TRANSFORMADAS DE FOURIER – UNA PROPUESTA PARA INTRODUCIR SU ESTUDIO EN LA FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA DE LA UPN

JUAN SEBASTIÁN DÍAZ AGUDELO

NICOLE STEFANIA RINCÓN PIRAVAGUEN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2022

TRANSFORMADAS DE FOURIER – UNA PROPUESTA PARA INTRODUCIR SU ESTUDIO EN LA FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA DE LA UPN

JUAN SEBASTIÁN DÍAZ AGUDELO
CÓD: 2018140028
CC. 1010229359
NICOLE STEFANIA RINCÓN PIRAVAGUEN
CÓD: 2018140065
C.C 1007099214

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE LICENCIADOS EN MATEMÁTICAS

ASESOR

ORLANDO AYA CORREDOR

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2022

Agradezco primeramente a Dios por brindarme a unos padres que me acompañaron en este proceso y obtuve de ellos la fuerza y perseverancia para conseguir este sueño.

Este trabajo de grado se lo dedico con todo mi amor y cariño a:

A mis padres Juan Carlos y Alejandra, quienes con su amor, paciencia y esfuerzo me han permitido llegar a cumplir hoy un sueño más, gracias por inculcar en mí el ejemplo del esfuerzo y persistencia.

A Diego Corredor, por brindarme siempre un apoyo incondicional en cada decisión que tomará, por su amor, paciencia y animo que me brindo día a día para alcanzar esta meta.

RESUMEN

Este trabajo de grado pretende presentar una propuesta de enseñanza y aprendizaje para introducir la Transformada de Fourier (TF) en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), desde una adaptación del modelo de Van Hiele (VH). Para ello se plantea una secuencia de actividades las cuales están diseñadas partiendo de los 4 primeros niveles de razonamiento de VH, y se apoyan en el uso de herramientas tecnológicas. Posteriormente, se planea realizar un pilotaje en la licenciatura en matemáticas; las actividades irán aplicadas según las fases de aprendizaje que propone VH, y seguido a ello, se efectuará un análisis sobre el nivel de razonamiento en que se encuentra el curso con base en los resultados obtenidos.

Palabras clave: Transformada de Fourier, niveles de razonamiento de Van Hiele, Secuencia de actividades, herramientas tecnológicas, fases de aprendizaje y análisis matemático.

ABSTRAC

This degree work aims to present a teaching and learning proposal to introduce the Fourier Transform (TF) in the Faculty of Science and Technology of the National Pedagogical University (UPN), from an adaptation of the Van Hiele (VH) model. For this, a sequence of activities related to the first 4 levels of reasoning of VH is proposed, supported by the use of technological tools, which allow a better development of the proposal. Subsequently, a pilot will be carried out in the degree in mathematics; The activities will be applied according to the learning phases proposed by VH, and after that, an analysis will be made on the level of reasoning in which the course is based on the results obtained.

Keywords: Fourier transform, Van Hiele levels of reasoning, Sequence of activities, technological tools, learning phases and Mathematical analysis.

Contenido

RESUMEN..i

ABSTRAC i

ÍNDICE DE TABLAS vi

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES vii

ÍNDICE DE ANEXOS...ix

INTRODUCCIÓN 1

CAPÍTULO 1: JUSTIFICACIÓN, OBJETIVOS Y ANTECEDENTES 2

1.1 Justificación...2

1.2 Objetivos 3

1.2.1 Objetivo General 3

1.2.2 Objetivos Específicos..3

1.3 Antecedentes 4

CAPÍTULO 2: MARCO MATEMÁTICO 7

2 .1 Preliminares de Cálculo. 7

2.1.1 Definición de función...7

2.1.2 Definición de función trigonométrica. 9

2.1.3 Definición de Serie...9

2.1.4 Definición de transformada integral...10

2.2 Preliminares de Algebra Lineal...11

2.2.1 Definición de espacio vectorial 11

2.2.2 Definición de producto interior 12

2.2.3 Definición de base de un espacio vectorial 13

2.3 Preliminares de Variable compleja 13

2.3.1 Representación de los números complejos 13

2.3.2 Operaciones de números complejos 17

2.3.3 Identidades y teoremas fundamentales 19

2.4 Serie de Fourier 21

2.4.1 Definición de la serie de Fourier 21

2.4.2 Serie Compleja de Fourier 23

2.5 Transformada de Fourier 23

2.5.1 Integral de Fourier 24

2.5.2 Definición de la Transformada de Fourier 24

2.5.3 Definición de transformada inversa de Fourier. 25

2.5.4 Propiedades básicas de la transformada de Fourier 25

CAPÍTULO 3: MARCO DIDÁCTICO 27

CAPÍTULO 4: MARCO TECNOLÓGICO 34

4.1 ¿Por qué usar herramientas tecnológicas? 34

4.2 ¿Cómo implementar la tecnología y las herramientas tecnológicas? 35

4.2.3 La elección de las herramientas a trabajar 36

4.3 ¿Cómo se implementa en la propuesta? 37

CAPÍTULO 5: SECUENCIA DIDÁCTICA....38

5.1 Metodología del trabajo 38

5.1.1 Diseño de actividades e implementación 41

5.1.2 Criterios de clasificación de los niveles de Van Hiele para la secuencia.....49

5.2 Principales diferencias respecto a los antecedentes.....53

CAPÍTULO 6: ANÁLISIS DE LA SECUENCIA....55

6.1 Contextualización....55

6.2 Análisis de tipologías. 56

6.3 Análisis de estudiantes. 61

6.3.1 Evidencias particulares....61

6.3.2 Análisis general de la muestra.....65

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES....78

7.1 Conclusiones desde la clasificación cualitativa de los estudiantes. 78

7.2 Conclusiones desde la aplicación de la propuesta.....79

7.3 Conclusiones desde el diseño de la propuesta.....80

7.4 ¿Cómo se aplicaría a la Facultad de Ciencia y Tecnología? 80

7.4 Conclusiones generales finales.....80

REFERENCIAS 81

ANEXOS....84

ÍNDICE DE TABLAS.

Tabla 1 Primera Actividad. 42

Tabla 2 Segunda Parte de la Actividad 1. 44

Tabla 3 Actividad 2 Serie Compleja de Fourier. 46

Tabla 4 Actividad 3 Transformada de Fourier. 48

Tabla 5: Ponderaciones de las Tipologías. 50

Tabla 6: Clasificación Cualitativa de los Niveles. 50

Tabla 7 Criterios de Clasificación Niveles de Van Hiele Adaptados. 51

Tabla 8 Diferencias de la propuesta con los antecedentes. 53

Tabla 9 Ponderación Primer Ejemplo Particular 61

Tabla 10 Valoración Cualitativa Primer Caso Particular. 62

Tabla 11 Ponderación Segundo Ejemplo. 63

Tabla 12 Valoración Cualitativa Segundo Caso Particular. 64

Tabla 13 Ponderación Tercer Ejemplo. 64

Tabla 14 Valoración Cualitativa Tercer Caso Particular...65

Tabla 15 Evidencia Tipología 1. 71

Tabla 16 Evidencia Tipología 2 72

Tabla 17 Evidencia Tipología 3 73

Tabla 18 Evidencia Tipología 4 74

Tabla 19 Evidencia Tipología 5 75

Tabla 20 Evidencia Tipología 6 76

Tabla 21. Evidencia Tipología 7. 77

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Definición de i 15

Ilustración 2: Parámetros de la forma polar 16

Ilustración 3 Secuencia Temática de la Propuesta 39

Ilustración 4 Secuencia de actividades según niveles de las preguntas bajo VH 40

Ilustración 5 Secciones del Applet de Phet...43

Ilustración 6 Instrucciones de la Actividad. 43

Ilustración 7 Archivo de GeoGebra® para segundo momento...........................45

Ilustración 8 Archivo GeoGebra® Actividad 2 47

Ilustración 9 Dispersión de las Tipologías Encontradas en las Respuestas......................56

Ilustración 10 Dispersión Tipología 7 Encontrada en las respuestas. 57

Ilustración 11 Dispersión Tipología 5 Encontrada en las respuestas. 58

Ilustración 12 Dispersión Tipología 0 Encontrada en las Respuestas. 58

Ilustración 13 Dispersión Tipología 6 Encontrada en las Respuestas. 59

Ilustración 14 Dispersión Tipología 4 Encontrada en las Respuestas. 60

Ilustración 15 Dispersión Tipología 3 Encontrada en las Respuestas. 60

Ilustración 16 Niveles de la muestra en la secuencia 65

Ilustración 17 Diagrama de barras del primer nivel 66

Ilustración 18 Diagrama Circular Primer Nivel..66

Ilustración 19 Diagrama de barras del segundo nivel...67

Ilustración 20 Diagrama circular segundo nivel 67

Ilustración 21 Diagrama de barras del tercer nivel 68

Ilustración 22 Diagrama circular tercer nivel 68

Ilustración 23 Diagrama de barras del cuarto nivel 69

Ilustración 24 Diagrama circular cuarto nivel 69

Ilustración 25 Dispersión de Tipologías del Grupo en General 70

Ilustración 26 Evidencia Tipología 1 71

Ilustración 27 Evidencia tipología 2. 72

Ilustración 28 Evidencia Tipología 3. 73

Ilustración 29 Evidencia Tipología 4 74

Ilustración 30 Evidencia Tipología 5 75

Ilustración 31 Evidencia Tipología 6 76

Ilustración 32 Evidencia Tipología 7 77

ÍNDICE DE ANEXOS

Anexo A: Primera Actividad Series de Fourier. 84

Anexo B: Segunda Actividad Serie Compleja de Fourier 86

Anexo C Tercera Actividad: Transformada de Fourier 87

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado tiene como finalidad proponer una secuencia didáctica para abordar la transformada de Fourier en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional. La propuesta nace como interés propio de los autores, debido a que este concepto, que se encuentra en lo que se denomina el Análisis de Fourier, es uno de los ejes temáticos principales en carreras de ingeniería y afines; de igual modo se considera central e indispensable que los licenciados en matemáticas conozcan algunos elementos esenciales del mismo y cuando menos algunas de sus aplicaciones, ya que permite integrar ciertos aspectos conceptuales y procedimentales tanto de las matemáticas denominadas como elementales y las que se reconocen como parte integrante del Pensamiento Matemático Avanzado.

Ahora bien, en un rastreo preliminar se encontró que no es usual el desarrollo de actividades que relacionen la presentación de un concepto o proceso con los niveles de Van Hiele (VH) en temáticas asociadas al campo del Análisis Matemático, pues desde su presentación a la comunidad de educadores matemáticos se asumió que el modelo, presentado por los esposos Van Hiele, se limitaba exclusivamente al contexto de la geometría. Algunos autores como Rodriguez Pérez (2015) y Jaramillo & Pérez (2001) han propuesto ampliar el campo de trabajo para ramas de la matemática como el análisis. Así, los autores del presente trabajo consideran que esta es una oportunidad para presentar una secuencia didáctica que ayude al desarrollo de los procesos planteados por los Van Hiele, aún, y como se indicará oportunamente, se deben realizar algunas modificaciones al mismo (pp 1- 3).

A continuación, se detalla la estructura general presentada en el documento. En el primer capítulo se aborda la justificación, objetivos y antecedentes de este trabajo. El segundo comprende el marco matemático, el cual considera los preliminares necesarios para el aprendizaje de la Transformada de Fourier (TF). Para ello se debió atender a fundamentos de la matemática como:

conceptos de Álgebra Lineal, Cálculo, Variable Compleja, entre otras. Con estos preliminares se procura presentar y cubrir los elementos esenciales para la comprensión tanto de las series como de la TF y algunas de sus propiedades básicas. Cabe destacar que esta fase fue de vital importancia para los autores del trabajo ya que permitió afianzar, pero también cuestionar algunos conocimientos disciplinares que eventualmente aún no se han formalizado en el proceso de formación experimentado. Posteriormente, en el capítulo tres, se presenta el marco didáctico, en este se dan a conocer los aspectos fundamentales a tener en cuenta en la enseñanza de las matemáticas, y en particular de los conceptos fundamentales de la TF bajo los modelos adaptados de VH. En el capítulo cuatro, que corresponde al marco tecnológico, se alude a la importancia del Software GeoGebra® y las herramientas tecnológicas en general para la comprensión de la TF particularmente asociado a los procesos de visualización. En el capítulo cinco se encontrará la metodología, en la cual se propone una secuencia didáctica que estará orientada a los niveles de VH, con el apoyo de una serie de actividades, en la cual tendrá la finalidad de alcanzar la comprensión de la TF atendiendo a la adaptación de dicha propuesta de VH. En el capítulo seis, se presenta el análisis realizado al pilotaje de la secuencia didáctica en un grupo de estudiantes pertenecientes a la línea de Profundización en Cálculo de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. En el capítulo final se dan las conclusiones, como logros alcanzados en relación con el objetivo general y los objetivos específicos, y se hace una breve reflexión de los autores frente al proceso llevado en el desarrollo de esta.

CAPÍTULO 1: JUSTIFICACIÓN, OBJETIVOS Y ANTECEDENTES

1.1 Justificación

La motivación para el desarrollo del trabajo parte del interés de los autores debido a que, como Futuros Educadores Matemáticos (FEM), evidenciamos que es pertinente dar una mirada alternativa para la enseñanza y aprendizaje de la TF en la educación superior, con la finalidad que los estudiantes y personas interesadas en su estudio puedan desarrollar procesos de argumentación, razonamiento y modelación, que están vinculados a procesos como la resolución de problemas, la comunicación efectiva de la información, y la validación de procedimientos y resultados entre otros.

De manera general, se busca brindar un apoyo didáctico para los docentes interesados en abordar los conceptos y procesos básicos asociados con la TF, mediante una serie de actividades que permitan a los estudiantes adquirir competencias matemáticas como ya mencionadas. Para ello se optó por realizar una adaptación del modelo VH enfocado en el uso de los 4 niveles de razonamiento centrados en la temática particular a desarrollar.

Cada actividad se justifica de acuerdo con las fases de aprendizaje que se requieren para desarrollar los cuatro primeros niveles de razonamiento de VH adaptándolos para la enseñanza y aprendizaje de la TF, prestando atención a las características que deben estar presentes en el desarrollo de las actividades, como son la recursividad con los objetos de estudio, la secuencialidad entre las actividades y la especificidad del lenguaje en ellas.

1.2 Objetivos

Los objetivos que se esperan desarrollar en el presente trabajo de grado a través de las fases de diseño e implementación son los siguientes

1.2.1 Objetivo General

- Diseñar una propuesta bajo el modelo de Van Hiele para introducir la Transformada de Fourier a estudiantes de nivel universitario.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Identificar los elementos que componen la serie y transformada de Fourier.
- Evidenciar la relación de las series de Fourier y la transformada inversa de Fourier.

- Diseñar actividades bajo la adaptación del modelo de Van Hiele para la Transformada de Fourier.
- Analizar las respuestas a las actividades diseñadas bajo el modelo de Van Hiele.

1.3 Antecedentes

La Transformada de Fourier (en lo sucesivo TF) no es un concepto fácil de comprender, al igual que los procesos asociados al trabajo con sus propiedades y procedimientos, algunos de ellos eventualmente pueden ser catalogados de algorítmicos y rutinarios, y quedan ocultos en medio de los procesos de cálculo o de sus aplicaciones. Para hacer un abordaje conceptual adecuado al tratamiento de la TF se deben tener bases previas en distintas áreas de las matemáticas, que en principio se pueden considerar tan disímiles como el análisis y el álgebra lineal, sin dejar de lado su articulación en una estructura robusta como ocurre con muchos objetos matemáticos. En las últimas décadas se han hecho propuestas de enseñanza y aprendizaje de la TF desde perspectivas diferentes; un rastreo inicial lleva al trabajo de (Bobadilla, Gómez , & Bernal, 1999) de la Escuela Universitaria de Informática y de la Universidad Politécnica de Madrid, en la tesis "La Transformada de Fourier, una visión pedagógica", se propone una estructura para la enseñanza de este concepto, desde un método para transformar señales que se encuentran en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. El enfoque didáctico consiste en familiarizar al estudiante dentro del proceso de aprendizaje desarrollando con los formalismos matemáticos y desde allí asimilar los procesos y conceptos fundamentales subyacentes a la TF.

La estructura propuesta por (Bobadilla, Gómez , & Bernal, 1999) se enfoca en 4 fases: La primera trata una presentación gráfica de la TF y la descomposición de un conjunto en señales simples. Luego que el estudiante pueda identificar gráficamente la TF, se pasa a la segunda fase, en la que se hace una explicación de los conceptos fundamentales de las matemáticas en los que se fundamenta la TF, con la finalidad de ir introduciendo a los estudiantes desde ideas intuitivas hacía unos conceptos fundamentales. La tercera parte se enfoca en el desarrollo de ejemplos prácticos, los cuales se propone que sean explicados a detalle con el fin de afianzar los conceptos básicos ya explicados. Por último, en la cuarta parte, se hace énfasis en la formalización matemática de la TF, haciendo uso de los espacios de Hilbert, con la finalidad de proporcionar una estructura más robusta a lo que se ha abordado de la TF.

Landa & Sarasusa (2017) de la Universidad del País Vasco (UPV) a través de su tesis: “Niveles de Razonamiento de Van Hiele para la Transformada de Fourier”, realizan una propuesta para la enseñanza y aprendizaje de la TF. Esta propuesta se centra en el uso de los niveles del refinamiento de razonamiento matemático que proponen los Van Hiele, en cual los autores identifican, describen y caracterizan teóricamente los diferentes niveles de razonamiento matemático en la TF, y proponen fases sobre el aprendizaje en una propuesta de actividades para el apoyo del aprendizaje de los estudiantes.

Otra fase de la revisión documental consistió en artículos donde se aborda el concepto de la TF desde un enfoque aplicativo. En estos trabajos no se logró evidenciar la presentación de una secuencia didáctica de su enseñanza o una propuesta para una secuencia de aprendizaje; por el contrario, se evidenció que solamente se centran en la aplicación de las herramientas teóricas de esta, es decir, centradas en su uso, lo cual tampoco es de extrañar pues es una tendencia muy marcada en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas aplicadas.

Con esta revisión y lo expuesto en los propósitos, en este trabajo se pretende desarrollar una secuencia de actividades que tenga en cuenta los 4 primeros niveles de VH aplicados a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la TF, lo que en su momento se justificará. Estas se realizarán de forma secuencial como lo indican las fases de aprendizaje que propone el modelo VH.

A continuación, se presenta el Marco Matemático que fundamenta la propuesta y que será abordado de una manera global dada la complejidad intrínseca del concepto y sus relacionados.

CAPÍTULO 2: MARCO MATEMÁTICO

En este capítulo se presentan los preliminares necesarios para comprender la transformada de Fourier y algunas de sus propiedades. A continuación, se abordan las definiciones y los teoremas tomados de diversos autores como (Apostol, 1967), (Hwei, 1987), (Kreyszig, 2003), (Zill & Cullen, 2009), , (Hidalgo, 2006), (Acevedo, 2006), (Stewart, Cálculo de una variable, 2008), (Larson & Edwards, 2010) . (Grossman & Flores, 2012). Cabe destacar que la presentación no se hace en extenso ni con detalle dado que el concepto y sus relacionados incluyen una amplia gama de conceptos, definiciones, procesos y algoritmos que, como ya se mencionó, darían para textos completos; así, se abordan los elementos básicos y se invita al lector interesado a profundizar sobre la parte formal del concepto en la bibliografía presentada o a la existente en este campo.

2 .1 Preliminares de Cálculo.

El Cálculo presenta herramientas que ayudan a resolver problemas dinámicos de la vida real, modelando mediante ecuaciones diferenciales los fenómenos asociados al cambio; estas se resuelven, en algunos casos, mediante transformadas y por ello tenemos en cuenta los siguientes conceptos que se requieren para abordar la transformada desde el campo del análisis y particularmente la (TF).

2.1.1 Definición de función.

Una función[1] f es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento.

Si f es una función, el conjunto de todos los elementos x que apareceen como primeros elementos de pares (x, y) de f se llama dominio de f.

[1] Definición tomada de (Apóstol, 1967, p. 65)

Para este trabajo notaremos el dominio de f como $Dom(f)$ para posteriores definiciones que involucren las funciones

***2.1.1.1 Definición de* continuidad *de una función*.**

Una función real f es **continua**[2] **en un número $\boldsymbol{a}$** si

$$Lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Esta definición requiere que se satisfagan tres condiciones, a saber:

i. $f(a)$ está definido (es decir, a esta en el dominio de f)

ii. $Lim_{x \to a} f(x)$ existe.

iii. $Lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

2.1.1.2 Definición de función discontinua

Una función real$f$ es discontinua[3] en a (o f tiene **discontinuidad** en a) si f no es continua en el punto a.

2.1.1.3 Paridad de funciones.

Las funciones pares e impares[4] pueden definirse como:

Función par: Se dice que f es una función par si y solo si $\forall x \in Dom(f),\ f(-x) = f(x)$.

Función impar: Se dice que f es una función impar si y solo si $\forall x \in Dom(f),\ f(-x) = -f(x)$.

Existen funciones que no son pares ni impares ya que es posible que no satisfagan alguna de las definiciones presentadas

[2] Definición de función continúa tomada de (Stewart, 2008, p. 119)
[3] Definición de función discontinúa tomada de (Stewart, 2008, p. 119)
[4] Definición de funciones pares o impares tomada de (Stewart, 2012, p. 186)

2.1.2 Definición de función trigonométrica.

Sea θ un ángulo general en posición estándar y sea, $P(x, y)$ cualquier punto del lado terminal de θ y r sea la distancia $|OP|$, entonces se definen las siguientes funciones reales[5].

$$sen\ \theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

2.1.2.1 Definición de función periódica

Una función $f(x)$ es **periódica[6]** si está definida para toda x real y si existe algún número positivo p tal que:

$$\forall x \in Dom(f),\ \ f(x+p) = f(x)$$

Al menor número p se le llama **periodo** de $f(x)$.

2.1.3 Definición de Serie

A partir de una sucesión de números reales, se puede formar una nueva sucesión sumando los términos sucesivamente. Así, si la sucesión dada tiene los términos

$$a_1, a_2, \dots, a_n, ..$$

Se forma la sucesión de las sumas parciales

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2$$

Y así sucesivamente, estando definida la suma parcial de los n primeros términos como sigue:

---

[5] Definición de funciones trigonométricas tomada de (Stewart, 2012, p. 377)
[6] Definición de función periódica tomada y adaptada de (Kreyszig, 2003, p. 24)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n$$

La sucesión $\{S_n\}$ de las sumas parciales se llama serie[7] y se nota

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

2.1.3.1 Convergencia de una serie.

Dada una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ la **n-ésima suma parcial** está dada por

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge a S, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge.**

El límite S, si existe, se llama **suma de la serie.**

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Si $\{S_n\}$ diverge, entonces se dice simplemente que la serie **diverge**[8].

2.1.4 Definición de transformada integral

De manera general[9] si $f(x, y)$ es una función de dos variables, entonces una integral definida de f respecto a una de las variables conduce a una función en términos de la otra variable. De igual modo una integral de la forma

$$\int_0^{\infty} K(s,t)f(t)dt$$

transforma una función f de variable t en una función F de variable s siempre y cuando la integral exista.

[7] Definición de serie tomada de (Apóstol, 1967, p. 469)
[8] Definición de convergencia y divergencia de una serie tomada de (Larson, 2010, p. 608)
[9] Definición de Transformada integral tomada de (Zill et Al, 2009, p. 256)

La función $K(s,t)$ en la definición anterior se llama **Kernel o núcleo** de la transformada.

2.2 Preliminares de Algebra Lineal

Dentro de este campo se necesitan como conceptos fundamentales los siguientes:

2.2.1 Definición de espacio vectorial

Un espació vectorial[10] V es una estructura conformada por un conjunto de elementos denominados vectores y un campo K de elementos llamados escalares, junto con dos operaciones binarias: **adición y multiplicación por escalares**. Por adición se entenderá que dados dos vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ en V, hay una regla para determinar un objeto $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ llamado la suma de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$. Por multiplicación por escalares se entenderá que dado un vector $\boldsymbol{u}$ y un escalar real o complejo k, hay una regla para determinar un objeto $k\boldsymbol{u}$ llamado múltiplo escalar de $\boldsymbol{u}$ por k. Además, los siguientes axiomas se deben cumplir para todos los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ en V, y para todos los escalaresk, l.

Axiomas para la suma

- Si $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ son vectores en V, entonces $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ está en V.
- $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
- $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$
- Existe un vector $\mathbf{0}$ en V, llamado el vector cero, talque $\mathbf{0}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\boldsymbol{u}$**,** Para todo $\boldsymbol{u}$ en V.
- Para cada $\boldsymbol{u}$ en V, existe un vector $-\boldsymbol{u}$ en V llamado el **negativo** de $\boldsymbol{u}$, talque $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$

Axiomas de multiplicación por escalar

- Si k es un número real o complejo y $\boldsymbol{u}$ es un vector en V, entonces $k\boldsymbol{u}$ pertenece a V.

[10] Definición de espacio vectorial tomada y adaptada de (Apóstol, 1967, p. 469)

- $k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$.
- $(k+l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$.
- $k(l\boldsymbol{u}) = (kl)\boldsymbol{u}$.
- $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

2.2.2 Definición de producto interior

En matemáticas existen diversos productos interiores dependiendo el espacio vectorial con el que se desee trabajar. Para las necesidades de este documento se define el producto interior usual en el espacio de funciones de variables real.

2.2.2.1 Producto interno de funciones de variable real y continuas

Suponga que $a < b$; sea $V = C[a.b]$ el espacio de las funciones de valores reales continuas en el intervalo $[a, b]$ se define el producto interno[11]

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

2.2.2.2 Producto interno de funciones de variable real a variable compleja

Se dice que una función f es de **valor complejo** sobre el intervalo real $[a, b]$ si$f(x)$ se puede expresar como

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), x \in [a, b]$$

donde f_1 y f_2 son funciones de valores reales. La **función de valor complejo** f es continua si f_1 y f_2 son continuas. Sea $V = CV[a, b]$ el conjunto de funciones de valores complejos que son continuas en $[a.b]$. Para f y g en $CV[a, b]$ se define el producto interno[12] como

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

[11] Definición de producto interno de funciones tomada de (Grossman & Flórez, 2012, p. 465)
[12] Definición de producto interno de funciones complejas tomada de (Grossman & Flórez, 2012, p. 476)

donde $\overline{g(x)}$ es el conjugado de $g(x)$ (ver definición de conjugado en preliminares de variable compleja).

2.2.3 Definición de base de un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial, y sea $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ es un conjunto finito de vectores en V, entonces se dice que S es una **base**[13] de V sí y solo sí.

- S genera a V.
  - Es decir que $\forall \boldsymbol{u} \in V \;\; \boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n}$, donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son escalares.
- S es linealmente independiente.
  - Es decir que $a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} = 0$ si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

2.2.3.1 Definición de base ortogonal

Una base S es ortogonal[14] si cumple que $\forall \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \in S$ su producto interior definido es cero, o de otra forma $v_i \cdot v_j = 0$

2.3 Preliminares de Variable compleja

Dado que la Transformada de Fourier trabaja en variable compleja se hace indispensable para la comprensión y el tratamiento de esta tener claridad conceptual y procedimental sobre los aspectos que se mencionan a continuación.

2.3.1 Representación de los números complejos

Una de las utilidades que presentan los números complejos en la transformada de Fourier son sus representaciones ya que algunas funciones o señales según el contexto, serán mucho más

[13] Definición de base tomada y adaptada de (Grossman & Flórez, 2012, p. 350)
[14] Definición de base tomada y adaptada de (Grossman & Flórez, 2012, p. 350)

sencillas de calcular, evaluar o analizar si se conoce su representación. Usualmente este cambio de representación evita ecuaciones con una estructura compleja de representación y manipulación algebraica.

Denotaremos a $\mathbb{C}$ como el conjunto de los números complejos[15], y se define como:

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi | x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

2.3.1.1 Forma rectangular o cartesiana

Esta representación es la más usual ya que el número complejo z se puede expresar en la forma $z = x + yi$ donde $x, y \in \mathbb{R}$, e i es la unidad imaginaria.

La forma rectangular se deduce a partir del hecho que los números reales son isomorfos a los números complejos ($\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$) y z se puede ver como un punto en el plano complejo, es decir $z = (x, y)$ donde x se encuentra en el eje real (eje de las abscisas), y se encuentra en el eje imaginario (eje de las ordenadas).

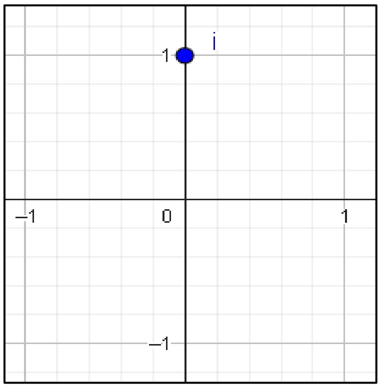
De lo anterior se puede evidenciar que si $x = 0, y = 1$ es lo que se conoce como la definición de la unidad imaginaria i.

$$i \coloneqq (0,1)$$

[15] Definiciones de la aritmética de los complejos tomadas de (Acevedo, 2006, p 2- p25)

Ilustración 1:

Definición de i



Fuente: Elaboración propia.

2.3.1.2 Forma polar

Esta representación se deduce de realizar un cambio de coordenadas a un punto (x, y), haciendo

$$x = rcos(\theta)$$

$$y = rsen(\theta)$$

El número complejo z queda determinado mediante un radio r y un ángulo θ. $z = (r, \theta)$.

Luego z se puede escribir de la forma:

$$z = r(\cos(\theta) + isen(\theta))$$

Para calcular los parámetros $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}$:

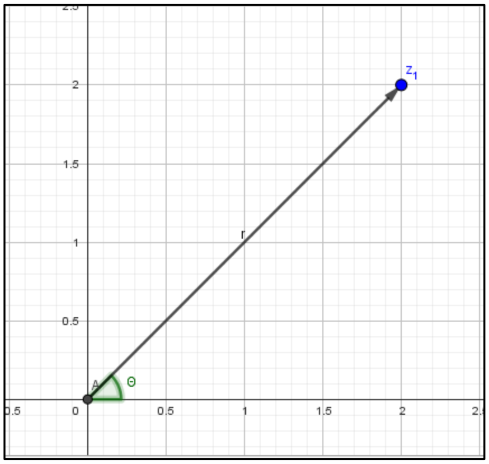
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = tang^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\text{siempre } x \neq 0$$

el ángulo θ es un número real, donde $\theta \in [0, 2\pi]$.

Ilustración 2:

Parámetros de la forma polar



Fuente: Elaboración propia.

2.3.1.3 Forma polar exponencial

Esta forma es muy útil ya que simplifica demasiado los cálculos en operaciones con complejos.

Se tienen por las series de Taylor que

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Si se reemplaza en la función exponencial x por ix se obtiene que:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Agrupando las potencias de exponente par y las de exponente impar se obtiene que

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

Según las identidades de Taylor para $cos(x)$, $sen(x)$

$$e^{ix} = \cos(x) + isen(x)$$

Luego la forma exponencial de un número complejo $z = x + iy$ esta dada por

$$z = re^{i\theta}$$

2.3.2 Operaciones de números complejos

Los números complejos se denotarán de la forma $z = a + bi$, se recuerda que $i^2 = -1$.

Dados dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, se definen las siguientes operaciones.

2.3.2.1 Suma

De forma **rectangular** se define de la siguiente manera

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

De forma **polar** $z = (r_1, \theta_1)$, $w = (r_2, \theta_2)$

$$z + w = (r_1, \theta_1) + (r_2, \theta_2) = (R, \theta)$$

Donde se definen las resultantes y el ángulo como:

$$R_x = r_1 cos\theta_1 + r_2 cos\theta_2$$

$$R_y = r_1 sen\theta_1 + r_2 sen\theta_2$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

2.3.2.2 Resta

De forma **rectangular** se define:

$$z - w = z + (-w)$$

Donde $-w$ es llamado el opuesto aditivo de w y se denota $-w = -(x + iy)$ o lo que es equivalente $-w = -x - iy$

De lo anterior se deduce que:

$$z - w = (a + bi) + \big(-(c + di)\big)$$

$$z - w = (a + bi) + (-c - di)$$

$$z - w = (a - c) + (b - d)i$$

2.3.2.3 Multiplicación

De forma **rectangular** se define:

$$zw = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

De forma **exponencial** es conveniente expresar el complejo de forma exponencial.

$$z = r_1 e^{i\theta_1}, w = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$zw = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

2.3.2.4 División

De forma **rectangular** se define:

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

De forma **exponencial** es conveniente expresar el complejo de forma exponencial.

$$z = r_1 e^{i\theta_1}, w = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Siempre que$w \neq 0$

2.3.2.5 Módulo

El módulo de un número complejo z se define como:

De forma **rectangular** $z = a + bi$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

De forma **exponencial** $z = (r, \theta)$

$$|z| = r$$

2.3.2.6 Argumento

El argumento de un número complejo z se define como:

De forma **rectangular** $z = a + bi$

$$Arg(Z) = arcotang\left(\frac{b}{a}\right)$$

Siempre que $a \neq 0$ si $a = 0$ entonces el argumento es π

De forma **exponencial** $z = (r, \theta)$

$$Arg(z) = \theta$$

2.3.2.7 Conjugado

El conjugado de un número complejo z se nota $\bar{z}$ y se define como:

Representación	**Conjugado**
$z = a + bi$	$\bar{z} = a - bi$
$z = r(\cos(\theta) + isen(\theta))$	$\bar{z} = r(\cos(\theta) - isen(\theta))$
$z = re^{i\theta}$	$\bar{z} = re^{-i\theta}$

2.3.3 Identidades y teoremas fundamentales

En este apartado se mencionan las principales identidades que se debe tener en cuenta al momento de trabajar con las Series de Fourier y que se deducen de la variable compleja.

2.3.3.1 Teorema de Moivre

El teorema de Moivre se utiliza principalmente para la potenciación y radicación de números complejos.

Sea z un número complejo, entonces $z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + isen(n\theta))\ \forall n \in \mathbb{N}$

Demostración por inducción.

Verifiquemos que para $n = 1$ se cumple la identidad.

$$z^1 = |z|^1(\cos(1\theta) + isen(1\theta))$$

Lo anterior se cumple ya que es la forma polar por definición de un número complejo

Ahora, sea la hipótesis de inducción que

$$z^k = |z|^k(\cos(k\theta) + isen(k\theta))$$

Se quiere demostrar que $z^{k+1} = |z|^{k+1}(\cos\big((k+1)\theta\big) + isen((k+1)\theta))$

Ahora bien,

$$z^{k+1} = z^k z$$

$$z^{k+1} = [|z|^k(\cos(k\theta) + isen(k\theta)]|z|(\cos(\theta) + isen(\theta))$$

Multiplicando

$z^{k+1} = |z|^{k+1}[(\cos(k\theta)\cos(\theta) - sen(k\theta)sen(\theta)) + i(\cos(k\theta)\,sen(\theta) + sen(k\theta)\cos(\theta))]$

Aplicando las identidades de la suma de ángulos del seno y coseno obtenemos.

$$z^{k+1} = |z|^{k+1}(\cos\big((k+1)\theta\big) + isen((k+1)\theta))$$

que es lo que se quería demostrar.

2.3.3.2 Fórmulas del seno y coseno

Las siguientes igualdades se cumplen, y su deducción es inmediata de lo presentado en 2.3.1.3.

- $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

- $\text{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

2.4 Serie de Fourier

Para entender la Transformada de Fourier, es necesario conocer las series de Fourier con la finalidad de encontrar la relación entre ellas desde la perspectiva conceptual.

2.4.1 Definición de la serie de Fourier

A continuación, se presentan las definiciones de la serie de Fourier encontradas en los principales textos que trabajan en los cursos de Análisis de Fourier. Las distintas formas en que se puede encontrar están relacionadas con el intervalo en el cual se quiera trabajar, pero, se puede demostrar que son equivalentes. Previo a conocer las definiciones es importante mencionar las condiciones para que una función tenga serie de Fourier.

2.4.1.1 Condiciones de Dirichlet

Las condiciones de Dirichlet[16] permiten identificar cuando una función puede ser representada mediante una serie de Fourier, estas se anuncian a continuación:

1. La función f tiene un número finito de discontinuidades de salto no al infinito en un periodo.
2. La función f tiene un número finito de máximos y mínimos en un periodo.
3. La integral del valor absoluto de f en un periodo es finita; es decir,

$$\int_{-L}^{L} |f(x)| dx < \infty$$

Se dice que una función f es continua a tramos en el intervalo finito $[-L, L]$ si satisface las condiciones 1, 2.

[16] Condiciones de Dirichlet tomadas y adaptadas de (Hwei, 1987, p. 16).

2.4.1.2 Primera Definición

Sea f una función periódica de periodo $p = 2L$, f se define la serie de Fourier[17] como sigue

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$$

Para los propósitos, y en concordancia con lo que se presentará en la propuesta de este trabajo de grado, se usará la definición anterior

2.4.1.3 Coeficientes de la serie de Fourier

De acuerdo con la definición de la serie de Fourier los coeficientes[18] se definen de la siguiente manera:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

2.4.1.4 Otras definiciones de la serie de Fourier

Las siguientes definiciones de las series de Fourier[19]son alternativas.

Sea la función $f(t)$ una función real periódica de periodo T, se define la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)$$

Donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

[17] Serie de Fourier definición tomada de (Kreyszig, 2003, p.35)
[18] Coeficientes de las Series de Fourier tomada de (Kreyszig, 2003, p.36)
[19] Definiciones de la serie de Fourier tomadas de (Hwei, 1987, p.4)

O también:

Se define la serie de Fourier de una función periódica $f(t)$ de periodo T como:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

Donde

$$C_0 = \frac{1}{2} a_0$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = arcotang \frac{b_n}{a_n}$$

2.4.2 Serie Compleja de Fourier

Haciendo uso de la identidad de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + isen(\theta)$ se define la serie compleja[20] de Fourier.

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{-\frac{in\pi x}{L}}$$

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}}$$

2.5 Transformada de Fourier

Una vez se conoce la forma de obtener una serie de Fourier de una función periódica surge la inquietud de saber cómo poder trabajar con funciones no periódicas. En situaciones de la vida real, las señales no son periódicas del todo o no tan idealmente como se quisiera. Es por lo anterior que las integrales de Fourier generalizan la idea de la serie de Fourier al trabajar con funciones que

[20] Definición serie compleja de Fourier tomada de (Kreyszig, 2003, p.48)

tienen un único periodo en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Esta sección resume las propiedades y definiciones básicas que se necesitan para comprender la transformada de Fourier[21].

2.5.1 Integral de Fourier

Sea $f(t)$ una función suave a trozos en $(-\infty. \infty)$ entonces $f(t)$ se puede escribir como una integral de la forma:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} [A_\omega \cos(\omega t) + B_\omega \, sen(\omega t)]d\omega$$

donde:

$$A_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)dx$$

$$B_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)sen(\omega x)dx$$

2.5.1.1Integral compleja de Fourier

Sea $f(t)$ una función suave a trozos en $(-\infty. \infty)$ entonces $f(t)$ se puede escribir como una integral de la forma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

Donde j es la unidad compleja y $F(\omega)$ se define como la transformada de Fourier.

2.5.2 Definición de la Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier de una función $f(t)$ se define a continuación:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = F(\omega)$$

[21] Transformada de Fourier parafraseo de (Kreyszig, 2003, p. 57-p. 70)

Donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$

2.5.3 Definición de transformada inversa de Fourier.

La transformada inversa de Fourier se define como:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

2.5.4 Propiedades básicas de la transformada de Fourier

2.5.4.1 Linealidad

Si $F_1(\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\}$ y $F_2(\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\}$, además a_1y a_2 son dos constantes reales arbitrarias entonces,

$$\mathcal{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

2.5.4.2 Multiplicación por una constante

Si a es una constante real y $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ entonces,

$$\mathcal{F}\{af(t)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

2.5.4.3 Desplazamiento de una función en el tiempo

Si $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ entonces

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

2.5.4.4 Desplazamiento en la frecuencia

Si $\omega_0$es una constante real y $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ entonces,

$$\mathcal{F}\left\{f(t)e^{j\omega_0 t}\right\} = F(\omega - \omega_0)$$

2.5.4.5 Transformada de una derivada

Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ y $f(t) \to 0$ cuando $t \to \pm\infty$, entonces

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = j\omega F(\omega)$$

Si bien los elementos presentados no son abordados en extenso, ni mucho menos agotan el tema, los autores consideran que se brinda un panorama general para los interesados en comprender las generalidades. Un estudio detallado y ampliado puede ser encontrado en los diversos textos que se mencionaron al inicio de este apartado.

En el siguiente capítulo se presenta el marco didáctico que soporta la propuesta presentada en este trabajo.

CAPÍTULO 3: MARCO DIDÁCTICO

El aprendizaje de la TF conlleva un alto nivel de complejidad, ya que en su estructura se encuentra un gran rigor matemático y una amplia gama de conceptos del campo como se apreció en el capítulo anterior; esto hace que este concepto sea abordado por lo general en cursos avanzados de la educación universitaria, y usualmente dirigido a programas académicos disciplinares, como formación matemática, física, licenciatura afines a estas áreas o cursos de aplicación en ingenierías. Sin caer en especificidades, se puede asegurar que los estudiantes deben desarrollar diversos conocimientos, competencias y habilidades que les permitan la compresión de este concepto, articulando procesos ya conocidos de campos tan diversos, en principio, como las series, el cálculo integral, el cálculo diferencial, la teoría general de las funciones y de las periódicas en particular, y del álgebra lineal. Sin embargo, es tan importante que dentro de las ingenierías como desde la disciplina misma de las matemáticas y sus aplicaciones, su estudio no se vuelva opcional sino indispensable; adicionalmente trabajar con transformadas en general y con la TF en particular ofrece un escenario propicio para que los educadores de diferentes áreas de la ciencia y la tecnología articulen sus saberes y campos de estudio, y puedan articular los conocimientos propios de su campo disciplinar con las aplicaciones y el modelado aun cuando algunas de ellas estén ausentes de las aulas de educación básica y media.

Por otra parte, dada su complejidad conceptual y procedimental, trabajar con la TF, para la mayoría de los estudiantes, ocasiona problemas ya sea porque no se comprende su utilidad o su importancia, o bien, porque no se perciben los procesos y conceptos relacionados con la misma, pues se quedan usualmente en la fase algorítmica sin la necesaria conceptualización. Según lo anterior, esto ocurre cuando no se tienen claros los conceptos previos que se espera que se hayan adquirido antes de emprender el tratamiento y aprendizaje de la TF.

Brousseau (1983), como se citó en (Coral Campaña, León Luquez, Martinez Saavedra, Montesalvo Castro, & Serrano León, 2019)(Coral Campaña et Al, 2019) sugiere formas de identificar los errores: por ser consecuencia de la inadecuada concepción de un saber en particular, por la apropiada aplicación de un saber no correcto, cuando se hace uso de procesos no correctos junto a saberes no apropiados. Sin embargo, es importante tener en cuenta los errores que puedan tener los estudiantes en la implementación de las actividades, porque esto permitirá evidenciar en qué nivel de VH se encuentran.

Desde la perspectiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje los esposos Van Hiele (1986) presentan 5 niveles de razonamiento en el campo de la geometría; (Chavarria, 2020) los describe como:

a) Visualización o reconocimiento (Nivel1): Los estudiantes tienen una visión más amplia e individual de las figuras, los describen solamente considerando sus características visuales, y de manera independiente los estudiantes no buscan relaciones o características diferentes. Simplemente se limitan a describir el aspecto físico o visual inmediato.
b) Análisis (Nivel 2): Los estudiantes poseen la capacidad de señalar elementos y propiedades de objetos matemáticos que tienen las figuras (para el caso de este trabajo serán los elementos que componen la TF), señalando propiedades, a partir de la observación y experimentación.
c) Clasificación y ordenación o deducción informal (Nivel 3): Los estudiantes pueden reconocer propiedades que se pueden deducir de otras y relacionarlas entre ellas, y así mismo poder dar definiciones matemáticas correctas.

d) Deducción informal (nivel 4): Los estudiantes pueden emplear un lenguaje formal y preciso para definir, clasificar y demostrar propiedades, a partir de razonamientos deductivos formales.

e) Rigor (Nivel 5): Los estudiantes son capaces de formar teoremas en diferentes sistemas axiomáticos, y en ellos realizar análisis y comparaciones. El estudiante es capaz de realizar deducciones abstractas (p 15- 19)

De otra parte, y como una manera de ampliar el campo de estudio, (Landa & Sarasusa, 2017) proponen guiar los niveles de Van Hiele hacia la enseñanza y aprendizaje del análisis, y en particular a la Transformada de Fourier Discreta (TFD), y que contribuya a formular modelos de intervención didáctica en las aulas que resulten más eficaces para la aceleración del aprendizaje significativo de los estudiantes.

(Landa & Sarasusa, 2017) Pretenden definir teóricamente los niveles de Van Hiele en relación con el razonamiento de aprendizaje de la TFD, teniendo en cuenta características generales de los niveles de razonamiento, las formulaciones particulares de estos en asuntos o temas ya estudiados, y las propias características matemáticas de la TF. Para ello diseñan una secuencia de actividades, siguiendo los lineamientos de los 4 primeros niveles de razonamiento de VH. las cuales ofrezcan directrices y propuestas a los profesores o autores de libros de texto sobre esta temática para ayudar a que los estudiantes puedan pasar de un nivel a otro superior de forma más eficiente y conceptualmente más robusta.

(Landa & Sarasusa, 2017) adaptan estos niveles de la siguiente forma: el nivel 1 (Visualización o reconocimiento), lo acomodan hacia la asociación de los primeros términos claves del tema de la TF, como lo es la señal análoga o digital, frecuencia, espectro de magnitudes, dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia, para el nivel 2 (Análisis), lo orientan hacia que los estudiantes reconozcan los elementos de la TF ya mencionados en el marco matemático, y con esto puedan evaluar y analizar simuladores de ondas , por medio de la exploración de los diferentes comportamientos que puede tener las señales, seguido a este el nivel 3 (Deducción informal, clasificación o relación), en el estudio de la TF, el estudiante comienza a desarrollar la capacidad de razonar y reconocer propiedades que se deducen de otras, y de estas hacer implicaciones, en este caso el estudiante entiende que de una señal en el dominio del tiempo , al dominio de frecuencia consiste en realizar la operación al contrario, en otras palabras, volver a recuperar la señal del dominio de frecuencia al dominio del tiempo, y por último el nivel 4 (deducción formal), en el cual los estudiantes llegan a un razonamiento formal de la TF, a partir de la formalización del concepto por medio del razonamiento lógico matemático que logre el estudiante.

Con el sustento de documentos ya mencionados anteriormente, se pretende hacer una propuesta de una secuencia de actividades para la enseñanza y aprendizaje de la TF, que permitan desarrollar diferentes procesos y habilidades para la comprensión de este campo del análisis, teniendo en cuenta que estas actividades estarán elaboradas con la finalidad de fortalecer algunos conceptos previos que se requieren para entender la TF. Estas actividades están seccionadas en cuatro partes, donde en cada una de ellas se corresponderá a los niveles de VH, siguiendo el orden que sugiere el modelo.

La primera actividad está centrada en el primer y segundo nivel, y estará dividida en dos momentos para cada nivel. El primer momento de la primera actividad, corresponde al primer nivel de visualización o reconocimiento, y busca desarrollar o evidenciar las competencias y procesos de visualización y exploración; en esta se procurará que los estudiantes reconozcan elementos de una función periódica, a partir de la exploración de la plataforma Phet y GeoGebra®, con el apoyo de preguntas guiadas para la solución de la actividad. Con ello se busca reforzar y recordar conceptos previos que se necesitarán para abordar la TF. En el segundo momento empezará a desarrollarse el segundo nivel de VH que corresponde al análisis; se pretende que esta actividad guíe a los estudiantes a reconocer los elementos y propiedades de la serie de Fourier, y elementos de las ondas, con el propósito que esto de paso al tercer nivel de VH de clasificación, ordenación o deducción informal. En esta se relaciona la función exponencial expresada en la fórmula de Moire con la serie de Fourier para obtener así la serie compleja de Fourier. Para finalizar, la tercera actividad, enfatiza en el cuarto nivel de deducción formal, que busca, desde lo obtenido en la primera y segunda actividad, el estudiante deba hacer uso de las propiedades ya encontradas anteriormente y deduzca condiciones necesarias para llegar a la definición de la T.F.

Para la implementación en el aula se lleva la propuesta a un espacio de clases junto con las actividades que estarán orientadas bajo las fases de aprendizaje según el modelo de VH, las cuales son secuenciales y deben desarrollarse de manera completa y por ello se deben implementar mediante un desarrollo sistemático. (Gutierrez & Pastor, 1990) describieron las fases de la siguiente manera:

1. Información e interrogación: Esta fase permite identificar los saberes previos de los estudiantes, y en esta se deben plantear preguntas para determinar el punto de partida de los estudiantes y diseñar actividades pertinentes.
2. Orientación dirigida: En esta fase empieza el desarrollo del campo temático de estudio con mayor profundidad; plantear actividades debidamente secuenciadas, en las cuales los estudiantes puedan experimentar, realizar mediciones, descubrir, comprender, asimilar, aplicar, etc. los conceptos, propiedades y relaciones de los diversos objetos matemáticos.
3. Explicación o explicitación: Es una fase en la cual los estudiantes intercambian sus aprendizajes, experiencias entre pares contando con la guía del docente. El rol del docente es por lo tanto de mediador, orientador y de allí que deba monitorear el lenguaje

matemático que emplean los estudiantes para realizar correcciones de acuerdo con el nivel de razonamiento de VH, que se esté implementando.

4. Orientación libre: Es el momento en que se emplean actividades más complejas, fundamentalmente referidas a la aplicación de los aprendidos en las actividades anteriores, a contenidos como el lenguaje matemático. En esta los estudiantes se apoyan en el proceso de relacionar los conocimientos previos, con los nuevos conocimientos y empiezan a construir generalizaciones de conceptos matemáticos.
5. Integración: Es una fase en la cual se consolida lo trabajado en las anteriores fases con el objetivo que el estudiante construya una red conceptual de conocimientos aprendidos o mejorados que sustituya o ajuste a la red conceptual que tenía anteriormente (Reacomodación conceptual). (p 332- 335)

Siguiendo la secuencia que propone el modelo VH para desarrollar los niveles de razonamiento, se debe determinar en qué nivel se encuentra el estudiante, para ello (Corberan Salvador et Al, 1994) manifiestan que se debe identificar el nivel del estudiante correspondiente a la respuesta que haya dado a una situación específica desde sus producciones escritas. En general, para determinar el nivel, se establece un tipo de respuesta en funcion de la calidad matemática de la misma; se asume que a mayor nivel la calidad de la respuesta debe evidenciar no sólo progresos sino características propias de ese nivel. Los tipos de respuesta que define (Corberan Salvador et Al, 1994) son:

- ✓ Tipo 0: Corresponde a los puntos o items que no tienen respuesta (Respuestas ausentes).
- ✓ Tipo 1: Hace referencia a que el estudiante no esta en un determinado nivel de razonamiento. (No admite una clasificación aún existiendo respuesta).

- ✓ Tipo 2: Corresponde a respuestas incorrectas e incompletas en las que se permite reconocer indicios de algún nivel.
- ✓ Tipo 3: En este, se encuentran las respuestas correctas pero incompletas en las que se den indicios de reconocimiento de algún nivel.
- ✓ Tipo 4: Las respuestas empiezan a reflejar claramente características de dos niveles diferentes, en esta los estudiantes se encuentran en una transición entre niveles (Se pueden evidenciar avances o retrocesos entre niveles).
- ✓ Tipo 5: Respuestas bastante completas pero incorretas o que atienden a solamente un aspecto de un nivel.
- ✓ Tipo 6: Las respuesta son bastante completas y correctas y reflejan el nivel de razonamiento determinado, eventualmente se tratan de respuestas claras y consisas, pero que presentan "saltos" en el razonamiento deductivo; seguido porque tiene pequeños errores argumentativos o vacios.
- ✓ Tipo 7: Respuestas matematicamente correctas y completas que reflejan claramente un nivel de razonamiento (p 107 - 108)

Finalmente, la intención es poner a prueba una secuencia de actividades encaminadas a los niveles de razonamiento que propone el modelo VH, para fortalecer el aprendizaje de los estudiantes, pero para ello se recurrira al uso de herramientas tecnológicas, que brinden una riqueza de representaciones y las cuales se describirán en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 4: MARCO TECNOLÓGICO

El presente capítulo aborda las razones por las cuales la tecnología juega un papel protagónico en el desarrollo de la TF según el presente trabajo y los conceptos que la anteceden. Se muestra su utilidad y un nuevo enfoqué que se puede dar al desarrollo de la propuesta.

Se debe comenzar aclarando que el uso de la palabra tecnología en este documento hace referencia a la primera acepción de la definición dada por la Real Academia Española (RAE) donde se indica que "La tecnología es el conjunto de teorías y de técnicas que permiten el aprovechamiento práctico del conocimiento científico" (Real Academia Española, 2022).

4.1 ¿Por qué usar herramientas tecnológicas?

Las herramientas tecnológicas que existen actualmente generan un abanico de posibilidades en cuanto a educación, pero no todas ellas benéficas o pertinentes, pero que igual constituyen un reto ineludible para los educadores y en particular para los educadores matemáticos.

Para Godino J. (2010), la investigación en didáctica de la matemática, al igual que en otros campos requiere de métodos teóricos como prácticos, demanda un proceso continuo que va, desde la investigación pura, hasta la elaboración de materiales para instrucción; de aquí, las herramientas tecnológicas permiten la investigación en el aula por parte de los docentes. (Godino J. , 2006) afirma que no basta identificar las ideas matemáticas relevantes, sino que es necesario investigar cómo mejorar el acceso de los estudiantes a estas ideas, y estimular su voluntad de aprender. Para ello es necesario tener en cuenta la dialéctica entre la enseñanza y el aprendizaje, y también el papel de la tecnología en los entornos de aprendizaje y el papel del profesor.

Es importante mencionar que dentro de este apartado del marco teórico "Toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos. El conocimiento producido depende de los instrumentos de mediación que pongamos en juego en su construcción y del lugar que tales instrumentos tengan en el entorno sociocultural" (Castiblanco, 2000).

Simultáneamente se ha establecido en el contexto de la educación matemática que “La existencia de la computadora plantea a los educadores matemáticos el reto de diseñar actividades que tomen ventajas de aquellas características con potencial para apoyar nuevos caminos de aprendizaje Arcavi y Hadas (2000) citado en Gamboa, 2007, p.17”. El uso de la tecnología hace, entre otras, que el docente profundice en sus conocimientos, cuestione su quehacer y reconozca el papel decisivo que tiene en la transformación de las estructuras curriculares y la potencialidad para transformar las prácticas escolares. (Castiblanco, 2000). Pero la incorporación de la tecnología en las aulas, esto ofrece retos, oportunidades, y riesgos que deben ser identificados. Un punto de partida, no necesariamente único, es cuestionarse sobre aspectos globales relacionados con su uso e implementación.

4.2 ¿Cómo implementar la tecnología y las herramientas tecnológicas?

La propuesta de introducción de la Transformada de Fourier se basa en la idea central de Gamboa (2007) que afirma que la clave está en trabajar las situaciones cotidianas y los problemas presentes en libros de texto desde un nuevo enfoque apoyadas en las herramientas tecnológicas disponibles.

Los autores del presente trabajo consideran que se deben mencionar 3 puntos claves dados en la literatura del campo disponible por Fudlestad (2004) en Gamboa. (2007, p,19), a saber:

- Los estudiantes y el docente deben tener en cuenta los comandos básicos de la herramienta (conocimiento de los mismos o cuando menos la noción, mediante exploración, del papel que cumple).
- Se deben trabajar modelos simples (al menos en las etapas iniciales de aproximación a los conceptos).

- Se debe seleccionar la herramienta adecuada para la resolución de la actividad planteada.

4.2.3 La elección de las herramientas a trabajar

Los espectros que se generan de la TF permiten realizar el análisis de la función en otro dominio. Por ello se eligen principalmente 3 Software libres para poder introducirla.

El programa que predomina en la introducción es GeoGebra® ya que cumple con los 3 puntos claves para tener en cuenta en el trabajo de la Transformada de Fourier. Según (Ruíz et Al, 2013) afiema que en el diseño de talleres, corrobora que GeoGebra® crea ambientes dinámicos y se puede asumir como una herramienta didáctica ya que es un elemento físico y simbólico que funciona para el maestro y proporciona a los estudiantes diversas formas de representación, visualización y organización de los conceptos trabajados. También se elige ya que GeoGebra® integra el trabajo en las áreas de geometría, álgebra y análisis.

Otro de los programas a utilizar es el simulador Phet; (Diaz Pinzón, 2017) concreta los simuladores como las plataformas que permiten modelar o replicar fenómenos de la realidad, y su finalidad es que el usuario construya su propio conocimiento a partir de diversas exploraciones con el entorno propiciado por el simulador, manipulando una serie de variables y parámetros que se encuentran dentro del modelo que simula. El simulador Phet proporciona réplicas de situaciones científicas y matemáticas, las cuales son interactivas. Ademas, para esta propuesta, este simulador cuenta con una sesión dedicada a los elementos de la serie de Fourier, la cual será fundamental para abordar la TF. Por otra parte, se usará el aplicativo de Audacity, que permite realizar grabaciones y ediciones de audios, lo que ayudará a dar paso a demostrar los espectros de frecuencia de la TF, estos se verán en las ondas generadas por la grabacíón de un sonido producido por cualquier instrumento acústico, o directamente del aplicativo.

Estos programas serán herramientas fundamentales para el desarrollo de la propuesta para introducir la TF , ya que contienen elementos y funciones que permiten una adecuada manipulación para dar paso a la construcción del concepto.

4.3 ¿Cómo se implementa en la propuesta?

La construcción de esta propuesta tiene como intención que los estudiantes visualicen los elementos y características que hacen parte de la Serie de Fourier inicialmente para así dar pasa a identificar estos en la Transformada de Fourier. Para ellos se recurrirán a uno de los applets de Phet para que los estudiantes exploren y puedan de forma interactiva visualizar sus partes.

Se realizarán unas construcciones en GeoGebra® para evidenciar el resultado de algunas ecuaciones importantes que se necesitan y serán una ayuda visual para el estudiante. Finalmente, Audacity se presentará a modo de ejemplo para explicar una pequeña aplicación de la Transformada de Fourier y como los softwares de este estilo manejan los conceptos de esta.

CAPÍTULO 5: SECUENCIA DIDÁCTICA

En este capítulo se aborda la metodología y se explican las diferencias entre los trabajos mencionados en el apartado de antecedentes.

5.1 Metodología del trabajo

En esta sección se presentan los principales referentes teóricos tomados y la estrategia de trabajo para implementar esta propuesta de enseñanza y aprendizaje de la TF. Así, teniendo en cuenta los referentes teóricos ya mencionados en los capítulos anteriores, presentados en los marcos didáctico, matemático y tecnológico, y los recursos e instrumentos propuestos para la recolección de información, y análisis frente a los cuatro niveles de VH que se determinaron en las producciones de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional que se encontraban cursando un espacio académico de la línea de Profundización en Cálculo.

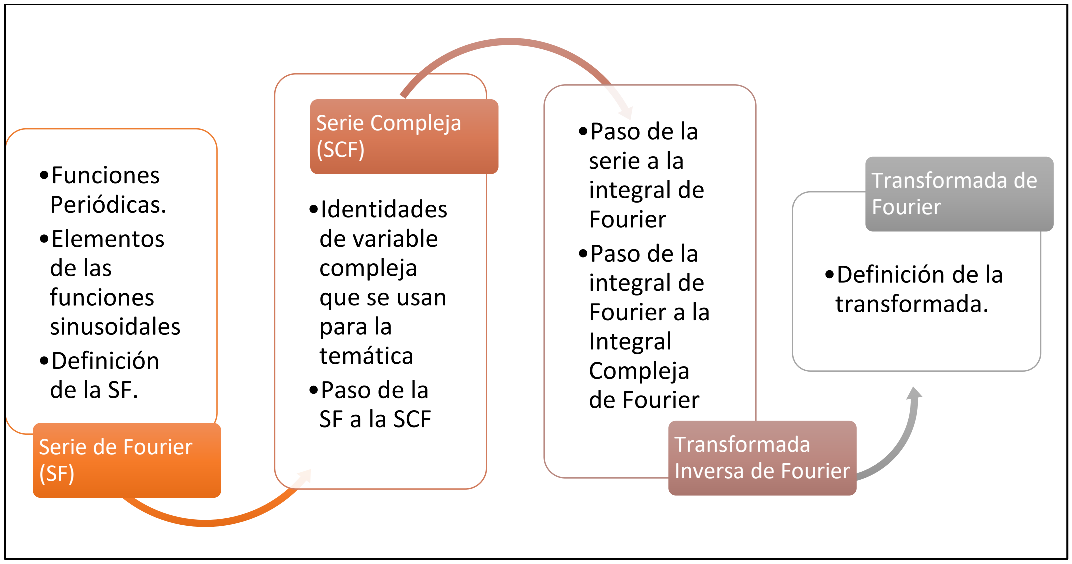
El propósito que tiene esta propuesta es brindar un apoyo para los docentes en la enseñanza de la TF, la cual permita un mejor aprendizaje de esta, y promueva potenciar habilidades, procesos y competencias que le permitan a los estudiantes llegar a la comprensión de los fundamentos de la TF. Para ello, se elaboró una secuencia de actividades, las cuales se adaptaron al modelo de razonamiento que proponen los esposos Van Hiele.

Se debe precisar que este trabajo se enfoca en desarrollar los 4 primeros niveles de razonamiento que propone VH (reconocimiento o visualización, análisis y clasificación o deducción informal y deducción formal). El nivel 5 que corresponde al rigor, no se abordará debido a que requiere el estudio de temáticas de alto nivel matemático que no se encuentran en el programa básico de formación de los estudiantes, como lo son los espacios de Hilbert, cálculo en variable compleja, entre otras, y que sustentan la teoría de la TF. Si bien algunos de estos ejes pertenecen a espacios académicos de profundización en matemáticas, no todos los estudiantes acceden a todos los espacios de la línea de profundización del cálculo (Análisis) ya que la selección de las líneas hace parte de la flexibilidad académica del programa, por lo tanto, resultaría pretencioso entrar a explorar el nivel del rigor. Así, al no tener los estudiantes una noción clara de dichas temáticas hace que la TF pueda llegarse a considerar como un tema demasiado complejo, y esto podría influenciar en una actitud negativa de los estudiantes. Otra de las razones, es que esta propuesta busca presentar la TF, pero al ser esta una introducción se trata de condensar las principales temáticas que ayudan a comprender su funcionamiento, y cumplir el objetivo propuesto por esta secuencia, así que no se pretende agotar el objeto de estudio, y más bien generar inquietud en los estudiantes para que los interesados en profundizar específicamente en las transformadas y en particular en la TF lo hagan.

A continuación, la Ilustración 1. muestra la secuencia temática que se pretende implementar en la propuesta.

Ilustración 3

Secuencia Temática de la Propuesta



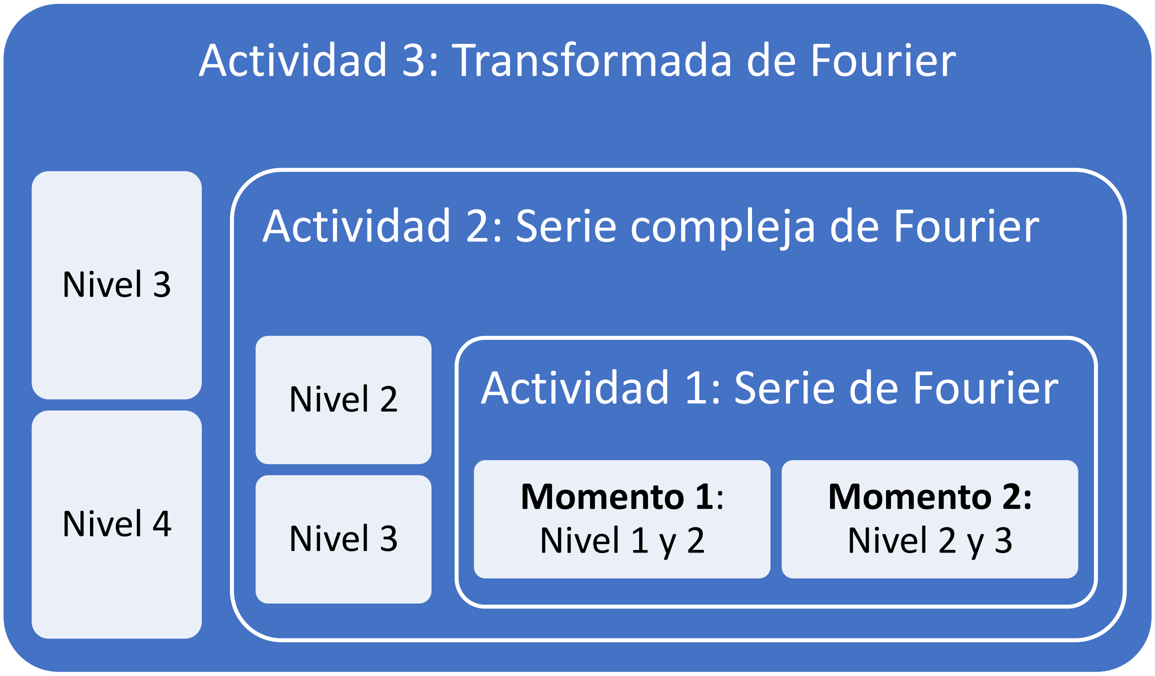
Fuente: Elaboración propia.

La anterior secuencia temática se propone con base en la revisión de los libros consultados en el marco matemático, con las debidas adaptaciones para lograr introducir la TF, teniendo en cuenta los elementos que son necesarios para su comprensión. Sin abordar por cuestiones de tiempo a profundidad cada uno de ellos.

Con la secuencia temática definida se entiende como abarcar los niveles, la Ilustración 2 muestra el orden de las actividades respecto al nivel de las preguntas de acuerdo con los niveles de razonamiento de VH para esta propuesta. Usualmente, las actividades diseñadas dentro del modelo VH tienen preguntas que referencian los 5 niveles de razonamiento en geometría. Para la adaptación que se plantea en las actividades es en comprender a mínimo 2 niveles de forma general; y a medida que se avanza en las actividades se aumente el nivel de las preguntas.

Ilustración 4

Secuencia de actividades según niveles de las preguntas bajo VH



Fuente: Elaboración propia.

Dado que la TF es un tema avanzado, y siendo esta una introducción, la secuencia propone que los conceptos previos o nuevos que los estudiantes deben adquirir para empezar a trabajar con la transformada, se aborden con el nivel 1 y 2. El paso a la segunda actividad enfatiza un poco más en el análisis por parte de los estudiantes, para finalmente en la tercera actividad terminar con un nivel de formalización propio de un estudiante de nivel universitario, sin entrar en el rigor, pero así mismo no dejando de lado la formalización de los conceptos trabajados.

A continuación, se presentará el diseño de las actividades y la evaluación de estas.

5.1.1 Diseño de actividades e implementación

La elaboración de estas actividades, se direccionaron a los cuatro primeros niveles que propone el modelo VH (reconocimiento o visualización, deducción informal y deducción formal). Por lo tanto, para la preparación de cada una de ellas se debe tener en cuenta la secuencialidad de los niveles y de las fases de aprendizaje por nivel, las cuales son: información, orientación dirigida, explicitación libre e integración; estas estarán diseñadas para la implementación de cada una en una sesión de 2 horas a un grupo de estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional que cursan el espacio académico de Profundización en Cálculo 2022-2.

5.1.1.1 Diseño primera actividad (momento 1) - nivel de visualización o reconocimiento.

Esta actividad esta enfocada al primer nivel de razonamiento de reconocimiento o visualización. Según (Chavarria, 2020) confirma (o permite confirmar) que los estudiantes deben tener una percepción individual de las figuras, describen una figura considerando caracteristicas meramente visuales y, de manera independiente. En la adaptación realizada para esta actividad se requiere que a partir de la exploración en GeoGebra® y el applet, el estudiante recuerde conceptos previos partiendo de indicaciones que habrán en este entorno, para asi llegar a la serie de Fourier.

La implementación de la actividad se llevó a cabo de la siguiente manera:

Tabla 1

Primera Actividad.

Actividad 1 (momento 1) Series de Fourier: Visualización o reconocimiento (nivel 1 VH)	
Objetivo general de la actividad Identificar los elementos que componen la serie y transformada de Fourier. **Objetivos específicos** • Reconocer los componentes de una onda sinusoidal. • Reconocer que T y λ, así como k y ω son análogos, pero no iguales. • Identificar que efecto tiene la frecuencia sobre la forma de las gráficas de las funciones sinusoidales. • Reconocer que longitud de onda y periodo no correpsonden a puntos específicos de la gráfica, sino que indican la longtud/ tiempo entre dos valles consecutivos, crestas consecutivas, máximos consecutivos, dos nodos o antinodos no consecutivos, o cualquier otro par de puntos correspondientes.	
-	**Descripción**
Información e interrogación	Se asume que los estudiantes que estan cursando Profundización en Cálculo, ya vienen con conceptos previos del ciclo de fundamentacion de la carrera en licenciatura en matemáticas. Por lo tanto, el primer momento de la actividad se enfocará a modo de repaso o revisión de preconceptos, donde se abordarán los objetos matemáticos que se relacionan con las ondas y los fenómenos periódicos.
Orientación dirigida	Se les indicará a los estudiantes ingresar a un grupo de Teams creado para el curso de Profundización en Cálculo y creado por el docente a cargo de este espacio académico para el periodo 2022-2 (Denominado en la plataforma como “Top_Prof_Cal_2022_2”.) Allí los participantes encontrarán una carpeta nombrada “Transformada Fourier”, y en ella estará disponible la actividad denominada “Actividad 1”, junto con un archivo de GeoGebra®, que se usará como insumo para el segundo momento de la actividad. (Véase Anexo A)

Para comenzar, los estudiantes tendrán que acceder al enlace https://phet.colorado.edu/es/simulations/fourier-making-waves/about del simulador Phet, “Fourier: Creando Ondas”, en este se encuentran 3 secciones. Para los propósitos del trabajo se hace la aclaración que se abordarán la sección denominada “discreto”.

Ilustración 5

Secciones del Applet de Phet.

Fuente: Elaboración propia.

En la actividad se le dará al participante una serie de indicaciones que deberá realizar en el primer simulador.

Ilustración 6

Instrucciones de la Actividad.

Acceda al link https://phet.colorado.edu/es/simulations/fourier-making-waves/about

Verifique que en el simulador se cumplan las siguientes condiciones

- De Clic en la opción de “*discreto*”
- La opción de forma de onda escoja “*sinusoide*”
- La opción de “*Armónicos*”, seleccione “1”
- La opción de “*función de*”, seleccione “*tiempo* (t)“
- La opción de series, déjela en términos de “*seno*”
- En “*Ecuación*”, modifíquelo y que quede en términos de “*oculto*”

Fuente: Elaboración propia.

Posteriormente, los estudiantes seguirán las instrucciones como se refleja en la *(Ilustración 4).*

Explicitación o explicación	Esta fase se implementa en el primer momento de la actividad, en el cual los estudiantes deben iniciar explorando en el simulador; a partir de esta, ellos deberán responder las preguntas que se encuentran en el taller nombrado "actividad 1". Véase Anexo A.
Orientación libre	Esta fase comienza junto con la anterior, en la cual los estudiantes deberán recurrir a conceptos previos, para responder las preguntas, con el apoyo de intercambio ideas entre sus compañeros.
Integración	Finalizada la actividad, se realizará una socialización o puesta en común y una explicación de los conceptos y objetos matemáticos que aparecieron en la exploración con el applet.

Fuente: Elaboración propia.

5.1.1.2 Diseño segunda parte primera actividad (momento 2)- nivel de Análisis

Este segundo momento de la actividad irá encaminada en el nivel 2 de VH, análisis, el cual define Chavarria (2020) como aquella en que los estudiantes cuentan con la capacidad de señalar los elementos y propiedades matemáticas que tiene las figuras geométricas; para nuestro caso, la adaptación, será identificar las propiedades de los elementos que componen la serie de Fourier la cual irán construyendo a partir de los procesos de observación y experimentación; se espera que con ello lleguen a generalizaciones de estas propiedades para así identificar el comportamiento de la serie respecto a una función. Se considera importante aclarar nuevamente que esta actividad se implementará la primera sesión de clase junto con el primer momento de la actividad 1 (Tabla 1)

Tabla 2

Segunda Parte de la Actividad 1.

Actividad 1 (momento 2) Series de Fourier: Análisis (nivel 2 VH)
Objetivo general de la actividad
Identificar los elementos que componen la serie y transformada de Fourier.
Objetivos específicos

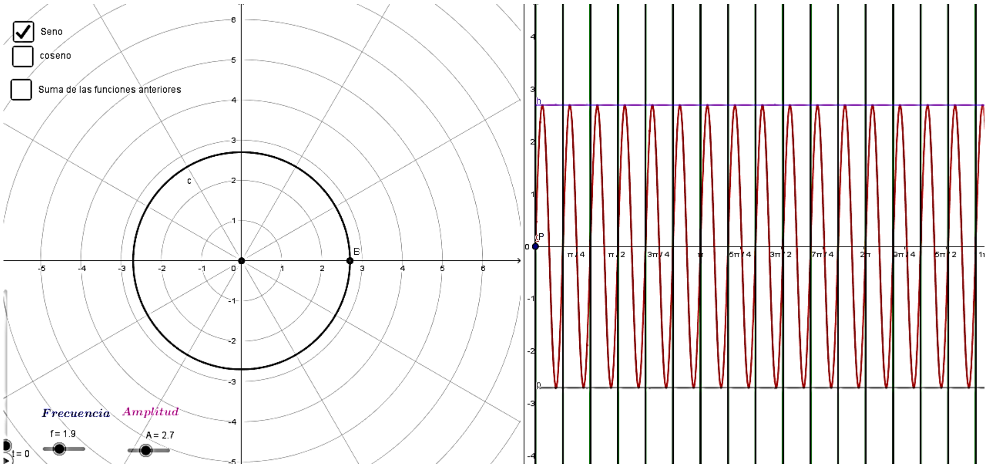
- Reconocer que cada componente de la serie de Fourier corresponde a una onda sinusoidal con la longitud de onda o periodo diferente.
- Identificar las relaciones entre el periodo, la frecuencia y la pulsación.

<table>
<tr><th>Fases de aprendizaje</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td>Información e interrogación</td><td>
Después de haber desarrollado el primer momento el estudiante tiene como herramienta lo trabajado en la sección anterior (insumo de partida). Y a partir del archivo GeoGebra®, iniciarán con el proceso de exploración y visualización.

Este archivo los estudiantes lo encontrarán en el grupo de Teams nombrado “Top Prof Cal 2022_2” en la carpeta nombrada “Actividad 1”, hallarán el archivo GeoGebra® llamado “momento 2”. Y tambien la siguiente representación de GeoGebra®. Como se muestra en la ilustración 5.

Ilustración 7

Archivo de GeoGebra® para segundo momento.



Fuente: Elaboración propia.
</td></tr>
<tr><td>Orientación dirigida</td><td>En esta fase, los estudiantes regresan al uso de los applets en este caso con el archivo GeoGebra® denominado “Segundo momento” y en él realizarán un momento de exploración para identificar el comportamiento de la animación presentada.</td></tr>
<tr><td>Explicitación o explicación</td><td>Los estudiantes deberán responder las preguntas que se encuentran en el taller nombrado “actividad 2”, (Veáse Anexo A)</td></tr>
<tr><td>Orientación libre</td><td>Nuevamente los estudiantes deben recurrir a los conocimientos básicos de geometría y trigonometría para intentar encontrar la relación existente entre los conceptos que se plantean en la actividad.</td></tr>
</table>

Integración	En esta última fase, los autores de la propuesta introducen el concepto de serie de Fourier, aludiendo a los elementos que los estudiantes encontraron en la actividad.

Fuente: Elaboración propia.

5.1.1.3 Diseño de segunda actividad – nivel de clasificación, ordenación o deducción informal

Esta actividad irá enfocada en el tercer nivel del modelo VH, la clasificación ordenación o deducción informal, que define Chavarria (2020) como la que consiste en que los estudiantes pueden reconocer las propiedades que se deducen unas de otras y sus respectivas implicaciones. Para el caso de esta actividad, en la adaptación realizada, los estudiantes deberán relacionar las propiedades encontradas en las actividades anteriores y hacer uso de operaciones entre complejos para llegar a la serie compleja de Fourier.

Tabla 3

Actividad 2 Serie Compleja de Fourier.

Actividad 2 Series compleja de Fourier: Deducción informal (Nivel 3 VH)

Objetivo general de la actividad

Identificar la relación entre la Serie de Fourier y la Serie compleja de Fourier.

Objetivos específicos

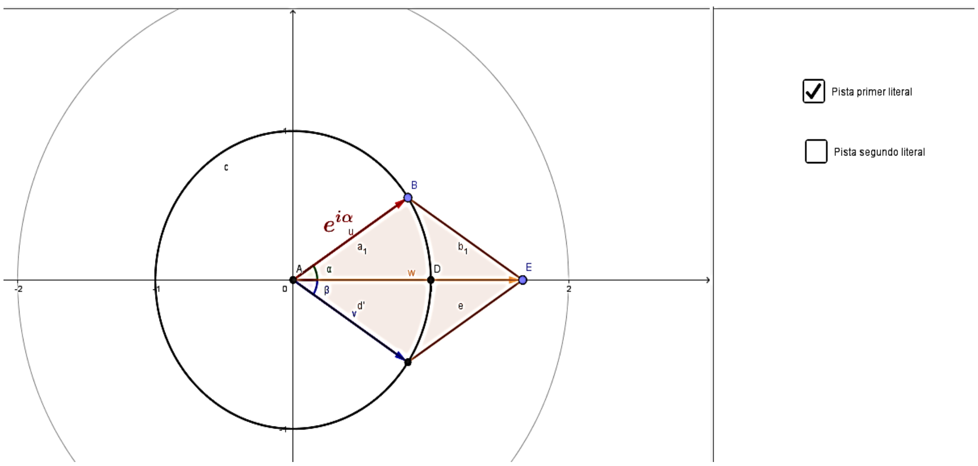
- Identificar el espectro de fecuencias de una función con la serie de Fourier.
- Encontrar la relación entre las funciones seno y coseno, con las funciones exponenciales complejas.

Fases de aprendizaje	Descripción
Información e interrogación	El punto de partida de esta actividad se fundamenta en la sesisón directamente anterior por lo que los estudiantes cuentan, al menos de manera teórica, con las herramientas para abordar la actividad.
Orientación dirigida	Se les indicará a los estudiantes ingresar al grupo de Teams del curso de Profundización de Cálculo “Top_Prof_Cal_2022_2”, por lo tanto, ellos abrirán la

carpeta nombrada “Transformada Fourier”, y en esta encontrarán la actividad llamada “Actividad 2”, junto con un archivo de GeoGebra®, que se usará como insumo para el desarrollo de la actividad. Además,contarán con los apuntes de la sesión anterior. Véase Anexo B

Ilustración 8

Archivo GeoGebra® Actividad 2



Fuente: Elaboración propia.

Explicitación o explicación	Los estudiantes deberán responder las preguntas plateadas de la actividad. Véase Anexo B.
Orientación libre	En esta fase, en especial en el último punto de la actividad, los estudiantes deberán justificar la relación de la función seno y coseno con las funciones exponenciales complejas, el insumo que tienen para ayudarse será el archivo denominado “identidades principales” que será un apoyo visual básicamente para la deducción que realicen.
Integración	Finalmente los autores de la propuesta a modo de conclusión desarrollaran la justificación del paso de la Serie de Fourier a la Serie compleja de Fourier. Para esto último es importante que los estudiantes hayan logrado justificar las identidades.

Fuente: Elaboración propia.

5.1.1.4 Diseño de tercera actividad – nivel de deducción formal

Esta actividad ira encaminada hacia el cuarto nivel del modelo de VH, sobre la deducción formal, en el cual (Chavarria, 2020) menciona que los estudiantes deben emplear un lenguaje matemático más formal y preciso, para así poder definir, clasificar y demostrar ciertas propiedades. Estas se llevarán a cabo mediante razonamiento deductivos formales. Para el caso de esta actividad será el realizar la demostración del paso de la integral de Fourier a la integral compleja de Fourier (transformada inversa de Fourier).

Tabla 4

Actividad 3 Transformada de Fourier.

Actividad 3 Transformada de Fourier: Deducción formal (nivel 4 VH)

Objetivo general de la actividad

Abordar el concepto de la transformada de Fourier desde la anti transformada de Fourier, realizar el paso de lo discreto a lo continuo e identificar el uso de la trasformada en el aplicativo Audacity.

Objetivos especifícos

- Identificar el uso de la transformada de Fourier.
- Demostrar la relación entre la integral de Fourier y la integral compleja de Fourier
- Calcular la transformada de algunas funciones.

Fases de aprendizaje	Descripción
Información e interrogación	El punto de partida de esta actividad se fundamenta en la sesión anterior, por lo que los estudiantes cuenta con las herramientas para abordarla.
Orientación dirigida	Para esta fase los estudiantes no comenzarán con la actividad, sino deberan atender a las explicaciones que se brindarán por parte de los autores de la propuesta que tendrán un gran impacto en el desarrollo de la actividad.
Explicitación o explicación	Una vez los estudiantes reciban la explicación final procederán al desarrollo de la parte de la actividad que implica su acción específica sobre la comprensión. Véase Anexo C.
Orientación libre	Los estudiantes con ayuda de las identidades y ejemplo vistos deberán dar solución a la actividad planteada, para ello pueden recurrir a los apuntes.
Integración	Finalmente se mostrará a los estudiantes el uso de la transformada de Fourier con un ejemplo en el aplicativo Audacity.

Fuente: Elaboración propia.

Con las actividades descritas, se hace necesario construir los indicadores de la evaluación que permitirán realizar el posterior análisis del pilotaje de las actividades planteadas. Para determinar estos indicadores se ha decidido enmarcarlos en los objetivos específicos de cada actividad, ya que así se facilitará el análisis posterior. Además, permiten identificar el nivel de VH en el que se encuentran los estudiantes según las definiciones mencionadas en los apartados anteriores, por supuesto, desde sus producciones escritas. Se recuerda que es una adaptación de los niveles de VH, y al no encontrarse criterios de clasificación específicos en el área del análisis, los autores del presente trabajo proponen los que se presentan a continuación.

5.1.2 Criterios de clasificación de los niveles de Van Hiele para la secuencia.

Dado que las tipologías son casos de respuesta particulares para geometría, se genera la necesidad de adaptar las definiciones propuestas en las secciones anteriores y la secuencia, quedando de la siguiente manera:

- **Tipo 0:** No se presentan respuestas.
- **Tipo 1:** Hace referencia a que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento. (No admite una clasificación aun existiendo respuesta).
- **Tipo 2:** Corresponde a respuestas incorrectas e incompletas en las que se permite reconocer indicios de algún nivel.
- **Tipo 3:** En este, se encuentran las respuestas correctas, pero con confusiones en los elementos relacionados en las que se dan indicios de reconocimiento de algún nivel.
- **Tipo 4:** Las respuestas empiezan a reflejar claramente características de dos niveles diferentes, en esta los estudiantes se encuentran en una transición entre niveles (Se pueden evidenciar avances o retrocesos entre niveles).
- **Tipo 5:** Respuestas bastante completas pero que atienden a solamente un aspecto de un nivel.
- **Tipo 6:** Las respuestas son bastante completas y correctas, y reflejan el nivel de razonamiento determinado. Eventualmente se tratan de respuestas claras y concisas,

pero que presentan "saltos" en el razonamiento deductivo caracterizados porque tiene pequeños errores argumentativos o vacíos en el mismo.

- **Tipo 7:** Respuestas matemáticamente correctas y completas que reflejan claramente un nivel de razonamiento.

Para ponderar las respuestas de los estudiantes y determinar en qué nivel se encuentran se trabajará con las tipologías adaptadas. La tabla 5 de (Corberan Salvador et Al, 1994, pág. 108) citada en Chavarría (2020) se tomará para la ponderación de las respuestas.

Tabla 5:

Ponderaciones de las Tipologías.

Tipo	0	1	2	3	4	5	6	7
Ponderación	0	0	20	25	50	75	80	100

Fuente: (Chavarría, 2020, p. 89).

La clasificación cualitativa del grado de los niveles se toma igualmente de Chavarría (2020).

Tabla 6:

Clasificación Cualitativa de los Niveles.

85% - 100%	Completa (C)
60% - 85%	Alta (A)
40% - 60%	Intermedia (I)
15% - 40%	Baja adquisición (B)
0% - 15%	Nula adquisición (N)

Fuente: (Chavarría, 2020, p. 89)

Estas clasificaciones permiten tener una valoración cualitativa y cuantitativa de la actividad, permitiendo indicar el alcance de la propuesta desde las dos perspectivas. En la Tabla 7 se muestran los criterios de clasificación, los cuales se tendrán en cuenta para hacer el respectivo análisis de las producciones escritas realizadas por los estudiantes durante el desarrollo de las actividades implementadas en el curso.

Tabla 7

Criterios de Clasificación Niveles de Van Hiele Adaptados.

Nivel	Descriptor	Actividad que Permite Identificar.
Reconocimiento o visualización.	El estudiante es capaz de reconocer gráficamente los elementos conceptuales que componen la representación análitica de la serie de Fourier, tales como : • Frecuencia. • Periodo. • Pulsación angular. • Funciones sinusoidales.	Actividad 1 “Series de Fourier” Primer momento
Análisis	El estudiante es capaz de identificar las relaciones matemáticas que existen entre la	Actividad 1: “Series de Fourier” Segundo momento.

Nivel	Descriptor	Actividad que Permite Identificar.
	frecuencia, el periodo y la pulsación.	
	Identifica, la serie de Fourier como una aproximación de funciones periódicas en el dominio del tiempo.	
Deducción informal u ordenación y clasificación	El estudiante es capaz de justificar las identidades de la variable compleja que permiten hacer el paso de la serie de Fourier a la serie compleja de Fourier y puede organizar las frecuencias de las funciones sinusoidales para identificar el espectro de frecuencias discreto de la serie.	Actividad 2: “Serie compleja de Fourier”
Deducción formal	El estudiante comprende el paso de la integral de Fourier a la integral compleja de Fourier, encontrando así la definición de la transformada inversa e identificando el coeficiente de la misma como la transformada de	Actividad 3: “Transformada de Fourier”

Nivel	Descriptor	Actividad que Permite Identificar.
	Fourier; además, es capaz de encontrar analíticamente la transformada de Fourier de algunas funciones básicas.	
Rigor	No se aplica para esta secuencia	No aplica

Fuente: Elaboración propia.

Una vez se hayan definido los criterios de clasificación, es indispensable identificar el nivel de razonamiento en que se encuentra los estudiantes, a partir de las actividades entregadas, y para ello se tendrá en cuenta los siete tipos de respuesta que se presentaron en el marco didáctico.

5.2 Principales diferencias respecto a los antecedentes.

En el apartado de antecedentes se indicaron dos trabajos que abordaban la TF. Uno de ellos desde un aspecto pedagógico sin tener en cuenta algún modelo específico y el segundo que abordaba la TF desde los niveles de VH, y presentaba una caracterización de las fases bajo la secuencia propuesta por ellos. A continuación, se presenta un cuadro comparativo de las dos secuencias propuestas para ilustrar principalmente las diferencias con este trabajo.

Tabla 8

Diferencias de la propuesta con los antecedentes.

Documentos de la sección de Antecedentes	Propuesta de Trabajo
Los documentos que se mencionaron en el apartado de antecedentes tenían en común las siguientes características.	La propuesta se diferencia en los siguiente. • Trabaja con los niveles de VH de forma secuencial, es decir, los elementos y conceptos que se necesitan para

• Trabajaban con los niveles de VH, pero directamente con el concepto. • Desarrollan primero con lo que corresponde a la aplicación. • Utilizan software para realizar los ejercicios. • Explican los conceptos que aparecen en la aplicación. • Formalizan la TF. Se debe mencionar que no se muestran las actividades que desarrollan, y la secuencia de aplicación.	comprender la TF se desarrollan con un nivel 1 y 2. En tanto que aumenta su dificultad a medida que se acerca a la definición de la Transformada con los niveles 3 y 4. No se trabaja el rigor. • Presenta una secuencia temática que para los autores permite comprender el funcionamiento y definición de la TF. Desde las Series de Fourier a la anti transformada de Fourier, para definir la transformada. • Se presentan la secuencia didáctica con las preguntas y ejercicios. • Se trabaja con más de un software cada uno especializado para determinada actividad.

Fuente: Elaboración propia.

CAPÍTULO 6: ANÁLISIS DE LA SECUENCIA

En este capítulo se presentará el análisis de la secuencia de actividades, para las cuales se identificará el nivel de razonamiento de VH, y serán evaluadas a partir del tipo de respuesta que propone (Corberan Salvador et Al, 1994). Se comenzará por brindar un contexto del curso al cual se le aplicó la secuencia, un análisis general del rendimiento del curso, y finalmente un análisis de las respuestas de algunos estudiantes por tipología de respuesta.

6.1 Contextualización

La propuesta que se describió anteriormente se aplicó a los estudiantes de la carrera de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional, dado que por cuestiones de tiempo no se logró aplicar en otros programas de la misma facultad. Las actividades se desarrollaron en el curso de Profundización en Cálculo de la cuarta versión del programa, que se ubica en el décimo semestre según el plan de estudios de la carrera en la línea de profundización de Cálculo. Por lo anterior, los estudiantes que se encuentran en este curso estudiaron en su ciclo de fundamentación distintos conceptos matemáticos necesarios para abordar la TF. Se tomó una muestra de 10 estudiantes de un total de 22 estudiantes que pertenecían al curso, y que cumplieron con el desarrollo de las 3 actividades, y permiten realizar un análisis completo de la secuencia. Las clases constaban de 2 horas, la primera actividad llevó más tiempo que el presupuestado inicialmente, tomando cerca de 1 hora 40 minutos, excediendo en una hora lo planeado; esto influyó en las tipologías al momento de la valoración, ya que los estudiantes no alcanzaron a terminar la actividad. En la segunda sesión la cantidad de estudiantes se redujo en un 50% rompiendo así su proceso, ya que la actividad debía desarrollarse en el tiempo de clase, siendo este el factor principal de la elección solamente 10 estudiantes quienes si desarrollaron las actividades en la clase. Por último, la implementación de la tercera actividad no presentó mayores inconvenientes, pero al ser una secuencia de conceptos que se abordaron en las sesiones de clase pasadas, los estudiantes que no estuvieron en las sesiones anteriores se notaban descontextualizados, teniendo que solicitar apoyo de los compañeros para comprender la actividad.

En las dos primeras sesiones primero se abordó la actividad y después la conceptualización o explicación del tema. La última sesión se desarrolló de forma contraria, es decir, primero se realizó la explicación y finalmente la actividad.

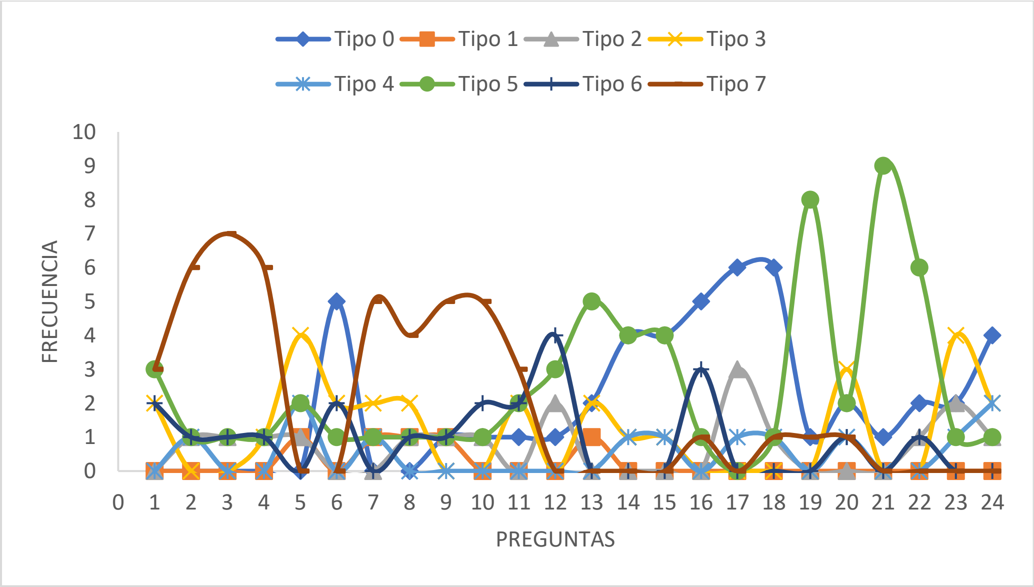
Para la última sesión se tenía previsto mostrar un ejemplo en Audacity para que los estudiantes conocieran una de las aplicaciones de la transformada en el sonido, pero por cuestiones de tiempo no se logró implementar como se deseaba. Únicamente se llegó a mencionar y ver un ejemplo simple del uso de la transformada en el software.

6.2 Análisis de tipologías.

La secuencia contaba con un total de 24 preguntas y enunciados, a continuación, se presenta la dispersión de estas en la Ilustración 7 con el fin de que se permita ver el desarrollo de la propuesta desde las respuestas siguiendo los parámetros de las tipologías.

Ilustración 9

Dispersión de las Tipologías Encontradas en las Respuestas.

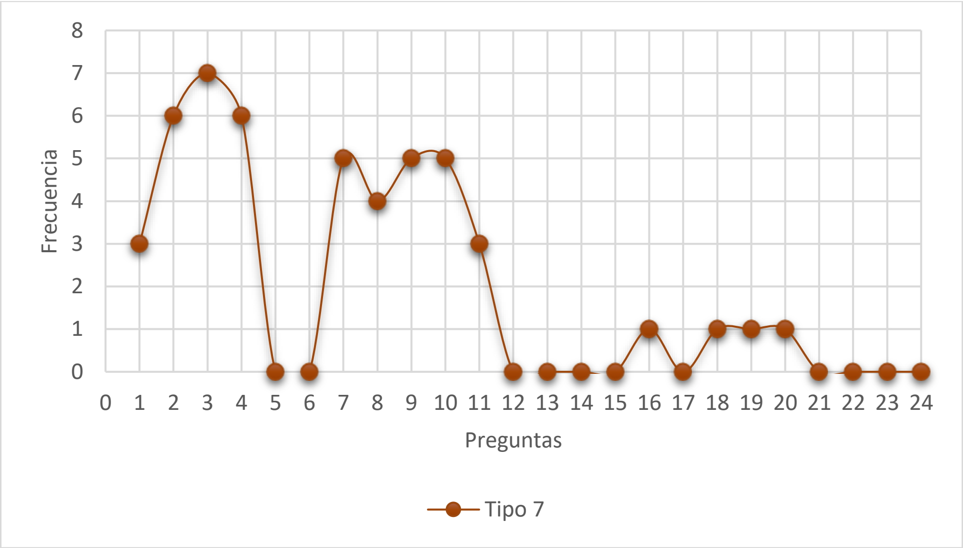


Fuente: Elaboración propia.

La Ilustración 8 muestra que determinadas tipologías, como la 7, aparecen con más frecuencia en las primeras preguntas, que abordan los primeros niveles, y se admite una respuesta de acuerdo con el nivel, a medida que aumenta y se llegan a las últimas preguntas que hacen referencia a los niveles 3 y 4 la tipología desciende a cero, en especial en las últimas 3 actividades que corresponden a la tercera actividad que se concreta en la TF. Lo que indica que ya los estudiantes no presentan respuestas correctas matemáticamente y que a la vez sean completas.

Ilustración 10

Dispersión Tipología 7 Encontrada en las respuestas.

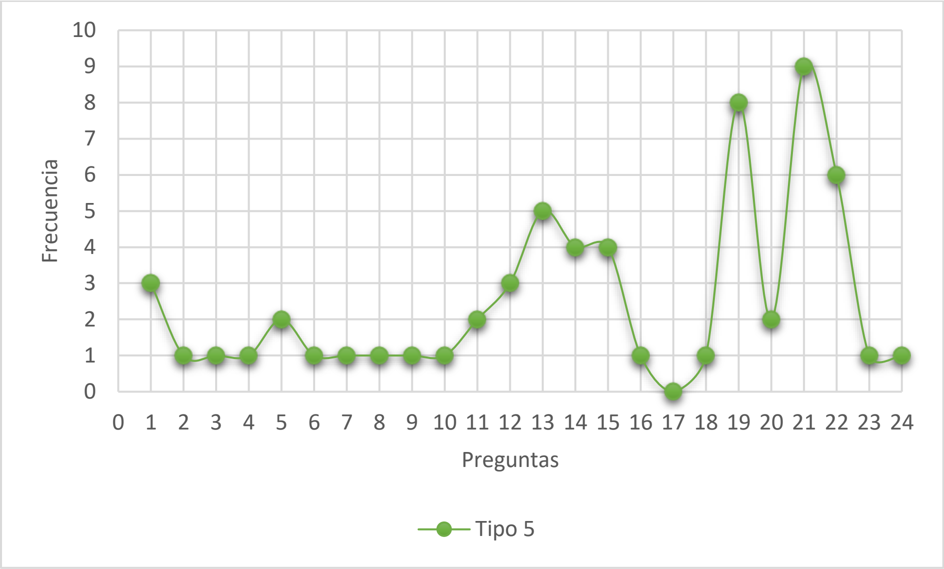


Fuente: Elaboración propia.

Otra tipología que aparece frecuentemente y que además tiene un comportamiento inverso a la tipología 7, es la tipología 5 ya que en los primeros niveles no aparece como se definió en la secuencia, hace referencia a la visualización, en tanto que en los otros requieren justificar sus respuestas. A medida que aumenta el nivel de las actividades los estudiantes justifican sus respuestas, pero no son del todo correctas ya que pueden presentar errores conceptuales.

Ilustración 11

Dispersión Tipología 5 Encontrada en las respuestas.

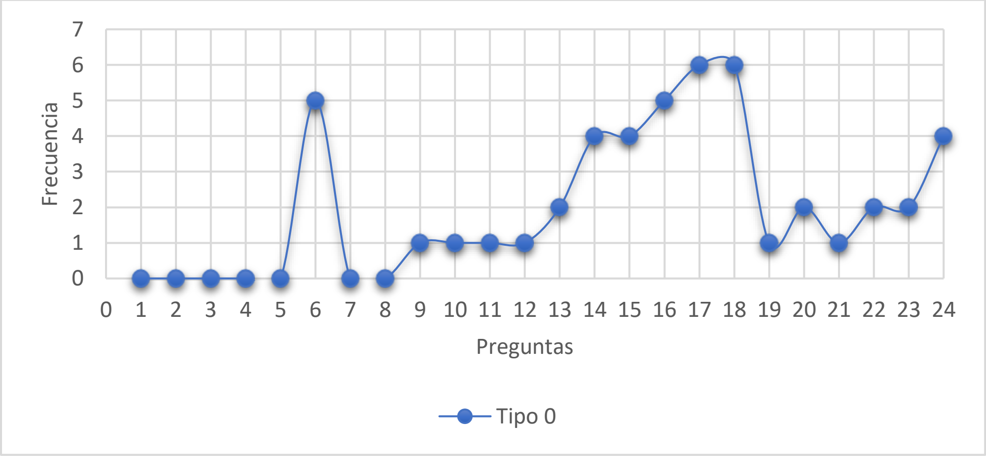


Fuente: Elaboración propia.

La Tipología 0 fue demasiado frecuente entre el segundo momento de la primera actividad, a la cual se le atribuye el factor del tiempo ya que una cantidad considerable de estudiantes de la muestra no logro culminar la actividad.

Ilustración 12

Dispersión Tipología 0 Encontrada en las Respuestas.

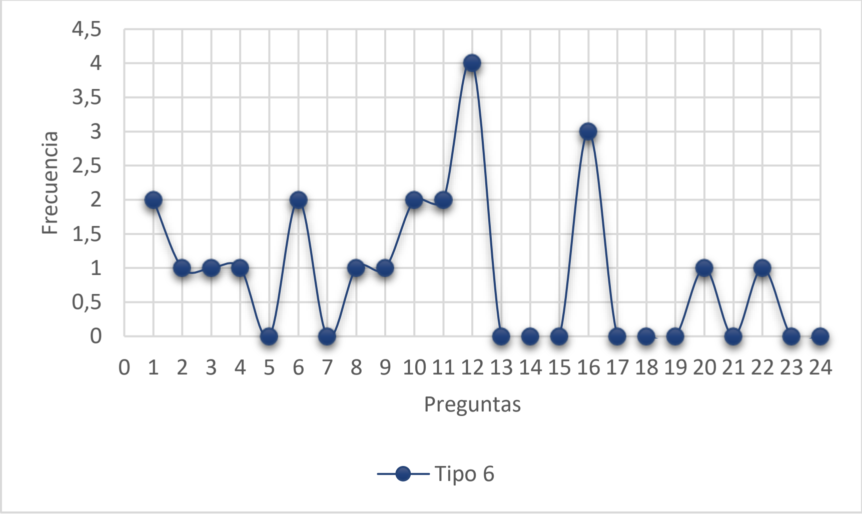


Fuente: Elaboración propia.

La Tipología 6 fue obtenida por muy pocos estudiantes en las últimas preguntas de las últimas actividades, presentaron saltos en los pasos que tenían que realizar y los daban por supuestos, sin embargo, en general, entendían que es lo qué se debía realizar.

Ilustración 13

Dispersión Tipología 6 Encontrada en las Respuestas.

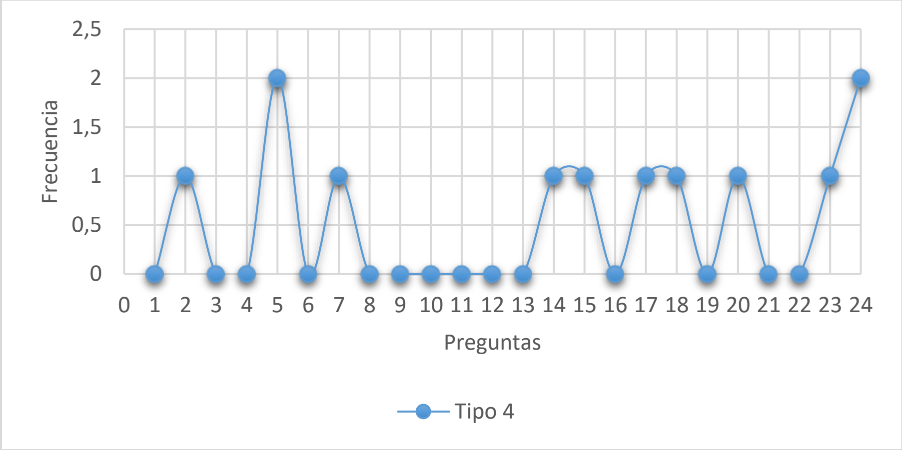


Fuente: Elaboración propia.

La tipología 4 apareció en 2 estudiantes en especial en la parte final de la secuencia, lo que indica que todavía no se pueden definir en ellos un nivel especifico; por lo general combinaban ambos razonamientos.

Ilustración 14

Dispersión Tipología 4 Encontrada en las Respuestas.

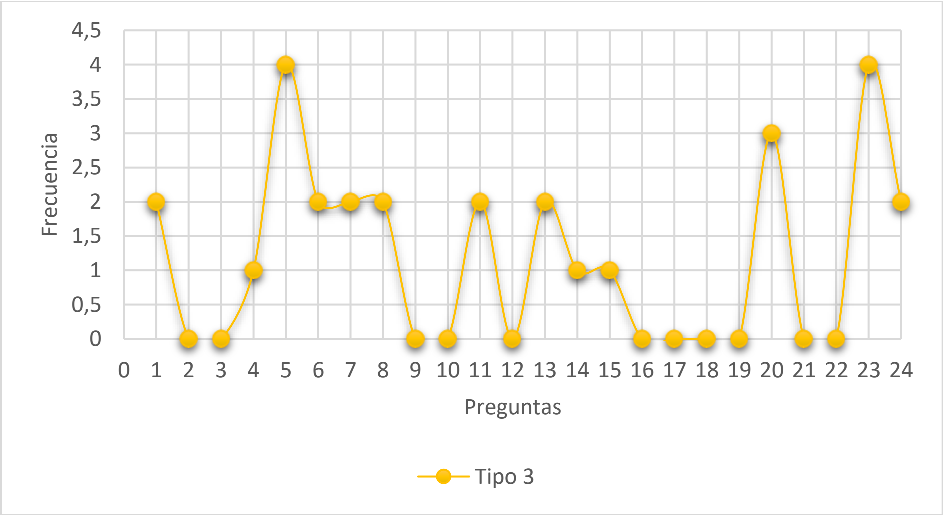


Fuente: Elaboración propia.

La Tipología 3 aparece en determinadas preguntas en el 40 por ciento de los casos, en especial en las preguntas de la parte final, indicando que son respuestas correctas pero que son bastante incompletas.

Ilustración 15

Dispersión Tipología 3 Encontrada en las Respuestas.



Fuente: Elaboración propia.

Conociendo la tendencia de las tipologías se mostrará a continuación la valoración de 3 estudiantes de forma individual, para indicar en qué nivel se encuentran respecto a la actividad.

6.3 Análisis de estudiantes.

En esta sección se tomarán 3 casos que muestran a un estudiante con un buen puntaje en la valoración individual, otro con un puntaje intermedio, y otro estudiante con niveles bajos respecto a lo esperado. Según como los criterios de evaluación de VH.

6.3.1 Evidencias particulares

Para entender las evidencias, el esquema de la tabla se toma de (Corberan Salvador et Al, 1994), en el cual, se identifica la actividad, el número de la pregunta, nivel de pregunta y su respectiva ponderación en el nivel correspondiente. En la columna de Nivel Pregunta la casilla más oscura indica el nivel sobre el cuál se le asigna la tipología. Atendiendo a VH se puede observar que si la pregunta tiene dos posibles niveles en los cuales se encuentre la respuesta, el nivel predecersor se asume superado por la secuencialidad que se maneja en el esquema de VH.

La siguiente tabla muestra la ponderación de uno de los estudiantes.

Tabla 9

Ponderación Primer Ejemplo Particular

Actividad	Pregunta	Tipología	Nivel Pregunta				Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Series de Fourier primer momento	P1	5	1	2	3	4	100	75		
	P2	7	1	2	3	4	100			
	P3	7	1	2	3	4	100			
	P4	7	1	2	3	4	100			
	P5	4	1	2	3	4	100	50		
	P6	0	1	2	3	4	0	0		
	P7	7	1	2	3	4	100			
	P8	7	1	2	3	4	100			
	P9	7	1	2	3	4	100			
	P10	7	1	2	3	4	100			
	P11	7	1	2	3	4	100			

Actividad	Pregunta	Tipología	Nivel Pregunta				Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Series de Fourier Segundo momento	P12	2	1	2	3	4		100	25	
	P13	5	1	2	3	4		100	25	
	P14	5	1	2	3	4		100	25	
	P15	5	1	2	3	4		100	25	
	P16	7	1	2	3	4		100		
	P17	2	1	2	3	4		20		
	P18	5	1	2	3	4		75		
Serie compleja de Fourier	P1 (19)	5	1	2	3	4		100	75	
	P2 (20)	3	1	2	3	4		100	25	
	P3 (21)	5	1	2	3	4		100	100	50
Transformada de Fourier	P1 (22)	6	1	2	3	4		100	80	
	P2 (23)	3	1	2	3	4		100	100	25
	P3 (24)	3	1	2	3	4		100	100	25
Ponderación							**90,91**	**82,50**	**58,00**	**33,33**

Fuente: Elaboración propia.

La clasificación cualitativa de los niveles para el estudiante se muestra en la Tabla 10.

Tabla 10

Valoración Cualitativa Primer Caso Particular.

Nivel 1	Completa
Nivel 2	Alta
Nivel 3	Intermedia
Nivel 4	Baja Adquisición

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 11

Ponderación Segundo Ejemplo.

Actividad	Pregunta	Tipología	Nivel Pregunta				Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Series de Fourier primer momento	P1	6	1	2	3	4	100	80		
	P2	7	1	2	3	4	100			
	P3	7	1	2	3	4	100			
	P4	7	1	2	3	4	100			
	P5	3	1	2	3	4	100	25		
	P6	6	1	2	3	4	100	80		
	P7	7	1	2	3	4	100			
	P8	3	1	2	3	4	25			
	P9	7	1	2	3	4	100			
	P10	5	1	2	3	4	75			
	P11	6	1	2	3	4	80			
Series de Fourier Segundo momento	P12	5	1	2	3	4		100	75	
	P13	5	1	2	3	4		100	75	
	P14	0	1	2	3	4		0	0	
	P15	0	1	2	3	4		0	0	
	P16	0	1	2	3	4		0		
	P17	0	1	2	3	4		0		
	P18	0	1	2	3	4		0		
Serie compleja de Fourier	P1	5	1	2	3	4		100	75	
	P2	3	1	2	3	4		100	25	
	P3	5	1	2	3	4		100	100	75
Transformada de Fourier	P1	5	1	2	3	4		100	75	
	P2	5	1	2	3	4		100	100	75
	P3	0	1	2	3	4		0	0	0
Ponderación							**89,09**	**55,31**	**52,50**	**50,00**

Fuente: Elaboración propia.

La clasificación cualitativa para el estudiante se puede evidenciar en la Tabla 12.

Tabla 12

Valoración Cualitativa Segundo Caso Particular.

Nivel 1	Completa
Nivel 2	Intermedia
Nivel 3	Intermedia
Nivel 4	Intermedia

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 13

Ponderación Tercer Ejemplo.

Actividad	Pregunta	Tipología	Nivel Pregunta				Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Series de Fourier primer momento	P1	3	1	2	3	4	100	25		
	P2	7	1	2	3	4	100			
	P3	7	1	2	3	4	100			
	P4	7	1	2	3	4	100			
	P5	3	1	2	3	4	100	25		
	P6	3	1	2	3	4	100	25		
	P7	3	1	2	3	4	25			
	P8	2	1	2	3	4	20			
	P9	2	1	2	3	4	20			
	P10	7	1	2	3	4	100			
	P11	6	1	2	3	4	100			
Series de Fourier Segundo momento	P12	5	1	2	3	4		100	75	
	P13	0	1	2	3	4		0	0	
	P14	0	1	2	3	4		0	0	
	P15	0	1	2	3	4		0	0	
	P16	0	1	2	3	4		0	0	
	P17	0	1	2	3	4		0		
	P18	0	1	2	3	4		0		
Serie compleja de Fourier	P1	5	1	2	3	4		100	75	
	P2	0	1	2	3	4		0	0	
	P3	0	1	2	3	4		0	0	0
Transformada de Fourier	P1	0	1	2	3	4		0	0	
	P2	2	1	2	3	4		100	100	20
	P3	4	1	2	3	4		100	100	50
Ponderación							**78,64**	**29,69**	**31,82**	**23,33**

Fuente: Elaboración propia.

La clasificación cualitativa se indica en la siguiente tabla.

Tabla 14

Valoración Cualitativa Tercer Caso Particular

Nivel 1	Alta
Nivel 2	Baja Adquisición
Nivel 3	Baja Adquisición
Nivel 4	Baja Adquisición

Fuente: Elaboración.

Un elemento en común que presentan los tres ejemplos de estudiantes que trabajaron la secuencia es que la gran mayoría coinciden en que el último nivel se encuentra en baja adquisición. Se presentará el resumen general de la ponderación del curso por niveles.

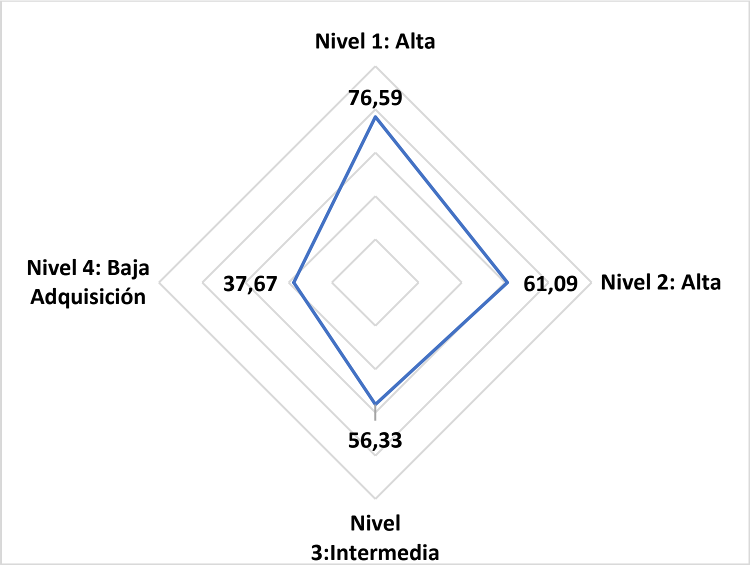
6.3.2 Análisis general de la muestra.

En términos generales los datos encontrados en los niveles 1 y 4 son muy similares y no existe una variación muy alta. En tanto que para el nivel 2 y 3 se presenta una mayor variedad de ponderaciones permitiendo concluir que en estos niveles no existe una categoría dominante.

6.3.2.1 Ponderación de los niveles en la muestra.

Ilustración 16

Niveles de la muestra en la secuencia



Fuente: Elaboración propia.

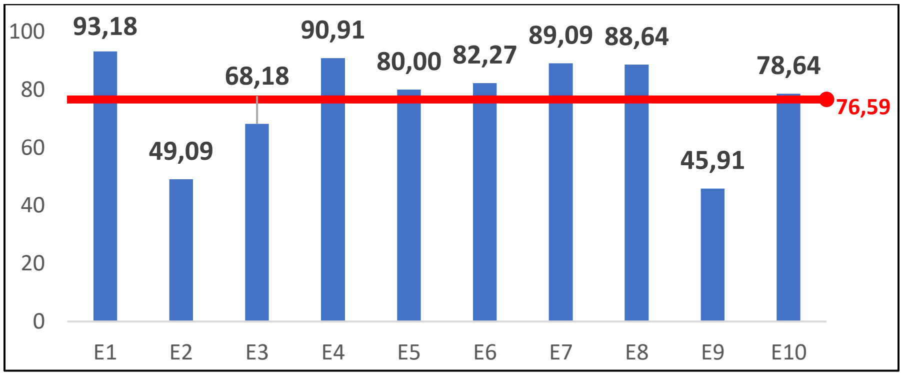
En términos generales se puede apreciar que no se obtuvieron muy buenos resultados en el nivel 3 y 4 propuestos por la secuencia. El nivel 2 superó por muy poco el umbral de la clasificación intermedia, en consecuencia, también se tendría que reforzar el segundo nivel.

6.3.2.2 Análisis de estudiantes por nivel.

6.3.2.2.1 Nivel 1

Ilustración 17

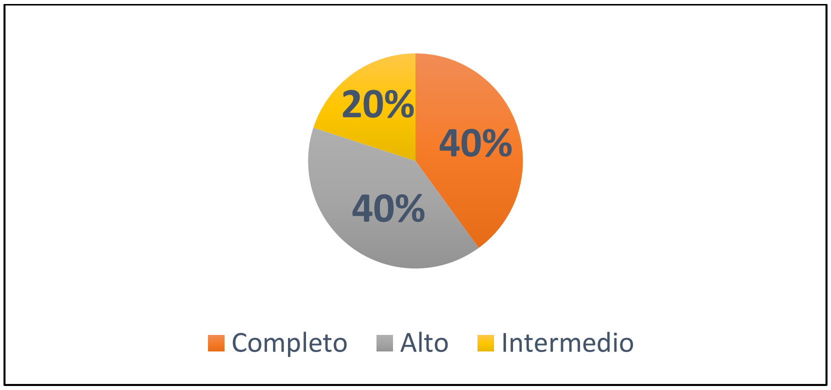
Diagrama de barras del primer nivel



Fuente: Elaboración propia.

Ilustración 18

Diagrama Circular Primer Nivel.



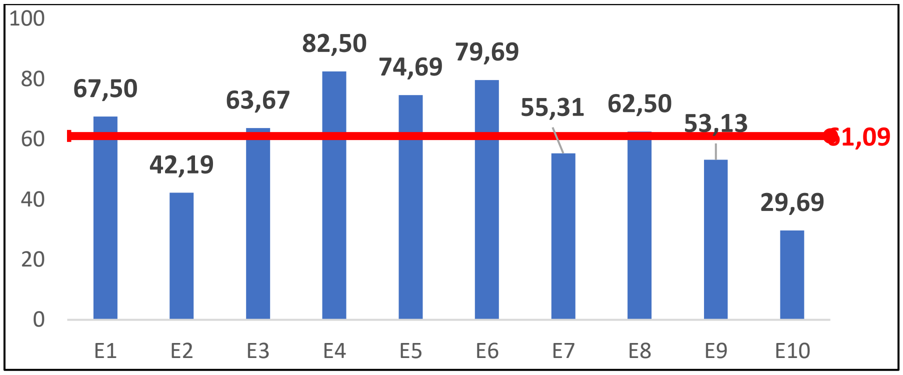
Fuente: Elaboración propia.

Los gráficos muestran que 3 estudiantes se encuentran por debajo del promedio para el primer nivel. Siendo este el nivel más sencillo en la estructura de VH. Para el primer nivel el 100% de la muestra no se encuentra en Baja adquisición, tampoco en Nula adquisición.

6.3.2.2.2 Nivel 2

Ilustración 19

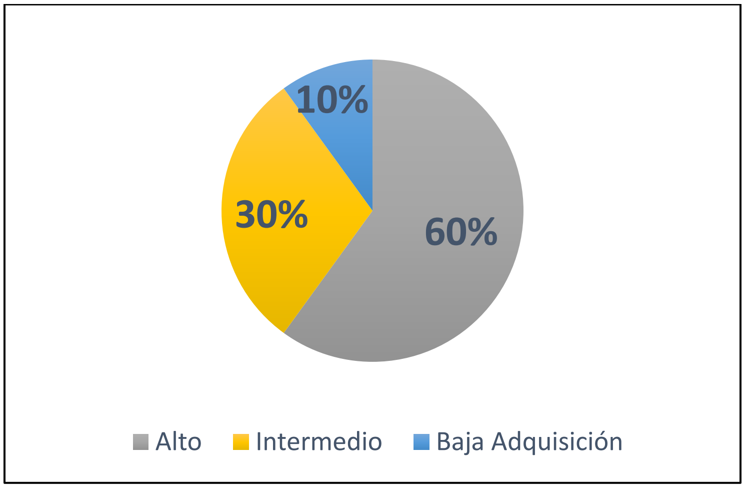
Diagrama de barras del segundo nivel



Fuente: Elaboración propia.

Ilustración 20

Diagrama circular segundo nivel



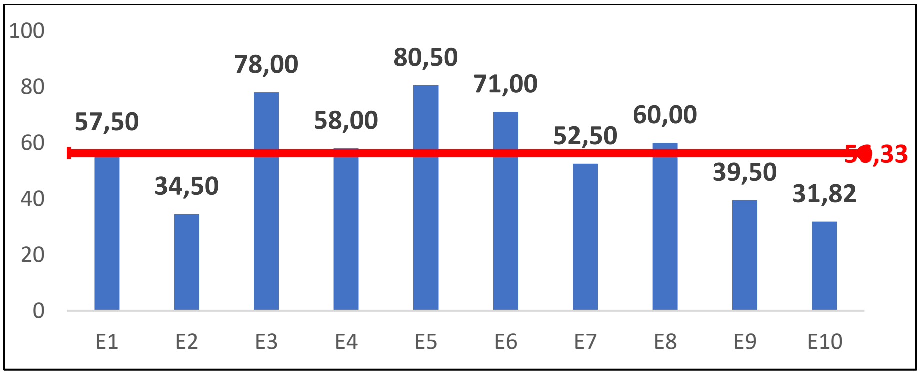
Fuente: Elaboración propia.

Como se ve en los gráficos, para el segundo nivel ningún estudiante se encuentra en la categoría completo, comienza a aparecer la categoría de baja adquisición y aumenta el porcentaje en las categorías de alto e intermedio.

6.3.2.2.3 Nivel 3

Ilustración 21

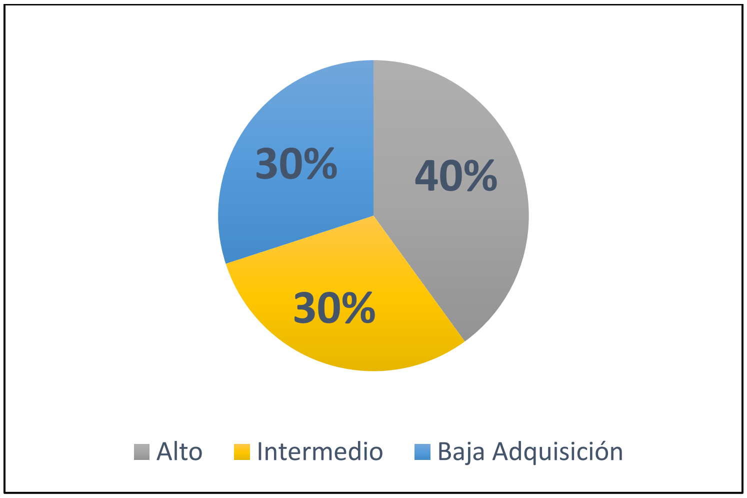
Diagrama de barras del tercer nivel



Fuente: Elaboración propia.

Ilustración 22

Diagrama circular tercer nivel



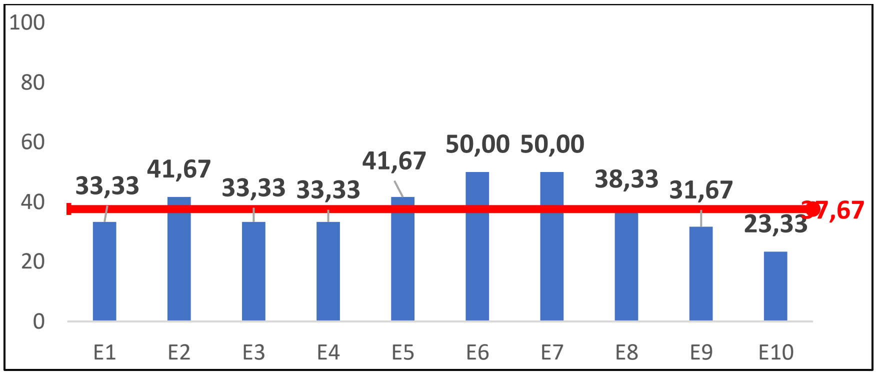
Fuente: Elaboración propia.

Se puede apreciar que, para este nuevo nivel, cinco estudiantes superaron el promedio, tres de ellos por muy poca diferencia, este nivel representa un poco más de desafío, los factores que quizá pueden influir a parte del diseño de las preguntas son los conceptos que olvidaron en cursos pasados. Aumenta también el porcentaje en la categoría de Baja adquisición.

6.3.2.2.4 Nivel 4

Ilustración 23

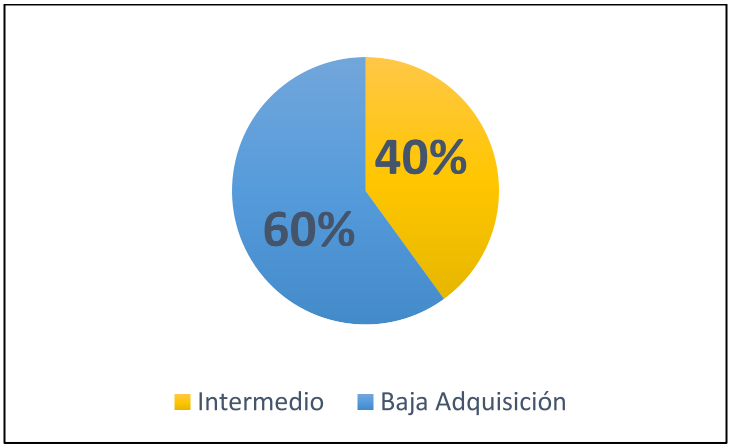
Diagrama de barras del cuarto nivel



Fuente: Elaboración propia.

Ilustración 24

Diagrama circular cuarto nivel



Fuente: Elaboración propia.

Este último nivel, la categoría predominante es la Baja adquisición, lo que representa una dificultad mayor en la secuencia.

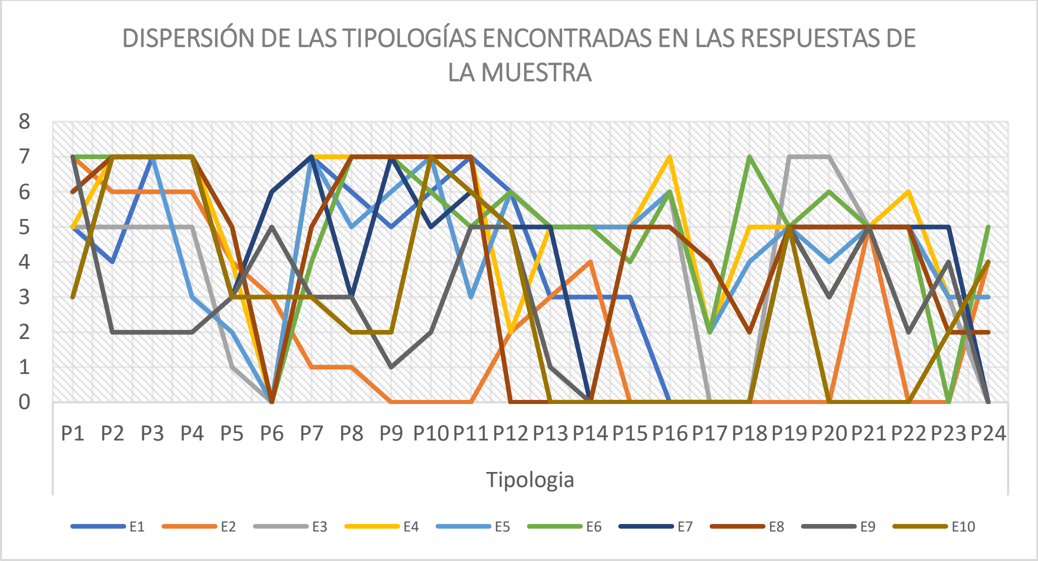
Con las gráficas se muestra claramente que los niveles de la muestra bajaron progresivamente a medida que aumentaba la dificultad de las preguntas.

6.3.2.3 Análisis de respuestas de los estudiantes.

Para esta sección se analizarán las respuestas de los estudiantes de acuerdo con el nivel de las preguntas que se planeó para el desarrollo de la secuencia. La Ilustración siguiente muestra la dispersión de las tipologías de los estudiantes respecto de la pregunta.

Ilustración 25

Dispersión de Tipologías del Grupo en General



Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se presentan las evidencias de algunas tipologías encontradas en los desarrollos o respuestas de algunos estudiantes. Se indica el nivel de la pregunta, la respuesta del estudiante y una descripción. Es preciso especificar que el análisis se dificultó debido a la brevedad en las respuestas de los estudiantes y en algunos casos no se puede concluir más allá de lo trivial.

6.3.2.3.1 Evidencia tipología 0

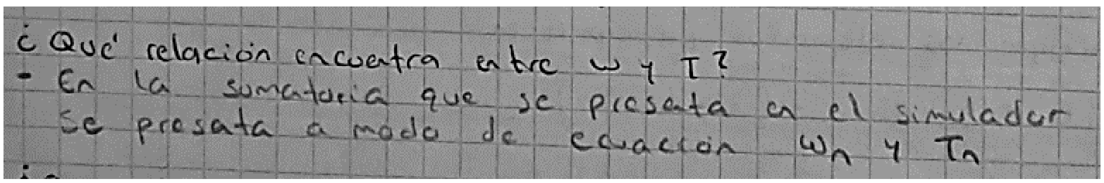
En esta tipología se encuentran las preguntas que los estudiantes no respondieron.

6.3.2.3.2 Evidencia tipología 1

Tabla 15

Evidencia Tipología 1.

Pregunta 13: ¿Qué relación encuentra entre ω y T?	
Nivel	Nivel principal: 3 Nivel secundario: 2
Descripción tipología: Hace referencia a que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento. (No admite una clasificación aun existiendo respuesta) **Ilustración 26** *Evidencia Tipología 1*	



Fuente: Elaboración propia.

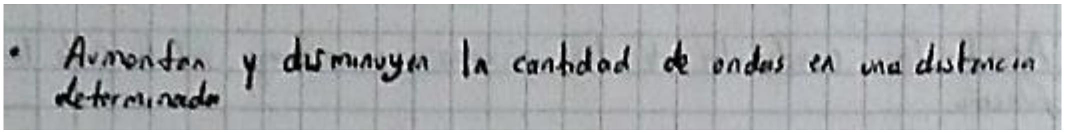
Descripción La respuesta del estudiante no cumple con los niveles requeridos, pese a que existe una respuesta no se pueden identificar los elementos propios del nivel 2 o 3, además que la idea que intenta expresar no es clara.

Fuente: Elaboración propia.

6.3.2.3.3 Evidencia tipología 2

Tabla 16

Evidencia Tipología 2

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta 12: ¿Qué sucede si aumenta la frecuencia de la función? y ¿Qué sucede cuando disminuye la frecuencia?</td></tr>
<tr><td>Nivel</td><td>Nivel principal: 3
Nivel secundario: 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción tipología:
Corresponde a respuestas incorrectas e incompletas en las que se permite reconocer indicios de algún nivel.
Ilustración 27
Evidencia tipología 2.


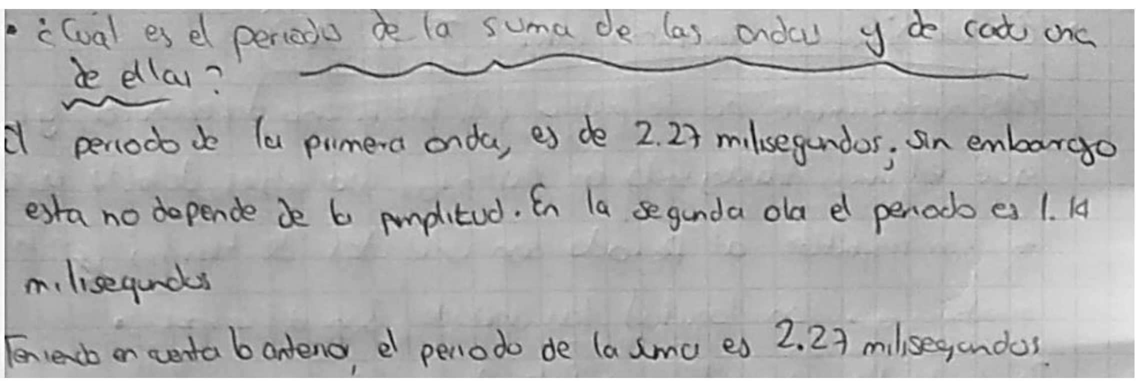
Fuente: Elaboración propia</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción
Se muestra una respuesta incorrecta pese a que relaciona algunos elementos requeridos. Indica que lo que aumentan son las ondas. La redacción de la respuesta no corresponde al nivel 3 en donde se relacionan de manera informal conceptos en este caso (ciclos, el periodo). Parece que la respuesta quedaría en un nivel 1 de reconocimiento.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

6.3.2.3.4 Evidencia tipología 3

Tabla 17

Evidencia Tipología 3

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta 4: ¿Cuál es el periodo de la suma de las ondas?</td></tr>
<tr><td>Nivel</td><td>Nivel principal: 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción tipología:
En este, se encuentran las respuestas correctas, pero con confusiones en los elementos relacionados en las que se dan indicios de reconocimiento de algún nivel.
Ilustración 28
Evidencia Tipología 3.

• ¿Cuál es el periodo de la suma de las ondas y de cada una de ellas?
El periodo de la primera onda, es de 2.27 milisegundos; sin embargo esta no depende de la amplitud. En la segunda ola el periodo es 1.14 milisegundos
Teniendo en cuenta lo anterior, el periodo de la suma es 2.27 milisegundos.
Fuente: Elaboración propia</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción
La respuesta brindada es correcta. Trata de relacionar sin éxito otros elementos, lo cual permite ver que el estudiante observa y de alguna forma quiere hacer explicita la razón de su respuesta, pero no se logra evidenciar claramente el argumento que sustenta su afirmación.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

6.3.2.3.5 Evidencia tipología 4

Tabla 18

Evidencia Tipología 4

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta 15: ¿Qué relación encuentra entre ω y f?</td></tr>
<tr><td>Nivel</td><td>Nivel principal: 3
Nivel secundario: 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción tipología:
Las respuestas empiezan a reflejar claramente características de dos niveles diferentes, en esta el estudiante se encuentran en una transición entre niveles (Se pueden evidenciar avances o retrocesos entre niveles).

Ilustración 29

Evidencia Tipología 4

- ¿Qué relación encuentra entre ω y f?

$$\omega_n = 2\pi f_n$$

$$f_{n=}\frac{\omega_n}{2\pi}$$

Y como

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$$

Remplazamos

$$f_{n=}\frac{\frac{2\pi}{T_n}}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi\, T_n} = \frac{1}{T_n}$$

Fuente: Elaboración propia</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción
El estudiante inicia asumiendo la relación que efectivamente se da entre ω y f lo que es correcto, pero no da ninguna afirmación o justificación de esto. Pero aprovecha esta relación como insumo para demostrar otra relación.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

6.3.2.3.6 Evidencia tipología 5

Tabla 19

Evidencia Tipología 5

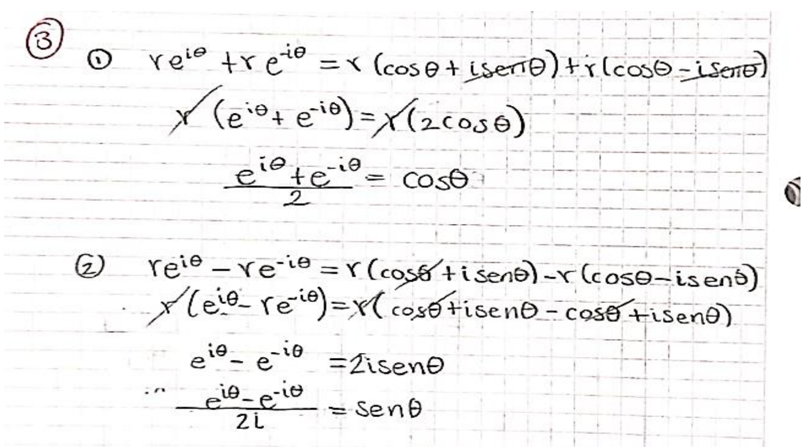
Pregunta 21: Con el archivo de GeoGebra® llamado “identidades principales” responda: • ¿Cómo se puede escribir el coseno en términos de una exponencial compleja? Justifique su respuesta • ¿Cómo se puede escribir el seno en términos de una exponencial compleja? Justifique su respuesta.	
Nivel	Nivel principal: 4 Nivel secundario: 3 Nivel terciario: 2

Descripción tipología:

Respuestas bastante completas pero que atienden a solamente un aspecto de un nivel.

Ilustración 30

Evidencia Tipología 5


③

① $re^{i\theta}+re^{-i\theta}=r(\cos\theta+\cancel{i\,\text{sen}\theta})+r(\cos\theta-\cancel{i\,\text{sen}\theta})$

$\cancel{r}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\cancel{r}(2\cos\theta)$

$\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\cos\theta$

② $re^{i\theta}-re^{-i\theta}=r(\cos\theta+i\,\text{sen}\theta)-r(\cos\theta-i\,\text{sen}\theta)$

$\cancel{r}(e^{i\theta}-re^{-i\theta})=\cancel{r}(\cos\theta+i\,\text{sen}\theta-\cos\theta+i\,\text{sen}\theta)$

$e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\,\text{sen}\theta$

$\therefore\ \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\text{sen}\theta$

Fuente: Elaboración propia.

Descripción

El nivel principal de esta pregunta era el 4, ya que exigía una demostración o justificación formal mediante las propiedades que se tenían de los números complejos y de las identidades que encontraron mediante el archivo de GeoGebra®. La respuesta queda únicamente en los algoritmos matemáticos sin justificaciones. Además, no se muestra una argumentación del por qué se plantea la igualdad inicial en ambos casos.

Fuente: Elaboración propia.

6.3.2.3.7 Evidencia tipología 6

Tabla 20

Evidencia Tipología 6

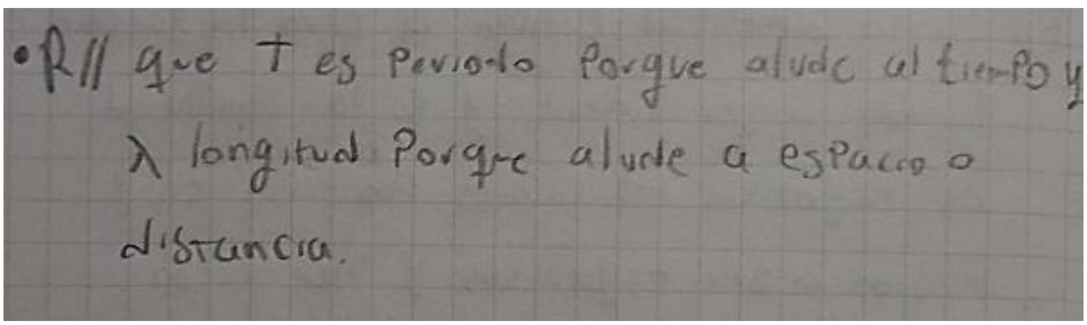
Pregunta 16: ¿Cómo afecta la amplitud a la circunferencia y a la función?	
Nivel	Nivel principal: 2
Descripción tipología: Las respuesta son bastante completas y correctas y reflejan el nivel de razonamiento determinado, eventualmente se tratan de respuestas claras y concisas, pero que presentan "saltos" en el razonamiento deductivo seguido porque tiene pequeños errores argumentativos o vacíos. **Ilustración 31** *Evidencia Tipología 6* • ¿Cómo afecta la amplitud a la circunferencia y a la función? **Rta:** La amplitud de la onda afecta el punto máximo y mínimo relativo de la función, y en cuanto a la circunferencia la amplitud es igual al radio de la circunferencia. **Fuente:** Elaboración propia.	
Descripción Teniendo en cuenta que la pregunta se enmarca en el nivel 2, la respuesta dada está completa y esta completa y correcta, ya que en este nivel no se presenta la deducción como carácter principal, presenta vacíos en indicar el cómo afectan a los puntos máximos y mínimos.	

Fuente: Elaboración propia.

6.3.2.3.8 Evidencia tipología 7

Tabla 21.

Evidencia Tipología 7.

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta 9: ¿Qué diferencia encuentra conceptualmente en esta ecuación respecto a la ecuación en términos de T?</td></tr>
<tr><td>Nivel</td><td>Nivel principal: 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción tipología:
Respuestas matemáticamente correctas y completas que reflejan claramente un nivel de razonamiento.
Ilustración 32
Evidencia Tipología 7

• R// que T es Periodo porque alude al tiempo y λ longitud porque alude a espacio o distancia.
Fuente: Elaboración propia</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción
En este caso la pregunta se respondía bajo lo observado en el applet de Phet, por eso se le asigna el nivel uno. Con la visualización logra establecer la diferencia conceptual de las ecuaciones.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

Los ejemplos anteriores ilustran las tipologías definidas en el capítulo anterior. De esta información se ha realizado un análisis del rendimiento de los estudiantes con respecto a la secuencia, y esto permite identificar problemáticas que puedan surgir de ella.

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES

En este último capítulo se abordan las conclusiones fruto del análisis del capítulo anterior. Se comenzará hablando acerca del rendimiento de los estudiantes y las posibles causas de este, luego se hablará del diseño de la actividad y como sería la propuesta para la Facultad de Ciencia y Tecnología, finalmente se concluirá con una reflexión por parte de los autores en el diseño, aplicación y análisis de la secuencia didáctica.

7.1 Conclusiones desde la clasificación cualitativa de los estudiantes.

En el capítulo anterior se logró ver que el rendimiento general de la muestra de los estudiantes era inversamente proporcional a la dificultad de las preguntas, es decir, a medida que se subía de nivel la pregunta, su ponderación descendía, esta fue una característica que se obtuvo en la mayoría de los estudiantes. Un factor relevante que se debe tener en cuenta, es que aunque los estudiantes hayan cursado los espacios académicos en donde se abordan temas concernientes y necesarios para abordar la TF, y que sirven de fundamento para esta temática, no se tienen muy claras conceptualmente, una posible casusa es pensar que la calidad de la implementación de las asignaturas y el desempeño de los estudiantes disminuyó debido a la contingencia presentada a nivel mundial por la pandemia COVID 19, llevando de forma repentina las sesiones de clase presenciales a sesiones virtuales, lo cual pudo impactar no sólo en el contenido temático abordado sino en los niveles de compromiso de los estudiantes con su propio aprendizaje. La temática de la TF es compleja como se mencionó al inicio del documento y requiere de un estudio más profundo y detallado de los conceptos que se abordan para comprenderla y no quedar simplemente en el desarrollo algorítmico que esta conlleva, por eso la mayor dificultad se presenta en entender los conceptos y principales demostraciones que se vieron reflejadas en los dos últimos niveles. Al ser esta propuesta objeto de un pilotaje inicial, refleja una realidad de lo complejo que puede llegar a ser la temática e invita a tratar de conseguir nuevas estrategias para afianzar el conocimiento disciplinar de los estudiantes.

7.2 Conclusiones desde la aplicación de la propuesta.

La estrategia de utilizar una adaptación de los niveles de VH para introducir una temática permitió tener una secuencialidad determinada por los niveles. Un principal aspecto que no se tuvo en cuenta, fue asumir que los estudiantes tenían los conceptos previos necesarios para abordar el primer momento de la actividad 1; a pesar de que el primer nivel de VH indica que se deben identificar los conceptos previos de los estudiantes, para esto se debe hacer una actividad o prueba diagnóstica como referente de partida para la elaboración de las actividades correspondientes con los niveles de VH. Por otra parte, habría que entrar a cuestionar cómo se han reformulado los contenidos disciplinares del programa de formación o si se han perdido debido a las rutinas, falta de tiempo,.. y otros.

En concordancia con lo anterior el definir preguntas que atendieran a determinados niveles permite vislumbrar la capacidad de análisis de los estudiantes para determinados conceptos que se asumen deben estar interiorizados por el nivel que se espera en ellos. Se sabe que en un tema pueden aparecer varios conceptos, pero no toda la teoría acerca de estos. Los primeros niveles aludían a los que son importantes para definir la transformada pues aparecen en la definición, pero no se necesita saber toda la información acerca de ellos; las funciones sinusoidales tienen una teoría que las sustenta y más elementos, definiciones que la componen; pero para este caso solo se requería precisar en determinados objetos. De forma análoga sucede con las Series de Fourier, que solamente esta rama de las matemáticas precisa varias aplicaciones y teoremas, pero se enfatiza en lo que se requiere para llegar a la transformada. Los autores consideran que la actividad hubiese sido más provechosa si las preguntas no se hubieran restringido a determinados niveles para su clasificación, pero es una afirmación que debería ser contrastada y no se tienen elementos para ello.

7.3 Conclusiones desde el diseño de la propuesta.

Diseñar una actividad por VH no resultó ser una tarea sencilla y se debe tener en cuenta la estructura misma de la teoría e identificar los elementos que se quieran resaltar de esta. Encontrar una posible secuencia que respete las características de la teoría de los VH es un desafío, pero permite bajo la experiencia de este pilotaje comprender mejor la temática asociada, además de identificar los elementos claves para la comprensión del concepto. El diseño de esta propuesta pone en manifiesto la exigencia del trabajo docente aplicando la didáctica al transformar un concepto formal a otro que el alumno pueda asimilar de mejor manera respetando la formalidad de este.

7.4 ¿Cómo se aplicaría a la Facultad de Ciencia y Tecnología?

La transformada de Fourier aparece como solución a diversos problemas de aplicación de áreas de la física, química, tecnología. Por ello y bajo el pilotaje realizado en la Licenciatura de Matemáticas se propone que la secuencia se mantenga resaltando los elementos que se precisan trabajar en determinadas áreas. En el caso de la Licenciatura se trabajó con los fundamentos puesto que se precisaba priorizar que los estudiantes comprendiesen de donde surge la transformada y el por qué se define como es usual. Se recomienda mantener la estructura de la adaptación de los VH, es decir, manejar una secuencialidad y añadir una actividad final encaminada a la principal aplicación que se le podría dar dentro de otro espacio académico, los procesos de conceptualización o de modelación matemática. Mantener una estructura del modelo que propone los VH, lo cual esto permite identificar el nivel con el que los estudiantes comprenden la temática; para un estudiante que deba realizar alguna aplicación no necesariamente deba encontrarse en un nivel 4 o 5 de VH, pero así mismo quedarse en lo meramente algorítmico.

7.4 Conclusiones generales finales.

Los objetivos que se plantearon al inicio del documento se cumplieron, ya que se diseñó la propuesta y se implementó en el tiempo establecido, además, se abordaron algunos elementos conceptuales útiles para trabajar con la introducción a la TF. La secuencia se creó con los niveles de VH atendiendo a los elementos que se necesarios para abordar esta temática, pero sin entrar en profundización acerca de estos. En las sesiones de clase se presentó la relación entre la serie y la transformada inversa; y la gran mayoría de estudiantes logró identificar el comportamiento que realiza la TF a una función en un nivel intermedio con lo presentado en el análisis de las actividades.

Este trabajo de grado presentó una propuesta de secuencia para introducir la TF, si bien se cometieron errores de supuestos, es una invitación a proponer mejores diseños para abordar temas de carácter universitario, ya que como se mencionó en los antecedentes no se encuentra demasiada documentación para temas de nivel superior, en este caso particular la TF. El diseño por los niveles de VH se toma por ser una teoría que ha funcionado en la geometría y permite clasificar según un nivel a los estudiantes, ayudando así a que comprendan lo que se quiere y puedan ir aumentando su nivel con el paso del tiempo. Mejorar la enseñanza no solamente requiere trabajar desde el nivel escolar, sino también en los niveles universitarios para generar profesionales de calidad.

Se añaden las correcciones pertinentes sugeridas por los jurados.

REFERENCIAS

Acevedo, B. (2006). *Variable Compleja.* Universidad Nacional.

Apostol, T. (1967). *Calculus* (Segunda ed., Vol. I). (F. Velez, Trad.) Barcelona: Reverté.

Bobadilla, J., Gómez , P., & Bernal, J. (1999). *La Transformada de Fourier. Una Visión Pedagógica.* Obtenido de https://www.ub.edu/journalofexperimentalphonetics/pdf-articles/EFE-X-JBobadilla_PGomez_JBernal-FFT_una_vision_pedagogica.pdf

Brousseau, G. (1983). *Les obstacles epistémologiques et ics problémes en mathématiques.* Recherbes es Didactique des Mathématiques 4(2), 165-198.

Castiblanco, A. (2000). Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas. *Memorias segundo encuentro colombiano de matemática educativa.* Valledupar.

Chavarria, N. (20 de febrero de 2020). *Modelo de Van Hiele y niveles de razonamiento geométrico en triángulos en estudiantes de Huancavelica.* Obtenido de https://www.redalyc.org/journal/5860/586063184003/html/#redalyc_586063184003_ref13

Coral Campaña, J. A., León Luquez, J. C., Martinez Saavedra, J. H., Montesalvo Castro, A., & Serrano León, Y. K. (2019). *Errores Matemáticos de los estudiantes de primer semestre de ingeniería en la solución de situasiones de física.* Obtenido de https://repository.ucatolica.edu.co/bitstream/10983/25224/1/42-55%20Errores%20matem%C3%A1ticos%20de%20los%20estudiantes%20de.pdf

Corberan Salvador, R., Gutierrez Rodriguez, Á., Huerta Palau, M., Jaime Pastor, A., Garrigues, M., Peñas Pascual, A., & Ruiz Pérez, E. (1994). *DIseño y Evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en modelo de razonamiento de Van Hiele.* Madrid, España: Centro de publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. Obtenido de https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/CorOtr94.pdf

Diaz Pinzón, J. (diciembre de 2017). *Aprendizaje de las matemáticas con el uso de simulación.* Obtenido de file:///C:/Users/Administrator/Downloads/413755833002.pdf

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*(3), 11-44.

Godino, J. (2006). Presente y futuro de la investigación en didáctica de las matemáticas.

Godino, J. (2010). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientifica.

Grossman, S., & Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal* (Séptima ed.). México: McGrawHill.

Gutierrez, A., & Pastor, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geométria: El modelo de Van Hiele.* Obtenido de https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

Hidalgo, L. (Mayo de 2006). Variable Compleja I. Iztapalapa: Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa.

Hwei, P. (1987). *Análisis de Fourier.* (R. Flórez, Trad.) ADDISON WESLEY.

Jaramillo, C. M., & Pérez, P. (2001). La noción de convergencia de una serie desde la óptica de los nivele de Van Hiele. *Educación Matemática*(13), 68-80.

Kreyszig, E. (2003). *Matemáticas avanzadas para ingeniería* (Vol. 2). Limusa Wiley.

Landa, J., & Sarasusa, J. (2017). Niveles de Razonamiento de Van Hiele para la Transformada de Fourier. En C. Arriaga, & A. Romero (Ed.), *XXIV JORNADAS DE INVESTIGACIÓN EN PSICODIDÁCTICA* (págs. 95-110). Bilbao: Universidad del Pais Vasco.

Larson, R., & Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable* (Novena ed.). (P. Vázquez, Ed., J. Ibarra, Á. Hernández, G. Nagore, & A. Moreno, Trads.) México D.F., México: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA.

Real Academia Española. (2022). *Diccionario de la lengua española*. Obtenido de https://dle.rae.es/tecnolog%C3%ADa

Rodriguez Pérez, E. G. (2015). El concepto de derivada y el modelo de Van Hiele en estudiante sde licencitura en matemáticas e informatica de la Universidad-. *Eco Matemático Journal of Mathematical Sciences*(6), 43-49.

Ruíz, H., Ávila, P., & Villa, J. (2013). Uso de GeoGebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas. *Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro departamental de Matemáticas* (págs. 446-454). Medellín: Fondo Editorial ITM.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable* (Sexta ed.). Cengage Learning.

Stewart, J. (2012). *Precálculo matemáticas para el cálculo.*

Venegas Pérez, M. (Junio de 2015). *Repositorio Unican.* Obtenido de https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6837/VenegasPerezIrene.pdf

Zill, D., & Cullen, M. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera* (Septima ed.). (S. Cervantes, Ed.) Cengage Learning.

ANEXOS

Anexo A:

Primera Actividad Series de Fourier.

Actividad Series de Fourier

Objetivo general de la actividad

Identificar los elementos que componen la serie y transformada de Fourier.

Objetivos específicos

- Reconocer los componentes de una onda sinusoidal.
- Reconocer que T y λ, así como k y ω son análogos, pero no iguales.
- Identificar que efecto tiene la frecuencia sobre la forma de las gráficas de las funciones sinusoidales.
- Reconocer que longitud de onda y periodo no correpsonden a puntos específicos de la gráfica, sino que indican la longtud/ tiempo entre dos valles consecutivos, crestas consecutivas, máximos consecutivos, dos nodos o antinodos no consecutivos, o cualquier otro par de puntos correspondientes.

Recursos

Diapositivas: Transformada de Fourier.

Archivos GeoGebra:

- Segundo Momento.
- Ejemplo Series de Fourier.

Momento 1 (visualización del applet)

Vea el siguiente video: https://youtu.be/g1LCWJSFPeA

Acceda al link https://phet.colorado.edu/es/simulations/fourier-making-waves/about

Verifique que en el simulador se cumplan las siguientes condiciones

- De Clic en la opción de “$discreto$”
- La opción de forma de onda escoja “$sinusoide$”
- La opción de “*Armónicos”*, seleccione “1”
- La opción de “*función de”*, seleccione “$tiempo\ (t)$“
- La opción de series, déjela en términos de “$seno$”
- En “*Ecuación*”, modifíquelo y que quede en términos de “$oculto$”

A continuación, modifique la amplitud del armónico y responda: ¿En que afecta la amplitud a la función? Posteriormente en “*Herramientas de medición*” Active la casilla que dice “*periodo*” y responda. ¿Cuál es el periodo de la onda?

Repita el mismo proceso, pero esta vez en la opción “*Armónicos*” seleccione “2”. ¿Cuál es el periodo de la segunda onda?

Ubíquese en la gráfica que dice “*suma*” y responda

- ¿Cuál es el periodo de la suma de las ondas?
- ¿Cómo cree que afecta las amplitudes a la última onda?

En la opción “*Ecuación*” cambie el valor y seleccione “T**”** e **identifique los elementos que aparecen en ella describiendo que información aporta cada uno**.

Ahora en la sección de “*Controles gráficos*” Seleccione la opción de “*función de*” espacio En *“Herramientas de medición”* seleccione Longitud de onda. Y responda

- Para cada onda que tiene ¿Cuál es su longitud de onda?
- ¿Qué diferencia encuentra entre T y λ? Justifique su respuesta.

En la opción “*Ecuación*” cambie el valor y seleccione “λ”. Responda

- ¿Qué diferencia encuentra conceptualmente en esta ecuación respecto a la ecuación en términos de T? Justifique su respuesta.

Por último, en la opción “*Ecuación*” cambie el valor y seleccione “n”. y en la opción “*función de*” colóquelo nuevamente en “tiempo”. Responda

- ¿A qué hace referencia n? Justifique su respuesta.

- ¿La gráfica de la onda final es periódica? Justifique su respuesta.

Objetivo general de la actividad

Identificar los elementos que componen la serie y transformada de Fourier.

Objetivos específicos

- Reconocer que cada componente de la serie de Fourier corresponde a una onda sinusoidal con la longitud de onda o periodo diferente.
- Identificar las relaciones entre el periodo , la frecuencia y la pulsación.

Momento 2

Abra el archivo GeoGebra que tiene el nombre "**segundo momento**" y se encuentra en el grupo de *Team*s del curso en la sección de archivos, en la carpeta denominada Transformada de Fourier explore el archivo y responda. Recuerde Justificar su respuesta para cada literal.

- ¿Qué sucede si aumenta la frecuencia de la función? y ¿Qué sucede cuando disminuye la frecuencia?

  Para las siguientes preguntas puede ayudarse también del simulador del punto anterior.

- ¿Qué relación encuentra entre ω y T?
- ¿Qué relación encuentra entre $T\ y\ f$?
- ¿Qué relación encuentra entre ω y f?
- ¿Cómo afecta la amplitud a la circunferencia y a la función?
- ¿Cómo determinar la frecuencia de la suma de las funciones?
- ¿Qué es un armónico?

Anexo B:

Segunda Actividad Serie Compleja de Fourier

Actividad 2 Serie Compleja de Fourier

Objetivo general de la actividad

Identificar la relación entre la Serie de Fourier y la Serie compleja de Fourier.

Objetivos específicos

- Identificar el espectro de fecuencias de una función con la serie de Fourier.
- Encontrar la relación entre las funciones seno y coseno, con las funciones exponenciales complejas.

Recursos

Diapositivas: Transformada de Fourier

Archivos GeoGebra: Identidades principales

Primer Punto

Recordemos que la serie de Fourier para la función $f(x) = x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ fue

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n \sin(nx)}{n}$$

Expanda los primeros 5 términos y realice un diagrama en el cual en el eje de las abscisas se ubique la frecuencia de cada función sinusoidal y en las ordenadas la amplitud.

Segundo punto

Calcule el periodo y la frecuencia de la aproximación del punto anterior.

Tercer punto

Con el archivo de GeoGebra llamado "**identidades principales**" responda:

- ¿Cómo se puede escribir el coseno en términos de una exponencial compleja? Justifique su respuesta
- ¿Cómo se puede escribir el seno en términos de una exponencial compleja? Justifique su respuesta

Anexo C

Tercera Actividad: Transformada de Fourier

Actividad 3 Transformada de Fourier

Objetivo general de la actividad

Abordar el concepto de la transformada de Fourier desde la anti transformada de Fourier, realizar el paso de lo discreto a lo continuo e identificar el uso de la trasformada en el aplicativo Audacity.

Objetivos especifícos

- Identificar el uso de la transformada de Fourier.
- Demostrar la relación entre la integral de Fourier y la integral compleja de Fourier

Calcular la transformada de algunas funciones.

Recursos de la actividad.

Archivos GeoGebra: Ejemplo TF.

Diapositivas: Transformada de Fourier

Primer punto

Indique con sus palabras que hace la transformada de Fourier a una función.

Segundo punto

Muestre que a partir de la integral de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} [A_\omega \cos(\omega t) + B_\omega\, sen(\omega t)]d\omega$$

Se puede obtener la integral compleja

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Tercer punto

Calcule la transformada de las siguientes funciones

- $f(t) = \begin{cases} 1 \; si - a < t < a \\ \quad\quad 0 \end{cases}$
- $f(t) = e^{-t^2}$
- $f(t) = \frac{sen(at)}{a}$