



EL CONCEPTO ESTADÍSTICO DE DISPERSIÓN: UNA CARACTERIZACIÓN A PARTIR DE  
TEXTOS ESCOLARES COLOMBIANOS

María Fernanda Barragan Caycedo

Código: 2016240004

Jhon Jairo Barrera Torres

Código: 2016240005

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C.

2021



El concepto estadístico de dispersión: una caracterización a partir de textos escolares colombianos

María Fernanda Barragan Caycedo

Código: 2016240004

Jhon Jairo Barrera Torres

Código: 2016240005

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Director

Felipe Jorge Fernández Hernández

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C.

2021

## RESUMEN

El presente trabajo responde al interés de los investigadores de indagar acerca de la presentación del concepto de dispersión y de las medidas que lo cuantifican en textos escolares utilizados en Colombia, dada la importancia de la variabilidad como característica fundamental en contextos diarios donde se involucran datos. También se justifica tal interés, por la poca información que se tiene al respecto en el ámbito nacional, la exigua presencia de las medidas de dispersión en los documentos curriculares colombianos, y el deseo de conocer cómo es el manejo que le han dado algunas editoriales utilizadas en nuestro país.

En consecuencia se inicia el rastreo de las medidas de dispersión dentro de los documentos curriculares Colombianos y algunos internacionales. Así mismo, la perspectiva disciplinar y didáctica que envuelve la enseñanza y aprendizaje de las medidas de dispersión. Para realizar un estudio sistemático de los textos escolares considerados, se seleccionó como marco de análisis el “Modelo exhaustivo” sugerido por Monterrubio y Ortega (2009), donde se propone el análisis de ciertas categorías indispensables en todo texto escolar. También se tuvieron en cuenta algunos de los aportes que presentan Del Pino (2019) y Blanco (2018) respecto al tratamiento de las medidas de dispersión y la forma en que se “deberían” presentar en los libros escolares de matemáticas. Específicamente, se eligieron cuatro editoriales (Santillana, Haese & Harris Publications, Libros & Libros S.A y el MEN) para abordar el análisis de un total de 12 textos escolares, a la luz de las categorías establecidas. Adicionalmente, a partir de algunas de las categorías consideradas en el análisis de los textos, que despertaron más interés, se elaboró e implementó un cuestionario y una entrevista que respondieron algunos profesionales de la educación pública y privada.

Como conclusión general se puede afirmar, que si bien los textos escolares de matemáticas, en lo que atañe a la enseñanza de las medidas de dispersión, se consideran como una herramienta relevante para la enseñanza y aprendizaje del concepto de dispersión y de las medidas que lo cuantifican, no necesariamente se deben constituir en el eje central o en la única guía en el proceso educativo. En efecto, el análisis realizado aporta resultados que se pueden convertir en un posible referente, para la elaboración de futuras propuestas de textos escolares de matemáticas que abordan el tema en cuestión, y como suministro de criterios y sugerencias a los docentes que deseen seleccionar textos escolares como referente para su práctica docente en la educación estadística.

*Palabras clave:* Dispersión, medidas de dispersión, textos escolares matemáticos, cultura estadística, enseñanza y aprendizaje de la estadística, documentos curriculares.

## AGRADECIMIENTOS

A mi abuela, Rosa Vargas quien ha sido mi mayor motivación y me enseñó que los sueños deben construirse sin olvidar donde estaba mientras los soñaba; a mi familia por creer y depositar sus esperanzas en mí.

A mis padres y familia por el apoyo; a mi hijo Juan Sebastián por ser la motivación para construir este sueño y el pilar de mi vida.

A nuestro asesor de trabajo, el profesor Felipe Fernández por su compromiso y dedicación; a la profesora Maritza Méndez por sus consejos y colaboración.

A mi compañero de trabajo, Jhon Barrera un gran ser humano con quien he reído, aprendido, soñado y a quien le deseo lo mejor de este mundo.

A la vida por brindarme no solo una compañera de trabajo, Maria Barragan, sino una amiga de vida con quien todos los proyectos y metas se hacen posibles.

## ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado “EL CONCEPTO ESTADÍSTICO DE DISPERSIÓN: UNA CARACTERIZACIÓN A PARTIR DE TEXTOS ESCOLARES COLOMBIANOS”, elaborado por los estudiantes **MARÍA FERNANDA BARRAGÁN CAYCEDO**, identificada con el Código **2016240004** y Cédula **1001278433** y **JHON JAIRO BARRERA TORRES**, identificado con el Código **2016240005** y Cédula **1026288123** el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y tres (43) puntos**.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna



Meritoria



Laureada



El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

En constancia se firma a los siete (7) días del mes de diciembre de 2021.



Mg. FELIPE JORGE FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ  
Director del Trabajo de grado



Mg. SANTIAGO CARDOZO FAJARDO  
Jurado del Trabajo de grado



Mg. ORLANDO AYA CORREDOR  
Jurado del Trabajo de grado

## TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO 1. PRESENTACIÓN .....	2
1.1 Descripción de problema.....	2
1.2 Justificación.....	2
1.3 Objetivos .....	3
CAPÍTULO 2. NORMATIVA.....	4
2.1 Las medidas de dispersión en los EBCM.....	4
2.2 Las medidas de dispersión en los Lineamientos Curriculares.....	5
2.3 Las medidas de dispersión en los DBA.....	5
2.4 Las medidas de dispersión en la GAISE .....	5
2.5 Las medidas de dispersión en los NCTM.....	6
CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO .....	7
3.1 Perspectiva disciplinar.....	7
3.1.1 Medidas de dispersión absoluta.....	7
3.1.2 Medidas de dispersión relativa.....	10
3.1.3 El método de estudio de casos.....	11
3.1.4 El cuestionario y la entrevista .....	11
3.2 Perspectiva didáctica .....	12
CAPÍTULO 4. ELECCIÓN DEL MODELO DE ANÁLISIS .....	14
4.1 El texto escolar .....	14
4.2 Consideraciones sobre el uso del texto escolar .....	16
4.3 Modelo de análisis exhaustivo .....	16
CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE LOS TEXTOS ESCOLARES ELEGIDOS .....	19
5.1 Selección de textos .....	19
5.2 Editorial Santillana.....	20
5.3 Editorial Haese & Harris Publications .....	45
5.4 Editorial Libros & Libros S.A.....	65
5.5 Editorial MEN.....	81
5.6 Resultados .....	102
CAPÍTULO 6. CUESTIONARIO Y ENTREVISTA .....	105
6.1 Resultados .....	107
CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES.....	111

CAPÍTULO 8. REFERENCIAS .....	114
ANEXOS.....	127
Anexo A .....	127
Anexo B .....	133
Anexo C .....	133

## TABLA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> <i>Plan de trabajo para grado octavo</i> .....	21
<b>Figura 2</b> <i>Plan de trabajo para grado noveno</i> .....	21
<b>Figura 3</b> <i>Plan de trabajo para grado décimo</i> .....	22
<b>Figura 4</b> <i>Definición de varianza muestral y poblacional</i> .....	23
<b>Figura 5</b> <i>Definición de desviación estándar muestral y poblacional</i> .....	23
<b>Figura 6</b> <i>Tabla de contenidos grado octavo</i> .....	24
<b>Figura 7</b> <i>Definición de varianza (muestral y poblacional) y desviación estándar (muestral y poblacional) en datos agrupados</i> .....	24
<b>Figura 8</b> <i>Tabla de contenidos grado noveno</i> .....	25
<b>Figura 9</b> <i>Expresiones de la varianza muestral y la desviación estándar muestral</i> .....	25
<b>Figura 10</b> <i>Resumen de las medidas de dispersión</i> .....	26
<b>Figura 11</b> <i>Definición del coeficiente de variación</i> .....	27
<b>Figura 12</b> <i>Tabla de contenidos grado décimo</i> .....	27
<b>Figura 13</b> <i>Definición de rango intercuartílico</i> .....	28
<b>Figura 14</b> <i>Cronología de la estadística y la probabilidad grado octavo</i> .....	29
<b>Figura 15</b> <i>Actividad talla de bebés grado octavo</i> .....	30
<b>Figura 16</b> <i>Ejercicios dificultad media</i> .....	31
<b>Figura 17</b> <i>Ejercicios dificultad alta</i> .....	31
<b>Figura 18</b> <i>Ejercicios dificultad baja</i> .....	32
<b>Figura 19</b> <i>Problema para repasar grado octavo</i> .....	33
<b>Figura 20</b> <i>Actividad guiada grado noveno</i> .....	34
<b>Figura 21</b> <i>Actividades de interpretación y argumentación</i> .....	35
<b>Figura 22</b> <i>Recursos de la Libromedia</i> .....	36
<b>Figura 23</b> <i>Proyectos transversales</i> .....	37
<b>Figura 24</b> <i>Ilustración para la ejemplificación de las medidas de dispersión</i> .....	38
<b>Figura 25</b> <i>Distribución en forma de campana</i> .....	39
<b>Figura 26</b> <i>Diagrama de cajas y bigotes grado octavo</i> .....	39
<b>Figura 27</b> <i>Uso de una gráfica</i> .....	40
<b>Figura 28</b> <i>Actividad consulta en base de datos</i> .....	41
<b>Figura 29</b> <i>Apartado historia de las matemáticas</i> .....	42
<b>Figura 30</b> <i>Trabajo con StadiS 1.05</i> .....	43
<b>Figura 31</b> <i>Trabajo con Excel</i> .....	44
<b>Figura 32</b> <i>Apartado “Recuerda que ...” con fórmulas relevantes</i> .....	45
<b>Figura 33</b> <i>Apartado “Matemáticamente”</i> .....	45
<b>Figura 34</b> <i>Contenidos del Capítulo 9</i> .....	47
<b>Figura 35</b> <i>Definición de Rango</i> .....	47
<b>Figura 36</b> <i>Ejemplo 7 cálculo del rango de un conjunto de datos</i> .....	47
<b>Figura 37</b> <i>Definición y cálculo del Rango inter-cuartil</i> .....	48
<b>Figura 38</b> <i>Diagrama de cajas y bigotes</i> .....	49
<b>Figura 39</b> <i>Rango intercuartílico para datos continuos agrupados</i> .....	49
<b>Figura 40</b> <i>Resumen de rango y rango inter-cuartil</i> .....	50
<b>Figura 41</b> <i>Diagrama de cajas y bigotes paralelos</i> .....	50
<b>Figura 42</b> <i>Definición de desviación estándar</i> .....	51



<b>Figura 43</b>	<i>Ejemplo 12 desviación estándar en dos conjuntos de datos</i>	52
<b>Figura 44</b>	<i>Definición de la desviación estándar para datos agrupados</i>	53
<b>Figura 45</b>	<i>Ejemplo cómo surge la distribución normal típica</i>	53
<b>Figura 46</b>	<i>Tabla de contenidos, capítulo 9</i>	54
<b>Figura 47</b>	<i>Nota histórica 1</i>	54
<b>Figura 48</b>	<i>Aplicaciones de la estadística</i>	55
<b>Figura 49</b>	<i>Problema de apertura 1</i>	56
<b>Figura 50</b>	<i>Problema de apertura 2</i>	56
<b>Figura 51</b>	<i>Ejemplo 13</i>	57
<b>Figura 52</b>	<i>Ejercicio 1</i>	58
<b>Figura 53</b>	<i>Ejercicio 2</i>	58
<b>Figura 54</b>	<i>Actividad 2</i>	59
<b>Figura 55</b>	<i>Conjunto de revisión</i>	59
<b>Figura 56</b>	<i>Ejemplo contexto global</i>	60
<b>Figura 57</b>	<i>Apartado de síntesis 2</i>	61
<b>Figura 58</b>	<i>Discusión</i>	61
<b>Figura 59</b>	<i>Material didáctico 1</i>	62
<b>Figura 60</b>	<i>Material didáctico 2</i>	62
<b>Figura 61</b>	<i>Discusión e investigación</i>	63
<b>Figura 62</b>	<i>Respuestas</i>	64
<b>Figura 63</b>	<i>Apartado de síntesis 2</i>	65
<b>Figura 64</b>	<i>Estándares décimo</i>	66
<b>Figura 65</b>	<i>Definición desviación media octavo</i>	67
<b>Figura 66</b>	<i>Definición varianza y desviación estándar</i>	68
<b>Figura 67</b>	<i>Definición de desviación media noveno</i>	69
<b>Figura 68</b>	<i>Coefficiente de Pearson</i>	69
<b>Figura 69</b>	<i>Principales medidas de dispersión</i>	70
<b>Figura 70</b>	<i>Preuniversitario</i>	72
<b>Figura 71</b>	<i>Actividad inicial</i>	73
<b>Figura 72</b>	<i>Apartado “Piensa y aplica”</i>	74
<b>Figura 73</b>	<i>Apartado “Piensa y aplica 2”</i>	74
<b>Figura 74</b>	<i>Clasificación actividades</i>	75
<b>Figura 75</b>	<i>Situación problema</i>	75
<b>Figura 76</b>	<i>Competencias ciudadanas</i>	76
<b>Figura 77</b>	<i>Apartado “Práctica”</i>	77
<b>Figura 78</b>	<i>Metodología</i>	78
<b>Figura 79</b>	<i>Apartado “Relaciona”</i>	79
<b>Figura 80</b>	<i>Apartados</i>	81
<b>Figura 81</b>	<i>Vamos a aprender octavo</i>	82
<b>Figura 82</b>	<i>Propuesta de enseñanza octavo</i>	82
<b>Figura 83</b>	<i>Definición de rango y desviación media octavo</i>	84
<b>Figura 84</b>	<i>Definición de varianza octavo</i>	85
<b>Figura 85</b>	<i>Desviación típica y coeficiente de variación octavo</i>	85
<b>Figura 86</b>	<i>Definición de rango, varianza y desviación típica noveno</i>	86

<b>Figura 87</b>	<i>Coeficiente de variación noveno.....</i>	87
<b>Figura 88</b>	<i>Medidas de dispersión décimo.....</i>	88
<b>Figura 89</b>	<i>Ejemplo medidas de dispersión décimo.....</i>	89
<b>Figura 90</b>	<i>Definición de rango once.....</i>	89
<b>Figura 91</b>	<i>Medidas de dispersión para datos agrupados once .....</i>	90
<b>Figura 92</b>	<i>Procesos cognitivos .....</i>	92
<b>Figura 93</b>	<i>Apartado "Actividades de aprendizaje" 1.....</i>	92
<b>Figura 94</b>	<i>Apartado "Práctica más" .....</i>	93
<b>Figura 95</b>	<i>Apartado "Resolución de problemas".....</i>	94
<b>Figura 96</b>	<i>Apartado "Evaluación del aprendizaje" .....</i>	96
<b>Figura 97</b>	<i>Sugerencias didácticas 1 .....</i>	97
<b>Figura 98</b>	<i>Sugerencias didácticas 2 .....</i>	98
<b>Figura 99</b>	<i>Sugerencias didácticas 3 .....</i>	99
<b>Figura 100</b>	<i>Formas de evaluación.....</i>	99
<b>Figura 101</b>	<i>Evaluación del aprendizaje .....</i>	101

## INTRODUCCIÓN

Actualmente algunos tipos de acontecimiento social, cultural, educativo, etc. está relacionado con el análisis de datos y la influencia de estos en la toma de decisiones diarias de cada individuo de la sociedad. De ahí que la educación estadística este tomando fuerza en los espacios del aula, con la intención de promover la alfabetización estadística desde la educación escolar. Surge entonces la necesidad de analizar las diferentes herramientas didácticas presentes en la enseñanza y aprendizaje de la estadística, en especial, aquellas que involucren el análisis de datos, los recursos tecnológicos y los referentes curriculares nacionales e internacionales. Es bien sabido que la variabilidad es una de las grandes ideas con las cuales se trabaja en la estadística, por ende, la presencia de las medidas de dispersión permite que el estudiante pueda interpretar y dar conclusiones a partir de un conjunto de datos. Es allí donde nacen los pilares del presente trabajo articulando las medidas de dispersión con una de las herramientas didácticas utilizadas desde los inicios de las civilizaciones: los textos escolares de matemáticas. Por consiguiente, en esta investigación se realizará el análisis de diferentes editoriales identificando en sus textos escolares de matemáticas, cómo se presentan las medidas de dispersión teniendo en cuenta el *Modelo de análisis exhaustivo*. De esta manera, se expondrá la pertinencia de los textos escolares al momento de abordar las medidas de dispersión, partiendo también de las recomendaciones de algunos docentes formadores de futuros educadores y profesores de colegios.

## **CAPÍTULO 1. PRESENTACIÓN**

### **1.1 Descripción de problema**

El ciudadano actual debe desarrollar una cultura estadística que le permita ser competente en el consumo y la producción de datos, esto acorde a las necesidades de la era presente. La educación estadística debe procurar la formación de tal cultura y sus componentes, por ende, uno de los medios de proveer tal aproximación es mediante el uso de textos escolares según Estepa y Del Pino (2013). Si bien son variados los temas y conceptos de estadística o probabilidad que se trabajan con la ayuda de textos escolares, el concepto de dispersión y de las medidas que lo cuantifican, es uno de los más relevantes de tratar como señala Del Pino (2017). Además, el aprendizaje de tal concepto se ha mostrado que es poco atendido en la enseñanza escolar y por ello, escasamente comprendido por los estudiantes (Batanero, González-Ruiz, López-Martin, y Contreras, 2015).

El concepto de dispersión está íntimamente ligado a las ideas fundamentales de la estadística: la variación y la distribución, tal como señala Batanero (2013). Usualmente se considera que la dispersión se mide con base en la desviación de los datos respecto a una medida de tendencia central, pero es más que eso. En realidad, más que cuantificar la dispersión, su uso debe servir para describir el comportamiento de datos y caracterizar distribuciones empíricas y teóricas, como lo sugieren los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM, 2006). En el desarrollo de algunas prácticas docentes, cuando el concepto de dispersión se trabaja, se desarrolla a partir de la lectura y los ejercicios propuestos en libros de textos presentes en el aula. Por ello, queremos a través de esta propuesta responder la siguiente pregunta: ¿Cómo se presentan las medidas de dispersión en textos escolares colombianos y la pertinencia de las actividades que proponen?

### **1.2 Justificación**

En la actualidad nadie puede ser ajeno a las necesidades que implica vivir en una sociedad del big data. Es decir, a un manejo de información en forma de datos que sea extenso y complejo. Los datos están presentes en nuestro entorno y ello justifica la importancia del uso de conceptos estadísticos que permitan hacer lectura de la información generada por dichos datos. Además, del desarrollo de las competencias y procesos generales de la actividad matemática establecidos en los Lineamientos Curriculares (1998). El ciudadano debe desarrollar una cultura estadística que le permita ser competente en la lectura, interpretación y razonamiento para el análisis de datos. De hecho, para Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013), la cultura estadística es una necesidad, que debe enfocarse en promover en el ciudadano una actitud crítica para la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. En este sentido, el estudio de conceptos claves de la estadística como la dispersión y las medidas que la cuantifican, son una parte fundamental del desarrollo de la cultura estadística. Según Ruiz (2019), la dispersión se presenta implícitamente en los diferentes temas estadísticos abordados en la educación; es decir, en el análisis de datos de tipo univariados, bivariados y

multivariados. El concepto de dispersión permite, en palabras de Dodge (2008) (citado en Ruiz, 2017), “describir un conjunto de datos concerniente a una variable particular, dando una indicación de la variabilidad de los valores dentro de la colección de datos” (p.203). Es decir, las medidas de dispersión aportan a una descripción más completa de la variación de un conjunto de datos o de la distribución asociada a los mismos.

Para Batanero, González, López, y Contreras (2015), señalan que “La didáctica sobre las medidas de dispersión es escasa” (p. 2). Por esto, es pertinente examinar la forma en que se introduce a los estudiantes la noción de dispersión, y como se abordan las explicaciones relativas al cálculo de medidas de dispersión. Por lo tanto, es de vital importancia analizar la forma de abordar las medidas de dispersión en los textos escolares colombianos y la manera en que se propone su enseñanza en los mismos. De hecho, desde los inicios de la educación, el uso de textos escolares ha tenido un papel fundamental en el aula de clases. A juicio de González y Sierra (2004), los textos escolares pueden cumplir diferentes roles en el ámbito educativo. Por ejemplo: ser el medio de estudio, el material de consulta, el camino para el desarrollo y registro de actividades a realizar por parte del estudiante, la asignación de ejercicios y/o problemas a resolver, la articulación de temas y proyectos transversales con las matemáticas, etc. En este sentido, el estudio de los textos escolares genera información acerca de las concepciones del contenido matemático que en ellos se desarrolla, y del proceso educativo con el que están relacionados. Es decir, es importante saber si los textos escolares presentan en su desarrollo actividades pertinentes para la comprensión de los conceptos matemáticos. En este caso el de dispersión, teniendo en cuenta que como futuros docentes se deben tener criterios claros a la hora de usar textos guía, como herramientas educativas.

### **1.3 Objetivos**

El objetivo general de este trabajo es describir cómo se presenta el concepto de dispersión y de las medidas que lo cuantifican, en una muestra de textos escolares de secundaria (grados 8 a 11) para valorar la pertinencia de las estrategias didácticas sugeridas en ellos.

Para el logro de este objetivo general se proponen los siguientes objetivos específicos:

- ✓ Proponer un marco conceptual para el análisis de textos en relación con el concepto de dispersión y de las medidas que lo cuantifican, atendiendo a aspectos normativos, didácticos y disciplinarios.
- ✓ Implementar el análisis de textos escolares en la muestra seleccionada.
- ✓ Analizar los resultados obtenidos a la luz de las categorías definidas en el Modelo de análisis exhaustivo.
- ✓ Involucrar la participación de docentes universitarios y profesores de instituciones educativas, para revisar y validar resultados obtenidos en el análisis de los textos.

## **CAPÍTULO 2. NORMATIVA**

En Colombia el Ministerio de Educación Nacional (MEN), busca regular la educación de todo el territorio mediante documentos curriculares, que sirvan de herramientas para los docentes de matemáticas en la implementación de una educación equitativa. Estos documentos deben mantener una coherencia con las políticas educativas establecidas, brindando así, orientaciones idóneas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. De forma simultánea, entendiendo las nuevas tendencias en los ámbitos escolares asociados a la globalización, se tienen en cuenta las guías de matemáticas del Bachillerato Internacional (IB) las cuales, se establecen para la escuela primaria, cursos intermedios y programas de diploma, atendiendo al apoyo dirigido a docentes en las temáticas que se deben abordar en la asignatura de matemáticas. Por consiguiente, a continuación se realizará el rastreo de las medidas de dispersión en los principales documentos curriculares colombianos y los que guían el trabajo en el IB. Atendiendo a las sugerencias de Estepa & del Pino (2013), quienes señalan que al momento de realizar una investigación didáctica, que en este caso se fundamenta en presentar una caracterización de la enseñanza de las medidas de dispersión en los textos escolares colombianos; se deben exhibir las nociones relacionadas con las medidas de dispersión presentes en los documentos curriculares.

### **2.1 Las medidas de dispersión en los EBCM**

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas fueron escritos por el MEN en el año 2006 y desde entonces sus aportes a las diferentes instituciones educativas, han ayudado a encaminar la enseñanza de las matemáticas manteniendo una coherencia vertical (por grados) y horizontal (por pensamientos). Centrándonos en el Pensamiento Aleatorio y los sistemas de datos, las medidas de tendencia central resultan ser priorizadas. Es casi nula la presencia de las medidas de dispersión en la introducción que se realiza en los EBCM (2006) del Pensamiento Aleatorio y los sistemas de datos. Se nombra la varianza y la desviación estándar para hacer alusión al cálculo de estas en programas de análisis de datos, dejando de lado la memorización de sus fórmulas. Más adelante en la organización por grados, se logran rastrear las medidas de dispersión en los estándares establecidos para grados décimo y once. Sin embargo, solo se sugiere que el estudiante use de manera oportuna algunas medidas de dispersión sin especificar cuáles de ellas o con qué fin. Cabe resaltar que en los estándares establecidos para grado octavo y noveno, la noción de dispersión ya tiene cabida en el análisis de datos.

En los EBCM (2006) no siempre se evidencia una relación entre los conceptos tratados de un grado a otro en el Pensamiento Aleatorio y los sistemas de datos. Para Batanero, González, López y Contreras (2015), es indispensable entrelazar los conceptos estadísticos con las medidas de dispersión. De esta manera, al momento de estudiar en grados superiores la estadística bivalente, se recuerda de manera sencilla el significado univariante de las medidas de dispersión.

## **2.2 Las medidas de dispersión en los Lineamientos Curriculares**

En 1998 nacen los Lineamientos Curriculares como una guía de enseñanza para las instituciones del país, teniendo en cuenta tanto aspectos pedagógicos como curriculares. Las medidas de dispersión no son nombradas o traídas a colación en este documento. Aunque en él se nombran los procesos generales, el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, y la importancia de la exploración e interpretación de datos, las ideas asociadas a las medidas de dispersión no fueron tenidas en cuenta.

## **2.3 Las medidas de dispersión en los DBA**

Para la primera versión en el año 2015, el MEN propone su socialización con la comunidad educativa del país mediante talleres de realimentación con los cuales se permitió unificar la construcción de la segunda versión de los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA). Las medidas de dispersión son encontradas en grado once donde uno de los DBA (2015) es: “Reconocer la desviación estándar como una de las medidas de dispersión de un conjunto de datos” (p.86). Se brinda una situación como ejemplo para reconocer la desviación estándar, pero no se nombran las demás medidas de dispersión. El documento finaliza con este último lineamiento curricular para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares.

Estepa & del Pino (2013), señalan que la introducción tardía de las medidas de dispersión, es decir, en los últimos grados de bachillerato, provoca su presentación de manera rápida por la falta de tiempo. En nuestro caso, las medidas de dispersión se estudian en grado once según los DBA (2015), lo cual induce a insuficiente tiempo para tratar el tema. Aún más, teniendo en cuenta que los estudiantes en ese momento se están preparando para las pruebas de estado (Pruebas ICFES – Saber 11°), y su atención está puesta en recordar conceptos o procedimientos de años anteriores en todas las asignaturas obligatorias.

En el año 2016 se logra construir la segunda versión de los DBA partiendo del trabajo llevado a cabo en años anteriores. En esta oportunidad cada enunciado está acompañado de algunas evidencias de aprendizaje y un ejemplo orientador. En grado décimo uno de los DBA presenta la importancia de comprender las medidas de dispersión, sus propiedades y su papel fundamental en la interpretación de datos. Seguido, se enseñan las evidencias de aprendizaje en donde los estudiantes deben poner en práctica el uso de herramientas tecnológicas para el cálculo de las medidas de dispersión. Así mismo, la importancia de interpretar, caracterizar y comparar lo que representa cada una de las medidas de dispersión en un conjunto de datos. Para finalizar se exhibe un ejemplo en el cual los alumnos deben escoger la medida que mejor represente cierto grupo de datos y dar algunas conclusiones al respecto.

## **2.4 Las medidas de dispersión en la GAISE**

La Guía para la Evaluación e Instrucción en la Educación Estadística, conocida comúnmente por sus siglas en inglés GAISE. Es un informe publicado en el año 2005, en el cual se reúnen algunas directrices para la enseñanza de la educación estadística. Este informe se centra en

el pensamiento y alfabetización estadística, el uso de datos reales y el énfasis en los conceptos sobre los procedimientos. En la GAISE (2005) se definen las medidas de dispersión como: “Las cantidades que miden el grado de variabilidad en un conjunto de datos” (p.46), las cuales solo tendrán sentido para los estudiantes con datos numéricos. Así mismo, se nombra el Rango, el Rango Intercuartílico (RIC), la Desviación Estándar, y la Desviación Media Absoluta (DMA), como medidas de dispersión. Además, el importante uso de los diagramas de dispersión para identificar visualmente la relación entre dos variables.

## **2.5 Las medidas de dispersión en los NCTM**

En los Estados Unidos el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) en el año 2000, publica los Principios y Estándares para la Educación Matemática con el fin de guiar la construcción de currículos, evaluaciones y recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Específicamente en el Análisis de datos y Probabilidad para la etapa 9-12, se establece que los estudiantes en este nivel académico deberían estar familiarizados con las medidas de dispersión básicas. Además, se menciona la importancia de las medidas de dispersión para el análisis de datos unidimensionales y bidimensionales. Puntualmente uno de los estándares establece que los alumnos deberían: “Reconocer cómo las transformaciones lineales de datos unidimensionales afectan a la forma, la centralización y la dispersión” (NCTM, 2000) (p.328).

## **2.6 Las medidas de dispersión en las guías de matemáticas del IB**

El IB es una estrategia que reúne distintos colegios que comparten su experiencia educativa en Colombia desde 1977, con la motivación de formar estudiantes con habilidades para acceder al mundo profesional. Estas habilidades que se adquieren en las distintas asignaturas, son mediadas por ciertas guías que cumplen su función de herramienta para los docentes. Actualmente en Colombia, existen 49 colegios que ofrecen el IB y cuentan con la acreditación del International Baccalaureate. Estas guías están diseñadas para alguno de los tres programas específicos que se maneja en el IB: Programa de la escuela primaria (PEP), Programa de los años intermedios (PAI) y Programa del diploma (PD).

En la guía para los PAI, se presentan las medidas de dispersión en datos discretos y continuos. Como se expresó anteriormente, estas temáticas están asociadas con la posibilidad de adquirir o potenciar ciertas habilidades. En este caso, el cálculo del rango intercuartílico. Además, se evidencia el trabajo en el análisis gráfico de la dispersión para la obtención de datos y dibujar la recta de ajuste óptimo. Los PD son espacios para los estudiantes de 16 a 19 años, en los cuales el trabajo en matemáticas es guiado por los gustos e intereses de cada uno de los estudiantes, respecto a la que será su formación profesional. Es importante mencionar que la profundidad en la enseñanza de los objetos matemáticos estará sujeta al nivel y la guía que el colegio decida implementar.



## CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

### 3.1 Perspectiva disciplinar

El desarrollo del presente marco disciplinar se fundamentará en los textos “Estadística Descriptiva Introducción al análisis de datos” (Sarmiento & Fernández, 2013), “Métodos de análisis de datos: apuntes” (Hernández, 2012) y la GAISE (2003).

Para Sarmiento & Fernández (2013), al observar características o variables de una muestra podemos encontrarnos que las distintas observaciones vistas individualmente pueden poseer ciertas discrepancias, lo cual es algo común en cualquier fenómeno aleatorio. Lo anterior, da cabida a una noción de variabilidad que puede ser etiquetada como homogénea o heterogénea teniendo en cuenta si las discrepancias son pequeñas o grandes. En consecuencia, nos brinda un escenario para hablar de dispersión, esto a partir de la intención de asociar un número a cada grado de variabilidad que se presenta entre distintas observaciones.

Cuando se tratan de definir las medidas de dispersión nos encontramos escenarios donde se pueden establecer las medidas a partir de ciertos datos de la muestra o incluyéndolos todos. Para el segundo escenario, es necesario asociarle un valor de referencia el cual usualmente es alguna de las medidas de tendencia central. Dado que ya se reconoce la existencia de esta variabilidad y su relación con las medidas de tendencia central, podemos indicar que la función que cumplen las medidas de dispersión es indicar el valor de representatividad que posee la medida de tendencia central en la observación. Es decir, si la dispersión es baja la representatividad será mayor, y de igual manera, si la dispersión es alta la representatividad de la medida de tendencia central será baja. No podemos dejar de lado la clasificación de las medidas de dispersión las cuales pueden ser: absolutas teniendo en cuenta si son presentadas en la unidades de los datos de la observación. Por otro lado, relativas si no son presentadas en la unidades de los datos de la observación. A continuación, profundizaremos y describiremos cada una:

#### 3.1.1 Medidas de dispersión absoluta

Como expresamos anteriormente las medidas de dispersión absoluta son aquellas que se encuentran en las mismas unidades de los datos a analizar. En el presente trabajo se abordarán las siguientes: el rango, las desviaciones medias (desviación media absoluta, desviación media respecto a la mediana, desviación mediana), la varianza (el inconveniente que muestra la varianza es que no se presenta en las mismas unidades de los datos, sino al cuadrado, lo cual hace un poco más difícil la interpretación para los estudiantes) y la desviación estándar.

*Rango o recorrido.* Es la primera de las medidas de dispersión que se suele presentar a los estudiantes dado su practicidad y baja dificultad para el cálculo, pero posee varios contras para el análisis del comportamiento de los datos. Lo anterior, teniendo en cuenta que al depender solo del valor mínimo y máximo, impide una lectura total de la situación. Además, de ser no funcional en escenarios donde el valor máximo o mínimo no es conocido, aunque

se puede recomendar para ser usada en escenarios con pocos datos y cuando se garantiza la existencia del máximo y el mínimo.

$$Rango = valor_{m\acute{a}ximo} - valor_{m\acute{in}imo}$$

Para calcular el rango intercuartílico se toma la diferencia del tercer cuartil con el primero. Esto dado que está asociado a la mediana de la observación, y brinda una mayor utilidad para analizar distribuciones sesgadas.

$$IRQ = Q_3 - Q_1$$

*Desviaciones medias.* A continuación se mostrará el resultado de analizar las desviaciones desde su valor absoluto asociadas a las medidas de tendencia central, escenario en el cual toman sentido para el análisis. Estas desviaciones son: la desviación media absoluta, la desviación media respecto a la mediana y la desviación mediana.

1. *Desviación media absoluta.* Cuando se nombra la desviación media absoluta se hace alusión a la distancia entre cada uno de los valores de la observación y en este caso la media aritmética. Esta desviación permite identificar que tan “extendidos” se encuentran los datos<sup>1</sup>:

$$DMA_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

La desviación media absoluta también puede ser abordada para datos agrupados y su fórmula sería<sup>2</sup>:

$$DMA_{\bar{x}} = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}| * f_i$$

2. *Desviación media respecto a la mediana.* A diferencia de la desviación media absoluta, en esta desviación se emplea la mediana como elemento central. Para datos no agrupados se puede calcular a través de la siguiente fórmula:

$$DMA_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - Me|}{n}$$

Si por el contrario, los datos son agrupados el cálculo se realizaría a partir de la siguiente fórmula:

$$DMA_{\bar{x}} = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^k |x_i - Me| * f_i$$

3. *Desviación mediana.* Para calcularla se debe tomar la desviación de los valores en valor absoluto de cada uno de los datos respecto a la mediana, y se toma la mediana de estos nuevos valores. Este nuevo valor es el que se denomina desviación mediana. Una interpretación de esta medida es equivalente con respecto a la desviación

---

<sup>1</sup> Para datos sin agrupar el  $x_i$  corresponde a cada uno de los datos del conjunto (aplica para varianza y desviación estándar análogamente).

<sup>2</sup> Para datos agrupados el  $x_i$  corresponde a la marca de clase del conjunto de datos (aplica para varianza y desviación estándar análogamente).

intercuartílica ( $Q_3 - Q_1$ ) dado que recoge el 50% de los datos intermedios, por lo tanto, es necesario indicar que cuando la distribución es simétrica estas dos medidas coinciden.

*Varianza.* Es una de las medidas de dispersión más usadas en el análisis estadístico, esta medida permite representar si es mayor o menor la dispersión de los datos respecto a la media aritmética. Se puede entonces resumir su uso indicando que entre mayor sea la varianza mayor será la dispersión, y así mismo, será menos representativa la media aritmética en el conjunto de datos. La fórmula de la varianza para datos agrupados es:

Varianza poblacional

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i$$

Varianza muestral

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i$$

Por otro lado, para datos sin agrupar es:

Varianza poblacional

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

Varianza muestral

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Donde N representa el tamaño de la población y n el tamaño de una muestra.

*Desviación estándar.* Dado que la varianza viene representada en una unidad diferente en relación con los datos a analizar (se encuentra en unidades cuadradas), cuando se halla la raíz con signo positivo de esta varianza, se obtiene la desviación estándar o desviación típica. Esta cumple la misma tarea que la varianza para hablar sobre la dispersión de los datos, lo cual la convierte en una de las medida de dispersión más usada. La fórmula de la desviación estándar para datos agrupados es:

Desviación estándar poblacional

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2} = +\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}$$

Desviación estándar muestral

$$S = +\sqrt{S^2} = +\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}$$

La fórmula de la desviación estándar para datos sin agrupar es:

Desviación estándar poblacional

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Desviación estándar muestral

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

### 3.1.2 Medidas de dispersión relativa

Las medidas de dispersión relativa permiten medir la dispersión sin importar las unidades específicas en que vengan expresados los datos, y lo más importante, permite comparar y analizar la dispersión en dos conjuntos de datos con unidades de distinta clase. A continuación se presentan las medidas de dispersión relativa:

1. *Recorrido relativo*. Es expresado como el cociente entre el recorrido y el valor absoluto de la media aritmética, el recorrido relativo es la cantidad de veces que el recorrido contiene la media aritmética.

$$R_r = \frac{Re}{|\bar{x}|}$$

2. *Coefficiente de variación o índice de dispersión de Pearson*. Esta medida es dada por el cociente entre la desviación típica y la media de un conjunto de datos, cuando se realiza este cociente se obtiene un valor que no está asociado a una medida en las unidades de los datos. Por ende, es muy útil para la comparación de la dispersión en distintos conjuntos de datos con medidas específicas diferentes.

$$CV = \frac{S}{\bar{X}}$$

Con la misma intención del índice de Pearson surgen otras medidas de dispersión relativa.

### **3.1.3 El método de estudio de casos**

El estudio de casos es una metodología de investigación la cual busca responder preguntas del tipo “Cómo” y “Por qué” en temas actuales sobre los cuales el investigador no tiene control (Martínez y Piedad, 2016). Para Yin (1994) (citado en Martínez y Piedad, 2016) el estudio de casos es “una investigación empírica que estudia un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto de la vida real, especialmente cuando los límites entre el fenómeno y su contexto no son claramente evidentes” (p.167). En esta investigación se estudia “¿Cómo se presentan las medidas de dispersión en textos escolares colombianos y la pertinencia de las actividades que proponen?”, donde la pertinencia de las actividades estará sujeta al contexto donde se utilice el texto escolar. Por consiguiente, para el desarrollo del análisis que se llevará a cabo con los docentes de diferentes instituciones se aplicará un estudio de casos.

Sarabia (1999) (citado en Martínez y Piedad, 2016), afirma que el estudio de casos logra cumplir todos los objetivos de una investigación donde se pueden analizar variados casos con distintas intenciones. Por otro lado, el estudio de casos incluye métodos cualitativos y cuantitativos para la recolección de datos, generalmente se utiliza la entrevista como método cualitativo.

### **3.1.4 El cuestionario y la entrevista**

Según Sarmiento & Fernández (2013) el cuestionario es un conjunto de preguntas basadas en los aspectos que se desean investigar u obtener información, por ende, tales preguntas son contestadas por los encuestados. Los cuestionarios pueden ser de varios tipos: individuales, tipo lista y sociométrico. En cuanto a la formulación de las preguntas que conforman un cuestionario, también se tienen algunas clasificaciones. De acuerdo al tipo de contestación se presentan: preguntas cerradas o abiertas. Con respecto a la clase de contenido que se desea conseguir: preguntas de identificación, de hechos, de acción, de información, de intención y de opinión. Con base en el papel que desempeña el cuestionario: preguntas filtro, de control, de introducción o rompehielos, muelles o colchón, en batería y de embudo.

Ruiz-Olabuénaga, Aristegui y Melgosa (2002) (citados en Meneses & Rodríguez, 2011) presentan a la entrevista como un técnica para la obtención de información que se hace a partir de una conversación profesional entre un entrevistador y uno o varios entrevistados. Lo anterior, con el fin de realizar una investigación o contribuir en diagnósticos y tratamientos sociales. Así como en los cuestionarios, también existen diferentes tipos de entrevistas. De acuerdo a su estructura y diseño: entrevista estructurada, semiestructurada y no estructurada. Con respecto al momento en el que se va a llevar a cabo: entrevista inicial o exploratoria, de desarrollo o seguimiento y final. Teniendo en cuenta el números de entrevistados: entrevistas individuales y grupales. En base a la extensión del objeto de

estudio: entrevistas focalizadas o monotemáticas y no focalizadas. Con respecto al rol del entrevistador: directivas y no directivas.

Meneses & Rodríguez (2011), consideran las siguientes ventajas que tiene el uso de las entrevistas para la obtención de información:

- ✓ Permite la recolección de información precisa y contextualizada, desde un punto de vista del entrevistado.
- ✓ La flexibilidad en su ejercicio permite reajustar las preguntas y respuestas.
- ✓ Favorece la transmisión de información no superficial.
- ✓ Es un complemento de los instrumentos cuantitativos para la obtención de datos e información.
- ✓ La base metodológica de la investigación insinúa que el conocimiento, los puntos de vista y la experiencia, son aspectos significativos del contexto en el que se está investigando.

### **3.2 Perspectiva didáctica**

El estudio de las medidas de centralización obliga a estudiar las medidas de dispersión, sin embargo, el concepto de dispersión y las medidas que lo cuantifican es extenso y confuso. Estepa & Del Pino (2013), considera que las medidas de dispersión son difíciles de comprender por parte de cualquier individuo. Ejemplo de esto son los personajes históricos que han hecho parte de su estudio y avance. Galileo en 1600, inicia con este desarrollo histórico de las medidas de dispersión trabajando con las distribuciones de error. Tiempo después en 1815, Gauss usa la desviación media como una medida de dispersión, luego en 1885, Edgeworth compara medidas de dispersión de diferentes distribuciones. Más tarde, Pearson entre 1895 y 1900 usa por primera vez la noción de desviación estándar y realiza su cálculo en varios estadísticos. De esta forma diferentes aportes han hecho que el análisis mediante las medidas de dispersión sea provechoso, como Fisher que en 1920 usó por primera vez el concepto de varianza.

Las medidas de dispersión tienen una indudable importancia social, por ende, su comprensión facilita el consumo inteligente de información estadística. Wilks (1951) (citado en Del Pino, 2019) expone que “el pensamiento estadístico será algún día tan necesario para el ciudadano competente como la habilidad de leer y escribir” (Wilks, 1951, p.1-18). Así mismo, para Batanero y otros (2015), la variabilidad es una de las nociones estadísticas primordiales, y el docente de matemáticas debe ser consiente del papel fundamental de la dispersión en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Para comprender la perspectiva didáctica que abarca el estudio de las medidas de dispersión, es importante entender en qué se basa la cultura, el razonamiento y el sentido estadístico.

La cultura estadística es clave en la formación de futuros educadores y en el desarrollo del pensamiento aleatorio. Un ciudadano estadísticamente culto debe interpretar y evaluar

críticamente la información estadística que es puesta a su disposición. Consecuentemente, debe contar con capacidades comunicativas que le permitan argumentar o refutar con respecto a dicha información cuantitativa. Bajo el punto de vista de Batanero y otros (2013), la cultura estadística es demostrada por un individuo que posee los conocimientos básicos de la disciplina y los utiliza para razonar y argumentar dentro de un contexto donde se exponga información estadística. Además, debe desarrollar una actitud crítica cuestionando la información proveniente de diferentes medios.

El sentido estadístico es la unión entre la cultura estadística y el razonamiento estadístico. Se entiende por razonamiento estadístico a la interpretación y argumentación de los procesos estadísticos y los resultados obtenidos. Garfield (2002) (citado en Del Pino, 2017) propone ciertos criterios que un razonamiento estadístico debe rodear: comprender por qué las medidas de centralización, dispersión y posición dicen cosas diferentes de un conjunto de datos; entender en qué contextos utilizar cierto tipo de medidas, etc. Es decir, se muestra a las medidas de dispersión como un eje fundamental en el razonamiento estadístico. Por consiguiente, Del Pino (2017) señala que desde los currículos (en este caso el colombiano) hasta las editoriales y su influencia mediante los libros, deberían direccionar la enseñanza de las medidas de dispersión hacia el desarrollo del sentido estadístico. Es aquí cuando autores realizan la propuesta de elementos innovadores en la enseñanza de la estadística: uso de simulaciones, datos reales provenientes de revistas o páginas web, Applets, aplicación de contenidos en actividades, prácticas y proyectos (Blanco, 2018).

## CAPÍTULO 4. ELECCIÓN DEL MODELO DE ANÁLISIS

### 4.1 El texto escolar

Se entiende como libro de texto escolar al “Material organizado sistemáticamente, diseñado para proporcionar un nivel específico de instrucción en una categoría temática” (Kilpatrick, 2014). Consecuentemente, en este trabajo se considera el *libro de texto escolar* como aquel conjunto de materiales que corresponde a un grado o curso, y a una materia específica. En nuestro caso: a los niveles de octavo, noveno, décimo y once, y la disciplina de las matemáticas escolares.

Cabe resaltar que el uso de los libros de texto escolar se da desde los inicios de las civilizaciones con sus diversos escritos, donde se consignaba el saber matemático que las comunidades iban desarrollando y deseaban transmitir a futuras generaciones. Los Babilonios con el texto “Plimpton 332”, los Egipcios con el “Papiro de Rhind”, etc. No obstante, según Del Pino (2019), oficialmente el primer libro de texto matemático es “Los Elementos de Euclides”. Los libros de texto escolar han ido evolucionando con el paso de las décadas, su adaptación al currículo y los métodos de enseñanza-aprendizaje han permitido que su papel fundamental en la educación no desaparezca.

Hoy en día, según Escudero (1983), es necesario entender que el libro de texto escolar consta de tres dimensiones generales: La dimensión *semántica* que hace referencia a su contenido en general, La dimensión *estructural-sintáctica* en la cual se tienen en cuenta la organización del texto y los sistemas de símbolos. Por último, La dimensión *pragmática* que indica los usos o propósitos del texto. Al revisar los libros de texto desde estas dimensiones, es evidente que la evaluación de este no puede ser aislada, sino que debe obedecer también al uso del texto en el aula, y al modelo de enseñanza-aprendizaje en el cual se quiere emplear.

El libro de texto escolar de matemáticas es una herramienta fundamental para los maestros, pues brinda en muchos escenarios una guía para los docentes en la enseñanza de distintas temáticas. Sin embargo, no todos los libros responden de igual manera a las exigencias del profesional en la educación o de las situaciones específicas del aula de clase. Por ende, la selección del texto apropiado es una tarea de especial interés. Para esto a continuación, se establecerán algunas generalidades que permitan desarrollar una elección conveniente, asociada a ciertas categorías específicas. Estas categorías, están enmarcadas en lo que se denomina como *Modelo exhaustivo de análisis*.

En los documentos curriculares colombianos, específicamente en los EBCM (2006), se presenta la necesidad de realizar una elección crítica de los textos escolares matemáticos teniendo en cuenta la amplia oferta en el mercado de la educación, la importancia de una elección que sea pertinente y coherente con las políticas del sistema educativo, y los fines de la educación colombiana. De modo que, se evidencia la necesidad de ampliar y profundizar



la elección de textos escolares por parte de los docentes, sin dejar de lado su papel primordial en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

Basados en el trabajo de Dormolen (1986), podemos clasificar los libros de texto en tres generalidades, las cuales cumplen distintas funciones en el aula:

- 1) Libros de texto que constan únicamente de ejercicios y problemas.
- 2) Los que poseen teoría de la temática por un lado y ejercicios o problemas por otro lado.
- 3) Libros de texto que articulan la teoría con situaciones problema y ejercicios.

Entendamos como *ejercicio* la acción de ejercitar mecánicamente procedimientos matemáticos. Es decir, los ejercicios tienen como objetivo la adquisición de una habilidad o procedimiento preciso y sencillo. Por ende, consiste en repetir, memorizar y reproducir. La *actividad* es la acción de aplicar un proceso mental sencillo en una situación contextualizada. Consecuentemente, las actividades tienen como objetivo el dominio de una habilidad, competencia o procedimiento matemático de poca dificultad. Las actividades implican la comprensión y la toma de decisiones. Por ejemplo: la elección de la operación o procedimiento a emplear para resolver el problema. Desde la perspectiva de Míguez (2003), los *problemas* son “Situaciones reales de algún ámbito profesional, situaciones no reales en el lenguaje simbólico propio de la matemática, y situaciones matemáticas no reales en lenguaje natural” (Míguez, 2003. p. 148). Las anteriores conceptualizaciones servirán como apoyo en el análisis y diferenciación de los ejercicios, problemas y actividades que serán analizados en los libros de texto escolar seleccionados.

Para Del Pino (2019) los libros de textos escolar matemáticos deben cumplir ciertos criterios para estar en concordancia con las necesidades actuales de la sociedad:

- 1) Presentar variados gráficos e imágenes que expongan claramente las ideas y no lleven a confusiones por parte del lector.
- 2) Tener un aspecto atractivo, diferentes tipografías y estar impreso a color.
- 3) Manejar un lenguaje claro y conocido, exponiendo los nuevos conceptos de forma concisa. A su vez, respetar los diferentes tipos de razas, géneros y sociedades.
- 4) Cumplir con los objetivos de aprendizaje, teniendo en cuenta competencias de lectura y escritura. Lo anterior, presentando un contexto cercano a los estudiantes, promoviendo la autonomía y los diferentes ritmos de aprendizaje.
- 5) Ser una herramienta para el docente y asequible para el estudiante.
- 6) Estar elaborados por expertos en el ámbito de las matemáticas y la didáctica, adaptándose a las nuevas investigaciones.

## 4.2 Consideraciones sobre el uso del texto escolar

Para Dormolen (1986) el último tipo de libros de texto señalado en la sección anterior, es prácticamente un profesor en sí mismo. En otras palabras, este tipo de textos se puede ver como un manual para los profesores en el aula al cual seguirán de forma fiel, resaltando que de esta forma se garantiza la calidad educativa. Por otro lado, Torres Santomé (1994, p. 177) indica que este tipo de textos empleados de esta forma específica, lleva a una descualificación profesional. Es decir, se termina por dar a entender que cualquier persona puede ser docente de la asignatura y que lo único que se necesita es el libro guía. En concordancia con la anterior idea, Gimeno Sacristán (1989, p. 15), muestra que estos materiales ya se han empleado y no funcionan de la mejor manera. Específicamente, el docente en el aula no es pasivo, es decir, no se puede reducir su participación solo como consumidores y trasladadores de las ideas.

De acuerdo con Martínez Bonafé (1991), llegamos a un punto donde observamos los libros de textos de dos formas: por un lado como manuales para el quehacer docente, lo cual tiene una implicación fuerte en el aspecto de la enseñanza. Dicho de otra manera, se percibe el libro como un material cerrado, cuyo uso evita al profesor pensar y planear. Mientras que por otro lado, estos libros se pueden ver como instrumentos para la formación profesional, en la medida que lleva al docente a tener una actitud más activa ante los dilemas prácticos y las situaciones específicas del aula. Lo anterior, reflexionando y contrastando con otros pares académicos para formular y adaptar el instrumento en pro de la misión institucional o su modelo pedagógico.

En definitiva el papel de los libros de textos escolares en el aula es fundamental, las editoriales poseen el completo poder para establecer los conceptos o procedimientos que se deben enseñar en el aula de clase. Por ende, si el docente posee desconocimiento de la formalidad matemática o de su historia, no se puede abstener de transmitir estos elementos del saber matemático. En los lineamientos curriculares colombianos (1998), subyace la importante labor que ejercen los docentes al momento de elegir los textos escolares a implementar en el aula. Esta elección es un factor determinante en la calidad y pertinencia de la educación matemática escolar.

## 4.3 Modelo de análisis exhaustivo

El Modelo de análisis exhaustivo, surge de la necesidad de crear un modelo de valoración de textos matemáticos por parte de Monterrubio y Ortega (2009). En este modelo se tienen en cuenta las características generales que deben tener los libros de textos, según autores como Fernández 1989, Marchesi y Martín 1991, Del Carmen 1994; entre otros. Al mismo tiempo, varios instrumentos e indicadores de análisis.

La elección de este modelo para el análisis de los textos escolares utilizados en Colombia, se fundamenta en la pertinencia de cada categoría que se tiene en cuenta para la revisión a profundidad de los distintos aspectos que influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En efecto, no se presenta la necesidad de realizar experimentaciones en

el aula de clases, teniendo en cuenta que el análisis detallado ofrece información completa y oportuna. Además, este tipo de análisis puede ser muy útil como herramienta esencial para elaborar materiales curriculares o libros de texto. Dado que, si se tienen en cuenta todos los categorías presentadas, estos productos serían aptos en el desarrollo de la práctica educativa.

En concordancia con la GAISE (2005), este modelo permite analizar el uso de datos reales y la implementación de las tecnologías en los libros de textos escolares. Para Blanco (2018), los libros de textos deben incluir el uso de datos reales contextualizados, permitiendo un mayor énfasis en la alfabetización estadística señalada también por la GAISE (2005). Además, priorizar la explicación de los conceptos estadísticos, antes que los procedimientos implicados. Se resalta la importancia de presentar en los libros de texto, actividades sistemáticas que promuevan el pensamiento estadístico, y el uso de páginas web con bases de datos, aplicativos y otros recursos tecnológicos.

A continuación, se presentan las categorías que se revisarán en el análisis de los textos escolares utilizados en Colombia establecidas por Monterrubio y Ortega (2009):

1. **Objetivos:** Presencia, organización y adecuación al nivel.
2. **Contenidos:** Presentación, presencia, selección, secuenciación, organización, adecuación de los contenidos a los objetivos y al nivel educativo, procedimientos teóricos, fundamentación, claridad de la exposición, teoría demostrada, rigor, actualidad, ejemplos, razonamiento matemático, temas transversales, educación en la atención a la diversidad, resolución de problemas como contenido.
3. **Conexiones:** dentro de las matemáticas, con la historia de las matemáticas, con otras disciplinas y con la vida real.
4. **Actividades:** Adecuación de las actividades a los objetivos, a los contenidos y al nivel educativo, secuenciación de las actividades en orden de dificultad, temporalización de la secuenciación de actividades, actividades propuestas, ejercicios propuestos, ejercicios resueltos, cuestiones propuestas, uso de construcciones geométricas, razonamiento matemático, temas transversales, educación en la atención a la diversidad, resolución de problemas como actividad.
5. **Metodología:** Aspectos metodológicos, justificación de la opción metodológica adoptada, aspectos sociales-afectivos, uso y construcción de materiales didácticos, temporalización de los contenidos y sus actividades correspondientes, metodología de la evaluación, enseñanza personalizada, estimular la creatividad, educación en la atención a la diversidad como metodología, resolución de problemas como metodología
6. **Lenguaje:** Uso del lenguaje habitual, lenguaje motivador, comunicación matemática, uso del lenguaje simbólico específico, lenguaje descriptivo,

argumentativo, explicativo, imperativo e interrogativo, lenguaje coherente con un tratamiento en temas transversales.

7. **Ilustraciones:** Cantidad, colores, tipología, finalidad, calidad estética, adecuación de las ilustraciones a los alumnos, a los objetivos, a los contenidos y al contexto y al modelo, claridad, ilustraciones motivadoras, ilustraciones coherentes con un tratamiento en temas transversales.
8. **Motivación:** Motivación mediante el humor, el juego, las conexiones de las matemáticas y a través de un marco de resolución de problemas; ilustraciones y lenguaje motivadores.
9. **Tecnologías de la información y de la comunicación:** Propuesta de tareas con la calculadora, con el ordenador y a través de internet; adecuación de las tareas al nivel, a los objetivos y a los contenidos.
10. **Evaluación:** Evaluación en función de los objetivos de la programación, momento, objetivos, contenidos evaluados, instrumentos, autoevaluación, criterios, evaluación de los aspectos sociales y afectivos.
11. **Enfatización:** Empleo de recursos gráficos, apartado de resumen, síntesis, afianzamiento de aprendizajes.
12. **Aspectos formales:** Precio, encuadernación, formato y papel, número de colores utilizados en el texto.
13. **Recursos generales:** Otras fuentes, material manipulativo, material audiovisual.
14. **Entorno:** Flexibilidad, destinatario, adecuación, informes externos. (p. 44-45)

Cabe resaltar que de las anteriores categorías no se tendrán en cuenta las siguientes: Aspectos formales y Entorno. Lo anterior, teniendo en cuenta que los libros seleccionados se encuentran en formato digital o en las bibliotecas de los colegios, por ende, no es necesario considerar aspectos como el precio, papel y encuadernación. Además, se deja estipulado que el entorno en el cual se usan estos libros de textos escolar son algunos colegios en los cuales se desarrollan las prácticas educativas de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

## **CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE LOS TEXTOS ESCOLARES ELEGIDOS**

### **5.1 Selección de textos**

Para la selección de los textos utilizados en Colombia se tuvo en cuenta criterios tales como su facilidad de acceso por parte de los estudiantes, el reconocimiento que tenga el sello editorial, es decir, aquellos que tienen un mayor grado de confianza en su manejo de temas y seguimiento al currículo colombiano. Además, de ser sugeridos por algunos de los docentes en donde se realicen prácticas de docencia por parte de maestros en formación en la Universidad Pedagógica Nacional. Adicionalmente, algunos de estos textos son elaborados directamente por el MEN y se hallan en la bibliotecas de los colegios. Cabe resaltar que dos de los textos seleccionados no son colombianos, sin embargo, para el caso de las instituciones con Bachillerato Internacional, también se tuvo en cuenta las sugerencias realizadas por los docentes y los textos esenciales exigidos en este tipo de enseñanza.

Por consiguiente, luego de hacer una revisión preliminar a los criterios anteriores, las sugerencias realizadas por Del Pino (2019) en el Capítulo 4.1, y las tablas de contenido de los posibles textos a elegir se seleccionaron los siguientes:

1. Los Caminos de Saber - Matemáticas 8, editorial Santillana edición de 2013.
2. Los Caminos de Saber - Matemáticas 9, editorial Santillana edición de 2013.
3. Los Caminos de Saber - Matemáticas 10, editorial Santillana edición de 2013.
4. Mathematics for the international students 9 - MYP 4, editorial Haese & Harris publications edición de 2008.
5. Mathematics for the international students 10e - MYP 5, editorial Haese & Harris publications edición de 2008.
6. Glifos Procesos Matemáticos 8, editorial Libros & Libros S.A. edición 2008.
7. Glifos Procesos Matemáticos 9, editorial Libros & Libros S.A. edición 2008.
8. Glifos Procesos Matemáticos 10, editorial Libros & Libros S.A. edición 2008.
9. Glifos Procesos Matemáticos 11, editorial Libros & Libros S.A. edición 2008.
10. Vamos a aprender Matemáticas 9, MEN edición de 2017.
11. Vamos a aprender Matemáticas 10, MEN edición de 2017.
12. Vamos a aprender Matemáticas 11, MEN edición de 2017.

No obstante, algunos textos no fueron elegidos para llevar a cabo el presente trabajo. Por ejemplo: el texto Matemáticas, Azar, Sociedad (1996), no fue considerado por que su uso no es muy reconocido en instituciones escolares colombianas, salvo en el Instituto Pedagógico

Nacional (IPN), y no hubo profesores que lo sugirieran. Los textos: Matemáticas primer grado (2018) y Matemáticas segundo grado (2019), no aplicaban al primer criterio establecido para la selección de los textos escolares: ser colombiano, además, son poco accesibles.

Cabe resaltar que para la siguiente caracterización de los diferentes componentes presentes en cada libro anteriormente señalado, se evaluará la presencia de cada categoría propuesta en el marco del Modelo Exhaustivo. El análisis se llevará a cabo en cada una de las editoriales seleccionadas. Es decir, se analizarán en un primer momento los tres textos elegidos de la editorial Santillana en conjunto. En un segundo momento, los dos textos del Bachillerato Internacional (IB), luego los tres textos de la editorial Libros & Libros. Por último, los cuatro textos elaborados por el MEN.

## **5.2 Editorial Santillana**

En los dos primeros libros de la editorial Santillana: ‘Los Caminos del Saber’, grado octavo y noveno, se presentan diez unidades de trabajo. Al inicio de cada una de ellas, se exhibe el tema matemático a tratar y los logros que se desean alcanzar. Además, se enlistan los conceptos y actividades que se desarrollarán en la Libromedia con la que cuenta el libro. Esta misma distribución se encuentra presente en el texto para grado décimo, pero allí se manejan siete unidades de trabajo. Específicamente nos centraremos en la unidad 10 (para grado octavo y noveno) y en la 7 (para grado décimo), llamadas: Estadística y probabilidad. A continuación, se realizará el análisis de las categorías que se decidió contemplar en la propuesta del Modelo Exhaustivo.

### **A) Objetivos**

En los tres libros se presenta un “Plan de trabajo”, que en principio podría interpretarse como la propuesta de objetivos en los que se enumeran los ítems que los estudiantes deben desarrollar durante la unidad. De la misma manera, se le informa al lector que el “Pensamiento aleatorio” estará presente durante el progreso de cada tema. En las Figura 1, Figura 2 y Figura 3 se presentan los respectivos planes de trabajo para los grados octavo, noveno y décimo.

## Figura 1

*Plan de trabajo para grado octavo*

**Estándar: pensamiento aleatorio**

**→ Tu plan de trabajo...**

- # Caracterizar variables cuantitativas aplicando las medidas de posición y las medidas de variabilidad.
- # Aplicar la caracterización de variables cuantitativas continuas en la resolución de situaciones problema.
- # Utilizar las técnicas de conteo para hallar el número de elementos de un evento en un experimento aleatorio.
- # Calcular la probabilidad de que ocurra un evento.

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.292), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.

## Figura 2

*Plan de trabajo para grado noveno*

**Estándar: pensamiento aleatorio**

**→ Tu plan de trabajo...**

- # Determinar los elementos necesarios para caracterizar una variable cualitativa.
- # Caracterizar dos variables cualitativas.
- # Caracterizar una variable cuantitativa.
- # Conocer las técnicas de conteo y aplicarlas en el cálculo de la probabilidad.

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 9 (p.292), por R. De Armas, M. Ramírez, M. Acosta, J. Romero, J. Gamboa, V. Celi, A. Chappe, D. Morales, F. Salazar, 2008, Santillana.

**Figura 3***Plan de trabajo para grado décimo*

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10 (p.286), por L. Buitrago, J. Romero, L. Ortiz, J. Gamboa, D. Morales, J. Castaño, J. Jiménez, 2008, Santillana.

Partiendo de la presencia de los objetivos en los libros de texto escolar Santillana seleccionados, se divisa una guía o camino de los diferentes temas a tratar. Sin embargo, explícitamente no se menciona la palabra objetivo, ni en la presentación de cada uno de los ítems del plan del trabajo, ni en las secciones posteriores. Por otra parte, no se entrevistó alguna breve discusión o justificación que responda al qué, cómo y para qué, del plan de trabajo propuesto (las preguntas que comúnmente responde un objetivo). Lo anterior, hablando de los objetivos presentados para los estudiantes, sin embargo, la editorial presenta un libro guía para los docentes en donde se muestran a grandes rasgos los objetivos de enseñanza y los aportes que pueden ser de gran utilidad para el maestro de matemáticas.

## B) Contenidos

Para grado octavo, se define qué es una medida de dispersión y se aclara que también son conocidas como medidas de variabilidad. Se relaciona el concepto de dispersión con el de *representatividad*. Es decir, se afirma que a mayor dispersión, hay poca representatividad de los datos alrededor de la media, y a menor dispersión, alta representatividad. En segundo lugar, se define el rango, la varianza y la desviación estándar. Para la definición de varianza se hace claridad en la notación implementada para la varianza en una muestra ( $s^2$ ), y en una población ( $\sigma^2$ ) como se muestra en la Figura 4. Además, se presenta un párrafo en donde se hace alusión a la importancia de interpretar correctamente los resultados obtenidos, al momento de aplicar la fórmula para la varianza en una muestra o en una población. Lo anterior, siendo un componente esencial de la cultura estadística. La interpretación y la argumentación sólida de las conclusiones o resultados derivados de la información estadística, es primordial para ser un individuo estadísticamente culto.



**Figura 4***Definición de varianza muestral y poblacional*

Para calcular la varianza se elevan al cuadrado las desviaciones de todos los datos y luego, se suman. Teniendo en cuenta esto, la varianza se define como:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \text{ en una muestra}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} \text{ en una población}$$

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.306), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.

Para finalizar, se define la desviación estándar o desviación típica como allí se señala. Se presenta la relación entre la varianza y la desviación estándar. Así mismo, la notación convenida para la desviación estándar muestral ( $s$ ) y la desviación estándar poblacional ( $\sigma$ ) (ver Figura 5). En relación con las tres medidas de dispersión presentadas en la unidad, se realiza un ejemplo en el cual el lector debe calcular las medidas de dispersión y realizar algunas conclusiones al respecto. Más adelante en el siguiente tema de la unidad 10 (Caracterización de variables cuantitativas continuas para datos agrupados, ver Figura 6), se presenta la varianza y la desviación estándar para datos agrupados como se muestra en la

**Figura 7.****Figura 5***Definición de desviación estándar muestral y poblacional*

También se conoce como **desviación típica** y se genera a partir de la varianza, pues como ella siempre se expresa en unidades diferentes a las unidades originales, la desviación se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza. Si es tomada en una muestra se representa con  $s$  y si es tomada en una población se representa como  $\sigma$ , así:

Desviación estándar muestral:  $\sqrt{s^2} = s$

Desviación estándar poblacional:  $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.306), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.

**Figura 6**

*Tabla de contenidos grado octavo*

Unidad 10. Estadística y probabilidad		Pensamiento aleatorio	
		292	
* Definiciones iniciales	294	* Caracterización de variables cuantitativas continuas para datos agrupados	310
* Caracterización de variables cuantitativas para datos no agrupados	296	* Conjuntos y eventos	317
* Medidas de dispersión	305	Probabilidad y conjuntos	317
Rango	305	* Principio de multiplicación	322
Glosario	334	Bibliografía	336
		* Ejercicios para repasar	326
		* Problemas para repasar	328
		* Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	330
		* Trabaja con StadIS 1.05	332

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.7), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.

**Figura 7**

*Definición de varianza (muestral y poblacional) y desviación estándar (muestral y poblacional) en datos agrupados*

En forma similar, es posible calcular la varianza usando una variación de la fórmula que presentamos en el tema anterior de esta unidad. En ella, las desviaciones de los valores de los datos con respecto a la media se planteaban como  $x_i - \bar{x}$ , pero como en el caso de las distribuciones de frecuencias no se conocen específicamente esos datos  $x_i$ , entonces se usa a  $x_i$  como el dato representante y con él se calcula dicha desviación.

Así, la varianza de la muestra está determinada por la siguiente expresión:

$$s^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

En forma similar la desviación estándar es:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Si el estudio se hace en una población, las fórmulas anteriores se convierten en:

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{n} \quad \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \mu)^2}{n} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \mu)^2}{n}}$$

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.313), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.

En grado noveno también se presentan las medidas de dispersión como “Medidas de variabilidad” (ver Figura 8) y se señalan que estas son: el rango, la varianza y la desviación estándar. Cada una cuenta con su respectiva definición y expresión algebraica con la cual se calcula. En el libro nunca se habla de la fórmula para la varianza o la desviación estándar, más bien, se maneja la palabra “expresión” para hacer referencia a la fórmula de cada una (ver Figura 9). Se resalta al lector la importancia de tener presente que la expresión mostrada para calcular la varianza, se utiliza para una muestra y no para una población. Por otro lado, se maneja un ejemplo para mostrar a lector de qué manera se debe enfrentar a una actividad, donde se le pida analizar un conjunto de datos mediante las medidas de dispersión.

**Figura 8**  
*Tabla de contenidos grado noveno*

Unidad 10. Estadística y probabilidad		Pensamiento aleatorio
		292
* <b>Análisis de una variable cualitativa</b>	294	Tablas de distribución de frecuencias 303
* <b>Caracterización de dos variables cualitativas</b>	297	Gráfica de puntos 304
Tabla cruzada o tabla de contingencia	297	Histogramas 304
Tabla marginal	298	Ojiva 305
* <b>Caracterización de variables cuantitativas</b>	302	* <b>Métodos numéricos para la caracterización de variables</b> 309
Diagrama de tallo y hojas	302	Medidas de localización 309
		Medidas de variabilidad 313
		* <b>Técnicas de conteo</b> 316
		Clases de muestra 316
		Principio de multiplicación 316
		Permutaciones 317
		Combinatoria 319
		Probabilidad y conteo 323
		* <b>Ejercicios para repasar</b> 326
		* <b>Problemas para repasar</b> 328
		* <b>Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?</b> 231
		* <b>Trabaja con Excel</b> 332
Glosario	334	
Bibliografía	336	

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 9 (p.7), por R. De Armas, M. Ramírez, M. Acosta, J. Romero, J. Gamboa, V. Celi, A. Chappe, D. Morales, F. Salazar, 2008, Santillana.

**Figura 9**  
*Expresiones de la varianza muestral y la desviación estándar muestral*

La **varianza** para una muestra se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Donde  $(x_i - \bar{x})$  es la desviación de los datos con respecto a la media y  $n$  es el número de datos.

**Desviación estándar**

La **desviación estándar** se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza. Para una muestra se define como:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 9 (p.313), por R. De Armas, M. Ramírez, M. Acosta, J. Romero, J. Gamboa, V. Celi, A. Chappe, D. Morales, F. Salazar, 2008, Santillana.

Por último en grado décimo, se presenta al lector un resumen de las medidas de dispersión que ya se trabajaron en los dos libros anteriores (ver Figura 10). Posteriormente, se muestra la aplicación de las medidas de dispersión en algunos temas nuevos. Por ejemplo, se realiza una introducción al “Valor Z o Valor Estandarizado”, presentándolo como el número de desviaciones estándar a las que se encuentra un dato en relación a la media. También se nombran temas como el Teorema de Chebyshev, La Regla Empírica y los Valores Atípicos en una distribución.

**Figura 10***Resumen de las medidas de dispersión*

**Ampliación multimedia**

## 1. Medidas de localización relativa

Al iniciar un curso de estadística se aprende a caracterizar variables teniendo en cuenta si son cualitativas o cuantitativas.

La caracterización de variables cuantitativas, en particular, se hace teniendo en cuenta si los datos se analizan en forma agrupada o en forma no agrupada.

**En forma agrupada se utilizan:**

- La distribución de frecuencias
- El diagrama de tallo y hojas
- El histograma y el polígono de frecuencias
- La ojiva

**En forma no agrupada se utilizan:**

- Las medidas de tendencia central {Media, Mediana, Moda}
- Las medidas de posición {Cuartiles, Deciles, Percentiles}
- Las medidas de dispersión {Rango, Varianza, Desviación estándar}

Las medidas de dispersión también se conocen con el nombre de **medidas de variabilidad**.

**Recuerda que...**

La media en una muestra o en una población se simboliza como:  $\bar{x} = \mu$

Varianza poblacional:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}$$

Varianza muestral:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$s = \sqrt{s^2}$$

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10 (p.288), por L. Buitrago, J. Romero, L. Ortiz, J. Gamboa, D. Morales, J. Castaño, J. Jiménez, 2008, Santillana.

En un pequeño recuadro del libro se explica al lector que para determinar lo grande que es la desviación estándar con respecto a la media, se puede utilizar el coeficiente de variación como se muestra en la Figura 11. Sin embargo, no se señala que dicho coeficiente de variación hace parte de las medidas de dispersión. Para el segundo gran conjunto de temas que abarca la unidad 7 de este libro (ver Figura 12, “Resumen de los cinco datos”), se presenta el Rango intercuartílico como una medida donde se encuentra el 50% de los datos de una distribución (ver Figura 13).

**Figura 11**

*Definición del coeficiente de variación*



*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10 (p.289), por L. Buitrago, J. Romero, L. Ortiz, J. Gamboa, D. Morales, J. Castaño, J. Jiménez, 2008, Santillana.

**Figura 12**

*Tabla de contenidos grado décimo*

Unidad 7. Estadística y probabilidad		Pensamiento aleatorio
		286
* Medidas de localización relativa	288	
Valor z o valor estandarizado	288	
Teorema de Chebyshev	290	
La regla empírica	291	
Valores atípicos en una distribución	292	
* Resumen de los cinco datos	296	
Diagrama de cajas y bigotes	297	
* Medidas de asociación entre dos variables	302	
Análisis de una variable cualitativa y otra cuantitativa	302	
Análisis de dos variables cuantitativas	303	
Caracterización de datos y probabilidad	310	
Tablas de frecuencia	310	
Tablas de contingencia	312	
* Conteo, conjuntos y probabilidad	316	
* Probabilidad y conteo	316	
Probabilidad y conjuntos	318	
* Probabilidad condicional	321	
Eventos independientes	323	
Ley multiplicativa	323	
* Ejercicios para repasar	326	
* Problemas para repasar	328	
* Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	330	
* Trabaja con Microsoft Mathematics	332	
Glosario	334	
Bibliografía	336	

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10 (p.7), por L. Buitrago, J. Romero, L. Ortiz, J. Gamboa, D. Morales, J. Castaño, J. Jiménez, 2008, Santillana.

### Figura 13

#### Definición de rango intercuartílico

A partir de este resumen es posible analizar cuán dispersos están los datos en cada uno de los cuartos. Además, teniendo estos datos es posible definir una medida importante que recibe el nombre de **Rango intercuartílico** que se simboliza como *RIC*.

*Rango intercuartílico (RIC) =  $Q_3 - Q_1$*

Dentro de este rango se encuentra el 50% de los datos de la distribución.

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10 (p.297), por L. Buitrago, J. Romero, L. Ortiz, J. Gamboa, D. Morales, J. Castaño, J. Jiménez, 2008, Santillana.

En resumen, teniendo en cuenta los documentos curriculares colombianos EBCM (2006) y DBA (2015), las medidas de dispersión deben empezar a cobrar sentido desde grado octavo. Es decir, existe una adecuación de los contenidos, en este caso las medidas de dispersión, con el nivel de los estudiantes. Por otro lado, aunque en la tabla de contenidos establecida para la unidad 7 de grado décimo (ver Figura 12), no se especifique que se trabajarán las medidas de dispersión, estas están presentes en la mayoría de los cálculos implementados durante su desarrollo. Con respecto a la secuencia de contenidos, se percibe una línea de temas que se relaciona en los tres libros analizados: en el texto para grado octavo se definen las tres principales medidas de dispersión (rango, varianza y desviación estándar) de una forma detallada y cada una con un ejemplo distinto. Ya en grado noveno, se vuelven a retomar estas tres medidas de dispersión pero ahora se realiza su aplicación en un solo ejemplo. Para finalizar, en grado décimo se realiza la implementación de estas medidas en otros temas de la estadística y se presenta el coeficiente de variación. En general, las fórmulas para cada medida de dispersión son mostradas de forma clara y se trata de realizar un énfasis en la interpretación de estas. Se evidencia que no existe una relación entre el Plan de trabajo establecido al inicio de la unidad 10 (ver Figura 1), y lo desarrollado correspondiente a las medidas de dispersión. De esta misma forma tampoco se presenta concordancia con la tabla de contenidos presentada para esta unidad y los temas abarcados. Por ejemplo, en la tabla de contenidos solo se señala como medida de dispersión el rango (ver Figura 6), y en el progreso del tema se mencionan otras medidas de dispersión como la desviación estándar y la varianza.

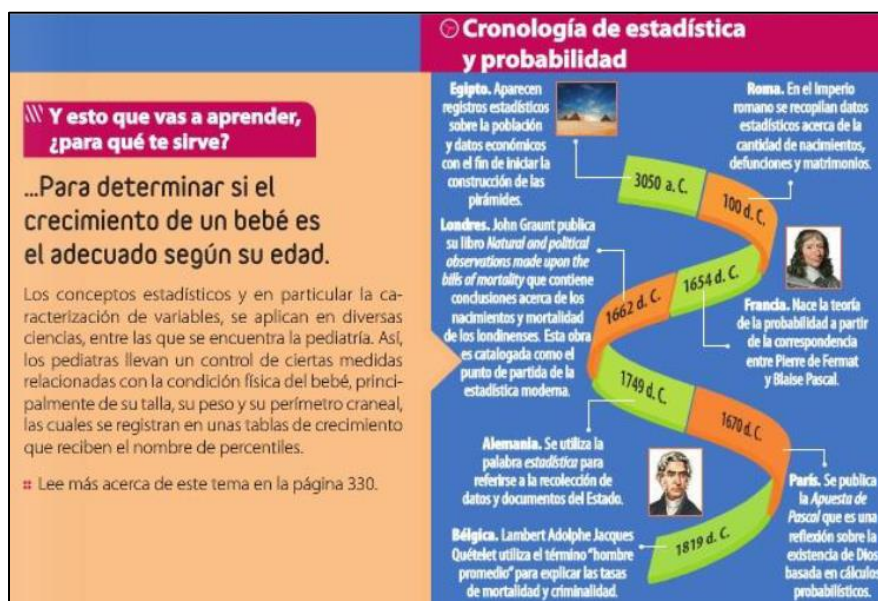
#### C) Conexiones

Al inicio de cada unidad se presenta una cronología de la estadística y la probabilidad, donde se evidencia una conexión de la historia de las matemáticas con los contenidos tratados en la correspondiente unidad. Además, se relacionan los temas tratados con otras disciplinas. En el caso de unidad 10 para grado octavo, con la pediatría (ver Figura 14). En la unidad 10 para grado noveno, con la ingeniería mecánica, y en la unidad 7 para grado décimo con la medicina. Lo anterior, permitiendo al lector entender que la información estadística se encuentra presente en muchos aspectos de la vida cotidiana. Dicho de otra forma, se presenta la importancia de las matemáticas fuera del contexto educativo: en la sociedad y en su desarrollo a través de la historia.



**Figura 14**

*Cronología de la estadística y la probabilidad grado octavo*



*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.293), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.

#### D) Actividades

Partiendo de la definición de actividad anteriormente señalada en el Capítulo 4.4.1, se evidencia una secuencia de cuatro actividades al finalizar el tema de las medidas de dispersión para el libro de grado octavo. Las cuales, son un fragmento del apartado “Afianzo competencias” y según el libro, buscan desarrollar en el lector competencias como: la interpretación, el razonamiento y la proposición (ver Figura 15). En particular, los ejercicios que componen las actividades si muestran un orden: primero el cálculo de las medidas de tendencia central, luego las medidas de dispersión o variabilidad. Más adelante, en las siguientes temáticas de la unidad 10 se siguen presentando actividades en donde se deben calcular las medidas de dispersión.

## Figura 15

### Actividad talla de bebés grado octavo

**R** En una clínica se registraron los siguientes datos sobre la talla en centímetros de 60 bebés que nacieron durante una semana.

45	51	49	51	47	53
48	53	49	53	48	53
49	52	48	55	51	55
51	57	53	53	54	61
53	55	52	49	56	48
52	48	55	47	56	46
57	49	59	51	59	47
60	57	41	53	48	47
41	55	49	49	48	53
48	43	48	48	58	53



**30.** ¿Qué talla promedio tienen los bebés?

**31.** ¿Este promedio qué indica de la muestra?

**32.** Calcula la mediana y escribe una interpretación de ella.

**33.** Calcula el percentil 95 y escribe lo que crees que significa en este conjunto de datos.

**34.** Elabora el diagrama de cajas y bigotes y determina si existen datos atípicos.

**35.** Calcula el rango para el conjunto de datos y escribe una interpretación de él.

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.308), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.


Al finalizar la unidad 10, el libro presenta al lector una sección llamada “Ejercicios para repasar” donde se deben realizar una serie de ejercicios que cuentan con niveles de dificultad alto, medio y bajo. En cuanto a las medidas de dispersión, se muestran ocho ejercicios de dificultad media (ver



**Figura 16).** Un ejercicio de dificultad alta que según nuestra definición anteriormente presentada, encajaría en la categoría de una actividad (ver Figura 17), y uno de dificultad baja para el tema de datos agrupados, como se muestra en la Figura 18.

**Figura 16**  
*Ejercicios dificultad media*

Medidas de dispersión

 Escribe la varianza y la desviación estándar en cada una de las siguientes situaciones.

**179.** Las temperaturas en grados centígrados de una ciudad durante una semana al mediodía fueron:

5, 21, 27, 12, 9, 18, 13.

---

**180.** Los pesos, en kilogramos, de los jugadores de un equipo de fútbol son:

52, 62, 60, 70, 58, 61, 67, 72, 69, 56, 59

---

**181.** Durante 7 días asistieron las siguientes cantidades de personas a una obra de teatro:

52, 85, 96, 89, 120, 125, 140

---

**182.** Las edades, en años, de 20 estudiantes son:

12	15	13	9	16
13	9	10	11	15
9	10	6	13	8
8	11	8	7	9

---

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.326), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.

### Figura 17

*Ejercicios dificultad alta*

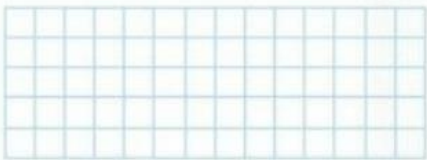
Se seleccionaron 10 personas para participar en la última prueba de salto largo en las finales de los intercolegiados de atletismo. Se calculó el promedio y la desviación estándar y se encontró que

$$\bar{x} = 2,50 \text{ y } s = 0,46.$$

Los saltos de 8 de los 10 jugadores, en metros, fueron

2,00; 2,15; 3,00; 2,90; 2,50; 3,10; 2,90; 2,50.

**183.** Encuentra los datos que faltan sabiendo que su diferencia es 0,31 m.



*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.326), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.


### Figura 18

*Ejercicios dificultad baja*

La siguiente tabla muestra la cantidad de chocolates que consumen los clientes de una empresa en una semana.

Cantidad	[60, 63)	[63, 66)	[66, 69)
$f$	5	18	42

**187.** Calcula la desviación estándar de la muestra.



*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.327), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.

En cuanto a la resolución de problemas como actividad, al finalizar la unidad 10 se presenta el apartado “Problemas para repasar” en donde se realiza una actividad guiada con el alumno en tres pasos: comprende el problema, elabora un plan y llévalo a cabo, por último, verifica

y redacta la respuesta (ver Figura 19). En este mismo apartado también se realizan algunas actividades en relación a las medidas de dispersión.


**Figura 19**

*Problema para repasar grado octavo*

**PROBLEMAS PARA REPASAR**

La información que se presenta a continuación está relacionada con la edad, en meses, en la cual empieza caminar un grupo de bebés:

9	14	11	11	13	11	12	12
10	12	15	11	14	10	14	13
11	12	12	11	18	14	12	11
11	12	11	12	14	13	10	12
12	13	13	12	12	11	10	14
12	13	13	13	13	12	13	14
12	12	12	10	13	13	14	13



¿La media es un buen descriptor de la muestra utilizando las medidas de dispersión y posición?

**Paso 1** Comprende el problema.

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿La media es un buen descriptor de la muestra utilizando las medidas de dispersión y posición?

¿Cuáles son los datos del problema?

Se presenta la edad, en meses, en la cual empieza a caminar un grupo de 56 bebés.

**Paso 2** Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se calcula la media de la muestra:  $\bar{x} = 12,18$

Este dato significa que, en promedio los bebés empiezan a caminar a los 12,18 meses. Para saber qué tan preciso es este dato se calcula la desviación estándar y se analiza en un diagrama de cajas y bigotes si existen o no datos atípicos.

Luego, la desviación estándar es:  $s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{56 - 1}} = \sqrt{\frac{92,214}{55}} = 1,29$

La desviación estándar es pequeña. Luego, parece no haber valores atípicos en la muestra, de este modo la media resulta ser un buen descriptor de la muestra. Sin embargo, para verificar esta afirmación es necesario elaborar el diagrama de cajas y bigotes.

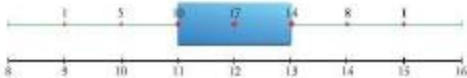
Ahora, se ordena el conjunto de datos y se hallan los cuantiles, así:

$Q_1 = \left(\frac{25}{100}\right)56 = 14$ . Es decir,  $Q_1$  es el promedio de los datos 14 y 15. Así  $Q_1 = 11$

$Q_2 = \left(\frac{50}{100}\right)56 = 28$ . Es decir,  $Q_2$  es el promedio de los datos 28 y 29. Así  $Q_2 = 13$

$Q_3 = \left(\frac{75}{100}\right)56 = 42$ . Es decir,  $Q_3$  es el promedio de los datos 42 y 43. Así  $Q_3 = 13$

Finalmente, el diagrama de cajas y bigotes es:



**Paso 3** Verifica y redacta la respuesta.

Se verifican las operaciones y se concluye que la media resulta ser un buen descriptor de la muestra.

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.328), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.

En el texto escolar para grado noveno, al finalizar la presentación de las medidas de dispersión, se le pide al lector realizar una actividad en donde debe analizar un conjunto de datos aplicando lo anteriormente examinado. En esta actividad guiada, el estudiante va leyendo paso a paso cómo se debe abordar este tipo de situaciones y cómo se lleva a cabo el análisis de datos (ver Figura 20). Además, se evidencia una adecuación a los contenidos que se han tratado en el libro anterior para grado octavo y en este para grado noveno.

**Figura 20**

*Actividad guiada grado noveno*

Para iniciar el análisis, se calcula la media del conjunto de datos. Así:

$$\bar{x} = \frac{5 + 12 + 15 + 9 + 20 + 1 + 15 + 79 + 21 + 2 + 3 + 10}{12}$$

En este caso, se puede determinar que la media es  $\bar{x} = 16$  fotocopias.

Para plantear conclusiones más objetivas sobre el conjunto de datos se realiza el cálculo de las medidas de variabilidad.

**Primero**, se calcula el rango de la distribución así:

$$\text{Rango} = 79 - 1 = 78 \text{ copias}$$

**Luego**, se calcula la varianza. Para tal fin es muy útil plantear una tabla con las respectivas variaciones de cada dato en relación con la media y los respectivos cuadrados, así:

No. de copias	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
5	-11	121
12	-4	16
15	-1	1
9	-7	49
20	4	16
1	-15	225
15	-1	1
79	63	3.969
21	5	25
2	-14	196
3	-13	169
10	-6	36
Suma	0	4.824

Luego,  $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{4.824}{12 - 1} = 438,54 \text{ fotocopias}^2$

Ahora, si la varianza es grande, se puede afirmar que la media no es un buen representante del grupo y que existen datos que están muy dispersos, por tanto, la variabilidad de la muestra es muy alta, como sucede en este caso.

El análisis de la varianza está ligado a las unidades en las que la medida está al cuadrado, lo cual hace complicada su interpretación, por tal razón, se hace necesario calcular la desviación estándar.

**Finalmente**, se calcula la desviación estándar para poder tener una medida lineal de comparación de los datos.

Así,  $S = 20,94$  fotocopias.

Este valor es muy alto para la muestra, por tanto, a partir de la media no se puede hacer una caracterización adecuada de la variable estudiada.

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 9 (p.314), por R. De Armas, M. Ramírez, M. Acosta, J. Romero, J. Gamboa, V. Celi, A. Chappe, D. Morales, F. Salazar, 2008, Santillana.

Al finalizar esta actividad, se maneja la misma metodología del libro para grado octavo: primero se presenta el apartado “Afianzo competencias” con una serie de actividades que buscan desarrollar las competencias de interpretación, razonamiento y proposición. Después, en la sección “Ejercicios para repasar” se muestran actividades con diferentes niveles de dificultad.

Para el libro dirigido a grado décimo, se muestran más actividades y/o ejercicios donde el estudiante debe interpretar y argumentar según lo aprendido hasta el momento de las medidas de dispersión (ver Figura 21). Además, debe solucionar algunas actividades en donde se hace

presente la aplicación de las medidas de dispersión en temas como el Valor Z, el Teorema de Chebyshev y la Regla empírica, el coeficiente de correlación, la covarianza, etc.

### Figura 21

#### *Actividades de interpretación y argumentación*

1 Según la regla empírica, prácticamente todos los datos de una distribución deben encontrarse entre  $\bar{x} - 3s$  y  $\bar{x} + 3s$ , pero también está el rango como medida de dispersión.

1. Plantea alguna relación de asociación entre la desviación estándar y el rango.
2. Responde, ¿se podría usar la relación anterior para estimar la desviación estándar cuando se conoce el rango de la distribución?

3 El teorema de Chebyshev puede plantearse en forma equivalente afirmando que cuando mucho 25% de los datos estará a más de dos desviaciones estándar de la media.

3. Cuando mucho, ¿qué porcentaje de una distribución estará a tres o más desviaciones estándar de la media?
4. Cuando mucho, ¿qué porcentaje de una distribución estará a cuatro o más desviaciones estándar de la media?

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10 (p.293), por L. Buitrago, J. Romero, L. Ortiz, J. Gamboa, D. Morales, J. Castaño, J. Jiménez, 2008, Santillana.

En conclusión para los tres textos escolares de la editorial Santillana, no se percibe una secuencia en orden de dificultad para las actividades presentadas (a excepción de las expuestas en la sección “Ejercicios para repasar”). Conjuntamente se observan cuatro diferentes apartados que brindan herramientas al lector: en un primer momento encontramos las actividades guiadas que se muestran luego de introducir algún concepto (ver Figura 20). En un segundo momento, está la sección “Afianzamiento de competencias” con actividades donde se busca reforzar alguna de las seis competencias que maneja el libro (interpretación, argumentación, razonamiento, ejercitación, resolución de problemas y proposición) (ver Figura 21). En un tercer momento, está el apartado “Ejercicios de repaso” con diferentes niveles de dificultad y en donde se enfatiza en su gran mayoría la ejercitación de procedimientos (ver

**Figura 16).** Por último, en un cuarto momento se presenta la sección “Problemas para repasar” en donde se muestra la resolución de problemas como una actividad, motivando al estudiante a retarse y aplicar cada una de las competencias que el libro le ha presentado (ver Figura 19).

#### E) Metodología

Una de las metodologías implementadas por los tres textos escolares de la editorial Santillana es el afianzamiento de competencias, donde se plantean actividades de interpretación, razonamiento, argumentación, ejercitación, resolución de problemas y proposición. No se realiza una justificación por parte del libro para la elección de esta metodología. Sin embargo, la interpretación hace parte de los componentes de la cultura estadística. Es decir, un ciudadano estadísticamente culto debe poder interpretar la información estadística presentada en datos, resúmenes, tablas o gráficos. Por otra parte, el razonamiento, la resolución de problemas y la ejercitación de procedimientos, hacen parte de los procesos generales de la actividad matemática establecidos por los Lineamientos Curriculares (1998).

Otra de las metodologías propuestas es el uso de recursos tecnológicos y manipulables. Mediante la Libromedia que posee cada libro (ver Figura 22), el estudiante puede hacer uso de diferentes herramientas que posibilitan un aprendizaje enriquecedor, y que a su vez, le facilita realizar evaluaciones de desempeño y otras relacionadas con las Prueba Saber del estado colombiano. Lo anterior, permitiendo una metodología de evaluación que se adapta al contexto del estudiante y lo prepara para enfrentar posibles retos en su futuro. Por otro lado, los libros manejan la resolución de problemas como metodología en la enseñanza y aprendizaje de la estadística (ver Figura 19). Al finalizar cada unidad, se le presenta al lector una sección llamada “Problemas para repasar” donde el estudiante debe aplicar los conocimientos adquiridos durante el desarrollo del libro.

**Figura 22***Recursos de la Libromedia*

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10 (p.286), por L. Buitrago, J. Romero, L. Ortiz, J. Gamboa, D. Morales, J. Castaño, J. Jiménez, 2008, Santillana.

Por último, los libros de la editorial vienen acompañados de los textos *Proyectos transversales* donde se le presenta al lector una metodología que le permite planear y elaborar pasos para la solución de situaciones problema (ver Figura 23). Además, presenta un modelo de Pruebas Saber ICFES, relacionado con los estándares de evaluación internacionales de la prueba PISA. Así mismo, maneja el desarrollo de algunos Proyectos cercanos al contexto de los alumnos.

**Figura 23***Proyectos transversales*



**TALLER 8** Solución de problemas  
Medidas de dispersión  
Pensamiento aleatorio

**RECUERDA QUE...**

El **rango (R)** es la medida determinada por la diferencia entre el dato mayor y el dato menor de la muestra.

Para saber cuál es el **rango para datos agrupados** en intervalos se calcula la diferencia entre el límite inferior del primer intervalo y el límite superior del último intervalo.

**Analiza la resolución del siguiente problema.**

1. Un entrenador debe escoger, entre dos competidores, al que participará en un torneo de atletismo. Los dos candidatos lograron los siguientes tiempos, en segundos, en cinco carreras de 100 m. ¿Quién obtuvo una menor diferencia entre sus tiempos?

Diego: 11,6 - 11,5 - 16,0 - 12,9 - 15,0      Nicolás: 12,7 - 13,0 - 13,9 - 13,4 - 14,0

**PASO 1** Comprende el problema.

Datos: Los tiempos logrados por Diego y Nicolás.

Pregunta: ¿Quién obtuvo una menor diferencia entre sus tiempos?

**PASO 2** Elabora un plan y llévalo a cabo.

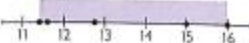
Se **construirá una tabla** para determinar el rango de los datos y con esto identificar quién tuvo un desempeño más constante.

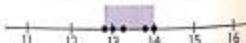
Tiempo logrado en 5 carreras de 100 m					
Competidor	Carrera 1	Carrera 2	Carrera 3	Carrera 4	Carrera 5
Diego	11,6	11,5	16,0	12,9	15,0
Nicolás	12,7	13,0	13,9	13,4	14,0

$R_{\text{Diego}} = 16,0 - 11,5 = 4,5 \text{ s}$        $R_{\text{Nicolás}} = 14,0 - 12,7 = 1,3 \text{ s}$

**PASO 3** Verifica y redacta la respuesta

Para comprobar lo obtenido se usará una **representación gráfica**.

Tiempos logrados por Diego: 

Tiempos logrados por Nicolás: 

**Respuesta:** Luego, el rango es mayor en los resultados obtenidos por Diego. Eso significa que la diferencia entre sus tiempos es mayor que los de Nicolás.

**ESTRATEGIAS**

**Construir una tabla**  
En este tipo de problemas se utilizan tablas para organizar los datos y facilitar los cálculos necesarios con el fin de determinar medidas de dispersión de un conjunto de datos.

**Usar una representación gráfica**  
Los datos del problema se pueden representar gráficamente, con el fin de comprender la situación.

*Nota.* Tomado de Proyectos transversales Matemáticas 10 (p.52), por A. Joya, J. Gamboa, M. Ramírez, C. Castro, A. Aravena, J. Ávila, 2015, Libros Santillana.

## F) Lenguaje

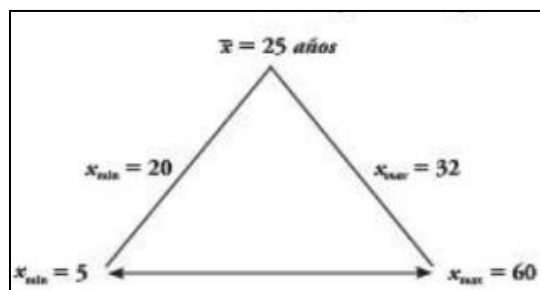
El lenguaje que se utiliza en los tres libros de texto escolar es simple, la terminología implementada es la necesaria para abordar las medidas de dispersión. Por otro lado, el lenguaje simbólico es claro y se hacen las correspondientes diferenciaciones entre la desviación estándar muestral y poblacional. No obstante, el uso de notación para distinguir varianza muestral y poblacional puede no ser pertinente cuando se confunden el tamaño de la población en contraste con el de la muestra. Durante el desarrollo de cada unidad prima un lenguaje explicativo. Para la presentación de las fórmulas o la terminología implementada en el desarrollo de las medidas de dispersión, se encuentra un lenguaje simbólico que permite al lector relacionar cada símbolo con su respectiva definición (ver Figura 9).

## G) Ilustraciones

Según Zafra (2013): “...las ilustraciones son todos aquellos dibujos, grabados o estampas que, intercalados en el texto, lo complementan...” (p.12). Por ende, en los tres libros de la editorial Santillana se encontraron algunas ilustraciones con dibujos coloridos. Sin embargo, se evidencia en su gran mayoría el uso de gráficos y no ilustraciones. Para el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI) (2009) un gráfico estadístico “es una representación visual de datos estadísticos por medio de puntos, líneas, barras, polígonos o figuras asociadas a escalas de medición, que permiten una fácil comprensión de la información en su conjunto” (p.13). En los libros de la editorial los gráficos tienen dos tipos de finalidades: Los primeros están encaminados en la ejemplificación de conceptos o procedimientos, como es el caso de la Figura 24, donde se busca mostrar el concepto de las medidas de dispersión mediante un ejemplo. Estos gráficos tienen como fin, exponer al lector un escenario parecido al contexto de la actividad. Por ejemplo, como se muestra en la Figura 25, donde se observa un gráfico que representa la distribución de los datos en relación con la media y la desviación estándar.

### Figura 24

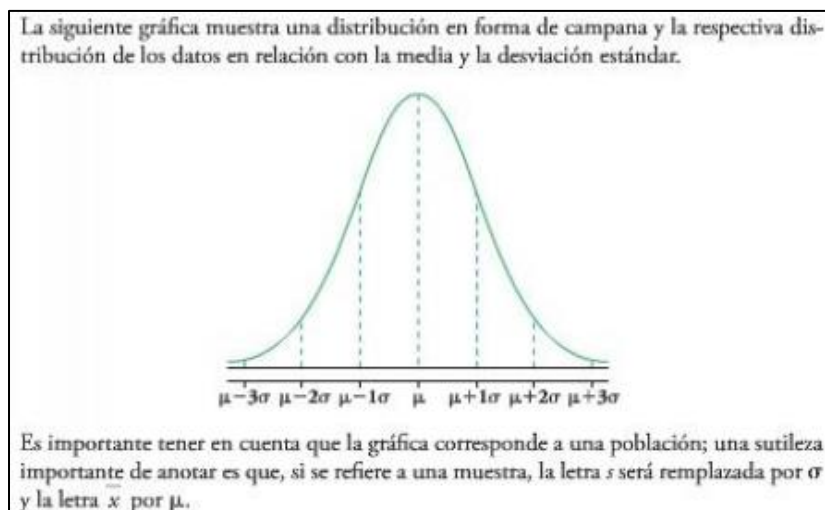
*Ilustración para la ejemplificación de las medidas de dispersión*



*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.305), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.

### Figura 25

*Distribución en forma de campana*

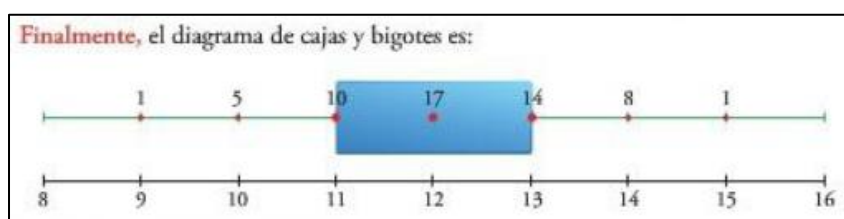


*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10 (p.291), por L. Buitrago, J. Romero, L. Ortiz, J. Gamboa, D. Morales, J. Castaño, J. Jiménez, 2008, Santillana.

El segundo tipo de gráficos como los diagramas de cajas y bigotes, histogramas, diagramas de dispersión, polígonos de frecuencia, diagramas de puntos, etc. (ver Figura 26); buscan generar una destreza matemática en el estudiante, ya que según Gal (2002), la interpretación de gráficos estadísticos requiere de una apropiada conexión entre los estadísticos de resumen (en este caso las medidas de dispersión), los datos brutos utilizados y el grafico obtenido. En general, ambos tipos de gráficos buscan representar de forma clara la información que muchas veces puede ser confusa para el lector (ver Figura 27).

### Figura 26

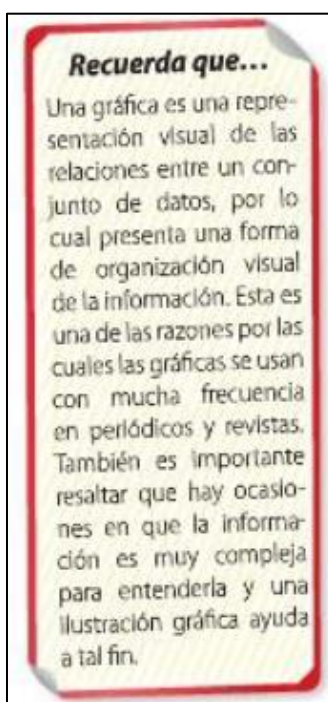
*Diagrama de cajas y bigotes grado octavo*



*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.328), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.

### Figura 27

*Uso de una gráfica*



*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.303), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.

## H) Motivación

Al finalizar la unidad de probabilidad y estadística, en cada uno de los tres libros se proponen “Problemas de repaso”. En estos se plantean una serie de pasos para la resolución de problemas, de tal manera que el lector se motive a solucionarlo implementando las sugerencias realizadas por el libro (ver Figura 19). El desarrollo de actividades paso a paso, motiva al estudiante y le permite ver que la resolución de problemas no es algo extraño o complicado. En consecuencia, los tres libros de la editorial Santillana motivan al estudiante y lo retan a seguir buscando estrategias para la resolución de problemas, y el desarrollo del pensamiento aleatorio.


En algunas actividades los libros sugieren realizar una búsqueda de datos en páginas como la Secretaria de Movilidad, con el fin de presentar conclusiones a la luz de los datos (ver Figura 28). Esta forma de motivar a los estudiante mediante el análisis de datos reales y la construcción de conclusiones válidas, es una de las expectativas que deberían cumplir los alumnos según los NCTM (2003).

### Figura 28

*Actividad consulta en base de datos*

El experimento consistió en poner a circular 30 vehículos de modelos nuevos, con frenos ABS a una velocidad de 48 kilómetros por hora, sobre una pista mojada. Los resultados de las respectivas distancias de frenado de dichos vehículos se registran en el siguiente diagrama de tallo y hojas:

Distancia de frenado en metros	
1	9 7 8 6 7
2	0 4 0 1 8 4 7
3	2 6 0 1 0 0 1
4	0 0 3 2 2
5	0 1 3 0 1 1



36. Encuentra la media, la mediana y la moda de las distancias de frenado.

37. Halla las medidas de variabilidad y determina cuál de ellas te da una mejor interpretación para esta base de datos.

38. Encuentra los percentiles 30, 60 y 90. Determina una conclusión a partir de ellos.

39. Halla los cuartiles y elabora el diagrama de cajas y bigotes para las distancias de frenado.

40. ¿Hay datos atípicos en la situación planteada? Justifica tu respuesta.

41. Consulta en la página de la Secretaría de Movilidad los límites de velocidad permitidos en la ciudad y en carretera. Luego, escribe una conclusión que relacione esta información y los diferentes estadísticos que hallaste en la base de datos proporcionada por el problema.

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.309), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.

Por otro lado, se establecen conexiones entre los temas tratados durante la unidad, y las situaciones de la vida real: como el crecimiento adecuado de un bebe según su edad. Además, se encuentran algunos apartados durante el desarrollo de los libros donde se muestran acontecimientos históricos que se relacionan con el tema que se está presentando (ver Figura 29). Lo anterior, permitiendo que el lector se motive mediante la conexión de las matemáticas con la historia de la humanidad.

## Figura 29

*Apartado historia de las matemáticas*



*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10 (p.291), por L. Buitrago, J. Romero, L. Ortiz, J. Gamboa, D. Morales, J. Castaño, J. Jiménez, 2008, Santillana.

### I) Tecnologías de la información y de la comunicación

Como se mencionó anteriormente, al inicio de cada unidad el libro brinda al lector múltiples recursos educativos que podrá encontrar dentro de la Libromedia que estos contienen (ver



Figura 22). Además, en el libro para grado octavo se propone una tarea en la cual el lector debe calcular algunas medidas de dispersión implementado el programa StadiS 1.05 (calculadora estadística). Allí se realiza una explicación del procedimiento a seguir para realizar la tarea propuesta (ver Figura 30), y se evidencia que la calculadora es sencilla de manejar y permite realizar las operaciones propuestas. Este tipo de tareas es adecuado, teniendo en cuenta que generan nuevas ideas en el estudiante las cuales puede expresar mediante este medio, así mismo, según Moreno & Waldegg (2002), estas herramientas ofrecen diferentes formas innovadoras para la manipulación de los objetos matemáticos (en este caso las medidas de dispersión) y genera en el lector un nuevo panorama para la comprensión de conceptos o procedimientos.

**Figura 30**

*Trabajo con StadiS 1.05*

**Trabaja con StadiS 1.05**


**Objetivo:** calcular algunas medidas de tendencia central y medidas de dispersión con datos sin agrupar.

**Descripción:** introducir datos correspondientes a una situación en la tabla de distribución de StadiS 1.05. Luego, hallar la frecuencia absoluta y calcular la moda, la media, la varianza y la desviación típica.

Para acceder a StadiS 1.05, ingresa y descarga el programa en: [descargar.portalprogramas.com/StadiS.html](http://descargar.portalprogramas.com/StadiS.html)

1 Haz clic en el ícono Nueva. Aparecerá una ventana llamada NUEVA DISTRIBUCIÓN. Despliega las opciones UNIDIMENSIONAL: X y selecciona Discreta y luego en Aceptar.

3 Selecciona la columna n. Luego, elige la opción Sumar la columna, para verificar la cantidad total de elementos de la muestra.



The image shows a screenshot of the StadiS 1.05 software interface. The main window is titled 'NUEVA DISTRIBUCIÓN'. On the left, there is a sidebar with 'var. X' and a tree view showing 'UNIDIMENSIONAL: X' expanded, with 'Discreta' selected. The main area displays a table with two columns: 'VALOR' and 'FREC. ABSOLUTA'. The table contains several rows of data, including values like 70.0, 75.0, 80.0, 85.0, 90.0, 95.0, and 100.0, each with a corresponding frequency of 1. A red box highlights the 'Discreta' option in the sidebar. Another red box highlights the 'Sumar la columna' option in a dropdown menu.

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8 (p.332), por M. Ramírez, M. Acosta, A. Perdomo, L. Ortiz, V. Celi, R. De Armas, J. Castaño, J. Gamboa, J. Jiménez, 2008, Santillana.

Al finalizar la unidad 10 en el libro para grado noveno, y la unidad 7 en el libro para grado décimo, se propone al lector una actividad empleando el uso de Excel. Sin embargo, esta actividad está dirigida al desarrollo de otro contenido (Frecuencias en un conjunto de datos) en el libro para grado noveno. Ya en grado décimo mediante Excel, el lector debe calcular algunas medidas de dispersión, incluido el coeficiente de variación y la elaboración de un diagrama de dispersión (ver Figura 31).

**Figura 31**  
*Trabajo con Excel*

**Trabaja con Excel**

**Objetivo:** calcular algunas medidas de un grupo de datos como la mediana, la desviación estándar y el coeficiente variacional y aplicarlas a la solución de problemas cotidianos.  
**Descripción:** los gastos por día de todos los hijos de una familia numerosa en miles de pesos es 2, 10, 0, 5, 3, 4, 6, 8, 2, 5. A partir de la información, calcular la mediana, la desviación estándar y el coeficiente de variación.

- Haz clic en inicio programas y luego, en Microsoft Excel.
- Digita en la primera celda los datos del ejercicio.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	10	0	5	3	4	6	8	2	5

- Digita en celdas independientes los datos que se van a hallar: mediana, desviación estándar y coeficiente variacional.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	10	0	5	3	4	6	8	2	5
2										
3										
4										
5										

Mediana  
Desviación estándar  
Coeficiente variacional

- Selecciona la celda que está frente a la palabra Mediana, luego haz clic en Fórmulas. Después, haz clic en el icono Insertar función que aparece en la parte superior de la pantalla.

- En el cuadro **Buscar una función**, parte superior de la ventana que se despliega, escribe mediana y luego haz clic en Ir.

- Con clic izquierdo oprimido, selecciona las casillas desde la A hasta la J que contienen los datos iniciales.

- Al soltar el clic del ratón, debe desplegarse una ventana como la siguiente. Luego, haz clic en Aceptar.

- El resultado aparecerá automáticamente en la celda seleccionada en el paso 4 así:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	10	0	5	3	4	6	8	2	5
2										
3										
4										
5										

Mediana 4,0

*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10 (p.332), por L. Buitrago, J. Romero, L. Ortiz, J. Gamboa, D. Morales, J. Castaño, J. Jiménez, 2008, Santillana.

## J) Evaluación

Dentro de la Libromedia en DVD con la que cuenta el libro, se encuentran evaluaciones de desempeño y algunos ejemplares de las Prueba ICFES – Saber 11° que presentan los estudiantes colombianos en grado noveno. Específicamente dentro del libro, se cuenta con un apartado al finalizar la unidad: “Ejercicios para repasar”, donde se exhiben una serie de ejercicios y actividades que deben ser desarrollados por parte de los estudiantes. Estos ejercicios buscan evaluar la adquisición de los contenidos avanzados durante la unidad. Así mismo, cada uno presenta un nivel de dificultad el cual es señalado al iniciar cada párrafo.

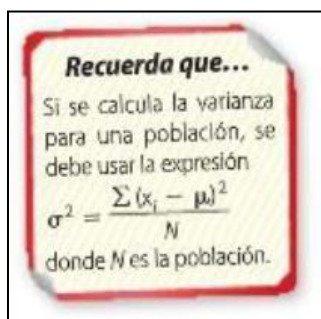
En general ninguno de los tres libros propone criterios de evaluación o autoevaluación. Sin embargo, implícitamente en las diferentes propuestas de ejercicios, actividades y situaciones problema; se están evaluando los contenidos presentados.

### K) Enfatización

Los tres textos escolares de la editorial Santillana aparte del glosario que se encuentra al finalizar el libro, manejan dos tipos de apartados que permiten al estudiante enfatizar en los contenidos y procedimientos presentados: en el primero, se busca mostrarle al lector las fórmulas más relevantes de la teoría presentada o la información importante para la comprensión de los resultados obtenidos:

#### **Figura 32**

*Apartado “Recuerda que ...” con fórmulas relevantes*



*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 9 (p.313), por R. De Armas, M. Ramírez, M. Acosta, J. Romero, J. Gamboa, V. Celi, A. Chappe, D. Morales, F. Salazar, 2008, Santillana.

El segundo tipo de apartado busca plantearle preguntas o cuestionamientos al lector que lo rete a investigar por su cuenta del contenido que se está desarrollando, llamado “Matemáticamente”:

#### **Figura 33**

*Apartado “Matemáticamente”*



*Nota.* Tomado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 9 (p.313), por R. De Armas, M. Ramírez, M. Acosta, J. Romero, J. Gamboa, V. Celi, A. Chappe, D. Morales, F. Salazar, 2008, Santillana.

### L) Recursos generales



Como ya se mencionó anteriormente, se cuenta con una Libromedia (ver Figura 22) en la cual se encuentran variados recursos digitales. Los cuales, permiten al estudiante ampliar sus conocimientos y visualizar los contenidos tratados de una forma distinta. Algunos de estos recursos pueden imprimirse y de esta manera se le brinda al lector un material manipulable. Del mismo modo, la editorial Santillana cuenta con un sitio web donde se presentan recursos multimedia e interactivos.

### **5.3 Editorial Haese & Harris Publications**

Es necesario indicar que la colección de guías para estudiantes del IB son textos diseñados como herramienta para el uso por parte de los profesores y estudiantes. En consecuencia, no pretenden ser libros guía para un curso, pero si un banco de contenidos variados para ser aprovechados por los estudiantes en su desarrollo matemático. Sobre la naturaleza del texto es importante identificar que posee para algunas temáticas un DVD para el aprendizaje interactivo de algunos contenidos, los cuales son enfocados para un trabajo independiente por parte de los estudiante donde ellos pueden contar con un tutor que les apoya a entender las temáticas con un clic. Es decir, si el estudiante requiere una aclaración sobre una temática al dar clic en el botón selftutor, se desplegará un menú que consta de un ejemplo y el audio de un tutor realizando la explicación correspondiente.

El análisis se realizará en los textos del año 9 y 10 del IB. Cuando se observan con detenimiento las temáticas abordadas en los dos textos (ver Figura 34 y Figura 46), se percibe que existe una coherencia vertical en el avance de las temáticas. De igual manera, aunque se identifica que algunas temáticas están presentes en los dos textos, también se evidencia que poseen una mayor grado de dificultad y abarcan un espectro mayor de complejidad en las tareas propuestas. Con esta visión de los dos textos seleccionados, se procederá a realizar el análisis por medio del Modelo exhaustivo presentado con antelación:

#### **A) Objetivos**

En general los textos escolares matemáticos del IB no reportan objetivos de enseñanza o aprendizaje. Por lo tanto como lo indican los autores, esto puede estar asociado a que el texto no es un libro guía para seguir rigurosamente, sino más bien, un banco de contenidos para el uso tanto de estudiantes como de profesores.

Se puede criticar entonces, como bien lo señaló Del Pino (2019) (ver Capítulo 4.1 de este trabajo), que es necesario plantear objetivos acordes a las necesidades educativas implícitas en el contexto donde tendrán cabida los textos escolares de matemáticas. En consecuencia, si la explicitación de objetivos tiene como fin trazar un camino que permita al maestro generar una idea de las herramientas didácticas que se le ofrecen para el desarrollo de su labor, la falta de ellos sería un aspecto por mejorar en este texto escolar de matemáticas.

#### **B) Contenidos**

Al inicio del Capítulo 9 del año 9, se presentan los temas que se irán desarrollando en orden secuencial (ver Figura 34). A partir de una situación problema se muestra al estudiante la necesidad de nuevos contenidos para tratar de dar solución a la misma, por ende, se introduce el concepto de Rango y Rango Inter cuartil. Inicialmente se da una definición corta y concisa de rango (ver Figura 35), para luego profundizar en la comprensión desarrollando un ejemplo donde se calcula paso a paso. Es importante indicar que este ejemplo viene potenciado con la opción selftutor, la cual el estudiante puede usar para obtener la explicación del ejemplo en audio como se muestra en la Figura 36.

**Figura 34**

*Contenidos del Capítulo 9*

<b>9</b>	<b>STATISTICS</b>	<b>193</b>
A	Discrete numerical data	195
B	Continuous numerical data	199
C	Measuring the middle of a data set	201
D	Measuring the spread of data	206
E	Box-and-whisker plots	209
F	Grouped continuous data	212
G	Cumulative data	214
	Review set 9A	217
	Review set 9B	217

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 9 MYP4 (p.7), por P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese, M. Humphries, 2008, Haese & Harris Publications.

**Figura 35**

*Definición de Rango*

To accurately describe a data set, we need not only a measure of its centre, but also a measure of its spread.

For example, 1, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 9 has a mean value of 6 and so does  
4, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8.

However, the first data set is more widely spread than the second one.

Two commonly used statistics that indicate the spread of a set of data are:

- the range
- the interquartile range.

**THE RANGE**


The **range** is the difference between the **maximum** or largest data value and the **minimum** or smallest data value.

**range = maximum data value – minimum data value**

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 9 MYP4 (p.206), por P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese, M. Humphries, 2008, Haese & Harris Publications.

**Figura 36**

*Ejemplo 7 cálculo del rango de un conjunto de datos*

<b>Example 7</b>	 <b>Self Tutor</b>
<p>Find the range of the data set: 4, 7, 5, 3, 4, 3, 6, 5, 7, 5, 3, 8, 9, 3, 6, 5, 6</p> <p>Searching through the data set we find: minimum value = 3  maximum value = 9</p> <p><math>\therefore \text{range} = 9 - 3 = 6</math></p>	

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 9 MYP4 (p.207), por P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese, M. Humphries, 2008, Haese & Harris Publications.

Para el cálculo del rango inter-cuartil los autores muestran en el texto el método paso a paso apoyándose en temas manejados previamente (ver Figura 37), específicamente en la mediana de un conjunto de datos. Análogamente, se propone un ejemplo que viene acompañado de la herramienta selftutor.

**Figura 37**

*Definición y cálculo del Rango inter-cuartil*

### THE QUARTILES AND THE INTERQUARTILE RANGE

We have already seen how the median divides an ordered data set into two halves. These halves are divided in half again by the **quartiles**.

The middle value of the lower half is called the **lower quartile** or  $Q_1$ . One quarter or 25% of the data have a value less than or equal to the lower quartile. 75% of the data have values greater than or equal to the lower quartile.

The middle value of the upper half is called the **upper quartile** or  $Q_3$ . One quarter or 25% of the data have a value greater than or equal to the upper quartile. 75% of the data have values less than or equal to the upper quartile.

The **interquartile range** is the range of the middle half of the data.

$$\text{interquartile range} = \text{upper quartile} - \text{lower quartile}$$

The data set is thus divided into quarters by the lower quartile  $Q_1$ , the median  $Q_2$ , and the upper quartile  $Q_3$ .

So, the **interquartile range**  $\text{IQR} = Q_3 - Q_1$ .

#### Example 8

#### Self Tutor

For the data set 6, 7, 3, 7, 9, 8, 5, 5, 4, 6, 6, 8, 7, 6, 6, 5, 4, 5, 6 find the:

- a** median      **b** lower and upper quartiles      **c** interquartile range.

The ordered data set is:

~~3~~ ~~4~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~5~~ ~~5~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~6~~ ~~6~~ ~~6~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~7~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~8~~ ~~9~~ (19 of them)

**a** The median =  $\left(\frac{19+1}{2}\right)$ th score = 10th score = 6

**b** As the median is a data value, we ignore it and split the remaining data into two groups.

~~3~~ ~~4~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~5~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~6~~      ~~6~~ ~~6~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~7~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~8~~ ~~9~~

$Q_1$  = median of lower half  
= 5

$Q_3$  = median of upper half  
= 7

**c**  $\text{IQR} = Q_3 - Q_1 = 2$

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 9 MYP4 (p.207), por P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese, M. Humphries, 2008, Haese & Harris Publications.

El siguiente tema que se trata para desarrollo del Capítulo 9 es el diagrama de cajas y bigotes, el cuál lo definen como la descripción visual de algunas medidas de la estadística descriptiva y se señala el uso del rango en la elaboración de dicho diagrama, como se muestra en la Figura 38. Seguido, se presenta cómo calcular el Rango intercuartílico para datos continuos agrupados ejemplificándolo con la situación problema que se estaba desarrollando anteriormente (ver Figura 39).

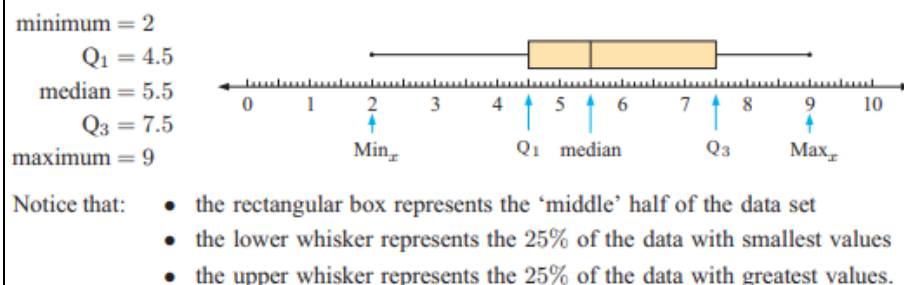
### Figura 38

*Diagrama de cajas y bigotes*

A **box-and-whisker plot** (or simply a **boxplot**) is a visual display of some of the descriptive statistics of a data set. It shows:

- the minimum value ( $\text{Min}_x$ )
  - the lower quartile ( $Q_1$ )
  - the median ( $Q_2$ )
  - the upper quartile ( $Q_3$ )
  - the maximum value ( $\text{Max}_x$ )
- These five numbers form the **five-number summary** of a data set.

For **Example 9**, the **five-number summary** and corresponding boxplot are:



*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 9 MYP4 (p. 209), por P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese, M. Humphries, 2008, Haese & Harris Publications.

### Figura 39

*Rango intercuartílico para datos continuos agrupados*

#### THE INTERQUARTILE RANGE

To find the **lower quartile**  $Q_1$ , we want the  $\frac{1}{4}(n+1)$ th value of the ordered data set.

To find the **upper quartile**  $Q_3$ , we want the  $\frac{3}{4}(n+1)$ th value.

In the speed data,  $n = 129$   $\therefore \frac{1}{4}(n+1) = 32.5$  and  $\frac{3}{4}(n+1) = 97.5$

So,  $Q_1 = 70 + \frac{11.5}{39} \times 10$       {21 values are  $< 70$  and  $32.5 = 21 + 11.5$ }  
 $\approx 73$

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 9 MYP4 (p.213), por P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese, M. Humphries, 2008, Haese & Harris Publications.

En el texto del año 10 se continúan trabajando los conceptos y procedimientos mostrados en el libro del curso anterior (rango y rango inter-cuartil, ver Figura 40). Así mismo, se hace un corto resumen de los diagramas de cajas y bigotes acompañado de un ejemplo. Para complementar este tipo de representaciones de datos en la estadística, el libro presenta los diagramas de cajas y bigotes *paralelos* indicando su importancia en la comparación visual de dos conjuntos de datos (ver Figura 41).

**Figura 40***Resumen de rango y rango inter-cuartil*

The **range** is the difference between the **maximum** data value and the **minimum** data value.  

$$\text{range} = \text{maximum data value} - \text{minimum data value}$$

**Example 7** Self Tutor

Find the range of the data set: 5, 3, 8, 4, 9, 7, 5, 6, 2, 3, 6, 8, 4.

$$\text{range} = \text{maximum data value} - \text{minimum data value} = 9 - 2 = 7$$

The **interquartile range** is the range of the middle half (50%) of the data.  

$$\text{interquartile range} = \text{upper quartile} - \text{lower quartile}$$
or 
$$\text{IQR} = Q_3 - Q_1$$

**Example 8** Self Tutor

For the data set 6, 7, 3, 7, 9, 8, 5, 5, 4, 6, 6, 8, 7, 6, 6, 5, 4, 5, 6, find the:

a median      b lower and upper quartiles      c interquartile range.

The ordered data set is: ~~3~~ ~~4~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~5~~ ~~5~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~6~~ ~~6~~ ~~6~~ ~~6~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~7~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~8~~ ~~9~~ {19 data values}

a Since  $n = 19$ ,  $\frac{n+1}{2} = \frac{19+1}{2} = 10$   
 $\therefore$  the median is the 10th data value, which is 6.

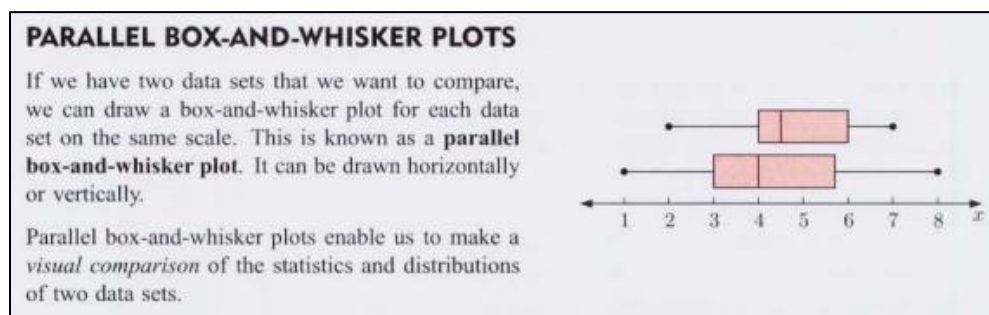
b As the median is a data value, we ignore it and split the remaining data into two groups.

~~3~~ ~~4~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~5~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~6~~      ~~6~~ ~~6~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~7~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~8~~ ~~9~~

$Q_1 = \text{median of lower half} = 5$        $Q_3 = \text{median of upper half} = 7$

c  $\text{IQR} = Q_3 - Q_1 = 2$

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 10E MYP5 (p.188), por M. Haese, M. Humphries, E. Kemp, P. Vollmar, 2014, Haese & Harris Publications.

**Figura 41***Diagrama de cajas y bigotes paralelos*

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 10E MYP5 (p.193), por M. Haese, M. Humphries, E. Kemp, P. Vollmar, 2014, Haese & Harris Publications.

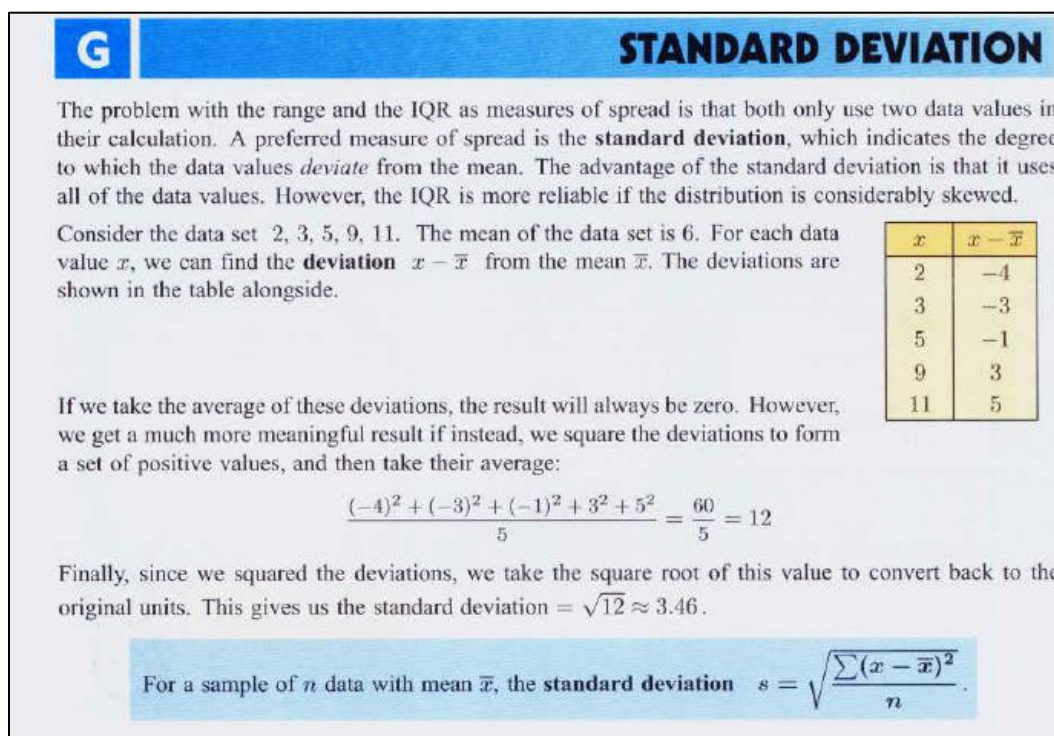
Partiendo de la necesidad de las medidas de dispersión como complemento a las medidas de tendencia central para obtener una mejor descripción del conjunto de datos, se introduce una nueva medida sobre las trabajadas previamente: la desviación estándar. Se inicia indicando que tanto el rango como el rango inter-cuartil, podrían dar una visión sesgada del conjunto



de datos, pues para su cálculo solo se usa una fracción de estos. Mientras que la desviación estándar, si es una medida que incluye a todos los datos de la muestra. Después de presentar esta noción de la desviación estándar, se procede a explorar el trabajo para el cálculo de esta. Se muestra el porqué de elevar al cuadrado las diferencias de valores con la media, para luego comprender, al revisar las unidades, que es necesario aplicar la raíz. Es decir, no se expone a los estudiantes la fórmula para calcular la desviación estándar, sino que se les presenta un bosquejo para su deducción como se muestra en la Figura 42. A continuación, se resalta la importancia de una correcta interpretación de la noción de desviación y el significado que se le debe dar al momento de obtener como resultado un valor alto o bajo. Lo anterior, mediante un ejemplo donde se observa una comparación entre dos conjuntos de datos (ver Figura 43).

**Figura 42**

*Definición de desviación estándar*



*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 10E MYP5 (p.195), por M. Haese, M. Humphries, E. Kemp, P. Vollmar, 2014, Haese & Harris Publications.

**Figura 43**

*Ejemplo 12 desviación estándar en dos conjuntos de datos*

Example 12

Self Tutor

A greengrocer purchases oranges from two different wholesalers. He takes five random crates from each wholesaler, and counts the number of blemished oranges in each:

<i>Sunblessed</i>	4	16	14	8	8
<i>Valencia Star</i>	9	12	11	10	13

Find the mean and standard deviation for each data set, and hence compare the wholesale suppliers.

**Sunblessed:**

$x$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
4	-6	36
16	6	36
14	4	16
8	-2	4
8	-2	4
<b>Total</b>		<b>96</b>

$$\bar{x} = \frac{4 + 16 + 14 + 8 + 8}{5} = 10$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{96}{5}} \approx 4.38$$

**Valencia Star:**

$x$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
9	-2	4
12	1	1
11	0	0
10	-1	1
13	2	4
<b>Total</b>		<b>10</b>

$$\bar{x} = \frac{9 + 12 + 11 + 10 + 13}{5} = 11$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{10}{5}} \approx 1.41$$

The *Sunblessed* oranges generally have less blemishes, but the *Valencia Star* oranges have less variability.

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 10E MYP5 (p.196), por M. Haese, M. Humphries, E. Kemp, P. Vollmar, 2014, Haese & Harris Publications.

Por otro lado se presenta la definición de la desviación estándar para un conjunto de datos agrupados, mediante el uso de ejemplos (ver Figura 44). Para finalizar, la temática de la distribución normal es descrita como un elemento estadístico de vital importancia para el análisis de datos continuos. Manejando un contexto cercano a los estudiantes, se presentan ciertos escenarios conocidos para ellos como lo son el conjunto de edades de chicos de 16 años, la longitud de tiburones adultos, la vida útil de las baterías entre otros. Además, se plantea una explicación de cómo surge la noción de distribución normal típica mediante un ejemplo qué acompañado de un gráfico, logra relacionar la desviación estándar con la distribución normal típica como se muestra en la Figura 45.

**Figura 44**

*Definición de la desviación estándar para datos agrupados*



**STANDARD DEVIATION FOR GROUPED DATA**

For grouped data, the standard deviation  $s = \sqrt{\frac{\sum f(x - \bar{x})^2}{\sum f}}$ ,  
 where  $x$  is any score,  $\bar{x}$  is the mean, and  $f$  is the frequency of each score.

**Example 14** **Self Tutor**

Find the standard deviation for the data set:

Score	0	1	2	3	4
Frequency	1	2	4	2	1

$x$	$f$	$fx$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$f(x - \bar{x})^2$
0	1	0	-2	4	4
1	2	2	-1	1	2
2	4	8	0	0	0
3	2	6	1	1	2
4	1	4	2	4	4
<b>Total</b>	<b>10</b>	<b>20</b>			<b>12</b>

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{20}{10} = 2$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(x - \bar{x})^2}{\sum f}}$$

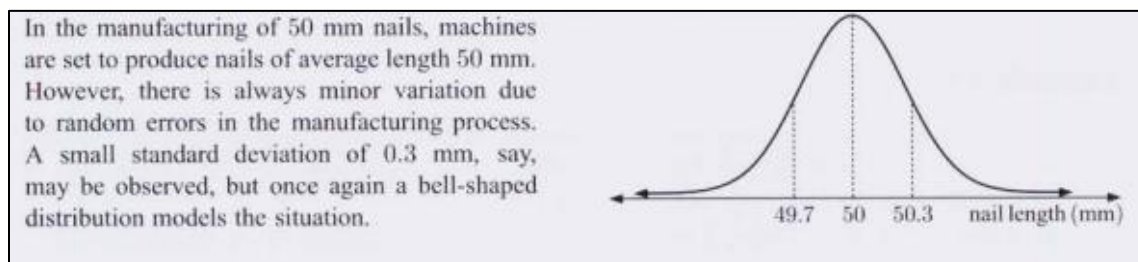
$$= \sqrt{\frac{12}{10}}$$

$$\approx 1.10$$

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 10E MYP5 (p.199), por M. Haese, M. Humphries, E. Kemp, P. Vollmar, 2014, Haese & Harris Publications.

### Figura 45

*Ejemplo cómo surge la distribución normal típica*



*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 10E MYP5 (p.201), por M. Haese, M. Humphries, E. Kemp, P. Vollmar, 2014, Haese & Harris Publications.

En general los dos libros de textos escolares del IB presentan los contenidos de tal manera que lo aprendido por el lector sea soporte para la comprensión de nuevos temas, además de la linealidad existente en el desarrollo de los conceptos o procedimientos y el manejo constante de gráficos estadísticos. Lo anterior, se puede evidenciar al momento de comparar la tabla de contenidos expuesta para cada uno de los libros, en donde se manejan los temas secuencialmente (ver Figura 34 y Figura 46). Para Contreras & Molina (2019), esta construcción secuencial de conocimientos sólidos y la familiarización con gráficos, permite al estudiante ser un ciudadano activo el cual entiende la estadística presente en la sociedad. Con respecto a la presencia de contenidos, llama la atención notar que no se nombra la varianza como una medida de dispersión. Además, no se trabaja la desviación media o el coeficiente de variación.

**Figura 46***Tabla de contenidos, capítulo 9*

<b>9</b>	<b>STATISTICS</b>	<b>171</b>
A	Discrete data	173
B	Continuous data	177
C	Measuring the centre	179
D	Cumulative data	185
E	Measuring the spread	188
F	Box-and-whisker plots	191
G	Standard deviation	195
H	The normal distribution	200
	Review set 9A	203
	Review set 9B	205


*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 10E MYP5 (p.7), por M. Haese, M. Humphries, E. Kemp, P. Vollmar, 2014, Haese & Harris Publications.

### C) Conexiones

Inicialmente los libros presentan dos conexiones de la estadística con la historia de la humanidad. Por un lado, en el libro para año 9, se muestra un recuadro en el cual se alojan personajes o civilizaciones que con antelación emplearon técnicas o temáticas estadísticas en situaciones particulares de su entorno (ver Figura 47). Por otro lado, en el libro para año 10, se presenta la experiencia de una enferma Florence Nigthingale, quien es recordada por diseñar el diagrama de rosa para mostrar las causas y la evolución de la mortalidad. En general, el apartado “Nota histórica” presenta información de los sucesos históricos que están relacionados con la temática que se está presentando:

**Figura 47***Nota histórica 1*

**HISTORICAL NOTE**



The earliest statistical recordings include:

- ancient Babylonians recorded their crop yields on clay tablets.
- ancient Egyptian pharaohs recorded their wealth on stone walls.

More recently:

- William Playfair (1759-1823) developed the histogram to display data.
- Florence Nightingale (1820-1910) kept records of the dead and injured during the Crimean War. She developed and used graphs extensively.
- John Tukey (1915-2000) invented the stemplot in 1972 and the boxplot in 1977.

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 9 MYP4 (p.194), por P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese, M. Humphries, 2008, Haese & Harris Publications.

En el libro para año 9 se establecen conexiones entre la estadística y las diferentes situaciones de la vida real. Es decir, se expone al lector las diferentes aplicaciones de la estadística como se muestra en la

**Figura 48.**

**Figura 48***Aplicaciones de la estadística*

In today's world vast quantities of information are recorded, such as the population of countries and where they live, the number of children in families, the number of people unemployed, how much wheat is produced, daily temperatures, and much more.

Many groups in our society use this information to help them discover facts, make decisions, and predict outcomes. Government departments, businesses and scientific research bodies are all groups in our society which use statistics.

The word **statistics** can be used in three different contexts:

- **Statistics** is a branch of mathematics that is concerned with how information is collected, organised, presented, summarised and then analysed so that conclusions may be drawn from the information.
- **Statistics** may be defined as a collection of facts or data about a group or population.
- The singular **statistic** refers to a quantity calculated from sample data. For example, the mean is a statistic, the range is a statistic.


*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 9 MYP4 (p.194), por P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese, M. Humphries, 2008, Haese & Harris Publications.

D) Actividades

A continuación, se presentan las actividades propuestas en el desarrollo de los capítulos 9 de ambos libros para abordar las medidas de dispersión. Estas actividades a grandes rasgos se dividen en cinco específicamente. En primer lugar, se plantea una actividad global al inicio de ambos capítulos la cual abarca los distintos temas a abordar en la sección. Esta actividad recibe el nombre de “Problema de apertura”, el cual está asociado a una situación problema donde el lector debe plantearse ciertos interrogantes que tendrán respuesta en el desarrollo del capítulo, como se muestra en la Figura 49 para el caso del grado 9 y en la Figura 50 para el grado 10.

**Figura 49***Problema de apertura 1*

**OPENING PROBLEM**



The heights of 1432 year 10 girls were measured to the nearest centimetre. The results were recorded in classes in the frequency table alongside.

**Things to think about:**

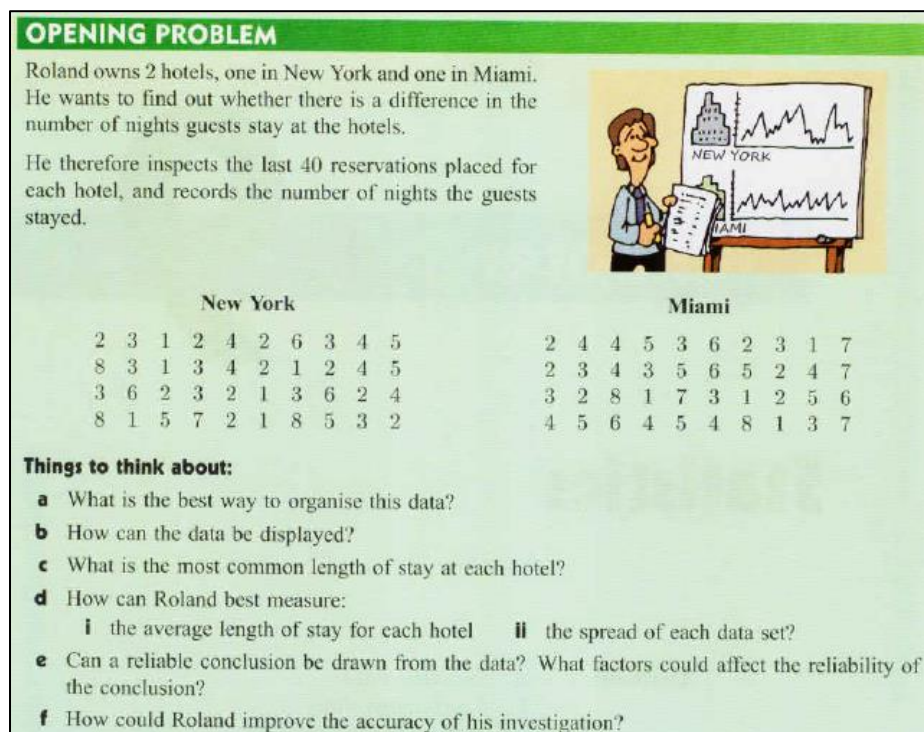
- Is the data categorical or quantitative (numerical)?
- Why was the data collected like this?
- Is the data discrete or continuous, and what are your reasons for making your decision?
- What does the height 140 - 149 actually mean?
- How should the data be displayed?
- How can the shape of the distribution be described?
- Are there any outliers in the data and how should they be treated?
- What is the best way of measuring the centre of the height distribution?
- What measure of the distribution's spread is appropriate?

Height	Frequency
120 - 129	1
130 - 139	0
140 - 149	34
150 - 159	139
160 - 169	478
170 - 179	642
180 - 189	117
190 - 199	20
200 - 209	1
<i>Total</i>	1432

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 9 MYP4 (p.194), por P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese, M. Humphries, 2008, Haese & Harris Publications.

## Figura 50

### Problema de apertura 2



*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 10E MYP5 (p.172), por M. Haese, M. Humphries, E. Kemp, P. Vollmar, 2014, Haese & Harris Publications.

En segundo lugar, conforme se avanza en el capítulo 9 de cada libro, se evidencian actividades guiadas en donde se realiza paso a paso los diferentes procedimientos involucrados, permitiendo así el cálculo de algunas medidas de dispersión como se muestra en el ejemplo 8 de la Figura 40. Por otro lado, en algunas de estas actividades los textos proponen el uso de calculadoras gráficas. Por ejemplo, en el libro para grado 10 se le pide al estudiante calcular la desviación estándar mediante el uso de este recurso tecnológico (ver Figura 51). Para los EBCM (2006), el uso de estas calculadoras gráficas permite extraer de los datos estadísticos buena parte de la información requerida. Por ende, el libro de texto escolar está teniendo en cuenta este tipo de herramientas en la comprensión e interpretación de la estadística.

## Figura 51

### Ejemplo 13

**Example 13** Self Tutor

Find the standard deviation of the data set:

16 11 9 15 14 22 18 17 22 12 16 10

**Casio fx-CG20**

```

1-Variable
x̄=15.1666666
Σx=182
Σx²=2960
σx=4.07907941
sx=4.2604595
n=12

```

**TI-84 Plus**

```

1-Var Stats
x̄=15.16666667
Σx=182
Σx²=2960
sx=4.2604595
σx=4.079079417
n=12

```

**TI-nspire**

```

OneVar data, 1: stat results
Title: One-Variable Statistics
x̄: 15.1667
Σx: 182
Σx²: 2960
"sx := St. Dev": 4.26046
"σx := σx": 4.07908
n: 12
MinX: 9

```

So, the standard deviation  $s \approx 4.08$ .

**GRAPHICS CALCULATOR INSTRUCTIONS**

Make sure you use the population standard deviation  $\sigma_x$ .

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 10E MYP5 (p.196), por M. Haese, M. Humphries, E. Kemp, P. Vollmar, 2014, Haese & Harris Publications.

En tercer lugar, como actividad para revisar la apropiación de conceptos y procedimientos, se plantean algunos “Ejercicios” donde se aumenta la dificultad progresivamente y busca que los estudiantes analicen el comportamiento de los conjuntos de datos. Por ejemplo, en el primer ejercicio se pide a los estudiantes realizar el cálculo del rango y rango Intercuartílico de algunos conjuntos de datos. En este ejercicio se potencia a su vez, la lectura de datos pues estos son presentados de distintas maneras a los estudiantes (ver Figura 52). Mas adelante, los ejercicios tratan de mostrar una situación problema de un contexto real donde se puede evidenciar la importancia y la relevancia de los conceptos (ver Figura 53).

**Figura 52**  
*Ejercicio 1*

**EXERCISE 9D**

1 For each of the following sets of data, find:

i the upper quartile

iii the interquartile range

a 2, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15

b 35, 41, 43, 48, 48, 49, 50, 51, 52, 52, 56

c

Stem	Leaf
1	3 5 7 7 9
2	0 1 3 4 6 7 8 9
3	0 1 2 7
4	2 6
5	1

Scale: 4 | 2 means 42

ii the lower quartile

iv the range.

d

Score	0	1	2	3	4	5
Frequency	1	4	7	3	3	1



*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 9 MYP4 (p.208), por P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese, M. Humphries, 2008, Haese & Harris Publications.


**Figura 53**  
*Ejercicio 2*

**2** The time spent by 24 people in a queue at a bank, waiting to be attended by a teller, has been recorded in minutes as follows:

0	3.2	0	2.4	3.2	0	1.3	0
1.6	2.8	1.4	2.9	0	3.2	4.8	1.7
3.0	0.9	3.7	5.6	1.4	2.6	3.1	1.6

**a** Find the median waiting time and the upper and lower quartiles.

**b** Find the range and interquartile range of the waiting time.



STATISTICS (Chapter 9) 209

**c** Copy and complete the following statements:

- i** “50% of the waiting times were greater than ..... minutes.”
- ii** “75% of the waiting times were less than ..... minutes.”
- iii** “The minimum waiting time was ..... minutes and the maximum waiting time was ..... minutes. The waiting times were spread over ..... minutes.”

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 9 MYP4 (p.209), por P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese, M. Humphries, 2008, Haese & Harris Publications.

En cuarto lugar, se presenta el apartado “Actividades” en donde el lector debe utilizar diferentes herramientas, en este caso un cronómetro para desarrollar la actividad. Este apartado solo se encuentra presente en el libro para grado 10 (ver Figura 54). En quinto lugar, en el apartado “Conjunto de revisión” se plantean algunas actividades que buscan reforzar los temas tratados, por ende, se encuentra finalizando el capítulo como se muestra en la Figura 55.

**Figura 54**  
*Actividad 2*

**ACTIVITY 2** **THE STOP WATCH CHALLENGE**


In this Activity, we will find out who in your class is best at timing 1 second.

**You will need:** A stop watch or the software provided.

**What to do:**

- 1 Start the timer, then attempt to stop the timer on exactly 1 second.
- 2 Repeat this process 30 times, and record your results. A sample set of results is shown alongside.
- 3 Find the mean and standard deviation of your results.
- 4 As a class, study the results of all the students.
  - a Was it more common for students to average less than one second, or more than one second?
  - b Discuss methods for determining whether one result is 'better' than another. For example, given the results shown alongside, would you say that Ian or Hayley performed better?
  - c Hence determine which student performed best in the challenge.

**STOP WATCH**



**Sample results**

1.09	0.96	0.96	1.15	1.02	1.01
0.92	0.97	0.96	0.95	1.05	0.91
1.09	1.01	1.04	0.91	0.97	1.01
0.98	1.03	0.96	1.01	0.98	1.03
1.02	1.01	0.98	0.97	1.02	1.01

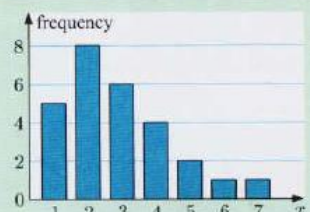
	Mean	Standard deviation
Ian	1.01	0.087
Hayley	0.97	0.036

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 10E MYP5 (p.198), por M. Haese, M. Humphries, E. Kemp, P. Vollmar, 2014, Haese & Harris Publications.

**Figura 55**

*Conjunto de revisión*

**REVIEW SET 9A**

- 1 Describe the data distribution shown:
 
- 2 A class of 20 students was asked "How many bedrooms are there in your house?" The following data was collected:  
3 2 3 2 2 4 3 4 2 3 2 1 2 2 3 2 4 2 3 2
  - a Is the data discrete or continuous?
  - b Are there any outliers in the data?
  - c Construct a dot plot to display the data.
- 3 Consider the set of data: 17 14 9 12 23 14 12 18 9 15 6 14 21 13 10
  - a Find the:
    - i mode
    - ii mean
    - iii median
    - iv range
    - v upper and lower quartiles
    - vi interquartile range.
  - b Draw a box-and-whisker plot to display the data.
- 4 The masses of eggs in a carton marked '50 g eggs' are recorded alongside.
 

Mass $m$ (g)	Frequency
$48 \leq m < 49$	1
$49 \leq m < 50$	1
$50 \leq m < 51$	16
$51 \leq m < 52$	4
$52 \leq m < 53$	3

  - a Construct a frequency histogram for the data.
  - b What is the modal class? Explain what this means.
  - c Describe the distribution of the data.
  - d Estimate the mean mass of an egg in the carton.

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 10E MYP5 (p.203), por M. Haese, M. Humphries, E. Kemp, P. Vollmar, 2014, Haese & Harris Publications.

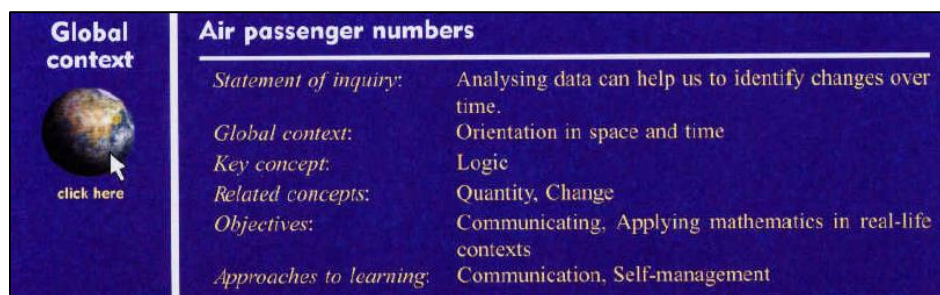
En general las actividades manejadas en los dos libros de texto escolar responden a las exigencias de la población educativa a la que se está dirigiendo el libro, es decir, tiene en cuenta el aspecto procedimental en los diferentes ejercicios que se plantean, y así mismo, se presentan actividades en donde la interpretación de las medidas de dispersión y gráficos sea el eje central. Por último, se resalta la constante sugerencia que se realiza para implementar herramientas tecnológicas, lo anterior teniendo en cuenta que al finalizar el PD uno de los exámenes que se debe presentar exige el uso de calculadora.

#### E) Metodología

Para comenzar en el libro escolar de grado 9 se presenta una metodología basada en cinco “Áreas de interacción”: enfoques para el aprendizaje, ambientes, comunidad y servicio, salud y educación social, por último, ingenio humano. En cuanto al libro de grado 10 se señala que el enfoque para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas que se implementa está constituido por seis “Contextos globales”: las identidades y relaciones, la innovación científica y técnica, la orientación en el espacio y tiempo, la globalización y sostenibilidad, la expresión personal y cultural, por último, la equidad y el desarrollo. En consecuencia, estas áreas de interacción y contextos globales permiten la conexión entre las diferentes áreas del conocimiento escolar y las matemáticas. Por ejemplo, al finalizar el capítulo 9 del libro para grado 10, se presenta una actividad interactiva donde objetivo es la aplicación de los conceptos matemáticos adquiridos en contextos de la vida real (ver Figura 56).

**Figura 56**

*Ejemplo contexto global*

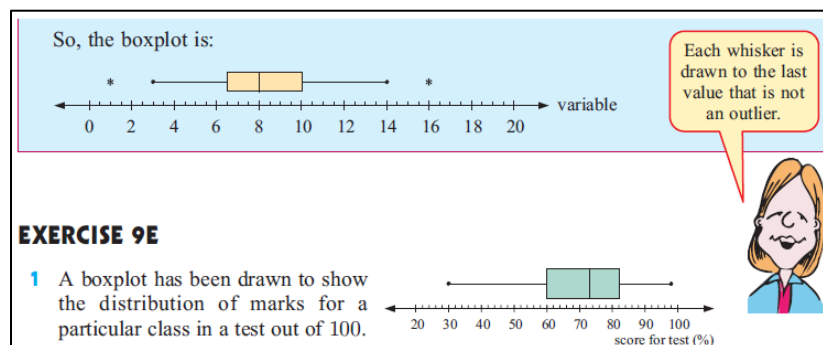


*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 10E MYP5 (p.203), por M. Haese, M. Humphries, E. Kemp, P. Vollmar, 2014, Haese & Harris Publications.

Otro de los aspectos metodológicos implementados por la editorial se basa en pequeños apartados con ilustraciones, en donde se señala información que le lector debe tener en cuenta para poder interpretar los conceptos, procedimientos, gráficos o tablas como se muestra en la

Figura 57. Además, al finalizar los libros se encuentra el “Glosario” con cada uno de los conceptos trabajados. En efecto, se maneja como metodología el afianzamientos de conceptos o procedimientos en el aprendizaje y enseñanza de la estadística.



**Figura 57***Apartado de síntesis 2*

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 9 MYP4 (p.211), por P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese, M. Humphries, 2008, Haese & Harris Publications.

Por otra parte, los libros de texto escolar establecen pequeñas secciones en donde se busca generar espacios de discusión (ver Figura 58). Esto es un escenario que promueve la argumentación, dando paso a la construcción de conocimiento colectivo entre las partes que lleguen a conformar la discusión. Lo anterior, promoviendo el desarrollo del primer componente de la cultura estadística: la comprensión, interpretación y argumentación de la información estadística, además del cuestionamiento y la actitud crítica (Contreras & Molina, 2019) (p.3).

**Figura 58***Discusión*

**DISCUSSION**

For data grouped in class intervals, can you explain why:

- the range cannot be found
- we cannot draw a boxplot?

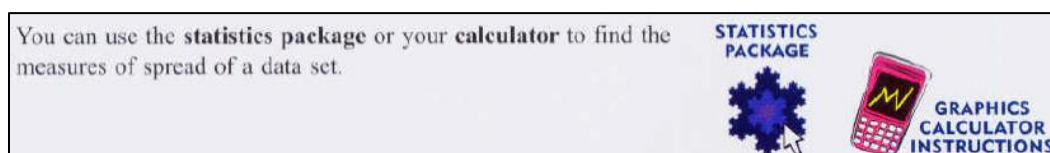
*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 9 MYP4 (p.212), por P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese, M. Humphries, 2008, Haese & Harris Publications.

Los textos pretenden ser un escenario para el trabajo en pro del desarrollo de habilidades y puesta en práctica de conocimientos en situaciones problema, por esto, se maneja una metodología lineal para el trabajo de los estudiantes que puede ser guiada por el maestro o por ellos mismos. Es decir, se parte de querer dar respuesta a una situación problema general que involucra varias temáticas, y por medio de una explicación basada en un ejemplo de cálculo desarrollado paso a paso, con la cual se espera el estudiante tenga comprensión y logre la habilidad esperada. Luego, enfrentarlo con ejercicios en los cuales se calcularán e interpretarán las medidas de dispersión asociadas a un conjunto de datos. Es importante resaltar que se evidencia una coherencia vertical en el desarrollo los dos capítulos la cual se va potenciando en el avance de este, pues nociones trabajadas con antelación se someten a

repaso y uso en las nuevas temáticas para observarlas como herramientas en la estadística. También se apoya el trabajo independiente con diferentes materiales didácticos como el selftutor, el paquete de estadísticas o la calculadora gráfica (ver Figura 59), y videoclips o enlaces (ver Figura 60). Lo cual, permite un apoyo interactivo para los estudiantes al momento de revisar algunas temáticas y sus respectivos ejemplos.

### Figura 59

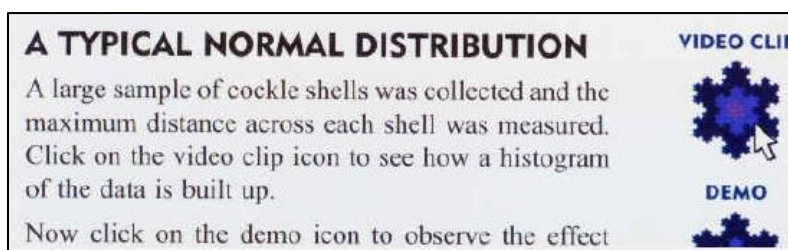
#### Material didáctico 1



*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 10E MYP5 (p.189), por M. Haese, M. Humphries, E. Kemp, P. Vollmar, 2014, Haese & Harris Publications.

### Figura 60

#### Material didáctico 2



*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 10E MYP5 (p.200), por M. Haese, M. Humphries, E. Kemp, P. Vollmar, 2014, Haese & Harris Publications.

### F) Lenguaje

A lo largo del capítulo se evidencia el uso de un lenguaje descriptivo y simple, se tiene en cuenta que es un texto en inglés y para los hablantes es de fácil lectura, así mismo, al momento de realizar traducciones estas no generan inconvenientes que puedan crear una incorrecta interpretación. Se resalta la implementación de símbolos como se puede evidenciar en la Figura 45. Lo anterior, teniendo en cuenta que para González & Vázquez (2004), pasar de este lenguaje simbólico al lenguaje habitual o natural es un proceso de abstracción importante en el desarrollo del pensamiento matemático.

En cuanto a un lenguaje argumentativo, los libros como se mencionó anteriormente proponen un apartado llamado “Discusión” (ver Figura 58) en donde se trabaja uno de los cinco procesos generales de la actividad matemática establecidos por los EBCM (2006): La comunicación. Las diferentes formas en las que esta discusión pueda dar cabida a argumentos con bases sólidas, dejan en evidencia un proceso de comprensión de las matemáticas, en este caso de las medidas de dispersión.

### G) Ilustraciones

Se observa el uso de caricaturas como modo de enfatización, donde se expone al lector explicaciones o sugerencias adicionales que complementan los conceptos o procedimientos abordados en la unidad (ver

Figura 57). Por otro lado, es común encontrar otro tipo de caricaturas las cuales ayudan a dar significado a los planteamientos, como se muestra en la Figura 53. Por último, aunque las gráficas y tablas no son ilustraciones, en ambos libros se usan constantemente. De esta manera, se da una ejemplificación de la actividad o problema que se está presentando (ver Figura 49, Figura 55 y



Figura 57). Estos gráficos y tablas tienen como fin poder identificar qué tipo de información es relevante o irrelevante, lo cual, para Blanco (2018) es indispensable en la introducción al mundo de la estadística.

### H) Motivación

Los libros motivan a los estudiantes en dos oportunidades: por un lado, genera espacios para la discusión entre alumnos. Por el otro, plantea escenarios de investigación en los cuales los escolares pueden explorar problemas de aplicación y profundizar en la temática (ver Figura 61). Cabe resaltar que también se muestra la conexión de las matemáticas, en este caso la estadística, con el avance del conocimiento y su historia (ver Figura 47).

### Figura 61

#### *Discusión e investigación*

DISCUSSION	
	<p>For data grouped in class intervals, can you explain why:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• the range cannot be found</li> <li>• we cannot draw a boxplot?</li> </ul>
INVESTIGATION	
	<b>THE EFFECT OF OUTLIERS</b>
<p>In a set of data, an <b>outlier</b> or <b>extreme value</b> is a value which is much greater than or much less than the other values. In this investigation we will examine the effect of an outlier on the two measures of central tendency.</p>	
<p><b>What to do:</b></p>	
<p><b>1</b> Consider the set of data: 4, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 9, 10. Calculate:</p> <p style="margin-left: 40px;"><b>a</b> the mean                      <b>b</b> the median.</p>	
<p><b>2</b> Introduce the extreme value 100 to the data set. It is now 4, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 100. Calculate:</p> <p style="margin-left: 40px;"><b>a</b> the mean                      <b>b</b> the median.</p>	
<p><b>3</b> Comment on the effect that this extreme value has on:</p> <p style="margin-left: 40px;"><b>a</b> the mean                      <b>b</b> the median.</p>	
<p><b>4</b> Which of the measures of central tendency is most affected by the inclusion of an outlier? Discuss your findings with your class.</p>	

*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 9 MYP4 (p.205), por P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese, M. Humphries, 2008, Haese & Harris Publications.

## I) Tecnologías de la información y de la comunicación

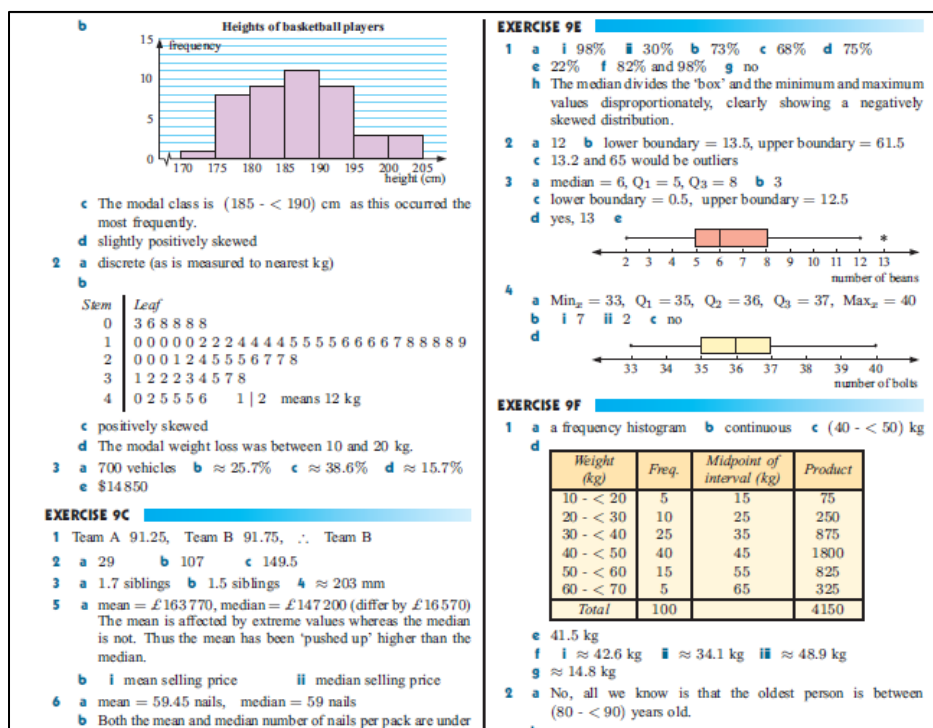
El texto escolar para grado 9 trae incluido un CD Interactivo que brinda al estudiante diferentes herramientas como: el libro digital, imprimibles, hojas de cálculo, videoclips, software, simulaciones, entre otras. El libro de grado 10 al ser electrónico, maneja vínculos interactivos que permiten acceder a software gráficos, paquetes de estadística, páginas imprimibles, etc. Por último, ambos libros de texto escolar presentan la ayuda interactiva Selftutor la cual mediante un audio realiza explicaciones de conceptos, actividades o ejercicios.

## J) Evaluación

En general no se establece una metodología de evaluación, sin embargo, en el apartado “Conjunto de revisión” se presentan ejercicios de profundización que poseen un nivel mayor de dificultad los cuales retan al estudiante. Así mismo, al finalizar el libro se muestra la respuesta de cada una de las actividades, ejercicios y problemas que se planteó en el desarrollo de los capítulos (ver Figura 62). Lo anterior, promoviendo un espacio de autoevaluación en donde el lector puede resolver los problemas y luego ir a verificar si su respuesta es correcta, lo cual, estará evaluando los conocimientos adquiridos.

**Figura 62**

*Respuestas*



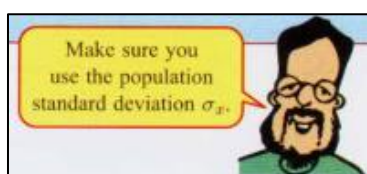
*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 9 MYP4 (p.573), por P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese, M. Humphries, 2008, Haese & Harris Publications.

### K) Enfatización

Los textos emplean caricaturas con nubes de diálogo las cuales presentan información adicional para resolver una situación problema o simplemente recordar alguna temática trabajada con antelación (ver Figura 63). Por otra parte, se enfatiza en los contenidos mediante el glosario del libro y el uso constante de gráficos (diagrama de cajas y bigotes, histogramas, etc) y tablas.

### **Figura 63**

*Apartado de síntesis 2*



*Nota.* Tomado de Mathematics for the international student 10E MYP5 (p.5), por M. Haese, M. Humphries, E. Kemp, P. Vollmar, 2014, Haese & Harris Publications.

### L) Recursos generales

En resumen como material audiovisual y manipulativo, ambos libros manejan los recursos mencionados en la categoría “Tecnologías de la información y la comunicación”.

## **5.4 Editorial Libros & Libros S.A.**

Los tres libros de la editorial Libros & Libros S.A. presentan las matemáticas desde una construcción del conocimiento en contextos significativos, donde su estructura se presenta de la siguiente manera: se exponen 4 unidades de trabajo que constan del desarrollo lineal de los pensamientos matemáticos establecidos por el currículo colombiano (numérico, variacional, geométrico, métrico y aleatorio). Además del trabajo con las Prueba Saber del estado y un pequeño preuniversitario. Cabe resaltar que en este análisis no se tiene en cuenta el libro de la editorial para grado once, dado que en su revisión no se exhiben las medidas de dispersión en contextos de una sola variable. A continuación, se presenta el análisis correspondiente teniendo en cuenta la estructura del modelo exhaustivo:

### A) Objetivos

En general los tres libros al inicio de cada unidad presentan los estándares que se están teniendo en cuenta para el desarrollo de las temáticas, los procesos matemáticos que allí se involucran, las competencias matemáticas, y los indicadores de logro según cada pensamiento. Inicialmente para el análisis del libro de grado octavo, se centra la atención en la unidad 3, específicamente en el desarrollo del pensamiento aleatorio. Al inicio de la unidad se percibe que el trabajo desarrollado está dirigido a la medidas de centralización, esto

teniendo en cuenta los indicadores de logro y el estándar presentado. Es decir, se da a entender que las medidas de dispersión no serán un tema a trabajar en este libro.

Por otro lado, para el análisis del libro correspondiente a grado noveno el desarrollo se va a llevar a cabo en la unidad 2. Los indicadores de logro para este libro muestran que el tema principal serán las medidas de centralización y posición. Por ende, al igual que en el libro anterior se intuye que las medidas de dispersión no se presentarán. Por último, el texto escolar dirigido a grado décimo, específicamente en la unidad 5, se establece el desarrollo de los estándares que se muestran en la Figura 64 y algunos indicadores de logro encaminados a conceptos y procesos de temas específicos de la probabilidad. Por consiguiente, sería el único libro de la editorial que presenta las medidas de dispersión como un tema a trabajar.

**Figura 64**

*Estándares décimo*

ESTÁNDARES	
<b>PENSAMIENTO NUMÉRICO</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compara y contrasta las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.</li> </ul>
<b>PENSAMIENTO GEOMÉTRICO</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Usa argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.</li> </ul>
<b>PENSAMIENTO MÉTRICO</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diseña estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.</li> </ul>
<b>PENSAMIENTO ALEATORIO</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Interpreta nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable aleatoria, distribución de frecuencias, parámetros y estadísticos.</li> <li>• Usa comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad).</li> <li>• Interpreta conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.</li> </ul>
<b>PENSAMIENTO VARIACIONAL</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Analiza las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.</li> </ul>

*Nota.* Tomado de Glifos 10 (p.286), por S. Arévalo, L. Garzón, J. Rodríguez, J. Rangel, B. Perafán, S. Chávez, R. Díaz, J. Jiménez, N. Jiménez, 2008, Libros & Libros S.A.

En general los libros muestran una coherencia entre los EBCM (2006) y los indicadores de logro que se plantean. Además de los diferentes documentos curriculares colombianos, y una presentación amplia que exhibe al lector la estructura de los temas. Esta adaptación también se muestra en la Guía del docente de cada libro. Es decir, plantea “objetivos” acordes al nivel académico de cada estudiante.

## B) Contenidos

En la unidad 3 del libro para grado octavo no se maneja en los contenidos la medidas de dispersión, incluso en la tabla de contenidos tampoco se presenta. No obstante, en el apartado del libro “¿Qué más puedo aprender?”, en donde se exponen algunos conceptos o



procedimientos que el lector puede utilizar para apoyar la comprensión de temáticas posteriores en el libro, se presentan las medidas de dispersión. En un primer instante, se expresa la utilidad de las medidas de dispersión, luego se presenta la desviación media con un ejemplo y algunos ejercicios de práctica (ver Figura 65). Por último, la varianza con un ejemplo y la desviación estándar (ver Figura 66).

### Figura 65

*Definición desviación media octavo*

**Medidas de dispersión**

Las notas de dos estudiantes fueron: 50, 50, 20 y 40, 40, 40 respectivamente. ¿Es posible concluir que su rendimiento fue exactamente igual, dado que la valoración final del curso se hace de acuerdo al promedio?

Aunque el promedio de ambos estudiantes es el mismo, el último resultado de uno de ellos fue notablemente más bajo que los anteriores. El otro estudiante, en cambio, siempre obtuvo los mismos resultados, es decir, hubo una **menor dispersión** en sus calificaciones.

Las medidas de dispersión indican qué tan lejos o cerca se encuentran unos datos de otros en una distribución de frecuencias.

La medida representativa más utilizada para analizar la dispersión de datos es la media aritmética. Respecto de ella se calculan: la desviación media, la varianza y la desviación estándar.

**DESVIACIÓN MEDIA (D. M.)**

Es una medida de dispersión que indica la media de las distancias de los datos a la media aritmética. Se obtiene sumando las distancias de los datos respecto a la media y luego dividiendo por el número de datos.

**Ejemplo**

*Nota.* Tomado de Glifos 8 (p.234), por S. Arévalo, L. Garzón, B. Perafán, J. Rangel, S. Chávez, O. Silva, J. Rodríguez, R. Díaz, J. Jiménez, M. López, 2008, Libros & Libros S.A.

**Figura 66***Definición varianza y desviación estándar*

**¿Qué más puedo aprender?**

**VARIANZA ( $\sigma^2$ )**

La **varianza** es una medida de dispersión que se halla mediante la suma de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media dividida entre el número de datos.

**Ejemplo**

¿Cuál es la **varianza** de los datos: 67, 43, 75, 39 y 62?

**Solución**

Primero se calcula el promedio de los datos:

$$\bar{x} = \frac{67 + 43 + 75 + 39 + 62}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{286}{5} = 57,2$$

Después se halla la diferencia de cada calificación con la media y luego se eleva la cuadrado.

$x - \bar{x}$	$ x - \bar{x} ^2$
$39 - 57,2 = -18,2$	331,24
$43 - 57,2 = -14,2$	201,64
$62 - 57,2 = +4,8$	23,04
$67 - 57,2 = +9,8$	96,04
$75 - 57,2 = +17,8$	316,84
0	968,80

La **varianza** es el promedio de estos cuadrados:

$$\sigma^2 = \frac{968,8}{5} = 193,76 \text{ puntos}$$

**DESVIACIÓN ESTÁNDAR ( $\sigma$ )**

Es una medida de dispersión que indica qué tan alejado se encuentra un conjunto de datos en relación con su promedio.

Su valor se obtiene extrayendo la raíz cuadrada de la varianza.

Por ejemplo

Halla la desviación estándar de la situación anterior, equivale a extraer la raíz cuadrada de 193,76.

Es decir:

$$\sigma = \sqrt{193,76} = 13,91$$

*Nota.* Tomado de Glifos 8 (p.235), por S. Arévalo, L. Garzón, B. Perafán, J. Rangel, S. Chávez, O. Silva, J. Rodríguez, R. Díaz, J. Jiménez, M. López, 2008, Libros & Libros S.A.

En el libro para grado noveno sucede lo mismo que en el anterior texto, las medidas de dispersión no son un tema que se presenta como tal en el desarrollo de la unidad 2. Sin embargo, al finalizar la unidad en la sección “¿Qué más puedo aprender” se presenta de nuevo el concepto de la desviación media, esta vez se muestra su fórmula y un ejemplo (ver Figura 67). Seguido se expone el coeficiente de Pearson mediante una fórmula, y un ejemplo con su respectiva gráfica que representa el resultado obtenido (ver Figura 68).



**Figura 67***Definición de desviación media noveno*

**Desviación media (Dm)**

Es una medida de dispersión que hace referencia a la media de las diferencias en valor absoluto de los valores de la variable a la media aritmética.

La **desviación media** se obtiene sumando las distancias de los datos respecto a la media y luego dividiendo por el número de datos. Simbólicamente:

$$Dm = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |xi - \bar{x}|$$

Por ejemplo, dados los siguientes datos, halla la desviación media:

Datos: 17, 21, 19, 23, 35, 41, 50, 39

Se construye la tabla donde se presenta la distancia de cada dato a la media.

x	x - $\bar{x}$	
17	17 - 30,6  = 13,6	$\bar{x} = \frac{245}{8}$
19	19 - 30,6  = 11,6	
21	21 - 30,6  = 9,6	$\bar{x} = 30,625$
23	23 - 30,6  = 7,6	
35	35 - 30,6  = 4,4	$Dm = \frac{85}{8}$
39	39 - 30,6  = 8,4	
41	41 - 30,6  = 10,4	$Dm = 10,625$
50	50 - 30,6  = 19,4	

$\Sigma x = 245$      $\Sigma |x - \bar{x}| = 85$

El promedio de las desviaciones respecto a la media es de 10,625 puntos.

*Nota.* Tomado de Glifos 9 (p.181), por S. Arévalo, L. Garzón, B. Perafán, J. Rangel, S. Chávez, O. Silva, J. Rodríguez, R. Díaz, J. Jiménez, M. López, 2008, Libros & Libros S.A.

**Figura 68***Coficiente de Pearson*

**COEFICIENTE DE PEARSON**

$$A\sigma_1 = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma} \quad \text{ó} \quad A\sigma_2 = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma}$$

El valor obtenido corresponde al grado de deformación, es decir, cuanto más alejado se encuentre de 0 más asimétrica será.

**Ejemplo**

Calcula las diferentes medidas de asimetría utilizando los siguientes datos.

Media ( $\bar{x}$ ) = 5,3      Moda (Mo) = 4  
Mediana (Me) = 5      Desviación estándar ( $\sigma$ ) = 2,47

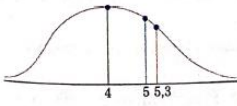
**Solución**

$$A\sigma_1 = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma} = \frac{5,3 - 4}{2,47} = \frac{1,3}{2,47} = 0,52$$

$$A\sigma_2 = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma} = \frac{3(5,3 - 5)}{2,47} = \frac{3(0,3)}{2,47} = 0,36$$

En la gráfica se observa 0,36 y 0,52. Esto indica que la distribución es ligeramente asimétrica positiva dado que:  $Mo < Me < \bar{x}$

$4 < 5 < 5,3$



*Nota.* Tomado de Glifos 9 (p.181), por S. Arévalo, L. Garzón, B. Perafán, J. Rangel, S. Chávez, O. Silva, J. Rodríguez, R. Díaz, J. Jiménez, M. López, 2008, Libros & Libros S.A.

Por último en el libro para grado décimo, no se exhibe en la tabla de contenidos las medidas de dispersión. No obstante, en el apartado “Caracterización de una variable cuantitativa” de la unidad 5, se presentan como principales medidas de dispersión el rango, la desviación media, la varianza y la desviación estándar:

### Figura 69

#### *Principales medidas de dispersión*

Las cantidades que describen la forma como los datos están en un conjunto relativamente cercanos o relativamente lejanos reciben el nombre de **medidas de dispersión**.

Las principales medidas de dispersión son:

**Rango**  
El rango o la amplitud de variación de un conjunto de números es la diferencia entre los números mayor y menor del conjunto.

**Desviación media**  
Esta medida es más acorde que la del rango, puesto que involucra todos los valores del conjunto de observaciones corrigiendo la desviación. Describe la dispersión respecto a la media de los datos. Esta medida se obtiene calculando la media aritmética de la muestra, y luego realizando la sumatoria de las diferencias de todos los valores con respecto de la media (en valor absoluto).  
Luego se divide por el número de observaciones, simbólicamente:

$$DH = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

**Varianza**  
Es una medida que pretende establecer la cercanía de cada uno de los datos con respecto a la media. Se calcula como el promedio del cuadrado de las distancias entre cada observación y la media aritmética. Para datos presentados en tabla de frecuencias la varianza se calcula mediante la fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n}$$

**Desviación estándar**  
La desviación estándar es otra medida de dispersión. De las medidas de dispersión es la que se usa con mayor frecuencia, el número  $\sigma$  proporciona una buena idea de cómo están distribuidos los datos alrededor de la media. Se calcula con la siguiente fórmula:

$$\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n}}$$

*Nota.* Tomado de Glifos 10 (p.320), por S. Arévalo, L. Garzón, J. Rodríguez, J. Rangel, B. Perafán, S. Chávez, R. Díaz, J. Jiménez, N. Jiménez, 2008, Libros & Libros S.A.

En resumen se puede decir que los libros para grado octavo y noveno no presentan las medidas de dispersión como un tema principal que se debería abordar en este nivel académico, sino, como un temática adicional que abre al lector más formas de interpretar los datos estadísticos. Cabe resaltar que la introducción del rango como medida de dispersión solo se da hasta grado noveno, esto siendo distinto en el manejo de contenidos, teniendo en cuenta que comúnmente es la primer medida que se le presenta al estudiante en el colegio.

Adicionalmente, entre los tres libros se percibe un orden secuencial en la presentación de los contenidos. Por ejemplo, en grado octavo las medidas de dispersión se presentan con un lenguaje habitual y sin la necesidad de presentar fórmulas (ver Figura 66). Ya en grado noveno se ve la introducción de las fórmulas correspondientes para encontrar la desviación media y el coeficiente de Pearson (ver Figura 67), por último, en grado décimo se hace un pequeño resumen de todas las medidas de dispersión presentadas en los dos libros anteriores con sus respectivas fórmulas (ver Figura 69). En general, los contenidos de los tres libros se acoplan a los indicadores de logro que cada unidad establece, siendo también el libro para grado décimo uno de los pocos textos escolares en presentar el coeficiente de Pearson como medida de dispersión. Lo anterior, siendo de gran importancia en el análisis de datos. Para Sarmiento & Fernández (2014), el coeficiente de Pearson o coeficiente de variación media de Pearson es el más fiable e indispensable de las medidas de dispersión ya que está expresado por dos estadísticas objetivas y representativas de un conjunto de datos (la desviación típica y la media).

### C) Conexiones

Los libros establecen conexiones con la vida real de los estudiantes teniendo en cuenta que al final de los textos escolares para grado octavo y noveno, los alumnos encontrarán un simulacro de las Pruebas Saber del estado colombiano. Para los estudiantes de grado décimo que ya están próximos a ingresar a la universidad, el libro plantea un preuniversitario al finalizar las unidades (ver Figura 70). Es decir, los libros de la editorial están teniendo en cuenta los contextos de la vida real en donde los estudiantes aplicarán las matemáticas que se desean enseñar; lo cual va en línea con lo establecido por Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), donde se establece que el contexto de los alumnos es indispensable en el desarrollo de aptitudes, competencias y herramientas para resolver problemas matemáticos.

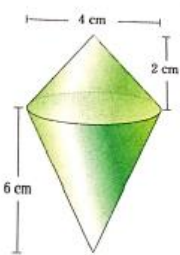
**Figura 70**  
Preuniversitario

**PRE** universitario

1. Traza una línea que divida el cuadro en dos partes iguales, cada una de las cuales contenga la misma cantidad de 1 y 2.

1	2	1	2	1	1
1	1	2	2	1	2
2	2	2	1	2	1
1	2	1	1	2	1
2	2	1	2	1	2
1	1	2	2	1	2

2. Halla las coordenadas del incentro y el circuncentro del triángulo de vértices: A (4, 0), B (1, 6) y C (-3, -1).
3. El vértice de un paralelogramo está en (4, 4), sus diagonales se intersecan en (5, 1) y los lados tienen pendientes 1 y  $-\frac{1}{7}$ . Ubica los otros vértices.
4. Calcula la distancia del punto a la recta en cada caso.
  - a.  $y = 3x + 4$ , (2, 4)
  - b.  $4x - 5y = 1$ , (-2, 0)
  - c.  $-6x + 7y - 1 = 0$ , (1, 1)
  - d.  $y = 5$ , (3, 6)
8. El radio de la base de un cono mide 0,21 m y su altura equivale a 0,28 m. ¿Cuál es el área superficial? ¿Cuál es el volumen?
9. Encuentra el área y el volumen del trompo de la figura.



10. Si el volumen de un cono es de 243 cm<sup>3</sup>, encuentra la altura y el radio si se supone que estas medidas son iguales.
11. Calcula el volumen (en m<sup>3</sup>) aproximado de la Tierra tomando como radio 6500 km y  $\pi = 3,14$ . Calcula luego el peso de la Tierra sabiendo que la densidad media es 5,5 kg/dm<sup>3</sup>. Expresa estos resultados en forma científica con dos cifras decimales.

*Nota.* Tomado de Glifos 10 (p.356), por S. Arévalo, L. Garzón, J. Rodríguez, J. Rangel, B. Perafán, S. Chávez, R. Díaz, J. Jiménez, N. Jiménez, 2008, Libros & Libros S.A.

#### D) Actividades

En general los libros manejan diferentes apartados con actividades, ejercicios o problemas. Inicialmente luego de la presentación de temáticas, los libros plantean un ejemplo en donde se exponga el uso de las fórmulas y se de a comprender la obtención de resultados, algunos de estos ejemplos entrarían en la definición de actividad que se ha tomado en este trabajo. Es necesario precisar que se presenta un error de lenguaje en su presentación, pues no se expresa la desviación media en las unidades del conjunto de datos (ver Figura 71).

**Figura 71**  
Actividad inicial

**Ejemplo**

Halla la desviación media de las edades de un grupo de amigos:  
 $\{23, 19, 46, 35, 21, 50\}$

**Solución**

$x$	$ x - \bar{x} $	
19	$ 19 - 32,3  = 13,3$	$\bar{x} = \frac{194}{6}$ $\bar{x} = 32,3$
21	$ 21 - 32,3  = 11,3$	
23	$ 23 - 32,3  = 9,3$	
35	$ 35 - 32,3  = 2,7$	D.M. = $\frac{68}{6}$
46	$ 46 - 32,3  = 13,7$	
50	$ 50 - 32,3  = 17,7$	D.M. = 11,3
$\Sigma x = 194$	$\Sigma  x - \bar{x}  = 68$	

El promedio de las desviaciones con respecto a la media es de 11,3 puntos.

*Nota.* Tomado de Glifos 8 (p.234), por S. Arévalo, L. Garzón, B. Perafán, J. Rangel, S. Chávez, O. Silva, J. Rodríguez, R. Díaz, J. Jiménez, M. López, 2008, Libros & Libros S.A.

Al terminar cada unidad los textos presentan el apartado “Piensa y aplica” con dos tipos de actividades: en un primer momento se trabajan actividades en donde el mismo libro le brinda la solución al estudiante, siendo así una actividad guiada (ver Figura 72). En un segundo momento, se exhiben actividades que el alumno debe desarrollar por sí mismo aplicando lo expuesto en la unidad (ver Figura 73). Concretamente en este apartado se clasifican algunas actividades como de repaso, para aclarar conocimientos, algunas de uso y transferencia de conocimientos, y otras de profundización (ver Figura 73). Los libros establecen que estas actividades pueden verse como problemas rutinarios, problemas no rutinarios simples y problemas no rutinarios complejos (ver Figura 74). Lo anterior, dando a entender que la editorial maneja la resolución de problemas como actividad.



Figura 72

Apartado “Piensa y aplica”

**Piensa y aplica**

### EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Manuel decide averiguar entre sus compañeros de curso, el consumo de gas en  $m^3$ , que aparece registrado en el recibo de Gas Natural. Los datos quedaron registrados en la siguiente tabla:

52	43	30	38	30	42	21	46	39	37
34	46	32	58	41	50	23	30	21	30

a. Representa la información mediante un histograma y un polígono de frecuencias.  
b. Calcula las medidas de tendencia central y de dispersión.

**Solución**

a. La información recolectada se agrupa en intervalos y se construye la tabla correspondiente.

Consumo en $m^3$	Frecuencia absoluta
21 a 25	3
26 a 30	4
31 a 35	2
36 a 40	3
41 a 45	3
46 a 50	3
51 a 55	1
56 a 60	1
	20

Luego, se ubican el eje  $x$  de un semiplano cartesiano los intervalos y sobre el eje  $y$  las frecuencias de la siguiente manera:

### EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Los siguientes datos corresponden a las deudas en miles de pesos, de cuentas pendientes:

77	70	65	62	53	78	41	48	74	63
64	38	69	79	76	55	59	69	78	75
34	68	56	61	41	83	54	49	68	48
64	84	74	68	73	69	31	69	78	64

a. Elabora una distribución de frecuencias con 7 intervalos.  
b. Calcula la varianza.  
c. Calcula la desviación estándar.

2. Tres profesores registraron una calificación media en los exámenes de cálculo de 71, 78, 89 con desviaciones estándar de 9, 8, 7. Sus clases están formadas por 30, 25 y 15 estudiantes, respectivamente.

a. Determina la calificación media y la desviación estándar para el conjunto de los 70 estudiantes.  
b. ¿Cuáles serían estos valores si todos los cursos tuvieran el mismo número de estudiantes?

3. Dada la siguiente distribución:

Intervalos (clases)	Frecuencia $f$
10,1 – 16	13
16,1 – 22	19
22,1 – 28	25
28,1 – 34	31
34,1 – 40	37
40,1 – 46	43

*Nota.* Tomado de Glifos 10 (p.321), por S. Arévalo, L. Garzón, J. Rodríguez, J. Rangel, B. Perafán, S. Chávez, R. Díaz, J. Jiménez, N. Jiménez, 2008, Libros & Libros S.A.

Figura 73

Apartado “Piensa y aplica 2”

**PIENSA**

De una empresa se analizan las ventas semanales reportadas por sus vendedores en las sucursales A y B.

Sucursal A		Sucursal B	
Vendedores	Ventas	Vendedores	Ventas
Luis	600 000	Mauricio	400 000
Alex	800 000	Angela	380 000
Pablo	720 000	Conrado	350 000
Alejandro	680 000	Francisco	600 000
Sandra	1 000 000	Mateo	1 000 000
Antony	920 000	Patricia	980 000

a. De acuerdo con las tablas analiza:  
b. La media de ventas por sucursal.  
c. Rango por sucursal.  
d. ¿Cuál sucursal presenta la mayor dispersión en las ventas?  
e. Para cada sucursal indica los vendedores que están por debajo del promedio.

**CLARA TUS CONOCIMIENTOS**

1. Describe la forma de la gráfica de una distribución normal.  
2. ¿Es posible que la varianza sea menor que la desviación estándar para un conjunto de datos? Justifica tu respuesta.  
3. Explica cómo difiere el cálculo de la desviación estándar de los datos que están en una tabla de frecuencias del cálculo de la desviación estándar de datos que no lo están.  
4. Explica cuándo se debe usar un histograma como representación gráfica de un conjunto de datos.

**USA Y TRANSFIERE**

En una encuesta se establece el número de carros vendidos en el mes de abril por 10 concesionarios.

Concesionario	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
No. de	44	33	43	54	41	46	50			

De acuerdo con esta información:

a. Halla la media de carros vendidos durante el mes de abril.  
b. ¿Cuál es el rango de esta distribución?  
c. ¿Cuáles son los concesionarios que están por encima de la media?  
d. ¿Qué concesionarios deben incrementar su publicidad para alcanzar el promedio mensual?  
e. Calcula la varianza de datos.  
f. ¿Cuál es el promedio de las desviaciones con respecto a la media?  
g. Se puede afirmar que el concesionario F está más cerca del promedio mensual que el concesionario E.

2. Dado el conjunto de datos {2, 4, 5, 6, 9, 10}:

a. Calcula la desviación estándar.  
b. Suma 3 a cada dato y vuelve a calcular  $S$ . ¿Cómo son los resultados de  $a$  y  $b$ ?  
c. Ahora resta 1 a cada dato y nuevamente calcula  $S$ . ¿Qué efecto produce esta resta sobre  $S$ ?  
d. Multiplica cada dato de  $a$  por 2 y encuentra el valor de  $S$ . ¿Qué puedes concluir?

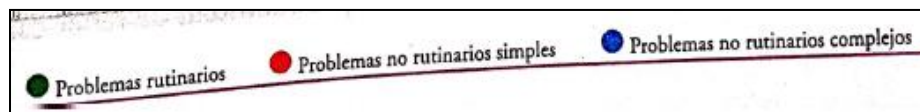
**PROFUNDIZA**

1. Halla el rango en cada caso:  
a. En una prueba de aptitud verbal la nota más alta fue 125 puntos y la más baja 37.  
b. El mejor encendedor de un equipo de baloncesto anotó 48 puntos y el jugador que hizo menos cestas anotó 6 puntos.  
2. Determina la distribución de probabilidad de los extremos de un intervalo alatorio de confianza  $1-\alpha$  para la media de una  $N(\mu; \sigma)$  de varianza conocida.  
3. La demanda diaria de un artículo tiene distribución normal de media 98. Determina un intervalo de confianza 0,95 para la varianza poblacional si durante seis días las ventas han sido: 95; 98; 100; 96; 98 y 99.

Nota. Tomado de Glifos 10 (p.322), por S. Arévalo, L. Garzón, J. Rodríguez, J. Rangel, B. Perafán, S. Chávez, R. Díaz, J. Jiménez, N. Jiménez, 2008, Libros & Libros S.A.

**Figura 74**

*Clasificación actividades*



Nota. Tomado de Glifos 10 (p.322), por S. Arévalo, L. Garzón, J. Rodríguez, J. Rangel, B. Perafán, S. Chávez, R. Díaz, J. Jiménez, N. Jiménez, 2008, Libros & Libros S.A.

Al finalizar en los apartados “Taller”, “Potencia tu pensamiento matemático” y el Preuniversitario, se muestran diferentes actividades donde se aplican las medidas de dispersión. Los textos escolares de la editorial se centran en la resolución de problemas, por ejemplo, al inicio de cada unidad se presenta una “Situación problema” donde el alumno debe analizar ciertas preguntas que se le plantean y explorar sus conocimientos matemáticos (ver Figura 75).

**Figura 75**

*Situación problema*

Pensamiento aleatorio

## Situación problema

Lee las siguientes situaciones:

**Situación 1**

Antes de realizar una fiesta en su casa, Magda realizó una encuesta sobre la preferencia musical de los invitados que asistirían. El resultado fue:

Tipo de música	Votos
Rock en español	8
Salsa	12
Reggaeton	21

**Situación 2**

Aldo quiere organizar una piñata para celebrar el cumpleaños de su hermanita. Él quiere hacer un bastón para romper la piñata, de tal forma que este no quede muy corto para el niño más pequeño, ni muy largo para el niño más alto. La estatura en metros de cada uno de los invitados es la siguiente:

1,10	1,16	1,12	1,39	1,98
1,09	1,11	1,10	1,15	1,21

## Analiza

**a.** ¿Qué decisión debe tomar Magda para seleccionar la música de la fiesta que está organizando?

**b.** ¿De qué herramientas matemáticas puede valerse Aldo para tomar la decisión sobre la medida del bastón?

## EXPLORA TUS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS

**A** ¿Qué es un parámetro estadístico y para qué sirve?

**B** ¿Cuál es la medida de centralización que más usas?

**C** ¿Cómo se calcula la media aritmética?

**D** ¿Por qué cualquier medida de centralización no siempre es útil para resolver una situación?

**E** ¿Podrías presentar un ejemplo en el que la mediana sea un dato útil para tomar una decisión?

*Nota.* Tomado de Glifos 8 (p.225), por S. Arévalo, L. Garzón, B. Perafán, J. Rangel, S. Chávez, O. Silva, J. Rodríguez, R. Díaz, J. Jiménez, M. López, 2008, Libros & Libros S.A.

En cada unidad se presenta la sección “Competencias ciudadanas” en donde el alumno debe desarrollar ciertos proyectos que traen vinculada una situación problema, además, estos proyectos vienen relacionados con ciertas competencia ciudadanas donde se exhibe unas matemáticas ciudadanas (ver Figura 76). El trabajo mediante proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística, es una sugerencia realizada por varios documentos curriculares y algunos autores. Para Blanco (2018), el uso de proyectos muestra un contexto a los estudiantes y simula el proceso general que involucra un estudio estadístico. Por último, algunos conceptos van acompañados de pequeños ejercicios presentados en el apartado “Práctica”, como su nombre lo indica su función consiste en llevar a la práctica los procedimientos de la temática (ver Figura 77).

**Figura 76**

*Competencias ciudadanas*

## Proyectos y preguntas para unas matemáticas ciudadanas

### Recursos

- Valores éticos para la convivencia. Luis José González Álvarez, Germán Marquínez. Editorial El Búho Ltda. Bogotá, 1999.

### OBJETIVO

El objetivo principal de este proyecto es educar en el valor ético y social de la solidaridad, entendido como la “aceptación de un vínculo con otras personas, cercanas o lejanas, que se encuentran en situación de necesidad, el cual nos impone la obligación moral de ayudarlas a salir de dicha situación” (Luis José González, Germán Marquínez Argote, 1999).

### PROBLEMA

Aunque los humanos somos, en esencia, seres sociales, no todas las personas se conmueven ante el sufrimiento que afecta o puede afectar a nuestros semejantes. Algunos se muestran solidarios únicamente con nuestros familiares y amigos, pero no con grupos desconocidos o lejanos a su círculo social.

El comportamiento individualista y egoísta, es decir, el comportamiento contrario al solidario, afecta la calidad de vida de cualquier sociedad; así por ejemplo, la despreocupación por los desempleados, por los desplazados y por las personas afectadas por las catástrofes naturales, trae consigo el incremento de los problemas sociales, así como el deterioro de las condiciones de convivencia.

### PROPÓSITOS CIUDADANOS

Pensar y actuar de manera solidaria con los demás es una tarea compleja pero realizable. Requiere el compromiso de todos y cada uno de nosotros. Un compromiso que debemos atender empezando por nuestra familia y entorno social hasta extenderlo a toda la sociedad.

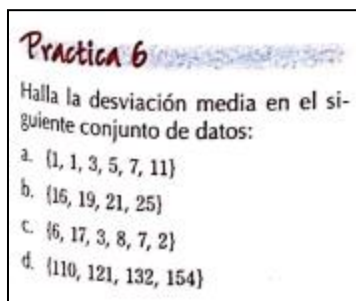
Actuar de este modo contribuirá a un mejoramiento de la convivencia social y a la calidad de vida de la sociedad en su conjunto. Tengamos presente que todos tenemos igual dignidad.

### CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS ÚTILES PARA EL PROYECTO

- Lógica informal.

*Nota.* Tomado de Glifos 10 (p.358), por S. Arévalo, L. Garzón, J. Rodríguez, J. Rangel, B. Perafán, S. Chávez, R. Díaz, J. Jiménez, N. Jiménez, 2008, Libros & Libros S.A.



**Figura 77***Apartado “Práctica”*

*Nota.* Tomado de Glifos 8 (p.235), por S. Arévalo, L. Garzón, B. Perafán, J. Rangel, S. Chávez, O. Silva, J. Rodríguez, R. Díaz, J. Jiménez, M. López, 2008, Libros & Libros S.A.

En resumen los libros presentan una variedad de actividades, ejercicios y problemas que el lector podrá utilizar para comprender mejor los conceptos y procedimientos que en ellos se muestra. Estas actividades están adecuadas teniendo en cuenta los indicadores de logro establecidos y los contenidos que se presentan.

**E) Metodología**

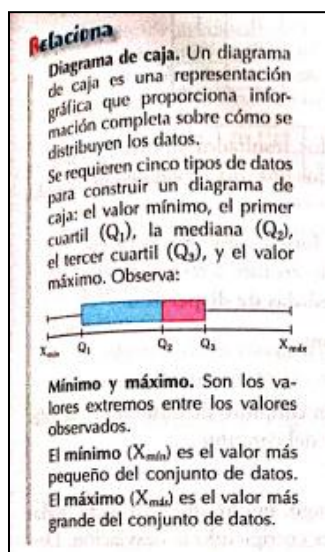
Los libros justifican su metodología teniendo en cuenta los documentos curriculares colombianos, donde al inicio de cada unidad se establece el pensamiento que se estará desarrollando, los indicadores de logros y los procesos matemáticos involucrados (Situaciones problema, Comunicación matemática, Razonamiento matemático y Evaluación cualitativa). Lo anterior, exhibiendo la metodología de evaluación que los libros implementarán. Además, las competencias comunicativas, matemáticas y ciudadanas que el estudiante podrá potenciar:

**Figura 78**  
**Metodología**



*Nota.* Tomado de Glifos 9 (p.94), por S. Arévalo, L. Garzón, B. Perafán, J. Rangel, S. Chávez, O. Silva, J. Rodríguez, R. Díaz, J. Jiménez, M. López, 2008, Libros & Libros S.A.

La metodología implementada por los libros tiene presente los aspectos sociales de los estudiantes y temas transversales al momento de plantear los proyectos de cada unidad, donde se manejan situaciones como el trabajo infantil en las ciudades, las ventas ambulantes y la protección del espacio público, el mejoramiento de la biblioteca y la videoteca del colegio, la implementación y fortalecimiento de mecanismos para la resolución de conflictos en el colegio, etc. (ver Figura 76). En cuanto al contexto de los alumnos, los textos escolares muestran una herramienta de preparación para el examen Pruebas ICFES – Saber 11° junto con su respectiva hoja de respuestas y un preuniversitario (ver Figura 70). Por último, los libros presentan el apartado “Relaciona” en donde el lector puede articular los conceptos o procedimientos expuestos en el libro con información adicional:

**Figura 79***Apartado “Relaciona”*

*Nota.* Tomado de Glifos 10 (p.319), por S. Arévalo, L. Garzón, J. Rodríguez, J. Rangel, B. Perafán, S. Chávez, R. Díaz, J. Jiménez, N. Jiménez, 2008, Libros & Libros S.A.

#### F) Lenguaje

Al inicio de cada unidad los libros plantean las competencias comunicativas que el estudiante podrá desarrollar con ayuda del libro (ver Figura 78), estas hacen alusión al uso del lenguaje simbólico mediante las notaciones que el texto escolar presenta (ver Figura 69). Además, un lenguaje argumentativo que ayude a plantear y solucionar situaciones problemas. Según algunos documentos curriculares colombianos como los EBCM (2006), la comunicación matemática hace parte de los procesos generales matemáticos. Siendo así de gran importancia la expresión y formulación de conjeturas, preguntas y/o problemas, que fomenten en el estudiante la aplicación y comprensión de las matemáticas.

#### G) Ilustraciones

En general los libros usan ilustraciones para mostrar el contexto en el cual se están desarrollando los ejercicios como se muestra en la Figura 70. La mayoría de las ilustraciones son claras y adecuadas al nivel académico de los estudiantes, por ende, manejan una coherencia con los indicadores de logro y los contenidos presentados. Por otro lado, aunque los gráficos y tablas no son ilustraciones, muchas veces las actividades, ejercicios o problemas, van acompañados de diferentes gráficos (diagrama de cajas y bigotes, diagrama de frecuencias, etc.) o tablas en donde se busca mostrar el conjunto de datos a analizar (ver Figura 68 y Figura 79).

#### H) Motivación

En el apartado “Piensa y Aplica” los libros motivan al lector mediante la solución de actividades, ejercicios y problemas, paso a paso (ver Figura 72). Los textos muestran un camino al estudiante con el cual se puede guiar y comprender cómo aplicar los conceptos o procedimientos estadísticos en situaciones contextualizadas. Por otro lado, en la sección “Competencias ciudadanas” algunos proyectos mediante la lectura, motivan al lector a profundizar en el por qué llevar a cabo dicho proyecto y presentan en el apartado “Recursos” la información necesaria de los libros o la bibliografía de los textos que aportan al desarrollo del proyecto (ver Figura 76).

#### I) Tecnologías de la información y de la comunicación

Los libros manejan el apartado “Tecnología” en donde se presenta al estudiante algunos recursos virtuales que puede utilizar para comprender o interpretar mejor las temáticas de la unidad. En cuanto al manejo de los proyectos, algunos libros presentan en el apartado “Recursos” enlaces a sitios web que ayudan al estudiante a profundizar en el tema central que desarrollará el proyecto. Por último, los libros sugieren el uso de la calculadora científica y la presentan como una herramienta que ayuda en los cálculos estadísticos. Incluso, presenta en la sección “Qué más puedo aprender” cómo se debe manejar, el uso de sus teclas y un ejemplo.

#### J) Evaluación

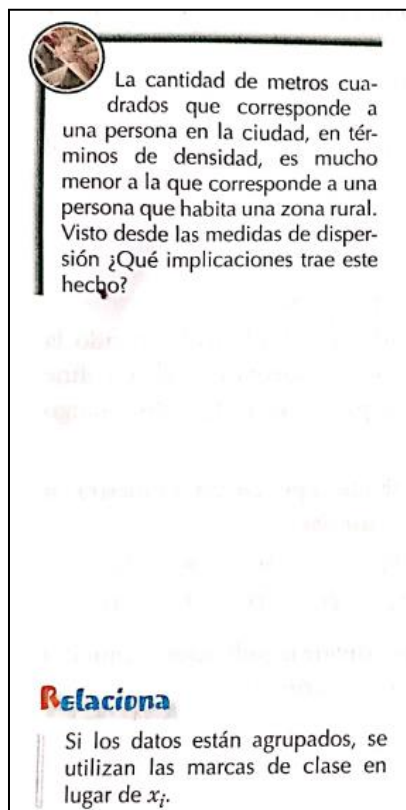
Al inicio de cada unidad se establece que el libro trabajará una evaluación cualitativa, la cual está ligada a los estándares, los procesos matemáticos, las competencias y los indicadores de logro. Lo anterior se puede ver reflejado en los diferentes apartados en donde el estudiante debe resolver algunas actividades, problemas o ejercicios que involucren poner en práctica los conocimientos adquiridos. Por otro lado los alumnos pueden realizar una autoevaluación en la sección de las Pruebas ICFES – Saber 11° o el Preuniversitario, identificando que competencias logró superar y en qué presenta dificultades.

#### K) Enfatización

Los libros plantean un énfasis encaminado en la resolución de situaciones problema donde el estudiante puede aplicar sus conocimientos. Lo anterior, partiendo de un problema que luego es analizado con algunas preguntas, y por último, genera intriga en el lector de tal manera que deba realizar una exploración de sus conocimientos matemáticos mediante diferentes interrogantes (ver Figura 75). Así mismo, los libros manejan pequeños recuadros de textos que presentan información relacionada con la temática y finalizan planteando preguntas al lector (ver Figura 80). Además, del apartado “Relaciona” en donde se hace una pequeña síntesis (ver Figura 79).

## Figura 80

### Apartados



*Nota.* Tomado de Glifos 10 (p.320), por S. Arévalo, L. Garzón, J. Rodríguez, J. Rangel, B. Perafán, S. Chávez, R. Díaz, J. Jiménez, N. Jiménez, 2008, Libros & Libros S.A.

Los libros también enfatizan en el afianzamiento de aprendizaje mediante los apartados “Practica” (ver Figura 77), “Piensa y aplica” (ver Figura 72), “Taller”, “Potencia tu pensamiento”, el Preuniversitario (ver Figura 70), las Pruebas ICFES - Saber 11° y los Proyectos (ver Figura 76).

#### L) Recursos generales

Los libros sugieren el manejo del material virtual señalado en la categoría de Tecnologías de la información y la comunicación.

### 5.5 Editorial MEN

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) en el año 2017 decide publicar la serie de libros *Vamos a aprender Matemáticas*, en donde teniendo en cuenta los procesos generales establecidos por Lineamientos Curriculares Colombianos (1998), los pensamientos matemáticos y los contextos de los estudiantes, elabora textos escolares que sirvan de apoyo para los alumnos y docentes colombianos. Para el correspondiente análisis se toman los libros para grado octavo, noveno, décimo y once, cada uno con seis unidades de trabajo que desarrollan los pensamientos matemáticos. En específico, la unidad 6 de cada libro en donde

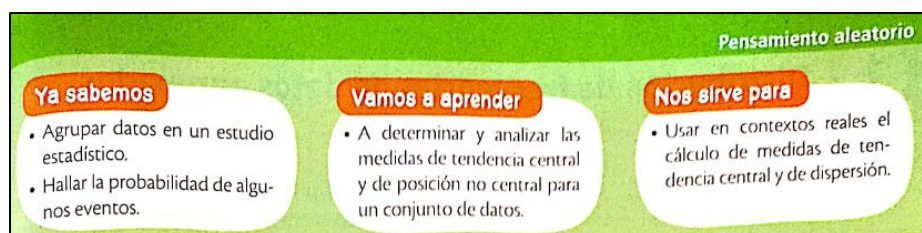
se presenta el pensamiento aleatorio, llamado “Estadística y probabilidad”. En general, los contenidos son abordados mediante una *Ruta didáctica* que consta de diferentes herramientas que más adelante se presentarán. A continuación se realizará el análisis de las categorías expuestas por el Modelo exhaustivo:

#### A) Objetivos

Al inicio de cada unidad se muestran los contenidos previos que el estudiante debe poseer, la aplicación de los conocimientos que se van a adquirir, y el apartado “Vamos a aprender” donde se presenta lo que podríamos llamar “objetivos de aprendizaje”. Inicialmente para grado octavo se exhiben los siguientes objetivos:

**Figura 81**

*Vamos a aprender octavo*



*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 8 (p.175), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.

En grado noveno, décimo y once la sección “Vamos a aprender” no muestra como temática las medidas de dispersión. Es decir, se intuye que no serán un tema a abordar en el desarrollo de la Unidad. En cuanto a la Guía del docente, la editorial presenta con cada libro un texto dirigido a los profesores, donde en grado octavo se plantean las siguientes temáticas que se deberían enseñar según los EBCM (2006):

**Figura 82**

*Propuesta de enseñanza octavo*

Pensamiento aleatorio y sistemas de datos		
Matriz de Contenidos MEN	Propuesta Vamos a aprender	
	Temas	Páginas del libro
<ul style="list-style-type: none"> <li>Medidas de tendencia central y dispersión.</li> </ul>	6. Medidas de tendencia central	186-189
	7. Medidas de dispersión	190-193

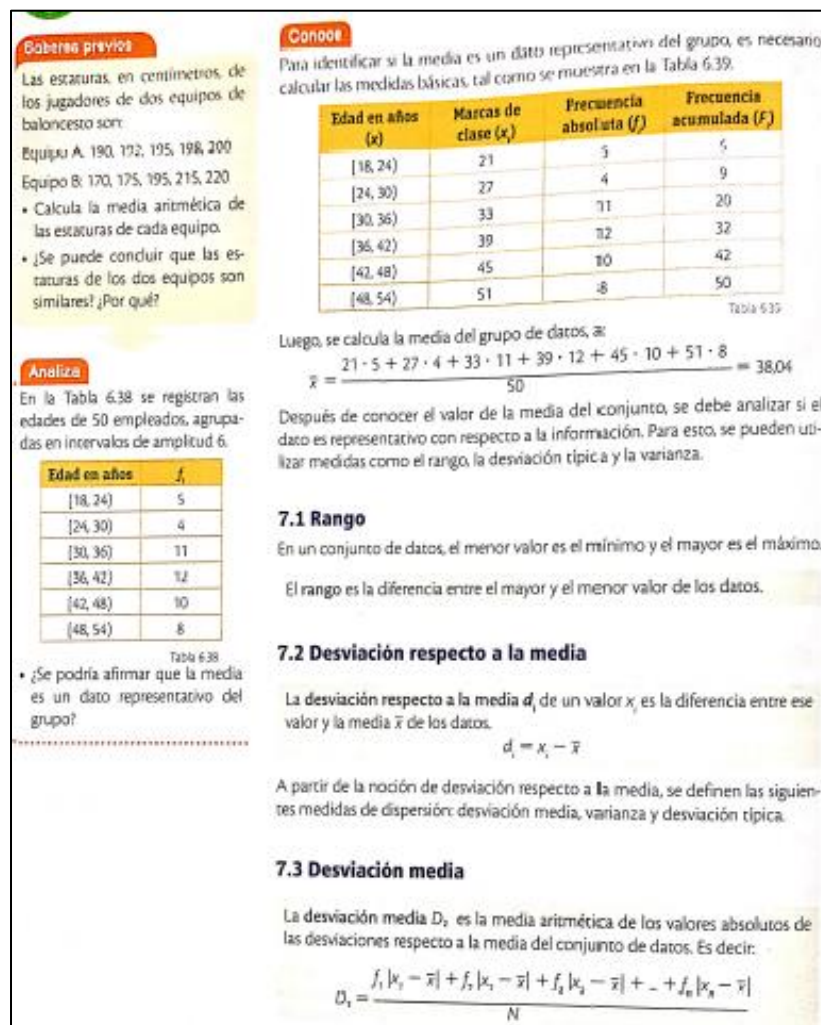
*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 8, Guía del docente (p.29), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.

En conclusión los libros de la editorial para la construcción de los objetivos expuestos al estudiante y al docente, tienen en cuenta los documentos curriculares colombianos. Además, se percibe que los libros solo manejarán las medidas de dispersión en grado octavo.

#### B) Contenidos

En el libro para grado octavo se establece en la tabla de contenidos las medidas de dispersión como una de las temáticas a abordar, en consecuencia para la unidad 6, luego de mostrar las medidas de tendencia central, el libro introduce como medidas de dispersión el rango y la desviación respecto a la media (ver Figura 83). Lo anterior, mediante un ejemplo en donde se trata de mostrar si la media es un dato representativo de cierto conjunto. Cabe señalar que por primera vez una de las editoriales analizadas presenta la marca de clase para los intervalos, con la cual, luego se calculará la media del conjunto de datos. Luego, se explica que de la desviación respecto a la media se definen otras medidas de dispersión como la desviación media, la varianza y la desviación típica (ver Figura 84 y Figura 85). Para ejemplificar la fórmula que se presenta en cada definición, el texto sigue utilizando el mismo ejemplo inicial. Para finalizar, se muestra al lector el coeficiente de variación con su respectiva fórmula y aplicándola al ejemplo inicial con el que se ha estado trabajando (ver Figura 85).



**Figura 83***Definición de rango y desviación media octavo*

*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 8 (p.192), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.



**Figura 84***Definición de varianza octavo*

**4 Varianza**

La varianza  $s^2$  es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media de cada dato.

$$s^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + f_3(x_3 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{N}$$

**Ejemplo 2**

Para calcular la varianza de los datos del Ejemplo 1, se calculan los cuadrados de las desviaciones respecto a la media de cada dato, esto es:  $(x_i - \bar{x})^2$ . Luego, se determina el producto de estos valores con su frecuencia absoluta, es decir,  $f_i(x_i - \bar{x})^2$ . Observa la Tabla 6.41.

Edad en años	$f_i$	$x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
[18, 24)	5	21	290,3616	1451,808
[24, 30)	4	27	121,8816	487,5264
[30, 36)	11	33	25,4016	279,4176
[36, 42)	12	39	0,9216	11,0592
[42, 48)	10	45	48,4416	484,416
[48, 54)	8	51	167,9616	1343,6928

Tabla 6.41

Después, se calcula la varianza así:

$$s^2 = \frac{1451,808 + 487,5264 + 279,4176 + 11,0592 + 484,416 + 1343,6928}{50} = 81,16$$

Como  $s^2 = 81,16$ , entonces, los datos están dispersos con respecto a la media.

*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 8 (p.191), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A

**Figura 85***Desviación típica y coeficiente de variación octavo*

**7.5 Desviación típica**

La desviación típica  $s$  es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

**Ejemplo 3**

La desviación típica para la distribución del ejemplo de las edades de los empleados, cuyos datos se registraron en la Tabla 6.41, corresponde a la raíz cuadrada de 81,16. Esto es:

$$s = \sqrt{81,16} = 9,008$$

**7.6 Coeficiente de variación**

Cuando se tienen dos distribuciones con medias diferentes, las desviaciones típicas no permiten comparar el grado de dispersión de los datos. Para hacerlo, se utiliza el coeficiente de variación.

El coeficiente de variación **CV** es la razón entre la desviación típica de una distribución y su media aritmética.

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

**Ejemplo 4**

El coeficiente de variación de la distribución de edades de los empleados, cuya información aparece en la Tabla 6.39, es  $CV = \frac{9,008}{38,04} = 0,237$ .

Si en otra empresa, la desviación típica de la distribución de edades de los empleados es 7,86 y la media es 45, entonces, el coeficiente de variación en este caso, corresponde a  $CV = \frac{7,86}{45} = 0,17$ .

Al comparar los resultados de las dos empresas se tiene que  $0,17 < 0,237$ ; por lo tanto, en la primera empresa los datos están más dispersos con respecto a la media. Por el contrario, en la segunda las edades de los empleados están en torno a la media.

*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 8 (p.192), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A

En cuanto al libro para grado noveno, se presentan como medidas de dispersión el rango, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación (ver Figura 86 y Figura 87). Cabe resaltar que para introducir el concepto de varianza el texto ve la necesidad de definir la desviación respecto a la media, como se muestra en la Figura 86. Para hacer claro el uso de las fórmulas, se presenta un solo ejemplo en el que se van desarrollando cada una de las medidas de dispersión. En cuanto a la exhibición de la fórmula correspondiente a la varianza se observa una diferencia en la presentada para los estudiantes de grado octavo (ver Figura 84), y la expuesta para los alumnos de grado noveno (ver Figura 86). Lo anterior da a entender que la editorial quiere presentar a los alumnos de grado octavo una fórmula sin la noción de sumatoria, lo cual puede estar asociado al nivel académico de los escolares.

**Figura 86**

*Definición de rango, varianza y desviación típica noveno*

**Analiza**  
Las calificaciones de un grupo de diez estudiantes en un examen de estadística son las siguientes:

56	58	67	69	75
77	77	82	84	95

¿Entre qué valores varían los datos?

**7.1 Rango**  
El rango de una distribución es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de la variable estadística. También se llama **recorrido**.

**7.2 Varianza**  
Antes de estudiar el concepto de varianza, es necesario definir la **desviación respecto a la media**.  
Se conoce como **desviación respecto a la media**,  $d_i$ , a la diferencia entre cada valor de la variable estadística,  $x_i$ , y la media aritmética,  $\bar{x}$ . Es decir:  
$$d_i = x_i - \bar{x}$$

**Ejemplo 1**  
La media aritmética de los datos de la Tabla 4.25 es  $\bar{x} = 25,1$  y las desviaciones respecto a la media se muestran en la Tabla 4.26.

Número de libros ( $x_i$ )	12	17	21	27	35	37	49
$d_i = x_i - \bar{x}$	-13,1	-8,1	-4,1	1,9	9,9	11,9	23,9

Tabla 4.26

La **varianza**  $s^2$  de una variable estadística  $x$  es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media. Para datos agrupados es:

$$s^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

**7.3 Desviación típica**  
La **desviación típica**  $s$  es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

**Ejemplo 2**  
La varianza y la desviación típica de los datos de la Tabla 4.25, son:

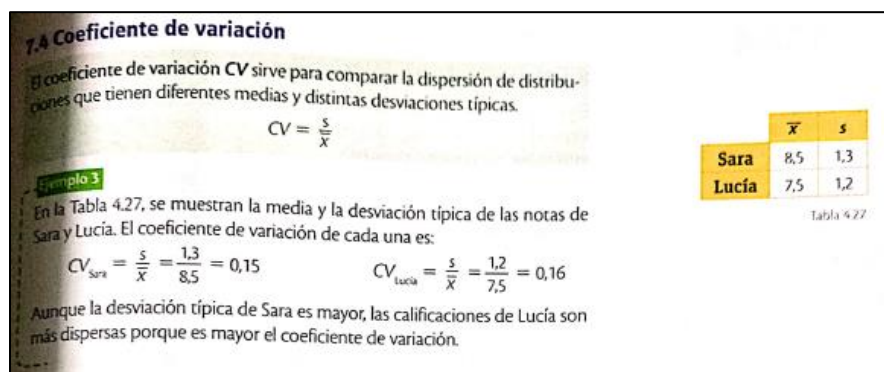
$$s^2 = \frac{(-13,1)^2 \cdot 5 + (-8,1)^2 \cdot 3 + (-4,1)^2 \cdot 6 + (1,9)^2 \cdot 8 + (9,9)^2 \cdot 4 + (11,9)^2 \cdot 3 + (23,9)^2 \cdot 1}{5 + 3 + 6 + 8 + 4 + 3 + 1}$$

$$s^2 = \frac{2572}{30} = 85,76 \rightarrow s = 9,26$$

*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 9 (p.112), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.

## Figura 87

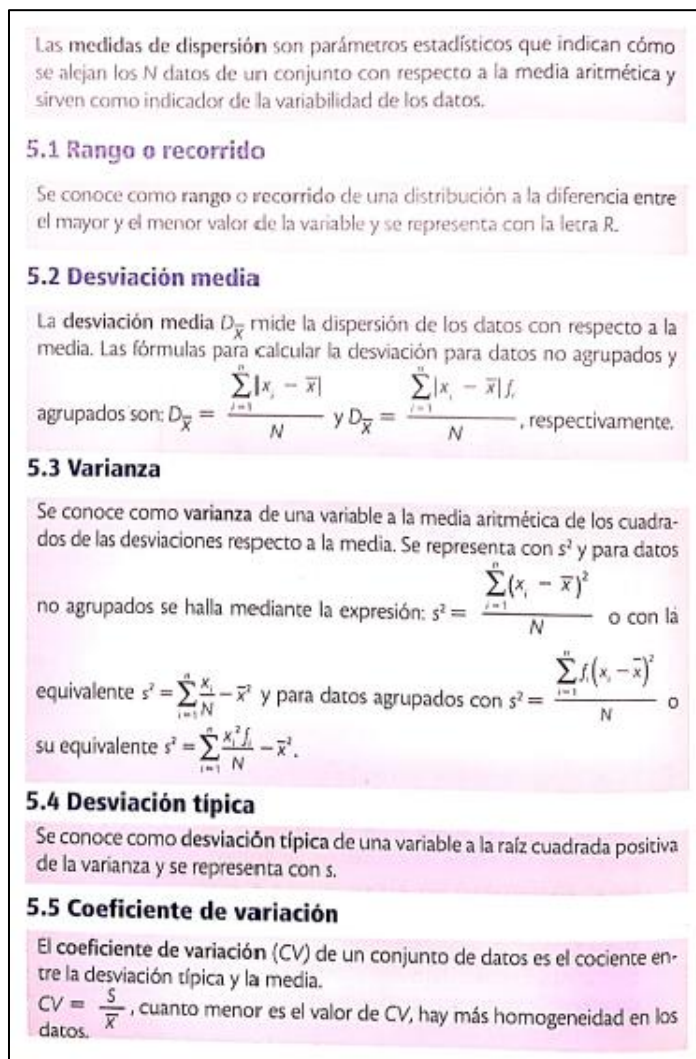
### *Coefficiente de variación noveno*



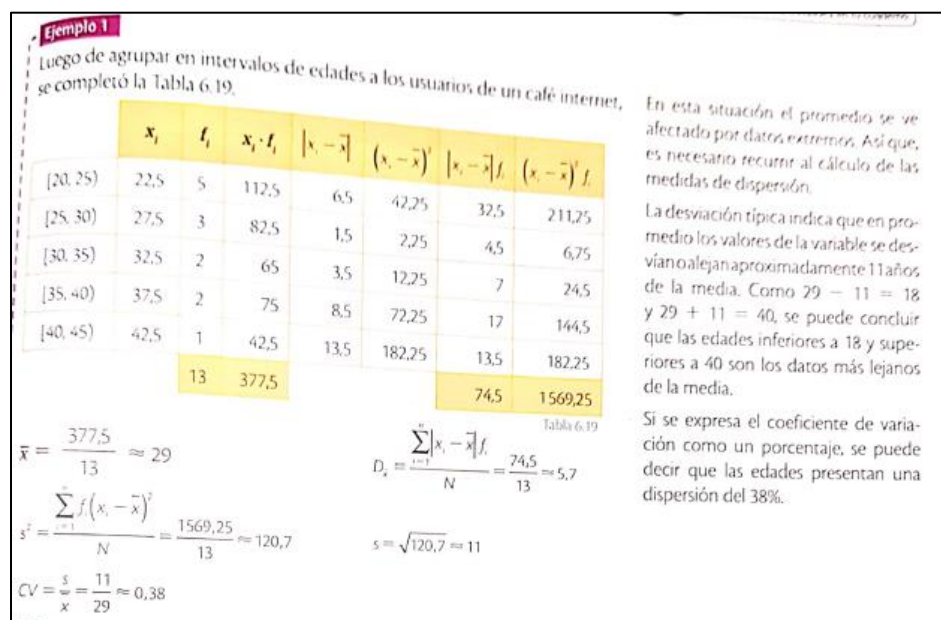
*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 9 (p.113), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.

En el libro para grado décimo se presentan las medidas de dispersión como parámetros estadísticos que exhiben cómo se alejan los datos de un conjunto, en relación con la media aritmética. Así mismo, como parámetros que indican la variabilidad de los datos. Por ende, se definen como medidas de dispersión el rango o recorrido, la desviación media, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación (ver Figura 88). En cuanto a la exhibición de la fórmula correspondiente a la desviación media para datos no agrupados, se observa una diferencia en la presentada para los estudiantes de grado octavo (ver Figura 83) y la expuesta para los alumnos de grado décimo (ver Figura 88). Lo anterior da a entender que al igual que en la fórmula para la varianza, la editorial quiere presentar a los alumnos de grado octavo los procedimientos sin la noción de sumatoria. Para mostrar al estudiante que interpretación se puede dar luego de calcular cada una de estas medidas en un conjunto de datos dado, se presenta el ejemplo de la Figura 89. Además, se observa que también se plantean las fórmulas para calcular algunas medidas de dispersión en datos agrupados.

**Figura 88**  
**Medidas de dispersión décimo**



*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 10 (p.222), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.

**Figura 89***Ejemplo medidas de dispersión décimo*

*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 10 (p.223), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.

Por último en el libro para grado once, se presenta las medidas de dispersión como la forma de ver la variabilidad en una distribución. Por ende, se establece que entre más grande sea el valor, mayor variabilidad, y si el valor es pequeño la distribución será más homogénea. Así mismo, se muestran como medidas de dispersión el rango, la desviación respecto a la media, la desviación media, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación (ver Figura 90 y Figura 91). Es de gran importancia distinguir que en este texto escolar, se plantean las fórmulas de cada medida de dispersión para datos agrupados.

**Figura 90***Definición de rango once*



Se puede advertir que el Atleta 1 es quien más varía en las distancias que alcanza. Por lo tanto, el Atleta 2 es más constante en sus saltos.

Las medidas de dispersión muestran la variabilidad de una distribución indicando cuán alejados están los datos de la media. Cuanto mayor sea ese valor, mayor será la variabilidad, y cuanto menor sea, más homogénea será.

### 5.1 Rango

El rango o recorrido de una distribución de datos es la diferencia entre el valor máximo ( $x_{\max}$ ) y el valor mínimo ( $x_{\min}$ ).

$$\text{Rango} = x_{\max} - x_{\min}$$

**Ejemplo 1**

En la tabla 6.14, se muestran las estaturas de un grupo de estudiantes compuesto por 24 mujeres. El rango corresponde a la diferencia entre 168 (valor máximo) y 149 (valor mínimo).

Es decir,  $\text{rango} = 168 - 149 = 19$ .

Estaturas (cm)	No. de mujeres
[149, 153]	2
[153, 157]	3
[157, 161]	7
[161, 165]	8
[165, 168]	4

Tabla 6.14

*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 11 (p.216), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.

## Figura 91

### Medidas de dispersión para datos agrupados once

### 5.2 Desviación respecto a la media

La **desviación respecto a la media**, denotada  $d_i$ , corresponde a la diferencia entre cada valor de la variable  $x_i$  y la media aritmética  $\bar{x}$ .

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

En datos agrupados por clases es la diferencia entre la marca de clase de cada intervalo y la media aritmética  $\bar{x}$ .

Esta medida da información de lo cerca o lejos que está un dato de los demás datos del conjunto. El signo de esta medida indica si el valor está por encima de la media (signo positivo) o por debajo de la media (signo negativo).

### 5.3 Desviación media

La **desviación media** para datos agrupados por clases, denotada  $D_v$ , corresponde a la media de las desviaciones con respecto a la media y se calcula con la fórmula:

$$D_v = \frac{\sum_{i=1}^n |C_i - \bar{x}| \cdot f_i}{N}$$

Por lo tanto, para determinar la desviación media para datos agrupados por clases, se deben calcular las marcas de clase de cada intervalo y luego se multiplican por las frecuencias absolutas, estos datos vienen agrupados en una tabla de frecuencias como la del Ejemplo 2.

### 5.4 Varianza

La **varianza** para datos agrupados por clases, denotada  $s^2$ , es la media aritmética de cuadrados de las desviaciones con respecto a la media. Se halla mediante la expresión:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (C_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{N}$$

La varianza permite identificar la diferencia media que hay entre cada uno de los valores respecto a la media del conjunto de datos.

### 5.5 Desviación típica

La **desviación típica** para datos agrupados por clases,  $s$ , es la raíz cuadrada positiva de la varianza y se halla a través de la siguiente expresión:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (C_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{N}}$$

*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 11 (p.217), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.

En general los cuatro textos escolares presentan las medidas de dispersión tanto para datos no agrupados, como para datos agrupados. Cada definición viene acompañada de su respectiva fórmula, y ejemplo que de una visión de la implementación de los algoritmos y la interpretación de resultados (ver Figura 89). Con respecto a la adecuación de los contenidos con los objetivos planteados, se observa que solo en el libro para grado octavo se guarda una coherencia entre lo establecido en el apartado “Vamos a aprender” (ver Figura 81) y los contenidos presentados en el desarrollo de la unidad 6 (ver Figura 83). En cuanto a los textos para grado noveno, décimo y once se muestra una inconsistencia entre las temáticas y objetivos presentados. Lo anterior, teniendo en cuenta que no se mostraban las medidas de dispersión como una temática a abordar en los respectivos objetivos. En relación con la linealidad que debe presentarse con los documentos curriculares colombianos, todos los libros analizados de la editorial tienen presente que las medidas de dispersión son una temática que se puede abordar desde grado octavo. En particular lo establecido por los DBA (2015) y los EBCM (2006).

#### C) Conexiones

En el apartado “Analiza” se establecen las conexiones entre los conocimientos previos del estudiante, y las nuevas temáticas que el libro va a presentar. Lo anterior, mediante una situación problema (ver Figura 86). Por otro lado, los libros manejan temas transversales como la educación para la sexualidad y la ciudadanía, la educación ambiental y los estilos de vida saludables. Lo cual, muestra una conexión entre las matemáticas abordadas en el libro y situaciones de la vida real del estudiante. En cuanto a las conexiones con la historia de las matemáticas, no se observan situaciones o apartados en los que el lector pueda relacionar la estadística con la historia de las matemáticas. Según Estepa & Del Pino (2013), la historia puede ser de gran ayuda en los ambientes de enseñanza. Lo anterior, teniendo en cuenta que se puede tomar de ella los escenarios en los que se crearon las primeras nociones matemáticas. Por ende, es recomendable el uso de la historia en la enseñanza de la estadística y sería un aspecto a mejorar en los cuatro libros del MEN.

#### D) Actividades

En concreto los textos escolares manejan actividades en cinco momentos durante el desarrollo de la unidad 6: en un primer momento, se presentan los ejemplos donde por medio de actividades se aplican inmediatamente los conceptos o procedimientos explicados en la página (ver Figura 89 y Figura 90). En un segundo momento, al finalizar las temáticas abordadas en la unidad 6, los libros presentan el apartado “Actividades de aprendizaje”. Como su mismo nombre lo indica, se muestran actividades que desarrollan y refuerzan los aprendizajes que el estudiante ha adquirido durante la unidad. En esta sección se exhiben actividades que desarrollan la comunicación, la ejercitación, la resolución de problemas, la modelación, y el razonamiento (ver Figura 93). Lo anterior, en relación con los cinco procesos generales que se contemplan en los Lineamientos Curriculares (1998). Así mismo,

algunas actividades están identificadas con un símbolo específico que le muestra al lector el proceso cognitivo que se desarrolla:

**Figura 92**

*Procesos cognitivos*



*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 10 (p.4), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.

**Figura 93**

*Apartado "Actividades de aprendizaje" 1*

**Actividades de aprendizaje**

**Ejercitación**

1 En la Tabla 6.42 se muestran las notas de Luisa y Pedro, en cinco exámenes.

Luisa	3	5	8	4	7
Pedro	7	2	9	4	5

Tabla 6.42

Halla la nota media, el rango y la desviación típica de ambos estudiantes.

2 Calcula el rango, la varianza y la desviación típica de la distribución de la Tabla 6.43.

$x_i$	5	6	7	8	9
$f_i$	8	9	5	2	1

Tabla 6.43

3 Haz los ejercicios con base en la distribución que se muestra en la Tabla 6.44.

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$f_i$	1	10	14	5	2	1

Tabla 6.44

- Elabora la tabla de frecuencias absolutas y el diagrama de barras correspondiente.
- Calcula la media y la desviación típica.
- Halla el coeficiente de variación.
- ¿Consideras que la desviación típica es grande o pequeña respecto a la media?

4 La Tabla 6.45 muestra las notas obtenidas por un grupo de estudiantes en dos exámenes de matemáticas.

Nota	Primer examen	Segundo examen
------	---------------	----------------

**Pensamiento aleatorio**

5 Si la desviación típica en una distribución es 2,4, ¿cuál es la varianza?

**Comunicación**

6 Observa las distribuciones de la Figura 6.24.

Figura 6.24

- Ambas tienen la misma media. ¿Cuál es su valor?
- Las desviaciones típicas son:  $s = 1,38$  y  $s = 1,94$ . Asocia estos valores con cada distribución.

**Resolución de problemas**

7 La distribución de los sueldos de los 60 empleados de una empresa se refleja en la Tabla 6.46.

Sueldo (miles de pesos)	Número de empleados
[600, 900)	8
[900, 1200)	12
[1200, 1500)	20
[1500, 1800)	14
[1800, 2100)	6

Tabla 6.46

- Halla el sueldo medio de los empleados de la empresa. También, la mediana y la moda.
- Calcula el rango y la desviación típica.

*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 8 (p.193), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.



En un segundo momento, se observa el apartado “Practica más” donde se presentan actividades adicionales que permiten el desarrollo de habilidades propias de la actividad matemática y los procesos cognitivos anteriormente señalados (ver Figura 92). En este caso, las actividades se dividen por los temas que se han trabajado en la unidad 6:

**Figura 94**

*Apartado "Practica más"*

### Medidas de tendencia central

**Ejercitación**

1. Halla la media, la mediana, la moda y los cuartiles del conjunto de datos presentados en la Tabla 4.44.

Tiempo de duración	Número de personas
[0, 7]	35
[7, 14]	23
[14, 21]	15
[21, 28]	10
[28, 32]	9

Tabla 4.44

### Medidas de dispersión

**Ejercitación**

2. Calcula el rango, la varianza y la desviación típica de los datos presentados en la Tabla 4.45.

Puntaje	Número de personas
[5, 9]	6
[9, 13]	9
[13, 17]	7
[17, 21]	15
[21, 25]	12

Tabla 4.45

3. Observa los datos de la Tabla 4.46. Luego, halla el coeficiente de variación. Interpreta los resultados.

X	41	29	35	24	25	19
Y	41	45	56	49	38	48

Tabla 4.46

4. De un estudio hecho a 124 personas sobre la edad a la que comenzaron a hablar, se obtuvo el histograma de la Figura 4.38. Halla las medidas de tendencia central y de dispersión.

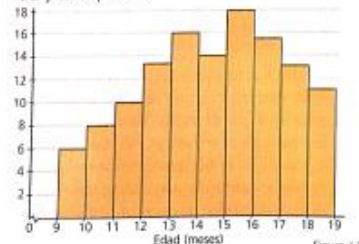


Figura 4.38

### Variables estadísticas bidimensionales

**Resolución de problemas**

5. Lee y resuelve.

En la Tabla 4.47 se muestra el peso de Ana a medida que aumentaba su estatura.

Estatura (cm)	100	115	120	130	140	160
Peso (kg)	35	40	38	42	45	56

Tabla 4.47

- Calcula el coeficiente de correlación que hay entre las dos variables.
- Halla la recta de regresión.
- Si la estatura es 165 cm, ¿cuál será su peso?
- ¿Es fiable la anterior predicción? ¿Por qué?

### Permutaciones y combinaciones

**Resolución de problemas**

6. Se quiere crear una clave telefónica con seis dígitos. Si la condición es que los dígitos no deben repetirse, ¿cuántas claves diferentes pueden obtenerse?

7. Un equipo de fútbol tiene tres estilos diferentes de camisetas, dos de pantalonetas y tres de medias. ¿De cuántas maneras diferentes pueden uniformarse para un partido?

8. Si las matrículas para motos se representan con tres letras y dos números, ¿cuántas motos pueden matricularse en este sistema?

9. Se tienen ocho regalos distintos para premiar a los mejores cuatro estudiantes del salón. A cada uno se le darán dos regalos. ¿De cuántas formas diferentes podrán entregarse los regalos?

### Experimentos aleatorios y probabilidad

**Resolución de problemas**

10. Para una rifa, se vendieron 1000 boletas con cuatro números cada una. Alba compró tres boletas. ¿Qué probabilidad tiene de ganar con una boleto? ¿Y con las tres boletas?

11. Se lanzan dos dados, uno numerado con números pares y otro con números impares. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea un número primo?

*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 9 (p.114), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.

En un tercer momento, se enseña la sección “resolución de problemas” en donde se muestra al estudiante una estrategia para abordar diferentes problemas. En los libros para grado octavo y noveno, la estrategia es llamada “Dividir el problema en partes” y consta de: comprender el problema, crear un plan, ejecutar el plan y comprobar la respuesta (ver Figura 95). De este modo, también se invita al alumno a aplicar esta estrategia resolviendo varios problemas y realizar el proceso de formular nuevos. Este tipo de actividades en las que se pide al estudiante inventar, formular y resolver problemas, promueve el desarrollo del pensamiento


matemático en sus diversas formas (EBCM, 2006). Por otro lado, para el texto dirigido a grado décimo, la estrategia es llamada “Combinar operaciones” y consta de la misma metodología de los libros anteriores.

**Figura 95**

*Apartado "Resolución de problemas"*

**Estrategia: Dividir el problema en partes**

**Problema**  
Se lanzan dos dados simultáneamente.



¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números que muestren los dados en sus caras superiores sea múltiplo de 3?

**1. Comprende el problema**

- ¿Qué información proporciona el enunciado?  
R: Dos dados son lanzados al mismo tiempo.
- ¿Qué debes calcular?  
R: La probabilidad de que la suma de los números que muestren los dados sea un múltiplo de 3.

**2. Crea un plan**

- Encuentra el espacio muestral del experimento y busca las parejas de números que cumplen la condición establecida. Después, calcula la probabilidad de este evento.

**3. Ejecuta el plan**

- Si se tiene en cuenta que en el experimento se lanzan dos dados simultáneamente, el espacio muestral corresponderá a las parejas ordenadas:

$$E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

Entonces, se seleccionan las parejas ordenadas cuya suma sea un múltiplo de 3. Estas son:

$$A = \{(1,2), (1,5), (2,1), (2,4), (3,3), (3,6), (4,2), (4,5), (5,1), (5,4), (6,3), (6,6)\}.$$

La probabilidad es  $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ .

**4. Comprueba la respuesta**

- Verifica que la probabilidad de obtener un múltiplo de cinco es  $\frac{7}{36}$ .

**Aplica la estrategia**

**1** Dos estudiantes participan en un experimento aleatorio en el que lanzan, simultáneamente, un dado y una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengan (6, s)?

- Comprende el problema
- Crea un plan
- Ejecuta el plan
- Comprueba la respuesta

**Resuelve otros problemas**

**2** Un estudiante está preocupado porque obtuvo como calificaciones en matemáticas las notas: 65, 75, 60 y 90. ¿Cuál debe ser la quinta nota para que alcance un promedio de 75?

**3** En un experimento, se lanza un dado hexaédrico y, consecutivamente, se lanza otro. ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer dado y en el segundo salga, simultáneamente, el número 6?

**Formula problemas**

**4** Inventa una situación problema que involucre la siguiente información y resuélvela.

“En un curso de 36 estudiantes el número de mujeres es el doble que el número de hombres”

**Enriquece tu vocabulario**

- Busca en el diccionario las palabras *tetraédrico* y *hexaédrico*. Después, determina el espacio muestral de lanzar un dado con estas formas si sus caras se enumeran desde el 1 de manera ascendente.

*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 8 (p.203), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.

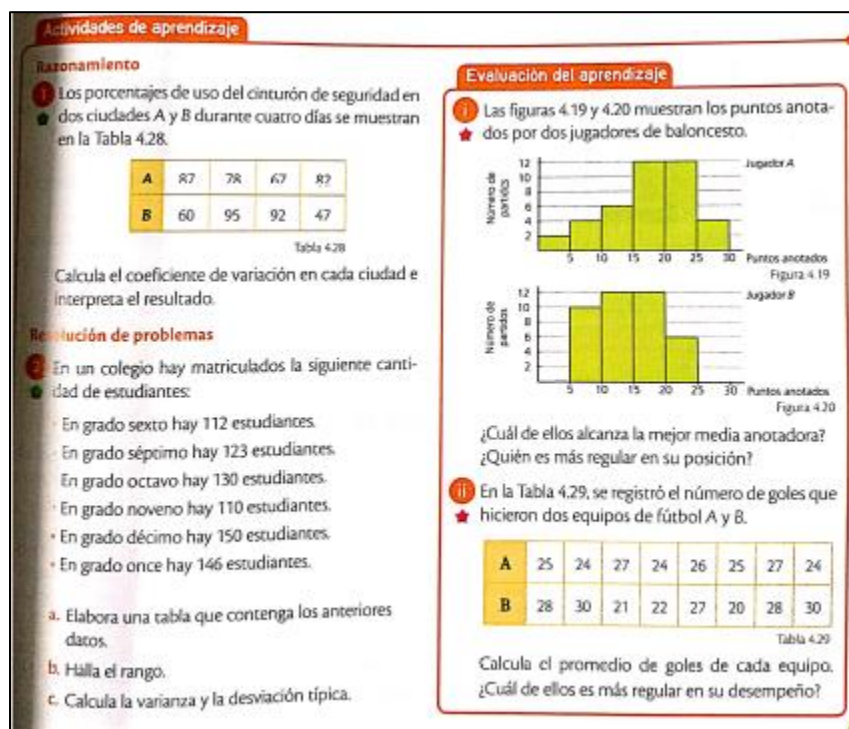
## E) Metodología

Los libros de la editorial justifican su metodología basándose en los referentes curriculares colombianos, donde se tienen en cuenta los procesos generales presentes en toda actividad matemática (el razonamiento, la formulación, comprobación y ejercitación de procedimientos, la modelación, la comunicación, la formulación, tratamiento y resolución de problemas). Además de las competencias matemáticas que se desarrollan cuando se

adquieren o se alcanzan: conocimientos (conceptuales o procedimentales), habilidades y actitudes. En el texto guía del docente se establece que la metodología con la cual se abordan las unidades de trabajo en cada libro, se estructuró para seguir los pensamientos matemáticos establecidos en los Lineamientos curriculares del área de matemáticas (1998) y la indicaciones de los DBA (2015) y EBCM (2006).

Como eje principal en la metodología de los libros se encuentra la “Ruta didáctica” que cuenta con cinco momentos orientados a la construcción significativa del conocimiento: los “Saberes previos” que permiten al estudiante explorar mediante una actividad sus conocimientos preliminares antes de abordar la temática (ver Figura 83). El apartado “Analiza” donde mediante la solución de una situación problema se posibilita la introducción de nuevos conceptos o procedimientos (ver Figura 83). El apartado “Conoce” que permite presentar al estudiante los conceptos mediante un lenguaje claro, sencillo y fácil de comprender (ver Figura 83). La sección “Actividades de aprendizaje” donde el alumno puede poner en práctica los conocimientos adquiridos en la unidad, mediante diferentes actividades que buscan el desarrollo de los procesos cognitivos mostrados en la Figura 92. Las anteriores actividades, se encuentran clasificadas de acuerdo al proceso matemático que privilegie su resolución y el libro sugiere al lector resolverlas en respectivo cuaderno (ver Figura 93). Por último, el apartado “Evaluación de aprendizaje” donde se presentan actividades que permiten al estudiante evaluar su aprendizaje (ver Figura 96). En el texto guía del docente se establece que esta evaluación permite al profesor realizar una valoración del aprendizaje por parte del alumno, y plantear estrategias para la superación de errores, dificultades u obstáculos (MEN, 2017).

**Figura 96**  
*Apartado "Evaluación del aprendizaje"*



*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 9 (p.113), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.

Integradas con la “Ruta didáctica” se encuentran las secciones “Practica más” (ver Figura 94) y “Resolución de problemas” (ver Figura 95). En la primera sección mencionada anteriormente, se presentan actividades que desarrollen los procesos cognitivos que se muestran en la Figura 92 y las habilidades propias del pensamiento matemático (MEN, 2017). En la segunda sección, se exhiben estrategias para la resolución de situaciones problemas y se invita a la formulación de estas. Por otro lado, algunas de las actividades planteadas en ambas secciones, incorporan los temas pedagógicos transversales que los libros manejan: la educación para la sexualidad y la ciudadanía, la educación ambiental y los estilos de vida saludable.

En cuanto a la metodología de enseñanza, los textos guía del docente plantean sugerencias didácticas para los temas de la unidad 6, en relación con cada momento de la “Ruta didáctica” presente en el libro para los estudiantes. Es decir, para el primer momento de “Saberes previos” el libro guía del docente propone estrategias para conocer los saberes previos de los estudiante de tal manera que sea fácil la conexión a establecer con las nuevas temáticas. En el segundo y tercer momento (“Analiza” y “Conoce”), se facilitan herramientas al profesor que pueda utilizar como puente entre los conocimientos previos y los nuevos contenidos. En el cuarto momento de “Actividades de aprendizaje”, se propone al docente la forma de manejar las actividades planteadas en pro del desarrollo de los procesos cognitivos. Por





Figura 98

## Sugerencias didácticas 2

**Sugerencias didácticas**

**Practica más**

Proponga a los estudiantes la solución de las actividades sugeridas en la sección, individualmente, y a partir de los resultados tome decisiones que permitan mejorar su desempeño. Para esto, es conveniente proponer actividades de refuerzo y ampliación que les permita comprender los conceptos y aplicarlos en la solución de situaciones reales y propias de las matemáticas. Observe los procesos desarrollados por cada estudiante y sus soluciones. Luego, hágales ver la importancia de reconocer sus fortalezas y debilidades, así como de involucrarse en el proceso evaluativo.

**Practica más**

1. Elige un número de la siguiente lista y calcula su promedio. Si el resultado es menor que 10, repite el ejercicio. Si es mayor que 10, calcula su promedio y repite el ejercicio.

Número	Promedio
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
11	11
12	12
13	13
14	14
15	15
16	16
17	17
18	18
19	19
20	20

2. Elige un número de la siguiente lista y calcula su promedio. Si el resultado es menor que 10, repite el ejercicio. Si es mayor que 10, calcula su promedio y repite el ejercicio.

Número	Promedio
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
11	11
12	12
13	13
14	14
15	15
16	16
17	17
18	18
19	19
20	20

3. Elige un número de la siguiente lista y calcula su promedio. Si el resultado es menor que 10, repite el ejercicio. Si es mayor que 10, calcula su promedio y repite el ejercicio.

Número	Promedio
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
11	11
12	12
13	13
14	14
15	15
16	16
17	17
18	18
19	19
20	20

4. Elige un número de la siguiente lista y calcula su promedio. Si el resultado es menor que 10, repite el ejercicio. Si es mayor que 10, calcula su promedio y repite el ejercicio.

Número	Promedio
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
11	11
12	12
13	13
14	14
15	15
16	16
17	17
18	18
19	19
20	20

5. Elige un número de la siguiente lista y calcula su promedio. Si el resultado es menor que 10, repite el ejercicio. Si es mayor que 10, calcula su promedio y repite el ejercicio.

Número	Promedio
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
11	11
12	12
13	13
14	14
15	15
16	16
17	17
18	18
19	19
20	20

**Solucionario**

**Practica más**

1. Promedio de ventas: 4,93  
Moda: 5  
Mediana: 5

2. Media: 18 510,10  
Mediana: 17 500  
Moda: 22 500

$Q_1$ : se encuentra en el intervalo [10 000, 15 000]  
 $Q_2$ : se encuentra en el intervalo [15 000, 20 000]  
 $Q_3$ : se encuentra en el intervalo [25 000, 30 000]

3. Rango: 96  
Desviación media: 22,18  
Varianza: 680,39  
Desviación típica: 26,08

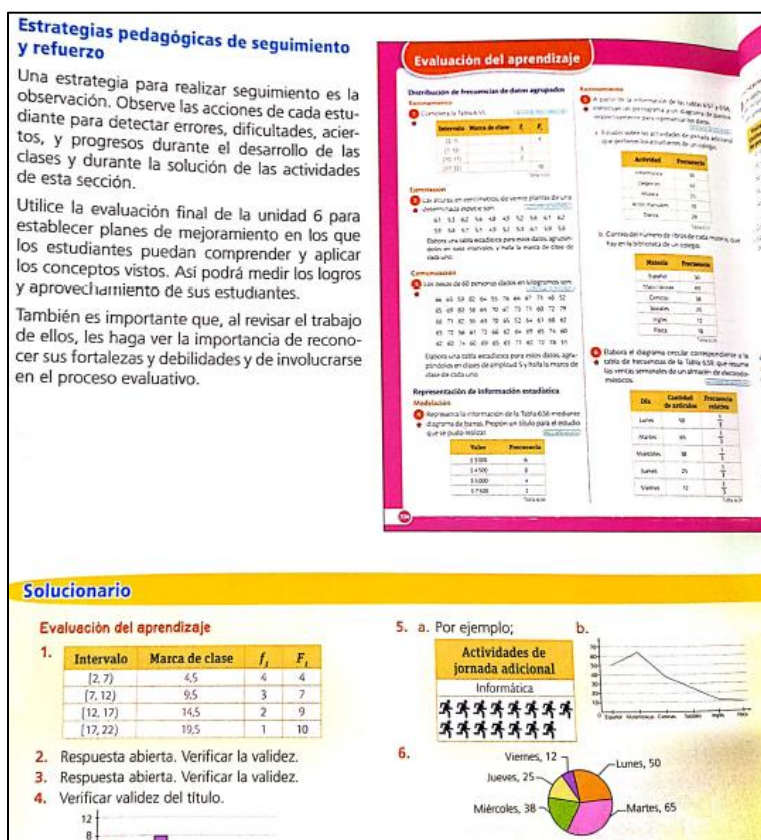
4. a.  $E = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$   
b.  $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$   
c.  $E = \{123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 241, 243, 314, 312, 321, 324, 341, 342, 413, 412, 423, 421, 432, 432\}$

5. a.  $A \cup B = \{R1, R2, \dots, R6, A7, A8, \dots, A12\}$   
 $A \cap B = \{2\}$   
 $B \cup C = \{R1, R2, R3, R4, R5, R6, A8, A10, A12\}$

Nota. Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 8 (p.208), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.

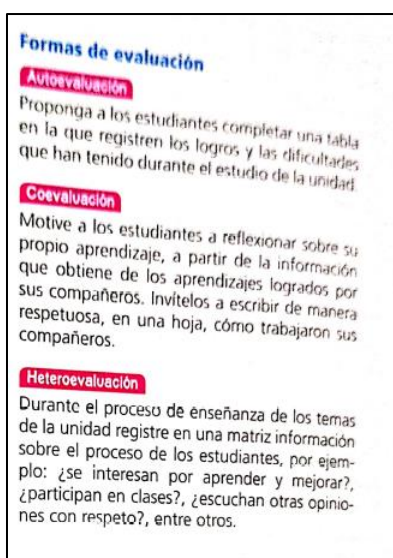
En relación con la metodología de evaluación, los libros guía para el docente establecen estrategias pedagógicas de seguimiento y refuerzo. Además, diferentes formas de evaluación (autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación) (ver Figura 100) y el solucionario de las actividades propuestas en el apartado “Evaluación del aprendizaje”:

**Figura 99**  
*Sugerencias didácticas 3*



Nota. Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 8 (p.218), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.

**Figura 100**  
*Formas de evaluación*



Nota. Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 8 (p.219), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.



#### F) Lenguaje

En general los libros manejan un lenguaje explicativo y en la mayoría de las medidas de dispersión, se implementa el lenguaje simbólico como se muestra en la Figura 88. Como ya se mencionó anteriormente, en el apartado “Practica más” y “Actividades de aprendizaje” se busca el desarrollo de la comunicación como proceso matemático (ver Figura 93). Así mismo, en la sección “Resolución de problemas” se incita al estudiante a comunicar sus ideas mediante el lenguaje matemático tratando de formular situaciones problema. Para los Lineamientos curriculares (1998), es importante el proceso de la comunicación ya que permite a los estudiantes mostrar una relación entre sus conocimientos o nociones, y el lenguaje simbólico de las matemáticas.

En cuanto al lenguaje matemático y el uso de la simbología, la editorial maneja un progreso secuencial en donde para grado octavo trata de presentar las fórmulas de las medidas de dispersión de forma simple teniendo en cuenta el nivel académico del alumno. En consecuencia, para los grados noveno y décimo el nivel en la introducción de las fórmulas aumenta involucrando nuevos símbolos matemáticos. Por ejemplo, en grado octavo para la fórmula de la varianza (ver Figura 84) no se utiliza el símbolo de la sumatoria. En cambio, para grado noveno, la fórmula se muestra inicialmente como se presenta en grado octavo y se hace la precisión en que está sería igual al utilizar el símbolo de la sumatoria (ver Figura 86).

#### G) Ilustraciones

La mayoría de las ilustraciones son utilizadas para dar un contexto a la actividad, ejercicio o situación problema que se está abordando (ver Figura 95). En cuanto al uso de gráficos y tablas, su presencia se da para resumir los datos de la actividad (ver Figura 96, actividad 1) o como eje principal en la interpretación de un conjunto de datos (ver Figura 93, actividad 6).

#### H) Motivación

Se presentan aspectos motivadores a través de un marco de resolución de problemas, de este modo, el estudiante se siente retado y adquiere confianza en el uso de las matemáticas. La exhibición de una estrategia en el apartado “Resolución de problemas” y la presentación de un paso a paso para abordar situaciones problema (ver Figura 95), motiva al estudiante y lo guía en la puesta en práctica de diferentes estrategias.

#### I) Tecnologías de la información y de la comunicación

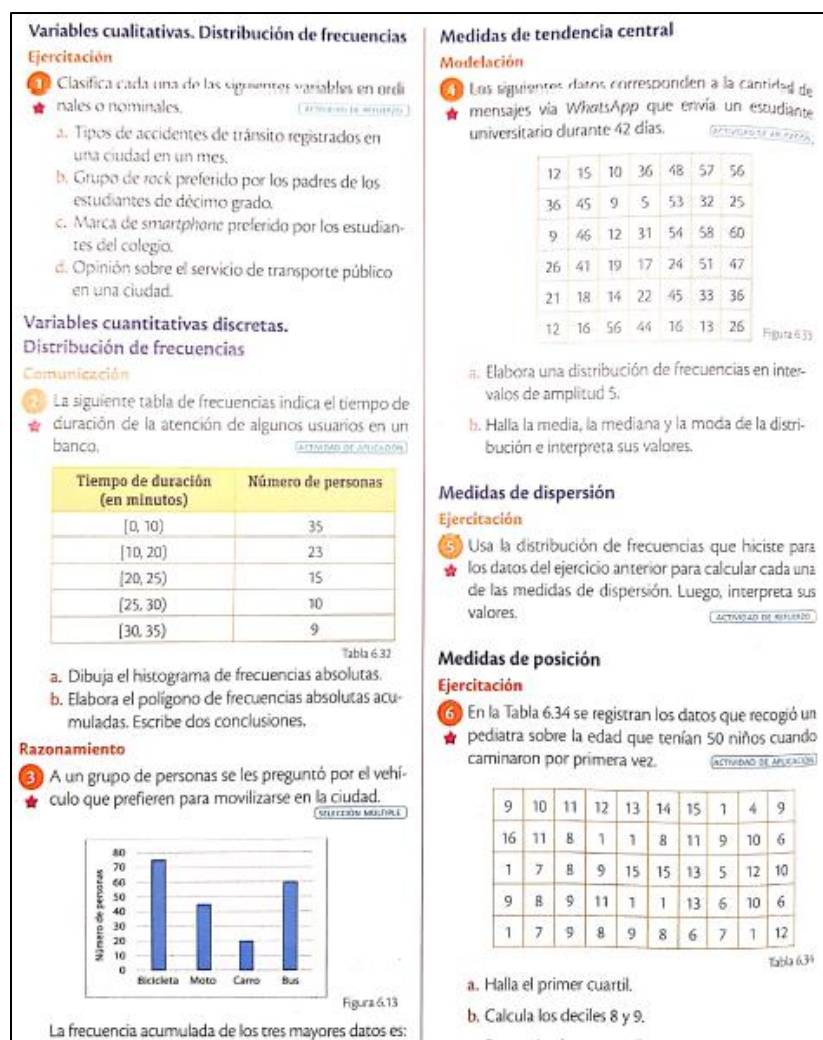
En general los libros no plantean actividades que estén relacionadas con el uso de calculadoras gráficas, software o internet. Para Nickerson (1995) (citado en Del Pino, 2019), el uso de recursos tecnológicos permite un aprendizaje activo en donde se descubren relaciones, nociones, y conceptos; que involucren un aprendizaje constructivo. Por ende, la no implementación de las TIC’S en los libros de la editorial, serian un aspecto por mejorar.

## J) Evaluación

En MEN (2017), se define la evaluación como un proceso continuo que permite reconocer fortalezas y aspectos por mejorar. En consecuencia, al finalizar la unidad 6 se presenta la sección “Evaluación del aprendizaje” donde se muestran diferentes actividades para desarrollar este proceso y se clasifican de la siguiente manera: pregunta abierta, selección múltiple, verdadero/falso, actividad para completar, actividad de aplicación, organizador gráfico, solución de problemas, actividad para relacionar y actividad de refuerzo (ver Figura). Además, estas actividades de evaluación se ciñen a los procesos cognitivos de la Figura 92 y los matemáticos. Así mismo, los libros sugieren al estudiante realizar las actividades de esta sección en su respectivo cuaderno.

**Figura 101**

*Evaluación del aprendizaje*



*Nota.* Tomado de Vamos a aprender Matemáticas 10 (p.256), por MEN, 2017, Ediciones SM S.A.

En cuanto a las sugerencias didácticas de evaluación por parte del texto guía para el docente, se proponen diferentes estrategias de seguimiento como se muestra en la Figura 99 y formas de evaluación (ver Figura 100).

#### K) Enfatización

Los libros manejan la enfatización en contenidos mediante los apartados “Saberes previos”, “Analiza” y “Conoce” (ver Figura 83). Por otro lado, se muestra el apartado “Enriquece tu vocabulario” en donde el alumno podrá ampliar su vocabulario matemático (ver Figura 95). Por último, al finalizar los libros se presenta un glosario con los conceptos que se abordaron durante el desarrollo de las unidades.

#### L) Recursos generales

En general los libros no sugieren la implementación de recursos audiovisuales, manipulables u otras fuentes.

### 5.6 Resultados

Para abordar el análisis de resultados de los textos presentados anteriormente, se sistematizó la información obtenida de acuerdo con las categorías del modelo exhaustivo en la matriz que se presenta en el Anexo 1. Los resultados comparativos de los textos analizados permiten dar cuenta de si siguiente:

*Objetivos:* En general no aparecen explícitamente objetivos en ninguno de los textos escolares, los más cercanos a la estructura de un objetivo de enseñanza viene siendo el apartado “Vamos a aprender” de la editorial MEN y los “Indicadores de logro” de Libros & Libros, fundamentando su estructura de objetivos en los Lineamientos curriculares (1998) y los EBCM (2006). En cuanto a los demás textos, el lector puede identificar al inicio de las unidades o capítulos, una guía de las temáticas que se van a abordar.

*Contenidos:* Las medidas de dispersión manejadas por las cuatro editoriales son: el rango o recorrido y la desviación estándar o típica. En solo una editorial no se presentó la varianza como medida de dispersión, y en dos editoriales se tuvo en cuenta el coeficiente de variación de Pearson. Algunos textos iniciaban presentando el rango y otros la desviación media, por ende, no se evidencia una organización general en las cuatro editoriales. Sin embargo, sí se observa una linealidad entre los contenidos presentados en cada uno de los libros por editorial. En cuanto a la coherencia entre los “objetivos” planteados y los contenidos abordados, fue mínima la cantidad de libros que mostraba en su tabla de contenidos u objetivos las medidas de dispersión como temática. No obstante en el desarrollo de la unidad o capítulo si se presentaba este tipo de contenidos. En general, todos los textos escolares presentaron algunas de las medidas de dispersión señaladas en los EBCM (2006).

*Conexiones:* En definitiva todas las editoriales se centran en mostrar al lector las diferentes aplicaciones de la estadística, por consiguiente, se establecen conexiones entre los contenidos

abordados en cada texto escolar y situaciones de la vida real. Concretamente, algunos libros manejan los proyectos y temas transversales que permiten este tipo de conexiones. Dos de la editoriales, creen oportuna la relación que se puede establecer entre la historia de las matemáticas y la adquisición de nuevos conocimientos.

*Actividades:* Las cuatro editoriales manejan actividades que potencian algunos procesos generales de la actividad matemática, establecidos por los Lineamientos Curriculares (1998): la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Otras actividades desarrollan uno de los componentes de la cultura estadística señalados por Contreras y Molina (2019): la comprensión, interpretación y argumentación de la información estadística. Por lo que se refiere al uso de recursos tecnológicos, dos editoriales presentaban actividades que fomentan el uso de calculadoras graficadoras, software, enlaces de internet, Excel, etc. En cuanto a la adecuación de las actividades planteadas con los contenidos abordados y los objetivos propuestos, todos los textos escolares mantenían esta coherencia. El uso de temas transversales o proyectos por parte de las cuatro editoriales fomenta la implementación de actividades guiadas y la formulación de situaciones problema.

*Metodología:* En general todas las editoriales manejan como metodología la resolución de problemas y tienen presentes los referentes curriculares nacionales (EBCM, 2016; DBA, 2015) e internacionales (NCTM, 2003). Es decir, tienen en cuenta los estándares, los pensamientos, las competencias y procesos matemáticos o cognitivos. Los libros manejan diferentes aspectos metodológicos como el uso de recursos tecnológicos o manipulables, temas y proyectos transversales, espacios de argumentación y formulación de problemas, por último, la presentación de libros guías para los docentes. En cuanto a la justificación metodológica, solo dos editoriales hacen explícita su base para la propuesta de actividades, contenidos y recursos a implementar. Con respecto a la metodología de evaluación, tres editoriales hacen explícitos sus criterios evaluativos y proponen diferentes herramientas como simulacros para las Pruebas Saber y preuniversitarios. Además de diferentes formas de evaluación como la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación.

*Lenguaje:* Algunas editoriales hacen un mayor uso del lenguaje simbólico, sin embargo, todas usan un lenguaje simple y explicativo en la explicación de sus temáticas. Solo dos editoriales hacen énfasis en el desarrollo de la comunicación como proceso matemático, establecido en los Lineamientos curriculares (1998). Por ende, se plantean actividades de argumentación y formulación de situaciones problema.

*Ilustraciones:* Todas las editoriales manejan ilustraciones que tienen como finalidad dar un contexto a los estudiantes de las actividades, ejercicios o problemas. Cabe resaltar que aunque los gráficos estadísticos (diagrama de cajas y bigotes, histogramas, diagramas de dispersión, polígonos de frecuencia, diagramas de puntos, etc.) y las tablas no son ilustraciones, se evidencia un mayor uso de estos en los textos escolares. Los gráficos y tablas tienen como función ayudar en la interpretación y representación de los datos que se van a analizar.

*Motivación:* El principal enfoque para la motivación implementado por todas las editoriales, es la resolución de situaciones problema y las actividades guiadas. Solo una editorial enfatiza en el uso de datos provenientes de fuentes confiables o bases de datos, lo cual, motiva al estudiante y le muestra la aplicación de la estadística en contextos reales. Dos editoriales utilizan las conexiones de la estadística con la evolución histórica y otras disciplinas, como aspecto motivador en el análisis de datos mediante las medidas de dispersión.

*Tecnologías de la información y de la comunicación:* Las editoriales promueven el uso de variados recursos educativos: audios, imprimibles, galerías, calculadoras gráficas, Excel, videoclips, software gráficos, simulaciones, calculadora científica, vínculos interactivos, paquetes de estadística, entre otros. Por último, la editorial Haese & Harris Publications presenta la innovadora ayuda interactiva *Selftutor*, la cual mediante un audio realiza explicaciones de conceptos, actividades o ejercicios. Sin embargo, una editorial no involucra a los estudiantes en el mundo de los recursos tecnológicos, lo cual, limita las aplicaciones del análisis de datos.

*Evaluación:* En concreto, solo la editorial del MEN define qué es la evaluación y las formas en las se evaluarán los contenidos en cada libro (autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación), teniendo en cuenta lo establecido en el Decreto 1290 (MEN, 2001). De este mismo modo, facilita metodologías de evaluación a los profesores en el texto guía de docentes. En cuanto a las otras editoriales, manejan diferentes herramientas como apartados de ejercicios, solucionarios, Pruebas Saber y preuniversitarios, que permiten una autoevaluación por parte del estudiante. Sin embargo, no se establecen como tal criterios de evaluación.

*Enfatización:* En general las editoriales manejan apartados de síntesis, glosarios, resúmenes, etc. como herramientas de enfatización. En cuanto al afianzamiento de aprendizajes, se emplean proyectos, temas transversales, situaciones problema, en donde se pueda enfatizar en la aplicación de los conocimientos adquiridos.

*Recursos generales:* Dos de las editoriales manejan Libromedia o CD como un banco de imprimibles, hojas de cálculo, videoclips, software gráficos, simulaciones, vínculos interactivos, paquetes de estadística, entre otros.

## CAPÍTULO 6. CUESTIONARIO Y ENTREVISTA

Partiendo de los objetivos propuestos para el presente trabajo se lleva a cabo la elaboración de un cuestionario y entrevista que se aplicó a algunos formadores de futuros docentes, y profesores de colegios públicos y privados, en especial algunos que han trabajado con los textos del IB. Esta decisión se fundamenta en el importante valor que se puede dar a la valoración u opinión de profesionales en la educación básica y universitaria, acerca del uso y elección de los libros de texto escolar para la enseñanza de las medidas de dispersión. Para la elaboración del cuestionario y entrevista, se seleccionaron cinco de las categorías que se analizaron en la muestra de textos escolares: objetivos, actividades, contenidos, lenguaje y metodología. Lo anterior, teniendo en cuenta que en dichas categorías se obtuvo un mayor número de resultados y se optaron como las más importantes a tener en cuenta en el análisis de los textos seleccionados. Cabe aclarar que este es un estudio de casos, es decir, la intención no es generalizar, se busca la comprensión del problema que dio origen a este trabajo de investigación, permitiendo analizar la situación desde varias perspectivas y no desde la influencia de una sola variable (Martínez y Piedad, 2006).

El cuestionario que se llevó a cabo contaba con trece preguntas cerradas y tres abiertas (nombre, institución en la que labora y comentarios). Además, se diseñó teniendo en cuenta las sugerencias hechas por Sarmiento & Fernández (2014), los cuales señalan que se deben formular pocas preguntas para no saturar al encuestado, plantear preguntas cerradas, implementar un lenguaje sencillo y concreto, evitar el uso de palabras ambiguas, etc. Cabe resaltar, que las preguntas cerradas presentaban una escala de calificación tipo Likert donde el encuestado debía señalar qué tan de acuerdo o en desacuerdo estaba con la declaración. En cuanto al medio, el cuestionario se realizó mediante la herramienta Forms de Google y se facilitó a 15 docentes de universidades y colegios.

A continuación, se presentan las preguntas cerradas realizadas:

1. Tipo de institución en la que labora. Opciones de respuesta: privada o pública.
2. El uso de un libro de texto escolar de matemáticas es de importancia fundamental en la educación estadística.
3. Las medidas de dispersión son una temática de la estadística, la cual se puede enseñar y/o aprender con la ayuda de un texto escolar.
4. Es importante la presencia explícita de objetivos en cada uno de los capítulos o unidades de un libros de texto escolar matemático.
5. Los libros de texto escolar deben procurar seguir de manera cercana las recomendaciones curriculares oficiales, relativas a la ubicación de contenidos según los grados escolares.
6. El uso del lenguaje simbólico al presentar las definiciones es apropiado en la enseñanza y aprendizaje de las medidas de dispersión.

7. El uso del lenguaje cotidiano y cercano al estudiante para presentar las definiciones es apropiado en la enseñanza y aprendizaje de las medidas de dispersión.
8. Las editoriales de libros de texto escolar deberían plantear actividades que requieran el uso de calculadoras gráficas y/o paquetes de datos.
9. No es de fácil implementación el uso de calculadoras gráficas y/o paquetes de datos en el desarrollo de actividades planteadas en textos escolares.
10. En la enseñanza y aprendizaje de las medidas de dispersión es importante priorizar el rango y la desviación estándar sobre la varianza, el coeficiente de variación y la desviación media.
11. El uso de tablas y gráficos estadísticos en los libros escolares debe ser netamente una herramienta de ejemplificación y/o para mostrar los datos que se relacionen en las actividades planteadas.
12. Actividades en las cuales se use la interpretación de información contenida en gráficos y tablas son de vital importancia en la comprensión de temáticas como las medidas de dispersión.
13. Son importantes tanto para estudiantes como profesores, los apartados de enfatización que presentan los libros escolares en forma de resúmenes, síntesis y glosarios pues aportan a una mejor comprensión de la temática.

La entrevista que se llevó a cabo entra en la categoría de semiestructurada y solo fue posible aplicarla con una de las profesionales en la educación y formadora de futuros educadores, de las cuatro previstas. La entrevista se generó mediante la plataforma Zoom y contó con las siguientes preguntas guía:

1. ¿Cuál es el uso que usted le daría o le ha dado a un libro de texto escolar de matemáticas?
2. ¿Considera que las medidas de dispersión son una temática de la estadística la cual se puede enseñar y/o aprender con la ayuda de un libro de texto escolar?
3. Es importante la presencia explícita de objetivos en cada uno de los capítulos o unidades de un libro de texto escolar matemático. ¿Si o no, y por qué?
4. En la revisión de una muestra de textos escolares de cuatro diferentes editoriales se evidenció lo siguiente: las medidas de dispersión eran presentadas desde grado octavo y según los documentos curriculares Colombianos, para este grado se puede trabajar la noción de dispersión. Ya oficialmente a partir de grado décimo, se puede presentar a los estudiantes este tipo de medidas. ¿Considera que esta acción es pertinente? ¿Por qué si o por qué no?
5. Tres de cuatro editoriales estudiadas, hacen uso de lenguaje simbólico al presentar las definiciones y la otra emplea un lenguaje más cotidiano, cercano a los estudiantes. ¿Desde su experiencia cuál de las opciones le parece más apropiada teniendo en cuenta la temática específica, medidas de dispersión, y los cursos (octavo, noveno, décimo y once)?



6. Tres de las cuatro editoriales emplean actividades apoyadas o diseñadas para ser trabajadas por medio de calculadoras y/o paquetes de análisis de datos. ¿Qué opinión tiene acerca del uso de estas herramientas en la enseñanza de las medidas de dispersión? ¿Desde su experiencia cuan posible considera es su implementación?
7. En las cuatro editoriales se tiene en común la presentación del rango y la desviación estándar como medidas de dispersión. ¿Porque considera que al hablar de dispersión en la educación escolar se suele tener en cuenta solo estos dos tipos de medidas?
8. Una de las metodologías implementadas por los textos es el uso de gráficos y tablas, sin embargo, la mayoría de estas cumplían solo una función de ejemplificación de problemas y/o actividades. Pocas veces se presentaban actividades, problemas o ejercicios donde el eje central fuera la interpretación de gráficos y tablas. Según su experiencia, ¿Por qué considera que no se presentan actividades de esta naturaleza?
9. En general los libros manejaban como metodología de enfatización apartados con síntesis, resúmenes, glosarios, etc. ¿Considera que este tipo de metodologías es útil en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, en especial en el aprendizaje de las medidas de dispersión?

## 6.1 Resultados

Teniendo en cuenta las respuestas de los docentes y el Anexo B, se obtienen los siguientes resultados:

- ✓ Con respecto a la importancia en el uso de textos escolares de matemáticas para la educación estadística, la mayoría de los docentes no están de acuerdo con este papel crucial. Es decir, podrían prescindir del uso de textos escolares matemáticos, hasta el punto de llegar a ver poco útil su implementación. Por otro lado, el 30% se muestra indiferente ante el uso de estos y finalmente, el ultimo 30% sí opina que los textos escolares de matemáticas son una herramienta primordial en la educación estadística.
- ✓ Se puede identificar que la mayoría de los docentes opinan que las medidas de dispersión sí son una temática que se puede enseñar y/o aprender mediante el uso de los libros de texto escolar matemáticos.
- ✓ La mayoría de los profesores sugieren que es importante la presencia de objetivos al inicio de las unidades o capítulos de los textos escolares de matemáticas.
- ✓ Para los docentes es recomendable que los libros escolares de matemáticas tengan en cuenta los documentos curriculares colombianos que rigen el sistema educativo, en cuanto a la ubicación de contenidos según los grados de los estudiantes.
- ✓ En cuanto al uso del lenguaje simbólico en la presentación de las medidas de dispersión, no se observa una postura definitiva ya que el 30% de los docentes manifestó estar de acuerdo, otro 30% expuso serle indiferente este tema, 30% afirmó estar en desacuerdo, y por último el 10% está totalmente en desacuerdo. Es decir, para algunos profesores el manejo del lenguaje simbólico debe ser tenido en cuenta, y para otros tantos, es un tema que poco influye en la enseñanza y aprendizaje de las medidas

de dispersión, incluso llegando a ser de poca importancia. Se resalta que ninguno de los participantes expuso estar totalmente de acuerdo con la implementación del lenguaje simbólico en el uso de las medidas de dispersión para ambientes escolares. Además, se señaló por algunos docentes, que esta respuesta podría estar condicionada al nivel académico de los estudiantes.

- ✓ Más de la mitad de los docentes expresó estar de acuerdo o totalmente de acuerdo con el uso del lenguaje cotidiano en el abordaje de las medidas de dispersión. Por otro lado, un 20% se mostró indiferente. Resulta ser inquietante que en la pregunta anterior el 30% fue indiferente y en esta el 20 % también, lo cual deja el siguiente interrogante: ¿Para algunos docentes el lenguaje que se maneje en el aula o en los textos escolares que se implementen, es un asunto de poca importancia en el aprendizaje y enseñanza de la estadística? También cabe resaltar que algunos docentes expresaron que esta respuesta podría estar condicionada al nivel académico de los estudiantes.
- ✓ El 80% de los profesores manifestó estar de acuerdo o totalmente de acuerdo con el planteamiento de actividades en los textos escolares donde se involucren calculadoras gráficas, paquetes de datos, software, etc. Los otros docentes se mostraron indiferentes, yendo así en contravía con el impacto positivo de los recursos tecnológicos en la interpretación y comprensión de la información estadística que señalan autores como Blanco (2018), Del Pino (2019) entre otros.
- ✓ La mitad de los docentes están en desacuerdo o totalmente en desacuerdo con la siguiente afirmación: “No es de fácil implementación el uso de calculadoras gráficas y/o paquetes de datos en el desarrollo de actividades planteadas en textos escolares”. Es decir, para la mitad de los profesores es cómodo el uso de las TIC en diferentes actividades de los textos escolares. El otro 40% está de acuerdo con la afirmación, por ende, opinan que el uso de estos recursos no es una opción acertada teniendo en cuenta que llevar a cabo este tipo de actividades resultaría dificultoso. Una posible razón por parte de los profesores al momento de expresar esta inconformidad podría estar asociado a que algunos docentes son de colegios públicos y atienden a poblaciones vulnerables, lo cual imposibilita el uso de herramientas tecnológicas.
- ✓ La mayor parte de los profesores opinan que no se debería priorizar la presentación del rango y la desviación estándar, frente a las otras medidas de dispersión.
- ✓ El 70% de los docentes expresan estar en desacuerdo o en total desacuerdo con el uso de gráficos y tablas únicamente como herramientas de ejemplificación. Por otro lado, el 90% de los profesores apoyan la implementación de actividades en donde se evalúe la interpretación de gráficos estadísticos o tablas.
- ✓ En cuanto al uso de apartados de enfatización (glosarios, resúmenes, síntesis, etc.) en los textos escolares de matemáticas, la mitad de los docentes se mostraron indiferentes ante la importancia de estos en la comprensión de contenidos. El otro 50% estuvieron de acuerdo o totalmente de acuerdo al señalar que estos apartados favorecían la enseñanza y aprendizaje de la estadística.

- ✓ Algunos docentes manifestaron que la mayoría de las afirmaciones no solo aplican en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de las medidas de dispersión, sino en cualquier tema matemático abordado en textos escolares. Además, señalaron que las medidas de dispersión están abandonadas por parte de los currículos y los libros de texto escolares, dando así a entender que no son una parte fundamental de la estadística. Por ende, los libros escolares de matemáticas no presentan las aplicaciones científicas y sociales de la estadística.

Con respecto a la entrevista llevada a cabo y el Anexo C, se obtienen los siguientes resultados:

- ✓ Los textos escolares deberían ser una herramienta didáctica y no el foco principal en la planeación de clases, teniendo en cuenta que no son una carta de navegación en la educación estadística. Viendo los textos como un referente, estos no son la única guía que se debería tener en cuenta al momento de presentar las medidas de dispersión o cualquier tema de la estadística. Lo anterior, depende del fin o la utilidad que el docente le quiera dar a los libros escolares de matemáticas. Por consiguiente, se debe ser responsable con la elección de estos y tener ciertos criterios para su selección.
- ✓ En cuanto al planteamiento de actividades, los textos escolares deberían manejar actividades que promuevan el trabajo articulado de las ideas fundamentales de la estadística señaladas por Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013) como la distribución y la variabilidad. Esto teniendo en cuenta que la estadística ya no se trabaja por temas como las medidas de tendencia central o de dispersión, sino, proyectos o situaciones en donde se entrelacen las medidas de dispersión con la idea de variabilidad, centralidad o distribución. Lo cual, tiene sentido al momento de comprender que las medidas de dispersión no son un tema o temática de la estadística, más bien una medida que se utiliza para el análisis. El problema recae en que algunas editoriales no han comprendido que la estadística no es algorítmica, por ende, se siguen proponiendo actividades que fomentan el cálculo aritmético de las medidas de dispersión. En consecuencia, no se promueven situaciones en las que los estudiantes deban proponer y definir un problema, identificar el tipo de datos, el propósito, recolectar datos, analizarlos y construir argumentos. Lo anterior, causando que los alumnos no identifiquen en qué tipo de escenarios se pueden o no utilizar las medidas de dispersión.
- ✓ Los textos escolares de matemáticas no fomentan el trabajo en equipo, en consecuencia se alude a la autonomía por parte del estudiante.
- ✓ Es necesario que los textos escolares para el estudiante y los libros guía del docente planteen objetivos o logros, permitiendo así delimitar los contenidos a trabajar y dar cuenta de las habilidades, competencias o procesos que se van a desarrollar. Aquí es donde recae el importante valor de los libros guía para el docente, teniendo en cuenta que le dan al profesor un panorama de los contenidos, las posibles dificultades o errores de los estudiantes, rutas didácticas, solucionarios, etc.

- ✓ El lenguaje simbólico es importante, pero la estadística se puede trabajar desde un acercamiento informal. A veces es más importante las interpretaciones gráficas, de resultados, o el comportamiento de los datos; en comparación con el aprendizaje de símbolos.
- ✓ Al final se debe tener en cuenta que las editoriales manejan diferentes limitantes económicos, al ser un negocio no se privilegia solo lo educativo. Por ende, muchas veces el número de páginas, actividades, gráficos estadísticos y tablas, están regidos por el precio que se le va a ofrecer al consumidor (colegios, docentes, estudiantes, etc.) y aspectos que según la editorial se deben privilegiar. Por otro lado, las editoriales tienen en cuenta su público objetivo, no es lo mismo un libro escolar dirigido a un colegio privado, por ejemplo el del IB, que uno encaminado a colegio público (Vamos a aprender del MEN). En esto influyen aspectos como la implementación de recursos tecnológicos en el desarrollo de los libros. Por ejemplo, los textos escolares enfocados en estudiantes de colegios privados dan por hecho que los alumnos cuentan con los recursos económicos para adquirir equipos computacionales, manipulables, etc.
- ✓ Ningún libro es bueno o malo, solo una herramienta. Los docentes son los que deben darle un uso, y a partir de esa implementación se verá su viabilidad.

## CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

En relación con los objetivos planteados en el presente trabajo, más que la proposición de un marco conceptual se atiende a tres tipos de referentes conceptuales que tienen en cuenta la perspectiva normativa (capítulo 2), aspectos disciplinares (apartado 3.1) y aspectos didácticos (apartado 3.2), enfatizando en estos últimos en el concepto de dispersión y las medidas que lo cuantifican.

Como aproximación metodológica, se contempla la utilización del Modelo Exhaustivo como herramienta en el análisis de los textos escolares seleccionados. En efecto, la utilización de tal modelo permite lograr el análisis de textos escolares en la muestra de los textos seleccionados y obtener diferentes resultados a la luz de las categorías definidas. Además, desde la discusión de algunas de las categorías propuestas en este modelo (objetivos, actividades, contenidos, lenguaje y metodología) se logra involucrar a formadores de futuros docentes y a profesores de colegios, quienes permiten así, comparar, aportar y contrastar los análisis de los resultados obtenidos previamente mediante un estudio de casos.

En general los textos escolares analizados mostraron que los objetivos son contruidos a partir de la metodología que pone en práctica la editorial y los documentos curriculares colombianos. En consecuencia, los contenidos abordados respetan el nivel educativo de los estudiantes y manejan una coherencia con la noción de dispersión y sus principales medidas. Por ende, las metodologías implementadas involucran el uso de conexiones de la estadística con diferentes áreas del conocimiento escolar, la implementación de recursos tecnológicos que exploten las aplicaciones de las medidas de dispersión y muestren una estadística útil para el estudiante. Se incluyen actividades que tienen en cuenta el aprovechamiento de gráficos y tablas, los procesos generales de la actividad matemática, los componentes de la cultura estadística, y los proyectos transversales. En general, el uso del lenguaje simbólico suele ser limitado, y se prioriza el desarrollo de competencias, procesos cognitivos y habilidades matemáticas. Aunque es comprensible esta decisión, es importante aclarar que esta forma de limitar el lenguaje simbólico debe ser asociada a los niveles académicos de los estudiantes y conforme el alumno avance, estos limitantes deben ir desapareciendo en pro de un desarrollo más completo de los conceptos y su comunicación matemática tal como lo sugieren los documentos curriculares colombianos.

Conviene subrayar que cada una de las metodologías abordadas por las editoriales están articuladas con el individuo específico para el cual está dirigido el texto escolar. En efecto, este análisis dejó en evidencia que la editorial Haese & Harris Publications presenta un amplio panorama tecnológico para el lector y tiene en cuenta documentos curriculares internacionales que alimentan la formación de ciudadanos preparados para enfrentarse a retos nacionales e internacionales. Como resultado, no se limita con la implementación de recursos, particularmente tecnológicos, en sus textos escolares que van dirigidos a estudiantes de colegios privados. Por otro lado, editoriales como Santillana y Libros & Libros

S.A se restringen a establecer objetivos, contenidos, actividades y evaluaciones acordes con los documentos curriculares colombianos, en donde se maneja cierto número de páginas, gráficos, tablas, y actividades, sin dejar de lado su enfoque comercial. Por el contrario los textos del MEN son los más orientados al desarrollo de las medidas de dispersión desde los proyectos, rutas didácticas, etcétera; en ellos, se da a entender que la estadística, en especial las medidas de dispersión, tienen sentido en situaciones diarias donde se involucran datos.

Los resultados del análisis a los textos escolares, el cuestionario y la entrevista, muestran que los libros de textos escolares aún son un instrumento funcional en la educación matemática. En especial, cuando el docente identifica qué actividades o recursos propuestos en los libros, promueven el desarrollo del pensamiento aleatorio y la construcción de una cultura estadística en el estudiante. Por consiguiente, al momento de elegir un texto escolar de matemáticas se debe tener en cuenta si los objetivos, contenidos, actividades, metodologías, recursos, y evaluaciones propuestas en estos, cumplen con la dirección o el enfoque que el profesional en la educación quiere darle a la enseñanza de la estadística y en consecuencia, al concepto de dispersión y a las medidas que lo cuantifican. Por ende, la pertinencia en la presentación de las actividades o recursos de cada editorial, estará ligada al uso que el docente de matemáticas quiera darle al texto escolar. Sin embargo, luego del análisis realizado (ver Anexo A) y teniendo en cuenta lo determinado por Del Pino (2019) en el apartado 4.1, se puede establecer que si el docente de matemáticas quiere ceñirse a lo estipulado en los documentos curriculares colombianos y comprender la naturaleza de cada una de las actividades propuestas en el texto, la mejor opción serían los libros de la editorial del MEN. La pertinencia sujeta a las demás editoriales estaría articulada con el contexto de la institución y el papel que se le otorgue al libro de texto escolar dentro del aula.

La principal conclusión de este trabajo se centra en el papel del texto escolar de matemáticas como una herramienta didáctica en el aula, la cual alimenta las planeaciones de clase y los objetivos que el docente trace. No se puede atribuir al libro de texto escolar la total responsabilidad de atender a los diferentes aspectos que se involucran en la enseñanza-aprendizaje de las medidas de dispersión y las ideas fundamentales de la estadística (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013) que allí se involucran. Su principal función es ser un material auxiliar de apoyo en la educación matemática que se puede complementar con otros tipos de recursos tecnológicos, manipulables, etc.

Pensarse el aprendizaje del concepto de dispersión como un ejercicio que baste ser mediado o asumido solo con los libros de texto escolar como única herramienta, es inviable. La mediación del docente es necesaria para dotar este proceso de significado y aportar al desarrollo del estudiante como un ciudadano crítico. Por lo tanto, reducir el aprendizaje de la estadística al uso de una única herramienta por parte del docente puede ser un desatino que termine generando en los estudiantes una habilidad para el cálculo y la ejercitación, pero sacrificando totalmente el análisis e interpretación de datos. De este modo se resalta que el concepto de dispersión y de las medidas que lo cuantifican aún es presentado como un

proceso algorítmico. El cual, muestra a los estudiantes una serie de pasos que muchas veces no involucra la interpretación de la variabilidad y se resume a un acto aritmético.

Este tipo de análisis que se llevó a cabo puede ser útil como herramienta esencial en la elaboración de textos escolares de matemáticas, y en la obtención de criterios por parte de los docentes a la hora de seleccionar textos que atiendan a las categorías que se señalaron y cumplan con los documentos curriculares colombianos. Por ende, el presente trabajo busca ser un aporte para la comprensión de los libros de texto escolares como instrumento con características relevantes de acuerdo con los distintos contextos educativos, junto a otras estrategias o materiales para potenciar y dar significado al aprendizaje de la estadística.



## CAPÍTULO 8. REFERENCIAS

- Alsina, Á., & Domingo, M. (Noviembre de 2007). Cómo aumentar la motivación para aprender matemáticas. *SUMA* (56), 23-31. Recuperado el 06 de Septiembre de 2021, de <https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/14225/023-031.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- American Statistical Association (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE). College Report*. Alexandria, VA: American Statistical Association. Recuperado de: <http://www.amstat.org/education/gaise>.
- Arévalo, S., Garzón, L., Perafán, B., Rangel, J., Chávez, S., Silva, O., . . . López, M. (2008). *Glifos 8 Procesos matemáticos*. Bogotá, D.C.: Libros & Libros S.A.
- Arévalo, S., Garzón, L., Perafán, B., Rangel, J., Chávez, S., Silva, O., . . . López, M. (2008). *Glifos 9 Procesos matemáticos*. Bogotá D.C.: Libros & Libros S.A.
- Arévalo, S., Garzón, L., Rodríguez, J., Rangel, J., Perafán, B., Chávez, S., . . . Jiménez, N. (2008). *Glifos 10 Procesos matemáticos*. Bogotá D.C.: Libros & Libros S.A.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 83, 7-18.
- Batanero, C., González-Ruiz, I., López-Martín, M., & Contreras, J. (2015). *La dispersión como elemento estructurador del currículo de estadística y probabilidad*. *Épsilon*, 32(2), 7-20.
- Blanco, A. (2018). Directrices y recursos para la innovación en la enseñanza de la Estadística en la universidad: una revisión documental. *REDU. Revista de Docencia Universitaria*, 16(1), 251-267.
- Buitrago, L., Romero, J., Ortiz, L., Gamboa, J., Morales, D., Castaño, J., & Jiménez, J. (2013). *Los Caminos del Saber, Matemáticas 10*. Bogotá, Colombia: Editorial Santillana.
- Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *ALFA 8, Serie de matemáticas para educación básica secundaria y media vocacional*. Bogotá, Colombia: Editorial Norma.
- Contreras, J. M. y Molina-Portillo, E. (2019). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos. En J. M. Contreras, M. M. Gea; M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en [www.urg.es/local/fqm126/civeest.html](http://www.urg.es/local/fqm126/civeest.html)

- De Armas, R., Ramírez, M., Acosta, M., Romero, J., Gamboa, J., Celi, V., . . . Salazar, F. (2013). *Los Caminos del Saber, Matemáticas 9*. Bogotá, Colombia: Editorial Santillana.
- Del Pino, J. (2017). Síntesis de la investigación sobre variabilidad y dispersión en estadística. Granada, España.
- Del Pino, J. (2019). Las medidas de dispersión en educación secundaria obligatoria: Análisis de libros de textos y de la comprensión de los estudiantes. Jaén, España.
- Dormolen, J. (1986). Textual Análisis. En Christiansen, B., Howson, A. G., Otte, M. (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 141 – 171). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Escudero, J. M. (1983a). La investigación sobre medios de enseñanza: revisión y perspectivas actuales. *Enseñanza* N.º 1, pp. 87-119.
- Estepa, A., & Del Pino, J. (Julio de 2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Revista Números*, 83, 43-63.
- Gal, I (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- González, M., & Vázquez, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las ciencias*, 22(3), 389-408.
- Gimeno Sacristán, J. (1989). Proyectos curriculares ¿Posibilidad al alcance de los profesores? *Cuadernos de Pedagogía* 172, pp. 14-18
- Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E., & Vollmar, P. (2014). *Mathematics for the international student 10E MYP5(Extended)*. Australia: Haese & Harris Publications. Recuperado el 09 de Septiembre de 2021
- Hernández, z. (2012). *Métodos de análisis de datos: apuntes*. España: Universidad de la Rioja.
- Instituto Nacional de Estadística e Informática. (2009). *Guía para la presentación de gráficos estadísticos*. Lima, Perú. Obtenido de <https://www.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/metodologias/libro.pdf>
- Joya, A., Gamboa, J., Ramírez, M., Castro, C., Aravena, A., & Ávila, J. (2015). *Proyectos transversales Matemáticas 10*. Bogotá D.C.: Editorial Santillana.
- Kilpatrick, J. (2014). From clay Tablet to computer Tablet: The evolution of school mathematics textbooks. En K. Jones, C. Bokhove, G. Howson y L. Fan (Eds.),

- Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT-2014)* (pp. 3-12). Shouthampton, UK.
- López, G. (2008). *monografía.com*. Recuperado el 30 de agosto de 2021, de El lenguaje matemático y sus aplicaciones.: <http://www.monografias.com/trabajos76/lenguaje-matematico-aplicaciones/lenguaje-matematico-aplicaciones.shtml>
- Martínez Bonafé, J. (1991). El cambio profesional mediante los materiales. *Cuadernos de Pedagogía* 189, pp. 61-64.
- Martínez, C., & Piedad, C. (Julio de 2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento & gestión* (20), 165-193. Obtenido de <https://www.redalyc.org/pdf/646/64602005.pdf>
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá D.C, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias Matemáticas*. Bogotá, D.C, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje V2*. Bogotá, D.C, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2017). *Vamos a aprender Matemáticas Guía del docente 8*. Bogotá D.C.: Ediciones SM S.A.
- MEN. (2017). *Vamos a aprender Matemáticas Guía del docente 9*. Bogotá D.C.: Ediciones SM S.A.
- MEN. (2017). *Vamos a aprender Matemáticas Guía del docente 10*. Bogotá D.C.: Ediciones SM S.A.
- MEN. (2017). *Vamos a aprender Matemáticas 8*. Bogotá D.C.: Ediciones SM S.A.
- MEN. (2017). *Vamos a aprender Matemáticas 10*. Bogotá D.C.: Ediciones SM S.A.
- MEN. (2017). *Vamos a aprender Matemáticas 11*. Bogotá D.C.: Ediciones SM S.A.
- MEN. (2017). *Vamos a aprender Matemáticas 9*. Bogotá D.C.: Ediciones SM S.A.
- Meneses, J., & Rodríguez-Gómez, D. (2011). El cuestionario y la entrevista. Barcelona: Universitat Oberta de Catalunya. <https://femrecerca.cat/meneses/publication/cuestionario-entrevista>
- Monterrubio, M.C., Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp.37-53). Santander: SEIEM

- Moreno, L., & Waldegg, G. (2002). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. En Ministerio de Educación de Colombia, *Seminario Nacional de Formación de Docentes: en el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (Segunda ed., págs. 40-66). Bogotá, Colombia.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Thales.
- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortiz, L., Celi, V., De Armas, R., . . . Jiménez, J. (2013). *Los Caminos del Saber, Matemáticas 8*. Bogotá, Colombia: Editorial Santillana.
- Sarmiento, B., & Fernández, F. (2014). *Estadística Descriptiva*. Bogotá D.C.: Ediciones de la U.
- Vollmar, P., Haese, M., Haese, R., Haese, S., & Humphries, M. (2008). *Mathematics for the international student 9 MYP4*. Australia: Haese & Harris Publications. Recuperado el 09 de Septiembre de 2021
- Zafra, M. (2013). Valoración de distintos tipos de ilustración para un mismo texto. Gandía, España.

### Referencias imágenes

- Arévalo, S., Garzón, L., Perafán, B., Rangel, J., Chávez, S., Silva, O., . . . López, M. (2008). *Actividad inicial*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 8 Procesos matemáticos.
- Arévalo, S., Garzón, L., Perafán, B., Rangel, J., Chávez, S., Silva, O., . . . López, M. (2008). *Apartado "Práctica"*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 8 Procesos matemáticos.
- Arévalo, S., Garzón, L., Perafán, B., Rangel, J., Chávez, S., Silva, O., . . . López, M. (2008). *Definición desviación media octavo*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 8 Procesos matemáticos.
- Arévalo, S., Garzón, L., Perafán, B., Rangel, J., Chávez, S., Silva, O., . . . López, M. (2008). *Definición varianza y desviación estándar*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 8 Procesos matemáticos.
- Arévalo, S., Garzón, L., Perafán, B., Rangel, J., Chávez, S., Silva, O., . . . López, M. (2008). *Situación problema*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 8 Procesos matemáticos.
- Arévalo, S., Garzón, L., Perafán, B., Rangel, J., Chávez, S., Silva, O., . . . López, M. (2008). *Coeficiente de Pearson*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 9 Procesos matemáticos.
- Arévalo, S., Garzón, L., Perafán, B., Rangel, J., Chávez, S., Silva, O., . . . López, M. (2008). *Definición desviación media noveno*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 9 Procesos matemáticos.

- Arévalo, S., Garzón, L., Rodríguez, J., Rangel, J., Perafán, B., Chávez, S., . . . Jiménez, N. (2008). *Apartados*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 10 Procesos matemáticos.
- Arévalo, S., Garzón, L., Rodríguez, J., Rangel, J., Perafán, B., Chávez, S., . . . Jiménez, N. (2008). *Apartado “Piensa y aplica”*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 10 Procesos matemáticos.
- Arévalo, S., Garzón, L., Rodríguez, J., Rangel, J., Perafán, B., Chávez, S., . . . Jiménez, N. (2008). *Apartado “Piensa y aplica 2”*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 10 Procesos matemáticos.
- Arévalo, S., Garzón, L., Rodríguez, J., Rangel, J., Perafán, B., Chávez, S., . . . Jiménez, N. (2008). *Apartado “Relaciona”*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 10 Procesos matemáticos.
- Arévalo, S., Garzón, L., Rodríguez, J., Rangel, J., Perafán, B., Chávez, S., . . . Jiménez, N. (2008). *Competencias ciudadanas*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 10 Procesos matemáticos.
- Arévalo, S., Garzón, L., Rodríguez, J., Rangel, J., Perafán, B., Chávez, S., . . . Jiménez, N. (2008). *Clasificación actividades*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 10 Procesos matemáticos.
- Arévalo, S., Garzón, L., Rodríguez, J., Rangel, J., Perafán, B., Chávez, S., . . . Jiménez, N. (2008). *Estándares décimo*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 10 Procesos matemáticos.
- Arévalo, S., Garzón, L., Rodríguez, J., Rangel, J., Perafán, B., Chávez, S., . . . Jiménez, N. (2008). *Preuniversitario*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 10 Procesos matemáticos.
- Arévalo, S., Garzón, L., Rodríguez, J., Rangel, J., Perafán, B., Chávez, S., . . . Jiménez, N. (2008). *Principales medidas de dispersión*. [Fotografía]. Recuperado de Glifos 10 Procesos matemáticos.
- Buitrago, L., Romero, J., Ortiz, L., Gamboa, J., Morales, D., Castaño, J., & Jiménez, J. (2013). *Actividades de interpretación y argumentación*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10.
- Buitrago, L., Romero, J., Ortiz, L., Gamboa, J., Morales, D., Castaño, J., & Jiménez, J. (2013). *Apartado historia de las matemáticas*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10.
- Buitrago, L., Romero, J., Ortiz, L., Gamboa, J., Morales, D., Castaño, J., & Jiménez, J. (2013). *Definición del coeficiente de variación*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10.

- Buitrago, L., Romero, J., Ortiz, L., Gamboa, J., Morales, D., Castaño, J., & Jiménez, J. (2013). *Definición de rango intercuartílico*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10.
- Buitrago, L., Romero, J., Ortiz, L., Gamboa, J., Morales, D., Castaño, J., & Jiménez, J. (2013). *Distribución en forma de campana*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10.
- Buitrago, L., Romero, J., Ortiz, L., Gamboa, J., Morales, D., Castaño, J., & Jiménez, J. (2013). *Plan de trabajo para grado décimo*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10.
- Buitrago, L., Romero, J., Ortiz, L., Gamboa, J., Morales, D., Castaño, J., & Jiménez, J. (2013). *Recursos de la Libromedia*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10.
- Buitrago, L., Romero, J., Ortiz, L., Gamboa, J., Morales, D., Castaño, J., & Jiménez, J. (2013). *Resumen de las medidas de dispersión*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10.
- Buitrago, L., Romero, J., Ortiz, L., Gamboa, J., Morales, D., Castaño, J., & Jiménez, J. (2013). *Tabla de contenidos grado décimo*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10.
- Buitrago, L., Romero, J., Ortiz, L., Gamboa, J., Morales, D., Castaño, J., & Jiménez, J. (2013). *Trabajo con Excel*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 10.
- Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Actividad 3, Taller 19*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.
- Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Actividad "Ejemplo 3"*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.
- Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Apartado "Aplico"*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.
- Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Apartado "Me preparo"*. [Fotografía]. Recuperado

de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.

Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Apartado "Mis avances"*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.

Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Apartado "Taller 19"*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.

Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Apartado "Volvamos sobre"*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.

Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Apartado "¿Cómo surgió?"*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.

Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Apartado "¿En qué se aplica?"*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.

Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Definición de Desviación estándar*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.

Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Definición de Desviación media*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.

Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Definición de Desviación media para datos agrupados*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.

Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Definición de Rango de variación*. [Fotografía].

Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.

Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Glosario*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.

Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Logros de la unidad 10*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.

Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Pasatiempos*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.

Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Solucionario ejercicios pares*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.

Camargo Uribe, L., García de García, G., Leguizamón de Bernal, C., Samper de Caicedo, C., & Serrano de Plazas, C. (1999). *Tipos de gráficos y tablas*. [Fotografía]. Recuperado de ALFA 8 Serie de matemáticas para la educación básica secundaria y media vocacional.

De Armas, R., Ramírez, M., Acosta, M., Romero, J., Gamboa, J., Celi, V., . . . Salazar, F. (2013). *Actividad guiada grado noveno*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 9.

De Armas, R., Ramírez, M., Acosta, M., Romero, J., Gamboa, J., Celi, V., . . . Salazar, F. (2013). *Apartado “Matemáticamente”*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 9.

De Armas, R., Ramírez, M., Acosta, M., Romero, J., Gamboa, J., Celi, V., . . . Salazar, F. (2013). *Apartado “Recuerda que ...” con fórmulas relevantes*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 9.

De Armas, R., Ramírez, M., Acosta, M., Romero, J., Gamboa, J., Celi, V., . . . Salazar, F. (2013). *Expresiones de la varianza muestral y la desviación estándar muestral*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 9.

De Armas, R., Ramírez, M., Acosta, M., Romero, J., Gamboa, J., Celi, V., . . . Salazar, F. (2013). *Plan de trabajo para grado noveno*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 9.



- De Armas, R., Ramírez, M., Acosta, M., Romero, J., Gamboa, J., Celi, V., . . . Salazar, F. (2013). *Tabla de contenidos grado noveno*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 9.
- Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E., & Vollmar, P. (2014). *Definición de desviación estándar*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 10E MYP5.
- Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E., & Vollmar, P. (2014). *Definición de la desviación estándar para datos agrupados*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 10E MYP5.
- Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E., & Vollmar, P. (2014). *Diagrama de cajas y bigotes paralelos*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 10E MYP5.
- Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E., & Vollmar, P. (2014). *Ejemplo cómo surge la distribución normal típica*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 10E MYP5.
- Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E., & Vollmar, P. (2014). *Ejemplo contexto global*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 10E MYP5.
- Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E., & Vollmar, P. (2014). *Ejemplo 12 desviación estándar en dos conjuntos de datos*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 10E MYP5.
- Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E., & Vollmar, P. (2014). *Ejemplo 13*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 10E MYP5.
- Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E., & Vollmar, P. (2014). *Material didáctico 1*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 10E MYP5.
- Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E., & Vollmar, P. (2014). *Material didáctico 2*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 10E MYP5.
- Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E., & Vollmar, P. (2014). *Problema de apertura 2*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 10E MYP5.
- Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E., & Vollmar, P. (2014). *Resumen de rango y rango inter-cuartil*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 10E MYP5.
- Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E., & Vollmar, P. (2014). *Tabla de contenidos, capítulo 9*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 10E MYP5.

- Joya, A., Gamboa, J., Ramírez, M., Castro, C., Aravena, A., & Ávila, J. (2015). *Proyectos transversales*. [Fotografía]. Recuperado de Proyectos transversales Matemáticas 10.
- MEN. (2017). *Apartado "Actividades de aprendizaje" 1*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 8.
- MEN. (2017). *Apartado "Resolución de problemas"*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 8.
- MEN. (2017). *Definición de rango y desviación media octavo*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 8.
- MEN. (2017). *Definición de varianza octavo*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 8.
- MEN. (2017). *Desviación típica y coeficiente de variación octavo*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 8.
- MEN. (2017). *Formas de evaluación*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 8.
- MEN. (2017). *Sugerencias didácticas 1*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 8.
- MEN. (2017). *Sugerencias didácticas 2*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 8.
- MEN. (2017). *Sugerencias didácticas 3*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 8.
- MEN. (2017). *Vamos a aprender octavo*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 8.
- MEN. (2017). *Apartado "Evaluación de aprendizaje"*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 9.
- MEN. (2017). *Apartado "Práctica más"*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 9.
- MEN. (2017). *Coeficiente de variación noveno*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 9.
- MEN. (2017). *Definición de rango, varianza y desviación típica noveno*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 9.
- MEN. (2017). *Ejemplo medidas de dispersión décimo*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 10.

- MEN. (2017). *Evaluación del aprendizaje*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 10.
- MEN. (2017). *Medidas de dispersión décimo*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 10.
- MEN. (2017). *Procesos cognitivos*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 10.
- MEN. (2017). *Definición de rango once*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 11.
- MEN. (2017). *Medidas de dispersión para datos agrupados once*. [Fotografía]. Recuperado de Vamos a aprender Matemáticas 11.
- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortiz, L., Celi, V., De Armas, R., . . . Jiménez, J. (2013). *Actividad consulta en base de datos*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8.
- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortiz, L., Celi, V., De Armas, R., . . . Jiménez, J. (2013). *Actividad talla de bebés grado octavo*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8.
- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortiz, L., Celi, V., De Armas, R., . . . Jiménez, J. (2013). *Cronología de la estadística y la probabilidad grado octavo*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8.
- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortiz, L., Celi, V., De Armas, R., . . . Jiménez, J. (2013). *Definición de desviación estándar muestral y poblacional*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8.
- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortiz, L., Celi, V., De Armas, R., . . . Jiménez, J. (2013). *Definición de varianza muestral y poblacional*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8.
- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortiz, L., Celi, V., De Armas, R., . . . Jiménez, J. (2013). *Ejercicios dificultad alta*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8.
- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortiz, L., Celi, V., De Armas, R., . . . Jiménez, J. (2013). *Ejercicios dificultad baja*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8.
- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortiz, L., Celi, V., De Armas, R., . . . Jiménez, J. (2013). *Ejercicios dificultad media*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8.

- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortiz, L., Celi, V., De Armas, R., . . . Jiménez, J. (2013). *Ilustración para la ejemplificación de las medidas de dispersión*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8.
- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortiz, L., Celi, V., De Armas, R., . . . Jiménez, J. (2013). *Plan de trabajo para grado octavo*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8.
- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortiz, L., Celi, V., De Armas, R., . . . Jiménez, J. (2013). *Tabla de contenidos grado octavo*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8.
- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortiz, L., Celi, V., De Armas, R., . . . Jiménez, J. (2013). *Trabajo con StadiS 1.05*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8.
- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortiz, L., Celi, V., De Armas, R., . . . Jiménez, J. (2013). *Uso de una gráfica*. [Fotografía]. Recuperado de Los Caminos del Saber, Matemáticas 8.
- Vollmar, P., Haese, M., Haese, R., Haese, S., & Humphries, M. (2008). *Apartado de síntesis 1*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 9 MYP4.
- Vollmar, P., Haese, M., Haese, R., Haese, S., & Humphries, M. (2008). *Apartado de síntesis 2*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 9 MYP4.
- Vollmar, P., Haese, M., Haese, R., Haese, S., & Humphries, M. (2008). *Contenidos del Capítulo 9*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 9 MYP4.
- Vollmar, P., Haese, M., Haese, R., Haese, S., & Humphries, M. (2008). *Definición de Rango*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 9 MYP4.
- Vollmar, P., Haese, M., Haese, R., Haese, S., & Humphries, M. (2008). *Definición y cálculo del Rango inter-cuartil*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 9 MYP4.
- Vollmar, P., Haese, M., Haese, R., Haese, S., & Humphries, M. (2008). *Diagrama de cajas y bigotes*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 9 MYP4.
- Vollmar, P., Haese, M., Haese, R., Haese, S., & Humphries, M. (2008). *Discusión*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 9 MYP4.
- Vollmar, P., Haese, M., Haese, R., Haese, S., & Humphries, M. (2008). *Discusión e investigación*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 9 MYP4.

- Vollmar, P., Haese, M., Haese, R., Haese, S., & Humphries, M. (2008). *Ejemplo 7 cálculo del rango de un conjunto de datos*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 9 MYP4.
- Vollmar, P., Haese, M., Haese, R., Haese, S., & Humphries, M. (2008). *Ejercicio 1*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 9 MYP4.
- Vollmar, P., Haese, M., Haese, R., Haese, S., & Humphries, M. (2008). *Ejercicio 2*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 9 MYP4.
- Vollmar, P., Haese, M., Haese, R., Haese, S., & Humphries, M. (2008). *Nota histórica 1*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 9 MYP4.
- Vollmar, P., Haese, M., Haese, R., Haese, S., & Humphries, M. (2008). *Problema de apertura 1*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 9 MYP4.
- Vollmar, P., Haese, M., Haese, R., Haese, S., & Humphries, M. (2008). *Respuestas*. [Fotografía]. Recuperado de Mathematics for the international student 9 MYP4.

## ANEXOS

## Anexo A

Tabla 1.

*Análisis de la muestra de textos*

Objetivos	Santillana	Se muestra un “Plan de trabajo” que exhibe algunas de las temáticas que se trabajarán en la unidad, y se basa en el desarrollo del pensamiento aleatorio. En el texto dirigido a los docentes se presentan algunos objetivos de enseñanza.
	Haese & Harris Publications	No se presentan objetivos de enseñanza o aprendizaje, lo cual puede estar asociado a su enfoque principal: ser un banco de contenidos.
	Libros & Libros S.A.	Se manifiestan “Indicadores de logro” que promueven el desarrollo del pensamiento aleatorio y se fundamentan en los estándares, los procesos y las competencias matemáticas EBCM (2006). En el texto dirigido a los docentes se presentan algunos objetivos de enseñanza.
	MEN	Se presenta la sección “Vamos a aprender” con un bosquejo de los conocimientos que se van a adquirir, en concordancia con el desarrollo del pensamiento aleatorio. En el libro guía establecido para los docentes se muestran los contenidos que según los EBCM (2006) se deberían enseñar en cada grado.
Contenidos	Santillana	Se definen como medidas de variabilidad: la varianza muestral y poblacional (datos agrupados y no agrupados), la desviación típica muestral y poblacional (datos agrupados y no agrupados), el rango y el rango intercuartílico. En cuanto a la adecuación con el “Plan de trabajo”, en algunos textos si se evidenciaba una conexión con los contenidos trabajados. Se muestra una linealidad entre los tres textos escolares en la presentación de los contenidos y el nivel educativo de los estudiantes.
	Haese & Harris Publications	Presentación del rango, rango inter-cuartil, y desviación estándar (datos agrupados y no agrupados), como medidas de dispersión. Se observa una linealidad para la presentación de contenidos en los dos textos de la editorial.
	Libros & Libros S.A.	Se presentan como medidas de dispersión: la desviación media, la varianza, la desviación estándar, el coeficiente de Pearson, y el rango. Con respecto a la adaptabilidad de los contenidos con los “Indicadores de logro”, en la mayoría de los libros las medidas de dispersión no se veían como un tema a desarrollar durante la unidad. Se evidencia una linealidad entre los tres textos escolares con la presentación de los contenidos y el nivel educativo de los estudiantes.
	MEN	Presentación del rango o recorrido, desviación respecto a la media (datos agrupados y no agrupados), varianza (datos agrupados y no agrupados), desviación típica y coeficiente de variación, como medidas de dispersión. Desde el libro para octavo hasta el texto para grado once, se abordan todas las medidas de dispersión anteriormente señaladas.

		<p>Simplemente cambia la forma de presentación y los ejemplos. Lo cual, da evidencia de una coherencia vertical de temáticas. En la mayoría de los libros no se exhibe una linealidad entre el apartado “Vamos a aprender” y lo contenidos abordados.</p>
Conexiones	Santillana	<p>Conexiones con la historia de las matemáticas, con otras disciplinas y aspectos de la vida real mediante la implementación de proyectos transversales.</p>
	Haese & Harris Publications	<p>Conexiones con la historia de la humanidad y la influencia de las matemáticas en esta, además, de la presentación de las aplicaciones de la estadística en contextos de la vida real.</p>
	Libros & Libros S.A.	<p>Conexiones con aspectos de la vida real, en especial, con el futuro de los estudiantes (Pruebas saber, preuniversitario).</p>
	MEN	<p>Conexiones entre los saberes previos y los conocimientos a adquirir, así mismo la aplicación. Por otro lado, relaciones con temas transversales que se encuentran involucrados en contextos de la vida cotidiana.</p>
Actividades	Santillana	<p>Se manejan diferentes tipos de actividades que promueven el desarrollo de las competencias que los textos establecen: interpretación, argumentación, razonamiento, ejercitación, resolución de problemas y proposición. Algunas actividades cuentan con niveles de dificultad y otras se basan en la puesta en práctica de un paso a paso, es decir, actividades guiadas. Así mismo, se presentan actividades que tienen como fin la resolución de situaciones problema y la aplicación de los proyectos transversales que operan los textos escolares. El tipo de actividades es acorde al nivel educativo de los estudiantes y a los contenidos que se desarrollan. Por último, algunas actividades permiten la implementación de las TIC.</p>
	Haese & Harris Publications	<p>Se resalta la articulación entre el uso de recursos tecnológicos (calculadoras gráficas, software, etc.) y el desarrollo de las actividades propuestas. Se presenta la resolución de problemas como actividad, y en algunas ocasiones estas actividades son guiadas. En otras palabras, desarrolladas paso a paso por los textos. Estas actividades son afines con las temáticas propuestas y el nivel educativo de los alumnos.</p>
	Libros & Libros S.A.	<p>Los libros presentan diferentes tipos de actividades: de repaso, para aclarar conocimientos, algunas de uso y transferencia de conocimientos, y otras de profundización. Además, se proponen actividades guiadas. También se potencia el desarrollo de situaciones problemas clasificadas en: problemas rutinarios, problemas no rutinarios simples y problemas no rutinarios complejos. Al finalizar los libros se plantea la resolución de problemas, articulado con proyectos fundamentados en competencias ciudadanas. Por último, todas las actividades son acordes con el nivel escolar de los estudiantes y los contenidos presentados.</p>
	MEN	<p>Se muestran actividades que desarrollan y refuerzan los aprendizajes del estudiante, además potencian la comunicación, la ejercitación, la resolución de problemas, la modelación, y el razonamiento. Estas actividades también promueven los procesos cognitivos de memoria, comprensión, análisis, aplicación, síntesis y evaluación. Por otro lado,</p>

		los invitan a los alumnos a seguir algunas estrategias que se les facilita para la solución de situaciones problema. Igualmente, se fomenta la formulación de problemas potenciando el desarrollo del pensamiento matemático. Las actividades guardan relación con los conocimientos presentados en el libro, el nivel educativo de los estudiantes y los documentos curriculares Colombianos.
Metodología	Santillana	El primer aspecto metodológico implementado es la resolución de situaciones problema que fomentan el afianzamiento de las siguientes competencias: interpretación, argumentación, razonamiento, ejercitación, resolución de problemas y proposición. Por otro lado, el uso de recursos tecnológicos y material manipulativo en el desarrollo de las temáticas. Se plantea una metodología de evaluación basada en el desarrollo de simulaciones para las Pruebas Saber Colombianas, con los estándares de evaluación internacionales de las pruebas PISA. Además, de la implementación de Proyectos transversales que permiten la aplicación de estrategias en la resolución de problemas. En resumen los textos no exponen una justificación metodológica, pero se percibe su cimiento en las sugerencias de los documentos curriculares Colombianos. Cabe resaltar las sugerencias metodológicas aportadas por el texto guía de los docentes que presenta la editorial.
	Haese & Harris Publications	Uno de los aspectos metodológicos se fundamenta en las siguientes “Áreas de interacción”: enfoques para el aprendizaje, ambientes, comunidad y servicio, salud y educación social, por último, ingenio humano. Otro de los aspectos se basa en los siguientes “Contextos globales”: las identidades y relaciones, la innovación científica y técnica, la orientación en el espacio y tiempo, la globalización y sostenibilidad, la expresión personal y cultural, por último, la equidad y el desarrollo. Se invita en los libros a pequeños espacios de discusión donde el alumno comunica y argumenta sus ideas matemáticas. En cuanto al uso de recursos tecnológicos como metodología, los textos escolares se enfatizan en la implementación de Videoclips, recursos interactivos, etc. Como herramientas en el proceso de aprendizaje y enseñanza de la estadística. En general los dos libros no establecen una justificación metodológica, sin embargo, se divisa su relación con los estándares educativos nacionales e internacionales.
	Libros & Libros S.A.	Los libros justifican su metodología teniendo en cuenta los documentos curriculares Colombianos, donde al inicio de cada unidad se establece el pensamiento matemático que se estará desarrollando (en este caso el aleatorio y sistemas de datos) y los procesos involucrados (Situaciones problema, Comunicación matemática, Razonamiento matemático y evaluación cualitativa). Lo anterior, exhibiendo la metodología de evaluación que los textos escolares implementarán en los simulacros de Pruebas Saber y preuniversitarios que facilita. Por otro lado, las competencias comunicativas, matemáticas y ciudadanas que el estudiante podrá potenciar. Otro aspecto metodológico es el uso de temas transversales y proyectos, donde se tienen presentes los aspectos



		sociales de los estudiantes. Cabe resaltar las sugerencias metodológicas aportadas por el texto guía de los docentes que presenta la editorial.
	MEN	Los textos escolares de la justifican su metodología basándose en los referentes curriculares Colombianos, donde se tienen en cuenta los procesos generales presentes en toda actividad matemática (el razonamiento, la formulación, comprobación y ejercitación de procedimientos, la modelación, la comunicación, la formulación, tratamiento y resolución de problemas). Además de las competencias matemáticas que se desarrollan cuando se adquieren o se alcanzan: conocimientos (conceptuales o procedimentales), habilidades y actitudes. Como eje principal en la metodología se encuentra la “Ruta didáctica” que permite un ambiente óptimo en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En cuanto a la metodología de enseñanza, los textos guía del docente plantean sugerencias didácticas, el solucionario para cada actividad y estrategias que posibiliten trabajar con los alumnos los temas transversales que manejan los libros. En relación con la metodología de evaluación, los libros guía para el docente establecen estrategias pedagógicas de seguimiento y refuerzo. Además, diferentes formas de evaluación: autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación.
Lenguaje	Santillana	Uso de un lenguaje habitual y explicativo. Por otro lado, un lenguaje simbólico que permite al estudiante relacionar cada símbolo con su respectiva definición.
	Haese & Harris Publications	Uso de un lenguaje descriptivo y simple. El inglés manejado no es causante de malas interpretaciones. En cuanto a un lenguaje argumentativo, los libros manejan un espacio de discusión donde se da cabida a argumentos con bases sólidas dejando en evidencia un proceso de comprensión de las matemáticas. Por último, el uso de un lenguaje simbólico para la presentación de fórmulas.
	Libros & Libros S.A.	Los textos se fundamentan en el desarrollo de competencias comunicativas, mediante el uso de un lenguaje simbólico y argumentativo que ayude a plantear y solucionar situaciones problema.
	MEN	Los libros se basan en el desarrollo de la comunicación como proceso matemático. Lo anterior, mediante un lenguaje explicativo y simbólico. Así mismo, la implementación de un lenguaje argumentativo donde el alumno formule situaciones problema.
Ilustraciones	Santillana	En los libros se encontraron algunas ilustraciones con dibujos coloridos. Sin embargo, se evidencia en su gran mayoría el uso de gráficos y no ilustraciones. Estos gráficos (diagramas de cajas y bigotes, histogramas, diagramas de dispersión, polígonos de frecuencia, diagramas de puntos, etc.) tienen como finalidad la ejemplificación de conceptos o procedimientos. Además, la función de exponer al lector un escenario parecido al contexto de la actividad.
	Haese & Harris Publications	Se observa el uso de caricaturas como modo de enfatización, donde se expone al lector explicaciones o sugerencias adicionales que complementan los conceptos o procedimientos abordados. Por último,

		aunque las gráficas y tablas no son ilustraciones, en ambos libros se usan constantemente. De esta manera, se da una ejemplificación de la actividad o problema que se está desarrollando. En cuanto a la cantidad de ilustraciones, se muestran más gráficos estadísticos y tablas, que dibujos y caricaturas.
	Libros & Libros S.A.	Los libros usan ilustraciones para mostrar el contexto en el cual se están desarrollando los ejercicios y la mayoría de estas son claras. Por otro lado, aunque los gráficos y tablas no son ilustraciones, muchas veces las actividades van acompañadas de diferentes gráficos (diagrama de cajas y bigotes, diagrama de frecuencias, etc.) o tablas en donde se busca mostrar el conjunto de datos a analizar.
	MEN	La mayoría de las ilustración son utilizadas para dar un contexto a la actividad. En cuanto al uso de gráficos y tablas, su presencia se da para resumir los datos de la actividad o como eje principal en la interpretación de un conjunto de datos. Con respecto a la cantidad de ilustraciones, se observa más uso de gráficos estadísticos y tablas que de ilustraciones.
Motivación	Santillana	Los textos manejan diferentes herramientas para generar motivación en los estudiantes: el uso de actividades guiadas, bases de datos reales para analizar, conexiones entre las matemáticas, la historia y la vida real. Por otro lado, la implementación de recursos tecnológicos y manipulativos.
	Haese & Harris Publications	Se motiva al alumno mediante espacios de discusión e investigación, que permite aplicar y profundizar en las temáticas presentadas. Además, mediante las conexiones históricas y aplicativas de la estadística.
	Libros & Libros S.A.	Los libros motivan al lector mediante la solución de actividades, ejercicios y problemas, paso a paso. Por otro lado, algunos proyectos mediante la lectura, motivan al alumno a profundizar en el por qué llevar a cabo dicho proyecto y se facilita al estudiante la información necesaria de los libros que aportan al desarrollo de este.
	MEN	Se presentan aspectos motivadores a través de un marco de resolución de problemas, y actividades guiadas que muestran un camino adecuado para la puesta en práctica de diferentes estrategias.
Tecnología	Santillana	Los textos ofrecen múltiples recursos educativos: audios, imprimibles, enlaces web, multimedia, galerías, calculadoras gráficas, Excel, etc.
	Haese & Harris Publications	Los libros manejan: imprimibles, hojas de cálculo, videoclips, software gráficos, simulaciones, vínculos interactivos, paquetes de estadística, entre otros. Por último, se presentan la ayuda interactiva Selftutor la cual mediante un audio realiza explicaciones de conceptos, actividades o ejercicios.

	Libros & Libros S.A.	Los textos escolares utilizan enlaces a sitios web que ayudan al estudiante a profundizar en el tema central que desarrollará el proyecto. Además, el uso de la calculadora científica.
	MEN	No se plantean actividades que permitan el uso de recursos tecnológicos.
Evaluación	Santillana	Se facilitan evaluaciones de desempeño y algunos ejemplares de las Prueba Saber que presentan los estudiantes Colombianos en grado noveno. En general ninguno de los tres libros propone criterios de evaluación o autoevaluación. Sin embargo, implícitamente en las diferentes propuestas de ejercicios, actividades y problemas; se están evaluando los contenidos presentados.
	Haese & Harris Publications	No se establece una metodología de evaluación, sin embargo, se presentan ejercicios de profundización que poseen un nivel mayor de dificultad los cuales retan al estudiante. Así mismo, al finalizar el libro se muestra la respuesta de cada una de las actividades. Lo anterior, promoviendo un espacio de autoevaluación en donde el estudiante puede resolver los problemas y luego ir a verificar si su respuesta es correcta.
	Libros & Libros S.A.	Se establece que los libros trabajarán una evaluación cualitativa, la cual está ligada a los estándares, los procesos matemáticos, las competencias y los indicadores de logro. Por otro lado, los alumnos pueden realizar una autoevaluación en la sección de las Pruebas Saber o el Preuniversitario.
	MEN	Se define la evaluación como un proceso continuo que permite reconocer fortalezas y aspectos por mejorar. Se muestran diferentes actividades de evaluación y se clasifican de la siguiente manera: pregunta abierta, selección múltiple, verdadero/falso, actividad para completar, actividad de aplicación, organizador gráfico, solución de problemas, actividad para relacionar y actividad de refuerzo. Además, diferentes formas de evaluación: autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación.
Enfatización	Santillana	Los textos escolares presentan un glosario y apartados que muestran al lector las fórmulas más relevantes de la teoría presentada o la información importante para la comprensión de los resultados obtenidos. Además, otro tipo de apartado busca plantearle preguntas o cuestionamientos al lector que lo rete a investigar por su cuenta del contenido que se está desarrollando.
	Haese & Harris Publications	Los textos emplean caricaturas con nubes de dialogo las cuales presentan información adicional para resolver una situación problema o simplemente recordar algo trabajado con antelación. Por otra parte, se enfatiza en los contenidos mediante el glosario del libro y el uso constante de gráficos y tablas.

	Libros & Libros S.A.	Los libros plantean un énfasis encaminado en la resolución de situaciones problema donde el estudiante puede aplicar sus conocimientos. Así mismo, los libros manejan pequeños recuadros de textos que presentan información relacionada con la temática y finalizan planteando preguntas al lector. Además, apartados donde se realizan pequeñas síntesis de las temáticas. Los libros también enfatizan en el afianzamiento de aprendizajes mediante diferentes actividades, el preuniversitario, las Pruebas Saber y los proyectos.
	MEN	Los libros manejan la enfatización en contenidos mediante diferentes apartados de síntesis. Por otro lado, se muestra el apartado en donde el alumno podrá ampliar su vocabulario matemático. Por último, al finalizar los libros se presenta un glosario.
Recursos generales	Santillana	Los libros contienen una Libromedia (DVD) en la cual se encuentran variados recursos digitales. Algunos de estos recursos pueden imprimirse y de esta manera se le brinda al lector un material manipulable. Del mismo modo, la editorial Santillana cuenta con un sitio web donde se presentan recursos multimedia e interactivos.
	Haese & Harris Publications	Los libros manejan: imprimibles, hojas de cálculo, videoclips, software gráficos, simulaciones, vínculos interactivos, paquetes de estadística, entre otros. Por último, se presentan la ayuda interactiva Selftutor la cual mediante un audio realiza explicaciones de conceptos, actividades o ejercicios.
	Libros & Libros S.A.	Los textos escolares utilizan enlaces a sitios web y la calculadora científica.
	MEN	No se sugiere la implementación de recursos audiovisuales, manipulables u otras fuentes.

## Anexo B

Resultados del cuestionario: [https://pedagogicaedu-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/jjbarrerat\\_upn\\_edu\\_co/EX7BGIf7gLBJs4uO76\\_M43UBCmj7I6y9qFg8YaDhUlBOCw?e=Ry9ydm](https://pedagogicaedu-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/jjbarrerat_upn_edu_co/EX7BGIf7gLBJs4uO76_M43UBCmj7I6y9qFg8YaDhUlBOCw?e=Ry9ydm)

## Anexo C

Grabación de la entrevista: [https://pedagogicaedu-my.sharepoint.com/:x:/g/personal/jjbarrerat\\_upn\\_edu\\_co/ETP7GLOp5YxNuWgmtm-ZJK0BvIlslci4XBoBCApfLbEHw?e=ZNQqFI](https://pedagogicaedu-my.sharepoint.com/:x:/g/personal/jjbarrerat_upn_edu_co/ETP7GLOp5YxNuWgmtm-ZJK0BvIlslci4XBoBCApfLbEHw?e=ZNQqFI)