llegar naturalmente y, por consecuencia, esa suposición es falsa.* (Ruiz G. , 2018)

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA COMO MÉTODO DE SOLUCIÓN DEL PROBLEMA NÚMERO 4 DE HUYGENS

Retomando el análisis de los 5 problemas propuestos por Huygens en su obra *De Ratiocinnis in Ludo Aleae* y analizados por (Pérez Hidalgo, 2015), nos encontramos con que, en el problema cuatro se encuentra una de los primeras (sino la primera) de las aplicaciones de la distribución hipergeométrica implementada por Montmort, ya que después de estudiar el método largo de Huygens, Montmort decide retomar la solución que propuso en el tercer problema donde implementó las combinaciones, para realizar un trabajo más compacto y sencillo. Aunque primero replantea el problema propuesto por Huygens, así:

> *Pedro apuesta contra Pablo que, cogiendo, con los ojos cerrados, siete fichas entre doce, de las que ocho son negras y cuatro blancas, él cogerá tres blancas y cuatro negras. Se pide cuánto deben apostar Pedro y Pablo para que la apuesta de cada uno esté en la misma proporción que su suerte.* (Pérez Hidalgo, 2015)

Con este enunciado en mente, calcula que la suerte del primer jugador usando la distribución hipergeométrica, que con notación actual y organizando los datos, sería:

$$N = 12, \qquad M = 4, \qquad n = 7, \qquad m = 3$$

$$P(X = m) = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

Entonces

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{8}{4}}{\binom{12}{7}} = \frac{35}{99}$$

Por lo que la suerte del segundo jugador es $\frac{64}{99}$.

Del mismo modo Huygens añade la solución del mismo problema en el caso que pensó Hudde cuando Pedro gana si extrae 3 o más fichas blancas:

> *"Si se quiere que Pedro haya ganado también cuando coja cuatro blancas y tres negras, se tendrá de igual forma, por el Art. 20,* $\frac{70\times4+1\times56}{792} = \frac{14}{33}$ *para la suerte de Pedro, y en este caso sería necesario que Pablo ponga en el juego 19 contra 14 de Pedro. O sea, en este caso calcula*

$$\frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{8}{4}}{\binom{12}{7}} + \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{8}{3}}{\binom{12}{7}}$$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON Y EL PROBLEMA DE LAS PLÉYADES

El astrónomo estadounidense Simón Newcomb en 1860, retomó un viejo problema y lo solucionó a partir de un nuevo punto de vista. El problema enunciado en (Stigler, 2017), dice así

> *¿Era sobresaliente que seis estrellas brillantes de quinta magnitud se encontraran en un único cuadrado pequeño (de un grado por lado) de la esfera celeste, como es el caso del cúmulo de las Pléyades? ¿o cabría esperar que esto ocurriera con una probabilidad razonable incluso si las estrellas estuvieran dispersas al azar en los cielos?*

Es decir que estaba intrigado sobre qué tan probable era que seis estrellas de una misma magnitud (en cuanto al brillo), estuvieran en un cuadrado del tamaño de tan sólo un grado cuadrado.

Por aquel entonces las estrellas se clasificaban según su intensidad lumínica en una escala que les otorgaba la sexta magnitud a las estrellas más tenues, y de la quinta magnitud hacia abajo para las estrellas más brillantes; también se tenía registro de $N = 1500$ estrellas con magnitud 5 o superior, y del tamaño de la esfera celeste que es de 41.253 grados cuadrados, con lo cual la probabilidad p de que una sola estrella al azar, esté en un grado cuadrado específico, era de

$$p = \frac{1}{41.253}$$

La manera como, Newcomb abordó este problema fue muy original, puesto que trató la distribución de las estrellas en el cielo como un proceso de Poisson con

$$\lambda = Np = 1500 \cdot \frac{1}{41253} = \frac{1500}{41253} = 0{,}0363$$

Como el número esperado de estrellas por grado cuadrado. Por lo tanto, la probabilidad de que s estrellas se encuentren en un determinado grado cuadrado específico es

$$p(s;\ \lambda) = \frac{\lambda^s \cdot e^{-\lambda}}{s!}$$

Con lo que para $s = 6$, se tiene que

$$p(6;\ 0{,}0363) = \frac{0{,}0363^6 \cdot e^{-0{,}0363}}{6!} = 0{,}000000000003$$

Contrastando este resultado tan pequeño, con el hecho de que las Pléyades se encuentran en uno de los grados cuadrados más densamente atiborrado, Newcomb se dio cuenta de que este resultado no era correcto, por lo que procedió a encontrar el número esperado de los 41253 grados cuadrados de los cuales se hospedarían 6 estrellas, multiplicando

$$41253 \cdot 0{,}000000000003 = 0{,}00000013$$

(Stigler, 2017) comenta que Newcomb sabía que este tampoco era el resultado que esperaba, por lo que cambió la forma de abordar el problema, buscando ahora cual era la probabilidad que le permitiera ajustar la retícula de grados para que contuviera un mayor número de estrellas; aunque no pudo dar solución a este nuevo problema, si encontró que para que el número esperado de áreas que tuviera seis estrellas fuera 1, el tamaño de la retícula debería pasar de 1 grado cuadrado a 27.5 grados cuadrados.

CAPITULO 7. LA DISTIBUCIÓN NORMAL Y SU APROXIMACIÓN A PARTIR DE EXPERIMENTOS BINOMIALES

El trabajo que dio origen a la distribución normal tardó más de 200 años para poder establecer su ecuación, y muchos científicos aportaron para su desarrollo; empezando por Galileo y su estimación de los errores de medición en su libro *Dialogue Con-cerning the two Chief System of the World-Ptolemaic and Copernican,* quien observó que los errores en sus mediciones eran simétricos y que los errores pequeños eran más comunes que los errores grandes de medición, lo que según (Valverde, 2017) llevaba a que la distribución de los errores tuviera una forma acampanada, lo que lo conduce a que Galileo proponga las siguientes 5 afirmaciones, mostradas en (Stahl, 2008):

1. Hay solamente un número, el cual da la distancia de la estrella al centro de la tierra, la verdadera distancia.
2. Todas las observaciones están cargadas de errores, debido al observador, los instrumentos y otras condiciones observacionales.
3. Las observaciones son distribuidas simétricamente alrededor del valor verdadero; esto es, los errores están distribuidos simétricamente alrededor de cero.
4. Errores pequeños ocurren más frecuentemente que errores grandes.
5. La distancia calculada es una función de las observaciones angulares directas, tal que, pequeños ajustes de las observaciones pueden resultar en un largo ajuste de la distancia.

Así mismo afirmó que el valor verdadero más probable es el valor de x que minimiza la suma de las desviaciones, es decir

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - x_i|$$

Este valor mínimo muchas veces se tomaba como el promedio, pero en realidad es la mediana de los datos $x_1, x_2, \dots, x_n$; siendo este trabajo el precursor de los mínimos cuadrados.

DE MOIVRE Y EL PROBLEMA DE LA EXPANSIÓN DE EXPRESIONES BINOMIALES

El siguiente matemático en realizar un aporte para el desarrollo de la distribución normal fue De Moivre, quien a partir de experimentos binomiales de probabilidad de éxito de 0.5, como por ejemplo el lanzamiento de una moneda, observó que, al lanzar una moneda equilibrada muchas veces, las probabilidades de que saliera cara (o cruz) al representarlas en un gráfico (imagen 19), dichos resultados seguían un patrón en forma de campana; un ejemplo de ello lo muestra (Manzano, 2012), quien grafica los resultados obtenidos de lanzar una moneda equilibrada n veces, tomando como valores de $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$, $n = 8$, siendo el eje horizontal la probabilidad correspondiente de que ocurra el evento, y en el eje vertical se encuentran los posibles resultados de un solo evento, por ejemplo que salga cara.

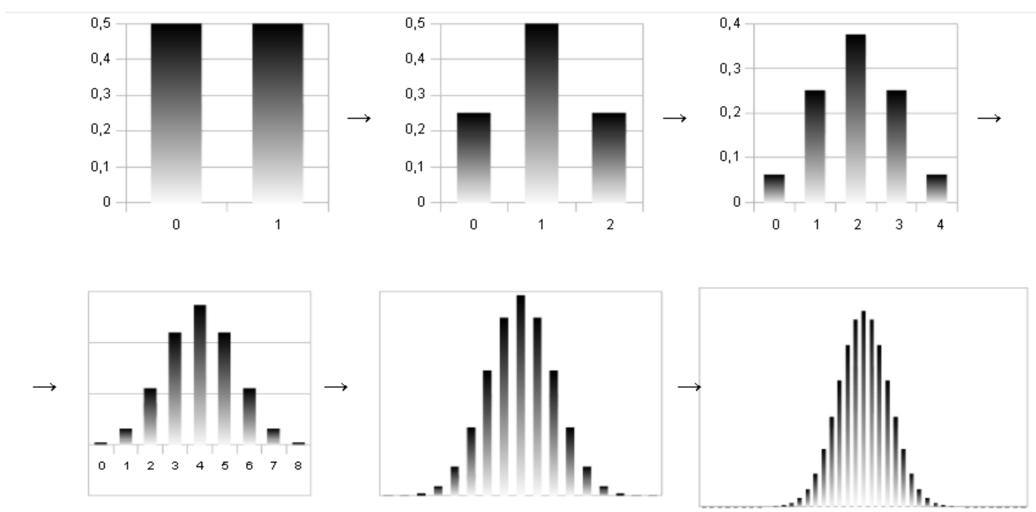


Imagen 19. Evolución hacia la normal del lanzamiento de una moneda. [Fuente (Manzano, 2012)]

Aunque este no fue su único acercamiento con la distribución normal, ya que como comenta (Rosenfeld, s.f.), la fórmula que describe el comportamiento de la curva normal no se veía como ahora, en particular porque para aquella época no había una notación para el número e, así como tampoco había un sentido general de desviación estándar, la cual está representada por σ en la ecuación que se trabaja hoy en día. Uno de los problemas que lo encaminaron hacia la distribución normal fue:

> *"Un método para aproximar la suma de los términos de la expansión Binomial $(a + b)^n$ a una serie de donde se deducen algunas reglas prácticas para estimar el grado de asentimiento que se le debe dar a Experimentos.*
>
> *Aunque la Solución de Problemas de Azar requiere a menudo que se sumen varios Términos del Binomio $(a + b)^n$, sin embargo, en problemas donde n es muy grande, la cosa parece tan laboriosa y de tanta dificultad, que pocas personas han emprendido esa Tarea; porque además de James y Nicolas Bernoulli, dos grandes matemáticos, no conozco ningún organismo que lo haya intentado; en el cual, aunque han demostrado una gran habilidad y tienen el elogio que se debe a su laboriosidad, sin embargo, se requirieron algunas cosas más."* (Rosenfeld, s.f.)

Acá se puede ver que De Moivre trata de dar solución a problemas de azar que involucran el uso de la expansión binomial para determinar el resultado más probable de un experimento. El problema central de De Moivre es encontrar la suma de "varios" términos en una expansión binomial. Queriendo encontrar un procedimiento que le permitiera hacer de estas cuentas algo menos "laborioso".

De Moivre no quería sumar todos los coeficientes de la expansión binomial. Así que necesitaba describir de alguna manera, la forma general en que distribuían los valores en una fila de coeficientes sin tener que calcularlos uno por uno. Un ejemplo claro de este problema se puede ver en la tabla 6. Donde se desea encontrar la suma de varios coeficientes en una sola fila, digamos los dos términos de la mitad en la fila para n = 5. Vemos rápidamente que 10 + 10 = 20.

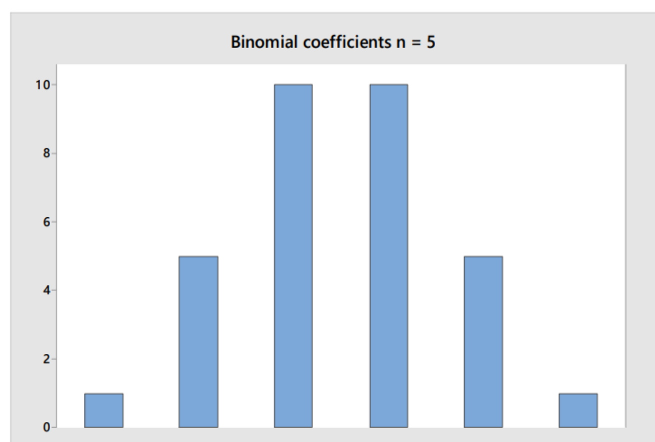
Table 1			
n	Expansion of $(a+b)^n$	Coefficients	Sum 2^n
1	a+b	1 1	2
2	$a^2+2ab+b^2$	1 2 1	4
3	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1	8
4		1 4 6 4 1	16
5		1 5 10 10 5 1	32
	etc.	etc.	etc.

Tabla 6. Expansión binomial $(a+b)^n$ hasta $n = 5$. [Fuente (Rosenfeld, s.f.)]

A lo que De Moivre se preguntó

> *"¿qué pasa si desea encontrar la suma de los 10 términos del medio en la línea donde n = 100?"*

Y dado el caso, que se presentara este tipo de problemas en un juego de azar su solución sería muy larga y engorrosa. A esto era lo que hacía referencia De Moivre cuando se refiere a "laborioso" sobre esta tarea. Es por ello que propone una solución, describiendo la forma general de la distribución de los coeficientes en una fila, sin tener que calcular cada uno de ellos. Como se observa en la siguiente gráfica.



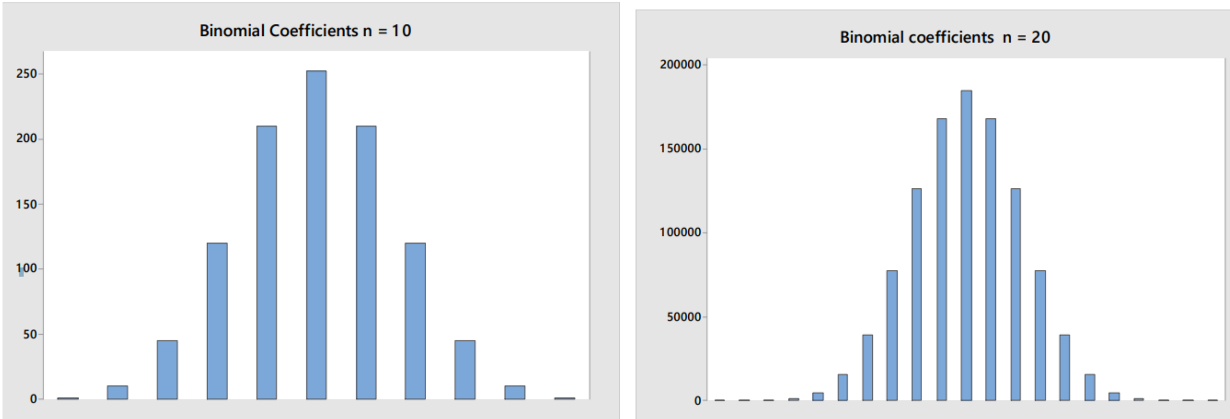


Imagen 20 Representación gráfica de los coeficientes binomiales con $n = 5, n = 10, n = 20$. [Fuente (Rosenfeld, s.f.)]

Este gráfico, que muestra los coeficientes de cada expansión binomial, está formado por muchas barras que delimitan una curva suave, donde a medida que n aumenta, los gráficos se parecen cada vez más a una curva con forma de campana; viendo esto, la idea de De Moivre fue que, en vez de sumar muchos números individuales, se podía encontrar el área bajo la curva en un intervalo de coeficientes, para lo cual echó mano de las fortalezas del cálculo.

Para (Rosenfeld, s.f.), De Moivre comenzó su análisis con la expansión de $(1 + 1)^n$, la cual se puede representar mediante el lanzamiento de una moneda equilibrada con probabilidades iguales (0.5) de que caiga cara o cruz. Se centró en la proporción entre el coeficiente de la mitad en la fila n, y la suma de todos los coeficientes correspondientes a esa fila (2^n).

Por ejemplo, si $n = 2$, se tiene que la proporción entre el término de la mitad de los coeficientes y la suma de los mismos sería $\frac{2}{4} = 0.5$, ya que para $\frac{(1+1)^2}{2^2} = \frac{1+2+1}{4}$, donde se puede ver que, el coeficiente que se encuentra en la mitad es el 2, por lo tanto es este valor el que se divide entre la suma de todos sus coeficientes $(1 + 2 + 1 = 4 = 2^2)$.

Si $n = 3$, la proporción sería $\frac{3}{8} = 0.375$, ya que De Moivre generaliza que cuando n es impar los términos intermedios al ser el mismo número se puede tomar cualquiera de los dos independiente de su posición (Rosenfeld, s.f.)

Lo que De Moivre quería determinar era que sucedía con la proporción de estos valores cuando n se hacía muy grande, lo cual asume de la siguiente forma:

> *Han pasado ya una docena de años o más desde que encontré lo que sigue; si el binomio (1 + 1) se eleva a una potencia muy alta denotada por n, la proporción que tiene el término medio con la suma de todos los términos, es decir, 2^n, puede expresarse por la fracción $\frac{2A\times(n-1)^n}{n^n\times\sqrt{n-1}}$, donde en A representa el número cuyo logaritmo hiperbólico es $\frac{1}{12}-\frac{1}{360}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{1680}$, etc. pero debido a que la cantidad $\frac{(n-1)^n}{n^n}$ o $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ está muy cerca cuando n es una potencia alta, lo cual no es difícil de probar, se sigue que , en una potencia infinita, esa cantidad será absolutamente dada, y representará el número del cual el logaritmo hiperbólico es -1.* (Rosenfeld, s.f.)

Es interesante ver como De Moivre encuentra una ecuación para la proporción, entre los valores intermedios y la suma total de los coeficientes para cualquier n dado; lo que Rosenfeld llamará de ahora en más como R. Estos valores de R le permitieron encontrar la altura de la curva en medio del intervalo de los coeficientes. Pero para poder solucionar esta ecuación con valores de n muy grandes, implementó unos resultados encontrados sobre los límites, en trabajos anteriores de Jacob Bernoulli y James Stirling.

Lo primero que hizo fue, reescribir la fracción $\frac{2A\times(n-1)^n}{n^n\times\sqrt{n-1}}$ como $\frac{2A}{\sqrt{n-1}}\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$, llegando así a $\frac{2A}{\sqrt{n-1}}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, queriendo aplicar a esta última fracción el límite cuando n tendiera al infinito.

Luego utilizando un trabajo de Bernoulli donde decía que el límite para $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ cuando n tiende a infinito es *"el número cuyo logaritmo hiperbólico es -1"* (Rosenfeld, s.f.), y teniendo en cuenta que a lo que hace referencia como logaritmo hiperbólico hoy en día lo conocemos como logaritmo natural, podemos transcribir de forma actual lo que Bernoulli quiso decir como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

Usando este número para referirse a los valores grandes de n en su fracción, De Moivre la reescribe así $R=\frac{2Ae^{-1}}{\sqrt{n-1}}$; como ya había determinado que el valor de A era igual al del logaritmo hiperbólico de $\frac{1}{12}-\frac{1}{360}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{1680}$..., con los anteriores resultados obtenidos por Bernoulli este valor se podía reescribir como $A=e^{\frac{1}{12}-\frac{1}{360}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{1680}\cdots}$, con lo cual la expresión para R sería

$$R=\frac{2\left(e^{\frac{1}{12}-\frac{1}{360}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{1680}\cdots}\right)e^{-1}}{\sqrt{n-1}}=\frac{2\cdot e^{-1+\frac{1}{12}-\frac{1}{360}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{1680}\cdots}}{\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n-1}\cdot(e^{1-\frac{1}{12}+\frac{1}{360}-\frac{1}{1260}+\frac{1}{1680}\cdots})}$$

Luego llama $B=e^{1-\frac{1}{12}+\frac{1}{360}-\frac{1}{1260}+\frac{1}{1680}\cdots}$, con lo que la fracción de R queda

$$R=\frac{2}{B\cdot\sqrt{n-1}}$$

Llegada a esta parte el gran problema que quedaba por resolver era encontrar el valor exacto de B, por suerte para De Moivre, su amigo James Stirling encontró este valor, dicho en palabra de De Moivre

> *... hasta que mi digno y erudito amigo Mr. James Stirling, que se había aplicado después de mí a esa investigación, descubrió que la cantidad B denotaba la raíz cuadrada de la circunferencia de un círculo cuyo radio es la unidad.* (Rosenfeld, s.f.)

Teniendo que B es igual al perímetro del círculo cuyo radio es 1, se puede reescribir R así

$$R=\frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot 1}\cdot\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{n-1}}$$

Ante esta nueva forma de la fracción, De Moivre afirma que como los valores de n son muy grandes, no hay una diferencia apreciable entre $\sqrt{n-1}$ y $\sqrt{n}$, por lo que decide que su proporción R se representara como

$$R=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{n}}$$

Algo similar en forma a la ecuación que describe la forma de campana. Y es que teniendo en cuenta que desde el principio De Moivre empezó su análisis con un experimento binomial con probabilidad de éxito de $p = \frac{1}{2}$, así como también que la desviación estándar de la distribución binomial es $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, donde al reemplazar $p = \frac{1}{2}$, se obtiene $\sigma = \sqrt{n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$, con lo que se obtiene que $\sqrt{n} = 2\sigma$, y al reemplazar este valor en $R = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \cdot 2\sigma} = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$; teniendo en cuenta que la ecuación que describe la curva normal es

$$y = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Entonces la ecuación encontrada por De Moivre $R = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$, representa el caso cuando en y, el valor de $x = \mu$, puesto que

$$y = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{0} = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} = R$$

Aplicando esto a la teoría de errores, como afirma (Rosenfeld, s.f.), se tienen que como $\sigma = \frac{\sqrt{n}}{2}$, entonces si se desea reducir a la mitad el margen de error, se debe recopilar cuatro veces más información y no el doble como dictaría el sentido común.

CAPITULO 8. CURIOSIDADES Y PROBLEMAS PARADÓGICOS

EL PRINCIPIO DEL PALOMAR

Para empezar con este tema (Sabia, 2016) propone el siguiente acertijo

> *En un cajón de mi cuarto guardo todas mis medias sueltas en forma un poco desordenada. Tengo 24 medias blancas iguales y 12 medias negras iguales. Cuando voy a trabajar por la mañana me levanto muy temprano y no quiero despertar a mi esposa, así que no enciendo la luz y saco las medias a tientas. ¿Cuál es el número mínimo de medias que tengo que sacar para asegurarme que, al salir de la habitación, pueda armar un par de medias del mismo color?*

La respuesta es 3, ya que si saca en el primer intento una media de color negro y luego la segunda media que se saca es de color negro (aplica el mismo razonamiento si ambas medias son blancas), pues ya se tendrá la pareja de medias del mismo color; pero si se da el caso que en la segunda sacada la media sea de color blanco, bastará con que se saque una última media del color que sea para completar una pareja de un solo color, bien sea las dos blancas si se saca la última media de color blanco, o la pareja de color negro junto a la primera media si es que en la tercera sacada se obtiene una media negra.

El principio matemático que abarca este acertijo es el llamado principio de palomar o principio de Dirichlet, ya que aparentemente fue el matemático Prusiano Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), el primero en formalizar este concepto. Que presentado como un teorema por (Sabia, 2016) dice así:

> *Teorema 1. Si hay n objetos para repartir en d cajas, tal que $n > d$, de forma tal que cada objeto vaya necesariamente a parar dentro de alguna caja, no importa la forma en que se distribuyan estos objetos, en alguna caja habrá más de un objeto.*

O como se presenta en la situación del palomar, Si hay más palomas que palomares, entonces en alguno de los palomares deberá contener por lo menos dos palomas.

Imagen 21. Palomas en un palomar. (Fuente (Ibáñez, 2015))

Al presentarse este principio a su vez como un teorema debe existir alguna demostración para validar su conjetura, por lo que, si se hace por contradicción, se tiene que

Demostración: si en las d cajas después de ordenar los n elementos quedara de a un solo elemento o ninguno, entonces $d > n$, lo cual contradice la hipótesis del teorema donde $n > d$.

Otro ejemplo donde se implementa este principio con objetos matemáticos, es con cualquier función de un conjunto con n elementos a otro conjunto con d elementos de tal forma que $n > d$, entonces la función no puede ser inyectiva.

LA FALACIA DEL JUGADOR

También llamada como la falacia de Monte Carlo, se refiere a la errónea creencia de que, si un suceso ha ocurrido múltiples veces en el pasado, es menos probable que ocurra en el futuro, o de modo contrario, que, si un suceso ha dejado de ocurrir en varias ocasiones en el pasado, es más probable que si ocurra en el futuro.

Este error en la predicción de la ocurrencia o no de un suceso partiendo de las observaciones pasadas, está relacionada con la noción de independencia estadística, ya que, si los eventos en cuestión son independientes, la probabilidad de ocurrencia a futuro de cada uno de ellos no se afecta por la cantidad de veces que haya o no ocurrido. En términos de probabilidad condicional

$$P(A_2|A_1) = P(A_2)$$

Donde A_1 y A_2 son dos eventos independientes.

Un ejemplo de esto (según (Dia31, 2021)) se encuentra comúnmente en los juegos de apuestas donde la gente puede creer que en el próximo lanzamiento de un dado es más probable que salga un seis, ya que anteriormente no ha salido con mucha frecuencia.

Para ilustrar mejor se propone un ejemplo con una moneda equilibrada donde la probabilidad de que salga cara tras lanzarla al aire una vez es $\frac{1}{2}$; si se lanza dos veces seguidas, la probabilidad de que salgan dos caras es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, y de obtener tres caras en tres lanzamientos seguidos es $1/8$. En general si se denomina a A_i al evento en el cual en el lanzamiento i de una moneda equilibrada sale cara, entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = \frac{1}{2^n}$$

Por lo cual, en el caso de que hayan salido con antelación 4 caras seguidas, y en el siguiente lanzamiento (lanzamiento 5) también salió una cara, un apostador podría pensar que al haber completado la cara número 5 seguida, y por lo tanto la probabilidad de que esto hubiera ocurrido es $\frac{1}{32} = 0{,}03125 = 3.125\%$, sería más probable que en el siguiente lanzamiento de la moneda saliera una cruz en lugar de una nueva cara. Lo cual es un error, ya que como se mencionó anteriormente la probabilidad de que salga de nuevo cara en el lanzamiento 6, si ya han salido 5 caras seguidas es

$$P(A_6|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_6) = \frac{1}{2}$$

Otro ejemplo, esta vez de la vida real ocurrió en el casino de Monte Carlo en Mónaco, cuando en el verano de 1913, un suceso poco probable ocurrió, y es que en la mesa de la ruleta la bola cayó 26 veces seguidas en el color negro, cuya probabilidad de ocurrencia es de

$$\left(\frac{18}{37}\right)^{25} = 0{,}000000015; \text{al rededor de 1 posibilidad entre 66.6 millones}$$

Imagen 22. Ruleta con bola en color negro [Fuente. (Dia31, 2021).

y debido a la falacia del jugador, los apostadores perdieran millones de francos apostando en contra del color negro, creyendo erróneamente que por haber caído tantas veces seguidas en el siguiente lanzamiento caería la balota en el color rojo. Generalizando la idea de los jugadores a decirse a sí mismos que, después de una larga racha de derrotas, es probable que pronto ganen.

EL PROBLEMA DE MONTY HALL

Este problema lleva el nombre del presentador del famoso programa de concurso *Let´s Make a Deal* (Hagamos un trato), televisado entre 1963 y 1986. Y su interés para la teoría de la probabilidad radica en como el tener una información nueva a menudo puede hacer que cambien las probabilidades ya establecidas.

Imagen 23. El presentador de televisión Monty Hall del programa Hagamos un trato. [Fuente (Quintela, 2019)]

El concurso consistía en que uno de sus participantes tenía la oportunidad de escoger una de entre tres puertas, donde posiblemente habría un automóvil último modelo, pero si elegía la puerta incorrecta se encontraría con que adentro le esperaría una cabra, pero antes de abrir la puerta escogida, el presentador Monty abría una de las otras dos puertas donde él conocía de antemano que había una cabra; luego le preguntaba a la persona que concursaba si quería mantener su elección de puerta o si se quería cambiar a la otra puerta.

Como comenta (Quintela, 2019) el sentido común diría que no importa ya que como ahora quedan dos puertas, las probabilidades serían del 50% de tener la puerta correcta, por lo tanto, da igual cambiar la puerta o quedarse con la que escogió al inicio. Pero analizando el problema como se muestra en la imagen 24 Se puede ver que la mejor decisión es cambiar de puerta ya que le daría la probabilidad de 2/3 de ganar el automóvil, en lugar de la probabilidad de 1/3 de ganar si se queda con la puerta seleccionada desde el inicio.

Imagen 24 Visualización de todos los caos posibles sobre cambiar o permanecer con la elección. [Fuente (Quintela, 2019)]

Usando las probabilidades condicionadas se puede dar solución a este dilema, determinando primero los eventos involucrados como

A: El concursante en su elección inicial selecciona la puerta donde está el automóvil.

B: El concursante en su elección inicial selecciona la puerta donde está una de las dos cabras.

G: El concursante gana el automóvil.

Si se quiere calcular la probabilidad de que el concursante se gane el automóvil ($P(G)$), teniendo en cuenta que el evento $G = (G \cap A) \cup (G \cap B)$, puesto que $A \cap B = \emptyset$ y que $A \cup B = \Omega$, es decir que A y B son una partición del conjunto Ω; entonces se tiene que

$$P(G) = P\big((G \cap A) \cup (G \cap B)\big) = P(G \cap A) + P(G \cap B) = P(G|A) \cdot P(A) + P(G|B) \cdot P(B)$$

$$P(ganar) = P(ganar\ coche|(eligiendo\ bien\ al\ principio)) \cdot P(elegir\ bien\ al\ principio)$$
$$+ P(ganar\ coche|(elegir\ mal\ al\ principio)) \cdot P(elegir\ mal\ al\ principio)$$

A demás que la probabilidad de que escoja la primera vez la puerta donde está el automóvil es $P(A) = \frac{1}{3}$, y de que escoja una puerta donde hay una cabra es $P(B) = \frac{2}{3}$

Con el planteamiento de esta probabilidad surge dos casos con resultados diferentes:

- Caso 1. El concursante decide no cambiar su elección:

  En este caso $P(G|A) = 1$ ya que, si escogió desde el principio la puerta ganadora y no la cambia, su elección la hará ganadora, y $P(G|B) = 0$ puesto que no hay manera de que al final gane el vehículo si desde la elección inicial escogió una puerta con una cabra en su interior, y luego no cambia la puerta.

$$P(G) = P(G|A) \cdot P(A) + P(G|B) \cdot P(B)$$

$$P(G) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

- Caso 2. El concursante decide cambiar su elección:

  En este caso $P(G|A) = 0$ y $P(G|B) = 1$, entonces para

$$P(G) = P(G|A) \cdot P(A) + P(G|B) \cdot P(B)$$

$$P(G) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, la mejor opción es cambiar la puerta, ya que es la opción más probable.

PARADOJA DE SAN PETERSBURGO

El problema original de San Petersburgo fue desarrollado por Nicolas Bernoulli y discutido junto a su primo Daniel Bernoulli en 1738, cuando publica su solución en la Academia Imperial de Ciencias de San Petersburgo. El problema en cuestión lo enuncia (Kart, 2018) como:

> *Un jugador juega a lanzar una moneda equilibrada en un casino. El casino se compromete a pagar al jugador 1 dólar si aparece cara en el lanzamiento inicial, 2 dólares si la cara aparece primero en el segundo lanzamiento y, en general,* 2^{n-1} *dólares si la cara aparece por primera vez en el enésimo lanzamiento. ¿Cuánto debería teóricamente el jugador dar al casino como pago inicial si el juego va a ser justo (es decir, la ganancia esperada del casino o del jugador es cero)?*

Es decir que el jugador gana en el n-ésimo lanzamiento, siempre y cuando en todos los lanzamientos anteriores $(n-1)$ ha salido cruz y el n-ésimo lanzamiento sale cara. Siendo la probabilidad de que esto ocurra

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}$$

En tal caso, el casino le debe pagar al jugador la sumatoria de 2^{n-1} dólares. Por tal razón el valor monetario esperado ($E(Y)$) del juego de San Petersburgo es la suma de los np

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$$

Y según N. Bernoulli, como esta es una suma divergente, una persona racional, debería estar dispuesta a pagar cualquier precio por apostar en este juego. Pero el casino deberá exigir una apuesta R de tal forma que el juego sea justo ($E(Y) - R = 0$), lo que paradójicamente llevaría a que la apuesta sea tan grande como $E(Y)$.

Por tal razón, según (Kart, 2018), para que el juego se pueda realizar con cantidades de pagos y de apuestas finitas, se debe implementar un sistema donde se limite el pago hasta una cierta cantidad 2^k, solo si el número k de lanzamientos es como máximo igual a un valor pagado r, ya que en ese caso el valor esperado para el pago se convierte en

$$2^0\left(\frac{1}{2}\right)+2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2+2^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+2^{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)^r=r$$

Lo que lo convertiría ahora si en un juego justo.

LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON Y LAS MUERTES POR PATADAS DE CABALLO

En Guan (2020) se presenta un problema curioso sobre la implementación de la distribución de Poisson. A finales del siglo XIX se realizaron observaciones a diez grupos del ejercito prusiano (antiguo estado del norte de Alemania), sobre lesiones accidentales ocasionadas por patadas de caballos; respecto a estos datos un economista y estadístico ruso llamado Ladislaus Josephovich Bortkiewicz, decide en 1898 analizar los datos recopilados para determinar las causas de estos accidentes. Es así como en los 20 años de toma de datos se encontró que hubo 200 accidentes de este tipo, de los cuales 122 soldados habían muerto por estas causas; Bortkiewicz encuentra el promedio de muertes por cada accidente

$$\frac{122}{200}=0{,}61=\lambda$$

Y usando este valor como lambda, aplica la distribución de Poisson como método para determinar aproximadamente cuántas muertes habían ocurrido por cada accidente, tomando como $x=1,2,3,4,\ 5,6$, donde x representa el número de muertes por accidente de patadas de caballo. Por lo tanto, las probabilidades encontradas son

$$P(X=1)=\frac{e^{-0.61}\cdot 0{,}61^1}{1!}=0{,}3315$$

$$P(X=2)=\frac{e^{-0.61}\cdot 0{,}61^2}{2!}=0{,}1011$$

$$\vdots$$

Colocando esta información en la siguiente tabla

Número de muertes por accidente	Probabilidad P(X=x)	Predicción del número de ocurrencias
1	0,3315	66,3
2	0,1011	20,22
3	0,0205	4,1
4	0,0032	0,64
5	0,0004	0,08
6	0,0001	0,02

Tabla 7. Predicción de número de muertes por accidente en las 200 observaciones hechas. [Fuente (Guan, 2020)]

Cuando Bortkiewicz realizó este análisis no tenía conocimiento de la verdadera cantidad de muertes por accidente, por lo que, al contrastar sus resultados con los datos obtenidos, representó esta nueva información para complementar su tabla

Número de muertes por accidente	Probabilidad P(X=x)	Predicción del número de accidentes	Número real de accidentes
1	0,3315	66,3	65
2	0,1011	20,22	22
3	0,0205	4,1	3
4	0,0032	0,64	1
5	0,0004	0,08	0
6	0,0001	0,02	0

Tabla 8. Comparativa de resultados obtenidos con la distribución de Poisson con los datos verdaderos [Fuente (Guan, 2020)]

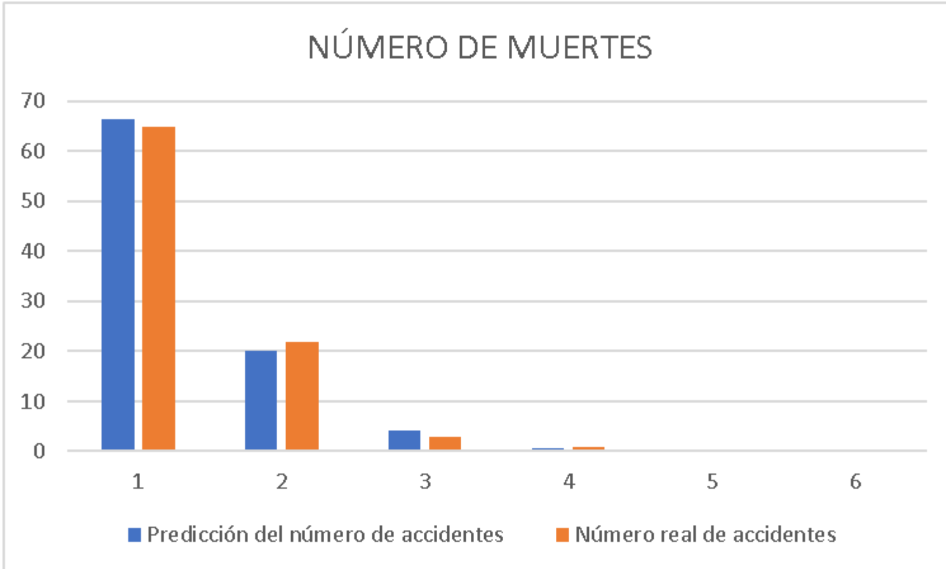


Imagen 25. Comparación de los resultados con los valores reales [Fuente propia]

Como los resultados obtenidos por Bortkiewicz con la distribución de Poisson son muy próximos a los verdaderos valores obtenidos de las observaciones, le permitió concluir que la ocurrencia de los accidentes con patadas de caballos que ocasionaron la muerte de algunos soldados se debía al azar. Si lo valores obtenidos por Bortkiewicz hubiesen variado mucho de los verdaderos datos, se podría concluir que hay alguna causa como mala instrucción al personal que trabajaba con los caballos, o por cualquier otro factor humano[12].

LA MÁQUINA DE GALTON

Francis Galton fue una persona muy polímata, ya que sus intereses y aportes a las ciencias fueron en campos tan variados como la estadística, la sociología, la psicología, antropología, geografía (De León, 2021) entre otras.

Uno de sus aportes a la estadística fue la creación de un dispositivo también llamado *Quincunx,* diseñado, de manera que, al dejar caer una esfera, ésta choque con los objetos

[12] Vale la pena anotar, que, de este ejemplo, se puede proponer un problema de "bondad de ajuste" que son eventualmente trabajados en cursos como los de "métodos estadísticos"

dispuestos en distintos niveles de tal forma que su dirección de caída se vea a afectada, como se observa en la imagen 26.

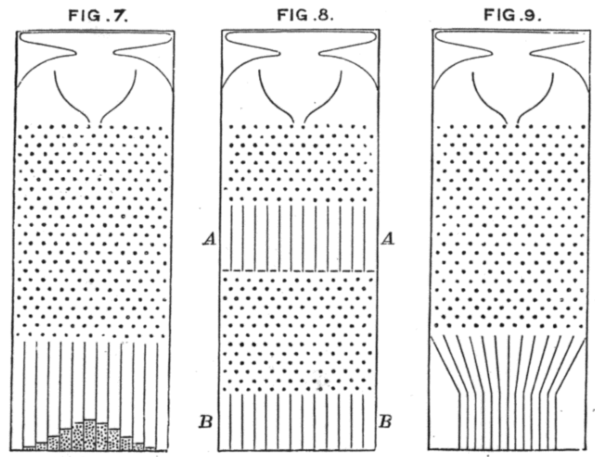


Imagen 26 Distintos diseños de la máquina de Galton. (Fuente (De León, 2021)).

Si se observa el recorrido de una esfera, en cada obstáculo puede cambiar su dirección a la izquierda con probabilidad "p" o a la derecha con probabilidad "$q = 1 - p$". Por lo cual la variable aleatoria puede tomar dos posibles valores, 0 si cae a la izquierda o 1 si cae a la derecha, es por ello que se puede decir que se está ante una variable aleatoria se Bernoulli; así mismo la variable X que cuenta el número total de “1” al finalizar el experimento (esferas que se dirigieron a la derecha) se la denomina Binomial. Los posibles valores de esta variable binomial X dependerá de la cantidad de niveles que tenga el Quincunx.

Si se realizan n lanzamientos cada uno de ellos pudiendo ir a la derecha o a la izquierda con la misma probabilidad $\left(\frac{1}{2}\right)$, se van a ir depositando en los distintos canales del fondo formando a su vez una figura de forma acampanada.

Imagen 27 Máquina de Galton con las esferas acumuladas con forma acampanada. (Fuente (De León, 2021))

Y es que como la variable aleatoria es binomial y la cantidad de esferas que se lanzan (n) es muy grande, y tomando en cuenta la cantidad de niveles que haya (cantidad de posibles decisiones para cada bolita 0 o 1), entonces estas esferas van a ir acumulándose dependiendo de la probabilidad de acabar en ese lugar, teniendo la mayor acumulación en el centro, ya que hay más formas (caminos) para llegar a la mitad de la base que, a los extremos, y tomando así aproximadamente una forma que se representaría con la distribución normal.

CONCLUSIONES

Desarrollando cada uno de los capítulos, se ha mostrado de qué manera ha evolucionado históricamente el concepto de probabilidad, ya que desde sus comienzos (entiéndase desde Tartaglia y Cardano) la noción de probabilidad se refería a los chances o casos donde podía ocurrir un evento, pasando por el término “suerte” que implicaba los casos de ganancia y perdida con proporciones de los eventos favorables a los no favorables, hasta llegar a la definición dada por Laplace de la división entre el número de casos favorables sobre el número de casos totales. Todas estas nociones llevaron al nacimiento de un ciclo de creación y transformación de nuevos temas que complementaron y enriquecieron temas ya existentes; pasando por avances de grandes matemáticos como Galileo, Cardano, los Bernoulli y otras personas que promovieron y desarrollaron su propia concepción de probabilidad. También, se ha insinuado la necesidad de encontrar un orden en las cosas, de formalizar ideas, del mismo modo que se muestra la importancia para el ser humano de encontrar respuesta a incógnitas que día a día se presentan.

Pero todo esto no sería posible sin las respectivas recopilaciones de información, así como su análisis, que se han hecho a través de los años, gracias a personas como Christiaan Huygens, quien a partir de enterarse de la correspondencia de Pascal Y Fermat decide plasmar esta correspondencia en su obra *De Ratiociniis in Ludo Aleae,* formalizando todos los argumentos que se escribían en ese importantísimo intercambio de cartas, o, a Richard Price, quien, sin su arduo trabajo al organizar y presentar la última información que en vida escribió Thomas Bayes, sobre el paso o cambio de la probabilidad de inferencia directa, $P(Y_n/\theta)$, de los tratadistas clásicos a la probabilidad inversa (o indirecta) $P(\theta/Y_n)$, conocida también como teorema de Bayes, habría ocasionado un atraso grandísimo en su aplicación en distintas ciencias y con ello el avance de las mismas. Del mismo modo es imperativo mencionar la forma en que las discusiones y desacuerdos llevaron a los matemáticos a desarrollar nuevas estrategias para desarrollar los problemas que se les planteaban. Discusiones como la entablada por Pierre de Fermat y Blaise Pascal la cual sentó las bases de lo que conocemos como la teoría de la probabilidad.

Es por ello que se debe resaltar la importancia que tiene la labor de los trabajos relacionados con la historia (no sólo de la probabilidad), ya que sirven de ventana para visualizar, cuál y cómo fue la génesis de cada uno de los temas con los que se trabaja hoy en día, cuando se habla de probabilidad; puesto que la historia enseña a quien la estudia, que no siempre se necesita una gran base matemática (pero si trabajo duro) para construir un concepto matemático; así también que cada proceso que se desarrolla en cualquier disciplina (en este caso la probabilidad) conlleva caer en una serie de aciertos, como cuando Galileo Galilei acertadamente asigna una expresión con base en la cantidad de dados y la cantidad de caras de cada uno de ellos, para calcular la cantidad de los resultados posibles al lanzar 3 dados de 6 caras ($6^3 = 216$), errores y dificultades, como el caso de Cardano cuando quiso calcular "la suerte" o probabilidad de obtener cierto resultado al lanzar un dado varias veces, pero lo que terminó calculando fue la esperanza del evento; dichas situaciones son generados en muchos casos por la poca información disponible en el momento. Pero que poco a poco con la llegada de nuevos pensadores se va armando el rompecabezas de múltiples piezas, realizando una formalización de la teoría existente.

Del mismo modo es importante señalar que en trabajos como por ejemplo el de Pingala sobre la combinación de n sílabas en un verso, se encuentra un mundo completo de matemáticas escondidas, ya que trabajos posteriores a este hicieron salir a la luz, características como el trabajo prematuro de los números en base dos, o hasta la mismísima sucesión de Fibonacci (Descubierta muchos siglos después). Por ello, el estudio y análisis de los trabajos que anteceden al conocimiento que se tiene hoy en día, pueden llegar a ser el centro de quizás nuevos descubrimientos, o de hallazgos como encontrar que un tema nuevo ya había sido trabajado con antelación, pero sin la rigurosidad necesaria.

El estudio de las matemáticas a través de su historia resulta, y en particular el de la probabilidad, resulta interesante, no sólo por su investigación con fines netamente curiosos y por gusto propio, sino también por sus posibilidades de implementación en el aula, con ejemplos de actividades como las propuestas por (Sabia, 2016) para el manejo del tema del principio del palomar, ya que son entretenidas y no necesitan una base fuerte de matemáticas. Aunque esto conlleve en ciertos momentos, enfrentar un reto al no poder encontrar información sobre el tema que se busca. De hecho, a pesar de que en muchos medios de divulgación de información circula una gran cantidad de material sobre probabilidad, lo cierto es que son muy pocos los trabajos que hacen un estudio de la historia de la probabilidad partiendo de los problemas que conllevaron a su evolución.

Es por todo lo mencionado anteriormente, tanto en el desarrollo de los capítulos como en las anteriores conclusiones, que se espera que el presente trabajo de grado sirva para promover, inspirar y guiar, futuros proyectos que involucren la investigación sobre la historia de las matemáticas.

REFERENCIAS

123RF. (2021). *Foto de archivo - Diseño del vector Dados aislados en blanco. Dos juegos de azar de casino concepto de plantilla dados. Fondo del casino.* Obtenido de https://es.123rf.com/photo_68591332_dise%C3%B1o-del-vector-dados-aislados-en-blanco-dos-juegos-de-azar-de-casino-concepto-de-plantilla-dados-fon.html

Anturi, F., Bernal, F., y Oviedo, L. (2016). De las dificultades en la enseñanza de la probabilidad en estudiantes de educación media en Florencia Caquetá. *Coloquio Regional de Matemáticas y Simposio de Estadística*, 1-2.

Arenzana, V. (3 de Enero de 2018). *VicMat*. Obtenido de “El problema de los puntos. Origen del cálculo de probabilidades”: https://vicmat.com/problema-los-puntos-origen-del-calculo-probabilidades/

Barragués, F., y Guisasola, J. (2009). Una propuesta para la enseñanza de la probabilidad en la universidad basada en la investigación didáctica. *SCIELO*, 127-133.

Barrio Gutierrez, J. (1984). La teoria de las probabilidades y la realidad. *Nueva revista de enseñanzas medias*, 67-73.

Basulto, J., y Camúñez, J. (2007). El problema de los dados del caballero de Méré: soluciones publicadas en el siglo XVII. *SUMA*, 43-54.

Basulto, J., Camuñez, J., y Ortega, F. (2009). *Una explicación de las regularidades detectadas por Pascal en su tabla de valores de las partidas.* España: Universidad de Huelva.

Bueno, S., Dianéz, M., Elías, M., Nuñez, J., y Pérez, M. (2004). Siete puentes, un camino: Königsberg. *SUMA*, 69-78.

Cantillo, A. (2011). The Problem of Points. *Munich Personal RePEc Archive*.

Cerro, J. S. (2001). *Probabilismo moral y probabilidad.* España: Ahepe.

Charles, M. S. (1981). La teoria de la probabilidad: los primeros cálculos. *Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 4*, 123-141.

David, M. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Pedagogía*.

De León, M. (16 de enero de 2021). *Madrid más d Blogs*. Obtenido de La máquina de Galton: https://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2021/01/16/148766

De Moivre, A. (1718). *Doctrine of the chances.* Londres. Diponible en https://archive.org/details/doctrineofchance00moiv/page/319/mode/1up

Dia31. (16 de Febrero de 2021). *La falacia del jugador, un error matemático peligroso para tus finanzas*. Obtenido de https://dia31.com/mejorar-mi-economia/la-falacia-del-jugador-un-error-matematico-peligroso-para-tus-finanzas_89759902.html?sb=bd.scroll

Díaz, D. (2010). Del Valor del Juego a la Esperanza Matemática: Una Mirada Alrededor de 1650. *11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, (págs. 366-374). Cali.

Dörrie, H. (1965). *100 Great Problems of elementary mathematics.* (D. Antin, Trad.) New York: Dover publications, INC.

Fernández, T., Ruiza, M., y Tamao, E. (2004). *Biografías y Vidas .* Obtenido de https://www.biografiasyvidas.com/biografia/k/kolmogorov.htm

García, J. (Febrero de 2000). Historia de un problema: el reparto de la apuesta. *suma, 33*, 25-36.

García, J. (31 de Enero de 2012). *hiberus blog*. Obtenido de https://www.hiberus.com/crecemos-contigo/principio-de-incertidumbre-de-heisenberg/

Girón, J. (S.f.). Historia del cálculo de probabilidades: de Pascal a Laplace. 120-124. Obtenido de https://moam.info/queue/historia-del-calculo-de-probabilidades-de-pascal-a-laplace_5a16a0a61723ddba87e50c9d.html

Gómez, M. (2001). Un Ensayo Encaminado a Resolver un Problema en la Doctrina del Azar (Traducción). *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales (España), 95*(08), 63-80. Obtenido de http://www.mat.ucm.es/~villegas/PDF/EnsayoTraduccion.pdf

Gónzalez, L. (s.f.). B*iografia de Kolmogórov*. Obtenido de https://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Biografias/40-1-b-Kolmogorov.html

González, M., y Landro, A. (2013). Bernoulli, De Moivre, Bayes, Price y los fundamentos de la inferencia inductiva. *cuadernos del cimbage*(15), 33-56. Obtenido de https://ojs.econ.uba.ar/index.php/CIMBAGE/article/view/502/928

Guan, A. (5 de Diciembre de 2020). *Towards data science*. Obtenido de Distribución de Poisson: desde los datos del historial de patadas de caballo hasta la analítica moderna: https://towardsdatascience.com/poisson-distribution-from-horse-kick-history-data-to-modern-analytic-5eb49e60fb5f

Hald, A. (2003). *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750.* New Jersey: JHON WILE y SONS, INC.

Hernández, V. A. (3 de Octubre de 2018). *VICMAT.* Obtenido de https://vicmat.com/galileo-duque-la-toscana/

Hevia, H. (Agosto de 1996). El Problema de los Siete Puentes de Königsberg: Leonhard Euler y la Teoría de Grafos. *Educación Matemática, VIII*(1), 108-115.

Ibáñez, R. (11 de Febrero de 2015). *El principio del palomar, una potente herramienta matemática (parte 1)*. Obtenido de MATEMOCIÓN: https://culturacientifica.com/2015/02/11/el-principio-del-palomar-una-potente-herramienta-matematica-parte-1/

Ibañez, R. (20 de Septiembre de 2017). *Cuaderno de cultura científica.* Obtenido de https://culturacientifica.com/2017/09/20/problema-matematico-las-cartas-extraviadas/

Kart, Ó. (2018). A Historical Survey of the Development of Classical Probability Theory. Suecia: Univerdiad de Uppsala.

Korteweg, D. (1920). Apercy de la Genèse de l'Ouvrage De Ratiociniis in Ludo Aleae et des Recherches subséquentes de Huygens sur les Questions de Probabilité. *Oeuvres de Huygens*(14), 3-48.

Landázuri, E. (2016). *Del Teorema De Bayes Como Herramienta A La Probabilidad Inversa Como Noción: Un Estudio Histórico-Epistemológico.* Norte del Cauca: Universidad del Valle.

Mantilla, I. (16 de Julio de 2020). *El Espectador.* Obtenido de https://blogs.elespectador.com/actualidad/ecuaciones-de-opinion/galileo-problema-del-duque-toscana

Manzano, V. (2012). *StuDocu.* Obtenido de https://www.studocu.com/co/document/universidad-de-los-llanos/licenciatura-en-matematicas-y-fisica/practica/curva-normal-trabajo-sobre-la-campana-de-gauss/4923451/view

Nualart, D. (2004). Kolmogorov y la teoría de la la probabilidad. *Arbor*, 607-619. Obtenido de Academia de Ciencias y Universidad de Barcelona: https://rac.es/ficheros/doc/00204.pdf

Paoletti, T. (Mayo de 2011). *Mathematical Association of America.* Obtenido de https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/leonard-eulers-solution-to-the-konigsberg-bridge-problem

Pérez Hidalgo, M. D. (2015). *La Aportación al Desarrollo del cálculo de probabilidades de la obra de P. R. de Montmort.* Sevilla, España: Universidad de Sevilla.

Quintela, A. (04 de 09 de 2019). *Estadistica Básica Edulcorada*. Obtenido de https://bookdown.org/aquintela/EBE/problemas-de-paradojas.html#problema-de-monty-hall

Raja, S., y Srinivas, M. D. (2015). Nārāyana's Generalisation of Mātrā-vrtta-prastāra and the Generalised Virahānka-Fibonacci Representation of Numbers. *Indian Journal of History of Science*, 227-244.

Rosenfeld, B. (s.f.). *higher logic download.* Obtenido de History of Statistics 2. Origin of the Normal Curve – Abraham DeMoivre (1667- 1754): https://higherlogicdownload.s3.amazonaws.com/AMSTAT/1484431b-3202-461e-b7e6-ebce10ca8bcd/UploadedImages/Classroom_Activities/HS_2__Origin_of_the_Normal_Curve.pdf

Ruiz, A. (2012). *Curso bimodal para el Ciclo Diversificado: Enfoque en Resolución de problemas.* Costa Rica: Ministerio de educación pública de Costa Rica.

Ruiz, G. (2018). La correspondencia epistolar de Nicolas Bernoulli en relación con la "sex ratio". *La Gaseta de la RSME, 21*(2), 389-406.

Sabia, J. (2 de 12 de 2016). El Principio de Dirichlet (o una excusa para pensar matemática). *Revista De Educación Matemática, 31*(3), 3-20. Obtenido de https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/15778

SANDRINE. (8 de Mayo de 2011). *caletec*. Obtenido de https://www.caletec.com/6sigma/origen-de-la-distribucion-normal-su-historia/

Shah, J. (2013). *A history of Pingala's combinatorics.* Boston, Mass: Northeastern University.

Stahl, S. (Diciembre de 2008). La evolución de la distribución normal. *Comunicaciones en Estadísticas* (Másmela, L., y Rincón, W. Trad)*, I*(1), 13-32.

Stigler, S. (2017). *Los siete pilares de la sabiduría estadística.* (M. Nadal, Trad.) Ciudad de México, México: Grano de Sal.

Todhunter, I. (1865). *A History of the of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace.* Londres: Macmillan. Disponible en: www.archive.org/details/ofmathemahistory00todhrich.

UJI, M. (S.f). *Introducción histórica.* Obtenido de http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/170968/tema1_def.pdf?sequence=1yisAllowed=y

Valverde, M. (2017). Un estudio de la presentación de la distribución normal en los textos de bachillerato. *Universidad de Granada*.

APÉNDICE 1

Montmort propone otra forma llamada "método analítico" de solucionar el problema 1 enunciado por Huygens, recordando que la regularidad ya establecida por Huygens con la que los jugadores A y B van a participar es $ABBA\ ABBA$ ...; es decir que el jugador A realiza la primera jugada y si no gana, volvería a jugar hasta la jugada 4, y si en esa cuarta jugada no ganase, sería él quien comience la nueva serie de jugadas empezando con la quinta y de no ganar ene esta jugaría de nuevo hasta la jugada 8 y así sucesivamente. Montmort representa esta información sobre el jugador A como una serie, donde el primer termino es la probabilidad de que gane en el primer juego $\left(\frac{5}{36} = 0{,}138889\right)$, el segundo término de la serie es la probabilidad de que el jugador A gane en su segundo intento, es decir en la jugada 4 (según la regularidad ya establecida) es decir cuando no gano en su primer intento $\left(\frac{31}{36}\right)$ y el jugador B no ganó en sus dos intentos $\left(\frac{30}{36} * \frac{30}{36}\right)$ y el jugador A si ganó en la jugada 4 $\left(\frac{5}{36}\right)$, así:

$$\frac{31 * 30 * 30 * 5}{36^4} = \frac{5 * 30^2 * 31}{36^4} = 0{,}0830547$$

Y así sucesivamente con todos los términos de la serie, con lo que resulta muy difícil obtener el resultado de esta serie a mano, por lo cual utilizando cualquier software podemos encontrar una aproximación a este valor buscado (la suerte de A) como se muestra en la tabla 9, donde el valor de $b = 5$ ya que representa el las posibilidades de ganar en un juego, $c = 30$ indica cuantas posibilidades tiene el jugador B de no ganar en un juego y $d = 31$ representa las posibilidades de que el jugador A no gane en un juego.

SOLUCION DE MONTMORT						
	b	c	D	F		
Jugada	5	30	31	36	Probabilidad	Acumulado
1	1	0	0	1	0,13888889	0,13888889
4	1	2	1	4	0,0830547	0,22194359
5	1	2	2	5	0,07151932	0,29346291
8	1	4	3	8	0,04276811	0,33623102
9	1	4	4	9	0,0368281	0,37305912
12	1	6	5	12	0,02202298	0,3950821
13	1	6	6	13	0,01896423	0,41404633
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
75	1	36	36	75	6,9449E-10	0,4575059
76	1	38	37	76	5,3823E-07	0,45750643
79	1	38	38	79	3,5762E-10	0,45750643
80	1	40	39	80	2,7716E-07	0,45750671
83	1	40	40	83	1,8415E-10	0,45750671
84	1	42	41	84	1,4272E-07	0,45750685

Tabla 9. Calculo de la serie hasta el término 84

Con lo que se puede observar que a medida que las jugadas aumentan el valor de la serie se aproxima al valor establecido por Huygens en su solución para la suerte del jugador A, es decir que el valor de la tabla se aproxima a

$$\frac{10355}{22631} = 0{,}457558216$$

Y por lo tanto la suerte de B sería el complemento de este valor $\frac{12276}{22631} = 0{,}542441783$, mostrando así que el jugador B tiene ventaja sobre el jugador A en este juego.

MÉTODO DE LA SERIE GEOMÉTRICA

Otra manera de encontrar las suertes de los dos jugadores A y B surge utilizando las series geométricas

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

estudiando una única ronda de juego $(ABBA)$; donde la probabilidad de que el jugador A gane en una ronda, es decir que gane en la primera jugada o en la cuarta jugada, está dado por

$$\frac{5}{36} + \frac{31 * 30 * 30 * 5}{36^4} = 0{,}22194359$$

Siendo este el primer término de la serie geométrica para el jugador A $(a = 0{,}22194359)$

Del mismo modo la probabilidad de que B gane en una ronda (que A no gane en el primer juego y B gane en el segundo juego, o que A no gane en el primer juego, ni B en el segundo, pero si gane en el tercer juego)

$$\frac{31 * 6}{36^2} + \frac{31 * 30 * 6}{36^3} = 0{,}26311728$$

Siendo este el primer término de la serie geométrica para el jugador B $(a = 0{,}26311728)$

Para calcular el valor de r de ambas series geométricas se debe hallar el valor de la probabilidad de que en una ronda no gane ninguno de los dos jugadores

$$r = 1 - P(A \cup B) = 1 - (0{,}22194359 + 0{,}26311728) = 0{,}514939129$$

Por lo tanto, la serie geométrica del jugador A es

$$S1_n = 0{,}22194359 + 0{,}22194359 * 0{,}514939129 + 0{,}22194359 * 0{,}514939129^2$$
$$+0{,}22194359 * 0{,}514939129^3 + \cdots + 0{,}22194359 * 0{,}514939129^n$$

Y la serie geométrica para el jugador B es

$$S1_n = 0{,}26311728 + 0{,}26311728 * 0{,}514939129 + 0{,}26311728 * 0{,}514939129^2$$
$$+0{,}26311728 * 0{,}514939129^3 + \cdots + 0{,}26311728 * 0{,}514939129^n$$

Por lo que si se usa un software como Excel para realizar estos cálculos se obtiene la siguiente tabla:

	Gana A	0,457558217	Gana B	0,542441783
	Probabilidad	Acumulado	Probabilidad	Acumulado
1	0,22194359	0,221943587	0,26311728	0,263117284
2	0,11428744	0,336231025	0,13548939	0,398606669
3	0,05885107	0,395082098	0,06976879	0,468375455
4	0,03030472	0,425386819	0,03592668	0,504302133
5	0,01560509	0,440991905	0,01850005	0,522802185
-	-	-	-	-
27	7,1104E-09	0,457558209	8,4295E-09	0,542441774
28	3,6614E-09	0,457558213	4,3407E-09	0,542441779
29	1,8854E-09	0,457558215	2,2352E-09	0,542441781
30	9,7088E-10	0,457558216	1,151E-09	0,542441782
31	4,9994E-10	0,457558216	5,9269E-10	0,542441783
32	2,5744E-10	0,457558216	3,052E-10	0,542441783

Tabla 10. Series geométricas de los jugadores A y B.

Donde se puede observar que a partir del termino 30 de cada serie se llega a los valores mencionados por Huygens como las suertes de cada uno de los jugadores, para A 0,457558216 y para B 0,542441782.