ARTICULACIÓN ENTRE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA Y LA GEOMETRÍA SINTÉTICA EN LA SECUNDARIA: UN EJEMPLO DESDE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Jennifer Mariana Barrera Ramírez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, 2020

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

ARTICULACIÓN ENTRE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA Y LA GEOMETRÍA SINTÉTICA EN LA SECUNDARIA: UN EJEMPLO DESDE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Trabajo de grado para optar por el título de Licenciada en Matemáticas

PRESENTA:

Jennifer Mariana Barrera Ramírez

ASESOR:

Óscar Javier Molina Jaime

2020

Bogotá D.C., Colombia

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"ARTICULACIÓN ENTRE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA Y LA GEOMETRÍA SINTÉTICA EN LA SECUNDARIA: UN EJEMPLO DESDE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS"**, elaborado por la estudiante **JENNIFER MARIANA BARRERA RAMÍREZ**, identificada con el Código **2015140007** y Cédula **1023024474**, el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y cuatro (44)** puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas.**

En constancia se firma a los quince (15) días del mes de octubre de 2020.

Dr. ÓSCAR JAVIER MOLINA JAIME
Asesor del Trabajo de grado

Dr.(C) ARMANDO ENRIQUE ECHEVERRY GAITÁN
Jurado del Trabajo de grado

Edgar C Guacaneme S.

Dr. EDGAR ALBERTO GUACANEME SUÁREZ
Jurado del Trabajo de grado

DEDICATORIA

Este trabajo de grado es dedicado especialmente a mi familia y a todas aquellas personas que estuvieron siempre apoyándome y animándome para poder cumplir con esta meta soñada.

A todos infinitas gracias.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, quiero agradecer a Dios por darme salud y licencia para lograr culminar mi carrera profesional.

Infinitas gracias a mi familia y a mi novio, quienes presenciaron cada fase de este proceso y me brindaron su amor y su apoyo en cada momento y cuando más lo necesitaba.

A la Universidad Pedagógica Nacional, por brindarme una de las experiencias más satisfactorias de mi vida y aportar a mi crecimiento personal y profesional.

A todos los profesores de la UPN con quienes logré compartir y son a ejemplo por seguir para mí, especialmente, a los profesores del Departamento de Matemáticas.

A mi asesor, el profesor Óscar Molina, gracias por toda la paciencia y por compartir conmigo un poco de todo su profesionalismo y su conocimiento; gracias, porque sin su apoyo no habría sido posible este logro.

A mis amigos Xiomara, Leidy, Martha, Yesid, César, Nelson y Holman quienes estuvieron acompañándome en el transcurso de esta etapa de mi vida; gracias por su increíble amistad.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS 6

ÍNDICE DE TABLAS 8

RESUMEN 9

INTRODUCCIÓN 10

CAPÍTULO I PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 12

1.1 JUSTIFICACIÓN 12
1.1.1 VÍNCULO ENTRE GEOMETRÍA SINTÉTICA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA: UNA BREVE RESEÑA HISTÓRICA 12
1.1.2 EL ASUNTO PROBLEMÁTICO 15
1.2 OBJETIVOS 18
1.2.1 OBJETIVO GENERAL 18
1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS 18

CAPÍTULO II MARCO DE REFERENCIA 19

2.1 MARCO MATEMÁTICO 19
2.1.1 DE LOS MÉTODOS DE *SÍNTESIS* Y *ANÁLISIS* A LAS GEOMETRÍAS SINTÉTICA Y ANALÍTICA 19
2.1.2 SISTEMA AXIOMÁTICO 21
2.2 MARCO DIDÁCTICO 25
2.2.1 CONCEPTUALIZACIÓN SOBRE TAREA Y SECUENCIA DE TAREAS 25
2.2.2 OBJETOS PRIMARIOS DESDE EL ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA (EOS) 26
2.2.3 LA IMPORTANCIA DE LA TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA 27

CAPÍTULO III 30

METODOLOGÍA 30

CAPÍTULO IV SECUENCIAS DE TAREAS 35

4.1 DESCRIPCIÓN DE LAS SECUENCIAS DE TAREAS 35
4.2 PRIMERA GRAN SECUENCIA: RECTA TANGENTE A CÓNICAS 38

4.2.1 RECTA TANGENTE A UNA PARÁBOLA 39
4.2.1.1 Secuencia para determinar una solución en el dominio de la geometría sintética 39
4.2.1.2 Secuencia para determinar una solución en el dominio de la geometría analítica 59
4.2.1.2.1 Solución sintético-analítica 59
4.2.1.2.2 Solución analítica pura 63
4.2.1.3 Contraste 1: Vínculos entre las soluciones sintética y sintético-analítica 67
4.2.1.4 Contraste 2: Vínculos entre las soluciones sintético-analítica y analítica pura 68
4.2.1.5 Tarea para ejercitar 69
4.2.2 RECTA TANGENTE A UNA ELIPSE 70
4.2.2.1 Secuencia para determinar una solución en el dominio de la geometría sintética 70
4.2.2.2 Secuencia para determinar una solución en el dominio de la geometría analítica 76
4.2.2.2.1 Solución analítica pura 77
4.2.2.2.2 Solución sintético-analítica 79
4.3 SEGUNDA GRAN SECUENCIA: LAS TÉCNICAS ANALÍTICAS COMO DESARROLLO DE LAS TÉCNICAS SINTÉTICAS 81
4.4 CONTRASTE 3: COMPARACIÓN ENTRE LAS DOS GRANDES SECUENCIAS 97

CAPÍTULO V 99

CONCLUSIONES 99

BIBLIOGRAFÍA 103

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.Exposición sintética de los objetos primarios ________________ 32
Figura 2. Organigrama de la primera gran secuencia ________________ 39
Figura 3. Descripción de los requisitos (Tarea 1) ________________ 41
Figura 4. Descripción de las metas (Tarea 1) ________________ 42
Figura 5. Descripción de los requisitos (Tarea 2) ________________ 44
Figura 6. Descripción de las metas (Tarea 2) ________________ 45
Figura 7. Representación discreta (Tarea 2) ________________ 46
Figura 8. Representación continua (Tarea 2) ________________ 47
Figura 9. Descripción de los requisitos (Tarea 3) ________________ 49
Figura 10. Descripción de las metas (Tarea 3) ________________ 50
Figura 11. Propuesta de solución 1 (Tarea 3) ________________ 51
Figura 12. Verificación de la propuesta de solución 1 (Tarea 3) ________________ 51
Figura 13. Propuesta de solución 2 (Tarea 3) ________________ 52
Figura 14. Verificación de la propuesta de solución 2 (Tarea 3) ________________ 52
Figura 15. Propuesta de solución 3 (Tarea 3) ________________ 52
Figura 16. Verificación de la propuesta de solución 3 (Tarea 3) ________________ 52
Figura 17. Propuesta de solución 4 (Tarea 3) ________________ 53
Figura 18. Verificación 1 de la propuesta de solución 4 (Tarea 3) ________________ 52
Figura 19. Verificación 2 de la propuesta de solución 4 (Tarea 3) ________________ 53
Figura 20. Propuesta de solución 5 (Tarea 3) ________________ 53
Figura 21. Verificación 1 de la propuesta de solución 5 (Tarea 3) ________________ 53
Figura 22. Verificación 2 de la propuesta de solución 5 (Tarea 3) ________________ 53
Figura 23. Descripción de los requisitos (Tarea 4) ________________ 55
Figura 24. Descripción de las metas (Tarea 4) ________________ 55
Figura 25. Representación gráfica de solución de la tarea 4 desde un punto de vista de la geometría clásica ________________ 56
Figura 26. Descripción de los requisitos (Tarea 5) ________________ 57
Figura 27. descripción de las metas (Tarea 5) ________________ 58
Figura 28. Descripción de los requisitos (Tarea 6) ________________ 60
Figura 29. Descripción de las metas (Tarea 6) ________________ 61
Figura 30. Descripción de los requisitos (Tarea 6) ________________ 64
Figura 31. Descripción de las metas (Tarea 6) ________________ 64
Figura 32. Modelación en Geogebra (Elipse) ________________ 72
Figura 33. Solución de la tarea 3 (Elipse) ________________ 73
Figura 34. Verificación 1 (solución tarea 3) ________________ 73
Figura 35. Verificación 2 (solución tarea 3) ________________ 73
Figura 36. Representación gráfica de solución de la tarea 4 (Elipse) desde un punto de vista de la geometría clásica ________________ 75

Figura 37. Descripción de los requisitos (Secuencia 1: problemas 1, 2 y 3) ____ *83*
Figura 38. Descripción de las metas (Secuencia 1: problemas 1, 2 y 3) ____ *84*
Figura 39. Método de análisis (problema 1) ____ *85*
Figura 40. Representación gráfica de la solución del problema 1 ____ *86*
Figura 41. Método de análisis (problema 2) ____ *87*
Figura 42. Representación gráfica de la solución del problema 2 ____ *87*
Figura 43. Método de análisis (problema 3) ____ *88*
Figura 44. Representación gráfica de la solución del problema 3 ____ *89*
Figura 45. Descripción de los requisitos (problema 4) ____ *90*
Figura 46. Descripción de las metas (problemas 4) ____ *91*
Figura 47. Método de análisis desde el arrastre (problema 4) ____ *92*
Figura 48.Elección conveniente de los ejes cartesianos ____ *92*
Figura 49. Coordenadas de puntos ____ *93*
Figura 50. Solución desde la geometría analítica (problema 4) ____ *94*
Figura 51. Comparación del método de análisis entre los problemas 3 y 4 ____ *94*
Figura 52. Representación gráfica de la solución del problema 4 ____ *95*
Figura 53. Contraste entre las secuencias 1 y 2 ____ *98*

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Sistema axiomático para la primera gran secuencia ____ *22*
Tabla 2. Sistema axiomático para la segunda gran secuencia ____ *24*
Tabla 3. Tipos de problemas y contenido de las secuencias ____ *31*
Tabla 4. Posibles respuestas e intervención del profesor (Tarea 1) ____ *43*
Tabla 5. Posibles respuestas e intervención del profesor (Tarea2) ____ *46*
Tabla 6. Posibles soluciones y verificación (Tarea 3) ____ *51*
Tabla 7. Conjetura y demostración asociada a la Tarea 3 ____ *54*
Tabla 8. Métodos de análisis y síntesis involucrados en la solución del problema general ____ *56*
Tabla 9. Demostración T. Parábola-Mediatriz-Recta tangente (Geometría sintética). ____ *58*
Tabla 10. Solución sintético-analítica ____ *61*
Tabla 11. Posibles dificultades e intervención del profesor (Tarea 6) ____ *62*
Tabla 12. Solución analítica pura ____ *65*
Tabla 13. Solución tarea 1 (Elipse) ____ *71*
Tabla 14. Solución tarea 2 (Elipse) ____ *72*
Tabla 15. Solución de la Tarea 3 (Elipse) ____ *73*
Tabla 16. Solución de la Tarea 4 (Elipse) ____ *75*
Tabla 17. Demostración (Elipse) ____ *76*
Tabla 18. Solución analítica pura (Elipse) ____ *77*
Tabla 19. Solución sintético-analítica (Elipse) ____ *79*
Tabla 20. Solución de los problemas 1, 2 y 3 ____ *85*
Tabla 21. Posibles dificultades e intervención del profesor (secuencia 1) ____ *89*
Tabla 22. Solución del problema 4 ____ *91*
Tabla 23. Posibles dificultades e intervención del profesor (problema 4) ____ *97*
Tabla 24. Desarrollo y alcance de los objetivos específicos ____ *99*

RESUMEN

Desde un punto de vista curricular (planeado o implementado) se evidencia una desarticulación en el estudio de la geometría sintética (también llamada pura o clásica) y la geometría analítica. En este trabajo se aborda dicha problemática, proponiendo dos grandes secuencias de tareas que intentan poner en juego y favorecer una articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica. Para cada una de las secuencias diseñadas se realiza una descripción (o análisis didáctico *a priori*). Los contenidos sobre los que versan las secuencias se centran en la construcción de una recta tangente a curvas cónicas (primera gran secuencia), y en la construcción de un triángulo con condiciones dadas (segunda gran secuencia). En ese marco, se precisa cómo los métodos de análisis y síntesis, propuestos por Descartes, están presentes en ambas geometrías, y cómo, dependiendo del abordaje de alguna tarea, se evidencia una complementación de la síntesis mediante el análisis o viceversa.

Palabras clave: Geometría sintética, geometría analítica, métodos de análisis y síntesis, secuencia de tareas, descripción de una tarea (o secuencia).

ABSTRACT

From a curricular point of view (planned or implemented) there is a disarticulation in the study of synthetic geometry (also called pure or classical) and analytical geometry. In this paper, this problem is approached by proposing two major sequences of tasks that try to put into play and elicit an articulation between synthetic and analytical geometry. For each of the designed sequences a description (or *a priori* didactic analysis) is made. The contents of the sequences are centered on the construction of a straight-line tangent to conic curves (first large sequence), and on the construction of a triangle with given conditions (second large sequence). Within this scenery, it is specified how the methods of analysis and synthesis, proposed by Descartes, are present in both geometries, and how, depending on the approach to some task, a complementarity of the synthesis through analysis or vice versa is evident.

Keywords: Synthetic geometry, analytical geometry, analysis and synthesis methods, task sequence, description of task.

INTRODUCCIÓN

Existe una desarticulación curricular entre el estudio de la geometría clásica (conocida también como geometría pura o sintética) y la geometría analítica, surgida, entre otras cosas, por un análisis epistemológico superficial que oculta la continuidad y complementariedad que existe entre ambos dominios (Gascón, 2002). Esta idea se ratifica en la propuesta curricular para matemáticas en Colombia. Los Lineamientos Curriculares afirman que hay un detrimento en el estudio de la geometría clásica como consecuencia de la adopción de la matemática moderna (MEN,1998); lo que sugiere un interés que prima los métodos algebraicos o conjuntistas por sobre el método de síntesis. Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas en Colombia, aunque proponen abordar temáticas de la geometría clásica y temáticas de la geometría analítica (MEN, 2006), no logra exponer explícitamente una complementariedad o continuidad entre estas.

Con este trabajo de grado presentamos una propuesta didáctica que pretende abordar la problemática antes planteada. De manera más específica, exponemos la descripción de secuencias de tareas que apuntan a explicitar posibles continuidades o complementariedades entre las geometrías clásica y analítica; en ese contexto, mostrar cómo los métodos de análisis y síntesis están presentes en ambos dominios.

Para llevar a cabo lo anterior, hemos dispuesto que el trabajo se componga de cinco capítulos: en el primero, se presenta la justificación y el planteamiento del problema; en esta sección presentamos el nexo que existe entre la geometría clásica y la geometría analítica tomando como referencia un punto de vista histórico, y que, curricularmente, podría ser explotado para procesos de enseñanza. Además, exponemos con cierto detalle el asunto problemático que se pretende abordar en el trabajo y los objetivos de este.

En el segundo capítulo, exponemos el marco de referencia usado para soportar el trabajo. Este se compone de un marco matemático y un marco didáctico. En el primero, presentamos el sistema teórico geométrico tenido en cuenta para el diseño de las secuencias de tareas, y una descripción de los métodos de *análisis* y *síntesis* propuestos por Descartes. En el segundo, exponemos tres aspectos claves para el desarrollo de este trabajo: (i) caracterización de tarea y secuencias de tareas, (ii) descripción de los objetos matemáticos primarios que propone el Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) y (iii) la importancia del uso de un software de geometría dinámica para resolver problemas geométricos.

En el tercer capítulo, describimos la metodología llevada a cabo para este trabajo; de manera específica, exponemos las fases llevadas a cabos para su desarrollo: la primera fase consiste en la construcción de un marco de referencia; la segunda, en precisar los tipos de problemas que configuran las secuencias de tareas; la tercera, en la descripción de cómo se llevó cabo el diseño de las secuencias de tareas, tomando como referencia la propuesta de Gómez, Mora y Velasco (2018); la cuarta, en la descripción de los vínculos existentes entre las geometrías clásica y analítica surgidas de las secuencias; y la quinta fase, consiste en la presentación de las conclusiones.

En el cuarto capítulo se presenta la descripción (o análisis didáctico *a priori*) de dos secuencias de tareas, teniendo en cuenta dos tipos de problemas: el primero, muestra una situación que, al ser abordada desde la geometría clásica-sintética, proporciona una base para su abordaje desde la geometría analítica. El segundo, presenta una situación que puede ser abordada desde la geometría clásica, pero que, al ir modificando el enunciado, surge la necesidad de emplear técnicas propias de la geometría analítica para dar solución al problema desde la geometría clásica-sintética. Estos dos tipos de problemas dan lugar a dos grandes secuencias que describimos: la primera secuencia (compuesta de 6 tareas) se centra en determinar la recta tangente a curva cónicas (parábola, circunferencia, elipse e hipérbola); la segunda secuencia (compuesta de 2 tareas), consiste en desarrollar la propuesta de Gascón (2002) la cual se basa en abordar problemas de construcción de un triángulo con condiciones dadas. Cada secuencia se describe a la luz de los siete elementos que proponen Gómez, Mora y Velasco (2018) necesarios para el diseño de tareas: los requisitos, las metas, la formulación de la tarea, los materiales y recursos, el agrupamiento, la interacción y la temporalidad. Además, para la descripción de los requisitos y las metas tuvimos en cuenta los objetos matemáticos primarios del EOS. Cabe aclarar para el diseño de cada secuencia, tuvimos el interés de involucrar deliberadamente el uso de un software de geometría dinámica.

Finalmente, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones que surgen de este trabajo de grado. Para ello, tuvimos en cuenta el logro de los objetivos, algunas limitaciones del estudio, y los aprendizajes, como futura Licenciada en Matemáticas, que provocó a la autora el desarrollo del trabajo.

CAPÍTULO I
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 JUSTIFICACIÓN

El trabajo de grado se fundamenta sobre el principio de que es necesario estudiar, en la matemática escolar, la Geometría Clásica y la Geometría Analítica de una manera no disyunta. Como presentamos en la Introducción, este es un principio que no se tiene en cuenta en los currículos escolares (ya sea desde lo postulado en los documentos institucionales, desde la implementación en el aula o desde lo reportado en la literatura especializada). Para intentar dar cuenta de la importancia de este principio, en primera instancia presentamos una breve reseña histórica que expone el vínculo existente entre ambas geometrías; en segunda instancia, mostramos un panorama de estudios que resaltan la importancia de abarcar curricularmente estas geometrías de manera articulada.

Una vez expuestas las dos perspectivas anteriores que justifican nuestro estudio, presentamos las preguntas que lo orientaron y describimos los objetivos de este.

1.1.1 Vínculo entre geometría sintética y geometría analítica: una breve reseña histórica

Los primeros indicios sobre la geometría clásica (también denominada geometría sintética o pura) provienen de la época prehistórica (antes del año 3000 a.C.); en aquella época el interés del hombre por las relaciones espaciales pudo haberse impulsado tanto por las necesidades prácticas de la construcción, como por un sentido estético de diseño y orden; sus intereses por asuntos relativos a la Geometría se centraban en aspectos meramente prácticos. Tres civilizaciones occidentales se destacaron por sus acercamientos a la Aritmética y la Geometría, la egipcia (3000 a.C. - 30 a.C.), la babilónica (1793 a.C.- 1595 a.C.) y la griega (1200 a.C. - 146 a.C.). En las civilizaciones egipcia y babilónica, la geometría clásica se centró en el cálculo del área y perímetro producto de las necesidades prácticas, con una separación de la aritmética difusa y sin tener interés alguno por explicar por qué funcionan sus procedimientos (Kline, 1972). En contraste, el enfoque geométrico de los griegos consistió en estudiar la naturaleza y la razón de ser de los procedimientos sugeridos por las otras civilizaciones. Por ejemplo, Thales de Mileto (640-535 a.C.) fue un matemático reconocido como el padre de la organización deductiva de la geometría clásica. Por su lado, Aristóteles (384-322 a.C.) fue un importante promotor del desarrollo de la matemática, producto de la fundamentación de la lógica. Estos dos casos ilustran dos razones que llevaron a transformar un enfoque empirista –que caracterizó a las civilizaciones prehelénicas– a uno hipotético deductivo–que caracteriza el pensamiento griego– (Boyer, 1986).Se admite, entonces, que los griegos fueron quienes propusieron la estructura lógica tanto de las matemáticas en general, como de la geometría clásica en particular (Kline, 1972).

Dentro de los Egipcios, vale la pena destacar a los alejandrinos. El interés demostrativo y generalizador de los griegos fue fundamental para que su geometría se fundamentara en la lógica, y fuese sistemática y abstracta (Kline, 1972). Euclides (325-254 a.C.) y Apolonio (262-

190 a.C.) fueron los geómetras alejandrinos más destacados. Por un lado, Euclides se destacó por su capacidad pedagógica y su habilidad expositiva, rasgos característicos de su obra Elementos. Dicha obra abarcaba a la matemática elemental: la Aritmética (asuntos de teoría de números y aritmética superior), la Geometría sintética (de puntos, rectas, planos, círculos y esferas) y el álgebra (asociado a lo geométrico). Por otro lado, Apolonio de Perga se reconoció por su obra sobre las secciones cónicas en la cual realizó un estudio utilizando como herramienta las proporciones. Vale comentar que los métodos utilizados por Apolonio (basados en el uso de rectas como sistemas de referencia) son muy parecidos a los utilizados por Descartes en su Geometría, razón por la cual se le considera como un precursor de la Geometría Analítica actual.

La insistencia en la deducción como método de demostración y la preferencia por lo abstracto en oposición a lo concreto (sugerida por los trabajos de Euclides y Apolonio) determinaron el carácter de las matemáticas posteriores, de manera que la selección de un conjunto de axiomas provechosa, aceptable y la demostración de cientos de teorema pusieron en marcha esta ciencia (Kline, 1972). No obstante, en la Edad Media (desde el Siglo V al Siglo XV) se vislumbraron varias limitaciones de la hegemonía hipotético-deductiva de la Geometría para el desarrollo de las matemáticas. Una de las limitaciones fue la imposibilidad de definir y aceptar a los irracionales como números, lo cual forzó una distinción entre número y magnitud; esto no solo significó una restricción de la Aritmética y el Álgebra, sino que indujo a pensar que solo el pensamiento geométrico ofrecía un fundamento seguro al estudio de magnitudes. Cabe indicar que con el abordaje del número irracional el Álgebra se ampliaría, pues en vez de regresar a la geometría para resolver ecuaciones cuadráticas (o de otro tipo) que pudieran tener raíces irracionales, estos asuntos se podrían abordar en términos numéricos y, de esta manera, el Álgebra se desarrollaría (Kline, 1972). A manera de ejemplo, los trabajos de Al-Khwarizmi (780-850) presentan una exposición directa, elemental y sistemática de la resolución de ecuaciones, especialmente de segundo grado. En sus estudios se revelan elementos geométricos, especialmente con el álgebra geométrica (análoga a la presente en la obra Elementos), lo cual revela que tenía muchos aspectos en común con la geometría griega.

Ya en la Edad Moderna, (Siglo XVI – Siglo XVII) es claro que el Álgebra se impuso sobre las limitaciones del pensamiento geométrico y por ello, los estudios en la matemática hasta el siglo XV se centraron especialmente en el Álgebra (particularmente en la resolución de ecuaciones) y también en la complejización y la rigurosidad para determinar la validez de resultados. El trabajo de Viète (1540-1603) fue clave para el desarrollo posterior de las matemáticas por sus contribuciones al Álgebra, a la Aritmética, a la Trigonometría y a la Geometría. Él propuso utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone desconocida o indeterminada y una constante para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado. Con estos principios, hace estudios con los cuales aborda problemas de construcciones geométricas, mediante un proceso que denomina *Arte Analítica*, lo cual fue la motivación de muchos de los desarrollos algebraicos. Este fue de hecho el punto de partida del pensamiento de Descartes (1596-1650) y Fermat (1607-1665) sobre la Geometría Analítica (Boyer, 1986).

La obra de Viète presenta una forma distinta de pensamiento predominante hasta aquella época: La concepción clásica de matriz griega, se fundamenta en la *síntesis* de la actividad matemática, es decir, en el proceso que desde los primeros principios llega a probar un nuevo resultado por vía deductiva; la propuesta alternativa de Viète (que bien podría tener orígenes en los trabajos de Apolonio, Pappus y Arquímedes) propone la resolución de problemas matemáticos fundamentado en un procedimiento de exploración o de *análisis* (soportado por su nuevo lenguaje) que parte del supuesto de que esté dado aquello que se busca determinar y proceder a examinar lo que se puede deducir de ello. Este cambio de pensamiento permitió el desarrollo de la Geometría Analítica en manos de Descartes y Fermat, principalmente.

La obra de Descartes suele describirse como la simple aplicación del Álgebra a la Geometría, pero también puede describirse como la traducción de las operaciones algebraicas al lenguaje de la geometría. Este método tiene dos objetivos, el primero es liberar en lo posible a la geometría del uso de las figuras, a través de los métodos algebraicos, y el segundo darles un significado concreto a las operaciones del Álgebra por medio de su interpretación geométrica (Boyer, 1986). Por su lado, la obra de Fermat tiene como propósito inaugurar un estudio general de los lugares geométricos que los griegos no habían llegado a hacer, algunas de sus aportaciones fueron así el Cálculo, la construcción de tangentes y la obtención de máximos y mínimos. Su mayor aporte está en su libro *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge,* en el cual habla de su búsqueda de métodos universales para los problemas de curvas, usando técnicas que hoy día forman parte de la Geometría Analítica. Fermat toma varias ideas de Viète, como la representación de números con una letra. (Kline, 1972).

En definitiva, se puede decir que los trabajos de Descartes y Fermat abrieron el camino para un estudio sistemático de nuevas curvas. La representación algebraica de las curvas permitió la rápida y sencilla formulación de multitud de problemas de áreas, volúmenes, rectificaciones, centros de gravedad, máximos y mínimos, tangentes, etc., que dieron lugar a la aparición de diferentes técnicas diseñadas para resolverlos y sortear los problemas concretos que presentaba cada caso particular. La aparición de la geometría analítica supuso inmediatamente el aumento de las curvas consideradas por los matemáticos, dada la mayor facilidad para definirlas usando ecuaciones en vez de usar propiedades meramente geométricas. No obstante, la Geometría Analítica de Descartes y Fermat presenta diferencias, una de las cuales (quizá la más relevante) es que, mientras Descartes empieza con la curva correspondiente a un lugar geométrico de la que deriva la ecuación del lugar, Fermat inversamente parte de una ecuación algebraica de la que deriva la curva correspondiente (Ayerbe, 1980).

En los párrafos anteriores, se evidencian dos tendencias en la matemática del Siglo XVII que estimularon el surgimiento y crecimiento de la Geometría Analítica para los siglos posteriores. La primera fue un creciente interés en el estudio de las curvas, lo que resulta producto de (i) la recuperación por parte de varios autores (Viète, por ejemplo) de trabajos clásicos como los de Apolonio, Arquímedes y Pappus, y (ii) la creciente importancia de las curvas en campos aplicados como la Astronomía, la Mecánica, la Óptica y la Estereometría; y la segunda fue la aparición y masificación de la práctica algebraica fundamentada por Viète, y desarrollada por Descartes y Fermat que se convirtió en una poderosa herramienta matemática basada en el análisis para abordar problemas.

1.1.2 El asunto problemático

Este recuento histórico sucinto que se ha presentado permite reconocer la estrecha relación entre la Geometría Clásica y la Geometría Analítica, ya que la primera junto con el Álgebra da origen a la segunda. En consecuencia, posibilita tener un fundamento histórico para reconsiderar la posibilidad de una enseñanza conjunta de las Geometrías Clásica y Analítica en la básica media y secundaria; evidentemente, la Geometría Analítica no podría haberse gestado separadamente de la Geometría Clásica; y como consecuencia, una enseñanza disyunta podría carecer de sentido (Colombo, Llanos, Otero, 2016).

En Colombia, por ejemplo, los Lineamientos Curriculares reconocen que la Geometría Sintética se ha visto abandonada como consecuencia de la adopción de la matemática moderna (MEN, 1998). Gascón (2003) postula que la enseñanza de la geometría en la escuela secundaria está arraigada al problema del "*autismo temático*" o del "*encierro de temas*", por parte de la institución escolar y del profesor, lo que hace consecuente que no solo haya desaparecido la razón de ser de las cuestiones que se estudian a nivel temático, sino también la razón de ser de la geometría. En estas condiciones, el autismo temático hace que sea muy difícil construir en Secundaria una cadena de niveles de organización que, partiendo del nivel disciplinar, desemboque en cuestiones que requieran la integración efectiva de técnicas geométricas analítico-sintéticas; razón por la cual es altamente improbable que pueda accederse al estudio de este tipo de cuestiones. Un aspecto que acrecienta el *autismo temático* consiste en la presión curricular a la que se enfrenta un profesor por terminar el programa de estudios o currículo con el menor recorte posible de temas; esto conlleva a que los contenidos sean muchas veces abordados de manera superficial sin precisar posibles relaciones entre ellos.

Esta desconexión curricular ha provocado una separación radical entre la geometría sintética y la geometría analítica. En Colombia, por ejemplo, al observar documentos institucionales, como los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM), se evidencia que, curricularmente, se propone abordar la geometría sintética desde primer grado hasta noveno, y la geometría analítica en los grados décimo y once (MEN, 2006); esta organización induce una separación curricular entre ellas, ilustrando así, del autismo del cual habla Gascón (2003). Además, nuestra experiencia como estudiantes y docentes en formación, a lo largo de las prácticas realizadas, tanto en colegios públicos como privados, ratifica tal desarticulación. Con este panorama, se identifican investigaciones que manifiestan la necesidad de revalorizar la enseñanza de la geometría en la escuela secundaria (Gascón , 2002; Lorenzo, 1980; Sgreccia y Massa, 2012), proponiendo aproximaciones que apunten al rescate de la articulación entre los dos dominios en cuestión. Gascón (2002, pág. 24) por ejemplo, propone lo siguiente:

> En lugar de "dejar morir" la problemática que se estudia en cursos previos, y crear una pseudoproblemática geométrica con ejercicios bastante formales para intentar justificar la utilización de las incipientes técnicas

> analíticas introducidas artificialmente como objetos de enseñanza, deberían retomarse en cursos posteriores algunos tipos de problemas que sean abordados antes. Se podría empezar mostrando, en el Bachillerato, determinadas limitaciones de las técnicas sintéticas clásicas que pueden solventarse mediante el uso de técnicas analíticas. Sólo así podría mostrarse la continuidad de la problemática geométrica y la complementariedad entre los diferentes tipos de técnicas geométricas.

Con base en las anteriores ideas, un asunto de interés para la comunidad académica, y que se abordara con este trabajo de grado, se puede sintetizar en la siguiente pregunta: ¿*Cómo lograr una articulación entre la geometría analítica y la geometría sintética para el abordaje de ciertos contenidos de la matemática escolar*? Consideramos que una manera de abordar esta pregunta es a través de proposición y resolución de problemas en contextos matemáticos que, tal como propone Gascón (2002), permitan una complementariedad o sinergia de contenidos (o técnicas) entre ambos contextos. Pero ¿*cuáles podrían ser ejemplos de problemas que satisfagan tales condiciones*? ¿*De qué complementariedades o sinergias estamos hablando*? ¿*Cuál es el potencial de articular estas dos formas de abordar la geometría mediante la solución de problemas*?

Un primer acercamiento de respuesta a estas preguntas consiste en el diseño y resolución de algunos problemas usuales de la geometría sintética que podrían abordarse con cierta profundidad estableciendo una conexión con la geometría analítica; en este contexto, es plausible la planeación de secuencias de tareas por medio de las cuales se evidencien y estudien algunas limitaciones de las técnicas sintéticas clásicas que pueden solventarse a través del uso de técnicas analíticas (Gascón , 2002). De manera recíproca, es posible diseñar tareas que favorezca el proceso de traducir problemas de geometría analítica al ámbito de la geometría sintética de forma tal que estos puedan ser resueltos mediante técnicas sintéticas; de esta forma los aprendizajes relativos a la geometría analítica mejoran significativamente en tanto, por ejemplo, las técnicas analíticas adquieren un sentido más claro en términos de su necesidad para simplificar soluciones o decantar alternativas de solución al mismo (Gascón, 1989).

Además, son precisamente las limitaciones de las técnicas sintéticas las que dan sentido (son las razones de ser) a las técnicas analíticas. En otros términos, las técnicas de la geometría analítica constituyen la respuesta a algunas de las limitaciones que presentan las técnicas sintéticas para resolver problemas genuinamente geométricos planteados sin utilizar coordenadas. También puede demostrarse, recíprocamente, que las técnicas analíticas requieren en muchas ocasiones, de manera casi imprescindible, el uso previo de ciertas técnicas sintéticas que son las que sugieren el diseño de la estrategia que se llevará a cabo posteriormente con las técnicas analíticas. Se cierra así el círculo de la complementariedad entre ambos tipos de técnicas (Gascón, 2003).

Un ejemplo de este segundo aspecto de la complementariedad entre técnicas sintéticas y técnicas analíticas puede enunciarse en los siguientes términos: la eficacia para resolver ciertos tipos de problemas de geometría analítica (en términos de porcentaje de problemas correctamente planteados y resueltos) mejora de forma muy significativa si, en lugar de dedicar todo el periodo de entrenamiento al uso de técnicas analíticas, se utiliza una parte del mismo para que los alumnos aprendan a traducir los problemas de geometría analítica (dados en versión cartesiana) al ámbito de la geometría sintética (en versión euclidiana) y a resolver estos mediante técnicas "puramente sintéticas" como, por ejemplo, con regla y compás.

En otras palabras, centrarse en el uso de situaciones-problemas durante procesos de enseñanza-aprendizaje como detonador de la actividad matemática, se convierte en una estrategia relativamente fiable que permite dar sentido a técnicas y teorías matemáticas (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014), en este caso, en el marco de la geometría. La implementación de dicha estrategia trae consigo un principio según el cual la resolución de problemas no solo se considera como una fase de aplicación de contenidos sino como fase de exploración y conjeturación a través de la cual, los estudiantes descubren y reinventan/resignifican/multisignifican las matemáticas (Molina y Samper, 2018).

De manera más general, considerar la perspectiva de resolución de problemas (en este caso de contexto meramente geométrico) se fundamenta desde dos escenarios: por un lado, resolver situaciones problemas usando modelos o representaciones geométricas de diversa índole (sintética o analítica), permite la integración o articulación de pensamientos como el variacional, el métrico y el espacial. A su vez, favorece la emergencia de procesos tales como visualización, demostración, conjeturación, argumentación, exploración, construcción, etc., decantando sus especificaciones para cada uno de los pensamientos (MEN, 2006). Por otro lado, algunos investigadores holandeses del Instituto Freudenthal, consideran la importancia de las situaciones problema como contexto y mencionan, entre otras, las siguientes razones: los estudiantes pueden ver la importancia de otros tópicos de las matemáticas, desarrollar una actitud crítica y reflexiva, pueden despertar la creatividad e impulsarlos a emplear estrategias de solución (MEN, 1998).

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, se propone, diseñar una secuencia didáctica sustentada en un análisis de didáctico riguroso *a priori*, que permite decantar tanto el potencial de abordar problemas geométricos desde diferentes puntos de vista: geometría sintética y geometría analítica, como el potencial que se tiene cuando estos se articulan. Para este diseño, consideraremos el uso de software de geometría dinámica, pues, el uso de recursos materiales y tecnológicos son un componente clave en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino J. , 2002); además, es reconocido que el apoyo que este tipo de materiales provee el desarrollo de procesos matemáticos como la visualización, exploración, conjeturación y argumentación (Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti y Stevenson, 2012; Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002; Camargo, Samper, Perry, Molina y Echeverry, 2009; Mariotti, 2009; Molina y Samper, 2018; Samper, Perry, Camargo, Molina y Echeverry, 2010).

Por último, para explicitar los vínculos existentes entre las geometrías sintética y analítica y mostrar su articulación, se tomarán como referencia los objetos matemáticos primarios propuestos en el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) sobre el conocimiento e instrucción matemática que proponen Godino, Batanero y Font (2007)

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo general

Diseñar una secuencia didáctica que favorezca la articulación de la geometría clásica-sintética y la geometría analítica.

1.2.2 Objetivos específicos

1. Identificar y proponer problemas que se puedan abordar desde distintas perspectivas (geometría analítica, geometría clásica-sintética) en la matemática escolar.

2. Diseñar secuencias de tareas, que contengan los problemas indicados en el objetivo específico 1, que permitan decantar articulaciones entre la Geometría Clásica-Sintética y la Geometría Analítica.

3. Hacer un análisis didáctico *a priori* de la secuencia de tareas diseñada, de forma tal que se logre identificar su potencial para precisar maneras de articulación entre la Geometría Clásica- Sintética y la Geometría analítica en el currículo escolar.

CAPÍTULO II
MARCO DE REFERENCIA

Este capítulo está constituido por dos secciones. La primera sección, corresponde a los referentes de orden matemático, en la cual se especifican dos aspectos importantes que se tendrán en cuenta para el desarrollo de este trabajo: en el primero, se presenta una descripción de los métodos de análisis y síntesis y su relación con las geometrías analítica y sintética; y en el segundo, se describe, *grosso modo*, el sistema axiomático geométrico al cual se aludirá en las secuencias de tareas.

La segunda sección, corresponde a los referentes conceptuales de orden didáctico; en esta se explican tres apartados que son fundamentales para este trabajo: en el primero, se hace una conceptualización de tarea y secuencia de tareas; en el segundo, una descripción de los objetos matemáticos primarios del Enfoque Onto-Semiótico (EOS); y en el tercero, se expresa la importancia del uso de un software de geometría dinámica en la resolución de problemas geométricos.

2.1 MARCO MATEMÁTICO

En este marco matemático, por un lado, se especifica en qué consisten los métodos de análisis y síntesis y cuál es la relación de estos con las geometrías analítica y sintética, tomando como referencia lo propuesto por González (2004) y Raftopoulos (2002); por otro lado, se presenta la descripción general del sistema axiomático tanto de la geometría pura como el de la geometría analítica que se va a ir construyendo con base en las secuencias de tareas y que se presentará a lo largo del Capítulo IV.

2.1.1 De los métodos de *síntesis* y *análisis* a las geometrías sintética[1] y analítica

Dada la naturaleza de este trabajo, la cual consiste en presentar secuencias de tareas que relacionen y articulen la geometría analítica con la geometría sintética, es necesario destacar cómo los métodos de análisis y síntesis se involucran en la resolución de problemas geométricos. Es preciso, entonces, describir en qué consisten dichos métodos y cuál es su relación con las geometrías sintética y analítica; esta sección se encarga de tal descripción. Para ello, se partirá de lo propuesto por González (2004), quien hace un estudio crítico y riguroso de la obra cumbre *La Geometría* de Descartes; así mismo, para ilustrar el trabajo de Descartes, se toma un apartado de lo propuesto por Raftopoulos (2002, págs. 268-273).

Como se explicó en la sección 1.1.2. (Capítulo I), es Descartes uno de los principales exponentes de la geometría analítica como una potente herramienta alternativa para abordar problemas geométricos, pues, bajo la inspiración de Viète, utiliza el Álgebra como un fuerte instrumento algorítmico y el *análisis* como método procedimental. Pero, se hace necesario,

[1] También llamada *geometría sintética o pura* en la cual prima el lenguaje euclidiano y hilbertiano.

especificar cómo Descartes se percató y llegó a usar dichas herramientas para la creación de la geometría analítica, a partir del estudio de la geometría sintética griega.

Según explica González (2004), en la obra *La Geometría*, se especifica que Descartes inició sus estudios con la lectura crítica de las obras clásicas de la geometría sintética de los griegos, quienes establecieron un ejemplo de exposición y demostración de proposiciones (bien sea relativas a problemas o a propiedades), dejando de lado la exposición de la investigación que hacían para dar solución a un problema. Por ello, Descartes se preguntaba acerca de cómo los griegos llegaban a sus impresionantes resultados; fue con el estudio que él hizo de los trabajos de Pappus que se percató de los métodos usados por los griegos para tal fin.

Pappus seguía los principios de Platón; esto es, usaba los métodos de *síntesis* y *análisis* descritos como una manera pedagógicamente conveniente para la resolución de proposiciones (propiedades o problemas). Dicha manera postulaba que, para comprobar la validez de un teorema, se procede primero usando el método de *análisis,* asumiendo que el teorema es verdadero y tras construir una serie de implicaciones lógicas, la conclusión alcanzada resulta ser verdadera o falsa; si es falsa, se refuta el teorema por reducción al absurdo obteniendo que el teorema es inválido; pero si la premisa obtenida a través del método de *análisis* es válida, esta no dice nada acerca del teorema, a no ser que se pueda dar la vuelta a la serie de inferencias halladas, haciendo uso del método de *síntesis*, para construir, finalmente, una prueba auténtica del teorema que se quería demostrar. Dicho en otras palabras, el *análisis* resulta ser un método que parte de suponer el problema resuelto, para descubrir las condiciones que son necesarias para resolver un problema, y la *síntesis* resulta ser el proceso de devolución que hay que hacer para determinar una cadena de inferencias que constituyen la solución hipotético-deductiva del problema.

Descartes, al estudiar los trabajos de Pappus, se percata de que los métodos de *análisis* y *síntesis* intervenían en lo que realizaban los griegos en la geometría sintética y así, hereda este método procedimental para el progreso de las matemáticas y el desarrollo de la Geometría Analítica, junto con la consideración del Álgebra. Al introducir esta forma de establecer soluciones, Descartes logró enfrentar y resolver problemas geométricos griegos que se habían abordado, pero no solucionado hasta entonces, superando las limitaciones existentes y liberando a la Geometría de la dependencia de sistemas exclusivamente geométricos. Por ejemplo, en el libro III de *La Géometrie*, Descartes se dedicó a resolver problemas de construcciones geométricas que, al ser formuladas algebraicamente, dan lugar a determinadas ecuaciones que dibujaban una curva. Uno de aquellos problemas se centraba en construir las dos medias proporcionales entre dos cantidades a y q. El caso particular $q = 2a$ fue abordado por los griegos clásicos dada su importancia en el problema de la duplicación del cubo. Descartes aborda este problema y describe que, la parábola resultante no puede ser construida con regla y compás sino punto a punto y por ello, se debe utilizar la ecuación para dibujar la curva exactamente. Con ello, se evidencia que la idea de los griegos de que solo son legítimas las curvas construibles con regla y compás, se constituye en una limitación de la geometría griega que dejó varios problemas sin resolver, como: probar la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo los cuales fueron abordados por Descartes proponiendo nuevas curvas generadas por construcciones mecánicas. Así, Descartes propuso romper con la tradición griega e implementar su metodología que radicaba en la aplicación del álgebra a la geometría junto con su método de *análisis* y *síntesis* (Kline, 1972).

En la segunda parte de *El Discurso del Método*¸ Descartes reformula este método en cinco reglas (Raftopoulos, 2002, págs. 268-273), que se presentan a continuación:

1. No considerar nada como verdadero si no se tiene conocimiento evidente de su verdad
2. Regla del *análisis*: Dividir cada una de las dificultades que examine, en la mayor cantidad de partes posibles y necesarias para resolverlas mejor.
3. Regla de la *síntesis:* Dirigir los pensamientos de manera ordenada, comenzando con los objetos más simples y fáciles de conocer para ascender poco a poco, paso a paso, al conocimiento más complejo y, suponiendo un orden incluso en los objetos que no tienen un orden natural de procedencia.
4. Hacer enumeraciones tan completas, que se podría estar seguro de no olvidar nada.
5. Todo el método consiste plenamente en ordenar y organizar los objetos más relevantes para probar una proposición.

Para seguir este método exactamente, primero se reducen las proposiciones complicadas y oscuras, paso a paso, a las más simples, y luego, comenzando con la intuición, de las más simples, trataremos de ascender a través de los mismos pasos para conocer todo lo demás.

En conclusión, los métodos de análisis y síntesis intervienen en el desarrollo de las geometrías sintética y analítica, por medio del abordaje de problemas geométricos en la antigua Grecia y el desenvolvimiento de la geometría analítica de Descartes, respectivamente.

2.1.2 Sistema axiomático

En este trabajo se presentarán dos secuencias de tareas en las cuales se abordarán problemas propios de la geometría. Al describir y abordar las secuencias de tareas y, precisamente, cada tarea (en el Capítulo IV), van a ir surgiendo definiciones, teoremas y postulados a partir de los conocimientos previos de los estudiantes o de la introducción de nuevos conocimientos. Dos dominios son los tenidos en cuenta para establecer el sistema axiomático dentro de los cuales se involucran tales elementos, la geometría euclidiana clásica y la geometría analítica; para ambos casos, tendremos en cuenta el modelo métrico de la geometría euclidiana propuesto por Birkhoff (1932); específicamente, en lo que respecta al dominio de la Geometría Analítica, tendremos en cuenta la propuesta de Lehmann (1989).

En las tablas 1 y 2, se presentan los enunciados de las definiciones, teoremas y postulados tanto de la Geometría Sintética-Clásica como de la Geometría Analítica a los cuales se hará referencia en cada secuencia de tareas (en el Capítulo IV), cuando sea menester hacerlo[2].

[2] Para los enunciados de los elementos teóricos, se usará "D." para indicar "Definición", "T." para indicar "Teorema" y "P." para indicar "Postulado"

Tabla 1. Sistema axiomático para la primera gran secuencia

SISTEMA AXIOMÁTICO DE LA GEOMETRÍA SINTÉTICA-CLÁSICA

Definiciones

D. Parábola: Dados un punto F y una recta *l*. El lugar geométrico de todos los puntos P tales que $PF = d(P, l)$ se denomina parábola.

Caracterización de recta tangente: La recta tangente a una curva, debe intersecar al objeto en un único punto. Para el caso de la parábola esa recta no puede ser paralela a su eje

D. Elementos de Parábola: Al punto F se le denomina foco y a la recta d la directriz de la parábola ($\wp$). La recta *s* perpendicular a *d* por *F* se denomina eje de la parábola. El punto *V* de intersección entre *s* y $\wp$ se denomina vértice de la parábola. Sea *t* la recta perpendicular a *s* por *F*; sean *B* y *B*' los puntos de intersección de *t* con $\wp$, $\overline{BB'}$ se denomina lado recto de $\wp$.

D. 2 de Parábola: Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.

D. Distancia de un punto a una recta: Dados una recta m y un punto P, tal que $P \notin m$. Sea $\overleftrightarrow{PQ} \perp m$ y $Q \in m$. PQ es la distancia del punto P a la recta m

Definición de envolvente: Una familia de curvas posee una *envolvente*, si cada curva de la familia es tangente a la envolvente. Y recíprocamente, cada punto de la envolvente es tangente a una curva de la familia.

D. Intersección de conjuntos: Si A y B son conjuntos, definimos su *intersección* (notada $A \cap B$) como el conjunto constituido por todos aquellos elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B. $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

D. Mediatriz: La mediatriz de un segmento en el conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento. Por ejemplo, la mediatriz del $\overline{PQ}$ se denota $\mathcal{M}_{\overline{PQ}}$

D. recta secante: Una recta es secante a una curva, si esta interseca a la curva en dos puntos

D. Triángulo: Si *A*, *B* y C son puntos no colineales, entonces la unión de los segmentos que determinan dichos puntos es un triángulo.

D. Segmentos congruentes: Sean $\overline{PQ}$ y $\overline{AB}$; si $PQ = AB$ entonces $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$

D. Triángulo isósceles: Un triángulo es isósceles si dos de sus lados son congruentes

D. perpendicularidad: Dos rectas son perpendiculares i y solo si determinan un ángulo recto

Principio de reducción al absurdo (P.R.A): Es un método de demostración, en matemáticas, en la cual se parte de la negación de la tesis y, mediante una concatenación de inferencias lógicas válidas, se pretende llegar a una contradicción, a un absurdo. De esta manera, se concluye que la negación de la tesis es falsa y se valida como verdadera la tesis.

D. Punto en el interior de una circunferencia: Sea $\odot F_{1_r}$ con centro en F_1 y radio *r;* sea *F* punto tal que $F \in int \odot F_{1_r}$ y *A* punto tal que $A \in \odot F_{1_r}$. Entonces $F_1F < F_1A$

D. Mayor que: Sean *a*, *b* y *c* números reales; si $a + b = c$ entonces $c > a$ y $c > b$

D. Interestancia: $X - Y - Z$ si: (i) X, Y, Z son colineales y (ii) $XZ = XY + YZ$

D. Radio: Es cualquier segmento cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto que pertenece a ella.

D. Elipse: Dados dos puntos *F* y *F*' y un número positivo *k*. El lugar geométrico de todos los puntos *P* tales que *PF* + *PF*' = *k* se denomina *elipse*.

Definición de circunferencia: Dado un punto *P* y un número real positivo *r*, una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que se encuentran a una distancia *r* de *P* [se denota $\odot P_r$]. El punto *P* se llama *centro* de la circunferencia; a la distancia *r* o a un $\overline{PA}$ ($A \in \odot P_r$) se le llama *radio*.

Teoremas

T. Recíproco de la mediatriz: Sea m una recta; si $m \perp \overline{PQ}$ por su punto medio, entonces m es mediatriz de $\overline{PQ}$

T. Parábola-Mediatriz-Recta tangente: Dada una parábola $\wp$ con foco F, directriz l, P punto tal que $P \in \wp$, m recta tal que $m \perp l$ por P, $D = m \cap l$, entonces $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$ es la recta tangente a $\wp$ por P.

T. Recta perpendicular punto en recta: Dada una recta m y $P \in m$, entonces existe una única recta l, tal que $l \perp m$ por P.

T. Recta perpendicular punto externo: Si $A \notin l$, l recta, entonces existe una única recta $m \perp l$ por A, en un plano α determinado por A y l.

T. Intersección de rectas: Si l y m son rectas que se intersecan, entonces $l \cap m = \{A\}$, A punto.

T. Triángulo isósceles: Dado un ΔABC isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, entonces $\angle ABC \cong \angle ACB$

T. Rectos congruentes: Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí.

T. Localización de puntos: Si se tiene un $\overrightarrow{AB}$ y un número z tal que $z > 0$. Entonces existe un único punto C tal que $C \in \overrightarrow{AB}$ y $AC = z$

T. Desigualdad-Interestancia: Si $AB < AC$ y $C \in \overrightarrow{AB}$ entonces $A - B - C$

T. Punto en interior de ángulo: Dado un $\angle ABC$, $T \in \angle ABC$ y $S \in \angle ABC$, $T, S \neq B$; sea W punto, tal que $T - W - S$ entonces $W \in int\angle ABC$

T. Ángulo externo: Si se tiene un ΔABC y un $\angle ABD$ el externo a él. Entonces $m\angle ABD > m\angle CAB$ y $m\angle ABD > m\angle ACB$

T. Desigualdad triangular: Dado ΔABC, entonces $AB + BC > AC > |AB - BC|$.

T. Criterio de congruencia A-L-A (Ángulo-Lado-Ángulo): Dados ΔABC y ΔXYZ si $\angle A \cong \angle X$, $\angle B \cong \angle Y$ y $\overline{AB} \cong \overline{XY}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

T. Criterio de congruencia L-A-A (Lado-Ángulo-Ángulo): Dados ΔABC y ΔDEF; si $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Postulados

P. Adición de medidas de ángulos: Si $T \in int\angle CAB$ entonces $m\angle TAC + m\angle BAT = m\angle CAB$

P. Criterio de congruencia de triángulos L-A-L (Lado-Ángulo-Lado): Dados ΔABC y ΔXYZ; si $\overline{AB} \cong \overline{XY}$, $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$ y $\angle ABC \cong \angle XYZ$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

SISTEMA AXIOMÁTICO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Definiciones

D. coordenadas de un punto: Las coordenadas de un punto se definen como las proyecciones ortogonales a los ejes coordenados.

D. Pendiente de Recta: Dada la recta n en $\mathbb{R}^2$. $T, S \in n$, $T(x_2, y_2)$, $S(x_1, y_1)$, el número $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$ se denomina pendiente de la recta n.

Teoremas

T. Ecuación canónica de la recta: Dada la recta n en $\mathbb{R}^2$ y $P(x, y)$ un punto cualquiera de n.

i. Sean dos puntos $T(x_1, y_1)$ y $S(x_2, y_2)$ de n. Entonces la ecuación de n es $y - y_1 = m(x - x_1)$ o $y - y_2 = m(x - x_2)$
ii. Sean un punto $T(x_1, y_1)$ de n y sea m la pendiente de n. Entonces la ecuación de n es $y - y_1 = m(x - x_1)$

T. Rectas perpendiculares – pendientes: Dadas dos rectas k y l perpendiculares entre sí. Entonces el producto de sus pendientes es -1.

T. Punto medio: Dados dos puntos $\mathrm{A(h,k)}$ y $\mathrm{B(p,q)}$ entonces la coordenada del punto medio del $\overline{\mathrm{AB}}$ es $\mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{h+p}}{2}, \frac{\mathrm{k+q}}{2}\right)$.

T. Ecuación canónica (Parábola): Si el vértice de la parábola es $V'(h, k)$ y su eje es paralelo al eje X su ecuación es $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, la ecuación de la directriz es $x = h - p$ y su foco será $F(h + p, k)$ ó si su eje es paralelo al eje Y su ecuación es $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, la ecuación de la directriz es $y = k - p$ y su foco será $F(h, k + p)$.

Teorema Parábola-Mediatriz-Recta tangente (Geometría analítica): Dada una parábola $\wp$ de ecuación $(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$ con foco $F(h\,, k + p)$ y ecuación de directriz $d = k - p$; Sea $P(x_0\,, y_0)$ un punto de ella y $D(x_o\,, k - p)$ en d. Entonces, $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$ con ecuación $\mathcal{M}_{\overline{DF}}: y - y_0 = \frac{x_0 - h}{2p}(x - x_0)$ es tangente a $\wp$ por P.

Teorema Parábola-Mediatriz-Recta tangente (Geometría analítica pura): Dada una parábola $\wp$ de ecuación $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$ y $P(x_o, y_o)$ un punto de ella. Entonces la ecuación de la recta tangente a la parábola por P es $y - y_0 = \frac{x_0-h}{2p}(x-x_0)$, con pendiente $m = \frac{x_o-h}{2p}$.

Teorema Elipse-Mediatriz-Recta tangente: Dada ε elipse con focos F y F_1; sea $P \in \varepsilon$, $\odot\, F_{1_r}$, $FP + PF_1 = r$, $T = \odot\, F_{1_r} \cap \overleftrightarrow{TF_1}$ y $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$, entonces $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$ es tangente a ε por P.

T. Ecuación canónica (Elipse): La ecuación de una elipse con centro en el origen de los ejes coordenados y con eje focal en el eje *X* (o el eje mayor en el eje *X*) es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Si el eje focal (o el eje mayor) está en el eje *Y*, la ecuación es $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. Si el centro de la elipse está en punto con coordenadas es (h,k) la ecuación canónica de la elipse es, respetivamente, $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ o $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ cuando el eje mayor es paralelo al eje *X* o es paralelo al eje *Y*, respectivamente.

T. Ecuación canónica de la circunferencia: La ecuación de una circunferencia con centro en $\mathrm{C(h,k)}$ y radio *r* es $(\mathrm{x}-\mathrm{h})^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{k})^2 = \mathrm{r}^2$

Teorema Elipse-Mediatriz-Recta tangente (Geometría analítica pura): Dada una parábola ε de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $P(x_o, y_o)$ un punto de ella. Entonces la ecuación de la recta tangente a la elipse por P es $y - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}\,(x-x_0)$.

Teorema Elipse-Mediatriz-Recta tangente (Geometría analítica): Dada una elipse $\mathcal{E}$ con ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y focos $F(-c,0)$ y $F_1(c,0)$; Sea $P(x_0\,, y_0)$ un punto de ella, $\odot\, F_{1_r}$: $(x-c)^2 + y^2 = (2a)^2$ y $T\left(\frac{2a(x_0-c)}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}} + c\,,\ \frac{2ay_0}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}}\right)$. Entonces, $\mathcal{M}_{\overline{TF}}$ con ecuación $y - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}\,(x-x_0)$ es tangente a $\mathcal{E}$ por P.

Tabla 2. Sistema axiomático para la segunda gran secuencia

SISTEMA AXIOMÁTICO DE LA GEOMETRÍA SINTÉTICA-CLÁSICA

Definiciones

D. Mediana de triángulo: Es un segmento cuyos extremos son: un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

D. Baricentro: Dado un triángulo ΔABC y sus medianas $m_{\overline{BC}}$, $m_{\overline{AC}}$ y $m_{\overline{AB}}$, estas concurren en un mismo punto *B*, es decir que, $B = m_{\overline{BC}} \cap m_{\overline{AC}} \cap m_{\overline{AB}}$. Al punto *B*, se le denomina baricentro del triángulo.

D. Altura de triángulo: Es un segmento perpendicular cuyos extremos son: un vértice del triángulo y un punto de la recta que contiene al lado opuesto a dicho vértice

Teoremas

T. Del baricentro: Dado el baricentro de un triángulo, este equidista de los vértices correspondientes del triángulo $\frac{2}{3}$ de la longitud de las medianas y dista de los puntos medios $\frac{1}{3}$ de la longitud de las medianas.

T. Intersección circunferencia-circunferencia-recta: La intersección entre una recta y una circunferencia o entre dos circunferencias resulta ser a lo más dos puntos.

T. Existencia recta paralela: Dada una recta *m* y un punto *P* tal que $P \notin m$, entonces existe una recta l tal que $l \parallel m$ por *P*.

T. puntos medios en triángulo: Dado el ΔABC, si X es punto medio de $\overline{AB}$ y Y es punto medio de $\overline{AC}$, entonces $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$ y, además, $XY = \frac{1}{2}BC$

T. Paralela- puntos medios en triángulo: Dado el ΔABC, si X es punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$, $\overline{XY} \parallel Y$ en $\overline{AC}$, entonces Y es punto medio de $\overline{AC}$ o $AC = 2YC$
Postulados
P. De la paralela: Dada una recta m y una recta l tal que l tal que $l \parallel m$ por P, $P \notin m$, entonces l es la única recta paralela a m por P

2.2 MARCO DIDÁCTICO

El marco didáctico, presenta los referentes teóricos que se tendrán en cuenta para el desarrollo de este trabajo: primero, Gómez, Mora y Velasco (2018), quienes exponen una conceptualización de tarea y secuencia; segundo, Godino, Batanero y Font (2007) quienes proponen y describen una tipificación de los objetos matemáticos primarios del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) y tercero, MEN (2004) y Molina y Samper (2018) para explicar el potencial que proporciona el uso de un software de geometría dinámica en la resolución de problemas geométricos.

2.2.1 Conceptualización sobre tarea y secuencia de tareas

En este trabajo, se busca proponer y diseñar secuencias de tareas. En este sentido, es necesario precisar el significado de tarea y secuencia de tareas y determinar los elementos necesarios para diseñar una tarea; para este trabajo, tendremos en cuenta la propuesta de Gómez, Mora & Velasco (2018).

Siguiendo las ideas de estos autores, consideramos que los estudiantes aprenden matemáticas cuando, al abordar tareas complejas que implican problemas, ponen en juego los conocimientos y destrezas que tienen disponibles, interactúan y se comunican con otros estudiantes y con el profesor, negocian significados, llegan a acuerdos sobre la solución de la tarea, y comunican y justifican su solución. Dicha posición sobre el aprendizaje implica asumir una posición sobre la enseñanza, en la cual, el profesor debe proporcionar oportunidades de aprendizaje que permitan a los estudiantes lograr expectativas y superar limitaciones. Desde esta perspectiva, la *tarea* se entiende como el elemento de enseñanza central del proceso de enseñanza aprendizaje que posibilita ello; es decir, es el recurso a través del cual el profesor ofrece oportunidades a los estudiantes para que logren las expectativas de aprendizaje que ha establecido y superen las limitaciones que ha conjeturado que ellos tendrán. En este escenario, una *secuencia de tareas* es una ordenación de tareas que puede incluir una o más tareas transversales.

Gómez y sus colegas proponen siete elementos para describir (diseñar) una tarea: requisitos, metas, formulación, materiales y recursos, tipos de agrupamiento, formas de interacción y temporalidad. A continuación, se describe cada uno:

a) *Requisitos:* Según el nivel educativo, los requisitos son los conocimientos y destrezas previos necesarios que permiten abordar la tarea.
b) *Metas:* Se refiere a los conocimientos y destrezas que se pretenden desarrollar al abordar la tarea. Los propósitos de la tarea se deben tener en cuenta durante su implementación y deben contribuir a lograr unas expectativas de tipo afectivo o de aprendizaje y a superar errores y dificultades.

c) *Formulación de la tarea:* Es la instrucción que da el profesor a sus estudiantes, de manera escrita u oral, que, al estar establecidas dentro de un contexto (matemático o no), deben proporcionar una información de partida al estudiante para que éste produzca y presente una información final (solución).
d) *Materiales y recursos:* Son aquellas herramientas que los estudiantes pueden usar para abordar la tarea. En el diseño de tareas es necesario analizar la pertinencia del uso de materiales y recursos, en cuanto a la eficiencia (disponibilidad, buen uso y tiempo requerido) y a la eficacia (contribución al logro de los propósitos de la tarea).
e) *Agrupamiento:* Alude a las formas de organizar a los estudiantes para resolver la tarea, ya sea de manera individual, en parejas, o grupos pequeños.
f) *Interacción:* Son las formas en que se prevé que los estudiantes y el profesor interactúen y se comuniquen al momento de abordar la tarea. Al planificar la interacción, se deben tener en cuenta dos aspectos:
    - El actuar de los estudiantes: Es importante que la tarea promueva la interacción entre los estudiantes, de manera que, al intentar resolverla, ellos puedan sacar a la luz sus capacidades para proponer soluciones, comunicarlas, defenderlas, reconocer y criticar las soluciones de sus compañeros y validar una solución común, con todos los compañeros y el profesor.
    - El actuar del profesor: El profesor puede actuar como director (al ser instructivo) o como orientador (al responder preguntas, resolver dificultades o reformular las cuestiones estimulando a otros a que respondan). La planificación de este aspecto implica: determinar las estrategias que permitan confirmar cómo se desarrolla el aprendizaje en los estudiantes; pronosticar las distintas soluciones y errores que puedan surgir en la implementación de la tarea; determinar su actuación para superar dificultades (pedir explicaciones, suministrar información adicional, sugerir conjeturas, proponer preguntas adicionales, motivar a la clase a que se percate del error y haga propuestas, o incluso, proporcionar la respuesta correcta).
g) *Temporalidad:* Hace referencia a los momentos, fases o etapas y tiempos en los que se lleva se desarrolla la tarea. Se debe describir el orden de cada etapa y se debe especificar la parte de la tarea que se va a abordar, los materiales y recursos que se van a usar, el agrupamiento y la interacción que tendrán en cuenta y el tiempo que se va a dedicar

2.2.2 Objetos primarios desde el Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS)

El Enfoque Onto-Semiótico (Godino, Batanero, y Font, 2007) parte de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta las matemáticas como una actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como un lenguaje simbólico y como un sistema conceptual lógicamente organizado. Además, partiendo de la situación problema como la noción primitiva, se definen los conceptos teóricos de la práctica, el objeto y el significado (personal e institucional) con el propósito de evidenciar los tres aspectos antes mencionados de las matemáticas y el principio del conocimiento matemático.

Para Godino, Batanero y Font (2007), las *entidades primarias* u objetos matemáticos primarios emergen de un *sistema de prácticas* (lenguaje, situaciones, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos). En primera instancia, estos autores consideran como *práctica matemática* aquella acción que realiza una persona al resolver problemas matemáticos y comunicar la solución a otras personas. En el estudio de las matemáticas más que una práctica específica para resolver un problema en particular, se destacan los *sistemas de prácticas* (operativas y discursivas) llevadas a cabo dentro de una institución constituida por varias personas las cuales comparten prácticas sociales en común, el uso de instrumentos y herramientas específicas y particulares. De esta manera, los objetos matemáticos o *entidades primarias* consideradas como "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia" durante la actividad matemática, es decir cuando se hace, se comunica o se aprenden dentro de las matemáticas (Godino J. , 2002), son comprendidas como emergentes de un sistema de prácticas.

Basándose en los diversos papeles y funciones que desempeñan las entidades primarias en un sistema de prácticas, se presentan los objetos que se incluyen en cada categoría y las funciones específicas en el trabajo matemático (Godino, Batanero, y Font, 2007):

- *Lenguaje*: Presente en los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., que se pueden dar de forma escrita, gráfica, oral o gestual durante el trabajo matemático.
- *Situaciones:* Son aquellas tareas que inducen la actividad matemática, tales como problemas más o menos abiertos, aplicaciones inter o intramatemáticas, ejercicios, etc.
- *Procedimientos*: Entendido como aquellas acciones que el sujeto realiza ante las tareas matemáticas tales como operaciones, algoritmos, técnicas, etc.
- *Conceptos:* Dados mediante definiciones o descripciones tales como número, puntos, recta, media, función, etc.
- *Propiedades* o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.
- *Argumentos:* Se pueden dar de manera deductiva o de otro tipo y son utilizados para validar y explicar procedimientos y proposiciones.

Esta tipificación de objetos es precisa para describir los requisitos y las metas en el diseño de las tareas de cada secuencia, pues permite considerar aspectos (objetos primarios) que están presenten en un sistema de prácticas y prever lo que puede surgir en la implementación de una tarea.

2.2.3 La importancia de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría

En esta sección se precisa qué es un software de geometría dinámica, cuáles son sus características y cuál es el potencial de su uso para el desarrollo de procesos matemáticos en la resolución de problemas geométricos, tales como: la argumentación, la visualización, la exploración, la sistematización, la conjeturación, entre otras (MEN, 2004). En primera instancia, cabe aclarar que el software que será utilizado para el desarrollo de las secuencias de tareas que se proponen en este trabajo es Geogebra debido, particularmente, a su fácil acceso y la simplicidad para el abordaje de objetos geométricos.

Según el MEN (2004), un software de geometría dinámica es un programa computacional considerado como un editor gráfico que posibilita hacer dibujos y diagramas geométricos de manera continua, manteniendo intactas todas las relaciones y propiedades geométricas que hayan sido tomadas en cuenta durante la construcción. Estos programas contienen herramientas potentes que favorecen el aprendizaje de los estudiantes y contribuyen de manera esencial al desarrollo del pensamiento geométrico, a la superación de dificultades y al desenvolvimiento de procesos matemáticos, en comparación con el uso de lápiz y papel. Dichas herramientas, se describen a continuación:

a) *Arrastre*: El uso de esta herramienta consiste en cambiar la posición de un punto con el objetivo de deformar una figura construida o cambiar relaciones de medida, para favorecer la búsqueda de propiedades, relaciones o hechos geométricos nuevos que permanecieron invariantes durante la deformación. Además, favorece procesos como la visualización, el pensamiento abstracto, la exploración, la creatividad y la verificación para consolidar conocimientos matemáticos.

b) *Lugar geométrico y Rastro o Traza*: Estas herramientas consisten en delimitar un objeto geométrico que depende de otro; permiten descubrir y visualizar una figura resultante de una construcción que surge de algún hecho geométrico, permitiendo hallar regularidades geométricas.

c) *Animación*: Esta herramienta consiste en el movimiento de un punto a lo largo de un objeto geométrico, que, junto con el rastro, permiten descubrir nuevas figuras o curvas, facilitando la visualización y la exploración para apreciar propiedades invariantes.

d) *Ventana de comandos*: En esta herramienta se puede introducir diferentes tipos de comandos, incluyendo representaciones algebraicas de objetos. Esta herramienta, por ejemplo, deja ver en tiempo real diferentes representaciones para un objeto (algebraica y gráfica); por ende, promueve la coordinación de registros de representación y por ese medio, una mejor compresión de un objeto. La exploración de distintos modelos de representación (gráfica, verbal o simbólica) presentes en geometría, permite que los estudiantes obtengan nuevas experiencias, para posibilitar la planeación de la solución del problema y la validación o refutación de conjeturas. Así, el uso del software debe orientarse a problematizar la visualización, de manera que surja la necesidad de explorar, conjeturar y verificar (haciendo uso del arrastre). Este comando, junto con *lugar geométrico* son claves para establecer una relación entre el abordaje de los conceptos desde un punto de vista sintético con aquel desde un punto de vista analítico.

Las secuencias que exponemos en este trabajo se enfocan, particularmente, en problemas de construcción y de conjeturación (Molina y Samper, 2018). El uso del software de geometría dinámica potencia el abordaje de estos tipos de problemas promoviendo procesos de la práctica matemática. La conceptualización se favorece por cuanto para proveer un procedimiento de construcción es necesario que los estudiantes pongan en juego sus conocimientos previos y las posibilidades del software, de forma tal que propiedades geométricas bajo el arrastre se mantengan (en ese caso, se dice que el procedimiento produce una construcción robusta de un hecho geométrico). La visualización, exploración y conjeturación se potencian por cuanto el software es un acompañante del estudiante que ayuda a indagar sobre objetos matemáticos, convirtiéndose en un inspirador de ideas, poniendo en juego objetos y contribuyendo a darles sentido. La exploración sienta bases sólidas en el descubrimiento de propiedades invariantes, las cuales se incorporan en un sistema axiomático. Por lo anterior, el uso del software puede dar lugar a la construcción de significados que posibiliten al estudiante enfrentarse a posteriores problemas.

En conclusión, el uso de un software de geometría dinámica facilita, por un lado, la implementación y el surgimiento de muchos procesos propios de la geometría y, por otro lado, presenta muchas posibilidades de acción y superación de dificultades para los estudiantes. Por ello, es fundamental para nuestro trabajo el uso de un programa computacional (Geogebra) que facilite procedimientos y proporcione a los estudiantes herramientas e ideas para abordar las tareas que se pretenden proponer en las secuencias de tareas y así, favorecer a la enfatización de los vínculos existentes entre las geometrías sintética y analítica por medio de la representación y los procedimientos llevados a cabo en las soluciones de dichas tareas.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

La metodología seguida para este estudio se fundamenta en el *Análisis de Instrucción* que sugieren Gómez, Mora & Velasco (2018), aunque no se desarrolla en su totalidad. Específicamente, en este trabajo de grado nos concentramos en el diseño (descripción) de tareas (o secuencia de tareas). En tal sentido, las fases del estudio se determinaron con base en estos aspectos, teniendo en cuenta, claro está, que una primera fase consiste en la elaboración del marco referencial. A continuación, describimos las fases llevadas a cabo para el desarrollo del estudio.

Fase 1. *Construcción del marco referencial*. Dada la naturaleza y los objetivos de este trabajo, se hizo necesario aludir a cuatro aspectos fundamentales, los cuales se especificaron en el Capítulo II. El primer aspecto, referido a los métodos de análisis y síntesis y su relación con las geometrías analítica y sintética (pura o clásica) –Sección 2.1.1-. El segundo aspecto, con respecto a la propuesta de Gómez, Mora y Velasco (2018), el cual, no solo nos proporcionó las fases para desarrollar el presente trabajo, sino que nos proveyó una conceptualización sobre los componentes esenciales para el estudio: tarea, secuencia de tareas y los elementos que describen una tarea (Sección 2.2.1). El tercer aspecto considerado, fue una descripción de la tipificación de objetos matemáticos primarios del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) propuesta por Godino, Batanero y Font (2007) –Sección 2.2.2–. Finalmente, el cuarto aspecto consistió en una referencia sobre el uso del software de geometría dinámica; esto nos permitió tener una base con la cual reconocer el potencial del uso de tales *recursos* para abordar los problemas tanto en el dominio de Geometría Sintética como en el dominio de la Geometría Analítica (Sección 2.2.3). Vale indicar que dicho potencial se explicitó durante el diseño de las secuencias de tareas.

Fase 2. *Diseño de secuencias de tareas*. Atendiendo a los antecedentes descritos en la Sección 1.1.2 del Capítulo 1 (planteamiento del problema), se determinaron dos grandes secuencias configuradas a través del planteamiento de dos tipos problemas, que abordaron distintas estrategias para destacar los vínculos existentes entre las geometrías sintética y analítica. En la tabla 3, se especifican los tipos de problemas y el contenido que desencadenó cada secuencia.

Tabla 3. Tipos de problemas y contenido de las secuencias

TIPO DE PROBLEMA	CONTENIDO SOBRE EL QUE VERSA LA SECUENCIA
Situación que, al ser abordada en el dominio de la geometría sintética, proporciona una experiencia para su abordaje en la geometría analítica.	Secuencia 1. Determinación de la recta tangente a las cónicas (parábola, circunferencia, elipse e hipérbola) por un punto dado de ellas.
Situación en la que, luego de plantear un problema en el dominio sintético, se va modificando el enunciado (complementado condiciones) hasta que surja la necesidad de la incursión del dominio analítico para su resolución.	Secuencia 2. Problema propuesto en Gascón (2002). En principio, se propone un problema de construcción de un triángulo con ciertas características que puede ser abordado desde la geometría sintética. Luego, se van agregando condiciones de manera que sea necesaria la intervención de técnicas propias de la geometría analítica.

Una vez precisados los tipos de problemas que desencadenaron las secuencias de tareas, se prosiguió a diseñar cada secuencia a partir de la descripción de cada uno de los siete elementos propuestos por Gómez y sus colegas (ver Sección 2.2.1, Capítulo II), de manera que, cada descripción se convirtió en una *subfase* del estudio, a saber: *descripción de la formulación de la tarea*, *descripción de los requisitos*, *descripción de las metas*, *descripción de los materiales y recursos*, *descripción del agrupamiento*, *descripción de la interacción y descripción de la temporalidad.* En otras palabras, para cada secuencia (cuyo contenido se presentó en la Tabla 1) se llevó a cabo la descripción de estos elementos (*i.e.*, se desarrollaron las *subfases*) ya sea de manera general (para las secuencias) o de manera específica (para una tarea). En el Capítulo IV, se presenta el desarrollo de esta fase.

Cabe precisar que, para lo relativo a las subfases *descripción de los requisitos* y *descripción de las metas*, se usó como herramienta analítica la propuesta del Enfoque Onto-Semiótico sobre objetos matemáticos primarios descritos por Godino y colegas (2007) –ver Sección 2.2.2, Capítulo II–. Este referente nos permitió identificar fácilmente aquellos objetos considerados requisitos para abordar las tareas y aquellos objetos a los que se quería apuntar con el abordaje de dichas secuencias de tareas. Para presentar los objetos primarios asociados a la *descripción de los requisitos* y a la *descripción de las metas* se usó el diagrama sugerido por Molina, Pino-Fan y Font (2019), el cual permite una exposición sintética de los objetos principales que surgieron durante la solución de un problema (ver Figura 1):

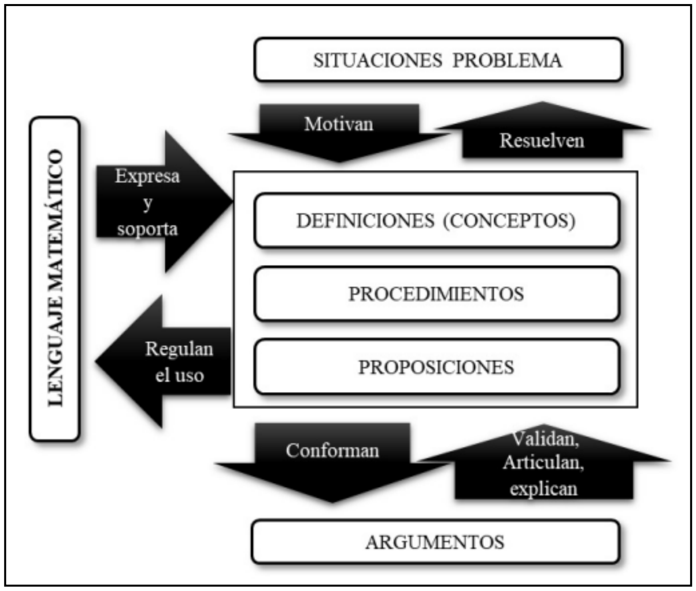


Figura 1.Exposición sintética de los objetos primarios

Además, Para la subfase relacionada con la descripción de los materiales y recursos, se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos, propuestos por Gómez et al. (2018, págs. 215-217), para evaluar la pertinencia del uso del software en cuanto a la eficiencia (de los numerales 1 a 4) y la eficacia (de los numerales 6 a 12):

1. *Acceso:* Dentro de una institución educativa, ¿los profesores y los estudiantes tienen acceso a ese material o recurso?, ¿estos, funcionan correctamente?
2. *Preparación de profesor:* ¿El profesor está preparado para usar ese material o recurso?, y si no, ¿vale la pena prepararse para usarlo?
3. *Preparación de los estudiantes:* ¿Los estudiantes están preparados para usar ese material o recurso?, y si no, ¿vale la pena que se preparen para usarlo?
4. *Tiempo adicional:* ¿Cuánto tiempo requiere el uso de ese material o recurso en la realización de la tarea?, ¿vale la pena?
5. *Metas:* ¿En qué medida y de qué forma, el uso de ese material o recurso contribuye al logro de las metas y expectativas de la tarea?, ¿es indispensable?
6. *Demandas cognitivas*: ¿Ese material o recurso resulta ser intermediario entre los conocimientos previos del estudiante y los conocimientos que se pretenden desarrollar con la tarea?
7. *Reto*: ¿El material o recurso contribuye a que la tarea se convierta en un reto para los estudiantes?
8. *Errores*: ¿El material o recurso contribuye a que los estudiantes se percaten de sus errores y la superación de estos?
9. *Indagación*: ¿El material o recurso fomenta el análisis de información, el planteamiento de interrogantes, la búsqueda de estrategias propias, el descubrimiento de propiedades y relaciones y el análisis de resultados?

10. *Interacción*: ¿El material o recurso fomenta la interacción entre estudiantes y profesor?
11. *Relevancia e interés:* ¿El material o recurso promueve el interés y la curiosidad de los estudiantes para resolver la tarea?

En la subfase relacionada con la descripción de la interacción, se especificaron las posibles soluciones que tiene cada tarea de la secuencia y las potenciales actividades que realizarían los estudiantes al respecto. Así mismo, se expusieron algunas dificultades que podrían tener los estudiantes cuando abordan las tareas y las maneras mediante las cuales el profesor contribuye a su superación. Para precisar tales dificultades y las maneras en que estas pudieron ser abordadas empleamos como estrategia la construcción de una bitácora o un diario de campo, en el cual se anotaban las dificultades que la autora del este trabajo tuvo cuando actuó como resolutora de las tareas y también la manera en que el asesor del trabajo contribuyó a la superación de estas. También, se realizó un pilotaje para determinar si los enunciados de las tareas eran pertinentes y claros. Se asumió esta estrategia, debido a que no fue posible realizar una implementación en el aula para detectar estos aspectos, debido a las dificultades de salubridad que enfrentó el país durante el primer semestre del año 2020.

Por último, cabe aclarar que, en el diseño de la primera gran secuencia, se presentó una descripción completa de cada subfase para las tareas que configuran la secuencia referida a la determinación de la recta tangente a una parábola. Es preciso decir que, una descripción similar puede realizarse para la secuencia de tareas referida a la determinación de la recta tangente a una elipse, la cual no desarrollamos en este trabajo; sin embargo, presentamos cada tarea y las soluciones ideales de esta secuencia.

Fase 3. Descripción de vínculos entre las geometrías sintética y analítica. Una vez diseñadas las secuencias de tareas, se hizo una descripción de la articulación existente entre la geometría sintética y la geometría analítica, realizando los siguientes contrastes:

1. En la primera gran secuencia (ver Tabla 3), con respecto a la determinación de la recta tangente a una parábola, se realizaron dos contrastes: primero, se compararon la solución sintética y la sintético-analítica y segundo, se contrastaron la solución sintético-analítica y la analítica pura. Estos contrastes, permitieron decantar los objetos matemáticos primarios (del EOS) que estaban presentes y que tenían en común dichas soluciones y, de esta manera, poder resaltar que existen muchos vínculos entre la geometría sintética (pura o clásica) y la geometría analítica. Esto, fue especificado en el mismo Capítulo IV.
2. En la segunda secuencia, se contrastaron las dos grandes secuencias realizadas referidas, por un lado, a la determinación de la recta tangente a las cónicas y, por otro lado, a las técnicas analíticas como desarrollo de las técnicas sintéticas. Este contraste se realizó con el fin de precisar la manera en que cada secuencia genera un vínculo, una articulación y una complementariedad entre la geometría sintética y la geometría analítica.

Fase 4. Síntesis de resultados. En el capítulo V, se formularon las conclusiones referidas a la experiencia obtenida al desarrollar este trabajo teniendo en cuenta varios aspectos: primero, se realiza un informe final y un contrasta entre lo desarrollado a lo largo del trabajo y los objetivos propuestos en la Sección 1.2 (Capítulo I) y el marco de referencia presentado en el Capítulo II. Segundo, se precisan algunas limitaciones que se presentaron al llevar a cabo este trabajo y, por último, se presentan algunos aprendizajes de la autora de este trabajo en cuanto a lo matemático y a lo didáctico.

CAPÍTULO IV
SECUENCIAS DE TAREAS

Este capítulo presenta el desarrollo de las *Fases 2 y 3*, descritas en la metodología (ver Capítulo III). En este sentido, se presentan las secuencias de tareas diseñadas en las que se abordan los dos tipos de problemas expuestos anteriormente (ver tabla 3). Para cada secuencia, se describe cada subfase (o elementos que constituyen el diseño de una secuencia), ya sea de manera general o específica (*Fase 2*). Por último, se destacan los vínculos existentes entre la geometría sintética y la geometría analítica involucrados en cada secuencia, a la luz de los objetos matemáticos primarios propuestos por el EOS (*Fase 3*).

De manera específica, el lector, en las secciones siguientes, podrá encontrar una descripción de dos grandes secuencias, una relativa a la determinación de rectas tangentes a cónicas y otra relativa a la construcción de un triángulo, dadas unas condiciones específicas. El sentido de cada gran secuencia con respecto al vínculo entre los métodos analíticos y sintéticos, y la geometría analítica y sintética clásica, se comentan en el marco de la descripción respectiva.

4.1 DESCRIPCIÓN DE LAS SECUENCIAS DE TAREAS

Esta sección constituye el desarrollo de la *Fase 3* de la metodología; eso es, presenta la descripción de cada *subfase* para cada una de las secuencias de tareas diseñadas. En principio, la descripción se hace de manera general, es decir, teniendo en cuenta aspectos en común de los elementos que componen las tareas de las secuencias; luego, de manera específica, es decir, considerando aspectos de los elementos que están presentes en cada tarea particular de la secuencia.

4.1.1 Descripción general de las secuencias

Descripción general de los requisitos: Para el desarrollo de cada secuencia, se deben tener presentes los objetos matemáticos primarios que constituyen los conocimientos y destrezas previos de los estudiantes:

- *Lenguaje:* Los estudiantes deben tener conocimientos previos acerca de la notación propia de la geometría sintética, y del uso y tratamiento de expresiones algebraicas, representación propia de la geometría analítica. Además, deben conocer las representaciones gráficas y algebraicas de los objetos geométricos presentes en cada secuencia.
- *Procedimientos:* Los estudiantes deben conocer, por un lado, procedimientos algebraicos relativos a la determinación de una expresión simplificada de una expresión más complejas y, por otro lado, deben conocer asuntos relativos a procedimientos de construcción o exploración en el software como el uso de herramientas básicas del software Geogebra (arrastre, lugar geométrico, traza o rastro).
- *Conceptos:* Los estudiantes deben tener conocimientos previos de algunos conceptos básicos, tanto de la geometría sintética como de la geometría analítica, que serán necesarios

para abordar las tareas propuestas (estos serán enunciados en cada secuencia y se presentan en la sección 2.1.2, Capítulo II).

- *Proposiciones:* Para el abordaje de las dos secuencias, los estudiantes deben conocer asuntos relativos a la congruencia de triángulos *(i.e.*, criterios de congruencia).
- *Argumentos:* No se considera necesario que los estudiantes deban conocer aspectos relativos a la demostración matemática. Los problemas pueden ser abordados sin necesidad de ello, y soportar los hechos geométricos con base en la experiencia con el software (los argumentos producidos, en ese caso, tendrían un carácter informal). Ahora bien, si se quieren validar los resultados encontrados (expresados en forma de conjetura), es menester que los estudiantes tengan alguna experiencia previa en cuanto a la demostración de teoremas en geometría clásica o analítica.

Descripción general de las metas: Con el desarrollo de las secuencias, se pretenden lograr las siguientes expectativas de aprendizaje:

- *Lenguaje:* Se pretende lograr que los estudiantes realicen una correcta coordinación de los registros de representación gráfica y algebraica para abordar las secuencias de tareas de manera efectiva.
- *Procedimientos:* Con la primera secuencia, se pretende que los estudiantes identifiquen cómo, en algunos casos, los procedimientos de solución en el dominio sintético son útiles para proveer la solución en el contexto analítico. Con la segunda secuencia, se pretende que los estudiantes reconozcan cómo la inclusión de elementos propios de la geometría analítica, facilitan el abordaje y la solución de un problema desde la geometría sintética.
- *Conceptos y proposiciones:* Se pretende ampliar el sistema de conocimiento de referencia, introduciendo los diversos conceptos (definiciones y hechos geométricos) que van surgiendo a lo largo del desarrollo de cada secuencia.
- *Argumentos:* Se pretende fomentar el método de *análisis* como una manera para validar conocimiento. Así mismo, legitimar la argumentación informal como una manera para soportar hechos geométricos establecidos, particularmente en el dominio de la geometría clásica.

También, se procura alcanzar unas expectativas de tipo afectivo como la motivación y el interés, por medio de las siguientes estrategias: que la tarea propuesta, desde un contexto geométrico, sea acorde a los conocimientos previos de los estudiantes, que esta signifique un reto para ellos, que use artefactos mediacionales como entornos de geometría dinámica diferentes a los usuales y que fomenten la participación, la interacción y la comunicación durante el desarrollo de cada secuencia.

Descripción general de la formulación de las tareas: Los enunciados de las tareas apuntan a unas instrucciones genéricas para todas. Estas son: (i) Planteamiento de la situación problemática; (ii) solicitud de descripción del procedimiento de construcción; (iii) solicitud de descripción del proceso exploratorio (qué se mide, qué se arrastra, qué construcción auxiliar se hace, y para qué se llevan a cabo tales acciones); (iv) solicitud de la formulación de la conjetura (proposición “si… entonces” previamente verificada mediante una construcción robusta); y (v) eventualmente, una validación de las conjeturas. Por supuesto, estas instrucciones son adaptadas para cada secuencia de tareas; tales adaptaciones se presentan en la descripción de cada secuencia.

Descripción general de los materiales y recursos: Todas las secuencias recurren al uso del software Geogebra. Esto, porque favorece las siguientes actividades matemáticas (Samper y Molina, 2013):

- *Entender que para abordar un enunciado de la forma "si…entones…" se deben tener en cuenta todas las condiciones de la hipótesis*. La exploración que propicia el uso de la geometría dinámica contribuye a abordar este aspecto de manera adecuada, pues permite decantar las condiciones y propiedades iniciales de un objeto y, además, determinar las consecuencias de eliminar algunos aspectos de la hipótesis.
- *Formular conjeturas de manera autónoma.* El uso del software propicia la exploración de propiedades geométricas, y la participación autónoma y relevante de los estudiantes para formular conjeturas que guíen la solución de una tarea propuesta.
- *Descubrir relaciones y propiedades de los objetos geométricos involucrados en una construcción.* Tales descubrimientos, pueden ayudar a rememorar elementos teóricos valiosos para dar solución a un problema dado o a una tarea propuesta.
- *Verificar las conjeturas formuladas por otros*. Es importante propiciar la formulación de construcciones robustas, de manera que, por medio de propiedades de los objetos presentes externos al problema, no alteren los resultados obtenidos.

Desde esta perspectiva, se concibe como necesario que la institución educativa que pretenda implementar las secuencias de tareas cuente con la disponibilidad y el acceso a un computador, tablet o celular (o al menos un computador por grupos de tres estudiantes) donde se encuentre instalado el programa de *Geogebra*. También es necesario que tanto el profesor como los estudiantes cuenten con un conocimiento aceptable de las herramientas del software.

Descripción general del agrupamiento: Todas las secuencias están pensadas para que los estudiantes trabajen por grupos de tres estudiantes. De esta forma se fomenta una interacción estudiante-estudiante y estudiantes-profesor que posibilite la negociación de las producciones presentadas a toda la clase.

Descripción general de la interacción: La interacción que se mantendrá presente en el desarrollo de cada secuencia se define así: primeramente, los estudiantes deben abordar la tarea propuesta, a partir de un trabajo colaborativo, proponiendo y formulando una solución o respuesta de dicha tarea. Luego, el profesor actúa como orientador, pasando por los grupos de trabajo para determinar los resultados a los cuales van llegando los estudiantes; ocasionalmente, entra en conversación con algún grupo para involucrarse en la solución del problema o para aclarar dudas concretas. Después de que cada grupo logre concretar y formular una propuesta de solución, se prosigue al momento de socialización; en este, se genera una conversación instruccional, gestionada por el profesor, quien va guiando a la comunidad a la construcción de significados compartidos y la organización colectiva de ideas que se originaron para argumentar procedimientos. El profesor actúa también como director, administrando las propuestas de los estudiantes, controlando el uso adecuado de argumentos e institucionalizando el conocimiento.

Cabe resaltar que, según Gómez et al., (2018), en la subfase de interacción se deben contemplar las dificultades que puedan tener los estudiantes al abordar una tarea y las posibles maneras en que el profesor actuará para que estas sean superadas. Desde esta perspectiva, vale indicar que las secuencias en sí mismas están planeadas para superar la dificultad a la que alude Gascón (2002; 2003), consistente en la desarticulación –inducidas por el tratamiento disyunto de ambos dominios en la escuela (ver Sección 1.1.2, Capítulo I)– entre la geometría analítica y la geometría sintética para el abordaje de situaciones geométricas por parte de los estudiantes. Atendiendo a lo anterior, mediante las secuencias de tareas se pretenden superar, específicamente, las siguientes dificultades de los estudiantes: (i) el no uso de conocimientos de la geometría sintética clásica para abordar asuntos de la geometría analítica y viceversa, y (ii) la no combinación de registros de representación entre la Geometría Sintética Clásica y la Geometría Analítica.

Descripción general de la temporalidad: Para el desarrollo de las secuencias de tareas, y teniendo como base la descripción general de la interacción explicitada antes, se deben considerar tiempos específicos para cada una de las siguientes tres etapas: (i) actividad autónoma de los grupos de estudiantes para proveer una propuesta de solución, (ii) socialización o puesta en común de las distintas propuestas frente al gran grupo y (iii) validación o institucionalización de la solución de la tarea y de los contenidos geométricos involucrados (tanto sintéticos como analíticos). Por lo general, el desarrollo de cada una de estas tres fases se requiere de no menos de 30 minutos; por supuesto, todo depende de la riqueza de la tarea que se esté abordando y de la participación misma de los estudiantes. Dada esta circunstancia, para cada secuencia será sugerida una temporalidad.

4.2 Primera gran secuencia: Recta tangente a cónicas

De acuerdo con lo descrito en la *Fase 2* de la metodología (Capítulo III), el contenido de esta primera gran secuencia se centra en determinar (tanto sintética como analíticamente) la recta tangente a las cónicas (parábola, circunferencia, elipse e hipérbola) por un punto dado de ellas. En esta perspectiva, se presenta, en un principio, la descripción de cada subfase (*Fase 2* de la metodología) para una secuencia de tareas centrada en determinar la recta tangente a una parábola por un punto dado de ella, dejando como tarea para ejercitar, la determinación de la recta tangente a una circunferencia. Cabe aclarar, que se puede diseñar una secuencia de tareas análoga para la determinación de la recta tangente a una elipse por un punto dado de ella, pero con ciertas precisiones y especialidades, las cuales serán aclaradas en su momento. En la figura 2, se ilustra un cuadro sinóptico de las tareas que configuran el desarrollo de esta primera secuencia:

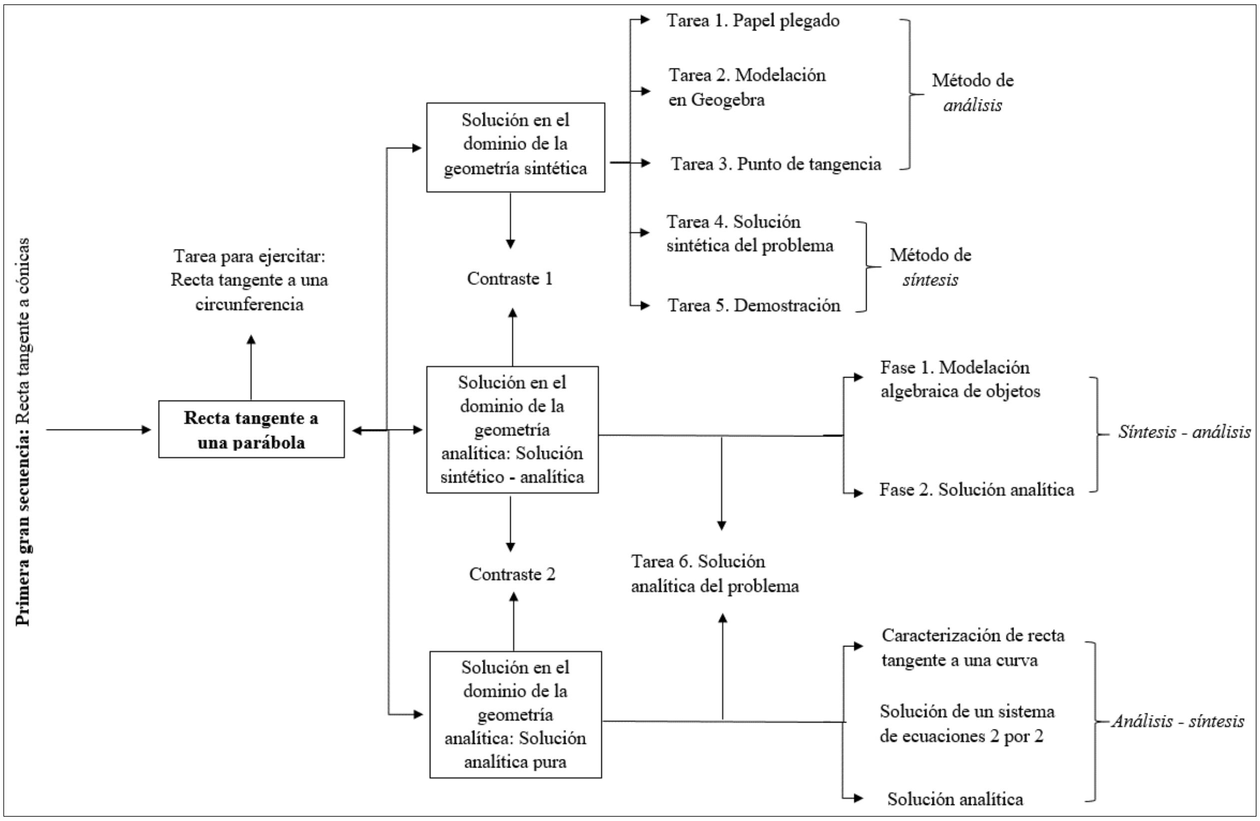


Figura 2. Organigrama de la primera gran secuencia

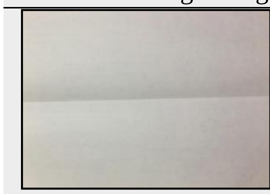
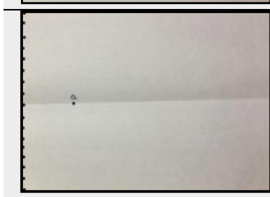
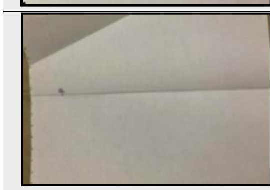
Teniendo en cuenta lo establecido en el cuadro sinóptico de la figura 2, a continuación, se presentará la descripción y el desarrollo de esta primera gran secuencia.

4.2.1 Recta tangente a una parábola

El desarrollo de esta primera secuencia se centra en el *problema general* de determinar la recta tangente a una parábola por un punto dado de ella. Para ello, se proponen tres tipos de solución del mismo problema considerando distintos dominios: (i) solución desde la geometría sintética, (ii) solución sintético-analítica y (iii) solución desde la geometría analítica. La primera, representa una ejemplificación del uso de los métodos de *análisis* y *síntesis* para resolver el problema desde el dominio de la geometría sintética. Para la segunda solución, se toma como insumo la experiencia obtenida en la primera solución para determinar una solución desde el dominio de la geometría analítica. Por último, la tercera solución consiste en abordar el problema, concibiendo una interpretación de la tangente desde un punto de vista meramente analítico usando métodos algebraicos.

4.2.1.1 Secuencia para determinar una solución en el dominio de la geometría sintética

Esta primera solución, es la perfecta ejemplificación de los métodos de *análisis* y *síntesis* utilizados dentro de la geometría sintética. Esta secuencia, se compone de cinco tareas: las primeras tres tareas (tareas preliminares) constituyen un escenario para que se favorezca el proceso de *análisis* pues, implícitamente, se parte del problema que *a posteriori* se pretende solucionar (es decir, de todas las rectas tangentes a una parábola). Se considera que ese escenario posibilita la determinación de las condiciones para que una recta sea tangente a una parábola (mediatriz de un segmento especial). En la cuarta tarea, se especifica la solución del problema utilizando del método de *síntesis* (devolución de pasos) donde los estudiantes toman como insumo las experiencias y los resultados encontrados en las tareas preliminares. Por último, en la quinta tarea, se realiza una demostración hipotético-deductiva del teorema que surge al abordar esta secuencia. Cabe aclarar que, para cada tarea se presentará, primeramente, el taller tal cual como se expondrá a los estudiantes y luego, se realizará la descripción de cada *subfase*.

<table>
<tr><th colspan="2">Tarea 1. Exploración con papel plegado</th></tr>
<tr><td colspan="2">Situación 1. Siga el siguiente procedimiento:</td></tr>
<tr><td></td><td>Paso1. Tome una hoja en blanco, preferiblemente calcante o pergamino. Haga un doblez por la mitad de la hoja rectangular, a lo largo de la misma.</td></tr>
<tr><td></td><td>Paso 2. Con un marcador, dibuje un punto P, sobre el doblez hecho en el paso 1. Dibuje, en uno de los bordes más cortos de la hoja, puntos cuya distancia podría ser de un centímetro entre uno y otro.</td></tr>
<tr><td></td><td>Paso 3. Superponga cada uno de los puntos del borde de la hoja con el punto P y genere un doblez. La figura de la izquierda, indica un ejemplo de dicho doblez, correspondiente a un punto sobre el borde. Repita este procedimiento con cada uno de los puntos en el borde de la hoja.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situación 2. La papiroflexia, tiene unas reglas de construcción llamados axiomas que fundamentan los resultados de cada paso en donde se involucra un pliegue –y las relaciones geométricas que de ellas se obtienen– (Molina, Sánchez, y Fonseca, 2005). Algunas de tales reglas son:

Axioma 1. Punto medio: Se genera cuando se hacen coincidir en el doblez los extremos del segmento.

Axioma 2. Línea perpendicular a una línea dada: Se genera cuando se dobla el papel por la línea dada y se hace un nuevo doblez que lleve dicha línea sobre sí misma.

Con base en lo anterior y en la situación 1, responda las siguientes preguntas:

i. ¿Qué objeto visualiza cuando termina de hacer todos los dobleces?
ii. Geométricamente hablando, cada doblez hecho en el paso 3, ¿qué objeto representa respecto al segmento cuyos extremos son el punto P y el punto correspondiente sobre el borde de la hoja? Argumente su respuesta.</td></tr>
</table>

Descripción de los requisitos: Para el desarrollo de esta tarea se deben tener presente los siguientes objetos matemáticos primarios que constituyen los conocimientos y destrezas previos de los estudiantes (ver figura 3).

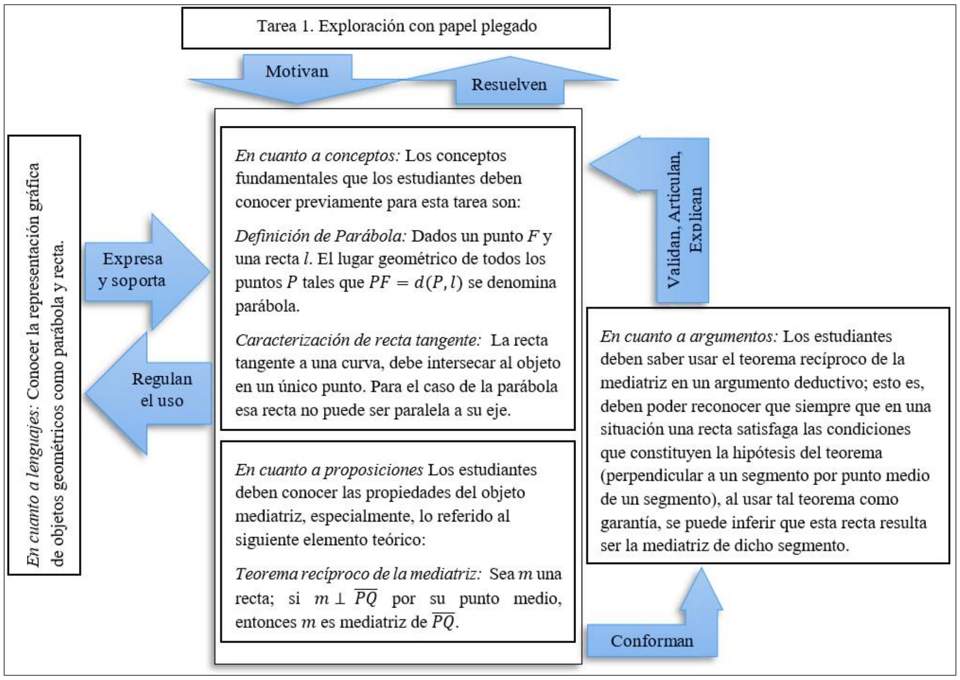


Figura 3. Descripción de los requisitos (Tarea 1)

Descripción de las metas: Con el desarrollo de esta tarea, se pretenden lograr las siguientes expectativas de aprendizaje relativas a objetos primarios (ver figura 4).

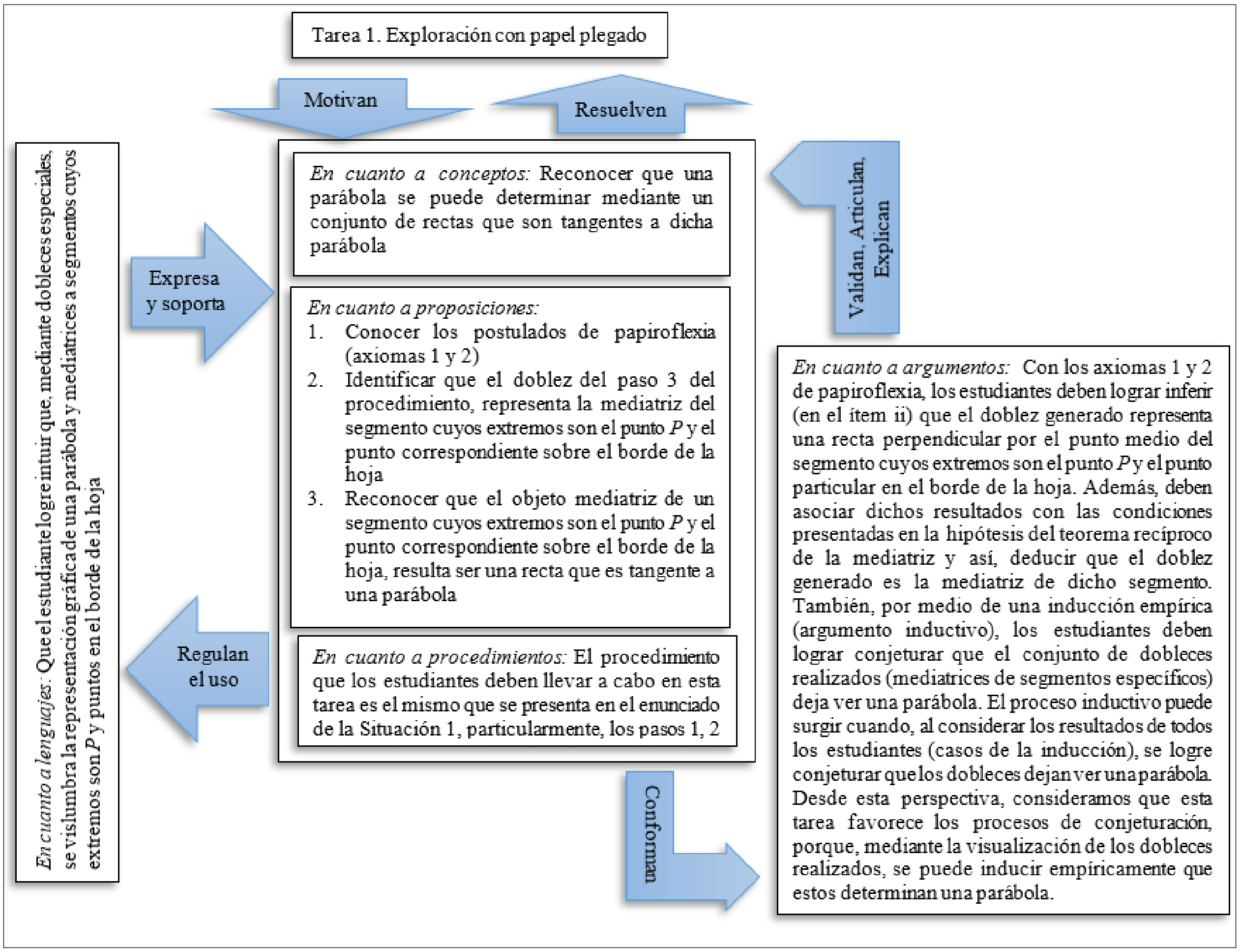


Figura 4. Descripción de las metas (Tarea 1)

Descripción de los materiales y recursos: Para esta etapa, es necesario contar con recursos como una hoja de papel calcante o pergamino, un marcador, un lápiz y un borrador.

Descripción de la temporalidad: Para llevar a cabo esta tarea de experiencia y exploración con el papel plegado, se tienen en cuenta las siguientes etapas:

Etapa 1. Actividad autónoma de los grupos: Para la resolución del taller presentado se deben llevar a 2 momentos:

- Papel plegado: Este primer momento, se estima que se puede abordar durante aproximadamente 15 minutos. Cada estudiante, de manera individual, debe seguir los pasos de construcción establecidos en la Situación 1 de la Tarea 1.
- Responder las preguntas propuestas: Luego de realizar dicha construcción, en grupos de 3 estudiantes, se debe interactuar, discutir, conjeturar, argumentar, negociar y formular las respuestas a las preguntas propuestas en la Situación 3 de la Tarea 1. Se estima que etapa puede desarrollarse en 20 minutos.

Etapa 2. Socialización o puesta en común de las distintas propuestas frente al gran grupo: En este momento, es indispensable la intervención del profesor, para guiar de manera adecuada las ideas que surjan en esta fase, destacando las más relevantes. Por ello, el profesor debe prever posibles respuestas y su intervención, tal como se ilustra en la tabla 4:

Tabla 4. Posibles respuestas e intervención del profesor (Tarea 1)

Posibles respuestas	Intervención del profesor
i. ¿Qué objeto visualiza cuando termina de hacer todos los dobleces?	
Una parábola	Al abordar la siguiente tarea, se podrán verificar estas conjeturas con el uso de un software de geometría dinámica.
Una figura curva	
Una semicircunferencia	
La mitad de un polígono	
ii. Geométricamente hablando, cada doblez hecho en el paso 3, ¿qué objeto representa respecto al segmento cuyos extremos son el punto *P* y el punto correspondiente sobre el borde de la hoja? Argumente su respuesta.	
Una recta que interseca al segmento, porque la recta y el segmento se cortan.	Es válido, pero los estudiantes podrían percibir otras propiedades como, por ejemplo, la perpendicularidad, por el axioma 3 de papiroflexia.
Una recta perpendicular al segmento, por el axioma 2 de papiroflexia.	Es válido, pero los estudiantes podrían percibir otras propiedades como, por ejemplo, que dicha recta contiene al punto medio del segmento, por el axioma 1 de papiroflexia.
Una recta que corta al segmento por su punto medio, por el axioma 1 de papiroflexia.	Es válido, pero los estudiantes podrían percibir otras propiedades como, por ejemplo, la perpendicularidad, por el axioma 2 de papiroflexia.
La mediatriz del segmento, porque por el axioma 2 la recta es perpendicular al segmento y a su vez, por el axioma 1 la recta contiene el punto medio del segmento.	Esta respuesta es, efectivamente, la respuesta más completa pues abarca todas las ideas anteriores ideas. El profesor debe enfatizar que estas propiedades están presentes en la hipótesis del teorema recíproco de la mediatriz.

Etapa 3. Validación e institucionalización de la solución de la tarea y de los contenidos geométricos involucrados (tanto sintéticos como analíticos). El profesor debe guiar los resultados obtenidos, para determinar las respuestas correctas a las preguntas propuestas, a saber: considerar que el objeto que se vislumbra al realizar los dobleces es una parábola y que estos representan una mediatriz del segmento cuyos extremos son el punto *P* y un punto en el borde de la hoja. Además, es posible que alguien conjeture que este doblez determina una recta tangente a la curva que se vislumbra. Con ese escenario, el profesor puede proponer el uso de un software de geometría dinámica con el ánimo de verificar las conjeturas obtenidas y descartar algunas de ellas. Por ello, la Tarea 2.

Tarea 2. Modelación en Geogebra
i. Usando el dinamismo que proporciona Geogebra, provea un procedimiento en dicho software que modele el procedimiento llevado cabo con papel plegado (Tarea 1).
ii. ¿Se ratifican las respuestas dadas en la tarea anterior? Verifique y argumente que efectivamente dichos objetos resultan ser los que se intuyeron.

Descripción de los requisitos: Para el desarrollo de esta tarea se deben tener presente los siguientes objetos matemáticos primarios que constituyen los conocimientos y destrezas previos de los estudiantes (ver figura 5):

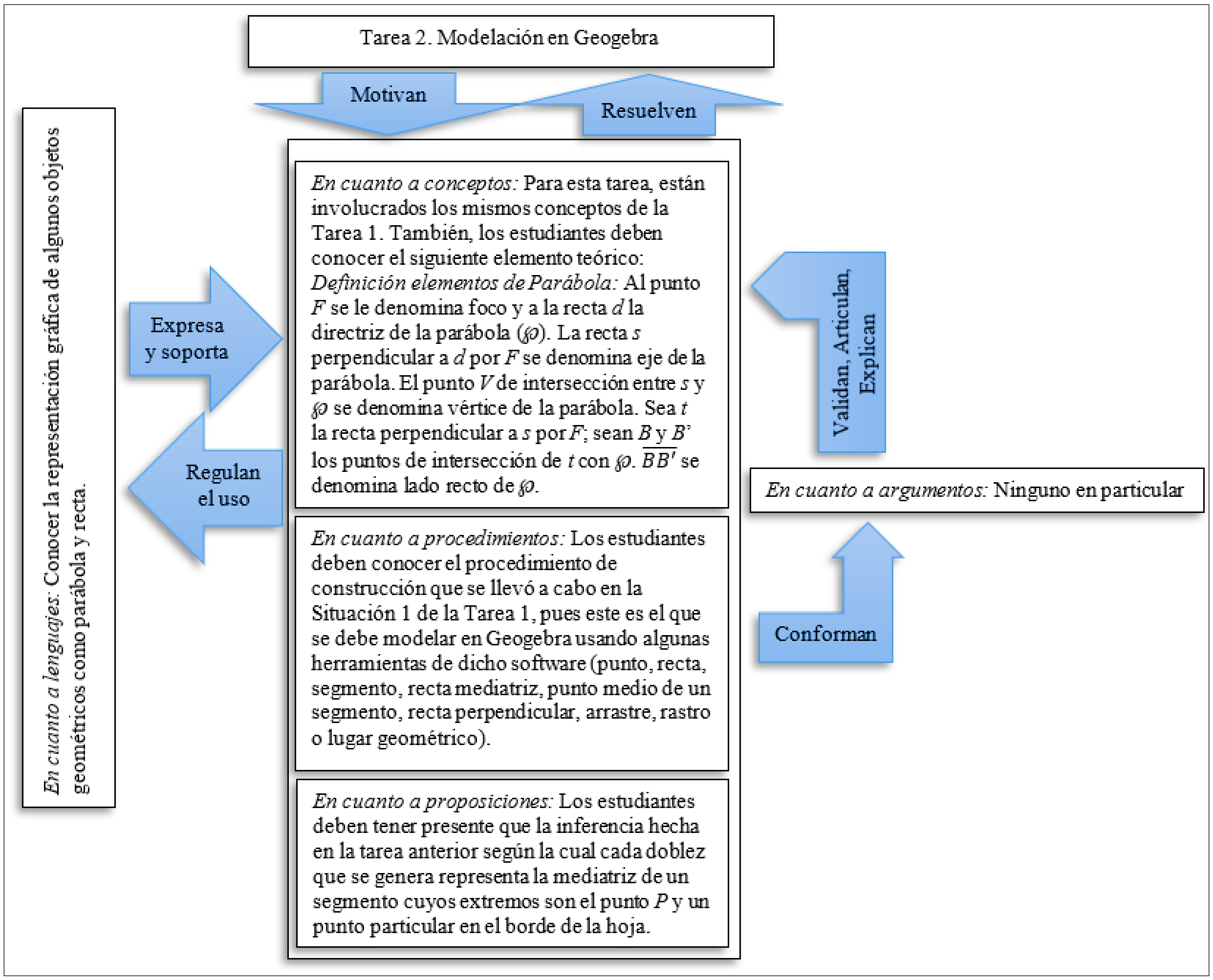


Figura 5. Descripción de los requisitos (Tarea 2)

Descripción de las metas: Con el desarrollo de esta tarea, se pretenden lograr las siguientes expectativas de aprendizaje relativas a objetos primarios (ver figura 6):

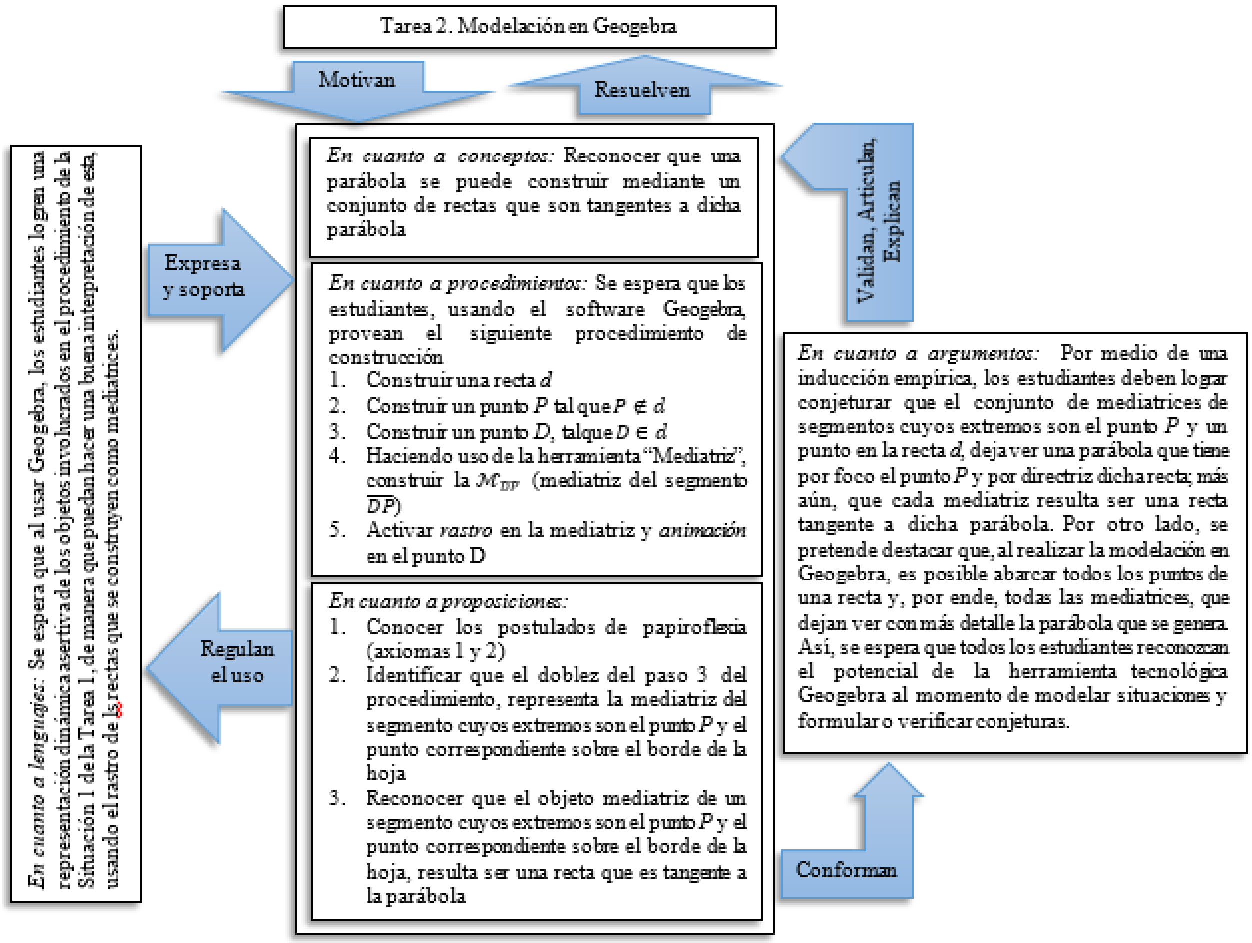


Figura 6. Descripción de las metas (Tarea 2)

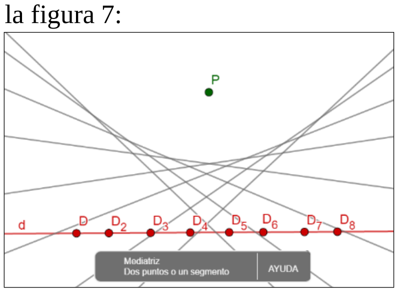
Descripción de los materiales y recursos: Para el desarrollo de esta tarea, se debe hacer uso de un software de geometría dinámica: Geogebra.

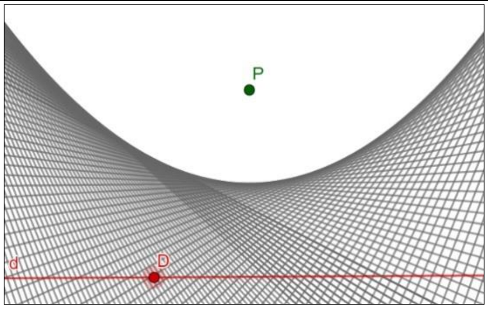
Descripción de la temporalidad: Para llevar a cabo esta tarea, se tienen en cuenta las siguientes etapas:

Etapa 1. Actividad autónoma de los grupos: En aproximadamente 30 minutos, los estudiantes tendrán la oportunidad de discutir, explorar, construir, ser creativos y usar el potencial que proporciona Geogebra para modelar el procedimiento llevado a cabo en papel, y verificar las conjeturas que generaron al responder las preguntas propuestas en la primera tarea.

Etapa 2. Socialización o puesta en común de las distintas propuestas frente al gran grupo: En este momento de negociación es indispensable la intervención del profesor, para guiar de manera adecuada las ideas que surjan al abordar esta tarea, destacando las más relevantes. Por ello, el profesor debe prever posibles respuestas y su intervención, tal como se ilustra en la tabla 5:

Tabla 5. Posibles respuestas e intervención del profesor (Tarea2)

Posibles respuestas	Intervención del profesor
1. Modelación	
Podría darse el caso en el que los estudiantes no sepan qué hacer desde el inicio. La razón de esta actuación radica en la dificultad que presentan los estudiantes al no comprender que cada uno de los dobleces generados sea la mediatriz de un segmento específico, lo que genera que la modelación de dicho doblez no sea tan evidente.	En este caso, el profesor puede actuar enfatizando en los resultados obtenidos al desarrollar la Tarea 1, de manera que se aclare que cada doblez representa a la mediatriz de un segmento especial. Otra manera en la que puede actuar el profesor es presentar los primeros pasos de construcción: 1. Construir una recta d 2. Construir un punto P tal que $P \notin d$ 3. Construir un punto D, tal que $D \in d$ Luego se les pide a los estudiantes que mencionen cómo representar cada doblez mediante el software, esperando que los estudiantes aludan a una recta perpendicular por el punto medio del $\overline{DP}$ o la mediatriz de tal segmento.
Modelación de manera discreta: En este tipo de modelación, el procedimiento de construcción que llevarían a cabo los estudiantes sería el siguiente: 1. Construir una recta d 2. Construir un punto P tal que $P \notin d$ 3. Construir un punto D, tal que $D \in d$ 4. Haciendo uso de la herramienta “Mediatriz”, construir la $\mathcal{M}_{\overline{DP}}$ (mediatriz del segmento $\overline{DP}$) 5. Construir otro punto D_2, tal que $D_2 \in d$ 6. Construir la $\mathcal{M}_{\overline{D_2P}}$ Y así sucesivamente, el estudiante construye exactamente las varias mediatrices que representan varios dobleces generados en la Tarea 1, tal como se ilustra en la figura 7:  *Figura 7. Representación discreta (Tarea 2)* Este tipo de modelación surge de aquellos estudiantes que intentan pasar de manera exacta la experiencia, subutilizando el software. Para ello, los estudiantes toman tan solo ciertos puntos de la recta dada y usan herramientas básicas tales como, recta, punto y mediatriz	El profesor puede intervenir aclarando que esta modelación es natural de aquellos estudiantes que no tienen la experiencia suficiente con el uso software, de manera que lo que se representan en Geogebra es un dibujo exacto de la situación, sin utilizar las herramientas claves de un software de geometría dinámica: el arrastre de puntos y el rastro de objetos.
Modelación de manera continua: En este tipo de modelación, los estudiantes llevan a cabo los mismos pasos de construcción descritos anteriormente en la sección *“En cuanto a procedimientos”*, tal como se ilustra en la figura 8:	El profesor puede intervenir aclarando que esta modelación parte de considerar una *variable* continua (punto D en la recta), que representa todos los puntos de la recta y por defecto, también se consideran todas las mediatrices de los segmentos $\overline{DP}$ permitiendo así, observar de manera más fina y suave la determinación de la parábola. Abordar la tarea presentada de esta manera, permite destacar el dinamismo y las

 *Figura 8. Representación continua (Tarea 2)* Esta construcción surge de aquellos estudiantes que han tenido experiencia con el uso de Geogebra, pues hacen uso tanto de herramientas básicas (punto, recta y mediatriz) como de herramientas más sofisticadas tales como animación y rastro.	potencialidades del software que favorecen la visualización y verificación de conjeturas.
2. Validación de conjeturas:	
i. El objeto que se visualiza, al terminar de generar todos los dobleces, es efectivamente una parábola.	Esto se puede verificar con la modelación anterior hecha en Geogebra.
ii. El objeto fundamental que está involucrado en las dos construcciones (papel plegado y Geogebra) es la mediatriz.	Pues fue la herramienta fundamental que se utilizó para realizar la modelación.
iii. Debido a que el objeto que se vislumbra es una parábola ○ El punto P resulta ser efectivamente el foco y la recta que se hace primero (que modela el borde de la hoja), la recta la directriz de esta.	Teniendo en cuenta la definición de los elementos de una parábola.
○ Cada doblez, además de representar la mediatriz de un segmento particular, representa también una recta que es tangente a la parábola	Podemos intuir a partir de la visualización que dicha recta parece ser tangente a la parábola, pero sigue siendo un hecho geométrico que aún no está garantizado.

Etapa 3. Validación e institucionalización de la solución de la tarea y de los contenidos geométricos involucrados (tanto sintéticos como analíticos). Esta etapa finaliza con la institucionalización de dos aspectos:

- *Institucionalización del procedimiento de construcción*: Los pasos de construcción más afortunados en esta modelación que permiten visualizar de manera suave que la curva que se genera con todas las mediatrices es una parábola, son:
  1. Construir una recta d
  2. Construir un punto P tal que $P \notin d$
  3. Construir un punto D, tal que $D \in d$
  4. Haciendo uso de la herramienta "Mediatriz", construir la $\mathcal{M}_{\overline{DP}}$ (mediatriz del segmento $\overline{DP}$)
  5. Activar *rastro* en la mediatriz y *animación* en el punto D
- *Institucionalización de conjeturas:* Además de formalizar el enunciado de las conjeturas que surgieron con el abordaje de la primera tarea, se conjetura también que una condición suficiente para que una recta sea tangente a una parábola, es que esta debe ser mediatriz de

un segmento particular ($\overline{DP}$). Las conjeturas que se formalizan, y que se estudiarán en adelante, son:

Conjetura 1	**Conjetura 2**
Dada una recta d, un punto D, tal que $D \in d$ y un punto P tal que $P \notin d$. El conjunto de todas las $\mathcal{M}_{\overline{DP}}$ determinan una parábola $\wp$.	Dada una recta d, un punto D, tal que $D \in d$ y un punto P tal que $P \notin d$. La $\mathcal{M}_{\overline{DP}}$ es tangente a la parábola $\wp$, determinada por el conjunto de todas las $\mathcal{M}_{\overline{DP}}$.

- *Reflexión:* De la experiencia obtenida a partir del uso de Geogebra, es valioso aclarar que en geometría dinámica (la cual modela la geometría sintética) existen variables y es importante reconocerlas y promover su uso y comprensión. Para este fin, el profesor debe explicar que el término *variable* no solo está presente en Álgebra, sino también en Geometría, pero en cada dominio su significado cambia: en Álgebra, una *variable* representa a todos los elementos de un conjunto determinado (generalmente, este conjunto es $\mathbb{R}$); en geometría, un punto es una *variable* que representa a todos los puntos de la recta, (en este caso, D).

En conclusión, *¿por qué es importante hacer la experiencia en el papel plegado y en el software?:* La importancia de esta tarea se centra en que los estudiantes tengan un acercamiento didáctico a la situación matemática que se plantea con el *problema general*. Al llevar a cabo estas tareas, los estudiantes tienen la posibilidad de percatarse de que el conjunto de todas las mediatrices posibilita determinar una Parábola; además, esa familia de mediatrices resultan ser rectas tangentes a la Parábola. Esta experiencia, les provee un contexto para llevar a cabo un procedimiento de construcción en geometría dinámica, entorno en al cual, se puede modelar la situación de manera muchos más eficiente y eficaz. En cualquier caso, el objetivo de estas tareas es que los estudiantes vayan identificando que la mediatriz de un segmento específico puede ser un objeto clave para poder abordar el problema general de forma sintética: ¿Cómo construir la recta tangente a una parábola por un punto dado de ella?

Una vez se haya institucionalizado que el objeto que se vislumbra al generar todas las mediatrices de un segmento específico es una parábola y que dicha mediatriz es además una recta tangente a la parábola, es necesario determinar el punto de tangencia. Por ello, la Tarea 3.

Tarea 3. Punto de tangencia
Con base en los aspectos institucionalizados en las tareas anteriores, se ha conjeturado que el conjunto de rectas (mediatrices del segmento cuyos extremos son el punto P y un punto particular D que esté en la recta d) deja vislumbrar una parábola. Sería afortunado precisar cuál punto de cada recta haría parte efectivamente de la parábola. Provea un procedimiento de construcción para determinar, en cada mediatriz, el punto que pertenece a la parábola.

Descripción de requisitos: Los requisitos para abordar esta tarea, se ilustran en la figura 9.

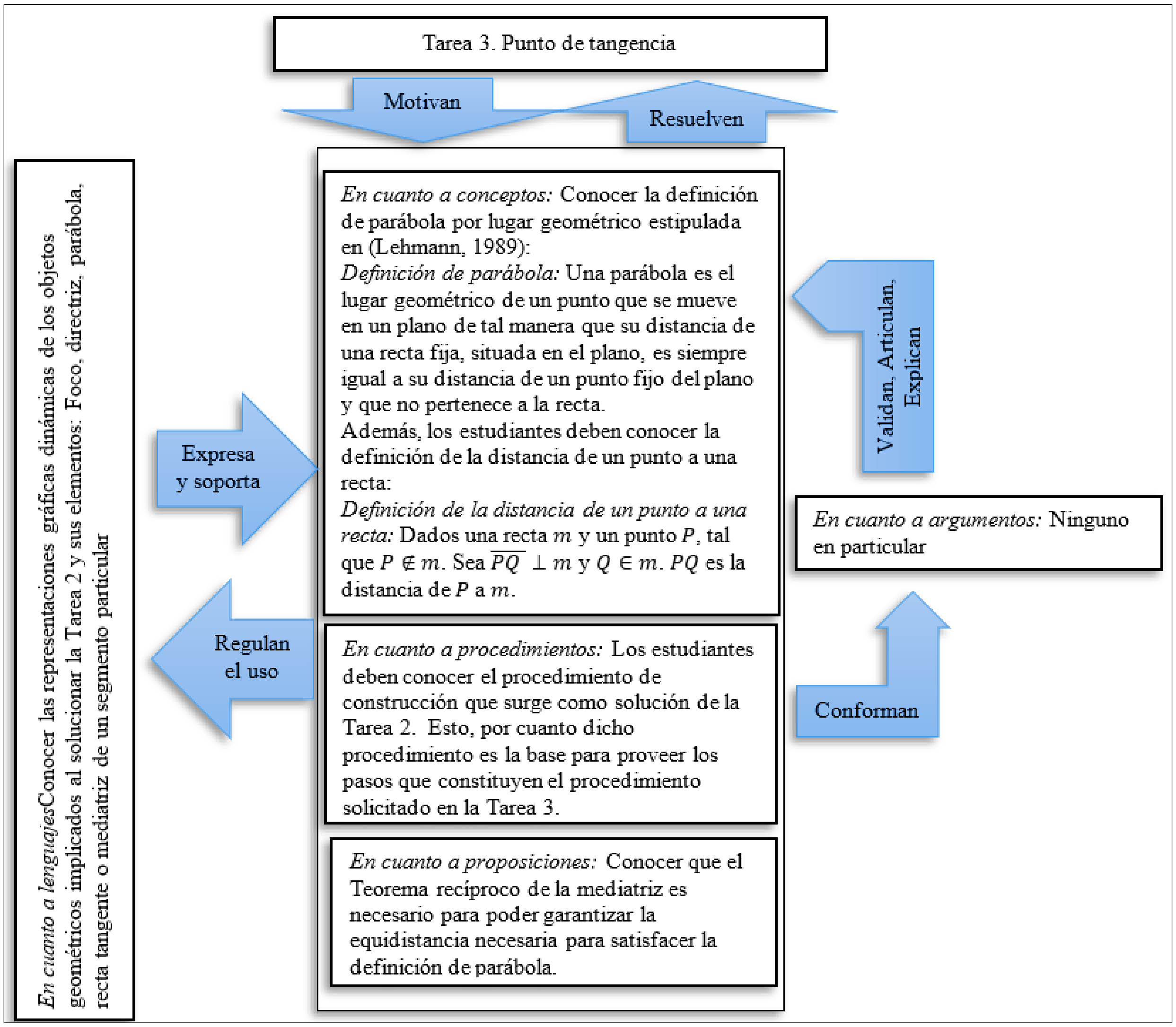


Figura 9. Descripción de los requisitos (Tarea 3)

Descripción de las metas: Con el desarrollo de esta tarea, se pretenden lograr las siguientes expectativas de aprendizaje (ver figura 10).

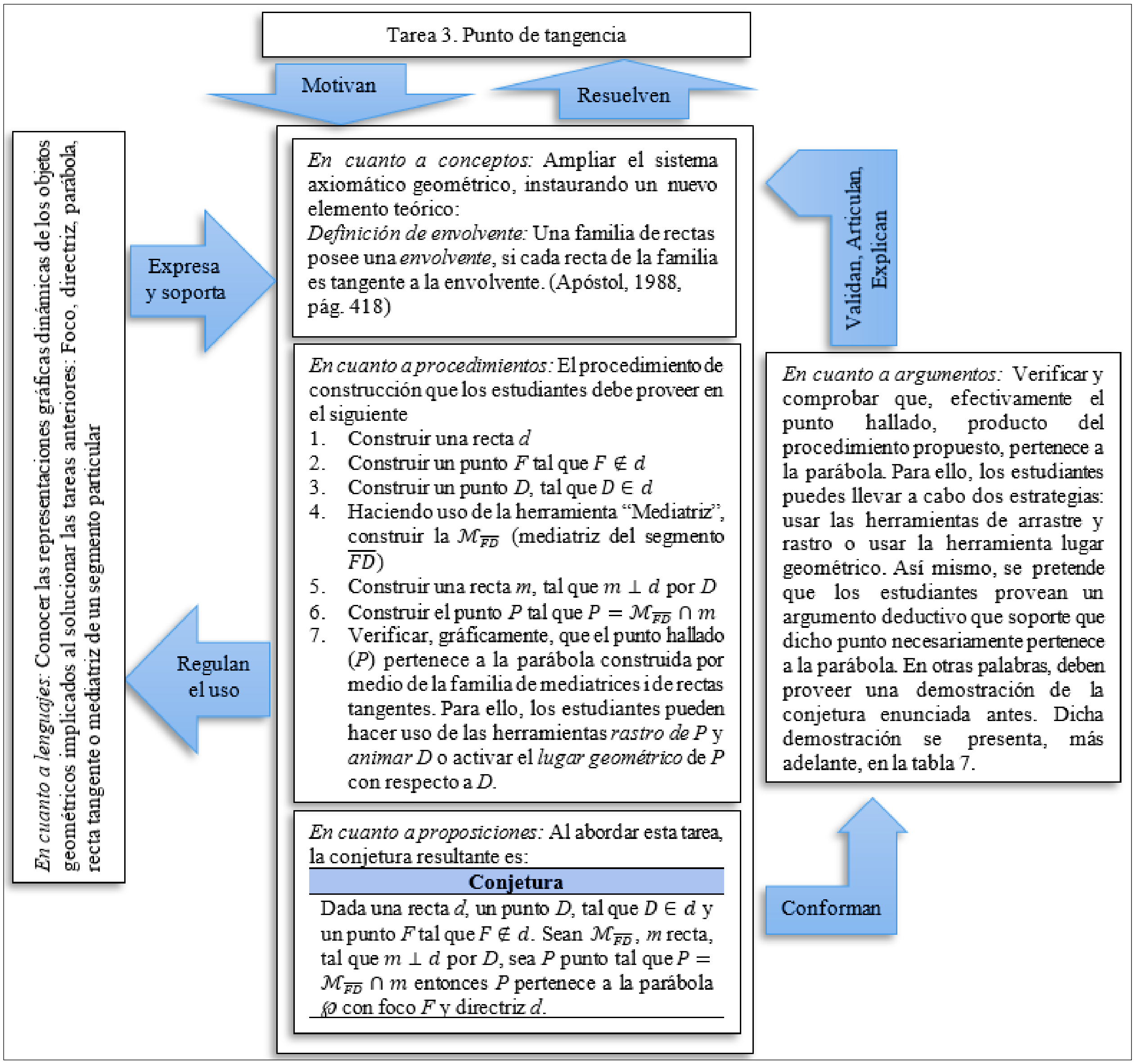


Figura 10. Descripción de las metas (Tarea 3)

Descripción de los materiales y recursos: Para abordar esta tarea, se hará uso de un software de geometría dinámica: Geogebra.

Descripción de la temporalidad: El desarrollo de esta tarea, se lleva cabo a partir de las siguientes etapas:

Etapa 1. Actividad autónoma de los grupos: En aproximadamente 20 minutos, cada grupo de tres estudiantes debe abordar esta tarea y para ello, debe proponer y verificar una estrategia de construcción de una posible solución, haciendo uso de las herramientas que proporciona Geogebra: *recta perpendicular, recta paralela, punto de intersección, arrastre, rastro o lugar geométrico*. Al resolver esta tarea en grupos, se favorece, la exploración, la creatividad, la discusión y el respeto por las opiniones de los demás.

Etapa 2. Socialización o puesta en común de las distintas propuestas frente al gran grupo: Es importante que el profesor tenga presente que pueden surgir muchos intentos y propuestas de los estudiantes, de los cuales se deben descartar las incorrectas y resaltar las correctas, de manera conjunta. De este momento de exploración en Geogebra, pueden surgir las siguientes posibles soluciones, las cuales deben ser verificadas, es decir que, si se encontró el punto de deseado, este debe generar la misma parábola que se generó por el conjunto de rectas mediatriz. Los posibles procedimientos que pueden surgir, no necesariamente correctos, se presentan en la tabla 6:

Tabla 6. Posibles soluciones y verificación (Tarea 3)

<table>
<tr><th>Posible solución</th><th>Verificación</th></tr>
<tr><td>
Cabe aclarar que puede ocurrir el caso en que los estudiantes no tengan claridad acerca de la definición de la distancia de un punto a una recta. Por ello, se basarán en la definición de la parábola para hallar el punto P en la mediatriz que pertenezca a dicha parábola. En este caso, los estudiantes pueden proponer una construcción blanda realizando el siguiente procedimiento:

1. Construir una recta d
2. Construir un punto F, tal que $F \notin d$
3. Construir un punto D, tal que $D \in d$
4. Haciendo uso de la herramienta “Mediatriz”, construir la $\mathcal{M}_{\overline{FD}}$ (mediatriz del segmento $\overline{FD}$)
5. Construir un punto P, tal que $P \in \mathcal{M}_{\overline{FD}}$
6. Determinar PF y PD, usando la herramienta “Distancia o Longitud”

Al realizar dicho procedimiento, se obtiene un resultado similar al que se ilustra en la figura 11:

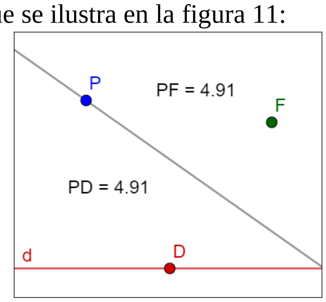


Figura 11. Propuesta de solución 1 (Tarea 3)
</td><td>
Al realizar la verificación de la propuesta 1, usando *rastro de P* y *animar D* (ver figura 12), es claro que el punto P no genera a la parábola.

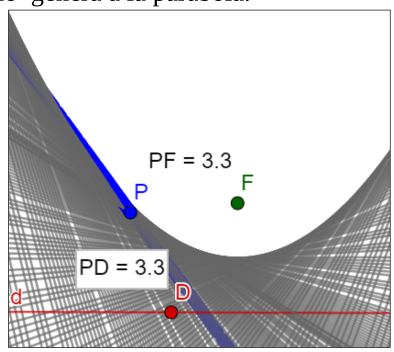
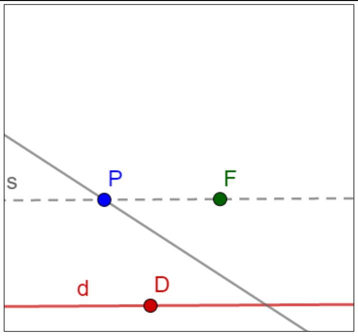
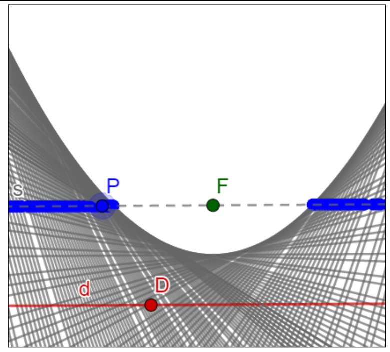
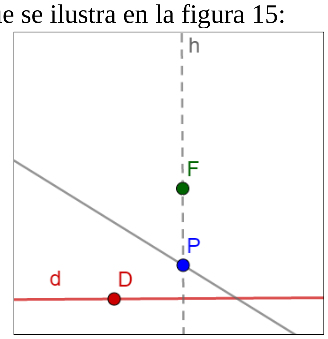
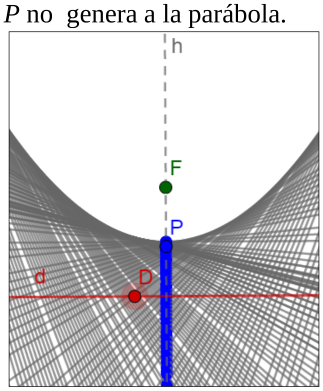
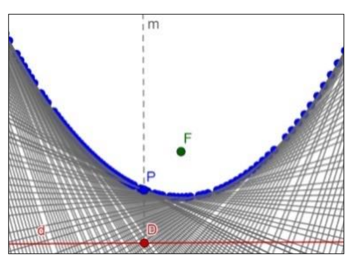


Figura 12. Verificación de la propuesta de solución 1 (Tarea 3)

Esto, se debe a que la definición de parábola no está bien aplicada, en particular, en cuanto a la definición de la distancia de un punto a una recta, pues es necesario que $\overleftrightarrow{PD} \perp d$. Por ello, esta propuesta no es correcta.
</td></tr>
<tr><td>
Los estudiantes pueden proponer el siguiente procedimiento:

1. Construir una recta d
2. Construir un punto F, tal que $F \notin d$
3. Construir un punto D, tal que $D \in d$
4. Haciendo uso de la herramienta “Mediatriz”, construir la $\mathcal{M}_{\overline{FD}}$ (mediatriz del segmento $\overline{FD}$)
5. Construir s recta, tal que $s \parallel d$ por F
6. Construir punto P tal que $P = \mathcal{M}_{\overline{FD}} \cap s$

Al realizar dicho procedimiento, se obtiene un resultado similar al que se ilustra en la figura 13:
</td><td>
Al realizar la verificación de la propuesta 2, usando *rastro de P* y *animar D* (ver figura 14), es claro que el punto P no genera a la parábola.
</td></tr>
</table>

 *Figura 13. Propuesta de solución 2 (Tarea 3)*	 *Figura 14. Verificación de la propuesta de solución 2 (Tarea 3)* Esto, se debe a que no se tiene en cuenta que $\overleftrightarrow{PD}$ debe ser perpendicular a *d*. Por ello, esta propuesta no es correcta.
Los estudiantes pueden proponer el siguiente procedimiento: 1. Construir una recta d 2. Construir un punto F, tal que $F \notin d$ 3. Construir un punto D, tal que $D \in d$ *4.* Haciendo uso de la herramienta “Mediatriz”, construir la $\mathcal{M}_{\overline{FD}}$ (mediatriz del segmento $\overline{FD}$) 5. Construir una recta h, tal que $h \perp d$ por F 6. Construir punto P tal que $P = \mathcal{M}_{\overline{FD}} \cap h$ Al realizar dicho procedimiento, se obtiene un resultado similar al que se ilustra en la figura 15:  *Figura 15. Propuesta de solución 3 (Tarea 3)*	Al realizar la verificación de la propuesta 3, usando *rastro de P* y *animar D* (ver figura 16), se logra verificar que el punto *P* no genera a la parábola.  *Figura 16. Verificación de la propuesta de solución 3 (Tarea 3)* Esto, se debe a que no se tiene en cuenta la definición de la distancia de un punto a una recta, pues, aunque $h \perp d$, la distancia de *P* a d no es *PD*. Por ello, esta propuesta no es correcta.
Los estudiantes pueden proponer el siguiente procedimiento: 1. Construir una recta d 2. Construir un punto F, tal que $F \notin d$ 3. Construir un punto D, tal que $D \in d$ *4.* Haciendo uso de la herramienta “Mediatriz”, construir la $\mathcal{M}_{\overline{FD}}$ (mediatriz del segmento $\overline{FD}$) 5. Construir m recta, tal que $m \perp d$ por D 6. Construir punto P tal que $P = \mathcal{M}_{\overline{FD}} \cap m$ Al realizar dicho procedimiento, se obtiene un resultado similar al que se ilustra en la figura 17:	Al realizar la verificación de la propuesta 4, usando *rastro de P* y *animar D* (ver figura 18) o activar el *lugar geométrico* de *P* con respecto a *D* (ver figura 19), se verifica que, en ambos casos, *P* pertenece a la parábola determinada por la familia de mediatrices (rectas tangentes)  *Figura 18. Verificación 1 de la propuesta de solución 4 (Tarea 3)*

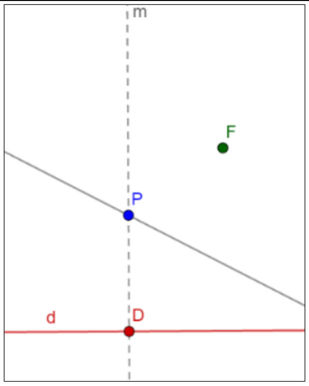


Figura 17. Propuesta de solución 4 (Tarea 3)

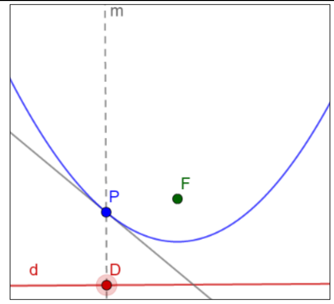


Figura 19. Verificación 2 de la propuesta de solución 4 (Tarea 3)

Esto se debe a que, se aplica de manera correcta la definición de la distancia de un punto a una recta, en la que $m \perp d$ y así, la distancia de P a d es PD. Por ello, esta propuesta de construcción da solución a la Tarea 3.

Los estudiantes pueden proponer el siguiente procedimiento:

1. Construir una recta d
2. Construir un punto F, tal que $F \notin d$
3. Construir un punto D, tal que $D \in d$
4. Haciendo uso de la herramienta "Mediatriz", construir la $\mathcal{M}_{\overline{FD}}$ (mediatriz del segmento $\overline{FD}$)
5. Construir eje focal (recta k perpendicular a d por F)
6. Construir una recta l, tal que $l \parallel k$ por D
7. Construir punto P, tal que $P = \mathcal{M}_{\overline{FD}} \cap l$

Al realizar dicho procedimiento, se obtiene un resultado similar al que se ilustra en la figura 20:

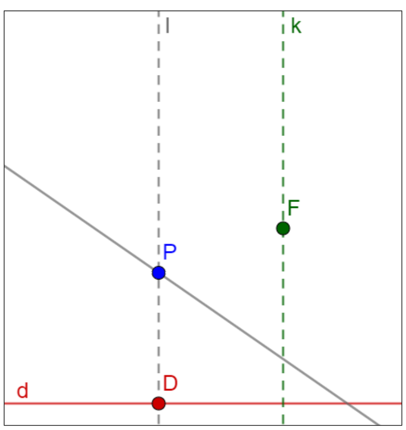


Figura 20. Propuesta de solución 5 (Tarea 3)

Al realizar la verificación de la propuesta 5, usando *rastro de P* y *animar D* (ver figura 21) o activar el *lugar geométrico* de P con respecto a D (ver figura 22), es evidente que, en ambos casos, P pertenece a la parábola determinada por la familia de mediatrices (rectas tangentes)

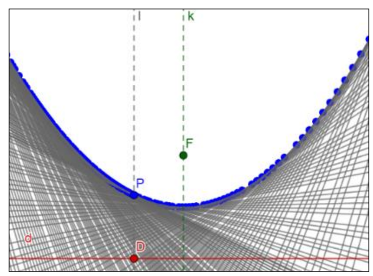


Figura 21. Verificación 1 de la propuesta de solución 5 (Tarea 3)

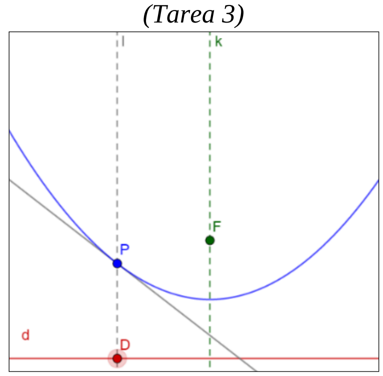


Figura 22. Verificación 2 de la propuesta de solución 5 (Tarea 3)

Esto, debido al siguiente hecho geométrico: como $l \parallel k$ y $k \perp d$, entonces $l \perp d$. Con lo anterior, se garantiza una correcta aplicación de la distancia de P a d. Por ello, esta propuesta de construcción también da solución a la Tarea 3.

Fase 3. Validación e institucionalización de la solución de la tarea y de los contenidos geométricos involucrados (tanto sintéticos como analíticos). Es claro que las propuestas 4 y 5, presentadas en la tabla 6 dan solución a la Tarea 3, es decir, permiten hallar el punto P que pertenece a la mediatriz y genera a la parábola. Con base en estos resultados, se sugiere elaborar, conjuntamente, una conjetura que surge del procedimiento de construcción y realizar la demostración de esta. A continuación, en la tabla 7, presentamos el enunciado de dicha conjetura y la respectiva demostración:

Tabla 7. Conjetura y demostración asociada a la Tarea 3

Conjetura	
Dada una recta d, un punto D, tal que $D \in d$ y un punto F tal que $F \notin d$. Sea $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$, m recta, tal que $m \perp d$ por D, sea P punto, tal que $P = \mathcal{M}_{\overline{FD}} \cap m$ entonces P pertenece a la parábola $\wp$ con foco es F y directriz d.	
Demostración	
Datos	**Afirmación-Razón**
1. Recta d Punto D, tal que $D \in d$ Punto F tal que $F \notin d$ $\mathcal{M}_{\overline{DP}}$ m recta, talque $m \perp d$ por D P punto, tal que $P = \mathcal{M}_{\overline{FD}} \cap m$	Dado
2. $P \in \mathcal{M}_{\overline{FD}} \wedge P \in m$	D. Intersección de conjuntos (1)
3. $PF = PD$	D. Mediatriz (2)
4. $d(P,d) = PD$	D. Distancia de un punto a una recta (1,2)
5. $PF = d(P,d)$	Principio de sustitución (3,4)
6. $P \in \wp$ con foco es F y directriz d.	D. Parábola (5)

Hecho lo anterior, se sugiere que el profesor pregunte a los estudiantes ¿qué relación tienen la parábola surgida por lugar geométrico a propósito del procedimiento institucionalizado y la recta mediatriz del segmento $\overline{DF}$? Se espera que los estudiantes digan que dicha mediatriz es tangente a la parábola en el punto P. Con ello, vale la pena introducir un nuevo elemento teórico al sistema axiomático geométrico:

> *Definición de envolvente*: Una familia de rectas posee una *envolvente*, si cada recta de la familia es tangente a la envolvente (Apostol, 1988, pág. 418).

De esta manera, el profesor puede concluir, con los estudiantes, que la familia de mediatrices construidas ($\mathcal{M}_{\overline{FD}}$), definen una envolvente: una parábola; de esta manera, dichas mediatrices son tangentes a la parábola.

Para el diseño de la secuencia se concibió que la experiencia de actividad matemática que se puede al abordar con las tareas anteriores, provee ideas para producir un procedimiento de construcción de la recta tangente a una parábola por un punto dado de ella. Creemos que un método de análisis debe ser puesto en juego, tomando como base los objetos (procedimientos y conjeturas) institucionalizados como producto de la Tarea 3, para solucionar la Tarea 4, cuyo enunciado se presenta enseguida:

Tarea 4. Solución sintética del problema
Con base en las experiencias y resultados obtenidos al abordar las tareas anteriores, aborde la siguiente situación: Usando la herramienta "parábola" del software Geogebra, construya parábola $\wp$ con un foco F y una recta directriz d. Ponga un punto P en $\wp$. Provea un procedimiento para construir la recta tangente a $\wp$ por el punto P.

Descripción de los requisitos: Para el desarrollo de esta tarea se deben tener presentes los siguientes requisitos (ver figura 23).

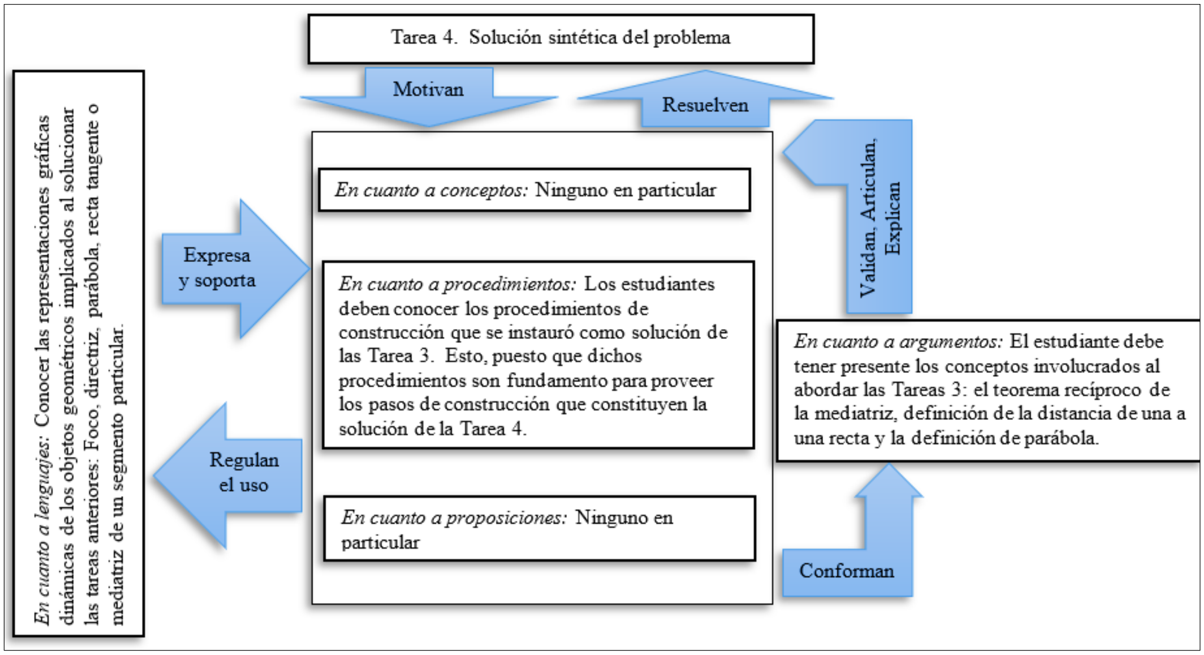


Figura 23. Descripción de los requisitos (Tarea 4)

Descripción de las metas: Con el desarrollo de esta tarea, se pretenden lograr las siguientes expectativas de aprendizaje (ver figura 24).

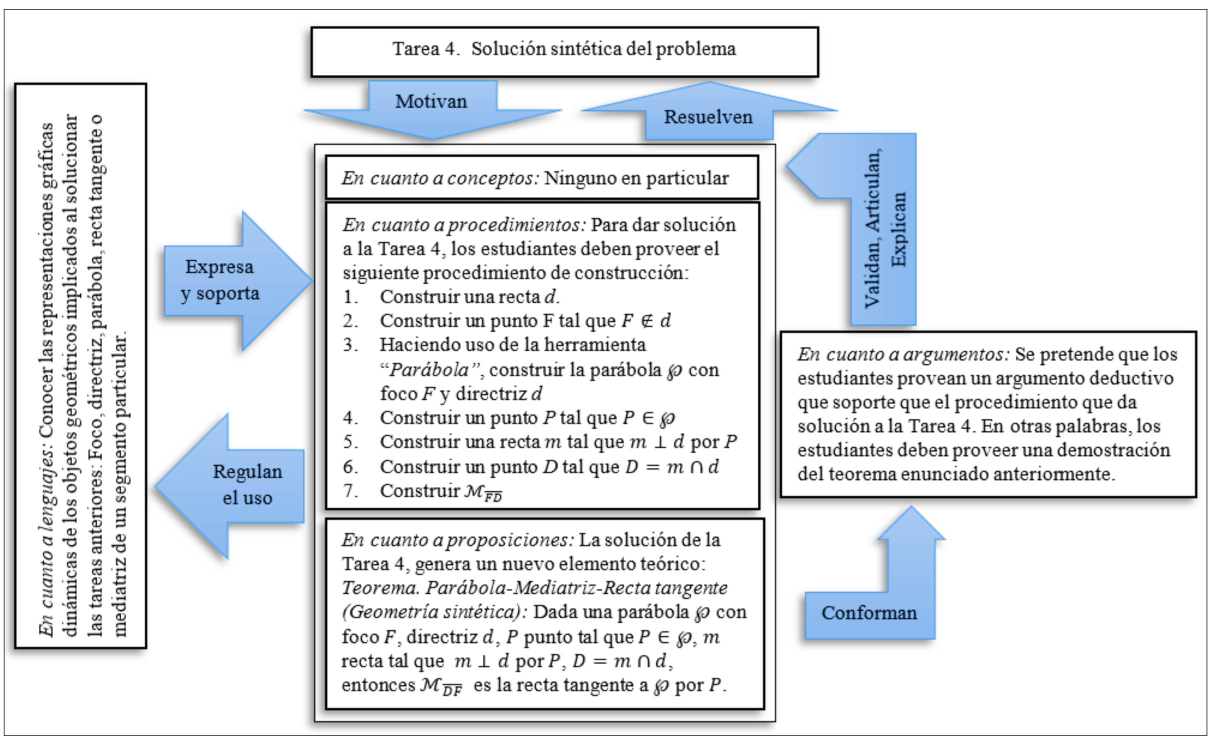


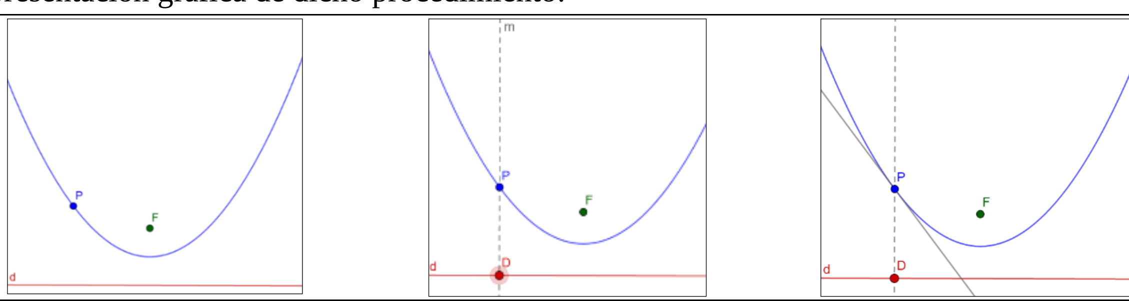
Figura 24. Descripción de las metas (Tarea 4)

Descripción de la temporalidad: Esta tarea, se estima que puede ser desarrollada en máximo 20 minutos, en grupos de tres estudiantes. Para el abordaje de esta tarea, el profesor simplemente da la instrucción de resolver la tarea propuesta con base en los conocimientos obtenidos con las tareas anteriores. Con base en ello, los estudiantes deben establecer que "reversar" pasos del procedimiento correcto surgido para la Tarea 3, provee la solución al problema de la Tarea 4 (ver tabla 8):

Tabla 8. Métodos de análisis y síntesis involucrados en la solución del problema general

Método de análisis (Tarea preliminares)	**Método de síntesis (Tarea 4)**
A continuación, se presenta el procedimiento general que se institucionalizó al abordar las tareas 1, 2 y 3: 1. Construir una recta d 2. Construir un punto F, tal que $F \notin d$ 3. Construir un punto D, tal que $D \in d$ *4.* Haciendo uso de la herramienta "Mediatriz", construir la $\mathcal{M}_{\overline{FD}}$ (mediatriz del segmento $\overline{FD}$) 5. Construir m recta, tal que $m \perp d$ por D 6. Construir punto P tal que $P = \mathcal{M}_{\overline{FD}} \cap m$ Los pasos 1, 2, 3 y 4 es lo institucionalizado en las Tareas 1 y 2. Los pasos 5 y 6 constituyen lo procedimiento llevado a cabo al abordar la Tarea 3; aquí, se construye el punto P a partir del punto D. Este procedimiento representa una perfecta ejemplificación del método de *análisis*, pues se asume el problema resuelto; en otras palabras, se toma una parábola con la recta tangente a ella por un punto P y, con base en la experiencia establecida con el procedimiento anterior, se determina la condición que debe tener esa recta para que sea tangente; esto es, que dicha recta debe ser la $\mathcal{M}_{\overline{FD}}$.	Una vez descubierta la condición suficiente para resolver el problema general haciendo uso del método de análisis, se prosigue a usar el método de síntesis; esto es, hacer un proceso de devolución en el procedimiento institucionalizado al abordar las tareas preliminares, para presentar, de manera deductiva, la solución del problema. El procedimiento que deben proveer los estudiantes es el siguiente: 1. Construir una recta d. 2. Construir un punto F tal que $F \notin d$. 3. Haciendo uso de la herramienta "*Parábola*", construir la parábola $\wp$ con foco F y directriz d. 4. Construir un punto P tal que $P \in \wp$ (Figura 25a). 5. Construir una recta m tal que $m \perp d$ por P 6. Construir un punto D tal que $D = m \cap d$ (Figura 25b). 7. Construir $\mathcal{M}_{\overline{FD}}$ (Figura 25c) La "devolución de pasos" se observa claramente en este procedimiento, donde se construye el punto D a partir del punto P (no P a partir de D) y, por último, se construye la $\mathcal{M}_{\overline{FD}}$ que se sabe (por la experiencia previa) que es la recta tangente a la parábola por P.

En resumen, el procedimiento que se presenta en la columna de la derecha de la Tabla 8 se constituye en una solución, desde la geometría clásica, de la Tarea 4. En la figura 25, se presenta la representación gráfica de dicho procedimiento:



(a) (b) (c)

Figura 25. Representación gráfica de solución de la tarea 4 desde un punto de vista de la geometría clásica

Hecho lo anterior, se sugiere que el profesor motive la elaboración de una proposición condicional que encapsule el procedimiento establecido; se espera que el enunciado que se formule sea el siguiente:

Dada una parábola $\wp$ con foco F, directriz l, P punto tal que $P \in \wp$, m recta tal que $m \perp l$ por P, $D = m \cap l$, entonces $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$ es la recta tangente a $\wp$ por P.

Cabe aclarar que, hasta el momento, se ha dicho que el método de solución antes mencionado funciona; pero es necesario hacer una demostración de manera que valide el procedimiento. Por ello, proponemos la Tarea 5.

Tarea 5. Demostración
Demuestre el enunciado surgido (e institucionalizado) del procedimiento construcción propuesto para la tarea 4 que, en adelante, llamaremos Teorema Parábola-Mediatriz-Recta tangente: **Teorema Parábola-Mediatriz-Recta tangente:** Dada una parábola $\wp$ con foco F, directriz l, P punto tal que $P \in \wp$, m recta tal que $m \perp l$ por P, $D = m \cap l$, entonces $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$ es la recta tangente a $\wp$ por P.

Descripción de los requisitos: Para el desarrollo de esta tarea, se deben tener en cuenta los siguientes requisitos (ver figura 26).

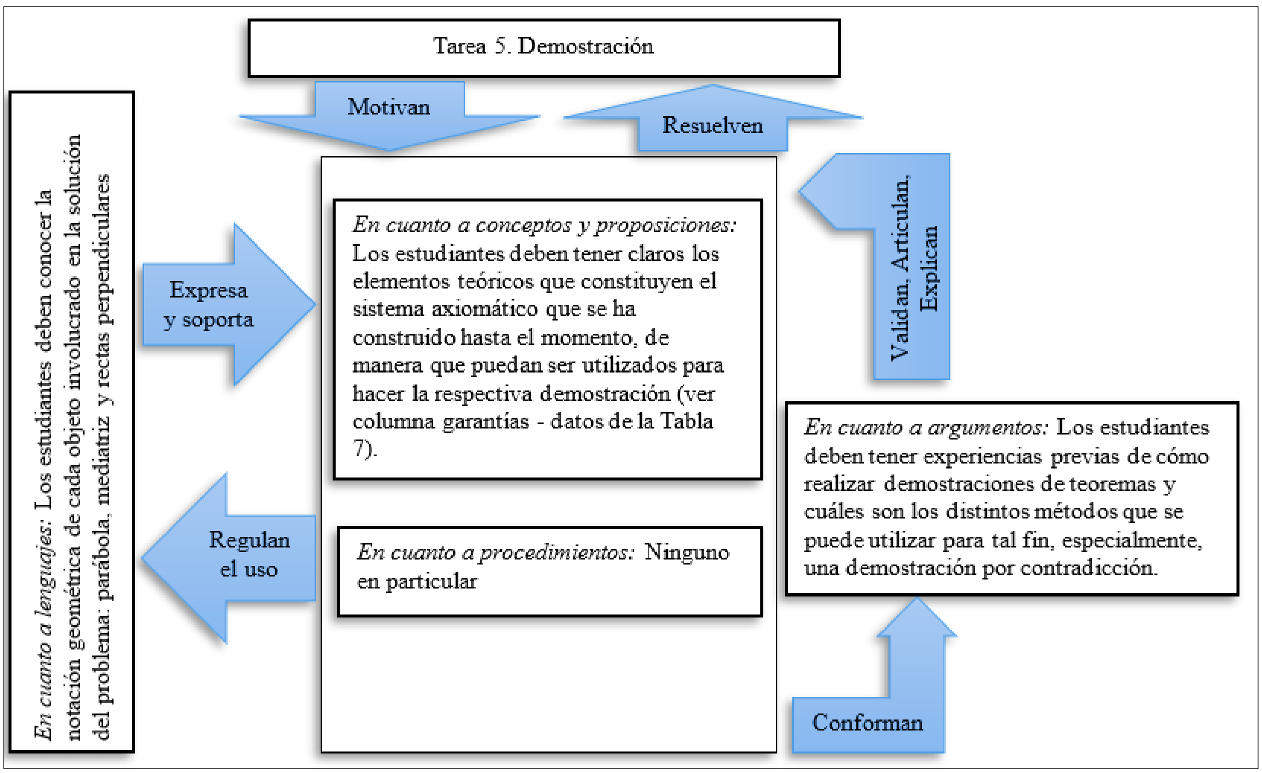


Figura 26. Descripción de los requisitos (Tarea 5)

Descripción de las metas: Con el desarrollo de esta tarea, se pretenden lograr las siguientes expectativas de aprendizaje (ver figura 27).

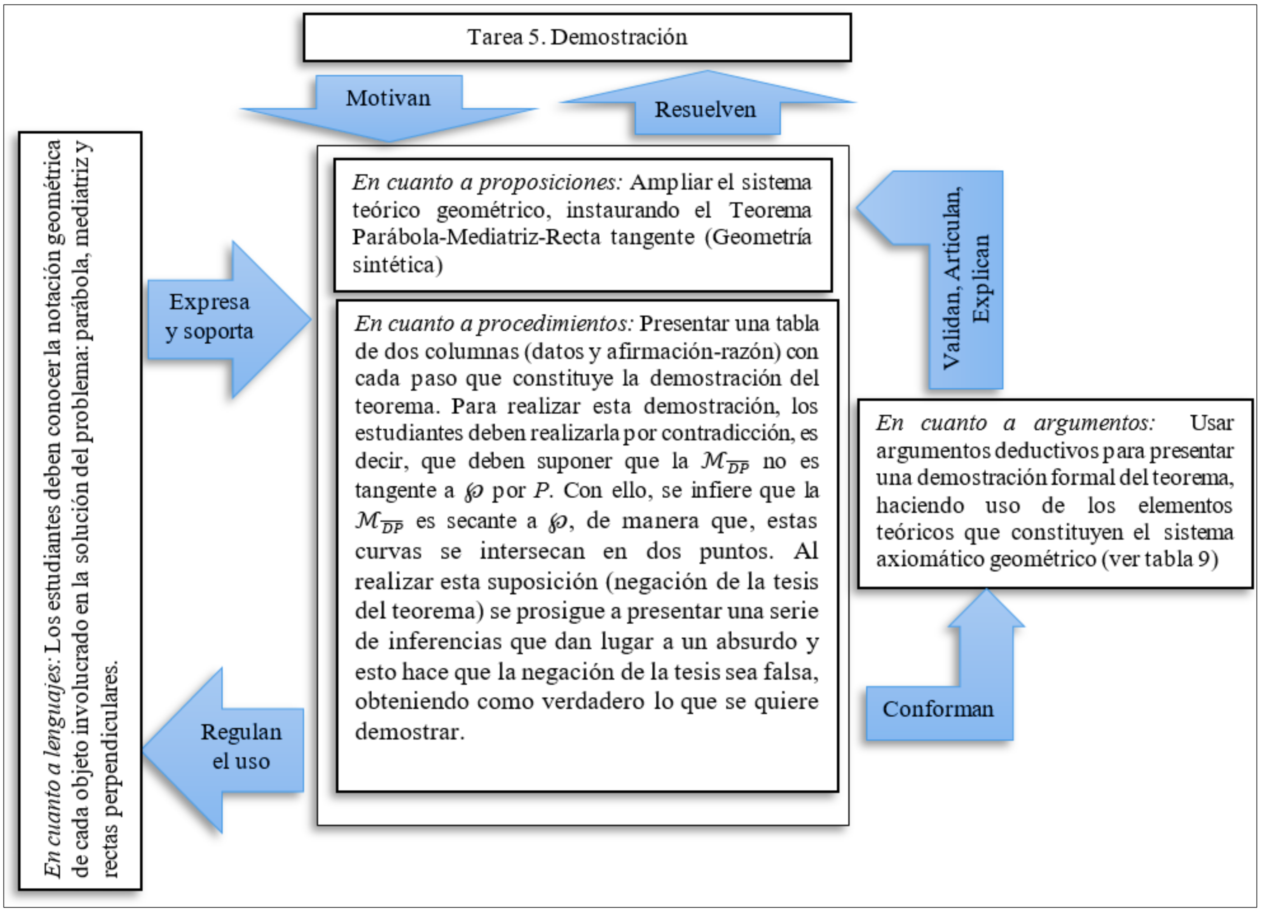


Figura 27. descripción de las metas (Tarea 5)

Descripción de la temporalidad: Para el desarrollo de esta tarea, el profesor simplemente da la instrucción de resolver la tarea propuesta con base en los elementos teóricos dados que constituyen el sistema teórico geométrico construido hasta el momento. Esta etapa, puede realizarse en el tablero, donde el profesor es el guía o como una tarea para realizar en grupos de 3 estudiantes, en la clase o en momentos de extra-clase. En la tabla 9, se presenta la solución de la tarea propuesta:

Tabla 9. Demostración T. Parábola-Mediatriz-Recta tangente (Geometría sintética).

T. Parábola-Mediatriz-Recta tangente (Geometría sintética): Dada una parábola ℘ con foco F, directriz l, P punto tal que $P \in ℘$, m recta tal que $m \perp l$ por P, $D = m \cap l$, entonces $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$ es la recta tangente a ℘ por P.

Demostración	
Aserción	**Garantía-Datos**
1. Parábola ℘ Foco F Directriz l P punto tal que $P \in ℘$ m recta tal que $m \perp l$ por P D punto tal que $D = m \cap l$	Dado
2. $D \in m \wedge D \in l$	Definición: Intersección de conjuntos (1)
3. $m \perp l$ por D	Teorema: Recta perpendicular punto en recta (1)
4. $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$ es secante a ℘	Negación de la tesis Caracterización de recta tangente

5. Sean P y P_1 puntos tales que $\{P, P_1\} = \wp \cap \mathcal{M}_{\overline{DF}}$ $P \neq P_1$	D. Recta Secante (6,1)
6. $P_1 \in \wp \wedge P_1 \in \mathcal{M}_{\overline{DF}}$	D. Intersección de conjuntos (3)
7. $P_1F = P_1D$	D. Mediatriz (7)
8. $P_1F = d(P_1, l)$	D. Parábola (7,1)
9. Sea k recta tal que $k \perp l$ por P_1	T. Recta perpendicular punto externo (7,1)
10. Sea D_1 punto, tal que $D_1 = k \cap l$	T. Intersección de rectas (10)
11. $D_1 \in k \wedge D_1 \in l$	D. Intersección de conjuntos (11)
12. $d(P_1, l) = P_1D_1$	D. Distancia de un punto a una recta (10,11)
13. $P_1F = P_1D_1$	Principio de sustitución (9,12)
14. $P_1D = P_1D_1$	Principio de sustitución (8,13)
15. Sea ΔP_1D_1D	D. Triángulo (7,2,12)
16. $\overline{P_1D} \cong \overline{P_1D_1}$	D. Segmentos congruentes (15)
17. El ΔP_1D_1D es isósceles	D. Triángulo isósceles (17)
18. $\angle P_1DD_1 \cong \angle P_1D_1D$	T. Triángulo isósceles (18)
19. $\angle P_1D_1D$ es recto	D. Perpendicularidad (10,11)
20. $\angle P_1DD_1$ es recto	T. Rectos congruentes (19,20)
21. $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$ es tangente a $\wp$, por P	PRA (Principio de reducción al absurdo) (4,15,19,20) Para este caso, se tendría un triángulo con dos ángulos rectos, lo cual es un absurdo.

4.2.1.2 Secuencia para determinar una solución en el dominio de la geometría analítica

Recordamos que esta secuencia de tareas pretende que los estudiantes aborden una solución al *problema general* expuesto al inicio de esta primera gran secuencia: determinar la recta tangente a una parábola por un punto dado de ella. En lo que se sigue, presentamos una secuencia que pretende abordar su solución desde el dominio de la geometría analítica. En esa perspectiva, concebimos dos posibles respuestas, una que denominamos solución sintético-analítica y otra analítica. La primera de estas se centra en proponer una solución algebraica que se basa en el procedimiento que provee la solución sintética al abordar la Tarea 4. La segunda solución se centra en abordar el problema desde un punto de vista meramente analítico. Enseguida, se presenta la descripción de cada solución presentando, primeramente, el taller tal cual como se expondrá a los estudiantes y luego, se realizará la descripción de cada *subfase*. El enunciado de la Tarea 6 es el siguiente:

Tarea 6. Solución analítica del problema
Dada una parábola cuya ecuación es $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$ y sea $P(x_0\,, y_0)$ un punto de ella. Determinar la ecuación de la recta tangente a dicha parábola por el punto P.

4.2.1.2.1 Solución sintético-analítica

Como se explicó anteriormente, esta solución se basa en el procedimiento que se institucionalizó en la solución sintética, al abordar la Tarea 4 (ver Tabla 6); nuestro propósito con esta solución es plantear un vínculo explícito entre la geometría sintética y la geometría analítica, ilustrando cómo un abordaje desde un punto de vista meramente sintético fundamenta una solución que emplea un lenguaje algebraico. En seguida, se presenta la descripción de esta solución, teniendo en cuenta que el taller es la Tarea 6:

Descripción de los requisitos: Para el desarrollo de esta tarea se deben tener presente los objetos matemáticos primarios que constituyen los conocimientos y destrezas previos de los estudiantes (ver figura 28):

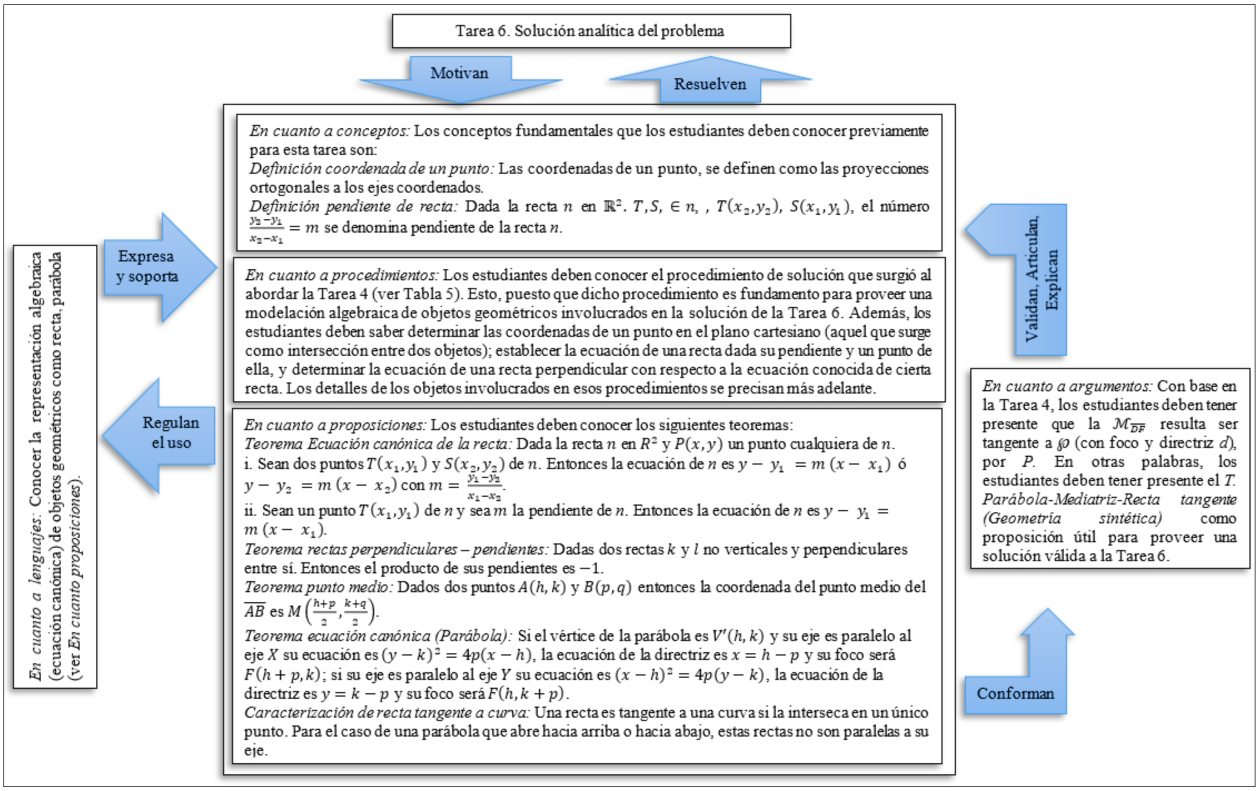


Figura 28. Descripción de los requisitos (Tarea 6)

Descripción de las metas: Con el desarrollo de esta tarea, se pretenden lograr las siguientes expectativas de aprendizaje (ver figura 29):

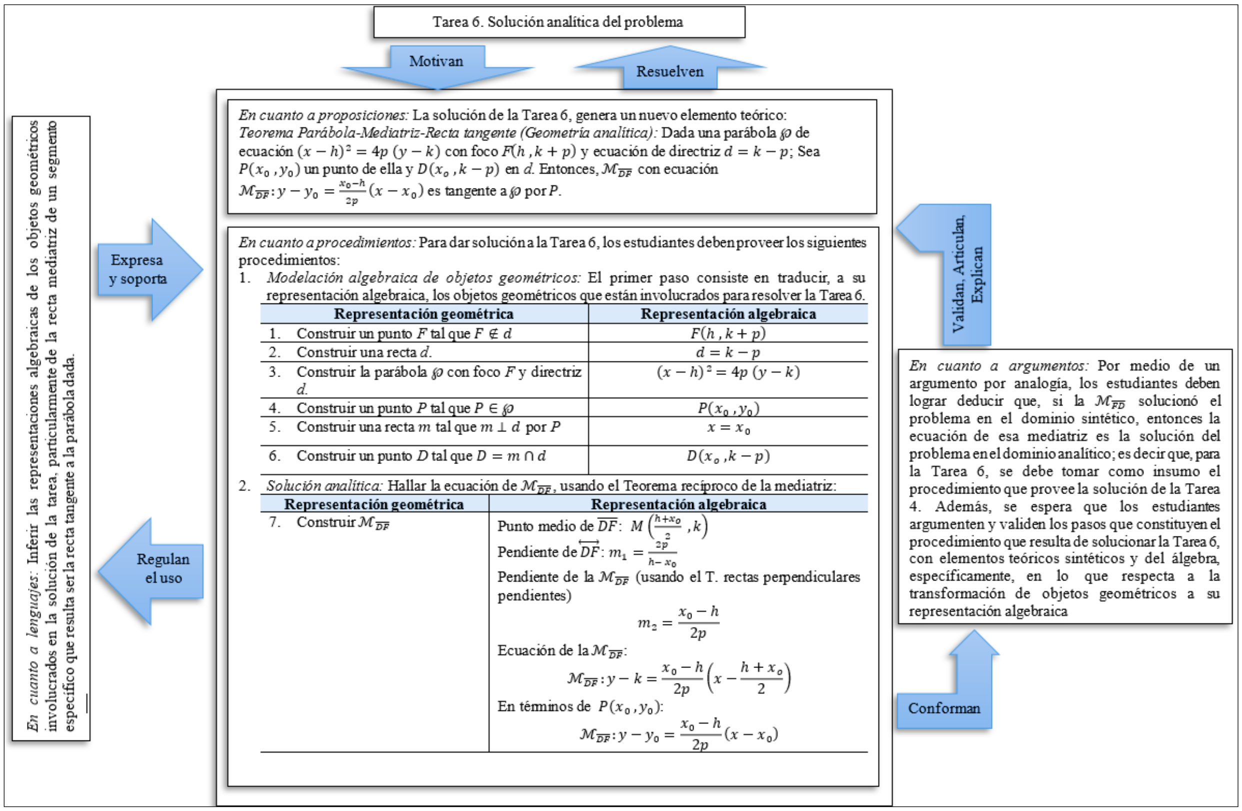


Figura 29. Descripción de las metas (Tarea 6)

Descripción de los materiales y recursos: Para el desarrollo de esta tarea, se hace necesario el uso de recursos simples, tales como: hojas de papel, lápiz, borrador y tajalápiz. Así mismo, se puede usar el recurso Geogebra para verificar la solución usando ejemplos con ecuaciones específicas que puedan representar en dicho entorno.

Descripción de la temporalidad: Esta tarea, se estima que puede ser desarrollada en aproximadamente una hora, en grupos de tres estudiantes. El profesor debe actuar de manera instruccional, guiando cada paso para dar solución al problema e ir justificándolos desde un punto de vista algebraico, de manera conjunta. La solución de la tarea se presenta en la tabla 10:

Tabla 10. Solución sintético-analítica

Fase 1. Modelación algebraica de objetos geométricos

Teniendo como base, el procedimiento que provee la solución de la Tarea 4, lo primero que los estudiantes deben hacer es tomar los objetos geométricos involucrados y representarlos desde punto de vista algebraico, con sus ecuaciones correspondientes. Además, los estudiantes deben proveer la justificación de cada paso. Lo anterior, se ilustra en la tabla 10.1:

Tabla 10.1. Modelación algebraica de objetos geométricos

Representación geométrica	Representación algebraica	
	Traducción a lo algebraico	**Justificación**
1. Construir una recta d.	$y = k - p$	T. Ecuación canónica (Parábola)
2. Construir un punto F tal que $F \notin d$	$F(h\,,k+p)$	
3. Construir la parábola $\wp$ con foco F y directriz d.	$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$	
4. Construir un punto P tal que $P \in \wp$	$P(x_0\,,y_0)$	

5. Construir una recta m tal que $m \perp d$ por P	$x = x_0$	Dado que la recta $x = x_0$ es perpendicular a d por P, la abscisa de D es igual a la abscisa de P (D. Coordenada de un punto).
6. Construir un punto D tal que $D = m \cap d$	$D(x_o , k - p)$	

Fase 2. Solución analítica

Teniendo en cuenta que, mediante la Tarea 4, se estableció que la $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$ resulta ser tangente a $\wp$ por P, para dar solución de la Tarea 6, se debe hallar la ecuación de la dicha mediatriz. Dado que se quiere construir la ecuación de la $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$, se debe establecer la ecuación de una recta que debe contener al punto medio M de $\overline{DF}$ y ser perpendicular a $\overline{DF}$; para luego usar el T. Recíproco de la Mediatriz y poder afirmar que dicha recta es mediatriz de $\overline{DF}$. Con base en ello, en la tabla 10.2 se presenta el procedimiento algebraico que se debe llevar a cabo para determinar la ecuación de $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$:

Tabla 10.2. Solución sintético-analítica

Representación geométrica	**Representación algebraica**	
	Procedimiento	**Justificación**
7. Construir $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$.	M punto medio de $\overline{DF}$: Sean $F(h , k + p)$ y $D(x_o , k - p)$, el punto medio de $\overline{DF}$ es $M\left(\frac{h+x_o}{2} , k\right)$	T. Punto medio
	Pendiente de $\overleftrightarrow{DF}$: Sean $F(h , k + p)$ y $D(x_o , k - p)$, la pendiente de $\overleftrightarrow{DF}$ es $m_1 = \frac{2p}{h- x_0}$	D. Pendiente de recta
	Pendiente de $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$: Como $\overleftrightarrow{DF} \perp \mathcal{M}_{\overline{DF}}$, la pendiente de $\overleftrightarrow{DF}$ es $m_1 = \frac{2p}{h- x_0}$ y $m_1 \times m_2 = -1$, entonces $m_2 = \frac{x_0-h}{2p}$ es la pendiente de $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$.	T. Rectas perpendiculares-pendientes
	Ecuación de $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$: Con $M\left(\frac{h+x_o}{2} , k\right)$ y con $m_2 = \frac{x_0-h}{2p}$, la ecuación de $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$ es: $$y - k = \frac{x_0 - h}{2p}\left(x - \frac{h + x_o}{2}\right)$$ En términos de $P(x_0 , y_0)$: $$\mathcal{M}_{\overline{DF}}:\ y - y_0 = \frac{x_0 - h}{2p}(x - x_0)$$	T. Recíproco de la mediatriz T. Ecuación canónica de la recta

Cabe aclarar que, al llevar a cabo esta tarea, los estudiantes pueden presentar algunas dificultades referidas a la transición de la geometría sintética a la geometría analítica. Dichas dificultades se presentan en la tabla 11, con la sugerencia de intervención del profesor:

Tabla 11. Posibles dificultades e intervención del profesor (Tarea 6)

Posibles dificultades	**Intervención del profesor**
En la *Fase 1*, los estudiantes pueden presentar dificultades al traducir los objetos sintéticos a su representación algebraica. Una de estas puede generarse al determinar las coordenadas del punto D, pues es posible que los estudiantes no tengan claro cómo se determinan dichas coordenadas en el plano cartesiano.	Dado el reconocimiento de la dificultad, su abordaje requiere de un acompañamiento continuo del profesor. Este acompañamiento consiste específicamente en: 1. Advertir que la solución de la Tarea 6 se fundamenta en el procedimiento de solución de la Tarea 4. Si una recta mediatriz solucionó el problema de la Tarea 4, la Tarea 6 puede ser solucionada de manera análoga. Esto es, si se establece la ecuación de esa recta mediatriz, el problema estaría resuelto. 2. El profesor puede guiar el procedimiento de solución, realizando algunas preguntas como: ¿qué objetos están involucrados en la solución de la Tarea 4?, ¿cuál es la representación algebraica de dichos objetos?, ¿qué elementos teóricos se deben tener en cuenta para traducir

	los objetos geométricos a su representación algebraica?, entre otras. 3. En cuanto a las coordenadas del punto *D*, el profesor puede ayudar a que los estudiantes se percaten que al construir una recta m tal que $m \perp d$ por *P* en el plano cartesiano, esa recta tiene por ecuación $x = x_0$, de manera que la abscisa de *D* es igual a la abscisa de *P*.
En la *Fase 2*, es posible que los estudiantes no logren entrever que, dada la mediatriz, esta es perpendicular por el punto medio, razón por la cual, cuando trabajen en el dominio algebraico, no sabrán establecer la ecuación de la recta tangente.	Dado el reconocimiento de la dificultad, su abordaje requiere de un acompañamiento continuo del profesor. Este acompañamiento consiste es realizar preguntas orientadoras que guíen a los estudiantes para que tengan una visión general del procedimiento que deben llevar a cabo. Esas preguntas pueden ser: ¿cuál es el objeto central que soluciona el problema en la Tarea 4?, ¿qué condiciones debe cumplir ese objeto?, en geometría analítica, ¿cómo se determinan las coordenadas del punto medio de un segmento?, ¿cómo se determina que una recta es perpendicular a otra dada?, ¿cómo se construye la ecuación de una recta?, entre otras.

Hecho lo anterior, se sugiere que el profesor motive la elaboración de una proposición condicional que encapsule el procedimiento establecido; se espera que el enunciado que se formule sea el siguiente:

Teorema Parábola-Mediatriz-Recta tangente (Geometría analítica): Dada una parábola $\wp$ de ecuación $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$ con foco $F(h\,, k+p)$ y ecuación de directriz $d = k - p$; Sea $P(x_0\,, y_0)$ un punto de ella y $D(x_o\,, k-p)$ en d. Entonces, $\mathcal{M}_{\overline{DF}}$ con ecuación $\mathcal{M}_{\overline{DF}}: y - y_0 = \frac{x_0 - h}{2p}(x - x_0)$ es tangente a $\wp$ por P.

4.2.1.2.2 Solución analítica pura

La solución analítica pura se centra en abordar el *problema general* desde un punto de vista meramente algebraico interpretando, desde un punto de vista analítico, lo que significa que una recta sea tangente a una curva (esto es, la solución del sistema de ecuaciones conformado por la ecuación de una recta que contiene a P y de una parábola que contiene a P, tiene una única solución las coordenadas de ese punto P). Enseguida, se presenta la descripción de esta solución, teniendo en cuenta que el taller resulta ser la Tarea 6:

Descripción de los requisitos: Para el desarrollo de esta tarea se deben tener presente los objetos matemáticos primarios que constituyen los conocimientos y destrezas previos de los estudiantes (ver Figura 30):

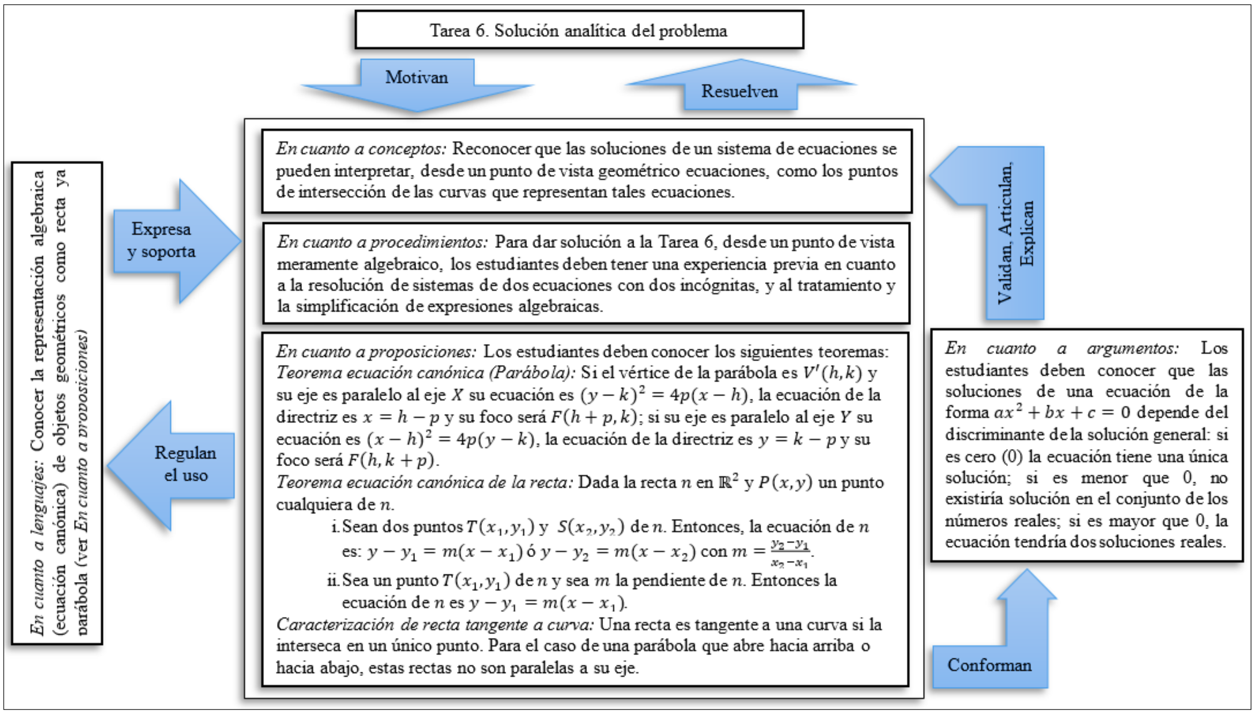


Figura 30. Descripción de los requisitos (Tarea 6)

Descripción de las metas: Con el desarrollo de esta tarea, se pretenden lograr las siguientes expectativas de aprendizaje (ver Figura 31):

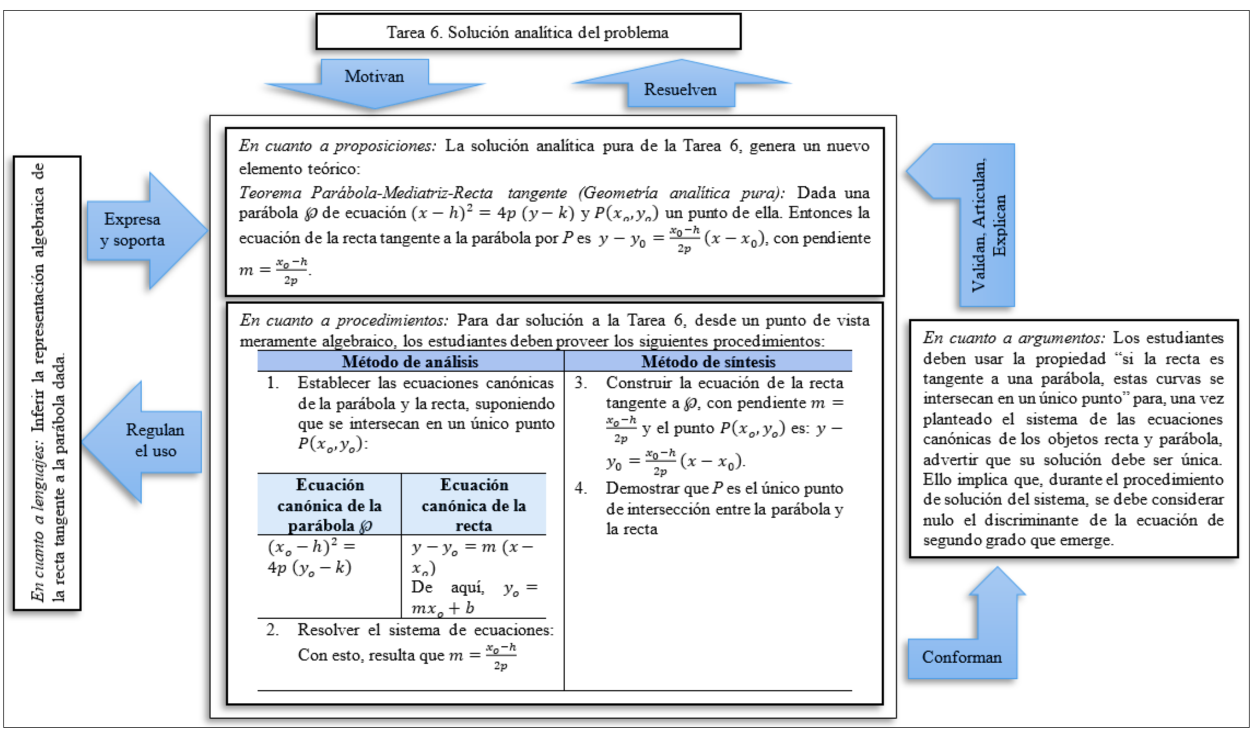


Figura 31. Descripción de las metas (Tarea 6)

Descripción de los materiales y recursos: Para el desarrollo de esta tarea, se hace necesario el uso de recursos simples, tales como: hojas de papel, lápiz, borrador y tajalápiz. Así mismo, se puede usar el recurso Geogebra para verificar la solución usando ejemplos con ecuaciones específicas que puedan representar en dicho entorno.

Descripción de la temporalidad: Esta tarea, se estima que puede ser desarrollada en aproximadamente una hora, en grupos de tres estudiantes. El profesor debe actuar de manera instruccional, guiando cada paso para dar solución al problema e ir justificándolos desde un punto de vista analítico y algebraico, de manera conjunta. La solución de la tarea se presenta en la tabla 12:

Tabla 12. Solución analítica pura

Método de análisis

Para dar solución al problema general desde un punto de vista meramente analítico, se va a partir de que el problema ya está resuelto, es decir, que dada una parábola y un punto P de ella, existe una recta que es tangente a la parábola por dicho punto.

Lo anterior, conlleva a formular la siguiente *hipótesis de análisis (H.A):* Dada una parábola $\wp$: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ y un punto $P(x_0, y_0)$, tal que $P \in \wp$, existe una recta k tangente a $\wp$ y con punto de tangencia P. Con ello, x_0y y_0 satisfacen las ecuaciones de la recta k y la parábola $\wp$ (ver Tabla 12.1):

Tabla 12.1. Ecuaciones canónicas

Ecuación canónica de la parábola $\wp$	**Ecuación canónica de la recta k**
$(x_o - h)^2 = 4p\left(y_o - k\right)$ (E.1)	$y - y_o = m\,(x - x_o)$ De aquí, $y_o = mx_o + b$ (E.2)

Resolver el sistema de ecuaciones: Teniendo en cuenta la *H.A*, al solucionar sistema de ecuaciones de la Tabla 9.1, por el método de sustitución, se obtiene el procedimiento de la Tabla 12.2:

Tabla 12.2. Solución del sistema de ecuaciones

Procedimiento	**Justificación**
$(x_o - h)^2 = 4p\,(mx_o + b - k)$	Sustituir la E.2 en la E.1
${x_o}^2 - 2xh + h^2 = 4p\,(mx_o + b - k)$	Propiedades de los números reales
${x_o}^2 - 2x_oh + h^2 = 4pmx_o + 4p(b-k)$	
${x_o}^2 - 2x_o(h+2pm) = 4p(b-k) - h^2$	
${x_o}^2 - 2x_o(h+2pm) + (h+2pm)^2 = 4p(b-k) - h^2 + (h+2pm)^2$	
$(x_o - (h+2pm))^2 = 4p(b-k) - h^2 + (h+2pm)^2$	
$x_o - (h+2pm) = \pm\sqrt{4p(b-k) - h^2 + (h+2pm)^2}$	
$x_o - (h+2pm) = 0$	Por la *H.A*, la solución del sistema de ecuaciones formulado en la Tabla 9.1 es única lo que implica que el discriminante (el radical) es 0.
$-x_o + h + 2pm = 0$	Como se quiere determinar la ecuación de la recta tangente, ésta depende de m, por tanto, de la expresión anterior se debe despeja a m.
$m = \frac{x_o - h}{2p}$	

Método de síntesis

Teniendo en cuenta el procedimiento realizado anteriormente, durante el método de análisis, la ecuación de la recta k tangente a, $\wp$ tiene pendiente $m = \frac{x_o-h}{2p}$ y, de acuerdo con la *H.A.*, el punto $P(x_o, y_o)$ pertenece a dicha recta. Por ello, la ecuación de k es: $y - y_0 = \frac{x_0-h}{2p}(x - x_0)$.

Con lo anterior, se ha dado solución a la Tarea 6 y, por tanto, al problema general desde un punto de vista meramente analítico. Sin embargo, este procedimiento está basado en una *hipótesis de análisis* que es necesario demostrar. Para ello, se demostrará que $P(x_0, y_0)$ es el único punto de intersección entre la parábola $\wp$ y la recta k. Dicha demostración se presenta en la Tabla 10.3:

Tabla 12.3. Demostración de la H.A.

Conjetura	
Dada una parábola $\wp: (x-h)^2 = 4p(y-k)$ y un punto $P(x_0, y_0)$, tal que $P \in \wp$, dada la recta k: $y - y_0 = \frac{x_0-h}{2p}(x - x_0)$ tangente a $\wp$. Entonces, P es el único punto de intersección entre la parábola $\wp$ y la recta k.	
Demostración	
Aserción	**Garantía-Datos**
1. $\wp: (x-h)^2 = 4p(y-k)$ Punto $P(x_0, y_0)$, tal que $P \in \wp$ Recta k: $y - y_0 = \frac{x_0-h}{2p}(x - x_0)$ tangente a $\wp$.	Dado
2. $(x_0 - h)^2 = 4p(y_0 - k)$	Por las condiciones de k, se sabe que $P(x_0, y_0)$ satisface la ecuación $\wp$. (1)
3. Sea $P'(x_1, y_1)$ otro punto de intersección entre $\wp$ y k; $P' \neq P$	Negación de la tesis
4. $\left(y_1 - y_0\right) = \left(\frac{x_0-h}{2p}\right)(x_1 - x_0)$ $(x_1 - h)^2 = 4p(y_1 - k)$	P' satisface las ecuaciones de $\wp$ y k. (3)
5. $y_1 = \left(\frac{x_0-h}{2p}\right)(x_1 - x_0) + y_0$	Propiedad de los números reales (4)
6. $(x_1 - h)^2 = 4p\left(\left(\left(\frac{x_0-h}{2p}\right)(x_1 - x_0) + y_0\right) - k\right)$	Sustitución (4,5)
7. ${x_1}^2 - 2hx_1 + h^2 = 2x_0x_1 - 2x_1h - 2{x_0}^2 + 2hx_0 + 4p(y_0 - k)$	Propiedad de los números reales (6)
8. ${x_1}^2 - 2x_0x_1 + {x_0}^2 = -{x_0}^2 + 2hx_0 - h^2 + 4p(y_0 - k)$	
9. $(x_1 - x_0)^2 = -(x_0 - h)^2 + 4p(y_0 - k)$	
10. $(x_0 - h)^2 - 4p(y_0 - k) = 0$	Propiedad de los números reales (2)
11. $-(x_0 - h)^2 + 4p(y_0 - k) = 0$	
12. $(x_1 - x_0)^2 = 0$	Sustitución (9,11)
13. $x_1 - x_0 = 0$	Propiedad de los números reales (12)
14. $x_1 = x_0$	
15. $P'\left(x_1, y_1\right) = P\left(x_0, y_0\right)$	Sustitución (1,3,14)
16. $P' = P \wedge P' \neq P$	Conjunción (15,3)
17. $P(x_0, y_0)$ es el único punto de intersección entre los dos objetos.	P.R.A: Principio de Reducción al Absurdo (16)

Hecho lo anterior, se sugiere que el profesor motive la elaboración de una proposición condicional que encapsule el procedimiento establecido; se espera que el enunciado que se formule sea el siguiente:

Teorema Parábola-Mediatriz-Recta tangente (Geometría analítica pura): Dada una parábola $\wp$ de ecuación $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$ y $P(x_o, y_o)$ un punto de ella. Entonces la ecuación de la recta tangente a la parábola por P es $y - y_0 = \frac{x_0-h}{2p}(x - x_0)$, con pendiente $m = \frac{x_o-h}{2p}$.

4.2.1.3 Contraste 1: Vínculos entre las soluciones sintética y sintético-analítica

Dado que la solución sintético-analítica está basada en la solución vía geometría clásica sintética, se evidencia la posibilidad de abordar y solucionar el mismo problema tanto por la vía geometría sintética, como por la vía geometría analítica con el mismo procedimiento, pero, con distinta representación. Para explicitar los vínculos existentes entre ambas geometrías, se presenta un análisis de estos a la luz de los objetos primarios propuestos por el EOS:

- *En cuanto a lenguajes:* Se evidencia con claridad que la comunicación (verbal y escrita) presente en cada dominio de solución, es diferente pues depende de la representación. La solución vía geometría clásica-sintética está basa especialmente en la representación gráfica de los objetos matemáticos involucrados por medio de un software de geometría dinámica (Geogebra) y su tratamiento se fundamenta en un sistema teórico relativo a la Geometría Clásica Euclidiana; en la solución sintético - analítica los mismos objetos matemáticos involucrados en la solución previa se usan, pero son representados con expresiones algebraicas y, en consecuencia, manipulados desde un contexto algebraico. En ambas soluciones se toma el problema de manera general, y no se parte de un caso particular.
- *En cuanto situaciones:* Cabe destacar que, al formular el problema, cada estudiante es libre de escoger el dominio de solución, sin embargo, es valioso saber que el problema puede ser resuelto tanto sintética como analíticamente.
- *En cuanto a procedimientos:* Es posible ver que la estructura procedimental, en ambas soluciones, es exactamente la misma y dan solución al mismo problema, desde dos puntos de vista: en el dominio de la geometría sintética y en desde la geometría analítica. Debido a que la solución sintético-analítica estuvo basada en la solución desde la geometría sintética, en ambas soluciones están involucrados los mismos objetos geométricos y la misma estrategia de solución; la diferencia radica en el tipo de representación y en el tratamiento que se da a dichos objetos en cada contexto o dominio.
- *En cuanto a conceptos y proposiciones:* A pesar de que haya conceptos y proposiciones que son exclusivos de cada dominio de solución, hubo una proposición fundamental que dio paso a la estrategia de solución en ambos dominios: el teorema recíproco de la mediatriz; es enriquecedor resaltar que hay elementos teóricos que pueden ser utilizados tanto en la geometría sintética como en la geometría analítica.
- *En cuanto a argumentos:* En ambas soluciones, se utiliza el mismo argumento para dar solución al mismo problema: la mediatriz del segmento $\overline{DF}$ resulta ser, efectivamente, la tangente a $\wp$ por P. De esta manera, la demostración realizada en la solución vía sintética del Teorema Parábola-Mediatriz-Recta tangente (Geometría sintética), valida también el procedimiento realizado en la solución sintético analítica.

4.2.1.4 Contraste 2: Vínculos entre las soluciones sintético-analítica y analítica pura

La solución sintético-analítica, está basada en la solución vía geometría sintética y por ello, aparecen muchos objetos de la geometría sintética involucrados y correlacionados, tales como el *Teorema Recíproco de la Mediatriz*. Por otro lado, en el procedimiento llevado a cabo en la solución analítica pura también se involucran objetos de la geometría sintética, en especial, la *caracterización de recta tangente a curva*; sin embargo, lo que resta del procedimiento, se fundamenta en procedimientos meramente algebraicos. En consecuencia, estas soluciones analíticas se basan en procedimientos sumamente diferentes. Por su puesto, ambos métodos de solución llevan al mismo resultado, es decir que, en ambas soluciones, resulta la misma ecuación para la recta tangente a la parábola y por el punto dado.

Para analizar de manera más clara los vínculos existentes entre la solución sintético-analítica y la solución analítica pura, se detallarán los objetos primarios involucrados, desde lo propuesto por el EOS:

- *En cuanto a lenguajes:* Es claro que, para dar solución al mismo problema, en ambas soluciones el lenguaje utilizado es meramente algebraico tomando las ecuaciones de los objetos geométricos involucrados, de manera general.
- *En cuanto a situaciones:* Es muy enriquecedor para los estudiantes, contemplar que existen dos métodos de solución desde el punto de vista analítico y que, de ambos, se obtiene el mismo resultado.
- *En cuanto a procedimientos:* Por un lado, la solución sintético-analítica se fundamenta en la geometría clásica y mediante un método sintético. Por otro lado, la solución analítica pura se fundamenta en el método analítico caracterizado por una hipótesis analítica: existe un único punto de intersección entre las curvas y solucionar el sistema de ecuaciones soportado en dicha hipótesis.
- *En cuanto a proposiciones:* La estructura procedimental en cada tipo de solución es diferente debido al pilar teórico que desencadenó los pasos a seguir para dar solución a la Tarea 6. La estrategia para construir la ecuación de la recta tangente es diferente: por un lado, en la solución sintético-analítica el elemento teórico más importante fue el Teorema recíproco de la mediatriz; por otro lado, en la solución analítica pura, el pilar teórico fue la *caracterización de la recta tangente a una curva.* Pero en ambas soluciones se involucran tres elementos teóricos comunes: los teoremas de la ecuación canónica de la parábola y de la recta y la caracterización de la recta tangente a una curva.
- *En cuanto a conceptos:* En la solución sintético-analítica se encuentran involucrados más objetos de la geometría clásica; la solución puramente analítica también considera algunos elementos de la geometría sintética, pero en menor medida y no de manera fundamental. Ello implica que uno de los métodos guarda una mejor relación con la geometría clásica y el método sintético que el otro. Lo anterior, permite destacar que la denominada geometría analítica y la geometría clásica-sintética se pueden articular deliberadamente y que, para estudiar objetos en la geometría analítica se requiere tener un amplio conocimiento de la geometría sintética que ayuden a la solución de problemas.

- *En cuanto a argumentos:* Los tipos de argumentos cambian para cada caso respetando el método usado para solucionar el problema: en la primera solución, el método empleado es el sintético con lenguaje algebraico; en el segundo, el método de solución que prima es el analítico y ello implica una demostración no sintética de la solución del problema. Por supuesto, en el marco del segundo método, encontrado el punto vía analítica, una demostración sintética (con lenguaje algebraico) se puede llevar a cabo para mostrar la unicidad implicada; como diría Descartes, un proceso analítico reversa uno sintético y viceversa.

4.2.1.5 Tarea para ejercitar

Una vez desarrollados los tres tipos de solución para determinar la recta tangente a una parábola por un punto dado de ella (solución sintética, solución sintético-analítica y solución analítica pura), se pretende que el estudiante experimente un procedimiento similar para determinar la recta tangente a una circunferencia. A continuación, se presenta la Tarea 7, y una breve descripción:

Tarea 7. Tarea para ejercitar
Con base en la experiencia obtenida al querer determinar la recta tangente a una parábola, por un punto dado de ella, resuelva: Dada $\odot C_r$ y un punto P en ella. Determine la recta tangente a $\odot C_r$ a por dicho punto P. Determine una solución vía geometría sintética, una solución sintético-analítica y una solución vía geometría analítica.

Descripción de los requisitos: El estudiante, debe tener conocimientos previos acerca de ¿qué es una circunferencia?, ¿cuáles son los elementos de una circunferencia?, ¿qué es una recta tangente?, y ¿qué son rectas perpendiculares?

Descripción de las metas: Se pretende que el estudiante logre determinar los tres tipos de solución a partir la experiencia obtenida al solucionar el mismo problema, pero con la parábola.

Descripción de la temporalidad: El desarrollo de esta tarea se debe llevar a cabo en tres fases:

Fase 1. Solución vía geometría sintética: Esta fase se centra, primeramente, en realizar un proceso de análisis, suponiendo el problema resuelto para determinar las condiciones que una recta debe tener para que sea tangente a una circunferencia. Es importante resaltar la interacción entre estudiantes y entre estudiantes-profesor, la exploración, la creatividad, la modelación en Geogebra y la formulación de conjeturas, para lograr determinar dichas condiciones. Luego, se debe realizar un proceso de síntesis, es decir, realizar una devolución de la experiencia obtenida con las tareas preliminares, para presentar una serie de inferencias que dan solución al problema.

Fase 2. Solución sintético-analítica: Con base en la fase anterior, los estudiantes deben modelar algebraicamente los mismos objetos y dar solución al problema de manera algebraica, es decir, determinar la ecuación de la recta tangente.

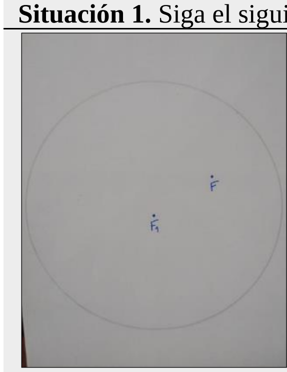
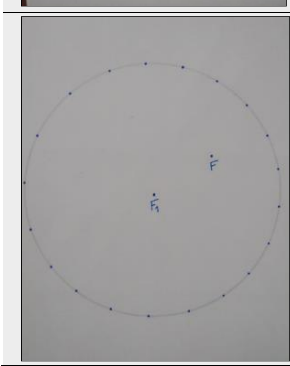
Fase 3. Solución vía geometría analítica: En esta fase, los estudiantes proponen otro método de solución en la geometría analítica, a partir de los conceptos de tangencia, resolución de un sistema de ecuaciones y tratamientos algebraicos, para, finalmente, determinar la ecuación de la recta tangente.

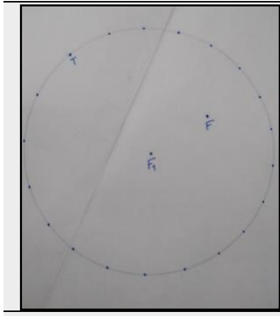
Por último, se recomienda que al finalizar cada fase se formule una proposición o una conjetura que recoja el procedimiento llevado a cabo.

4.2.2 Recta tangente a una elipse

Como se expuso anteriormente en la metodología (Capítulo III), una descripción similar a la que se hizo con la recta tangente a una parábola se puede realizar para determinar una recta tangente a una elipse. Cabe aclarar que, por condiciones de tiempo y espacio, no presentamos una descripción completa de cada subfase de la secuencia; sin embargo, presentamos tanto los enunciados de las tareas que se pueden plantear a los estudiantes como las soluciones ideales. Advertimos que una descripción similar a la presentada para las secuencias relativas a la determinación de una recta tangente a una parábola puede ser llevada a cabo para la que presentamos enseguida; esto, por cuanto las secuencias tienen una misma naturaleza e intención, pero cambia de objeto protagonista (de parábola a elipse). Aclaramos que, para abordar esta tarea, es requisito que los estudiantes cuenten con una información básica sobre la elipse, la circunferencia y la mediatriz (*e.g.*, su definición de lugar geométrico o sus representaciones gráficas y algebraicas).

4.2.2.1 Secuencia para determinar una solución en el dominio de la geometría sintética

Tarea 1. Exploración con papel plegado	
Situación 1. Siga el siguiente procedimiento:	
	**Paso1.** Tome una hoja en blanco, preferiblemente de papel calcante o pergamino. Haga una circunferencia con un compás; sea F_1 su centro. Dibuje un punto F en el interior de la circunferencia diferente de F_1.
	**Paso 2.** Con un marcador, dibuje en la circunferencia, puntos cuya distancia podría ser de un centímetro entre uno y otro.

	**Paso 3.** Superponga cada uno de los puntos marcados en la circunferencia con el punto F y genere un doblez. La figura de la izquierda, indica un ejemplo de dicho doblez, correspondiente a un punto T sobre la circunferencia. Repita este procedimiento con cada uno de los puntos marcados en el paso 2.
[Aclaramos que el siguiente comentario se presenta si los estudiantes no han abordado la secuencia de la parábola, secuencia en la cual una información como esta es expuesta]. La papiroflexia, tiene unas reglas de construcción llamados *axiomas* que fundamentan los resultados de cada paso de en donde se involucra un pliegue –y las relaciones geométricas que de ellas se obtienen– (Molina, Sánchez, & Fonseca, 2005). Algunas de tales reglas son: *Axioma 1. Punto medio:* Se genera cuando se hacen coincidir en el doblez los extremos del segmento. *Axioma 2. Línea perpendicular a una línea dada:* Se genera cuando se dobla el papel por la línea dada y se hace un nuevo doblez que lleve dicha línea sobre sí misma.	
Situación 2. Responda las siguientes preguntas: i. ¿Qué objeto visualiza cuando termina de hacer todos los dobleces? ii. Geométricamente hablando, cada doblez hecho en el paso 3, ¿qué objeto representa respecto al segmento cuyos extremos son el punto el punto F y el punto correspondiente en la circunferencia? Argumente su respuesta.	

La solución de la Tarea 1, se presenta en la tabla 13:

Tabla 13. Solución tarea 1 (Elipse)

Solución de la Tarea 1
Sobre el ítem i: ¿Qué objeto visualiza cuando termina de hacer todos los dobleces?
Parece ser una elipse.
Sobre el ítem ii: Geométricamente hablando, cada doblez hecho en el paso 3, ¿qué objeto representa respecto al segmento cuyos extremos son el punto el punto F y el punto correspondiente en la circunferencia? Argumente su respuesta.
El doblez representa la mediatriz del segmento, porque por el axioma 2 la recta es perpendicular al segmento y a su vez, por el axioma 1 la recta contiene el punto medio del segmento.

Tarea 2. Modelación en Geogebra
i. Usando el dinamismo que proporciona Geogebra, provea un procedimiento en dicho software que modele el procedimiento llevado cabo con papel plegado (Tarea 1). ii. ¿Se ratifican las respuestas dadas en la tarea anterior? Verifique y argumente que efectivamente dichos objetos resultan ser los que se intuyeron.

La solución a la Tarea 2, se presenta en la tabla 14:

Tabla 14. Solución tarea 2 (Elipse)

Solución de la Tarea 2
Sobre el ítem i. Modelación en Geogebra

Modelación de manera continua[3]: En este tipo de modelación, los estudiantes deben llevar a cabo los siguientes pasos de construcción obteniendo como resultado lo que se ilustra en la Figura 32:

1. Construir $\odot F_{1_r}$
2. Construir un punto F, tal que $F \in int \odot F_{1_r}$, $F_1 \neq F$
3. Construir un punto T, tal que $T \in \odot F_{1_r}$
4. Haciendo uso de la herramienta "Mediatriz", construir $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$ (mediatriz del segmento $\overline{FT}$)
5. Activar *rastro* en la mediatriz y *animación* en el punto T

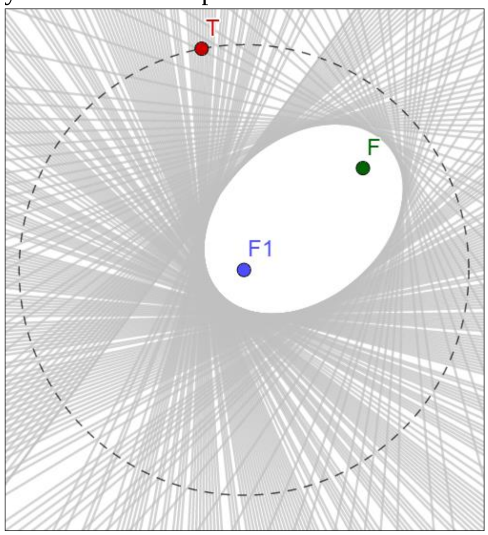


Figura 32. Modelación en Geogebra (Elipse)

Sobre el ítem ii: Verificación de conjeturas
El objeto que se visualiza, al terminar de generar todos los dobleces, es efectivamente una elipse.
El objeto fundamental que está involucrado en las dos construcciones (papel plegado y Geogebra) es la mediatriz.

Debido a que el objeto que se vislumbra es una elipse, se puede decir los siguiente:

- Los puntos F_1 y F resultan ser los focos
- Cada doblez, además de representar la mediatriz de un segmento particular, parece representar también una recta que es tangente a la elipse.

Tarea 3. Punto de tangencia

i. Con base en los aspectos institucionalizados en las tareas anteriores, se ha conjeturado que el conjunto de rectas (mediatrices del segmento cuyos extremos son el punto F y un punto particular T que esté en la $\odot F_{1,r}$) deja vislumbrar una elipse. Sería afortunado precisar cuál punto de cada recta haría parte efectivamente de la elipse. Provea un procedimiento de construcción para determinar, en cada mediatriz, el punto P que pertenece a la elipse.

ii. ¿Qué sucede con la suma de F_1P con PF?, ¿qué relación tiene esta suma con la circunferencia?

iii. Con base en los ítems i y ii, formule una conjetura y demuéstrela.

[3] El profesor puede sugerir a los estudiantes, una vez institucionalizado el procedimiento de construcción, que se arrastre el punto F al exterior de la circunferencia, y preguntar qué sucede. Se espera que se visualice una hipérbola. En adelante, el profesor puede proponer una secuencia similar a la que se expone para Elipse, pero aludiendo a la hipérbola.

La solución de la Tarea 3, se presenta en la tabla 15:

Tabla 15. Solución de la Tarea 3 (Elipse)

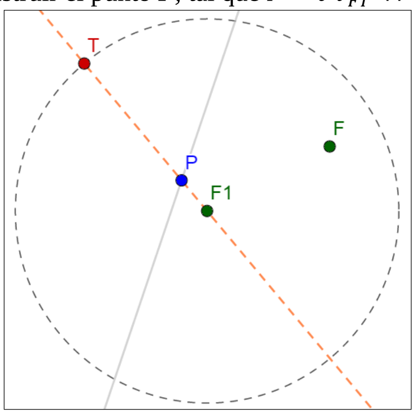
<table>
<tr><th>Solución del ítem i</th><th>Verificación</th></tr>
<tr><td>Se espera que los estudiantes propongan los siguientes pasos de construcción obteniendo como resultado lo que se ilustra en la Figura 33:
1. Construir $\odot F_{1_r}$
2. Construir un punto F, tal que $F \in int \odot F_{1_r}$, $F_1 \neq F$
3. Construir un punto T, tal que $T \in \odot F_{1_r}$
4. Haciendo uso de la herramienta “Mediatriz”, construir $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$ (mediatriz del segmento $\overline{FT}$)
5. Construir $\overleftrightarrow{TF_1}$
6. Construir el punto P, tal que $P = \mathcal{M}_{\overline{FT}} \cap \overleftrightarrow{TF_1}$


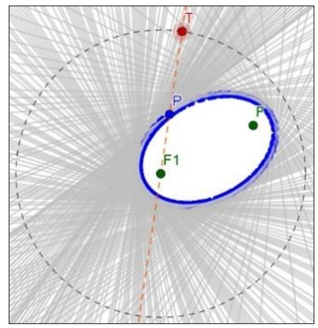
Figura 33. Solución de la tarea 3 (Elipse)</td><td>Al realizar la verificación de esta propuesta, usando rastro de P y animar T (Figura 34) o activar el lugar geométrico de P con respecto a T (Figura 35), es evidente que, en ambos casos, P pertenece a la elipse determinada por la familia de mediatrices (rectas tangentes).


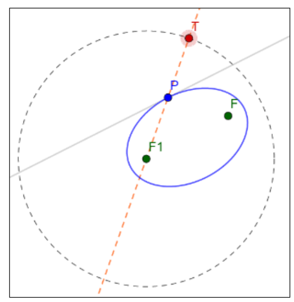
Figura 34. Verificación 1 (solución tarea 3)


Figura 35. Verificación 2 (solución tarea 3)</td></tr>
<tr><th colspan="2">Solución del ítem ii</th></tr>
<tr><td colspan="2">Los estudiantes deben tomar las distancias FP y PF_1 y hacer la suma entre ellas usando las herramientas del software. Al hacer un arrastre del punto T deben percatarse que $FP + PF_1$, es constante y que dicha constante es el radio r de la circunferencia.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Solución del ítem iii: Conjetura</th></tr>
<tr><td colspan="2">Dada una $\odot F_{1_r}$, un punto F, tal que $F \in int \odot F_{1_r}$, $F_1 \neq F$ y un punto T, tal que $T \in \odot F_{1_r}$. Sean $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$ y $\overleftrightarrow{TF_1}$ y un punto P, tal que $P = \mathcal{M}_{\overline{FT}} \cap \overleftrightarrow{TF_1}$, entonces P, pertenece a la elipse $\mathcal{E}$ con focos F_1 y F.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Demostración</th></tr>
<tr><th>Aserción</th><th>Afirmación-Razón</th></tr>
<tr><td>1. $\odot F_{1_r}$
Punto F, tal que $F \in int \odot F_{1_r}$, $F_1 \neq F$
Punto T, tal que $T \in \odot F_{1_r}$
$\mathcal{M}_{\overline{FT}}$
$\overleftrightarrow{TF_1}$
Punto P, tal que $P = \mathcal{M}_{\overline{FT}} \cap \overleftrightarrow{TF_1}$</td><td>Dado</td></tr>
<tr><td>2. $P \in \mathcal{M}_{\overline{FT}} \wedge P \in \overleftrightarrow{TF_1}$</td><td>D. Intersección de conjuntos (1)</td></tr>
<tr><td>3. $FP = PT$</td><td>D. Mediatriz (2)</td></tr>
<tr><td>4. Sea A punto donde $A \in \overrightarrow{F_1F}$ tal que $F_1A = F_1T$</td><td>T. Localización de puntos (1)</td></tr>
<tr><td>5. ΔATF_1 es isósceles</td><td>D. Triángulo isósceles (4)</td></tr>
</table>

6. $F_1F < F_1A$	D. Punto en el interior de una circunferencia (1,4)
7. $A - F - F_1$	T. Desigualdad- Interestancia (1,4)
8. $F \in int\angle F_1TA$	T. Punto en interior de ángulo (7,4,1)
9. Casos: i. $T - P - F_1$ ii. $P - T - F_1$ iii. $T - F_1 - P$	Interestancias consideradas de que $P \in \overleftrightarrow{TF_1}$ (2)
10. $T - F_1 - P$	Caso ii (9)
11. ΔTFP es isósceles	D. Triangulo isósceles (3)
12. $m\angle FTF_1 < m\angle F_1TA$	P. Adición de medidas de ángulos D. Mayor que (8,5,11)
13. $F_1 \in int\angle TFP$	T. Punto en interior de ángulo (10)
14. $m\angle TFP > m\angle TFF_1$	P. Adición de medidas de ángulos D. Mayor que (12,5,11)
15. Sea ΔTFA	D. Triángulo (1,4)
16. $m\angle TFF_1 > m\angle TAF_1$	T. Angulo externo (15)
17. $m\angle TFP > m\angle TAF_1$	Propiedad transitiva (14,16)
18. $m\angle TAF_1 = m\angle ATF_1$	T. Triángulo isósceles (5)
19. $m\angle TFP > m\angle ATF_1$	Principio de Sustitución (17,18)
20. $m\angle FTF_1 < m\angle F_1TA \ \wedge \ m\angle TFP > m\angle ATF_1$	Conjunción (17,12)
21. No se cumple $T - F_1 - P$ De manera análoga, para el caso iii: $T - F_1 - P$	Principio de reducción a lo absurdo (P.R.A) (19,9)
22. $T - P - F_1$	MTP
23. $TP + PF_1 = TF_1$	D. Interestancia (22)
24. $TF_1 = r$	D. Radio (1)
25. $FP + PF_1 = r$	Principio de Sustitución (3,23,24)
26. $P \in \mathcal{E}$, con focos F_1 y F	D. Elipse (25)

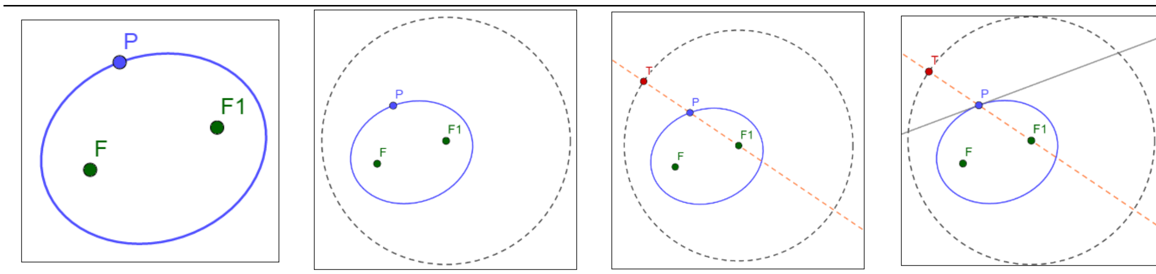
Tarea 4. Solución sintética del problema
Con base en las experiencias y resultados obtenidos al abordar las tareas anteriores, aborde la siguiente situación: Usando la herramienta “elipse” del software Geogebra, construya una elipse $\mathcal{E}$, con focos F_1 y F. Ponga un punto P en $\mathcal{E}$. Provea un procedimiento para construir la recta tangente a $\mathcal{E}$ por el punto P.

La solución de la Tarea 4, se presenta en la tabla 16:

Tabla 16. Solución de la Tarea 4 (Elipse)

Método de análisis (Tarea preliminares)	Método de síntesis (Tarea 4)
A continuación, se presenta el procedimiento general que se institucionalizó al abordar las tareas 1, 2 y 3: 1. Construir $\odot\, F_{1_r}$ 2. Construir un punto F, tal que $F \in int \odot F_{1_r}, F_1 \neq F$ 3. Construir un punto T, tal que $T \in \odot\, F_{1_r}$ 4. Haciendo uso de la herramienta "Mediatriz", construir $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$ (mediatriz del segmento $\overline{FT}$) 5. Construir $\overleftrightarrow{TF_1}$ 6. Construir el punto P, tal que $P = \mathcal{M}_{\overline{FT}} \cap \overleftrightarrow{TF_1}$ Los pasos 1, 2, 3 y 4 es lo institucionalizado en las Tareas 1 y 2. Los pasos 5 y 6 constituyen lo procedimiento llevado a cabo al abordar la Tarea 3; aquí, se construye el punto P a partir del punto T. Este procedimiento representa una perfecta ejemplificación del método de *análisis*, pues se asume el problema resuelto; en otras palabras, se toma una elipse con la recta tangente a ella por un punto P y, con base en la experiencia establecida con el procedimiento anterior, se determina la condición que debe tener esa recta para que sea tangente; esto es, que dicha recta debe ser la $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$.	Una vez descubierta la condición suficiente para resolver el problema general haciendo uso del método de análisis, se prosigue a usar el método de síntesis; esto es, hacer un proceso de devolución en el procedimiento institucionalizado al abordar las tareas preliminares, para presentar, de manera deductiva, la solución formal del problema. El procedimiento que deben proveer los estudiantes es el siguiente: 1. Haciendo uso de la herramienta "*elipse*", construir una elipse $\mathcal{E}$, con focos F_1 y F. 2. Construir un punto P tal que $P \in \mathcal{E}$ (Figura 36a) 3. Construir $\odot\, F_{1_r}$, tal que $FP + PF_1 = r$ (Figura 36b) 4. Construir $\overleftrightarrow{PF_1}$ 5. Construir un punto T, tal que $T = \odot\, F_{1_r} \cap \overleftrightarrow{TF_1}$ (Figura 36c) 6. Construir $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$ (Figura 36d) La "devolución de pasos" se observa claramente en este procedimiento, donde se construye el punto T a partir del punto P (no a P a partir de T) y, por último, se construye la $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$ que se sabe (por la experiencia previa) que es la recta tangente a la elipse por P.

En resumen, el procedimiento que se presenta en la columna de la derecha de la Tabla 16 se constituye en una solución, desde la geometría clásica, de la Tarea 4. En la figura 36, se presenta la representación gráfica de dicho procedimiento.



(a) (b) (c) (d)

Figura 36. Representación gráfica de solución de la tarea 4 (Elipse) desde un punto de vista de la geometría clásica

De lo anterior resulta la formulación del siguiente teorema:

Teorema Elipse-Mediatriz-Recta tangente (Geometría sintética): Dada ε elipse con focos F y F_1; sea $P \in \varepsilon$, $\odot\, F_{1_r}$, $FP + PF_1 = r$, $T = \odot\, F_{1_r} \cap \overleftrightarrow{TF_1}$ y $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$, entonces $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$ es tangente a ε por P.

Tarea 5. Demostración
Demuestre el enunciado surgido (e institucionalizado) del procedimiento construcción propuesto para la tarea 4 que, en adelante, llamaremos Teorema-Mediatriz-Recta tangente: **Teorema Elipse-Mediatriz-Recta tangente (Geometría sintética):** Dada ε elipse con focos F y F_1 que contiene a un punto A; sea $P \in \varepsilon$, $\odot\, F_{1_r}$, $FP + PF_1 = r$, $T = \odot\, F_{1_r} \cap \overleftrightarrow{TF_1}$ y $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$, entonces $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$ es tangente a ε por P.

La solución de la Tarea 5, se presenta en la tabla 17:

Tabla 17. Demostración (Elipse)

Teorema Elipse-Mediatriz-Recta tangente: Dada ε elipse con focos F y F_1; sea $P \in \varepsilon$, $\odot F_{1_r}$, $FP + PF_1 = r$, $T = \odot F_{1_r} \cap \overleftrightarrow{TF_1}$ y $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$, entonces $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$ es tangente a ε por P.

Demostración	
Aserción	**Garantía-Datos**
1. Dada ε elipse con focos F y F_1; sea $P \in \varepsilon$, $\odot F_{1_r}$, $FP + PF_1 = r, T = \odot F_{1_r} \cap \overleftrightarrow{TF_1}$ y $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$,	Dado
2. $TP + PF_1 = r$	D. Circunferencia (1)
3. $FP + PF_1 = r$	D. Elipse (2)
4. $TP = FP$	Propiedad de los números reales (2,3)
5. $P \in \mathcal{M}_{\overline{FT}}$	D. Mediatriz (4)
6. $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$ no es tangente a ε	Negación de la. tesis
7. $P' \in \varepsilon \cap \mathcal{M}_{\overline{FT}}, P \neq P'$	Caracterización de recta tangente (6)
8. $FP' + P'F_1 = r$	D. Elipse (7)
9. $P'F_1 < r$	D. Mayor que (8)
10. $P' \in int \odot F_{1_r}$	D. Punto en el interior de una circunferencia (9)
11. $T' \in \odot F_{1_r} \cap \overleftrightarrow{F_1P'}$	T. Punto interior de circunferencia (10)
12. $T'P' + P'F_1 = r$	D. Circunferencia (1)
13. $TP' = FP'$	D. Mediatriz (7)
14. $FP' + P'F_1 = r$	D. Elipse (2)
15. $T'P' = FP'$	Propiedad de los números reales (12,14)
16. $T'P' = TP'$	Propiedad transitiva de la igualdad (13,15)
17. $TP + P'F_1 = r$	Principio de sustitución (12,16)
18. $TP' + P'F_1 > r$ ⊠ [contradice el paso 17]	Teorema desigualdad triangular (9,17)
19. $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$ es tangente a ε	P.R.A: Principio de Reducción al Absurdo (17,18,6)

4.2.2.2 Secuencia para determinar una solución en el dominio de la geometría analítica

Con esta secuencia se puede determinar que, a diferencia de la determinación de la recta tangente a la Parábola, la solución analítica pura facilita la solución del problema con relación a la solución sintético-analítica; esto, porque la segunda resulta llevar a cabo procedimientos algebraicos complejos y extensos. Con este panorama, a diferencia de los sugerido para la secuencia de la parábola, consideramos prudente primero abordar la solución de la tarea 6 con el método analítico "puro", para luego abordarlo desde el método sintético-analítico. En seguida, presentamos dichas soluciones:

Tarea 6. Solución analítica del problema

Dada una elipse $\mathcal{E}$ cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$[4] y sea $P(x_0 , y_0)$ un punto de ella. Determinar la ecuación de la recta tangente a dicha parábola por el punto P.

Sugerencia[5]:

i. Sustituya y en la ecuación de ε usando la ecuación de la recta que pase el punto $P(x_0, y_0)$ y pendiente *m*. Utilice también la siguiente igualdad:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{[(x - x_0) + x_0]^2}{a^2} = \frac{(x - x_0)^2 + 2x_0(x - x_0) + {x_0}^2}{a^2}$$

[4] Aunque tomamos la elipse centrada en (0,0), es preciso aclarar que una ventaja de la geometría analítica es que se puede generalizar el mismo procedimiento, para una elipse centrada en *(h, k)* realizando una traslación de ejes simple (restando *h* a *x* y *k* a *y*)

[5] Estas sugerencias son muy importantes, pues no resulta natural pensar en ellas y ayudan a ver mejor, con los ojos del álgebra, la expresión cuadrática que resulta de dicha sustitución.

y haga la respectiva sustitución en la ecuación de ε.

ii. Escriba $x - x_0$ como x' y analice la expresión resultante, la cual quedó en términos de x'.
La idea es que, con base en ese análisis (y la experiencia tenida cuando se halló la ecuación de la recta tangente a una Parábola), pueda establecer una expresión para la pendiente de la recta buscada.

4.2.2.2.1 Solución analítica pura

Con base en la Tarea 6, la solución analítica pura del problema se presenta en la tabla 18:

Tabla 18. Solución analítica pura (Elipse)

Método de análisis

1. Para dar solución al problema general desde un punto de vista meramente analítico, se va a partir de que el problema ya está resuelto, es decir, que dada una elipse y un punto P de ella, existe una recta que es tangente a la elipse por dicho punto.

   Lo anterior, conlleva a formular la siguiente *hipótesis de análisis (H.A.):* Sean una elipse ε con ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y la recta con ecuación $\left(y-y_0\right)=m(x-x_0)$ tangente a la elipse en el punto $P(x_0, y_0)$.
2. Resolver el sistema de ecuaciones: Para facilitar los cálculos algebraicos en este paso se deben considerar las sugerencias expuestas en el enunciado. La Tabla 18.1. presenta las aserciones y garantías que permiten determinar la ecuación de la recta tangente deseada.

Tabla 18.1. Solución del sistema de ecuaciones

Aserción	Garantía
1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $\left(y-y_0\right)=m(x-x_0)$; $P(x_0,y_0)$ es punto de tangencia	Dado
2. $y=m(x-x_0)+y_0$	Propiedad de los números reales
3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(m(x-x_0)+y_0\right)^2}{b^2}=1$	Principio de sustitución
4. $\frac{(x-x_0)^2+2x_0(x-x_0)+x_0^2}{a^2}+\frac{\left(m(x-x_0)+y_0\right)^2}{b^2}=1$	Principio de sustitución usando la sugerencia i
5. Sea $x'=(x-x_0)$ $$\frac{x'^2+2x_0x'+x_0^2}{a^2}+\frac{(mx'+y_0)^2}{b^2}=1$$	Principio de sustitución usando la sugerencia ii
6. $\frac{x'^2+2x_0x'+x_0^2}{a^2}+\frac{m^2x'^2+2mx'y_0+y_0^2}{b^2}=1$	Propiedad de los números reales
7. $\frac{x'^2+2x_0x'+x_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{m^2x'^2+2mx'y_0+y_0^2}{b^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$	Propiedad de los números reales
8. $\frac{x'^2+2x_0\,x'}{a^2}+\frac{m^2x'^2+2mx'y_0}{b^2}=0$	Dado que $\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}=1$
9. $\frac{b^2x'^2+b^22x_0\,x'+a^2m^2x'^2+a^22mx'y_0}{a^2b^2}=0$	Propiedad de los números reales
10. $x'^2(b^2+m^2a^2)+x'\left(2x_0b^2+2my_0a^2\right)=0$	
11. $\left(2x_0b^2+2my_0a^2\right)^2$=0	Por la *H.A*, la solución del sistema de ecuaciones formulado en la Tabla 15.1 es única, lo que implica que el discriminante (el radical) de la solución de una ecuación cuadrática del paso 8, debe ser 0. Con ello, $\left(2x_0b^2+2my_0a^2\right)^2-4(b^2+m^2a^2)\times 0=0$ Como $4(b^2+m^2a^2)\times 0$=0, se infiere que $\left(2x_0b^2+2my_0a^2\right)^2$=0
12. $\left(2x_0b^2+2my_0a^2\right)=0$	Como se quiere determinar la ecuación de la recta tangente, ésta depende de *m*, por tanto, de la expresión anterior se debe despeja a *m*.
13. $m=\frac{-2x_0b^2}{2y_0a^2}=-\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$	

Método de síntesis

Teniendo en cuenta el procedimiento realizado anteriormente, durante el método de análisis, la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{E}$ tiene pendiente $m = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$ y, de acuerdo con la *H.A.*, el punto $P(x_o, y_o)$ pertenece a dicha recta. Por ello, la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{E}$ es: $y - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}\ (x - x_0)$.

Con lo anterior, se ha dado solución a la Tarea 6 y, por tanto, al problema general desde un punto de vista meramente analítico. Sin embargo, este procedimiento está basado en una *hipótesis de análisis* que es necesario demostrar. Para ello, se debe demostrar que $P(x_0, y_0)$ es el único punto de intersección entre la elipse ε y la recta tangente. Dicha demostración se presenta en la Tabla 18.2:

Tabla 16.2. Demostración de H.A.

Conjetura	
Dada una parábola $\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y un punto $P(x_0, y_0)$, tal que $P\ \in\ \varepsilon$, dada la recta l: $y - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}\ (x - x_0)$ tangente a $\mathcal{E}$. Entonces, P es el único punto de intersección entre la elipse $\mathcal{E}$ y la recta l.	
Demostración	
Aserción	**Garantía-Datos**
1. $\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Punto $P(x_0, y_0)$, tal que $P\ \in\ \varepsilon$ Recta l: $y - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}\ (x - x_0)$ tangente a $\mathcal{E}$	Dado
2. $\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1$	Por las condiciones de P, se sabe que $P(x_0, y_0)$ satisface la ecuación de $\mathcal{E}$. (1)
3. Sea $P'(x_1, y_1)$ otro punto de intersección entre $\mathcal{E}$ y l; $P' \neq P$	Negación de la tesis
4. $\frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{b^2} = 1$ $y_1 - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}\ (x_1 - x_0)$	P' satisface las ecuaciones de $\mathcal{E}$ y l. (3)
5. $y_1 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}\ (x_1 - x_0) + y_0$	Propiedad de los números reales (4)
6. $\frac{{x_1}^2}{a^2} + \frac{\left(-\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}(x_1 - x_0) + y_0\right)^2}{b^2} = 1$	Principio de sustitución (4, 5)
7. $\frac{(x_1 - x_0 + x_0)^2}{a^2} + \frac{(m\ (x_1 - x_0) + y_0)^2}{b^2} = 1$ Sea $m = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$	D. Pendiente de recta Propiedad de los números reales (6)
8. Sea $x' = x_1 - x_0$, entonces $\frac{(x' + x_0)^2}{a^2} + \frac{(m\ (x') + y_0)^2}{b^2} = 1$	Propiedades de los números reales (7)
9. $\frac{{x'}^2 + 2x' x_0 + {x_0}^2}{a^2} + \frac{m^2 (x')^2 + 2mx' y_0 + {y_0}^2}{b^2} = 1$	Propiedades de los números reales (8)
10. $\frac{{x'}^2}{a^2} + \frac{2x' x_0}{a^2} + \frac{m^2 (x')^2}{b^2} + \frac{2mx' y_0}{b^2} = 0$	Propiedades de los números reales Principio de sustitución (2,9)
11. $\frac{{x'}^2}{a^2} + \frac{2x' x_0}{a^2} + \frac{\left(-\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}\right)^2 (x')^2}{b^2} - \frac{2\left(\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}\right) x' y_0}{b^2} = 0$	Dado que $m = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$, (10)
12. $\frac{{x'}^2}{a^2} + \frac{2x' x_0}{a^2} + \frac{\frac{{x_0}^2 b^4 {x'}^2}{{y_0}^2 a^4}}{b^2} - \frac{\frac{2 x_0 b^2 x'}{a^2}}{b^2} = 0$	Propiedades de los números reales (11)
13. $\frac{{x'}^2}{a^2} + \frac{{x_0}^2 b^2 {x'}^2}{{y_0}^2 a^4} = 0$	Propiedades de los números reales (12)
14. ${x'}^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{{x_0}^2 b^2}{{y_0}^2 a^4}\right) = 0$	Propiedades de los números reales (13)
15. ${x'}^2 = 0$	Propiedades de los números reales (14)

16. $(x_1 - x_0)^2 = 0$	Principio de sustitución (8,15)
17. $x_1 = x_0$	Propiedades de los números reales (16)
18. $P'(x_1, y_1) = P(x_0, y_0)$	Principio de sustitución (1, 3,17)
19. $P' = P \wedge P' \neq P$	Conjunción (3, 18)
20. $P(x_0, y_0)$ es el único punto de intersección entre los dos objetos.	P.R.A: Principio de Reducción al Absurdo (19)

Finalmente, la proposición resultante de la solución analítica pura es:

Teorema Elipse-Mediatriz-Recta tangente (Geometría analítica pura): Dada una parábola $\mathcal{E}$ de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $P(x_o, y_o)$ un punto de ella. Entonces la ecuación de la recta tangente a la elipse por P es $y - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}\,(x - x_0)$.

4.2.2.2.2 Solución sintético-analítica

Con base en la Tarea 6, la solución sintético-analítica del problema se presenta en la tabla 19:

Tabla 19. Solución sintético-analítica (Elipse)

Fase 1. Modelación algebraica de objetos geométricos

Teniendo como base, el procedimiento que provee la solución de la Tarea 4 (Elipse), lo primero que los estudiantes deben hacer es tomar los objetos geométricos involucrados y representarlos desde punto de vista algebraico, con sus ecuaciones correspondientes. Además, los estudiantes deben proveer la justificación de cada paso. Lo anterior, se ilustra en la tabla 19.1.

Antes de iniciar, se debe considerar los siguiente: ¿cuál es la ecuación de la circunferencia involucrada el procedimiento sintético?, ¿cómo encontrar la ecuación de la recta que resultaría ser la recta tangente según el procedimiento sintético?

Tabla 19.1. Modelación algebraica de objetos geométricos

Representación geométrica	**Representación algebraica**	
	Traducción a lo algebraico	**Justificación**
1. Haciendo uso de la herramienta "*elipse*", construir una elipse $\mathcal{E}$, con focos F_1 y F.	$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con focos $F(-c, 0)$ y $F_1(c, 0)$	T. Ecuación canónica (Elipse)
2. Construir un punto P tal que $P \in \mathcal{E}$	$P(x_0, y_0)$	Dado
3. Construir $\odot F_{1_r}$, tal que $FP + PF_1 = r$ (Figura 35b)	$\odot F_{1_r}: (x - c)^2 + y^2 = (r)^2; r = 2a$	T. Ecuación canónica (Circunferencia) Propiedad de la Elipse
4. Construir $\overleftrightarrow{PF_1}$	$y = \dfrac{y_0}{x_0 - c}\,(x - c)$	T. Ecuación canónica de la Recta
5. Construir un punto T, tal que $T = \odot F_{1_r} \cap \overleftrightarrow{TF_1}$ (Figura 35c)	Resolver el sistema de ecuaciones conformado por las ecuaciones E1:$(x - c)^2 + y^2 = (2a)^2$ y E2: $y = \frac{y_0}{x_0 - c}\,(x - c)$ 1. Ordenada del punto *T:*	

Aserción	**Garantía**
E1: $(x - c)^2 + y^2 = (2a)^2$ E2: $(x - c) = \frac{y(x_0 - c)}{y_0}$	Dado
$\left[\frac{y(x_0 - c)}{y_0}\right]^2 + y^2 = 4a^2$	Sustituir E2 en E1
$y^2\left(\left[\frac{x_0 - c}{y_0}\right]^2 + 1\right) = 4a^2$	Propiedad de los números reales
$y^2 = \frac{4a^2 y_0^2}{(x_0 - c)^2 + y_0^2}$	

$y = \frac{2ay_0}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}}$

2. Abscisa del punto *T:*

Aserción	Garantía
E1: $(x-c)^2 + y^2 = (2a)^2$ E3: $y = \frac{2ay_0}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}}$	Dado
$(x-c)^2 + \frac{4a^2y_0^2}{(x_0-c)^2+y_0^2} = 4a^2$	Sustituir E3 en E1
$(x-c)^2 = 4a^2 - \frac{4a^2y_0^2}{(x_0-c)^2+y_0^2}$	Propiedad de los números reales
$(x-c)^2 = 4a^2\left(1 - \frac{y_0^2}{(x_0-c)^2+y_0^2}\right)$	
$(x-c)^2 = 4a^2\left(\frac{(x_0-c)^2}{(x_0-c)^2+y_0^2}\right)$ $x = \frac{2a(x_0-c)}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}} + c$	

Fase 2. Solución analítica

Teniendo en cuenta que, mediante la Tarea 4, se estableció que la $\mathcal{M}_{\overline{TF}}$ resulta ser tangente a $\mathcal{E}$ por P, para dar solución de la Tarea 6, se debe hallar la ecuación de la dicha mediatriz. Dado que se quiere construir la ecuación de la $\mathcal{M}_{\overline{TF}}$, se debe establecer la ecuación de una recta que debe contener al punto medio *M* de $\overline{TF}$ y ser perpendicular a $\overline{TF}$ por *M;* para luego usar el Teorema Recíproco de la Mediatriz y poder afirmar que dicha recta es mediatriz de $\overline{TF}$. Con base en ello, en la Tabla 19.2 se presenta el procedimiento algebraico que se debe llevar a cabo para determinar la ecuación de $\mathcal{M}_{\overline{TF}}$:

Tabla 19.2. Solución sintético-analítica

Representación geométrica	Representación algebraica
6. Construir $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$ (Figura 35d)	1. Determinar la pendiente de la recta $\overleftrightarrow{TF}$:

Aserción	Garantía
$m_{\overleftrightarrow{TF}} = \frac{\frac{2ay_0}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}}}{\frac{2a(x_0-c)}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}}+2c}$ $= \frac{ay_0}{a(x_0-c)+c\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}}$	D. Pendiente de recta:

2. Determinar la pendiente de la $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$

Aserción	Garantía
$m_{\mathcal{M}_{\overline{FT}}} = \frac{-1}{m_{\overleftrightarrow{TF}}} = -\frac{a(x_0-c)+c\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}}{ay_0}$	D. Pendiente de recta

3. Verificar que $m_{\mathcal{M}_{\overline{FT}}} = -\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$, es decir que $-\frac{a(x_0-c)+c\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}}{ay_0} = -\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$

Aserción	Garantía

1. $m_{\mathcal{M}_{\overline{FT}}} = -\frac{a(x_0-c)+c\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}}{ay_0}$	Dado
2. $a^2 - c^2 = b^2$ $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$	T. Ecuación canónica de la Elipse
3. $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{a^2-c^2} = 1$	Principio de sustitución (3)
4. $y_0^2 = \frac{a^4-x_0^2a^2-a^2c^2+x_0^2c^2}{a^2}$	Propiedad de los números reales (4)
5. $(x_0 - c)^2 + y_0^2 = \frac{\left(a^2-x_0c\right)^2}{a^2}$	Amplificando $(x_0 - c)^2$ y sustituyendo y_0^2 (2,5)
6. $c\sqrt{\frac{(a^2-x_0c)^2}{a^2}} = \frac{c}{a}(a^2 - x_0c)$	Principio de sustitución (6,2)
7. $m_{\mathcal{M}_{\overline{FT}}} = -\left[\frac{a(x_0-c)+\frac{c}{a}(a^2-x_0c)}{ay_o}\right]$	Principio de sustitución (1,7)
8. $m_{\mathcal{M}_{\overline{FT}}} = -\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$	Propiedad de los números reales (4)

4. Con $P(x_0, y_0)$ y $m_{\mathcal{M}_{\overline{FT}}} = -\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$, la ecuación de $\mathcal{M}_{\overline{FT}}$ es**:**

$y - y_0 = -\frac{x_0b^2}{y_0a^2}\ (x - x_0)$.

Finalmente, la proposición resultante de la solución sintético-analítica es:

Teorema Elipse-Mediatriz-Recta tangente (Geometría analítica): Dada una elipse $\mathcal{E}$ con ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y focos $F(-c, 0)$ y $F_1(c, 0)$; Sea $P(x_0\ , y_0)$ un punto de ella, $\odot\ F_{1_r}$: $(x - c)^2 + y^2 = (2a)^2$ y $T\left(\frac{2a(x_0-c)}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}} + c\ ,\ \frac{2ay_0}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}}\right)$. Entonces, $\mathcal{M}_{\overline{TF}}$ con ecuación $y - y_0 = -\frac{x_0b^2}{y_0a^2}\ (x - x_0)$ es tangente a $\mathcal{E}$ por P.

4.3 Segunda gran secuencia: Las técnicas analíticas como desarrollo de las técnicas sintéticas

De acuerdo con lo descrito en la *Fase 2* de la metodología (Capítulo III), el contenido de esta segunda gran secuencia se centra en desarrollar la propuesta de Gascón (2002) con la cual sugiere tareas para vincular las técnicas analíticas y sintéticas. Para ello, propone un problema de construcción de un triángulo con ciertas condiciones dadas que, en un principio, puede ser abordado desde la geometría clásica mediante el uso del método *análisis-síntesis*; luego, mediante modificaciones del enunciado que van agregando otras condiciones, se precisa la necesidad de incluir técnicas propias de la geometría analítica y la representación algebraica para poder establecer una solución.

En ese marco, se presenta, en un principio, la descripción de cada *subfase* (*Fase 3* de la metodología) para una secuencia de tareas (problemas 1, 2 y 3) que se puede abordar desde el dominio de la geometría pura o clásica, puesto que se pueden interpretar como problemas de construcción con regla y compás. Posterior a ello, se presenta la descripción de la última tarea (problema 4) que debe ser abordada desde el dominio de la geometría analítica (con representaciones algebraicas).

Cabe aclarar que, presentamos los problemas 1, 2 y 3 en una sola secuencia, debido a que se logra sintetizar la descripción de esta secuencia de tareas, pues estos problemas contienen varios aspectos en común. Sin embargo, sugerimos que el profesor implemente y haga la respectiva puesta en común de cada problema por aparte; de esta manera, consideramos que los estudiantes tienen mayor posibilidad de vislumbrar cómo el problema se va modificando y complejizando. A continuación, presentamos la descripción correspondiente.

Secuencia 1
Usando el software Geogebra provea un procedimiento de construcción que dé solución a cada uno los siguientes problemas:
Problema 1: Construir un ΔABC dados los siguientes datos: 1. La longitud del lado $\overline{AB}$ es c 2. La longitud de la altura $h_{\overline{AB}}$ (altura relativa a $\overline{AB}$) 3. La longitud de la mediana $m_{\overline{AB}}$ (mediana relativa a $\overline{AB}$)
Problema 2: Construir un ΔABC dados los siguientes datos: 1. La longitud del lado $\overline{AB}$ es c 2. La longitud de la altura $h_{\overline{AB}}$ (altura relativa a $\overline{AB}$) 3. La longitud de la mediana $m_{\overline{BC}}$ (mediana relativa a $\overline{BC}$)
Problema 3: Construir un ΔABC dados los siguientes datos: 1. La longitud del lado $\overline{AB}$ es c 2. La longitud de la mediana $m_{\overline{AB}}$ (mediana relativa a $\overline{AB}$) 3. La longitud de la mediana $m_{\overline{BC}}$ (mediana relativa a $\overline{BC}$)
Para cada problema, responda:
Con base en los datos dados, ¿cuáles resultan ser los lugares geométricos (circunferencias o rectas), que, al intersecarse, resulta la construcción de un punto que es clave para resolver el problema?

Descripción de los requisitos: Para el desarrollo de esta tarea se deben tener presente los objetos matemáticos primarios que constituyen los conocimientos y destrezas previos de los estudiantes (ver Figura 37):

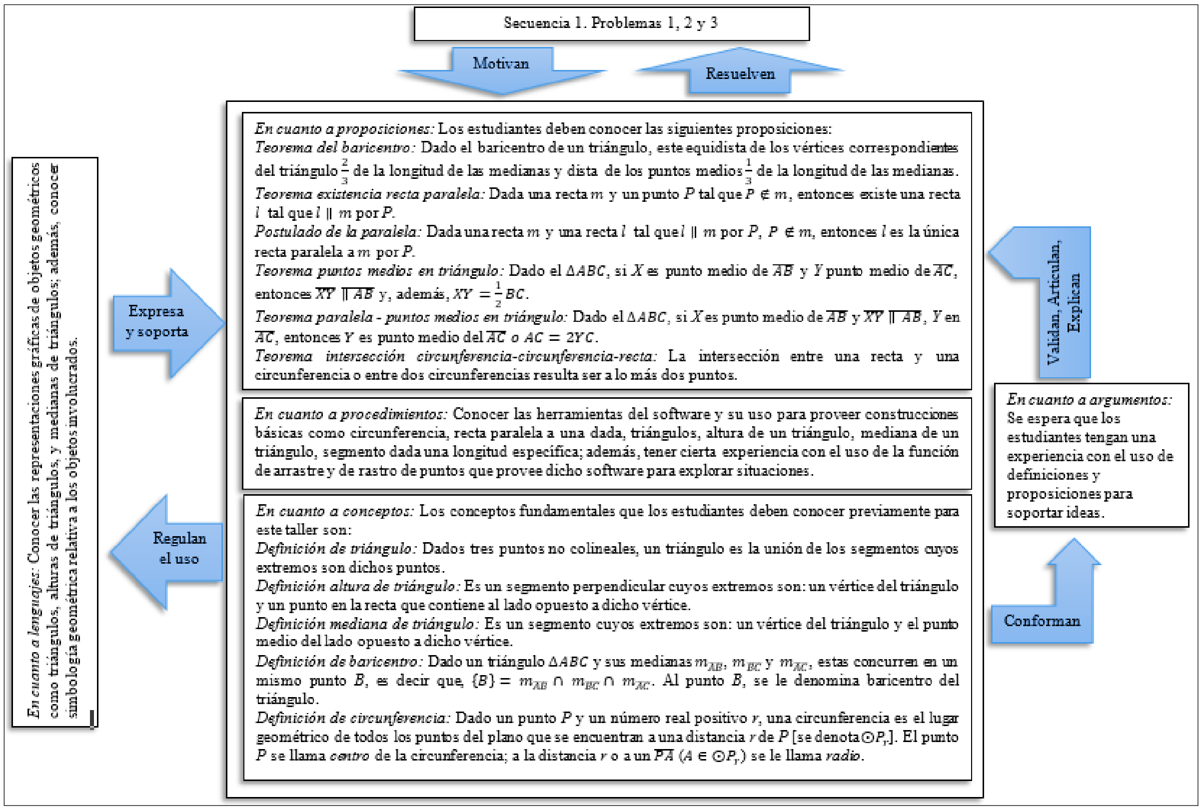


Figura 37. Descripción de los requisitos (Secuencia 1: problemas 1, 2 y 3)

Descripción de las metas: Con el desarrollo de esta tarea, se pretenden lograr las siguientes expectativas de aprendizaje (ver Figura 38):

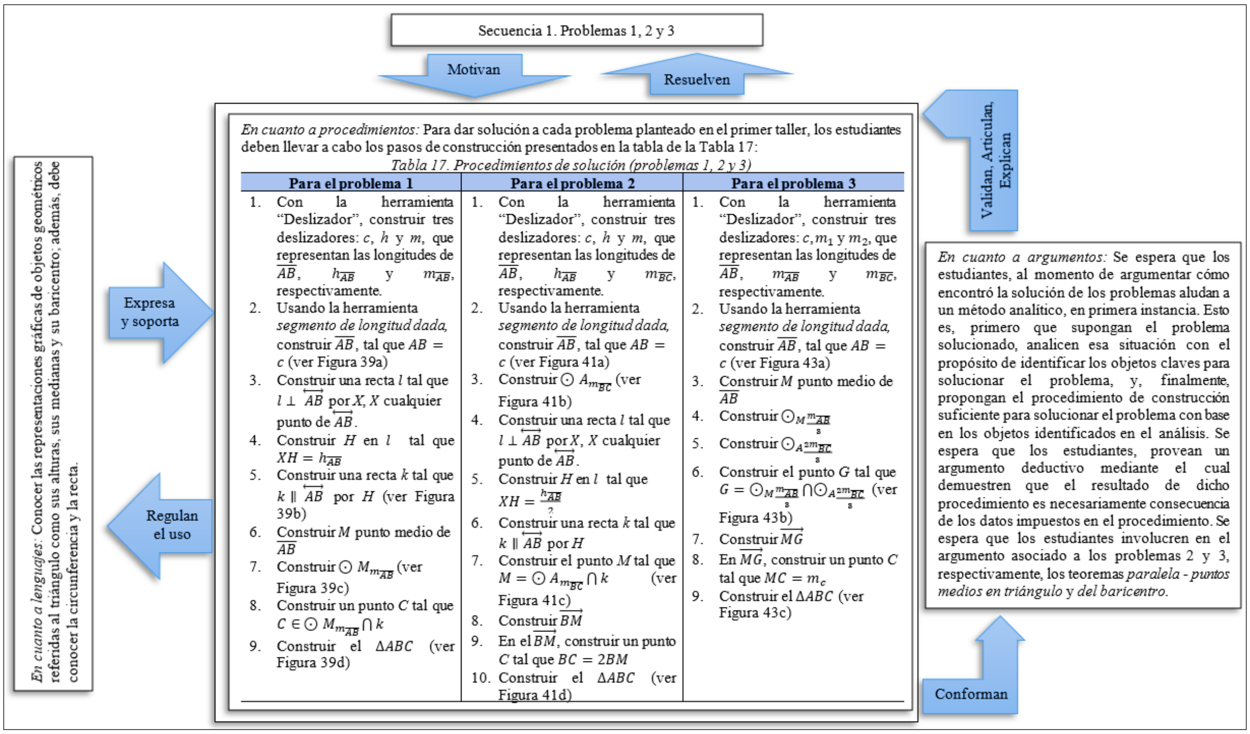


Figura 38. Descripción de las metas (Secuencia 1: problemas 1, 2 y 3)

Descripción de los materiales y recursos: Para el desarrollo de este taller, se debe hacer uso de un software de geometría dinámica: Geogebra.

Descripción de la temporalidad: Se estima que cada problema puede ser desarrollado en máximo 40 minutos, en grupos de tres estudiantes. Para el abordaje de cada problema, se sugiere que el profesor actúe como instructor y orientador, guiando cada paso para proveer la solución correspondiente a cada problema. Dichas soluciones se presentan en la tabla 20.

Tabla 20. Solución de los problemas 1, 2 y 3

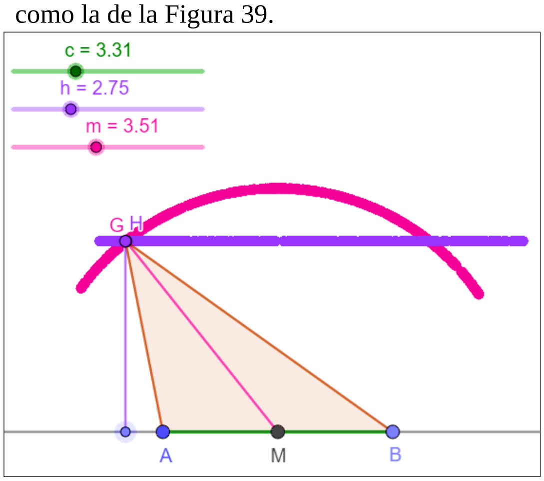
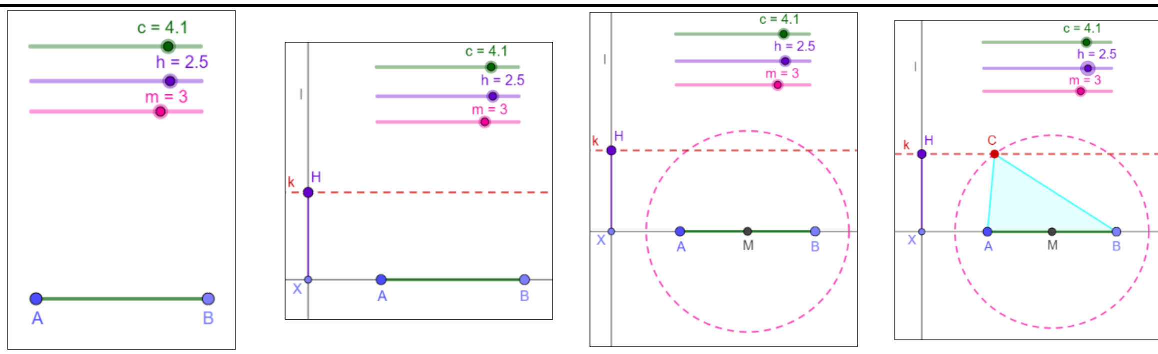
<table>
<tr><th colspan="2">Solución del problema 1</th></tr>
<tr><th>Método de análisis</th><th>Método de síntesis</th></tr>
<tr><td>
Los estudiantes podrían abordar analíticamente el problema 1. Para ello, suponen el problema resuelto, es decir, parten de un triángulo que tiene como atributos los datos dados. Podría suceder algo como lo siguiente:
1. Construir $\overleftrightarrow{AB}$, tal que $AB = c$
1. Construir M punto medio de $\overline{AB}$
2. Construir un $\overleftrightarrow{MC'}$ con MC'=$m_{\overline{AB}}$ (usando la herramienta segmento de longitud dada).
3. Construir el ΔABH y arrastrar el punto H hasta que $d\left(H, \overleftrightarrow{AB}\right) = h_{\overline{AB}}$.
4. Hacer una exploración consistente en lo siguiente: activar rastro a los puntos C' y H, y hacer un arrastre de dichos puntos haciendo que H siempre mantenga la altura condicionada ($h_{\overline{AB}}$), pero intentado, casi de manera coordinada, que C' y H coincidan. Terminada una exploración como esta, los estudiantes deben lograr una representación como la de la Figura 39.


Figura 39. Método de análisis (problema 1)

Con base en la exploración y análisis de esta, ellos podrían determinar que el punto C debe ser intersección de $\odot\, M_{m_{\overline{AB}}}$ y una recta k tal que $k \parallel \overleftrightarrow{AB}$ y la distancia entre tales rectas sea $h_{\overline{AB}}$.
</td><td>
Con base en el descubrimiento de las condiciones necesarias para resolver el problema 1, los estudiantes deben presentar, de manera sintética, el procedimiento de construcción que provee la solución de dicho problema:
1. Con la herramienta “Deslizador”, construir tres deslizadores: c, h y m, que representan las longitudes de $\overline{AB}$, $h_{\overline{AB}}$ y $m_{\overline{AB}}$, respectivamente.
2. Usando la herramienta segmento de longitud dada, construir $\overline{AB}$, tal que $AB = c$ (ver Figura 40a)
3. Construir una recta l tal que $l \perp \overleftrightarrow{AB}$ por X, X cualquier punto de $\overleftrightarrow{AB}$.
4. Construir H en l tal que $XH = h_{\overline{AB}}$
5. Construir una recta k tal que $k \parallel \overleftrightarrow{AB}$ por H (ver Figura 40b)
6. Construir M punto medio de $\overline{AB}$
7. Construir $\odot\, M_{m_{\overline{AB}}}$ (ver Figura 40c)
8. Construir un punto C tal que $C \in \odot\, M_{m_{\overline{AB}}} \cap k$
9. Construir el ΔABC (ver Figura 40d)
</td></tr>
<tr><td colspan="2">En resumen, el procedimiento que se presenta en la columna de la derecha se constituye en una solución, desde la geometría clásica (mediante los métodos de análisis y síntesis), del problema 1. En la figura 40, se muestra la representación gráfica de dicho procedimiento:</td></tr>
</table>



(a) (b) (c) (d)

Figura 40. Representación gráfica de la solución del problema 1

Solución del problema 2	
Método de *análisis*	**Método de *síntesis***
En el enunciado del problema 1, se tenían dadas las longitudes de $h_{\overline{AB}}$ y $m_{\overline{AB}}$ (relativas a $\overline{AB}$). El enunciado del problema 2 se constituye, de dos de los mismos objetos geométricos dados para el problema 1 (las longitudes c de $\overline{AB}$ y $h_{\overline{AB}}$), pero contiene una variación: ya no se alude a $m_{\overline{AB}}$ (mediana relativa a $\overline{AB}$), sino a $m_{\overline{BC}}$ (mediana relativa a $\overline{BC}$). Con esta nueva condición, el problema se complejiza un poco. De manera similar al problema 1, los estudiantes podrían abordar analíticamente el problema 2. Para ello, suponen el problema resuelto, es decir, parten de un triángulo que tiene como atributos los datos dados. Podría suceder algo como lo siguiente: 1. Construir $\overleftrightarrow{AB}$, tal que $AB = c$ 2. Construir $\overline{AM'}$ tal que $AM' = m_{\overline{BC}}$ (usando la herramienta *segmento de longitud*) 3. Construir un punto H tal que $d(H, \overleftrightarrow{AB}) = h_{\overline{AB}}$ 2. Construir el ΔAHB 3. Construir M punto medio de $\overline{BH}$ 4. Hacer una exploración consistente en lo siguiente: activar *rastro* a los puntos *M'* y *M*; arrastrar a los puntos *D* (pie de altura relativa a $h_{\overline{AB}}$) y *M* intentado, casi de manera coordinada, que *M'* y *M* coincidan. Terminada una exploración como esta,	Con base en el descubrimiento de las condiciones necesarias para resolver el problema 2, los estudiantes deben presentar, de manera deductiva, el procedimiento de construcción que provee la solución de dicho problema: 1. Con la herramienta "Deslizador", construir tres deslizadores: *c*, *h* y *m*, que representan las longitudes de $\overline{AB}$, $h_{\overline{AB}}$ y $m_{\overline{BC}}$, respectivamente. 2. Usando la herramienta *segmento de longitud dada,* construir $\overline{AB}$, tal que $AB = c$ (ver Figura 42a) 3. Construir $\odot A_{m_{\overline{BC}}}$ (ver Figura 42b) 4. Construir una recta l tal que $l \perp \overleftrightarrow{AB}$ por X, X cualquier punto de $\overleftrightarrow{AB}$. 5. Construir H en l tal que $XH = \frac{h_{\overline{AB}}}{2}$ 6. Construir una recta k tal que $k \parallel \overleftrightarrow{AB}$ por H 7. Construir el punto M tal que $M = \odot A_{m_{\overline{BC}}} \cap k$ (ver Figura 42c) 8. Construir $\overrightarrow{BM}$ 9. En el $\overrightarrow{BM}$, construir un punto C tal que $BC = 2BM$ 10. Construir el ΔABC (ver Figura 42d)

los estudiantes deben lograr una representación como la de la Figura 41).

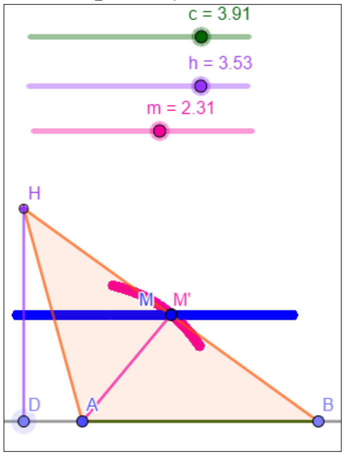
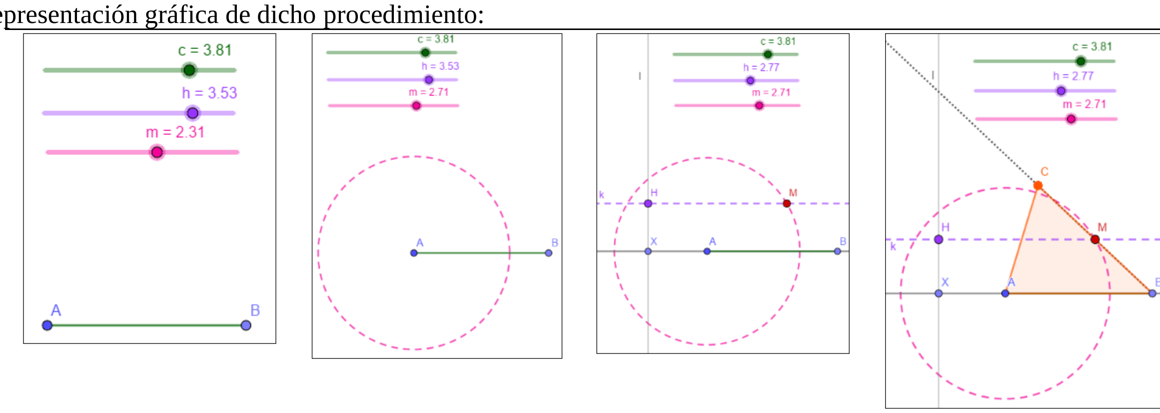


Figura 41. Método de análisis (problema 2)

Con base en la exploración y análisis de esta, los estudiantes, pueden evocar el *Teorema puntos medios en triángulo* para precisar que, si se tomara el punto medio de $h_{\overline{AB}}$ y el punto M', la recta que los contiene resulta ser paralela a $\overleftrightarrow{AB}$. Con ello, los estudiantes pueden lograr determinar que el punto clave para resolver el problema es el punto medio M de $\overline{BC}$el cual se obtiene como intersección de $\odot A_{m_{\overline{BC}}}$ y una recta k tal que $k \parallel \overleftrightarrow{AB}$ y la distancia entre tales rectas sea $\frac{h_{\overline{AB}}}{2}$. Así, se tendrían las condiciones suficientes para construir a C como se ilustra en la columna de la derecha siguiente.

En resumen, el procedimiento que se presenta en la columna de la derecha se constituye en una solución, desde la geometría clásica (mediante los métodos de *análisis* y *síntesis*), del problema 2. En la figura 42, se muestra la representación gráfica de dicho procedimiento:



(a)	(b)	(c)	(d)

Figura 42. Representación gráfica de la solución del problema 2

Solución del problema 3	
Método de *análisis*	**Método de *síntesis***
En el enunciado de problema 2, se tenían dadas las longitudes de $h_{\overline{AB}}$ y $m_{\overline{BC}}$ (relativas a $\overline{AB}$ y a $\overline{BC}$, respectivamente). El enunciado del problema 3 se	Con base en el descubrimiento de las condiciones necesarias para resolver el problema 3, los estudiantes deben presentar, de manera deductiva, el procedimiento

constituye, de dos de los mismos objetos geométricos dados para el problema 2 (las longitudes c de $\overline{AB}$ y $m_{\overline{BC}}$), pero contiene una variación: ya no se alude a $h_{\overline{AB}}$, sino a $m_{\overline{AB}}$ (relativa a $\overline{AB}$). Con esta nueva condición, el problema se complejiza un poco.

De manera similar al problema 2, los estudiantes podrían abordar analíticamente el problema 3. Para ello, suponen el problema resuelto, es decir, parten de un triángulo que tiene como atributos los datos dados. Podría suceder algo como lo siguiente:

1. Construir $\overline{AB}$, tal que $AB = c$
2. Construir $\overline{AM}$ tal que $AM = m_{\overline{BC}}$
3. Construir M_1 punto medio de $\overline{AB}$
4. Construir $\overline{CM_1}$, tal que $CM_1 = m_{\overline{AB}}$ (usando la herramienta *segmento de longitud*)
5. Construir el ΔABC
6. Construir M_2 punto medio de $\overline{BC}$
7. Hacer una exploración consistente en lo siguiente: arrastrar a C y a M intentado, casi de manera coordinada, que M_2 y M coincidan. Terminada una exploración como esta, los estudiantes deben lograr una representación como la de la Figura 43).

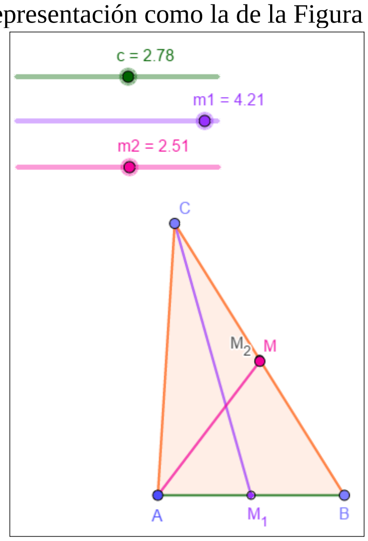


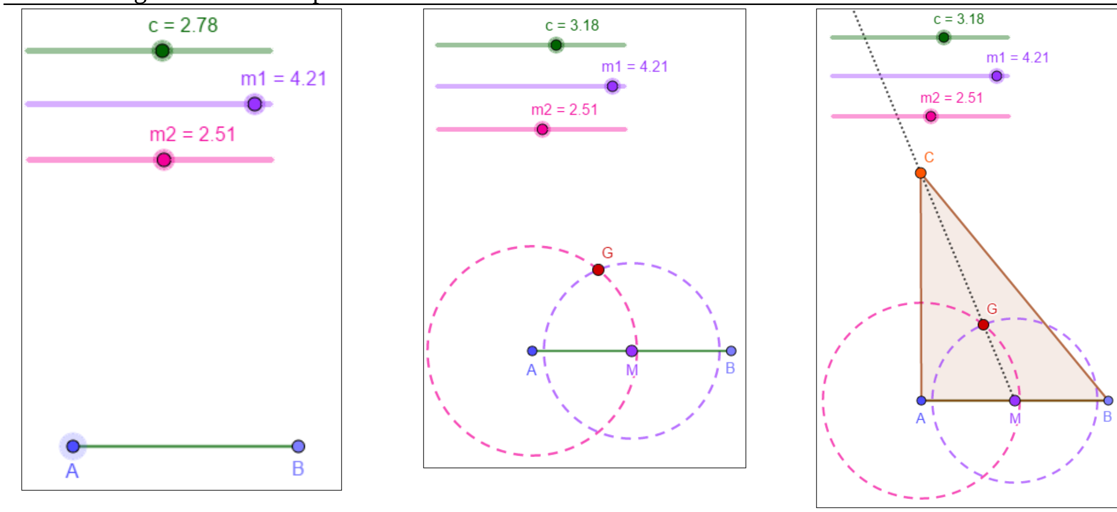
Figura 43. Método de análisis (problema 3)

Con base en la exploración y análisis de esta, los estudiantes pueden percatarse de que $m_{\overline{BC}}$ y $m_{\overline{AB}}$ se intersecan y pueden evocar la definición de baricentro para precisar que el punto de intersección de las dos medianas es el baricentro (un punto G). También, aludiendo al *Teorema del baricentro*, lo estudiantes pueden precisar que $AG = \frac{m_{\overline{AB}}}{3}$ y $GM_1 = \frac{2m_{\overline{BC}}}{3}$, en otras palabras, $G = \odot_{M\frac{m_{\overline{AB}}}{3}} \cap \odot_{A\frac{2m_{\overline{BC}}}{3}}$ Así, se tendrían las condiciones suficientes para construir a C como se ilustra en la columna de la derecha siguiente.

de construcción que provee la solución de dicho problema:

1. Con la herramienta “Deslizador”, construir tres deslizadores: c, m_1 y m_2, que representan las longitudes de $\overline{AB}$, $m_{\overline{AB}}$ y $m_{\overline{BC}}$, respectivamente.
2. Usando la herramienta *segmento de longitud dada*, construir $\overline{AB}$, tal que $AB = c$ (ver Figura 44a)
3. Construir M punto medio de $\overline{AB}$
4. Construir $\odot_{M\frac{m_{\overline{AB}}}{3}}$
5. Construir $\odot_{A\frac{2m_{\overline{BC}}}{3}}$
6. Construir el punto G tal que $G = \odot_{M\frac{m_{\overline{AB}}}{3}} \cap \odot_{A\frac{2m_{\overline{BC}}}{3}}$ (ver Figura 44b)
7. Construir $\overrightarrow{MG}$
8. En $\overrightarrow{MG}$, construir un punto C tal que $MC = m_c$
9. Construir el ΔABC (ver Figura 44c)

En resumen, el procedimiento que se presenta en la columna de la derecha se constituye en una solución, desde la geometría clásica (mediante los métodos de *análisis* y *síntesis*), del problema 3. En la figura 44, se muestra la representación gráfica de dicho procedimiento:



(a) (b) (c)

Figura 44. Representación gráfica de la solución del problema 3

Cabe aclarar que, al abordar estos problemas, los estudiantes pueden presentar algunas dificultades, las cuales se presentan en la tabla 21, con la sugerencia de intervención del profesor:

Tabla 21. Posibles dificultades e intervención del profesor (secuencia 1)

Posibles dificultades	**Intervención del profesor**
Los estudiantes no establecen un método (o una exploración) que les permita determinar los posibles lugares geométricos que se deben construir, de manera que, al intersecarse, resulte el punto clave para construir el ΔABC con las condiciones dadas en cada problema. Los estudiantes no logran determinar cuál es el punto que resulta ser clave para dar solución al problema, de manera sintética (partiendo de las condiciones detectadas como suficientes hasta obtener el triángulo con las condiciones dadas).	Dado el reconocimiento de la dificultad, su abordaje requiere de un acompañamiento continuo del profesor. Este acompañamiento consiste específicamente en: 1. El profesor puede guiar el procedimiento de solución, realizando algunas preguntas como: ¿qué objetos están involucrados en el enunciado del problema?, ¿en qué consiste cada objeto?, ¿qué vértice hace falta para terminar de construir el ΔABC? 2. Sugerir exploraciones similares a la indicadas en las columnas "método de análisis" para que los estudiantes puedan darse cuenta de los lugares geométricos que se deben considerar para solucionar los problemas, entre otras. Para el problema 1, por ejemplo, el profesor podría sugerir a los estudiantes los siguiente: Construyan M punto medio de $\overline{AB}$; un $\overleftrightarrow{MC'}$ con $MC'=m_{\overline{AB}}$ l (usando la herramienta *segmento de longitud dada*); ΔABH y arrastren el punto H hasta que $d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right) = h_{\overline{AB}}$; pongan rastros a los puntos *C'* y *H*. Luego, el profesor puede preguntar: ¿Qué sucede cuando arrastra el punto *C'*? ¿Qué sucede si el punto H se arrastra intentado que H siempre mantenga la altura condicionada ($h_{\overline{AB}}$)? Con base en las respuestas a estas preguntas, ¿qué objetos son necesarios construir para determinar el punto C de forma tal que ΔABC tenga las condiciones deseadas? Para los problemas 2 y 3, preguntas similares pero aterrizadas a cada método de análisis, es posible que el profesor pueda utilizar.

	Advertir que la solución de los problemas, se fundamentan en una proposición en particular. Para el problema 2, es necesario considerar los teoremas *Puntos medios en triángulo* y *Paralela - puntos medios en triángulo*; para el problema 3, el *Teorema del baricentro*.

Para continuar con la presentación y descripción de esta gran secuencia, proponemos un cuarto problema que, según Gascón (2002), implica necesariamente introducir métodos algebraicos-analíticos para producir su solución. Este problema (que para esta secuencia se convierte en el problema 4) enuncia una modificación con respecto al problema 3, añadiendo una condición nueva. Dado que el abordaje del problema 4 incluye elementos de la Geometría Analítica y el Álgebra, se presenta una descripción exclusiva para él:

Problema 4
Usando el software Geogebra, provea un procedimiento de construcción que dé solución al siguiente problema: **Problema 4:** Construir un ΔABC dadas las longitudes de las tres medianas: $m_{\overline{BC}}$, $m_{\overline{AC}}$ y $m_{\overline{AB}}$. Para este problema, responda: Con base en los datos dados, ¿cuáles resultan ser los lugares geométricos, que, al intersecarse, resulta la construcción de un punto que es clave para resolver el problema?

Descripción de los requisitos: Para el desarrollo de esta tarea se deben tener presente los objetos matemáticos primarios que constituyen los conocimientos y destrezas previos de los estudiantes (ver figura 45):

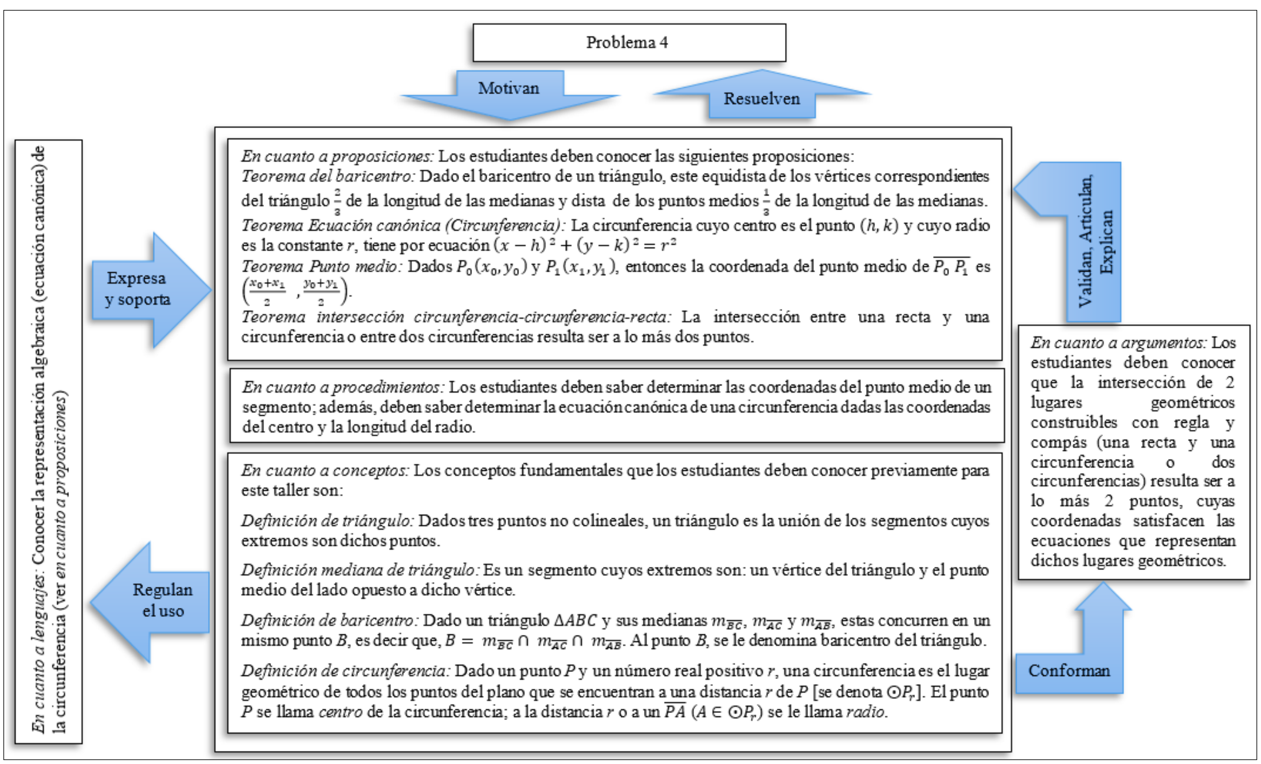


Figura 45. Descripción de los requisitos (problema 4)

Descripción de las metas: Con el desarrollo de esta tarea, se pretenden lograr las siguientes expectativas de aprendizaje (ver figura 46):

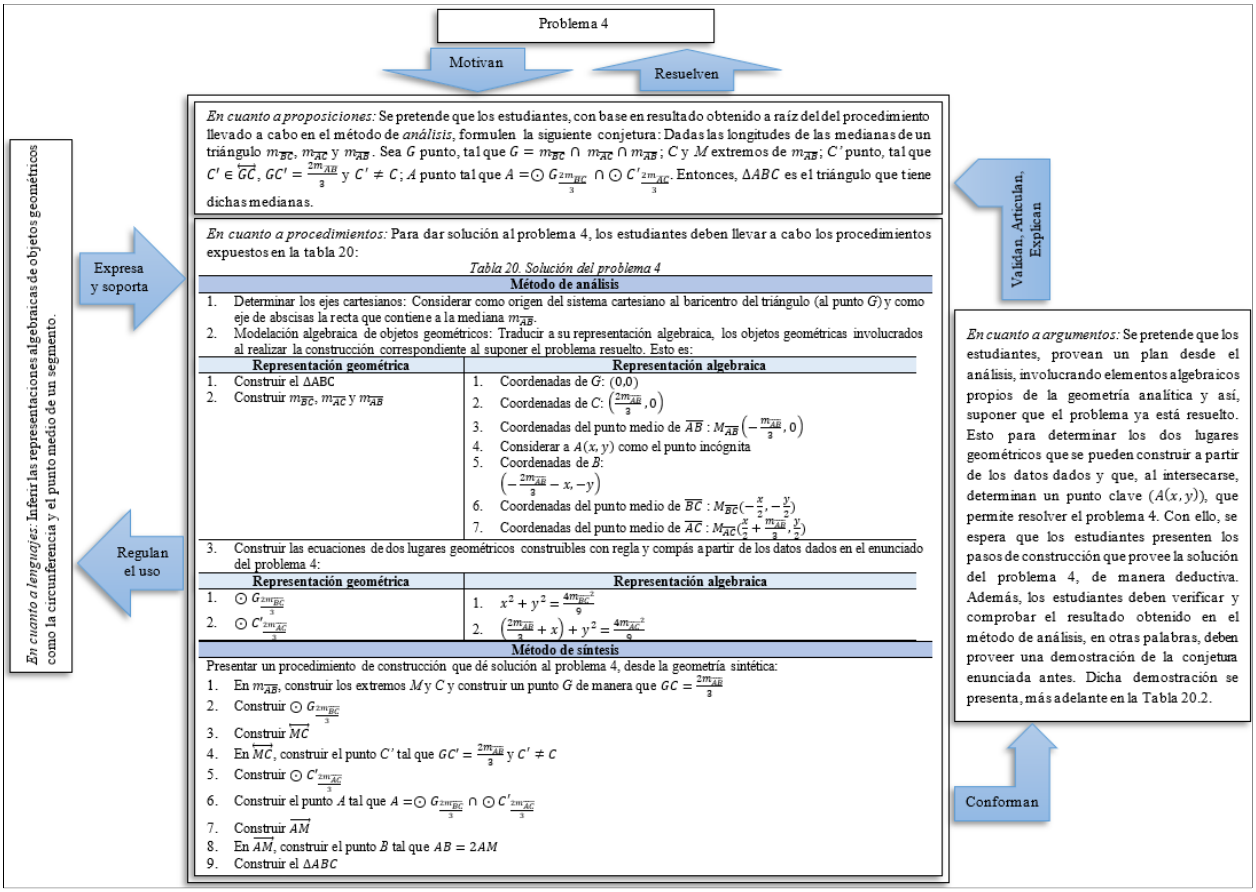


Figura 46. Descripción de las metas (problemas 4)

Descripción de los materiales y recursos: Para el desarrollo de este taller, se debe hacer uso de un software de geometría dinámica: Geogebra.

Descripción de la temporalidad: Se estima que el problema 4 puede ser desarrollado en máximo 40 minutos, en grupos de tres estudiantes. Para el abordaje de este problema, se sugiere que el profesor actúe como instructor y orientador, guiando cada paso para proveer la solución correspondiente, la cual se presenta en la tabla 22:

Tabla 22. Solución del problema 4

Solución del problema 1
Método de *análisis*
En el enunciado de problema 3, se tenían dadas las longitudes de $m_{\overline{AB}}$ y $m_{\overline{BC}}$ (relativas al lado $\overline{AB}$ y al lado $\overline{BC}$, respectivamente). El enunciado del problema 4 se constituye con dos de los mismos objetos geométricos que son condición del problema 3, pero con una variación: ya no estará dada longitud de $\overline{AB}$ sino de $m_{\overline{AC}}$ (mediana relativa al lado $\overline{AC}$). Con esta nueva condición, el problema se complejiza un poco, a tal punto que, si los estudiantes intentan abordar el problema desde el *análisis* (partiendo del problema resuelto) y el dominio de la geometría clásica –como sucede en los problemas anteriores– se percatarán de que esta técnica presenta algunas limitaciones para solucionar el problema desde el dominio de la geometría clásica.

Tal como se ilustra en la figura 47, al fijar la $m_{\overline{AB}}$, se hace imposible intentar que, mediante el arrastre, M_2 coincida con M al mismo tiempo que M_4 coincida con M_3.

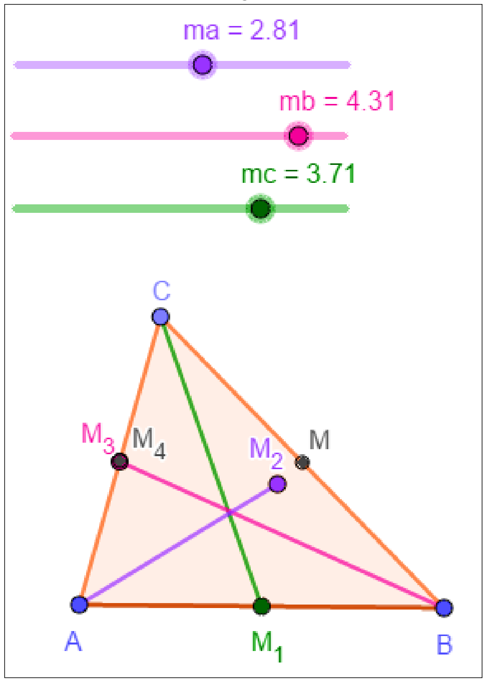


Figura 47. Método de análisis desde el arrastre (problema 4)

Por ello, Gascón sugiere abordar el problema desde la geometría analítica, es decir, usando el álgebra, así:

1. *Ubicar convenientemente objetos en el plano cartesiano:* Considerar como origen del sistema cartesiano al baricentro del triángulo (al punto G) y como eje de abscisas la recta que contiene a la mediana $m_{\overline{AB}}$. Con ello, se conocen las coordenadas de $G(0,0)$, de $M_{\overline{AB}}\left(-\frac{m_{\overline{AB}}}{3},0\right)$ y de $C\left(\frac{2m_{\overline{AB}}}{3},0\right)$ (ver figura 48).

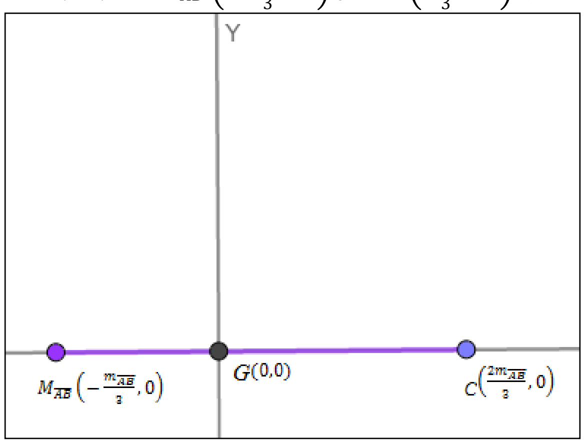


Figura 48.Elección conveniente de los ejes cartesianos

2. *Considerar a $A(x,y)$ como el punto incógnita*: Considerando las condiciones que tiene el problema y el Teorema del baricentro, se obtienen las coordenadas de $M_{\overline{BC}}\left(-\frac{x}{2},-\frac{y}{2}\right)$ y de $M_{\overline{AC}}\left(\frac{x}{2}+\frac{m_{\overline{AB}}}{3},\frac{y}{2}\right)$ (ver figura 49)

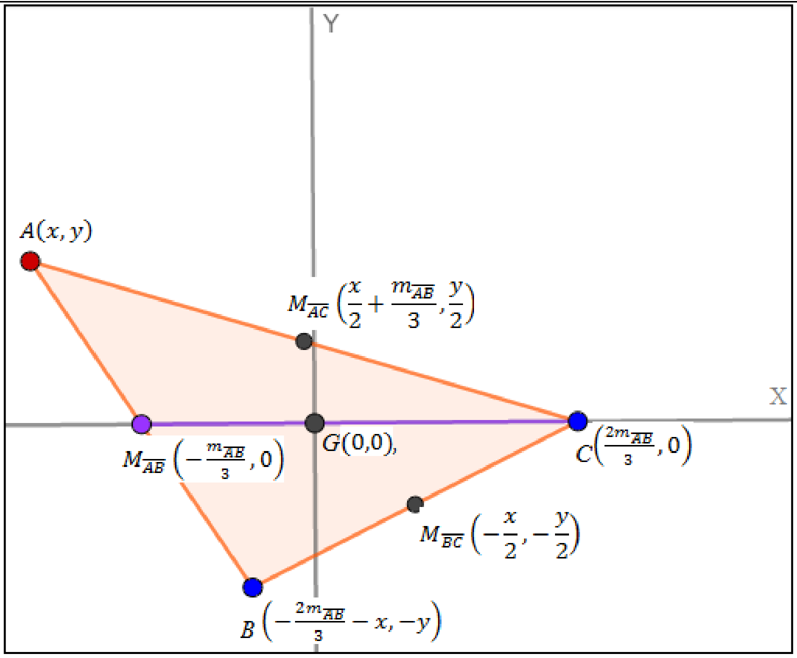


Figura 49. Coordenadas de puntos

3. *Determinar las ecuaciones de dos lugares geométrico, cuya intersección resulta ser el punto incógnita:* Darse cuenta de que, si se construyen las circunferencias de centro *G* y *C'* y radios $\frac{2m_{\overline{BC}}}{3}$ y $\frac{2m_{\overline{AC}}}{3}$, respectivamente, estos se constituyen en los lugares geométricos que deben ser construidos a partir de los datos dados en el enunciado de problema 4 y del Teorema del baricentro. Esto, porque al considerar las condiciones que cumple el punto *A*, se tiene que este debe distar de *G* una distancia de $\frac{2m_{\overline{BC}}}{3}$; con ello se obtiene una circunferencia con ecuación $x^2+y^2=\frac{4m_{\overline{BC}}{}^2}{9}$ (*i.e.*, una circunferencia con centro en *G* $(0,0)$ y radio $\frac{2m_{\overline{BC}}}{3}$). Así mismo, al considerar las condiciones que cumple el punto $M_{\overline{AC}}$, se tiene que este debe distar de *G* una distancia de $\frac{m_{\overline{AC}}}{3}$; con ello se obtiene una circunferencia con ecuación $\left(\frac{2m_{\overline{AB}}}{3}+x\right)+y^2=\frac{4m_{\overline{AC}}{}^2}{9}$ (*i.e.*, una circunferencia con centro en $C'\left(-\frac{2m_{\overline{AB}}}{3},0\right)$ y radio $\frac{m_{\overline{AC}}}{3}$). El centro de esta circunferencia resulta ser el punto *C'*-simétrico de *C* respecto de *G*- (ver figura 50).

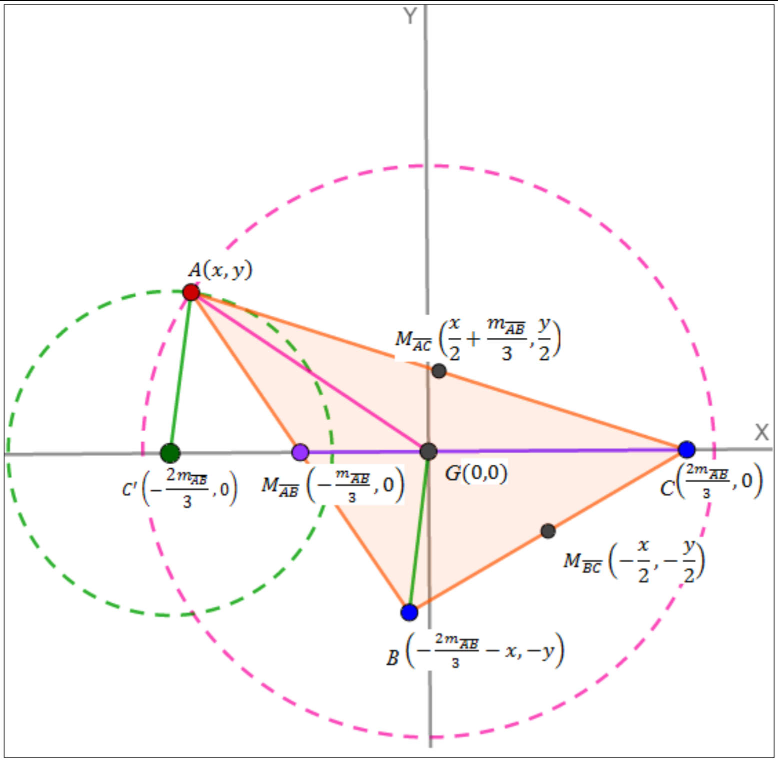


Figura 50. Solución desde la geometría analítica (problema 4)

Gascón (2002) explica que, la diferencia fundamental entre el problema 3 y el problema 4 radica en que, en el primero de estos, sí es posible lograr determinar los dos lugares geométricos que pueden ser construidos e interpretados directamente a partir de los datos dados en el problema y un análisis en el dominio de la geometría clásica (ver figura 51a); mientras que en el segundo, si se consideran únicamente los datos dados del problema (o las propiedades de la mediana) no es "*directamente evidente*" que A diste de C' una distancia igual a $BG = \frac{2m_{\overline{AC}}}{3}$, lo que resulta en una limitación de las técnicas propias de la geometría sintética (ver figura 51b).

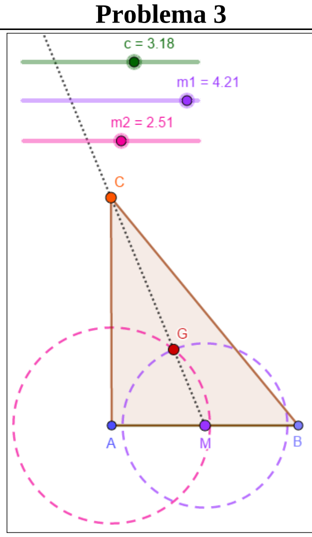
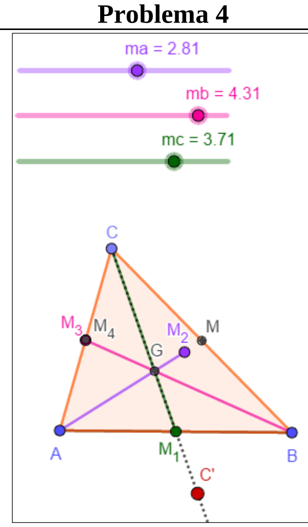
Problema 3	**Problema 4**
 	
(a)	(b)

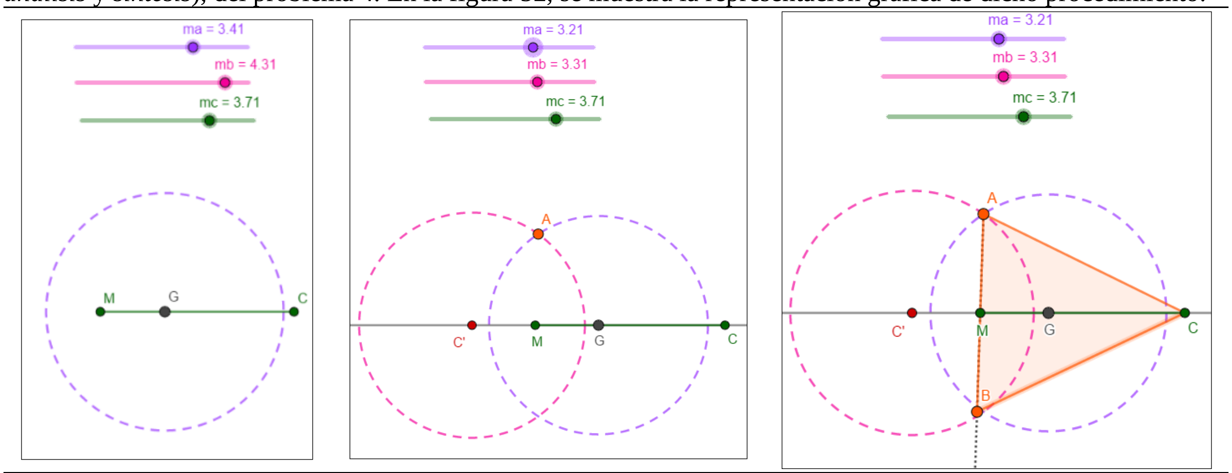
Figura 51. Comparación del método de análisis entre los problemas 3 y 4

Método de *síntesis*
Con base en los lugares geométricos hallados en el método *análisis*, los estudiantes deben presentar, de manera deductiva, el procedimiento de construcción que provee la solución del problema 4:

1. En $m_{\overline{AB}}$, construir los extremos M y C y construir un punto G de manera que $GC = \frac{2m_{\overline{AB}}}{3}$
2. Construir $\odot\, G_{\frac{2m_{\overline{BC}}}{3}}$ (ver Figura 52a)
3. Construir $\overleftrightarrow{MC}$
4. En $\overleftrightarrow{MC}$, construir el punto C' tal que $GC' = \frac{2m_{\overline{AB}}}{3}$ y $C' \neq C$
5. Construir $\odot\, C'_{\frac{2m_{\overline{AC}}}{3}}$ (ver Figura 52b)
6. Construir el punto A tal que $A = \odot\, G_{\frac{2m_{\overline{BC}}}{3}} \cap \odot\, C'_{\frac{2m_{\overline{AC}}}{3}}$
7. Construir $\overrightarrow{AM}$
8. En $\overrightarrow{AM}$, construir el punto B tal que $AB = 2AM$
9. Construir el ΔABC (ver Figura 52c)

Aquí, se construye al punto A a partir de la intersección de los dos lugares geométricos construibles con regla y compás.

En resumen, este procedimiento se constituye en una solución, desde la geometría clásica (mediante los métodos de *análisis* y *síntesis*), del problema 4. En la figura 52, se muestra la representación gráfica de dicho procedimiento:



(a) (b) (c)

Figura 52. Representación gráfica de la solución del problema 4

Mediante el método de análisis se obtiene la igualdad $AC' = BG = \frac{2m_{\overline{AC}}}{3}$. Con base en estos resultados, se sugiere elaborar, conjuntamente, una conjetura que surge del procedimiento llevado a cabo en el método de análisis. A continuación, en la tabla 22.1, presentamos el enunciado de dicha conjetura y la respectiva demostración: $m_{\overline{BC}}$, $m_{\overline{AC}}$ y $m_{\overline{AB}}$

Tabla 22.1. Demostración de la conjetura que resulta de la solución del problema 4

Conjetura
Dadas las longitudes de las medianas de un triángulo $m_{\overline{BC}}$, $m_{\overline{AC}}$ y $m_{\overline{AB}}$. Sea G punto, tal que $G = m_{\overline{BC}} \cap m_{\overline{AC}} \cap m_{\overline{AB}}$; C y M extremos de $m_{\overline{AB}}$; C' punto, tal que $C' \in \overleftrightarrow{GC}$, $GC' = \frac{2m_{\overline{AB}}}{3}$ y $C' \neq C$; A punto tal que $A = \odot\, G_{\frac{2m_{\overline{BC}}}{3}} \cap \odot\, C'_{\frac{2m_{\overline{AC}}}{3}}$. Entonces, ΔABC es el triángulo que tiene dichas medianas.

Demostración	
Aserción	**Garantía**
1. $m_{\overline{BC}}$, $m_{\overline{AC}}$ y $m_{\overline{AB}}$ medianas de un triángulo. G punto, tal que $G = m_{\overline{BC}} \cap m_{\overline{AC}} \cap m_{\overline{AB}}$ C y M extremos de $m_{\overline{AB}}$ C' punto, tal que $C' \in \overleftrightarrow{GC}$, $GC' = \frac{2m_{\overline{AB}}}{3}$ y $C' \neq C$ A punto tal que $A = \odot\, G_{\frac{2m_{\overline{BC}}}{3}} \cap \odot\, C'_{\frac{2m_{\overline{AC}}}{3}}$	Dado

2. Sea B tal que $B \in \overrightarrow{AM}$ y $AB = 2AM$	T. Localización de puntos (1)
3. Sean $\Delta AMC'$ y ΔBMG	D. Triángulo (1,2)
4. M es punto medio de $\overline{AB}$	D. Punto medio (2)
5. $AB > AM$	Propiedades de los números reales (2)
6. $A - M - B$	T. Desigualdad interestancia (5)
7. $AM + MB = AB$	D. Interestancia (6)
8. $AM + MB = 2AM$	Principio de sustitución (7,2)
9. $MB = AM$	Propiedades de los números reales (8)
10. $\overline{MB} \cong \overline{AM}$	D. Segmentos congruentes (9)
11. $GM = \frac{m_{\overline{AB}}}{3}$	Propiedades del baricentro (1)
12. $GM < GC'$	Propiedades de los números reales (1,11)
13. $G - M - C'$	T. Desigualdad interestancia (12)
14. $GM + MC' = GC'$	D. Interestancia (13)
15. $\frac{m_{\overline{AB}}}{3} + MC' = \frac{2m_{\overline{AB}}}{3}$	Principio de sustitución (14,11,1)
16. $MC' = \frac{m_{\overline{AB}}}{3}$	Propiedades de los números reales (15)
17. $GM = MC'$	Propiedades de los números reales (11,16)
18. $\overline{GM} \cong \overline{MC'}$	D. Segmentos congruentes (17)
19. $\angle AMC'$ y $\angle BMG$ son opuestos por el vértice	D. Ángulos opuestos por el vértice (6,13)
20. $\angle AMC' \cong \angle BMG$	T. Ángulos opuestos por el vértice congruentes (19)
21. $\Delta AMC' \cong \Delta BMG$	Criterio de congruencia de triángulos L.A.L (Lado-Ángulo-Lado) (10,18,20)
22. $\overline{C'A} \cong \overline{BG}$	D. Triángulos congruentes (21)
23. $BG = \frac{2m_{\overline{AC}}}{3}$	D. Segmentos congruentes (1,22)
24. $AG = \frac{2m_{\overline{BC}}}{3}$	D. Circunferencia (1)
25. $G \in \overline{MC}, \overline{MC} = m_{\overline{AB}}$	D. Intersección (1)
26. $M - G - C$	D. Segmento (25)
27. $MG + GC = MC$	D. Interestancia (26)
28. $\frac{m_{\overline{AB}}}{3} + GC = m_{\overline{AB}}$	Principio de sustitución (11,1)
29. $GC = \frac{2m_{\overline{AB}}}{3}$	Propiedades de los números reales (28)
30. Sea ΔABC	D. Triángulo (1,2)
31. Sea M_2 punto medio de $\overline{AC}$	T. existencia del punto medio (30)
32. Sea $\overline{BM_2}$ mediana de ΔABC	D. Mediana de triángulo (30,31)
33. Sea G el baricentro de ΔABC	D. Baricentro (30,32)
34. $G \in \overline{BM_2}$	D. Baricentro (33)
35. $B - G - M$	D. Segmento (34)
36. $BG + GM = BM$	D. Interestancia (35)
37. $GM = \frac{BM}{3}$	T. Del Baricentro (32, 33)
38. $\frac{2m_{\overline{AC}}}{3} + \frac{BM}{3} = BM$	Principio de sustitución (23, 36, 37)
39. $\frac{2m_{\overline{AC}}}{3} = \frac{2BM}{3}$	Propiedades de los números reales (38)
40. $m_{\overline{AC}} = BM$ De manera análoga para $m_{\overline{BC}}$ y $m_{\overline{AB}}$	Propiedades de los números reales (39)
41. ΔABC es aquel que tiene como medianas a $m_{\overline{BC}}$, $m_{\overline{AC}}$ y $m_{\overline{AB}}$	(30, 40)

Cabe aclarar que, al abordar el problema 4, los estudiantes pueden presentar algunas dificultades, las cuales se explicitan en la tabla 23, con la sugerencia de intervención del profesor:

Tabla 23. Posibles dificultades e intervención del profesor (problema 4)

Posibles dificultades	Intervención del profesor
Se prevé que los estudiantes van a intentar resolver el problema 4, usando la misma técnica y realizando una exploración análoga a las hechas para los problemas 1, 2 y 3 (en el dominio de la geometría sintética), realizando arrastres y el rastro de puntos. Se prevé, como lo afirma Gascón (año), que esa técnica no les permitirá determinar fácilmente las condiciones suficientes para proveer un procedimiento sintética que dé solución al problema 4. En consecuencia, los estudiantes pueden presentar dificultades al determinar los tres objetos claves para resolver el problema (*i.e*, $\odot G_{\frac{2m_{\overline{BC}}}{3}}$, *C'* tal que $GC' = \frac{2\, m_{\overline{AB}}}{3}$ y $C' \neq C$ y $\odot C'_{\frac{m_{\overline{AC}}}{3}}$).	Dado el reconocimiento de esta dificultad, el profesor debe sugerir a los estudiantes que aborden el problema desde el dominio de la geometría analítica; es decir, usando las representaciones algebraicas de los objetos geométricos involucrados, de manera que provea un escenario más idóneo para determinar las condiciones de los lugares geométricos que deben ser construidos para dar solución al problema 4. Específicamente, el profesor debe actuar de manera instruccional, sugiriendo que el punto *G* (baricentro del triángulo) se tome como el origen del plano cartesiano y que, con base en ello y en el *Teorema del baricentro*, se determinen las coordenadas de puntos clave. Si se decide escoger a $m_{\overline{AC}}$ como el eje de las abscisas, el profesor puede realizar preguntas como las siguientes: ¿cuáles son las coordenadas de los puntos $M_{\overline{AB}}$ y *C* si se conoce la medida $m_{\overline{AB}}$?, considerando al punto *A* como incógnita, ¿cómo poder encontrar las coordenadas de los puntos *B* y los $M_{\overline{BC}}$ y $M_{\overline{AC}}$ si se conocen las medidas $m_{\overline{BC}}$ $m_{\overline{AC}}$? Frente a las respuestas dadas a las preguntas anteriores, ¿qué condiciones deben cumplir los puntos *A* y *B* o $M_{\overline{BC}}$ y $M_{\overline{AC}}$?, ¿cuáles serían las ecuaciones las circunferencias claves para resolver el problema?, y ¿la intersección de estos objetos geométricos qué vértice del triángulo produce? Finalmente, una vez reconocidos los objetos que son clave, ¿cuál sería el procedimiento para que en el dominio de la geometría clásica se pueda establecer la solución al problema?

4.4 Contraste 3: Comparación entre las dos grandes secuencias

En la sección 4.2 se presentó una descripción relativa a la primera gran secuencia; en ese marco, se hizo una descripción completa para la secuencia relativa a la determinación de la recta tangente a la parábola, y una parcial para la secuencia relativa a la determinación de la recta tangente a la elipse. Para ambas secuencias se presentaron tres soluciones: una solución desde la geometría clásica-sintética, y dos soluciones en el dominio de la geometría analítica (una que denominamos sintético-analítica y otra analítica pura); en ese marco, se expusieron vínculos existentes entre la geometría sintética y la geometría analítica[6]. Específicamente, con base en la secuencia de la parábola, se mostró cómo una solución en el dominio de la geometría clásica-sintética proveyó insumos para resolver el problema en el dominio de la geometría analítica. Así mismo se expuso, con base en la secuencia de la elipse, cómo seguir un procedimiento análogo complica las cosas para abordar el problema desde el dominio de la geometría analítica; para este caso, parece más

[6] Recuérdese que para este trabajo se distingue entre métodos analíticos y sintéticos, y entre los dominios *geometría clásica-pura* y lo que, en la modernidad, se conoce como *geometría analítica*. En ambos dominios, los dos métodos –análisis y síntesis– pueden ocurrir. Sin embargo, en el dominio de la geometría analítica prima el método de análisis y la representación algebraica para presentar resultados; en el dominio de la geometría clásica prima el lenguaje euclidiano o hilbertiano y el método de síntesis para presentar resultados.

afortunado seguir un procedimiento puramente analítico (sin seguir ideas fundamentadas en el procedimiento de la geometría clásica).

Por otro lado, en la segunda gran secuencia se presentó una secuencia inicial compuesta de tres problemas planteados para ser abordados en el marco de la geometría clásica. Presentamos cómo su solución implica considerar los métodos de análisis y síntesis. Luego, se planteó un problema (el 4) que complejiza condiciones si se compara con los tres primeros. Expusimos cómo, llevar a cabo una estrategia análoga a la realizada para los problemas anteriores no es suficiente; surgió la necesidad de incluir elementos propios del dominio analítico (representaciones algebraicas) para poder vislumbrar una estrategia de solución que, luego, pudo ser transcrita empleando el lenguaje y objetos de la geometría clásica y una solución sintética.

Cabe destacar que, ambas secuencias evidencian que existe un vínculo, una articulación y una complementariedad entre los métodos sintéticos y analíticos, y las geometrías analítica y clásica que vale la pena sacar a la luz. Por un lado, la primera gran secuencia permite vislumbrar cómo la solución del problema desde la geometría clásica-sintética facilitó establecer una solución desde un punto de vista de la geometría analítica-algebraica, por medio de la transformación de objetos desde su representación clásica a su representación algebraica. Por otro lado, y de manera recíproca, la segunda gran secuencia permitió evidenciar cómo la inclusión de elementos propios de la geometría analítica facilitó establecer una solución del problema desde un punto de vista meramente sintético en el dominio de la geometría clásica. Los esquemas de la figura 53 resume lo dicho anteriormente.

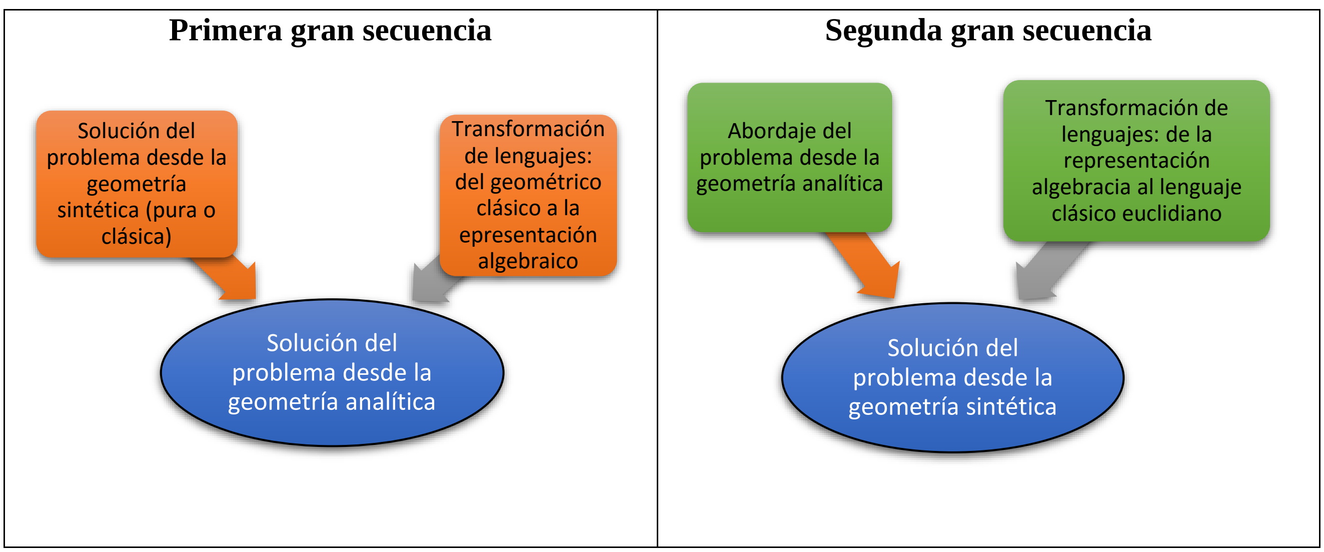


Figura 53. Contraste entre las secuencias 1 y 2

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos las conclusiones del trabajo realizado (*Fase 5* de la metodología) estructuradas en cuatro aspectos: (i) contraste entre lo realizado con los objetivos establecidos en la Sección 1.2 (Capítulo I); se considera también, la explicitación del uso de los referentes para el diseño de las secuencias; (ii) limitaciones y recomendaciones del trabajo; y (iii) aportes del trabajo para mi formación como futura profesora de matemáticas.

1. *En cuanto a los objetivos*

En la tabla 24, se presenta cada objetivo específico (OE) propuesto en la sección (1.2.1, Capítulo 1) y se describe la forma y la medida en que este se alcanzó:

Tabla 24. Desarrollo y alcance de los objetivos específicos

OE1: Identificar y proponer problemas que se puedan abordar desde distintas perspectivas (geometría analítica, geometría clásica-sintética) en la matemática escolar.
¿De qué manera se desarrolló este objetivo a lo largo del trabajo?
Se identificaron dos tipos de problemas que pretendían apuntar a la articulación entre la geometría clásica-sintética y la geometría analítica. El primer tipo se caracteriza por explicitar cómo su abordaje desde la geometría clásica-sintética proporciona ideas clave para su abordaje desde la geometría analítica; esto, mediante el cambio registro de objetos geométricos a su representación algebraica. El segundo tipo, basado en la propuesta de Gascón (2002), se caracteriza por situaciones que pueden abordarse desde la geometría clásica-sintética usando el método de análisis-síntesis pero que, al ir agregando condiciones al enunciado, surge la necesidad de involucrar la geometría analítica (representación algebraica) para producir ideas que provoquen su solución en la geometría clásica.
OE2: Diseñar secuencias de tareas, que contengan los problemas indicados en el OE 1, que permitan decantar articulaciones entre la Geometría Clásica-Sintética y la Geometría Analítica.
¿De qué manera se desarrolló este objetivo a lo largo del trabajo?
En el Capítulo IV se presentó la descripción de dos grandes secuencias, cada una de ellas referida, respectivamente, a uno de dos tipos de problemas establecidos en el OE1. La tabla 24.1 se muestra el contenido específico de cada secuencia, y los métodos (análisis y síntesis) y dominios (geometría clásica y geometría analítica) involucrados en cada una ellas:

Tabla 24.1. Contenido, métodos y dominios en cada secuencia

<table>
<tr><th>Secuencias</th><th>Dominio</th><th colspan="2">Tarea</th><th>Método</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Secuencia 1: Recta tangente a cónicas (Sección 4.2, Capítulo IV)</td><td rowspan="5">Geometría clásica</td><td colspan="2">Tarea 1. Exploración con papel plegado</td><td rowspan="3">Análisis</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tarea 2. Modelación en Geogebra</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tarea 3. Punto de tangencia</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tarea 4. Solución sintética del problema</td><td rowspan="2">Síntesis</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tarea 5. Demostración</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Geometría analítica</td><td rowspan="3">Tarea 6. Solución analítica del problema</td><td>Fase 1. Modelación algebraica de objetos geométricos</td><td rowspan="2">Síntesis - análisis</td></tr>
<tr><td>Fase 2. Solución analítica</td></tr>
<tr><td>Caracterización de recta tangente a una curva</td><td>Análisis - síntesis</td></tr>
</table>

			Solución de un sistema de ecuaciones 2x2	
Secuencia 2: Técnicas analíticas como desarrollo de las técnicas sintéticas (Sección 4.1, Capítulo IV)	Geometría clásica	Problemas 1, 2 y 3		Análisis - síntesis
	Geometría Analítica; Geometría Clásica	Problema 4		Análisis en el dominio de la geometría analítica. Síntesis en el dominio de la geometría clásica

OE3: Hacer un análisis didáctico *a priori* de la secuencia de tareas diseñada, de forma tal que se logre identificar su potencial para precisar maneras de articulación entre la Geometría Clásica-Sintética y la Geometría Analítica en el currículo escolar.

¿De qué manera se desarrolló este objetivo a lo largo del trabajo?

Para cada secuencia de tareas, se realizó la descripción de cada uno de los siguientes elementos, siguiendo la propuesta de descripción de secuencia de tarea de Gómez, Mora &Velasco (2018):

1. Presentación de los enunciados de cada tarea o secuencia tal como se debe presentar a los estudiantes. Este, se presentaba al inicio de cada descripción.
2. Descripción de los requisitos y las metas de la tarea o secuencia, a la luz de los objetos matemáticos primarios propuestos por el EOS (Godino, Batanero & Font, 2007).
3. Descripción de los materiales y recursos: Todas las secuencias fueron pensadas para ser abordadas con un software de geometría dinámica (Geogebra).
4. Descripción de la temporalidad y agrupamiento: Se presentaron las fases del desarrollo de la clase referida a cada tarea, teniendo en cuenta el tiempo necesario para su abordaje y sugerencia de agrupamiento de los estudiantes para ello.
5. Descripción de la interacción: Se presentaron distintas soluciones posibles que pueden surgir como producciones de los estudiantes al abordar la tarea propuesta. Además, se presentaban algunas dificultades que se podían presentar y sugerencias de posibles intervenciones del profesor para solventarlas.

Con el logro de estos objetivos específicos podemos concluir que se logró cumplir, en gran medida, con el objetivo general establecido en la sección (1.2); el desarrollo de este trabajo presenta el diseño de una secuencia didáctica que permite vislumbrar y favorecer los vínculos existentes entre la geometría clásica y la geometría analítica y, además, permite vislumbrar cómo los métodos de análisis y síntesis pueden estar presentes en cada uno de estos dominios.

2. *En cuanto a las limitaciones y expectativas*

Sobre la descripción de las secuencias de tareas:

- Debido a limitaciones de tiempo y realidad sanitaria, no se pudo llevar a cabo una implementación de las secuencias de tareas para realizar un contraste entre el análisis *a priori* (descripción de las tareas) y lo que puede suceder en la realidad de un aula de clase; si bien se hicieron pequeños ejercicios de implementación durante el momento del diseño para revisar específicamente la corrección de los enunciados, estos no se pueden considerar como una implementación de la secuencia. Consideramos que esta limitación se convierte en un reto y en una invitación para aquella persona que esté interesada en implementar las secuencias de tareas aquí presentadas y desarrollar un posterior análisis; esto con el objetivo de complementar el diseño con adaptaciones de enunciados y de descripción de interacciones, por ejemplo.

- Debido a limitaciones de tiempo y espacio, no se pudo realizar la descripción completa de la secuencia de tareas referida a la determinación de la recta tangente a la elipse y a la hipérbola; no obstante, para el caso de la elipse, fueron presentados los enunciados de las tareas y soluciones ideales al respecto. Un profesor tendría que hacer una descripción completa siguiendo los parámetros presentados para la secuencia de la parábola; esto, con el fin de que el profesor sea consciente de todos los elementos que están o podrían estar inmersos en una tarea, por ejemplo, precisar los requisitos que se necesitan para su abordaje, decantar las metas, identificar posibles dificultades o errores de los estudiantes y posibles actuaciones del profesor para solventarlas. En resumen, el profesor estaría preparado para su clase.
- Al respecto de esta secuencia, vale la pena comentar lo siguiente, como antecedente de la descripción rigurosa: es importante reconocer que el abordaje de la solución puramente analítica de la determinación de la tangente a una elipse (o hipérbola) es mucho más accesible que la solución sintético-analítica; esta segunda presenta algunas dificultades que pueden ser superadas si el resolutor tiene bastante experiencia con respecto a simplificación y tratamiento de expresiones algebraicas. Esto, hubiese sido valioso presentarlo detalladamente en una descripción de la secuencia respectiva. Sin embargo, esta limitación se convierte en un reto para el lector y para otras personas que quieran desarrollar una descripción detallada de esta secuencia de tareas.

3. En cuanto a los aportes para mi formación profesional

Los aportes que me proporcionó el trabajo realizado, los distingo desde dos puntos de vista, desde lo matemático y lo didáctico:

Aportes en cuanto a lo matemático

1. Fue muy enriquecedor conocer y apropiarme de los métodos de *análisis* y *síntesis* para el abordaje de problemas geométricos, lo cual me permitió contemplar asuntos de las matemáticas que no había contemplado anteriormente. Específicamente, me permitió reconocer que estos métodos están presentes tanto en la geometría clásica (usualmente llamada geometría sintética) como en la geometría analítica.
2. Fue beneficioso reconocer que la geometría clásica-sintética y la geometría analítica mantienen un vínculo, desde un punto de vista histórico y, por tanto, no tiene sentido abordarlas y presentarlas de una manera disyunta o desarticulada en la escuela.
3. Fue fundamental reconocer que un problema propuesto desde la geometría clásica puede ser abordado desde la geometría analítica y que esta, facilita la comprensión e interpretación de algunos objetos, por medio de un cambio de registro (cambio de la representación geométrica a la algebraica y viceversa).

4. Este trabajo representa un referente para mí, en el sentido de ganar consciencia de la importancia de elegir adecuadamente problemas que les permita a los estudiantes vislumbrar la posibilidad de abordarlos desde los dos dominios, geometría clásica o de la geometría analítica.

Aportes en cuanto a lo didáctico

Logré ampliar mi conocimiento en cuanto al diseño de una secuencia de tareas, destacando que, para ello, se deben tener en cuenta elementos como: los requisitos, las metas, los recursos, el agrupamiento, la interacción y la temporalidad; aspectos que se dejan pasar en las planeaciones de clase debido al poco tiempo que se dedica a ello. Con respecto a ello, es valioso reconocer que:

1. Es primordial tener en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, de manera que las actividades que les sean propuestas sean accesibles para ellos.
2. Las metas establecidas, deben ser coherentes con los conocimientos previos y los alcances de los estudiantes. El uso del recurso de los objetos primarios propuesto por la EOS es una herramienta clave para reconocer los contenidos involucrados en cada tarea o secuencia.
3. Al diseñar la tarea que se pretende que los estudiantes aborden, es preciso destacar que, los enunciados deben ser claros para que contribuyan al logro de las expectativas de aprendizaje establecidas
4. Se deben considerar, *a priori*, las posibles dificultades que puedan presentar los estudiantes al abordar las tareas y prever la actuación del profesor para la superación de estas.
5. *A priori*, se debe prever el papel de un software de geometría dinámica para el abordaje de las tareas propuestas. Además, se deben tener en cuenta otros asuntos como: si este es accesible, si los estudiantes y el profesor tienen la suficiente preparación para usar la herramienta tecnológica, en qué medida aporta u obstaculiza el proceso de aprendizaje, y en qué medida contribuye a la superación de dificultades.

Bibliografía

Apostol, T. (1988). Calculus (Vol. 1). Editorial Reverté S.A.

Arzarello, F., Bartolini-Bussi, M., Leung, A., Mariotti, M y Stevenson, I. (2012). Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs . *En G. Hanna y M. de Villiers, Proof and Proving in Mathematics Education (págs. 97-146).* New York: Springer.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM, 34*(3), 66-72.

Ayerbe, J. M. (1980). *El nacimiento de la geometría analítica*. Lecturas Matematicas, 38, 96-124.

Birkhoff, G. A. (1932). Set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics , 33(2), 329-345*.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid, España: Alianza Editorial.

Camargo, L., Samper, C., Perry, P., Molina, O y Echeverry, A. (2009*). Use of dragging as organizer for conjecture validation.* En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Ed.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2,* págs. 257-264. Thessaloniki, Greece: PME.

Colombo, E., Llanos, V. C y Otero, M. R. (2016). La génesis histórica de la Geometría Analítica y la enseñanza en la Escuela Secundaria. *Números,* 93, 93-110.

Gascón , J. (2002). Geometría sintetíca en la ESO y analítica en Bachillerato. ¿Dos mundos completamente searados? *Revista SUMA 39,* 13-25.

Gascón, J. (1989). *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas (Tesis doctoral).*

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secuendaria: I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. Revista SUMA.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*

Godino, J. D., Batanero, C y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education,* 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématics.*

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instruccion Matemática. *The International Journal on Mathematics Education , 127-135.*

Gómez , P., Mora, M. y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. *En P. Gómez, Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares (págs. 197-268).* Bogotá: Universidad de los Andes.

González, P. M. (2004). *Estudio crítico de tres obras cumbres de la literatura matemática: Los Elementos de Euclides, el Método de Arquímedes y la Geometría de Descartes*. España.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid España: Alianza Editorial.

Lehmann, C. (1989). *Geometría analítica.* Noriega Editores.

Lorenzo, J. (1980). La muerte de la Geometría. *Revista de Bachillerato.*

Mariotti, M. (2009). Artefacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM Mathematics Education, 41(4), 427–440.*

MEN. (1998). *Lineamientos currriculares de Matematicas.* Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

MEN. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Bogotá, Colombia.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Molina, O. y Samper, C. (2018). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 33(63).*

Molina, O., Sánchez, B. y Fonseca, J. (2005). Desarrollo del pensamiento geométrico: algunas actividades de matemática recreativa. *Encuentro colombiano de matemática eduacativa*.

Raftopoulos, A. (2002). Cartesian analysis and synthesis. *Studies in History and Philosophy of science, 264-308.*

Samper, C. y Molina, O. (2013). *Geometría plana: un espacio de aprendizaje.* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Molina, Ó. y Echeverry, A. (2010). *Geometría dinámica: Su contribución a la comprensión de condicionales de la forma si-entonces*. Educación Matemática. 22(3), 119-142.

Sgreccia, N. y Massa, M. (2012). 'Conocimiento especializado del contenido' de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. El caso de los cuerpos geométricos. *Educación Matemática, 24(3), 33-66.*