

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

Alternativa Metodológica para la Interpretación de las Medidas de Tendencia Central en

Datos Agrupados utilizando Material Didáctico

Angie Mabel Vallejo Monroy

Kely Yureimy Fernández Zambrano

Universidad Pedagógica Nacional

13 de octubre de 2022

Nota del autor

Kely Yureimy Fernández Zambrano, Angie Mabel Vallejo Monroy, Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional – Bogotá.

Este trabajo fue realizado para optar al título de Licenciadas en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y cuenta con la asesoría de la profesora Ingrith Álvarez Alfonso, docente de planta del Departamento de Matemáticas.

Cualquier mensaje con respecto a este trabajo debe ser enviado al Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia, o al correo dma@pedagogica.edu.co

Resumen

Este trabajo surge de la experiencia personal de una de las maestras en formación inicial autoras del trabajo. Ella, en una de sus prácticas de inmersión evidenció que estudiantes de sexto grado aplican las mismas técnicas (procedimientos) para calcular las Medidas de Tendencia Central en Datos Agrupados [MTC-DA] como en datos desagrupados. Es por esto que se desarrolla una alternativa metodológica para la interpretación de estas medidas cuando los datos se encuentran agrupados. Tal trabajo se inicia en el marco del Semillero de Investigación en Educación Estadística [SIEdEst] de la Universidad Pedagógica Nacional.

Algunos autores como Rodríguez, et ál., (2016) y Farigua (2016) señalan que las propuestas de enseñanza enfatizan en el cálculo aritmético para encontrar tales estadísticos, lo que supone dejar de lado su interpretación, la implementación de material concreto y el trabajo con datos agrupados. De allí y debido a las pocas investigaciones encontradas frente al trabajo en aula con las MTC-DA, se presenta la alternativa metodológica bajo la que se construye, gestiona y valida material didáctico que facilite a los estudiantes la interpretación de estas cuando los datos se encuentren agrupados.

La propuesta se gestiona y válida durante dos sesiones de clase con 19 estudiantes de sexto grado del Colegio del Rosario en Zipaquirá. Se presenta una situación donde los estudiantes interpretan las por medio de la construcción de un histograma y la ubicación de éstas en dicho gráfico. De esta manera, se responde a la pregunta de indagación ¿cómo el material didáctico potencializa la interpretación de las medidas de tendencia central en datos agrupados? afirmado que el material didáctico utilizado afianza los conocimientos y desarrolla habilidades en el manejo de los conceptos estadísticos.

Palabras clave: Estadística, medidas de tendencia central, datos agrupados, material didáctico, alternativa metodológica.

Contenido

Resumen.....	2
Tablas	5
Figuras	6
Apéndices	8
Introducción.....	9
Justificación.....	11
Antecedentes	15
Objetivos	19
Objetivo General	19
Objetivos Específicos.....	19
Marco de Referencia	20
Medidas de Tendencia Central.....	20
Media aritmética o promedio.....	20
Mediana.....	21
Moda	22
Asuntos didácticos para la enseñanza de las Medidas de Tendencia Central....	25
Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística.....	25
Errores y Dificultades en el aprendizaje de las MTC-DA.....	29
Material Didáctico para la Enseñanza de las Matemáticas.....	31
Clasificaciones de Materiales Didácticos	33

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

Aspectos Metodológicos.....	37
Análisis Didáctico	37
Desarrollo de la Propuesta	41
Contexto Institucional.....	41
Contexto Social.....	42
Contexto Educativo	42
Contexto Curricular	43
Análisis de contenido	45
Estructura conceptual de la MTC-DA.....	45
Representación de las MTC-DA	46
Fenomenología de las MTC	47
Análisis cognitivo.....	50
Análisis de instrucción.....	51
Diseño de actividades	52
Puesta en práctica de actividades.....	58
Análisis de actuación	64
Conclusiones y Recomendaciones.....	74
Referencias	77
Apéndice	84

Tablas

Tabla 1 Ventajas y desventajas de las MTC-DA	25
Tabla 2 Errores y dificultades en el aprendizaje de las MTC	30
Tabla 2 Secuencia de actividades	53

Figuras

Figura 1 Tabla de frecuencia	23
Figura 2 Información obtenida de la Tabla de frecuencia	23
Figura 3 Datos que satisfacen las condiciones de la Tabla de frecuencia	24
Figura 4 Clasificación de los materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas	36
Figura 5 Ciclo de análisis didáctico.....	37
Figura 6 Fases del Análisis Didáctico	39
Figura 7 Estructura conceptual de las MTC-DA.....	45
Figura 8 Representación de las MTC-DA	46
Figura 9 Fenomenología de las MTC	49
Figura 10 Histograma ordenado con datos ascendentes	59
Figura 11 Conclusión sobre valores de las MTC-DA de la Parte B	60
Figura 12 Opción marcada como correcta interpretación de la moda	61
Figura 13 Datos atípicos.....	62
Figura 14 Eliminación del dato “36”	63
Figura 15 Intervalos modales	63
Figura 16 Ventajas de la media aritmética sobre la mediana.....	63
Figura 17 Conclusiones sobre MTC-DA	64
Figura 18 Interpretación de los valores de las MTC-DA.....	65
Figura 19 Dificultad al diferenciar entre intervalo y dato	65
Figura 20 Error al identificar información estadística	66

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

Figura 21 Porcentajes de respuestas obtenidas para la interpretación de la media aritmética.....	66
Figura 22 Porcentajes de respuestas obtenidas para la interpretación de la mediana ...	67
Figura 23 Porcentajes de respuestas obtenidas para la interpretación de la moda.....	68
Figura 24 Misma frecuencia en los intervalos modales.....	68
Figura 25 Error al confundir dato con intervalo modal.....	69
Figura 26 Conclusión sobre la media aritmética cuando hay datos extremos	70
Figura 27 Relación entre marca de clase y la media aritmética	70
Figura 28 Interpretación de la mediana cuando existen datos extremos.....	70
Figura 29 Error al identificar las propiedades de la mediana en datos agrupados	71
Figura 30 Interpretación de la moda cuando hay datos extremos.....	71
Figura 31 Reemplazar calificaciones	72

Apéndices

<i>Apéndice A Taller “Estudiando las calificaciones del Área de Matemáticas”</i>	84
<i>Apéndice B Histograma</i>	90
<i>Apéndice C Cuerdas y etiquetas</i>	90
<i>Apéndice D Tuercas</i>	91
<i>Apéndice E Datos atípicos</i>	91

Introducción

El presente trabajo de grado tiene como propósito el diseño, gestión y validación de una alternativa metodológica para promover la interpretación de las Medidas de Tendencia Central en Datos Agrupados [MTC-DA] utilizando material didáctico. Siendo conscientes de las dificultades observadas en un aula de sexto grado durante la enseñanza de las MTC-DA, se crea material didáctico que permite reducir dichas dificultades, donde se potencia la interpretación de los conceptos estadísticos, puesto que en los Estándares Básicos por Competencias en Matemáticas establecidos por el Ministerio de Educación Nacional [MEN], se sugiere que los estudiantes de sexto grado deberán calcular, comparar e interpretar las medidas de tendencia central para un conjunto de datos (MEN, 2006, pp. 84-87), esto, aun cuando los mismos se encuentren agrupados.

En la primera parte del documento se presenta la justificación y los antecedentes que se tendrán en cuenta para el desarrollo de la indagación. Para la justificación se consideran las dificultades documentadas en la práctica de una de las autoras, las cuales son ratificadas por Rodríguez, et ál., (2016). En cuanto a los antecedentes se exponen trabajos que se han realizado en relación con las MTC; el primero desarrollado por Farigua (2016) en el que ejecuta una propuesta didáctica para la enseñanza de las MTC utilizando herramientas virtuales; un segundo trabajo, el de Rojas (2020), menciona una aplicación lúdica para la enseñanza del contenido de las MTC; mientras que Álvarez, et ál., (2015) muestran una serie de actividades para el fortalecimiento de habilidades para la interpretación y el cálculo de las MTC, más no abarcan el trabajo con datos agrupados.

En la segunda parte se exhiben los referentes teóricos que soportan la presente indagación; estos desde dos perspectivas; una de ellas es la Estadística, mencionando en qué consiste las MTC-DA (media, mediana y moda); y la segunda desde la didáctica, haciendo

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

referencia a la enseñanza y el aprendizaje de las MTC, errores y dificultades con respecto a dicho objeto estadístico, y la perspectiva para el uso de material didáctico.

En la tercera parte se expone el marco metodológico fundamentado en Gómez (2006), quien presenta componentes para diseñar e implementar secuencias de actividades didácticas. Esto, enfocándose en un análisis de contenido, cognitivo, de instrucción, el diseño de actividades, la puesta en práctica de estas y en un análisis de actuación.

Finalmente, se encuentra la puesta en marcha, el análisis de actuación, los resultados y las conclusiones respecto a la implementación de la alternativa metodológica, teniendo en cuenta el trabajo desarrollado por los estudiantes de sexto grado y los referentes teóricos expuestos inicialmente. De esta manera se responde a la pregunta de indagación ¿cómo el material didáctico potencializa la interpretación de las medidas de tendencia central en datos agrupados? evidenciando que el material didáctico ayuda identificar y extraer información estadística de un histograma, reconocer el contexto de donde provienen los datos, ubicar correctamente en el respectivo intervalo los valores de las MTC-DA usando cuerdas guías en el histograma, desarrollar habilidades en los estudiantes para el manejo de conceptos estadístico y favorece la identificación de las características, ventajas y desventajas de las MTC-DA.

Justificación

Este trabajo parte de la experiencia personal de una de las futuras educadoras matemáticas que presenta la propuesta. Ella, en una de sus prácticas de inmersión (Práctica en Aula) desarrollada en el marco de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional [UPN], logra evidenciar que estudiantes de sexto grado presentan dificultades al momento de calcular las MDT-DA. Entre algunas de las dificultades evidenciadas por Vallejo (2020) están:

- Los estudiantes realizan el mismo cálculo para encontrar MTC cuando los datos están agrupados o desagrupados.
- Para el promedio, los estudiantes suman las cantidades que se presentan en la frecuencia absoluta relacionada con los intervalos y el resultado lo dividen por la cantidad de datos.
- Los estudiantes para hallar la mediana no toman en cuenta las cantidades presentadas como frecuencia acumulada, sino que se basan en los valores que se presentan como frecuencia absoluta.
- Los estudiantes toman la moda como el intervalo con mayor frecuencia absoluta y no tienen en cuenta el valor de la moda comprendido en ese intervalo.

Autores como Rodríguez, et ál., (2016) ratifican las dificultades mencionadas cuando afirman que los estudiantes no muestran una adecuada comprensión de las MTC, especialmente en los algoritmos de cálculo que se deben utilizar dependiendo de si los datos están agrupados o desagrupados (p. 934). Estos autores, indican que los estudiantes cometen errores al realizar el cálculo del promedio, pues creen que el promedio es un grupo aditivo¹, es decir que cumple con los axiomas de clausura, asociatividad, elemento neutro y elemento

¹ Un grupo aditivo es un conjunto no vacío con una operación binaria interna (suma), una operación unaria que representa a la inversa con respecto a la suma y una operación constante que representa al elemento identidad o neutral respecto a la suma.

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

inverso. Para el caso de la mediana, Rodríguez, et ál., (2016) dicen que esta medida recibe diferentes definiciones que pueden ser confusas para los estudiantes, por ejemplo, citan a Batanero (2000) quien define la mediana como “el promedio central de una serie de datos ordenados según magnitud” (p. 936). Si se toma esta definición, fácilmente se puede confundir la expresión promedio ya que este término normalmente se usa para hacer referencia a la media aritmética, y de allí los errores de cálculo se verán reflejados. Por su parte, la moda está asociada al valor o los valores que toma la variable y que tienen mayor frecuencia en un conjunto de datos; sin embargo, presenta el inconveniente de no ser única y en algunos casos de no existir, lo cual ha hecho que no sea considerada frecuentemente como un índice de posición central en la síntesis de información, tal y como lo afirman los mismos autores (pp. 933-936). Por otra parte, Londoño (2017) expone la importancia del estudio de la Estadística desde edades tempranas, lo cual fortalece en los estudiantes conocimientos estadísticos (organización, análisis, interpretación, colección, descripción de datos, toma de decisiones, entre otras) y además permite la preparación para responder a pruebas externas (Pruebas Saber 3º, 5º, 9º, 11º; pruebas Supérate con el SABER; Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos *PI/SA*, entre otras), ya que estas, en un alto porcentaje, contienen preguntas basadas en tablas y gráficas estadísticas que exigen su compresión (p. 13).

Bajo dicho panorama, Farigua (2016) considera importante que los estudiantes de la educación básica y media interpreten las MTC, para generar no solo habilidades en la comprensión de los conceptos sino además una mirada crítica frente a cada situación o contexto que se les presente y en las que ellas están inmersas. Además, señala que cuando en el aula se abordan las MTC se pretende que el estudiante tenga un acercamiento y apropiación de los objetos estadísticos allí presentados, de tal manera que construyan un nuevo conocimiento, con el fin de que logren resolver situaciones en donde se involucran estas medidas (p. 10). Adicionalmente, Farigua (2016) afirma que el trabajo que se realiza sobre la interpretación y características de las MTC es limitado, puesto que se dedica mayor tiempo a

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

trabajar en la parte aritmética (pp. 12-15). Las propuestas didácticas que los docentes llevan al aula están orientadas para que el estudiante relacione cada MTC con su fórmula y procedimiento para calcularla. Por ejemplo, para la media aritmética, la mediana y la moda, las preguntas orientadoras llevan a que el estudiante se aprenda la fórmula, la aplique y conteste únicamente colocando el resultado del proceso aritmético, dejando de lado el contexto, los datos para los cuales se calculan.

Teniendo en cuenta estos aspectos, se pretende abordar las MTC-DA a partir de una alternativa metodológica² centrada en material didáctico que favorezca la interpretación de las mismas; así, se asume la propuesta de Gutiérrez (2020) quien menciona que el material didáctico favorece el proceso de aprendizaje en los estudiantes gracias al contacto práctico-lúdico con elementos reales que activan el gusto por aprender, que estimulan el desarrollo de la memoria, la motricidad fina y gruesa, la parte cognitiva, física, entre otros aspectos fundamentales en la evolución del sujeto (p. 5). Leal (2013) indica que, al utilizar recursos didácticos la enseñanza de las MTC resulta ser viable para los docentes ya que dejarían de lado la actitud tradicionalista³ de la enseñanza de la estadística y los estudiantes tendrían un mayor interés en su aprendizaje (p. 1300). Este panorama genera curiosidad sobre el estudio de las MTC en el aula, pues se evidencia en los primeros párrafos los errores que cometen los estudiantes al trabajar con estas medidas, especialmente cuando los datos se presentan agrupados. Además, en las propuestas documentadas se observa mayor énfasis en el aprendizaje del algoritmo o en llegar a “su resultado”, dejando a un lado la interpretación y el significado de cada una de las medidas dentro del contexto de los datos a los que se les calcula. Por lo tanto, para promover su interpretación, nace la pregunta ¿cómo el material

² Entendiendo por alternativa la posibilidad de elegir entre distintas opciones para orientar una clase

³ Entendiendo por tradicional a la clase teórica magistral en donde el docente se limita a usar recursos básicos como marcador, tablero y aplicación de fórmulas.

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central didáctico potencializa la interpretación de las medidas de tendencia central en datos agrupados?

Antecedentes

En este apartado se presentan tres investigaciones enfocadas en la enseñanza y el aprendizaje de las MTC. Como primer antecedente se asume al trabajo realizado por Farigua (2016) quien expone una propuesta de enseñanza para las MTC y formula una secuencia de actividades bajo el uso de un Objeto Virtual de Aprendizaje [OVA]. El autor resalta la importancia de la interpretación y caracterización de las MTC, sus distintos tipos de representaciones y la tipología de las variables estadísticas, asunto estrechamente relacionado con la posibilidad o no, y el sentido, de calcular tales medidas de resumen.

Farigua (2016) contextualiza su propuesta bajo las etapas sugeridas por Gómez (2006) para diseñar e implementar una secuencia de actividades: contextos (social, educativo e institucional), contenidos, objetivos, análisis de contenido, cognitivo, de instrucción, el diseño de actividades, la puesta en práctica de las mismas y el análisis de actuación. Cabe resaltar que él no desarrolla las dos últimas etapas, pero decide evaluar sus actividades a través del criterio de expertos, docentes de educación básica y media de una institución educativa que emiten un juicio acerca de la alternativa didáctica que se diseñó.

Las conclusiones y resultados presentados son evidencia de la percepción que tienen los docentes acerca del aplicativo OVA frente al aprovechamiento que le pueden dar los diversos usuarios. Entre los beneficios están que además de utilizarse como refuerzo o apoyo para abordar el objeto en estudio, permite al docente optimizar tiempo tanto en la preparación de su clase como en su desarrollo, ya que la herramienta puede reutilizarse y adaptarse a diferentes contextos. Como desafíos se tiene que el docente puede no estar familiarizado con las herramientas tecnológicas, y la propuesta puede presentar ciertas limitaciones como la necesidad de tener acceso a internet para poder observar y desarrollar su contenido.

Este antecedente da a conocer de forma práctica (aplicada) las etapas sugeridas por Gómez (2006) para desarrollar una propuesta de aula, además esta propuesta resalta la

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

interpretación y la caracterización de las MTC en contextos conocidos por los estudiantes. No obstante, el trabajo no da solución a la problemática a abordar en la presente indagación ya que el autor utiliza una herramienta virtual más no concreta (tangible), además gestiona y valida la propuesta solamente con profesores, dejando de lado a los estudiantes quienes son finalmente los principales sujetos que intervienen en el proceso pedagógico.

El segundo antecedente es un ensayo pedagógico realizado por Rojas (2020) quien diseña diferentes actividades lúdicas para favorecer la enseñanza de las MTC. El autor realiza pruebas conceptuales, procedimentales y actitudinales para conocer el contexto de los estudiantes y ver el impacto de estas actividades en el aprendizaje de los estudiantes. Se diseñan actividades lúdicas (juegos de vasos, rayuelas, dados, serpientes y escaleras, entre otras), las cuales están validadas y gestionadas con 36 estudiantes. Las actividades fueron: Juego con vasos, para construir el concepto de media aritmética o promedio; Rayuela, para abordar el concepto de mediana; Dados para construir de la definición de moda; Serpientes y escaleras, para resolver problemas donde están inmersas las MTC; Jenga, para justificar la elección de la MTC (media o mediana) más representativa en un conjunto de datos; *Monopoly*, para la resolución de problemas en los que se comparan resultados a través de la media o la mediana; Papa caliente, para discutir propiedades de la media aritmética; Kahoot, para discutir propiedades de la mediana en la solución de problemas. Este tipo de actividades se pueden adaptar para dentro o fuera del aula, pues “la lúdica se encuentra en la vida diaria del joven, y con esa interacción se crea el aprendizaje empírico requerido para la exploración del medio del niño” (Rojas, 2020, p. 8).

En este antecedente se evidencia la utilización de material lúdico, el cual favorece el aprendizaje y análisis de las MTC cuando se considera el juego como una herramienta y “al docente como un agente de institucionalización para el alumno, es decir, un refutador de conocimiento conforme a la recapitulación de diversos momentos de la clase y su vinculación de forma ordenada” (p. 86). De esta manera, el docente promueve el interés del estudiante

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

para que interprete las MTC, pues su objetivo es que el estudiante construya los conceptos de media, mediana y moda.

El tercer antecedente es la propuesta didáctica de Álvarez, et ál., (2015). Ellos exponen distintas actividades para el fortalecimiento de habilidades en cuanto a la interpretación y el cálculo de las MTC en estudiantes de undécimo grado. Se hace uso del software *StadiS* diseñado por Plazas en 1999, el cual permite trabajar conceptos asociados a la estadística descriptiva (variables estadísticas, medidas de posición, centralización, dispersión, gráficos y tablas de frecuencia, etc.) y la utilización de datos cercanos al contexto de los estudiantes.

Para la construcción de la propuesta, los autores se basan en un análisis de contenido según lo documentado por Gómez (2002). Además, toman como referencias las propuestas realizadas por Chan (2009) y Bolívar y Aldana (2006) citados en Álvarez, et ál. (2015). La propuesta de Chan (2009) consta de cinco actividades que pretenden por medio de representaciones gráficas de datos, los estudiantes comprendan la media, la mediana y su representatividad. La propuesta de Bolívar y Aldana (2006) tiene como propósito “la comprensión del significado de las características y la pertinencia de la utilización de las MTC, a partir de la recolección de datos dentro del aula, su organización en tablas y gráficas, y la construcción de su significado” (Álvarez, et ál., 2015, p. 88).

Estos autores desarrollan la propuesta en once momentos: i) recolección de datos pertenecientes a la cotidianidad del estudiantes (estatura, peso, número de hermanos y gusto por el fútbol), estos servirán para analizar e identificar características del cálculo y la interpretación de las MTC; ii) valor representativo de un conjunto, donde se formulan hipótesis respecto los valores que pueden caracterizar un conjunto de datos (en este caso los autores escogen la variable de estatura); iii) comprender la media como reparto equitativo de los datos; iv) formalizar el concepto de media y su representatividad como MTC utilizando los datos obtenidos en el primer momento; v) identificar los cambios que sufre la media cuando se realiza variaciones en los conjuntos de datos; vi) construir un conjunto de datos donde el promedio

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

esté dado, teniendo en cuenta la situación de que llegan nuevos datos al conjunto; vii) identificar que la mediana es la medida más representativa con respecto a la media cuando existen datos atípicos; viii) calcular la mediana con el uso de *StadiS*, utilizando cuatro de los datos recolectados en el primer momento y agregando datos atípicos; ix) deducir el concepto de moda y relacionarlo como la MTC de mayor utilidad para variables cualitativas; x) identificar la utilidad que tiene la media y mediana para variables cualitativas; xi) comparar e identificar cuáles son las MTC más representativas según el contexto, para ello, se utiliza la variable número de hermanos. En los resultados y conclusiones se evidencia en los estudiantes la compresión de las medidas de tendencia central, valorando la importancia de cada una de ellas y viéndolas como herramientas que permiten interpretar el comportamiento de un conjunto de datos. Además, se observa que los estudiantes reconocen el algoritmo y realizan el cálculo de cada una de las MTC para el conjunto de datos trabajado.

Destacamos de Álvarez, et ál., (2015) el desarrollo de diferentes momentos para que los estudiantes reconozcan el algoritmo, el cálculo y el significado de los valores de cada medida, lo cual favorece la propuesta en cuanto a que presenta una serie de pasos lógicos para la alternativa metodológica. Sin embargo, los autores trabajan la media aritmética, la mediana y la moda únicamente con datos sin agrupar, asunto que fortalece el interés de la presente indagación, pues dejan de lado el trabajo con datos agrupados.

Teniendo en cuenta los tres antecedentes mencionados, se resalta el buen trabajo que hacen los autores al momento de promover la interpretación y cálculo de las MTC cuando los datos están sin agrupar, utilizando en algunos casos material didáctico virtual, elementos lúdicos o herramientas tecnológicas. Sin embargo, este trabajo pretende abordar las MTC-DA, por lo que los antecedentes expuestos son un eje primordial para realizar las actividades de esta alternativa, ya que se basan en promover la interpretación y el uso de material didáctico como herramienta utilizada para promover la interpretación de estas medidas, siendo estos elementos innovadores de la alternativa.

Objetivos**Objetivo General**

Diseñar, gestionar y validar una alternativa metodológica para la interpretación de las medidas de tendencia central en datos agrupados, utilizando material didáctico.

Objetivos Específicos

- Identificar elementos teóricos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las medidas de tendencia central para datos agrupados.
- Desarrollar un material didáctico que permita la interpretación de las medidas de tendencia central en datos agrupados.
- Corroborar si el material didáctico diseñado aporta a la interpretación de las medidas de tendencia central en datos agrupados.

Marco de Referencia

En este capítulo se presenta el marco de referencia para las MTC-DA. Especialmente se sustentan la media, la mediana y la moda desde una mirada disciplinar, sus características, utilidades y desventajas. Además, se exponen algunas recomendaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y de las MTC. Es de resaltar que esta información no se presenta de forma explícita los estudiantes. Luego, se exhiben varios errores y dificultades que pueden presentar los estudiantes cuando trabajan con MTC. Por último, se presentan definiciones sobre material didáctico y distintas clasificaciones de este.

Medidas de Tendencia Central

Del Castillo y Salazar (2018) indican que las medidas o parámetros de tendencia central son aquellas que representan el valor que “suele situarse hacia el centro de la distribución de datos” (p. 51). Estas medidas tienen características de gran importancia, pues ayudan a comparar y describir conjuntos de datos; muestran la ubicación de datos atípicos del conjunto de datos; señalan el lugar donde se encuentra un dato específico; ayudan a comparar e interpretar datos de un mismo conjunto, de un mismo caso o en dos o más grupos; entre otros.

Las MTC de mayor utilidad en un conjunto de datos son: la media aritmética o promedio (punto de equilibrio); la mediana (dato que ocupa la posición central) y la moda (categoría o valor de la variable estadística que se presenta con mayor frecuencia en el conjunto de datos). Cabe resaltar que las MTC que no se asumen en esta alternativa son la media aritmética ponderada, media geométrica, media armónica.

A continuación, se describe cada una de estas medidas con sus características, utilidad, desventajas y procesos para calcularlas cuando se presentan datos agrupados.

Media aritmética o promedio

Para Hernández, et ál., (2014) la media aritmética o promedio (\bar{x}), es la MTC más utilizada en un conjunto de datos. Algunas características que mencionan estos autores acerca

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

del promedio son: en el cálculo intervienen todos los datos; su valor es único; tiene mayor utilidad en la comparación de poblaciones; se interpreta como el punto de equilibrio, pues tiene la propiedad de equilibrar las desviaciones de los datos respecto a su valor; la media aritmética tiene mayor representatividad cuando los datos se muestran menos dispersos entre ellos.

Por otra parte, Wackeyly, et ál., (2010) señalan desventajas de la media aritmética, por ejemplo, cuando los datos están agrupados su valor oscila en función de la cantidad y amplitud de los intervalos considerados; cuanto menos homogéneos son los datos, menos información puede proporcionar, es decir que conjuntos de datos distintos pueden obtener la misma media aritmética; y esta es afectada por la presencia de datos atípicos.

Para obtener la media aritmética en un conjunto de datos agrupados, se debe multiplicar cada marca de clase (x_c) por la frecuencia absoluta (f_i) del respectivo intervalo, luego sumar el resultado de cada producto y dividir dicho valor entre el total de datos (n); es decir, aplicar la fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_c * f_i}{n}$$

Mediana

Batanero y Cobo (2000) señalan a la mediana (Me) como la estimación de un valor. Esta aproximación varía dependiendo de la amplitud elegida para los intervalos de clase (p. 4). Es importante aclarar que esta medida solo se puede calcular para variables estadísticas cuantitativas, ya sean discretas o continuas. Según Ruiz y Barón (2009) algunas características de la mediana son: es única en un conjunto de datos; puede calcularse para datos agrupados; no se ve afectada cuando se presentan datos atípicos en el conjunto, de hecho, cuando los datos son heterogéneos (presentan mayor dispersión o variabilidad) la mediana es el valor más representativo de la tendencia central. Por otra parte, estos mismos autores señalan algunas desventajas, por ejemplo, que cuando los datos están agrupados, su valor oscila según la

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

amplitud de los intervalos; y que su expresión y cálculos algebraicos son tediosos comparados con la media aritmética.

Su fórmula algebraica se expresa mediante:

$$M_e = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} * a_i$$

Donde, L_i que es el límite⁴ inferior de la clase donde se encuentra la mediana; $\frac{N}{2}$ hace referencia a la semisuma de las frecuencias absolutas; f_i es la frecuencia absoluta de la clase mediana; F_{i-1} es la frecuencia acumulada anterior a la mediana y a_i es la amplitud de la clase.

Moda

Cobo (2003) señala la moda como el valor, categoría o atributo de la variable estadística que presenta la mayor frecuencia absoluta, su representación simbólica está dada por M_o . Cuando los datos se encuentran agrupados, se hace referencia a la moda como el intervalo modal y se utiliza la siguiente fórmula aritmética para su cálculo:

$$M_o = L_i + \frac{f_M - f_1}{2f_M - f_1 - f_2} * a$$

Donde L_i es el límite inferior del intervalo modal, f_M es la frecuencia del intervalo modal, f_1 es la frecuencia absoluta del intervalo continuo por la izquierda al intervalo modal, f_2 es la frecuencia absoluta del intervalo continuo por derecha al intervalo modal y a es la amplitud del intervalo modal.

Saavedra (2021) menciona algunas propiedades estadísticas de la moda cuando los datos están agrupados. Cuando se hace referencia a la frecuencia en su fórmula algebraica, puede referirse a la frecuencia absoluta, relativa o porcentual; utilizando cualquiera de ellas el valor de la moda es el mismo. En caso de que el intervalo modal se encuentre en el primer

⁴ Es de aclarar que, en las fórmulas algebraicas de la mediana y la moda, cuando se hace referencia a límite se relaciona con identificar si un dato pertenece a uno u otro intervalo, siendo estos los valores extremos de cada intervalo.

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

intervalo, entonces $f_1 = 0$, pues f_1 es el intervalo continuo a la izquierda del intervalo modal, por lo que no aparece y su frecuencia es 0; de la misma manera sucede cuando el intervalo modal se encuentra en el último intervalo, por lo que la frecuencia de $f_2 = 0$. Si en el conjunto de datos existe más de un intervalo modal, se aplica la fórmula a cada uno de estos intervalos y de allí se obtiene tantas modas como intervalos modales (p. 80).

Este mismo autor utiliza un ejemplo para mostrar lo inconveniente de la moda. La Figura 1 muestra el puntaje obtenido por 80 estudiantes en una prueba estandarizada.

Figura 1

Tabla de frecuencia

Intervalo	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa Porcentual
[395 – 455[6	7,5 %
[455 – 515[8	10 %
[515 – 575[10	12,5 %
[575 – 635[22	27,5 %
[635 – 695[16	20 %
[695 – 755[12	15 %
[755 – 815]	6	7,5 %
Total	80	100 %

Nota. Tomado de *Acerca de la moda* (p.80), por E. Saavedra, 2021, *Revista de Educación Matemática*, 36(1).

Con estos datos, se obtiene la información presentada en la Tabla 2.

Figura 2

Información obtenida de la Tabla de frecuencia

Símbolo	Con Frecuencia Absoluta	Con Frecuencia Relativa Porcentual
\lim_{\inf}	575	575
\lim_{\sup}	635	635
a	60	60
f_M	22	27,5 %
f_1	10	12,5 %
f_2	16	20 %
d_1	12	15 %
d_2	6	7,5 %
$\frac{d_1}{d_1 + d_2}$	$\frac{12}{12 + 6} = \frac{2}{3}$	$\frac{15 \%}{15 \% + 7,5 \%} = \frac{2 \cdot 7,5 \%}{3 \cdot 7,5 \%} = \frac{2}{3}$

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

Nota. Tomado de *Acerca de la moda (p.81)*, por E. Saavedra, 2021, *Revista de Educación Matemática*, 36(1).

Donde d_1 hace referencia a $f_M - f_1$ y $d_2 = f_M - f_2$. Si se utiliza la fórmula algebraica para la moda, se obtiene que $M_o = 615$. Por otra parte, Saavedra (2021) considera a 80 datos que satisfacen las condiciones de la tabla de frecuencias.

Figura 3

Datos que satisfacen las condiciones de la Tabla de frecuencia

395	410	410	410	410	449	460	495	500	505
511	511	511	513	515	515	521	523	530	550
562	570	571	573	575	575	580	581	582	585
585	585	588	590	592	595	598	599	600	615
615	616	620	625	630	631	635	635	639	640
645	648	650	652	655	655	660	660	665	667
680	690	700	708	710	725	725	730	735	738
740	747	750	754	778	780	790	795	800	815

Nota. Tomado de *Acerca de la moda (p.81)*, por E. Saavedra, 2021, *Revista de Educación Matemática*, 36(1).

Con estos datos la moda es 410. Por lo que son dos resultados bastante diferentes, la moda presenta el inconveniente de que cuando los datos están agrupados y no se conocen explícitamente, puede llegar a ser un valor incorrecto y por lo tanto poco fiable para caracterizar el conjunto de datos.

A continuación, en la Tabla 1 se expone las ventajas y desventajas de cada una de las

Tabla 1*Ventajas y desventajas de las MTC-DA*

Medida	Ventajas	Desventajas
Media aritmética	Tiene mayor representatividad cuando los datos se muestran menos dispersos entre ellos.	Su valor oscila en función de la cantidad y amplitud de los intervalos.
	Tiene mayor utilidad en la comparación de poblaciones.	Cuanto menos homogéneos son los datos, menos información puede proporcionar.
Mediana	Tiene mayor representatividad cuando los datos son heterogéneos.	Su valor oscila en función de la cantidad y amplitud de los intervalos.
		Su cálculo algebraico es más tedioso comparado con la media aritmética.
Moda	Para calcular el valor de la moda, se puede utilizar cualquier frecuencia (absoluta, relativa o porcentual); su valor es el mismo.	Cuando los datos están agrupados y no se conocen explícitamente, puede llegar a ser un valor incorrecto y por lo tanto poco fiable para caracterizar el conjunto de datos.
		Su cálculo algebraico es más tedioso comparado con la media aritmética.

Asuntos didácticos para la enseñanza de las Medidas de Tendencia Central

En esta parte del marco de referencia se presentan aspectos didácticos respecto a las MTC-DA. En un primer momento se exponen recomendaciones para la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística y de las MTC. Luego se exhiben errores y dificultades que pueden presentar los estudiantes cuando trabajan con las MTC. Por último, se presentan algunas definiciones de material didáctico y clasificaciones de estos en el campo de la Educación Matemática.

Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística

Batanero (2001) resalta que la Estadística no es una forma de hacer sino una forma de pensar que ayuda a resolver problemas en las ciencias y la vida cotidiana. La enseñanza de la Estadística debería empezar con el abordaje de problemas reales mediante los cuales los

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

estudiantes puedan desarrollar sus ideas, trabajando las diferentes etapas de la resolución de un problema real (planificar la solución, recoger y analizar los datos, comprobar las hipótesis iniciales y tomar una decisión en consecuencia) (pp. 117-118). Además, para Batanero y Díaz (2011) la Estadística se ha centrado en la enseñanza de técnicas y procedimientos, pero ha olvidado promover la comprensión, interpretación y razonamiento, por eso la necesidad de centrar la enseñanza en actividades que involucren la solución de problemas y el uso de datos reales, en todos los niveles de la educación (p. 7).

Por otro lado, para la enseñanza de la Estadística se han formulado algunas recomendaciones, entre ellas las mencionadas en la Guía para la Evaluación y Enseñanza de la Educación Estadística (GAISE, por su sigla en inglés); Blanco (2018) las señala de la siguiente manera: enfatizar en la alfabetización estadística; usar datos reales; enfatizar en la comprensión de conceptos más que en sus procedimientos; promover el aprendizaje activo; usar tecnología para explorar conceptos y analizar datos; usar la evaluación para mejorar y valorar el aprendizaje (p. 255).

Para materializar estas ideas, Batanero y Díaz (2011) recomiendan integrar la enseñanza de la Estadística a pequeñas investigaciones, actividades o proyectos, en donde se analicen sus soluciones (p. 7); teniendo en cuenta que para valorar la Estadística se debe velar por su interpretación más que por sus procedimientos, puesto que con ello se desarrolla un espíritu crítico y consciente de la función de la Estadística en la vida cotidiana.

Además de estas recomendaciones, González (2016) menciona que la Estadística debe enseñarse, aprenderse y utilizarse bajo un problema contextual, intentando llevarlo a la práctica cotidiana del estudiante, quien debe asumir el reto y resolverlo. Según esto, la enseñanza de esta área del saber debe ir más allá de la recolección de datos; debe conllevar nuevas ideas, síntesis y analizar hallazgos, establecer conclusiones formas de organizar y presentar información para orientar su interpretación (p. 366).

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

En concordancia con estos autores, se considera que el papel que cumplen los procedimientos centrados en los algoritmos ya no resulta relevante para el estudio de la Estadística en el aula. Además, el uso de datos reales es fundamental, puesto que apoya la comprensión de la Estadística y vislumbra su utilidad para entender el mundo, lo que enriquece la actividad del estudiante, quien desarrolla activamente su aprendizaje por medio de análisis, interpretaciones y conclusiones que favorecen la valoración de la Estadística. Hoy por hoy, se busca enfatizar en la comprensión de conceptos y resultados en pro de promover en las aulas personas analíticas, críticas y propositivas en cuanto a la realidad de la sociedad, procurando el desarrollo de la Estadística y sobre todo de su cultura en los ciudadanos del común.

Enseñanza y Aprendizaje de las MTC

Respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las MTC se exponen recomendaciones sobre el abordaje pedagógico para llevarlas al aula, ya que en cuanto a las MTC-DA, en particular, es escasa o nula la información que se logra rastrear al respecto.

Una recomendación está dada por Oviedo (2016, p. 22) quien señala que la enseñanza de las MTC desde hace varios años enfatiza en los procesos de cálculos a papel y lápiz. Sin embargo, hoy en día gracias al avance de la tecnología la enseñanza de estos conceptos se centra en su comprensión e interpretación. Por ejemplo, Batanero (2000) sugiere que es conveniente manipular los conjuntos de datos para lograr que el valor de la media aritmética, mediana y la moda sean marcadamente diferentes; con esto los estudiantes pueden identificar e interpretar cada una de tales medidas, sin limitarse de manera exclusiva a replicar algoritmos que están siendo dejados en manos de la tecnología (p. 10).

Areiza y Cáceres (2020) exponen que la interpretación se evidencia cuando se reconoce información estadística, su origen, contexto para luego darle significado. Desde este punto de vista, Shield (2011, citado en Areiza y Cáceres 2020) destaca la importancia de identificar y entender la variabilidad de un conjunto de datos desde su representación hasta sus

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

conclusiones, esto es cuando el estudiante tiene la capacidad de interpretar información estadística mediante la crítica de una situación planteada.

Casallas (2016, pp. 58-107), recomienda promover la interpretación de las MTC ya que ello favorece el desarrollo del pensamiento estadístico en los estudiantes, permitiendo que el docente reconozca al estudiante en su contexto y propiciando un ambiente escolar enriquecedor. Este autor también resalta que el estudio de las MTC fomenta el análisis de datos estadísticos en diversos contextos, caracterizando el uso de cada una de las MTC a partir de la variable involucrada en el conjunto de datos y de manera particular en el estudio estadístico. En concordancia, Restrepo (2020) recomienda que la enseñanza de las MTC debe tener como objetivo ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de los elementos asociados al pensamiento estadístico ya que con esto se promueve la interpretación de las MTC en las distintas situaciones que se plantean en el aula de matemáticas (p. 79).

Londoño (2017, p. 83) menciona que una estrategia para promover la interpretación de las MTC es incluir problemas que logren abordar vacíos como en el análisis de estos valores, la diferenciación de cada una de las medidas y la comprensión de los conceptos; vacíos que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las MTC. También propone profundizar en cada una de las medias ya que el uso correcto de los algoritmos de cálculo por sí solo no basta, por eso es necesario que los estudiantes interpreten y expresen sus respuestas en el marco de un contexto, es decir dándole significado a los resultados de los algoritmos.

En síntesis, se considera que la enseñanza de las MTC debe promover el pensamiento estadístico, así como el pensamiento crítico y analítico de los estudiantes. Es por lo que se debe enfatizar en la interpretación de las MTC-DA por medio de la recolección de datos que se encuentren en el contexto de los estudiantes, con el fin de que ellos los puedan manejar, tratar, y encontrar el valor de cada una de las MTC otorgándoles sentido a estas dentro de dichos contextos. El docente debe crear escenarios en donde se trabaje con las propiedades y

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

características de las MTC y fomentar la interpretación de estas y no centrar la atención en su cálculo o definición.

Errores y Dificultades en el aprendizaje de las MTC-DA

En este apartado se presentan errores y dificultades que se han evidenciado y documentado al momento de trabajar con MTC en el aula de matemáticas.

Para Socas (2007) los errores son un esquema cognitivo inadecuado como consecuencia de la falta de conocimiento, que están relacionados con concepciones inapropiadas sobre los objetos matemáticos. Este autor afirma que los errores dependen de los contenidos de las tareas presentadas y de los procesos del lenguaje (p. 20). Pese a esto, Silva (2010) ha reconocido el estudio de errores como una fuente de conocimiento sobre las dificultades de los estudiantes al abordar un objeto de estudio (p. 10) y que han de servir para formular propuestas para mejorar la enseñanza de tales objetos.

Con respecto a las dificultades, Socas (2007) las define como alteraciones en los procesos de cambio provocados por prácticas (probablemente inadecuadas) de enseñanza y aprendizaje. Además, comenta que estas tienen origen en el contexto educativo (el alumno, la temática, el docente o la institución educativa), las cuales se conectan y refuerzan en la práctica pedagógica (p. 31). Por su parte, Cubides (2011), comenta que las dificultades que presentan los estudiantes al momento de trabajar Estadística tienen relación con el lenguaje, conceptos o definiciones, propiedades y la realización de un procedimiento mal planteado que genera argumentaciones equivocadas (p. 55).

Con base en la perspectiva planteada, en la Tabla 1 se presentan, para cada una de las MTC, algunos errores y dificultades que comenten estudiantes, según lo reportan Batanero (2000), Cubides (2011), Silva (2010), Cobo (2003), Becerril, et ál., (2019), Fuentes (2017), Arias y Silva (2012), y Rodríguez (2004, citado en Silva, 2010).

Tabla 2*Errores y dificultades en el aprendizaje de las MTC*

MTC	Errores	Dificultades
Media	<p>Batanero (2000) expone:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Olvidar la frecuencia de cada intervalo. No la tienen en cuenta para realizar el algoritmo. • Confundir los algoritmos de la suma con la multiplicación para hallar la media de un conjunto de datos agrupados. • Pensar que la media cumple con las propiedades⁵: asociativa, clausurativa, elemento neutro e inverso; lo que lleva a realizar mal el algoritmo. <p>Silva (2010) señala:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sumar los valores de la variable sin tener en cuenta las veces que se repite cada valor y dividir entre la suma de las frecuencias. 	<p>Cubides (2011):</p> <ul style="list-style-type: none"> • Confunden la terminología de media y mediana. • No justifican o interpretan los valores obtenidos. <p>Cobo (2003) comenta:</p> <ul style="list-style-type: none"> • No distinguen entre media, mediana y moda o entre estos y otros conceptos que se le plantean en una situación. • Aplican o seleccionan un procedimiento inadecuado para una situación.
Mediana	<p>Cubides (2011) destaca:</p> <ul style="list-style-type: none"> • No ordenar los datos para calcular la mediana. • Tomar en cuenta los valores de la variable dejando de lado sus frecuencias. <p>Según Silva (2010)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Calcular la moda en vez de la mediana. • Calcular la mediana sin tener en cuenta si el número de datos es par o impar. • No tener en cuenta el tipo de variable estadística inmersa en el estudio. 	<p>Becerril, et ál., (2019):</p> <ul style="list-style-type: none"> • Obtienen correctamente los valores de las MTC, pero no le dan significado. • No identifican las propiedades de las MTC. • No logran diferenciar datos cualitativos de cuantitativos. • Señalan al intervalo con mayor frecuencia absoluta como el
Moda	<p>Arias y Silva (2012) resaltan:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ver la moda como mejor estimador que la media. 	

⁵ Por ejemplo, si se trabaja en un conjunto de datos compuesto por variables cuantitativas discretas, el valor de la media aritmética puede ser un valor decimal y esto implica que este valor no esté en conjunto de datos (axioma de clausura).

	<p>Cubides (2011) destaca:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Tomar la mayor frecuencia absoluta como la moda, en lugar del valor de la variable que tiene mayor frecuencia. <p>Rodríguez (2004, citado en Silva, 2010)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Confundir los valores de las variables con los valores de la frecuencia correspondiente. 	intervalo que más se repite.
--	---	------------------------------

Atendiendo a estos errores y dificultades, y la experiencia documentada por Vallejo (2020) se puede decir que algunos de ellos son trasferibles al aprendizaje de las MTC-DA. Se resalta que en el aprendizaje de las MTC las dificultades están altamente relacionadas con la interpretación de estas, y para el caso de los errores, en su gran mayoría se encuentran en los procesos algorítmicos. Sin embargo, como mencionan Fiúza y Fernández (2014) se debe considerar que los estudiantes cometen estos errores y presentan tales dificultades desde sus primeros años de escolaridad y que están altamente relacionados con los procesos pedagógicos que se llevan a cabo en torno de tales conceptos.

Material Didáctico para la Enseñanza de las Matemáticas

Velasco (2012) expone distintos autores quienes definen lo qué es material didáctico. Por ejemplo, Álvarez (1996, citado en Velasco, 2012) se refiere a material didáctico como todo objeto, juego o medio técnico, cuyo objetivo es ayudar a los estudiantes a producir preguntas, proponer conceptos o concretar ideas abstractas (p. 8). Para Alsina, et ál., (1998, citado en Velasco 2012) el material didáctico hace referencia a todos los objetos, aparatos o medios que pueden ayudar al aprendiz a describir, entender y consolidar conceptos en las fases de aprendizaje establecidas por el docente (p. 8).

Angarita y Palacios (2015), presentan con mayor claridad una interpretación de las definiciones o relaciones dadas por distintos autores sobre recurso didáctico y material

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

didáctico para la enseñanza de las matemáticas. Así, Carretero, et ál., (1995, citado en Angarita y Palacios 2015) señalan los recursos didácticos como los materiales que no son diseñados para un fin educativo; es decir, no pretenden ayudar en el aprendizaje de un concepto o en un procedimiento (p. 15); mientras que para Casallas (1988, citada en Angarita y Palacios 2015), el material didáctico es el que se construye con un fin educativo y tiene como característica principal la adaptación a distintos contextos (p. 16). Por su parte, Cañadas, et ál., (2002, citados en Angarita y Palacios 2015) relacionan los recursos didácticos con el material didáctico, pues afirman que “los recursos didácticos se convierten en materiales didácticos cuando el docente los utiliza con una finalidad didáctica en el aula” (p. 16).

Teniendo en cuenta las definiciones y las interpretaciones mencionadas, se resaltan las perspectivas de Álvarez (1996, citado en Velasco, 2012) y Alsina, et ál., (1998, citado en Velasco 2012) quienes coinciden en definir al material didáctico como un objeto o medio técnico que busca en el estudiante describir, interpretar y consolidar conceptos. Casallas (1988, citada en Angarita y Palacios 2015), señala que el material didáctico es construido con un fin educativo; característica que no se presenta en los recursos didácticos según lo expuesto por Carretero, et ál., (1995, citado en Angarita y Palacios 2015). Sin embargo, para Cañadas, et ál., (2002, citados en Angarita y Palacios 2015) los recursos didácticos pueden convertirse en materiales didácticos cuando su propósito sea educativo. Por lo tanto, en esta alternativa metodológica se asume a material didáctico como medio para que el estudiante logre describir e interpretar las MTC-DA. Sin embargo, en este trabajo se utilizan recursos didácticos, los cuales se transforman en material didáctico con el fin de cumplir los objetivos propuestos.

En la enseñanza de la Estadística, Lara (2017) indica que el material didáctico facilita la exploración del entorno, la experimentación de distintas situaciones y ayuda a recoger información de distintas maneras para agruparla en tablas e interpretar los datos (p. 13). Por otra parte, Batanero (2001) señala que el material didáctico en la enseñanza de la Estadística ayuda a la simulación, ya que es difícil observar un experimento aleatorio en la realidad. “La

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

simulación permite condensar el experimento en el tiempo y en el espacio y operar con el experimento simulado para obtener conclusiones válidas para el experimento original” (p. 136).

Esta autora propone materiales que facilitan la enseñanza de la estadística, entre ellos: dados, trompos, monedas y fichas que ayudan a formalizar el experimento aleatorio más simple posible; gráficos estadísticos como diagramas de barras, de árbol, entre otros; tablas o anuarios con datos estadísticos recogidos por los alumnos o tomados de algún artículo de prensa (pp. 135-136).

En síntesis, el material didáctico para la enseñanza de las MTC-DA, facilita el aprendizaje, la exploración de estas en distintos contextos reales y la interpretación de estas. Además, este material debe funcionar como puente entre la realidad y los objetos estadísticos con el fin de obtener resultados y conclusiones válidas.

Clasificaciones de Materiales Didácticos

Flores, et ál., (2011, citados en Angarita y Palacios 2015) señalan que los materiales didácticos para la enseñanza de matemáticas se clasifican en tres ramas: según su utilidad, según su contenido matemático y según su versatilidad. Según su utilidad, el material didáctico debe responder a la pregunta ¿para qué sirve?, y estar asociado al momento en el que se usa. Existen diferentes tipos de materiales didácticos para cada momento de la clase: materiales Pre-Instrucionales, son los materiales que se utilizan para introducir un tema (ábacos, regletas de Cuisenaire, bloques de base 10, entre otros). Materiales Co-instrucionales, son utilizados en el desarrollo de la clase para tratar un concepto (geoplanos, tangrams, entre otros). Materiales Post-Instrucionales, son aquellos que aparecen al final de la clase y se utilizan para repasar un tema o ejercitarse procedimientos de cálculo, por ejemplo: dominós algebraicos, puzzles algebraicos, loterías, entre otros (p. 16).

La segunda rama indicada por los autores es según su contenido matemático. Allí, los materiales se dividen en contenido aritmético, haciendo referencia a los materiales que permiten tratar asuntos de los números y sus operaciones (Regletas de Cuisenaire, ábacos,

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

etc.); contenido algebraico, son los materiales que ayudan a representar, generalizar y formalizar patrones de las matemáticas (balanzas, calculadoras con tecnologías CAS, entre otros); contenido geométrico, son los materiales que permiten tratar temas de transformaciones, nociones de perímetro, área y volumen, figuras en el espacio (v. g. geoplanos, tangrams, Cabri II o Cabri 3D). Contenido estadístico y de probabilidad, se utilizan materiales especializados como softwares (Fathom, R, SPSS, Excel, etc.). Contenido de análisis, se utilizan materiales que permiten tratar objetos matemáticos como los números reales y complejos (v. g. Derive, Matlab, Maple) (p.17).

La última rama de clasificación que indican los autores Flores, et ál., (2011, citados en Angarita y Palacios 2015) es según su versatilidad, son los materiales multifacéticos; es decir los que tienen bastantes utilidades. Estos a su vez se subclasifican según la adaptación a diversos contenidos de las matemáticas, según su adecuación a diversas áreas y su uso en los distintos niveles de escolaridad. Para la adaptación a diversos contenidos en matemáticas, se ejemplifican materiales como el geoplano ya que permite trabajar distintos temas de la geometría como lo son segmentos y ángulos. Según su adecuación a diversas áreas; por ejemplo, el tangram puede emplearse para trabajar temas tanto de Geometría como de Aritmética. Por último, según su uso en diferentes niveles de escolaridad; por ejemplo, las Regletas de Cuisenaire ayudan a realizar operaciones como suma, resta, multiplicación y división y, en grados superiores facilita la enseñanza de las fracciones (p. 18).

De otra parte, Godino, et ál., (2004) clasifican los materiales didácticos como aquellos que ayudan al estudio y materiales manipulativos los que apoyan y potencian el razonamiento matemático. Para la primera categoría, los autores señalan que los materiales ayudan a la función del profesor, es decir apoyan en la presentación de problemas, ejercicios, conceptos (v. g. libros guía, libros de ejercicios). En la segunda categoría están los materiales manipulativos, que hacen referencia a los instrumentos de trabajo matemático sin importar si son del profesor o del estudiante; estos a su vez tienen dos clasificaciones, manipulativos tangibles, son los que

ponen en juego la percepción táctil (regletas, ábacos, balanzas, compás, etc.) y manipulativos gráfico-textuales-verbales, que hacen referencia a los materiales que tienen captación visual y/o auditiva (v. g. gráficos, textos, software).

González (2010, citado en Velasco 2012) menciona que los materiales didácticos utilizados en matemáticas se emplean con tres objetivos. El primero, es favorecer la adquisición de rutinas, esto implica el uso de materiales didácticos diseñados especialmente para cumplir una función específica: consolidación de conceptos o ejercitación de procedimientos. El segundo objetivo hace referencia a la modelización de ideas y conceptos matemáticos, pues los aprendices presentan dificultades para resolver un problema de forma abstracta, por lo que el docente se ve en la obligación de fabricar un modelo mejor adaptado para que los estudiantes puedan reflexionar sobre las dudas o dificultades cuando estudian el objeto. Por último, para plantear y resolver problemas, el material didáctico funciona como generador de problemas y actividades de investigación; en algunas ocasiones el mismo material hace referencia al problema (pp. 4-5).

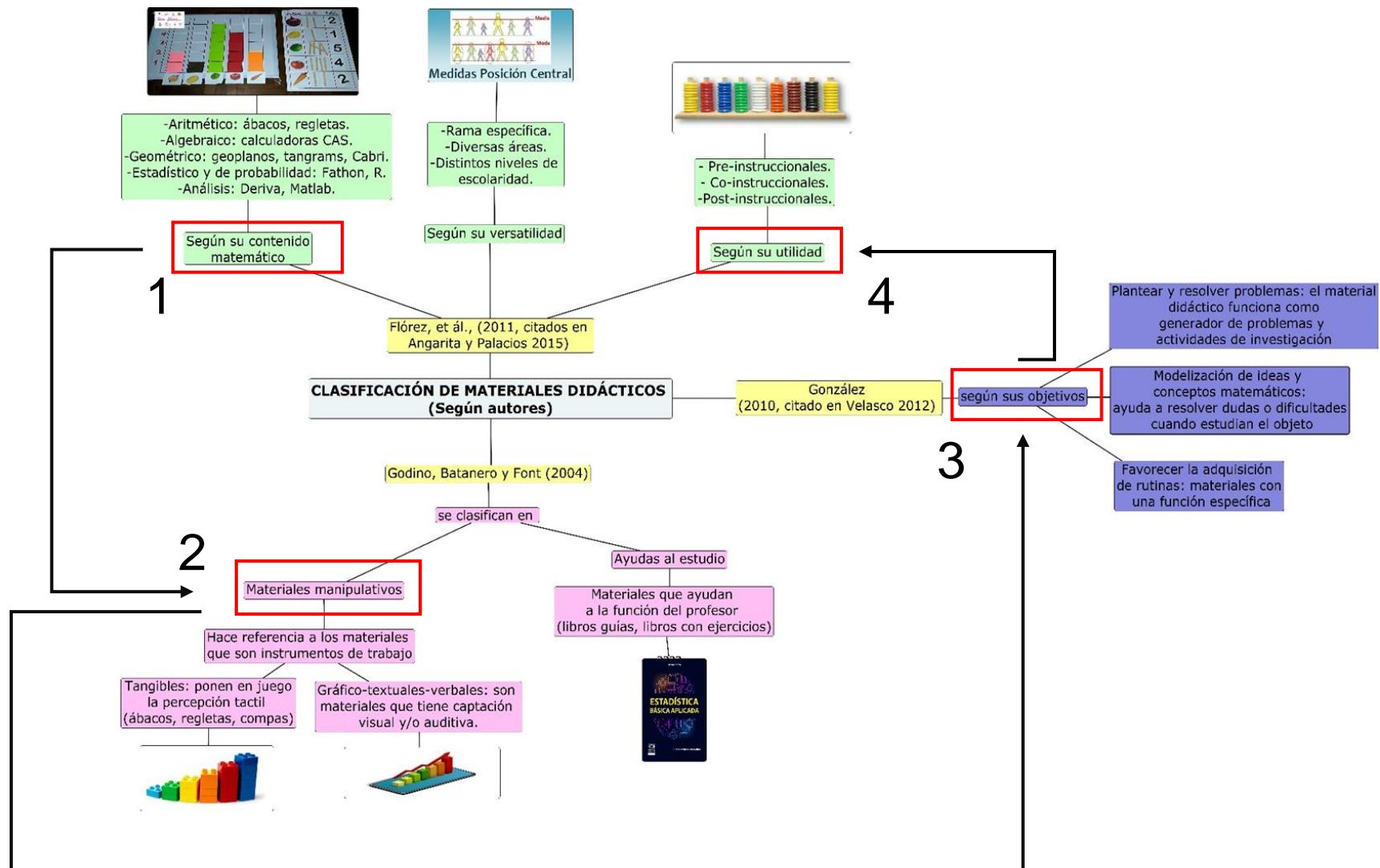
Teniendo en cuenta que el uso de los materiales didácticos enriquece varias competencias de los estudiantes, por ejemplo, la comprensión y la interpretación, se recomienda al docente de matemáticas elegir en un primer momento el contenido matemático que quiere desarrollar en la clase, luego, definir si este contenido se pretende impartir usando material manipulativo, material auditivo, libros, etc.; enseguida, se debe definir el objetivo que se quiere lograr o trabajar con este material, y finalmente, decidir en qué fase de la clase quiere usar el material.

En la Figura 4 se presenta un esquema gráfico donde se resume la clasificación de los materiales didácticos según los autores mencionados. En él, de color rojo se encuentran las características que toma el material didáctico que se perfila implementar en esta alternativa metodológica.

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

Figura 4

Clasificación de los materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas



Aspectos Metodológicos

En este capítulo se presentan los aspectos metodológicos basados en el Análisis Didáctico de Gómez (2006) para diseñar e implementar una secuencia de actividades didácticas. Se enfoca en el análisis de contenido, el cognitivo, el de instrucción, el diseño de actividades, la puesta en práctica de las actividades y el análisis de actuación.

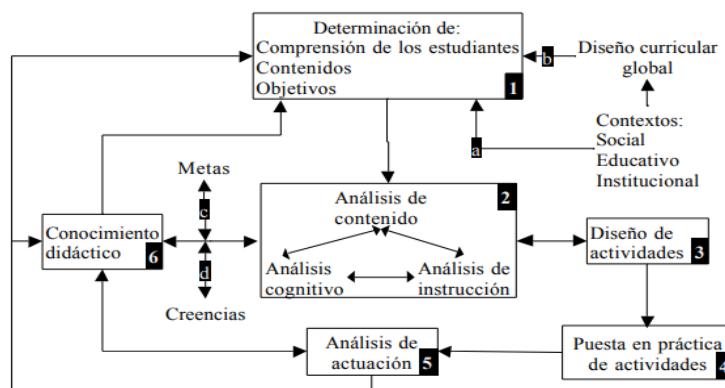
Análisis Didáctico

Gómez (2006) describe el Análisis Didáctico como la conceptualización de actividades o la planificación local que el docente de matemáticas realiza para diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. El autor también señala a este constructo como un conjunto de procedimientos que permite al docente abordar dos situaciones del aula de clase: la primera de ellas es que el docente debe ser capaz de identificar y organizar los distintos significados de un objeto en estudio, y la segunda, el docente debe seleccionar aquellos significados que serán utilizados en la instrucción.

La Figura 5 presenta los distintos componentes que conforman el análisis didáctico desde la perspectiva de Gómez (2006).

Figura 5

Ciclo de análisis didáctico



Nota. Tomado de Ciclo de análisis didáctico (p.14), por P. Gómez, 2006.

Gómez (2006) señala que el análisis didáctico se origina determinando el objeto de estudio a tratar y los objetivos de aprendizaje. Estos están relacionados con el análisis de actuación que se fundamenta en las ideas que tiene el docente del objeto de estudio y con el contexto (social, educativo e institucional) de los estudiantes. Luego, se inicia el análisis de contenido, donde el profesor identifica y organiza los múltiples significados de un concepto, sus representaciones y su fenomenología; en el análisis cognitivo, el profesor formula hipótesis acerca de los posibles caminos que pueden tomar los estudiantes al realizar tareas y actividades en el proceso de aprendizaje del objeto matemático. En el análisis de instrucción, el profesor identifica y caracteriza las posibles tareas a utilizar en el diseño de actividades; para el diseño de actividades, el docente puede crear nuevas tareas o seleccionar y modificar aquellas tareas que sean coherentes con los contenidos, los objetivos y los análisis anteriormente mencionados. La puesta en práctica de las actividades se debe centrar en el discurso matemático y en la(s) planificación(es) que debe realizar el docente cuando está en marcha la sesión de clase. Para el discurso matemático, la comunicación y justificación que utilizan los estudiantes juegan un papel importante, pues al generar discusión se requiere que cada escolar justifique su posición y busque convencer a los demás. El docente por su parte debe guiar el discurso de cada estudiante con el fin de resaltar justificaciones válidas y promover la construcción de significados acordes al objeto de estudio. Para la planificación, el profesor puede o no modificar sobre la marcha el diseño de tareas o actividades que se han programado. Para ello se deben tener en cuenta las actuaciones, los errores y las dificultades que tienen los estudiantes cuando abordan las tareas o actividades. En caso de que el docente haya decidido no continuar con las tareas o actividades previstas tendrá que reformular los objetivos de aprendizaje propuestos y realizar una o varias tareas que aborden los errores o dificultades encontrados.

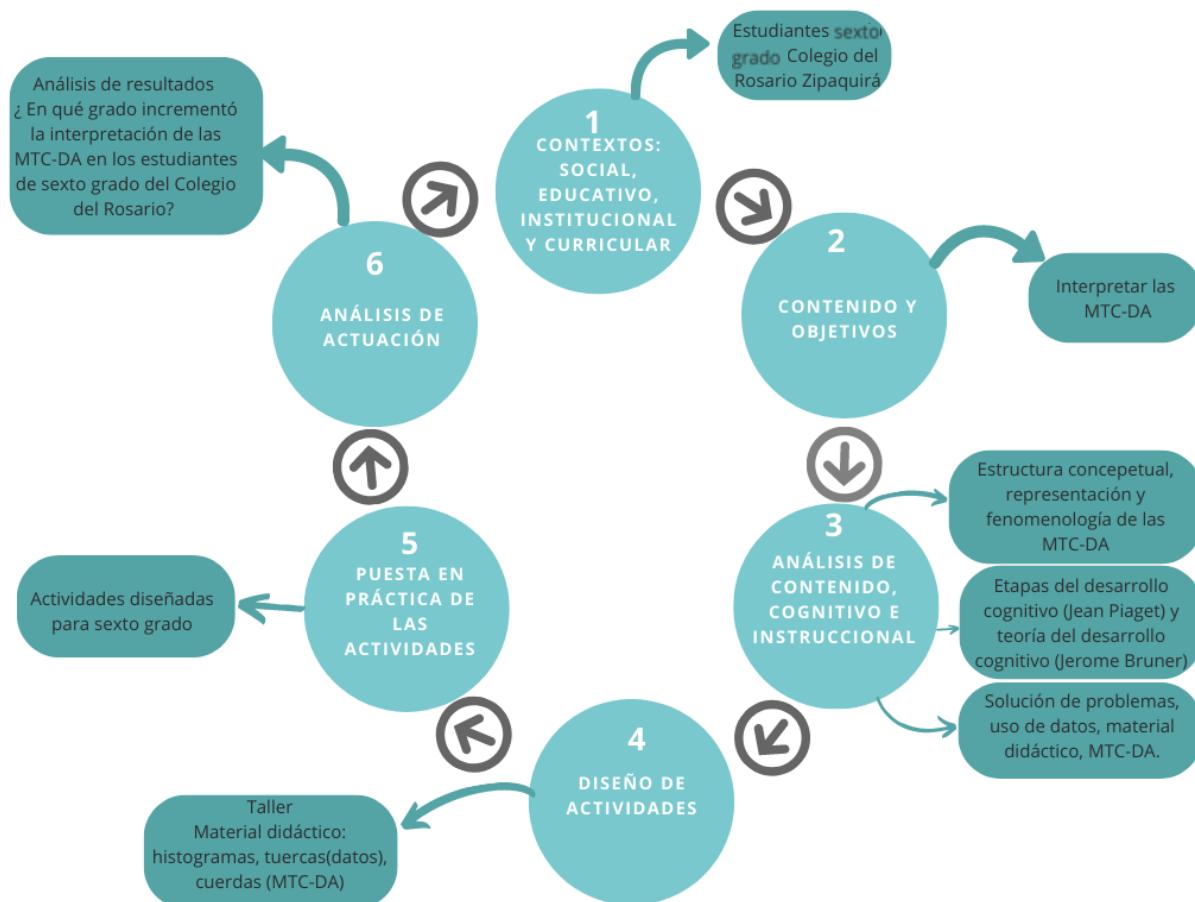
Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

En la última fase del análisis didáctico (análisis de actuación), el docente recoge, describe y analiza la información de las tareas y actividades desarrolladas por los estudiantes. Esta descripción debe realizarse sobre las actuaciones que presentan los estudiantes cuando abordan las tareas; es decir, se presentan las tareas que los escolares realizaron y las tareas que no se resolvieron adecuadamente (errores, dificultades, soluciones incompletas, entre otras).

En la Figura 6 se muestran las fases del Análisis Didáctico que se implementan en esta alternativa metodológica.

Figura 6

Fases del Análisis Didáctico



Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

Considerando las premisas descritas, se reconoce la utilidad de cada una de las fases del ciclo del Análisis Didáctico para proyectar la intervención con los estudiantes. De esta manera, identificar los objetivos a cumplir, generar los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción para diseñar las tareas o actividades adecuadas que lleven a la interpretación de las MTC-DA con ayuda del material didáctico, conocer los contextos en los que están inmersos los estudiantes partícipes de esta indagación, es el reto que se afronta con este trabajo de grado, resultados que han de ser estudiados como parte de la etapa del análisis de actuación.

Desarrollo de la Propuesta

En esta sección se describe el desarrollo de cada una de las fases expuestas en los aspectos metodológicos, de conformidad con el análisis didáctico y bajo la perspectiva de Gómez (2006), enfocado ello en el objeto estadístico MTC-DA.

Contexto Institucional

El Colegio del Rosario está ubicado en el municipio de Zipaquirá, Cundinamarca. Municipio urbano donde según la Cámara de Comercio de Bogotá [CCB] el crecimiento espacial y de población ha sido importante y continuo. En materia educativa, existe déficit de matriculados en la educación secundaria, situación que se debe atender para mejorar la competitividad del capital humano (CCB, 2010, p.27). Aunque cuenta con uno de los atractivos turísticos más grandes del país (Catedral de Sal Zipaquirá), el cultivo de flores constituye el principal uso de la tierra rural de Zipaquirá (32,8%) (CCB, 2010, p.26). Sin embargo, la mayor parte de los padres de familia de la institución son empleados de alguna compañía del sector floricultor y solo tienen bachillerato como su grado máximo de escolaridad, mientras que otro porcentaje se dedica a las labores del hogar (Colegio del Rosario, 2021, p. 27).

Atendiendo a lo que se reporta en el Proyecto Educativo Institucional [PEI] del colegio, este fue fundado en el año 1991. Es una institución ubicada en la zona urbana, de carácter privado, mixto y de confesión católica; cuenta con dos sedes: Central, sede de Bachillerato (educación básica secundaria y media) ubicada en la Carrera 9 N° 7-43 y sede Primaria (educación básica primaria) ubicada en la Carrera 9 N° 7-45 del municipio de Zipaquirá. Actualmente la sede Bachillerato cuenta con seis aulas, una para cada grado, sala de sistemas, patio, oficina de coordinación, cocina y baños (Colegio del Rosario, 2021, p. 9).

Según este mismo documento, la institución pretende formar personas íntegras fundamentadas en valores, que sean forjadoras y motor de desarrollo de una sociedad globalizada. El modelo pedagógico que declara la institución es el constructivista, dejando al

estudiante como el arquitecto de su propio conocimiento, relacionando lo que ya sabe con nueva información y construyendo nuevos conceptos (p. 10).

Contexto Social

Según el PEI del Colegio del Rosario, los estudiantes viven en su gran mayoría en barrios de estrato 3, los padres de familia o acudientes se dedican a labores como administración, comercio, docencia, conducción, destacando que la gran mayoría de padres de familia trabajan en compañías del sector floricultor. Según una encuesta realizada por la institución, se puede establecer que más del 60% de los estudiantes hacen parte de familias constituidas ya que conviven con padres casados y solo unos pocos conviven con padres separados (Colegio del Rosario, 2021 p. 27). De igual forma se afirma que el 50 % de los padres de familia de los estudiantes del Colegio de Rosario tienen como propósito que sus hijos tengan una mejor calidad de vida en el futuro, entendida esta como que logren entrar a la universidad y ser buenos profesionales (Colegio del Rosario, 2021, p. 29).

Contexto Educativo

En sexto grado hay 19 estudiantes matriculados para el año 2022, la mayoría de ellos lleva toda su formación académica en el mismo colegio. Como se menciona en el PEI los estudiantes del Colegio del Rosario cuentan con altas capacidades para razonar, analizar e interpretar información proveniente de diversas fuentes; además, son muy unidos, curiosos, respetuosos, organizados y disciplinados con sus deberes (Colegio del Rosario, 2021, p.12).

Según el plan de curso de Matemáticas del Colegio del Rosario (2021), se cuenta con seis horas destinadas para su enseñanza, de las cuales actualmente por recomendación de los docentes se destina una hora a la semana para la enseñanza de la Estadística, y para Geometría se destina una hora adicional a las ya mencionadas (p. 33). Según Álvarez, et ál., (2020) se evidencia un notable retroceso en el aprendizaje de los estudiantes, ya que algunos

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

conceptos matemáticos presentan ideas vagas o no recuerdan haberlos estudiado, característica que no es ajena a la población estudiantil en cuestión.

Las MTC-DA es un tema que se ha cursado con anticipación (a pesar de que no se ha estudiado el conjunto de los números reales en su totalidad, en cursos previos se ha trabajado con de manera coloquial con racionales positivos, especialmente en estadística cuando se presentan conjuntos de datos con variables cuantitativas continuas), además, han trabajado con distribuciones de frecuencias aun cuando los datos están agrupados y diferencian las frecuencias absolutas de las relativas. Sin embargo, ellos no manejan conceptos como moda, media aritmética y mediana, temáticas que han sido estudiadas en grado quinto según se refiere en el plan de curso del año anterior (Colegio del Rosario, 2021, p. 5). Para el año 2022 la docente ha destinado aproximadamente seis horas de clase para repasar estos conceptos mediante actividades que les permiten analizar datos para consignarlos en una distribución de frecuencias y emitir conclusiones al respecto. En concordancia con Álvarez, et ál., (2020), es evidente el retroceso que presentan los estudiantes con algunos conceptos o procedimientos matemáticos necesarios para el estudio de las MTC-DA, asunto que se ha de tener en cuenta para el diseño de la alternativa metodológica.

Contexto Curricular

Partiendo de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006, p. 85), que son los pilares que rigen la enseñanza en el Colegio del Rosario y en relación con las MTC-DA se establecen los siguientes procesos para las MTC en grado sexto:

- Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos conjuntos de datos (histogramas) (p. 85).
- Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar el comportamiento de un conjunto de datos (p. 85).

Como se puede evidenciar en los EBCM el estudio de las MTC se presenta de manera general, y el trabajo para Estadística en sexto grado que se menciona en ese documento es

poco en comparación con las otras temáticas para estadística o para el área de Matemáticas en general. Por ello, en algunas instituciones educativas y especialmente para el Colegio del Rosario la enseñanza de la Estadística pasa a un segundo plano, lo que se corrobora en los planes de curso ya que allí se reporta que solo se enseñan algunas nociones de estadística hasta quinto de primaria (Colegio del Rosario, 2021, p. 5).

Teniendo en cuenta el parcelador de clases (documento en el cual reposan los temas que se estudiarán, los logros que se esperan que los estudiantes alcancen y los objetivos propuestos por cada docente en las distintas asignaturas), hasta el año 2021 solo se presentaron nociones básicas sobre Estadística, de quinto hasta undécimo grado. Es por esto que según lo estipulado por Fernández (2022) para el año 2022 se han planteado estrategias en pro de fomentar el estudio de la Estadística desde los primeros cursos, destinando una hora de clase a la semana por curso para esta asignatura.

Contenido y Objetivos

En esta alternativa metodología los contenidos que se abordan son la media aritmética, la mediana y la moda para datos agrupados, centrando la atención en la interpretación de estas. El objetivo general de aprendizaje se basa en que los estudiantes interpreten las MTC-DA valorando la utilidad de cada una de estas en situaciones problema. Por su parte, los objetivos específicos de aprendizaje son:

- Utilizar las MTC-DA para resolver o estudiar situaciones de la vida real.
- Deducir el valor de las MTC-DA a partir de diferentes representaciones.
- Promover en los estudiantes la interpretación de las MTC-DA en situaciones problema y con ayuda de material didáctico.
- Interpretar las características de las MTC-DA cuando el conjunto de datos tiene variaciones.

Análisis de contenido

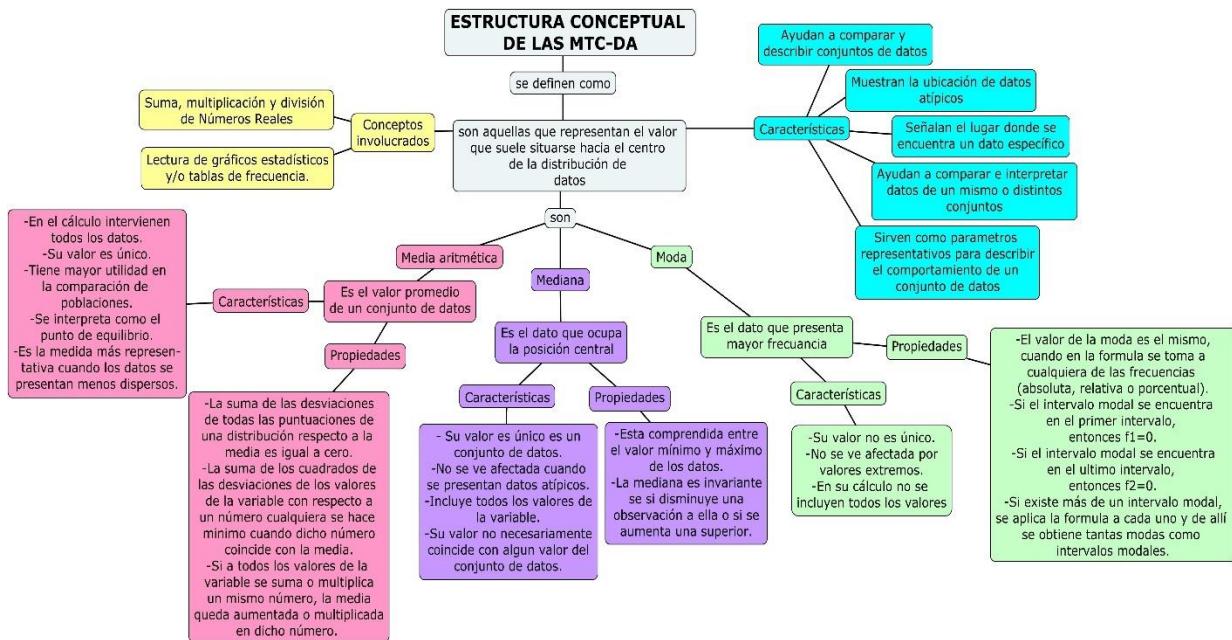
En este apartado se exhibe el análisis de contenido para las MTC-DA, particularmente de la media aritmética, la mediana y la moda. Tal análisis se expone mediante tres esquemas: la estructura conceptual, donde se identifican, describen los conceptos, características y propiedades de las MTC-DA; las distintas representaciones de las MTC-DA; y los sucesos históricos de la Estadística que apuntan a las MTC-DA y su uso en distintas áreas del conocimiento, lo que se denomina análisis fenomenológico.

Estructura conceptual de la MTC-DA

Para la estructura conceptual de las MTC-DA se identifican los procesos matemáticos y estadísticos necesarios para encontrar el valor de cada una, sus características y propiedades. En la Figura 7 se presenta un esquema con la descripción conceptual de la media, la mediana y la moda, y relaciones entre ellas.

Figura 7

Estructura conceptual de las MTC-DA

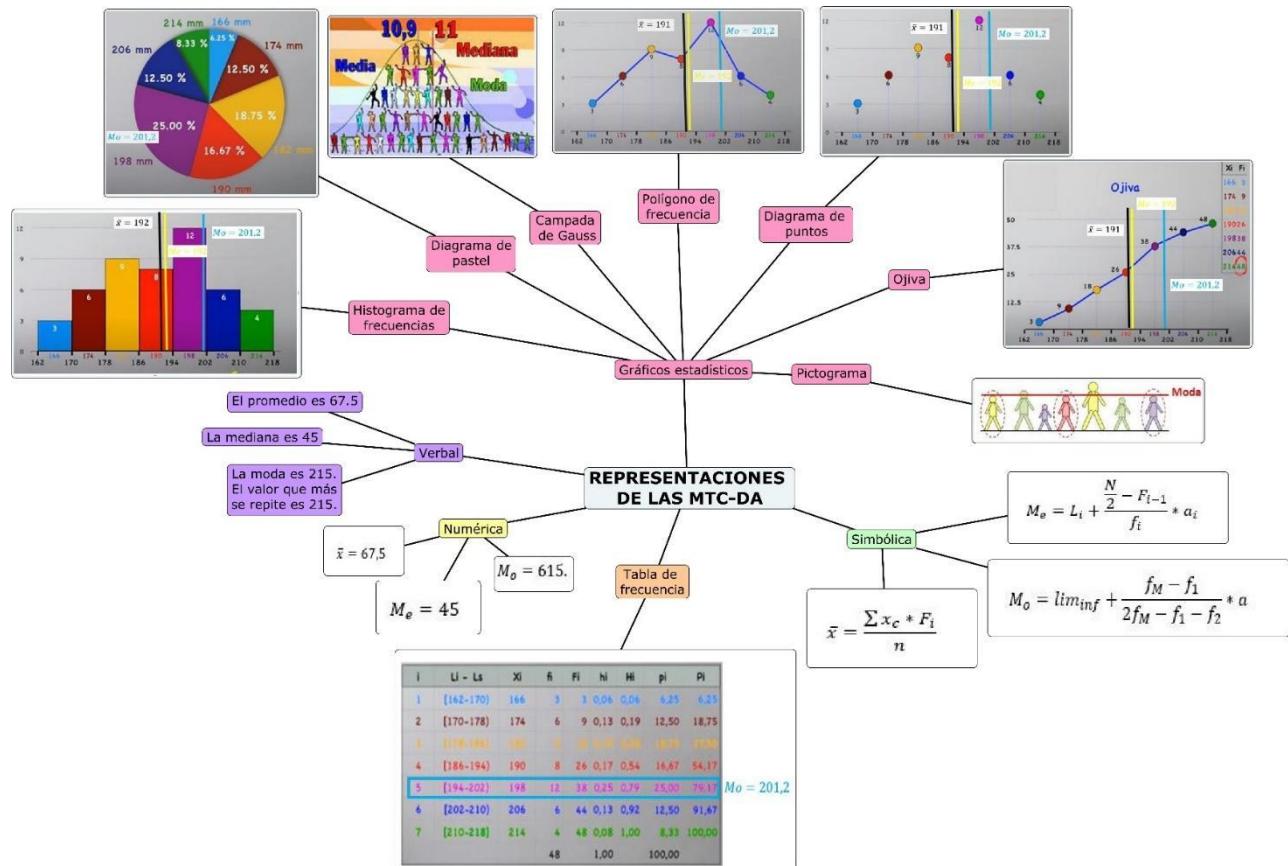


Representación de las MTC-DA

Existen diversas formas para representar las MTC-DA. Por ejemplo, las fórmulas algebraicas son representaciones simbólicas de las MTC-DA; la representación numérica refiere al valor de la media, la mediana o la moda una vez estas han sido calculadas; la tabla de frecuencia donde se agrupan los datos por intervalos y se exponen sus frecuencias; los distintos tipos de gráficos estadísticos que ilustran, organizan, distribuyen y develan los valores de tales medidas para el conjunto de datos. En este caso, para los datos agrupados se pueden utilizar gráficos como el histograma, la ojiva, el diagrama de frecuencias, entre otros. En la Figura 8, se presenta un esquema que expone las distintas representaciones de las MTC-DA y su exemplificación.

Figura 8

Representación de las MTC-DA



Fenomenología de las MTC

Para Maturana y Nagles (2019) la Estadística surge cuando los gobernantes de diversas culturas recopilaban y organizaban la información (tablillas de arcilla) sobre los habitantes de su población (p. 14). Por ejemplo, en el Antiguo Egipto y en el Imperio Romano se recopilaba información de los censos poblacionales, las riquezas y posesión de los habitantes, las labores agrícolas, los intercambios de productos, entre otros. En la Edad Contemporánea, la Estadística evoluciona favorablemente ya que se hace la distinción entre Estadística Descriptiva y Estadística Inferencial, además esta se empieza a utilizar en otras ciencias (v. g. sociales y biológicas). Estos autores afirman que en esa misma época la Estadística logra su desarrollo óptimo ya que Laplace, Legendre y Gauss establecen la teoría de mínimos y cuadrados; por su parte Karl Pearson crea el método de correlación, el cual permite formalizar estudios con datos agrupados y no agrupados (p. 16).

Bakker (2004, como cita Gutiérrez, 2017) señala distintas situaciones donde aparece el uso de las MTC en la historia. *Estimar el número de hojas de una rama*: “Rtuparna” el protagonista, promedia el número de hojas de un árbol; él approxima el número de una sola rama, luego lo multiplica por el número estimado de ramitas en la rama y obtiene una aproximación muy cercana a la cifra real (media aritmética). *La altura de un muro*: en la Guerra del Peloponeso se construyen escaleras que estén a la misma altura de los muros del enemigo, allí se enviaron distintas personas para contar la cantidad de ladrillos de los muros y así encontrar la altura para construir las escaleras; del conteo de la cantidad de ladrillos se tomaba la cantidad que más se repetía (moda) para construir las escaleras. *El tamaño de la tripulación de los buques*: en esta misma guerra Homero establece la cantidad de personas de la tripulación de los buques, utilizando el promedio entre la cantidad mayor y la menor; esto es la media aritmética de dos extremos (pp. 31-33).

Mayen (2009) señala que las MTC tienen gran relevancia en la Estadística y la Probabilidad. Por ejemplo, las distribuciones de Poisson, Exponencial, Normal, entre otras, se

caracterizan por el uso de las medidas de posición central ya que estas son parámetros que junto con sus propiedades tienen requisitos para seleccionar una distribución específica, dentro de un conjunto de distribuciones (p. 16). Otro ámbito que involucra a las MTC es la teoría de regresión y correlación, y los distintos métodos estadísticos basados en ella (correlación y regresión múltiple, modelos estadísticos de varios tipos), ya que se fundamenta en la “definición de ecuaciones que estiman la media de una variable en función de los valores de otra variable o de una combinación de variables” (Mayen, 2009, p. 16).

Mayen (2009) también indica que las MTC son frecuentes en la vida cotidiana, pues el parámetro de la media se utiliza para aplicaciones como la esperanza de vida, tasa de natalidad, costos de precios, entre otros (p. 16). Esta misma autora ejemplifica con las notas (calificaciones cuantitativas) de los estudiantes, el reparto equitativo y la renta per-cápita como situaciones frecuentes para aplicar las MTC.

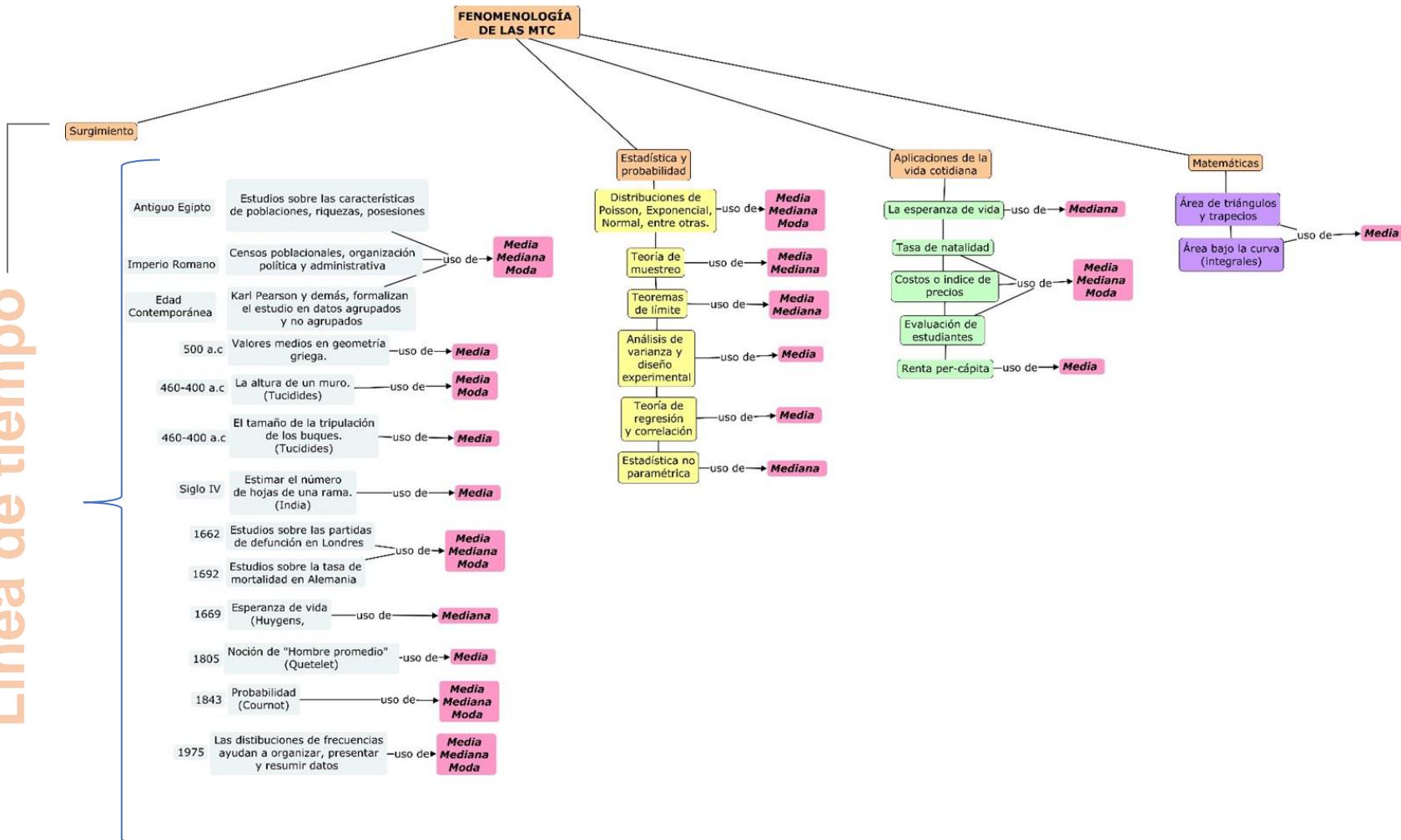
Cabe resaltar que en la consulta realizada respecto a la historia de las MTC-DA se encuentra muy poca información; es decir, en los múltiples textos se describen los momentos de la historia (primeras apariciones) en que se utiliza la media aritmética, la mediana y la moda en datos sin agrupar. Sin embargo, fue poca la información que se encontró al respecto de MTC-DA. Por ejemplo, no es posible identificar a la(s) persona(s) que descubrieron y describieron esas medidas en datos agrupados, tampoco quiénes encontraron o demostraron las propiedades estadísticas o matemáticas de las MTC-DA.

En la Figura 9 se presenta un esquema gráfico donde se resume lo que se presentó en los anteriores párrafos en relación con la historia de las MTC y su fenomenología.

Figura 9

Fenomenología de las MTC

Línea de tiempo



Análisis cognitivo

Mounound (2001) presenta las etapas del desarrollo cognitivo documentadas por Jean Piaget quien tuvo como objetivo observar cómo el niño va sumando y transformando conocimientos, habilidades y destrezas gracias a la interacción activa con el mundo que le rodea. De esas etapas se caracterizan los períodos tres y cuatro, ya que en este grupo de edades (10 a 12 años) se encuentran los estudiantes de 6º grado del Colegio de Rosario. En la etapa tres, llamada “*Periodo de las operaciones concretas (de 8 a 12 años)*”, los individuos utilizan la lógica para llegar a conclusiones válidas, en este caso desde la interpretación de las MTC-DA, siempre que las situaciones que se les presenten estén asociadas al uso de material didáctico y situaciones problema con datos del entorno de los estudiantes (no abstractas). En esta etapa el niño presenta habilidades y destrezas para usar símbolos de manera lógica y llegar a generalizaciones atinadas. Por ejemplo, realizar operaciones como sumas, multiplicaciones y divisiones para encontrar los valores de la media aritmética, la mediana o la moda; identificar datos atípicos o variaciones en los conjuntos de datos. En la cuarta etapa, “*Periodo de las operaciones formales (12 años en adelante)*”, los individuos desarrollan el razonamiento hipotético deductivo; es decir, ante una situación problema el estudiante analiza las distintas hipótesis y ha de elegir la medida de tendencia que tenga mayor significado según el contexto, utiliza la representación simbólica adecuada para encontrar el valor según corresponda e interpretan valores de las MTC-DA cuando el conjunto de datos presenta variaciones. En esta etapa al individuo se le presentan problemas abstractos, aunque no tenga experiencia con estos (Mounound, 2001, pp. 61- 63).

Teniendo en cuenta que el Colegio del Rosario tiene como modelo pedagógico el constructivismo, en este se destaca la teoría del desarrollo cognitivo de Jerome Bruner, quien propone que los individuos construyen su propio conocimiento mediante la organización y categorización de la información por medio de un sistema de codificación; es decir, los estudiantes de sexto grado han de interactuar con las actividades y material didáctico para

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

construir su propio conocimiento sobre las MTC-DA centrando la atención en la interpretación de ellas. Bruner (1961, citado en Vergara, 2020) propone tres modos o etapas de representación. La primera es activa, basada en acciones; la segunda es icónica, basada en imágenes y la tercera es simbólica, basada en lenguaje para almacenar y codificar el conocimiento en la memoria. En concordancia con la edad de los estudiantes de 6º grado del Colegio del Rosario se asocia la etapa de “*la representación simbólica (7 años en adelante)*”, donde el alumno almacena la información mediante códigos (representación verbal, gráfica, simbólica, entre otras) o símbolos matemáticos y estadísticos que pueden ser manipulados, ordenados, clasificados, y así poder enfrentarse eficazmente a cualquier situación problema que implique a las MTC-DA.

Análisis de instrucción

Desde el análisis de instrucción se presentan las características que deben cumplir las actividades a proponer en la alternativa metodológica, teniendo en cuenta los objetivos de aprendizaje proyectados y los referentes teóricos que sustentan la propuesta. Así, para la enseñanza de las MTC-DA se han de tener en cuenta las siguientes características (codificadas) para el diseño de las actividades y su respectivo análisis:

- **TG1.** Generar ambiente de trabajo en el aula por medio de la organización de grupos de estudiantes
- **I01.** La comparación, descripción e interpretación de conjuntos de datos se reflejan en el estudio de las MTC.
- **M01.** La moda por ser una medida que no es única y en algunos casos no existe, la actividad hace énfasis y presenta contrastes entre distintos intervalos modales con misma frecuencia.
- **I02.** La interpretación de las MTC-DA se logra a través del estudio con conjuntos de datos grandes y el uso de valores extremos (altos o bajos) dentro del conjunto de datos.

- **MD1.** El uso de material didáctico facilita la exploración de la situación planteada y ayuda a interpretar tablas, gráficos o datos.
- **I03.** Identificación de información estadística.
- **I04.** Interpretación del lenguaje y conceptos estadísticos en contexto.
- **I05.** Interpretar las MTC-DA para desarrollar un espíritu crítico.
- **I06.** Plantear conclusiones sobre la investigación realizada.
- **I07.** El estudio de problemas reales y del contexto de los estudiantes hace que se desarrollen ideas con el fin de brindar soluciones, analizar datos, y plantear conclusiones dentro de la investigación que se realiza, permitiendo esto la interpretación de MTC-DA.

La alternativa metodológica busca promover la interpretación de las MTC-DA, es por esto que según lo mencionado anteriormente los pilares fundamentales para lograr este objetivo es usar datos reales del contexto de los estudiantes, hacer uso de datos y entender la variabilidad en un conjunto de datos; con los cuales el estudiante logra identificar información estadística e interpretar las MTC-DA. Además, es recomendable hacer uso de materiales didácticos en la enseñanza de la Estadística especialmente en las MTC-DA para enriquecer conceptos y realizar interpretaciones, teniendo en cuenta la etapa de desarrollo (10 a 12 años) en la que se encuentran los participantes de esta indagación.

Diseño de actividades

A continuación, se describe la secuencia de actividades cuyo propósito es cumplir con los objetivos de aprendizaje propuestos. Estas actividades se llevan a cabo en dos sesiones, cada una de 120 minutos. En estas se plantea una situación problema en el contexto de los estudiantes (calificaciones de las evaluaciones de Matemáticas durante el segundo periodo), donde ellos deben ayudar en una investigación que describe diferentes escenarios en las que

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

el investigador se ve inmiscuido. También se indican las etapas de las actividades, sus núcleos de atención y momentos durante la clase.

Tabla 2

Secuencia de actividades

Primera sesión: Presentación e instrucciones de actividad 120 minutos	
<p>En esta etapa se realiza la presentación de las Maestras en Formación Inicial [MenFI], se forman los grupos de trabajo, se entrega y presentan los materiales a utilizar en la sesión de clase.</p>	
<p>Materiales</p> <ul style="list-style-type: none"> • Taller “Estudiando las calificaciones del Área de Matemáticas”. Cada parte del taller se entregará a medida que los grupos vayan terminando. Es decir, cuando los grupos terminan la Parte A se les entrega la Parte B, y así sucesivamente hasta la Parte F (Apéndice A). • Ejes de histograma (Ilustración 1): eje de las frecuencias “Cantidad de calificaciones” y eje de intervalos “Intervalo de calificaciones” (Apéndice B). • Etiquetas (cuerdas) pertenecientes al histograma (Ilustración 3). Estas cuerdas son móviles y cada una representa la media aritmética (\bar{x}), la mediana (Me) y la moda (Mo) (Apéndice C). 	<p>Ilustración 1</p>
<ul style="list-style-type: none"> • 66 tuercas (Ilustración 4) que simulan el solapamiento del histograma mediante las calificaciones. Se entregan por aparte (fuera del histograma) (Apéndice D). • 3 tuercas (Ilustración 2) que hacen referencia a las calificaciones extremas. Estas se entregan en la sesión dos, en el momento en el que el investigador encuentra tres calificaciones nuevas de evaluaciones recuperadas (Apéndice E). 	<p>Ilustración 2</p>
<p>Núcleo de atención:</p> <p>TG1. Generar ambiente de trabajo en aula por medio de la organización de grupos de estudiantes.</p>	<p>Ilustración 4</p>

Se hace una presentación de las MenFI que proponen la actividad. Luego se forman grupos de tres estudiantes (y posiblemente un grupo de cuatro estudiantes), los cuales se ubican en el salón de clase con espacio suficiente entre cada grupo.

Núcleos de atención:

MD1. Facilitar la exploración de la situación planteada y ayudar a interpretar tablas, gráficos o datos estadísticos.
I03. Identificación de información estadística.

Entrega de material (10 min)

Luego de que los estudiantes estén organizados en grupos se les reparte el material:

- Ejes de histograma (Ilustración 5): eje de las frecuencias “intervalos de calificaciones” y eje de intervalos “Intervalo de calificaciones” (Apéndice B) y Parte A del Apéndice A.



Ilustración 5

Núcleos de atención:

I03. Identificación de información estadística.
I04. Comprensión del lenguaje y conceptos estadísticos en contexto

Parte A. Construyendo histograma (20 min)

Los estudiantes deben responder las preguntas formuladas en el primer punto de acuerdo con lo que observan en el eje de intervalos del histograma (número de intervalos, amplitud, entre otras).

Para el segundo punto de la Parte A, las MenFI les entregan a los estudiantes una bolsa que contiene 66 tuercas (Ilustración 6) que representan las calificaciones (Apéndice D).

Los estudiantes deben ubicar cada tuerca en las respectivas barras teniendo en cuenta los intervalos, y luego responder a las preguntas de este numeral. Por ejemplo, ¿qué tipo de variable estadística se está trabajando?, los grupos de trabajo deben observar las tuercas con las calificaciones, debatir entre ellos y escribir la respuesta que consideren; en la pregunta ¿cuántas calificaciones son mayores a 35?, los estudiantes deben observar las calificaciones que estén en los intervalos [35 – 38) y [38 – 41) sumar sus respectivas frecuencias o contar las tuercas de cada intervalo.

En el tercer punto de la Parte A, los estudiantes deben recrear la historia que involucre la información presentada en el histograma. Luego de que los grupos de trabajo completen la Parte A, se le pide a un estudiante de cada grupo que consigne en el taller las respuestas de los numerales uno y dos. El mismo estudiante deberá leer el numeral tres.

Núcleos de atención:

I01. Explorar y comparar conjuntos de datos se refleja en el estudio de las MTC.

Parte B. Ubicando las MTC-DA (50 min)



Ilustración 6

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

En esta parte, las MenFI entregan a los grupos de trabajo la Parte B del Apéndice A.

Allí, el investigador determina los valores correspondientes a la media, mediana y moda; por lo que los grupos de trabajo deben ubicar dichos valores en el histograma (Ilustración 7).

Los estudiantes deben explorar a través de las cuerdas con las etiquetas, movilizarse buscando el valor aproximado de cada medida.

Las MenFI transitan por el salón prestando atención a la exploración que realizan los estudiantes. En caso de que ellos no logren ubicar las cuerdas en los intervalos correspondientes, las MenFI les informarán a los grupos de trabajo que tengan en cuenta el valor de cada medida, las tuercas con los datos y/o la amplitud de intervalos, según sea el proceso de cada grupo.



Ilustración 7

Núcleos de atención:

- I01. Explorar y comparar conjuntos de datos se reflejan en el estudio de las MTC.
- I02. Interpretar las MTC usando grandes conjuntos de datos y valores extremos.
- I03. Identificación de información estadística.
- I04. Interpretar el lenguaje y conceptos estadísticos en contexto.
- I05. Enfatizar en la interpretación de las MTC-DA para desarrollar un espíritu crítico.
- I07. Desarrollar ideas con el fin de brindar soluciones, analizar datos, y plantear conclusiones dentro de la investigación que se realiza, permitiendo esto la interpretación de MTC-DA.

Parte C. Interpretando el significado de las MTC-D (40 min)

En esta parte, las MenFI entregan a los grupos de trabajo la Parte C del Apéndice A. Allí, los estudiantes deben interpretar lo que significa cada valor de las MTC-DA. Para ello, utilizan el histograma con las cuerdas ya ubicadas (Ilustración 8) y deben escoger la respuesta que más significado tenga de acuerdo con el contexto.

Por ejemplo, en el caso de las opciones de la interpretación de la media aritmética la opción “Los estudiantes de sexto grado obtienen con mayor frecuencia la calificación de 31,81 en las evaluaciones”.

A pesar de que la representación en el histograma es correcta, la respuesta es errónea ya que al indicar mayor frecuencia hace referencia a la moda y no a la media aritmética. En la opción “Los estudiantes de sexto grado, en promedio obtienen la calificación de 35,54 en las evaluaciones” es incorrecta porque el valor 35,34 hace referencia al valor de la moda (Ilustración 9). Para la opción “Los estudiantes de sexto grado, en promedio obtienen la calificación de 31,81 en las evaluaciones matemáticas”; es correcta ya que el significado del promedio y la representación gráfica en el histograma son verídicas (Ilustración 10).

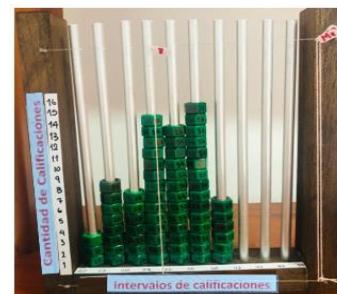


Ilustración 8



Ilustración 9

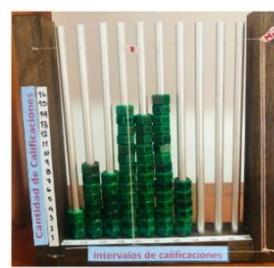


Ilustración 10

Asimismo, los estudiantes deben encontrar la interpretación correcta de la mediana y la moda. Las MenFI pasan por cada grupo de trabajo para observar y escuchar cómo los estudiantes debaten sobre cada opción y eligen la correcta.

Cuando los estudiantes terminen de seleccionar las respuestas, los grupos de trabajo pasarán al tablero para explicar por qué seleccionaron esa respuesta, utilizarán el histograma para ejemplificar y deben exponer a los demás compañeros la razón por la cual las otras opciones son incorrectas.

Segunda sesión: Modificación del conjunto de datos 120 minutos

Núcleos de atención:

MD1. El uso de material didáctico facilita la exploración de la situación planteada y ayuda a interpretar tablas, gráficos o datos.

I02. Interpretar las MTC usando grandes conjuntos de datos y valores extremos.

Parte D: Datos atípicos (40 min)

En esta parte las MenFI entregan a los grupos de trabajo la Parte D del Apéndice A. Además, se entrega a cada grupo tres tuercas que corresponden a datos extremos (Apéndice E).

Los estudiantes primero deben eliminar del histograma las anteriores calificaciones (encerradas en el recuadro amarillo de la Ilustración 11) y ubicar las nuevas calificaciones en el intervalo correspondiente (recuadro azul de la Ilustración 12).

Luego deben reubicar (haciendo uso de las cuerdas) los valores de las MTC-DA en el histograma según indica el investigador y responder a las tres preguntas mencionadas. Las respuestas de los grupos de trabajo serán socializadas de forma verbal por un estudiante del grupo, diferente al que participó en la socialización anterior. En este momento las MenFI tendrán en cuenta las

expresiones usadas en los argumentos presentados para esta situación, por ejemplo, cuando se les pregunta qué deberá hacer el investigador ante la situación de las nuevas calificaciones de un estudiante; se espera que el estudiante mencione que hay que sacar las calificaciones (20 – 21 – 22) e intercambiarlas por las nuevas calificaciones obtenidas luego de presentar la recuperación (49 – 49 – 50), ubicando estas en el intervalo correspondiente. Además, se prevé

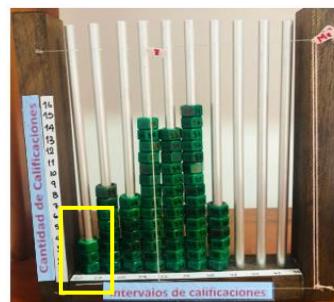


Ilustración 11



Ilustración 12



Ilustración 13

que los estudiantes respondan, en el caso de la media aritmética, que al tener calificaciones altas (atípicas) el valor del promedio también va a aumentar (Ilustración 13). Para el caso de la mediana, se espera que los estudiantes respondan que su valor va a cambiar al agregar estos datos extremos. Para la moda, los estudiantes han de mencionar que estas nuevas calificaciones no afectan su valor ya que no se encuentran ubicadas en el intervalo modal.

Núcleos de atención:

M01. La moda no es única en diferentes situaciones.

MD1. El uso de material didáctico facilita la exploración de la situación planteada y ayuda a interpretar tablas, gráficos o datos.

Parte E: Eliminando un dato (40 min)

Las MenFI entregan la Parte E del Apéndice A. Allí, el investigador descubre que hay irregularidades en las calificaciones. Las MenFI les dirán a los grupos de trabajo que para esta parte es necesario observar la frecuencia de cada intervalo, ya que en esta situación los estudiantes deben identificar los intervalos modales; es decir, al eliminar la calificación 36 los intervalos [29 – 32) y [35 – 38) tiene la misma frecuencia, por lo tanto, existen dos modas, dos intervalos modales.

Para ayudar al investigador los estudiantes deben primero tomar el histograma y eliminar la calificación 36, ubicada en el intervalo [35-38). Posterior a ello deben observar detalladamente lo que ocurre cuando se elimina dicha calificación, ya que al eliminar este dato se generan dos intervalos modales con la misma frecuencia (Ilustración 14).

Luego, deben responder las preguntas formuladas y sus respuestas serán socializadas por cada grupo escribiéndolas en el tablero. Por ejemplo, en la pregunta ¿creen que el valor de la media aritmética se ve afectada al eliminar este dato?, se espera que los estudiantes respondan que no se ve afectada porque se eliminó un dato que hace parte del conjunto homogéneo. Para el caso de la mediana, se espera que los estudiantes respondan que esta no cambia ya que el dato que se eliminó no pertenece al intervalo que contiene a la mediana. Con la pregunta ¿qué ocurre con los intervalos modales?, se pretende que los estudiantes identifiquen que hay otro intervalo modal que contiene otro valor de la moda diferente al ya conocido, por lo tanto, ahora el conjunto de datos cuenta con dos intervalos modales.



Ilustración 14

Núcleos de atención:

I05. Enfatizar en la interpretación de las MTC-DA para desarrollar un espíritu crítico.

I06. Plantear conclusiones sobre la investigación realizada.

Parte F. Concluyendo sobre MTC-DA (40 min)

Las MenFI les entregan el último apartado del Apéndice A. Los estudiantes deben tener en cuenta el proceso realizado, para esto deben utilizar las respuestas escritas en las Partes B a E del taller (las MenFI les devolverán lo trabajado en los apartados anteriores).

De esta manera, los grupos de trabajo deben concluir sobre el conjunto de datos e indicar cual(es) medida(s) presenta(n) mayor o menor variabilidad, cuál es la medida que cambia cuando se eliminan datos, etc. Por ejemplo, al momento de mencionar las ventajas que tiene la mediana sobre la media aritmética, ellos pueden decir que la

mediana es más representativa cuando se presentan valores extremos. Para los valores de la moda que son poco confiables, ellos pueden justificar que cuando se elimina un dato pueden resultar diferentes valores para la moda y es por esto que dicha medida es poco fiable. En el caso de la mediana, esta varía cuando los datos pasan de una mitad a la otra.

Finalmente, los estudiantes deberán proponer recomendaciones para los docentes y estudiantes de sexto grado para mejorar el rendimiento académico reflejado en las calificaciones, dado que el promedio de las notas es muy bajo.

Puesta en práctica de actividades

En esta sección se describe la puesta en marcha de las actividades que se desarrollaron con 19 estudiantes de sexto grado del Colegio del Rosario en compañía de las MenFI autoras de esta indagación, una de ellas dirigió las actividades, mientras que la otra se enfocó en observar a los estudiantes, recolectar datos y resolver dudas en los grupos de trabajo. Además, se presentan algunas de las respuestas globales de la indagación con el fin de evidenciar el nivel de interpretación de los estudiantes.

Primera sesión: Presentación e instrucciones de actividad

Duración: 120 minutos. Fecha 25 / julio /2022

Para iniciar la sesión se conformaron seis grupos de trabajo (cinco grupos de tres estudiantes y un grupo de cuatro estudiantes). Luego se les hizo entrega de los ejes del histograma y las preguntas de la Parte A del taller. Se les mencionó que debían hacer uso del material para orientarse en la respuesta a dichas preguntas. Desde ese momento se presentaron algunas dudas entre los estudiantes, por ejemplo ¿cuál es la cantidad de intervalos que se presentan en los ejes del histograma?, varios grupos respondieron que hay 11 intervalos, ya que ellos tenían en cuenta los límites de los intervalos y no las barras disponibles. Otra confusión se presentó en el momento en que tenían que decir cuál era la calificación mínima que se presentaba en los intervalos. Dos grupos respondieron que la calificación más baja era 1, ya que es el primer número que aparecen en el eje de las frecuencias absolutas confundiéndolo con la información reportada en el eje de los intervalos de calificaciones.

Enseguida, y teniendo en cuenta que al final de la Parte A se debía construir el histograma que representara la situación, se hizo entrega de las tuercas necesarias para que ellos desarrollaran la actividad. En este momento las MenFI se percataron que varios grupos de trabajo no tenían en cuenta el límite inferior ni el límite superior de los intervalos; es decir, ingresaban la calificación 29 en el intervalo $[26 - 29)$ olvidando que el límite inferior del intervalo es cerrado y el límite superior, abierto. En este momento de la clase la MenFI les recuerda a los estudiantes que el dato con la misma calificación que el límite superior no se agrega a ese intervalo sino se toma en el siguiente. Por ejemplo, en el intervalo en el intervalo $[26 - 29)$ la calificación será tomada en el siguiente intervalo en el intervalo $[29 - 32)$.

Al construir el histograma se evidenció que dos grupos organizaron las tuercas de forma ascendente teniendo en cuenta si el intervalo era abierto o cerrado y luego ubicaron las tuercas en las barras de los intervalos correspondientes (Figura 10). Los demás grupos sólo se limitaron a colocar las tuercas según los límites del intervalo, sin darle orden alguno a los datos.

Figura 10

Histograma ordenado con datos ascendentes



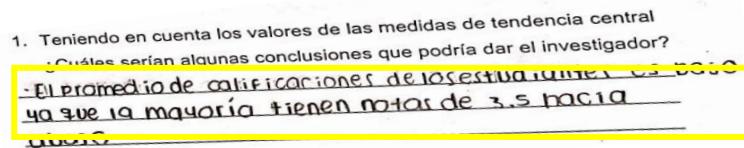
Al momento en que todos terminaron este apartado se socializó el trabajo realizado. Se preguntó a un estudiante por grupo, las respuestas mientras los demás grupos están revisando sus producciones. Por ejemplo, para la pregunta ¿Cuántos intervalos hay?, el Grupo 1

manifestó que “*hay 3,1 intervalos ya que $\sqrt{10} = 3,1$* ”. Para este momento la MenFI hizo alusión a que para identificar el número de intervalos solo era necesario observar el histograma y no hacer uso de algoritmos para algo que ya estaba representado. Además, se aclaró que para esta fórmula se debe utilizar la cantidad de datos de la situación presentada. Los demás grupos respondieron que son solo 10 intervalos. Para la pregunta *¿Cuál es la calificación más alta que pueden obtener los estudiantes en las evaluaciones?* Todos los grupos respondieron que era 50, aludiendo al eje denominado “intervalos de calificaciones” ya que es allí donde se encuentra la calificación más alta y más baja que se puede obtener en las evaluaciones.

Para la Parte B del taller, la MenFI hace mención del uso de cuerdas para ubicar los valores de las MTC-DA. Además, en este apartado sólo se pedía que el estudiante formule conclusiones acerca de los valores encontrados por el investigador. Algunos estudiantes se limitaron a escribir los valores de cada medida en el apartado destinado para esas conclusiones, fue entonces cuando se les mencionó que debían presentar conclusiones sin replicar lo que se presentaba en la tabla y tener en cuenta los intervalos y el contexto (Figura 11). Aunque este apartado es muy corto los estudiantes se tardaron un poco en el planteamiento de las conclusiones.

Figura 11

Conclusión sobre valores de las MTC-DA de la Parte B



La MenFI que orientó la clase decidió entregar simultáneamente la Parte C del taller, pues los estudiantes tenían ubicadas las etiquetas de las MTC-DA, lo que permitía relacionar la interpretación más adecuada con los valores presentados en la Parte B, para cada una de las MTC-DA. Allí, no se presentaron dificultades ya que muchos grupos de trabajo estudiaban cada opción para dialogar entre ellos y decidir cuál respuesta marcar como correcta. Por ejemplo, en

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

el Grupo 3 para la interpretación de la media aritmética, el estudiante 1, mencionó que “*el valor de la media aritmética es 31,81*” a lo que el estudiante 2 respondió “*sí, este valor nos lo dan en la tabla anterior y [...] promedio es igual a media aritmética [...]*” Luego de estas intervenciones el estudiante 3 concretó: “*entonces es la primera opción*”. La clase culminó cuando todos los grupos terminaron la Parte C del taller. Se les pidió que devolvieran el material tal como se les había entregado y se les informó que en la siguiente clase se continuaba trabajando con las MTC-DA.

Figura 12

Opción marcada como correcta interpretación de la moda

Interpretaciones de la moda

El intervalo modal (mayor frecuencia) es [35 – 38) y la calificación que mayor frecuencia tiene es de 35,54.

El intervalo modal (menor frecuencia) es [20 – 23) y la calificación que menos frecuencia tiene es 20.

La calificación que se presenta mayor frecuencia en las tres asignaturas es 35,54 y está ubicado en el intervalo [32 – 35).

Segunda sesión: Presentación e instrucciones para la actividad

Duración: 120 minutos. Fecha 28 / julio /2022

Para iniciar esta sesión se les solicitó a los estudiantes organizarse en sus grupos de trabajo y se entregó la Parte D del taller. Se dejaron dos minutos para que los estudiantes decidieran qué hacer en la situación planteada (recuperaciones de las calificaciones de las evaluaciones con datos atípicos). Un estudiante mencionó que se debían quitar las tuercas correspondientes a (20 – 21 – 22) e intercambiarlas por las nuevas (49 – 49 – 50) (Figura 13), manifestando que “*si se hace recuperación no tendría porqué quedar con dos calificaciones*”. Luego de esta intervención la MenFI ratificó esta afirmación diciendo que si el estudiante realiza recuperaciones de las evaluaciones no se tendrán en cuenta las primeras calificaciones. Es de resaltar que a medida que iban terminando un apartado, iniciaban con el siguiente.

Figura 13*Datos atípicos*

La Parte E del taller consistía en eliminar un dato. Sin embargo, el contexto en que se presentó la situación fue ambiguo y resultó siendo confuso para los estudiantes, por lo que se procedió a presentar un ejemplo de la situación: “*Juan, uno de los estudiantes del grupo que no asistió el día en que se realizó el último Quiz, apareció en planilla con calificación de 36 para dicho Quiz; lo más lógico es que debería tener como calificación 00. Este error se presentó cuando el profesor digitó la calificación donde no correspondía*”. Enseguida, uno de los estudiantes mencionó que “*entonces hay que quitar una de las tuercas que tenga 36, que sería la nota del estudiante que no estuvo ese día, pero apareció con nota*” (Figura 14). Luego de esta intervención los demás compañeros continuaron con la actividad acatando la intervención del compañero. Sin embargo, para la pregunta 4 de este apartado un estudiante manifestó “*Yo no me acuerdo de que era eso de intervalo modal, yo solo sé que la moda es la que tiene la frecuencia absoluta más alta*”; inmediatamente uno de los estudiantes indicó “*Profe, es que acá hay dos modas*”. En ese momento se generó una discusión entre los grupos ya que unos integrantes manifestaban que dentro de un conjunto de datos solo podía haber una moda, y en otros grupos aludían a que el conjunto de datos podría tener más de un intervalo modal porque varios intervalos podían tener la misma frecuencia absoluta (Figura 15).

Figura 14*Eliminación del dato “36”***Figura 15***Intervalos modales*

4. ¿Qué ocurre con los intervalos modales? 35,54
El intervalo modal [35,38], perdería una calificación, por lo cual se igualaría al intervalo [29,32]

Para la última parte del taller se les hizo entrega a los estudiantes de los demás apartados ya desarrollados para que con esta información formularán las conclusiones de la investigación. Con este material los estudiantes hicieron comparaciones de las MTC-DA, para concluir la investigación, escribir ventajas en el uso de una u otra medida y dar recomendaciones al Departamento de Matemáticas del colegio y a los estudiantes de sexto grado, en relación con las calificaciones presentadas (Figura 16).

Figura 16*Ventajas de la media aritmética sobre la mediana*

1. La mediana habría sobre el promedio total de calificaciones.
 2. Nos permite darnos cuenta cuando ocurre una variación en los datos
 3. Nos demuestra los valores empleando visualmente

Análisis de actuación

En esta sección se presenta la descripción y el análisis de las actividades a la luz de los indicadores mencionados en el análisis de instrucción, a partir de las tareas resueltas por parte de los estudiantes participantes de la indagación. Esta descripción está basada en las actuaciones que tuvieron los estudiantes al afrontar cada tarea; es decir, errores, dificultades, soluciones incompletas y la teoría expuesta del análisis didáctico. No obstante, al final de la sección también se atenderán algunas reflexiones con respecto al actuar docente.

Los análisis presentan especialmente el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje propuestos en el análisis didáctico. Las evidencias que se exhiben a continuación no tienen seguimiento específico a ningún estudiante; por lo tanto, las respuestas son variadas, de todos los grupos de trabajo, y están sin cambios o correcciones, por lo que algunas incluyen errores de ortografía y/o redacción.

Para el núcleo de atención, comparación, descripción e interpretación de las MTC en el estudio [I01], se puede identificar que los estudiantes no logran hacer una comparación entre los valores dados para cada una de las MTC y las conclusiones a las que se puede llegar usando la información del apartado B. Se destaca que solo uno de los seis grupos relaciona la información dada con la situación que se está estudiando (Figura 17). Por el contrario, los demás grupos se limitaron a escribir los valores presentados en la tabla (Figura 18), característica documentada por Cubides (2011) quien afirma que los estudiantes no logran justificar o interpretar los valores obtenidos de las MTC-DA en un conjunto de datos.

Figura 17

Conclusiones sobre MTC-DA

1. Teniendo en cuenta los valores de las medidas de tendencia central
¿Cuáles serían algunas conclusiones que podría dar el investigador?
El promedio de calificaciones de los estudiantes es bajo, ya que la mayoría tienen notas de 3,5 hacia abajo.

Figura 18*Interpretación de los valores de las MTC-DA*

1. Teniendo en cuenta los valores de las medidas de tendencia central

¿Cuáles serían algunas conclusiones que podría dar el investigador?

podemos concluir que el promedio de todas las notas es 31,81
El dato que más se repite es 35,54
y el dato del medio 32,85

Además, se muestra en uno de los grupos, los estudiantes confunden el intervalo de mayor o menor frecuencia, con los datos que más o menos se repiten (Figura 19), asunto previsto por Becerril, et ál., (2019).

Figura 19*Dificultad al diferenciar entre intervalo y dato*

1. Teniendo en cuenta los valores de las medidas de tendencia central

¿Cuáles serían algunas conclusiones que podría dar el investigador?

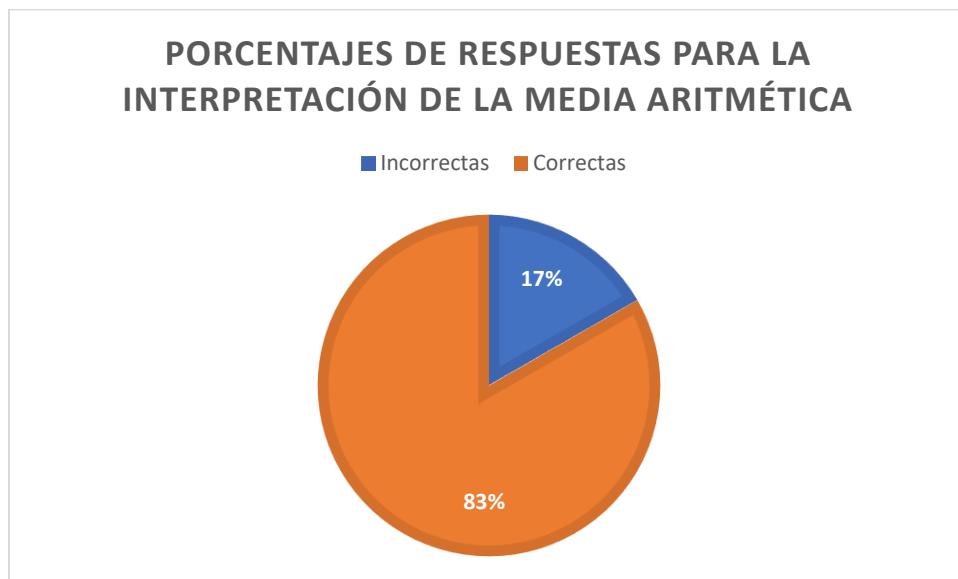
el intervalo que más se repite es de 3,5 a 3,7
el intervalo que menos se repite es de 2,0 a 2,2
• la moda es de 35,54

Para el núcleo de atención, identificación de información estadística [I03] uno de los grupos no identificó correctamente la cantidad de intervalos que están en el histograma, ya que este grupo contó las barras que hay en el histograma y a ese valor le calcula la raíz cuadrada (Figura 20), confundiéndolo con el número de intervalos de la situación. Esto corrobora lo mencionado por Cobo (2003) cuando afirma que se aplica un procedimiento inadecuado para una situación; en este caso aplican la fórmula para calcular la cantidad de intervalos en un conjunto de datos, \sqrt{n} , siendo n la cantidad de datos (realizan el cálculo como si el conjunto tuviera 10 datos).

Figura 20*Error al identificar información estadística*

a. ¿Cuántos intervalos hay? 10 $\sqrt{10} = 3,1$

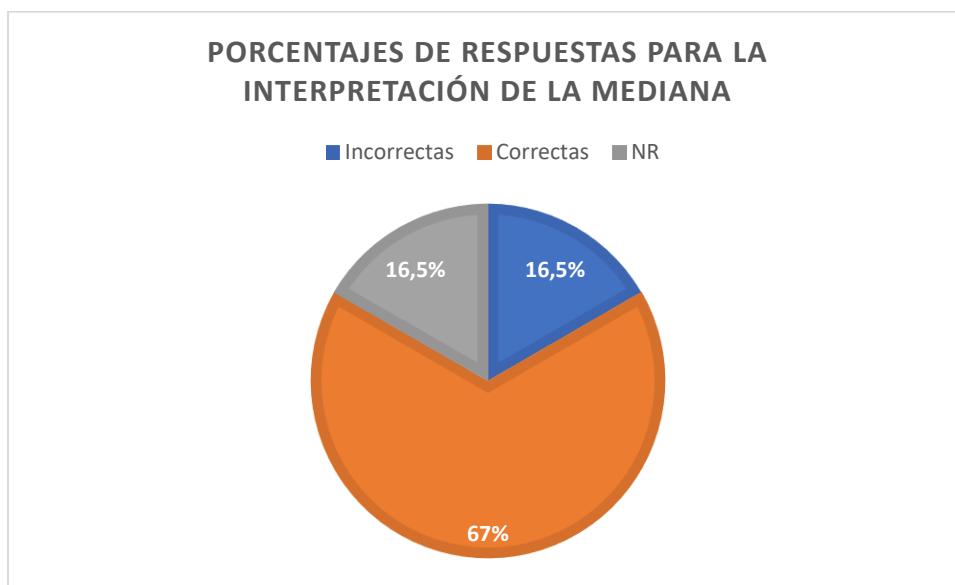
Sin embargo, para los núcleos de atención, interpretación del lenguaje y conceptos estadísticos en contexto [I04] y la interpretación de las MTC-DA para desarrollar un espíritu crítico [I05], desarrollados en la Parte C del taller, la mayoría de los grupos eligen correctamente la interpretación que mejor explica la relación entre los valores dados y la situación planteada por el investigador. Para la media aritmética (Figura 21), el grupo de trabajo que escogió como respuesta correcta la Opción B (incorrecta), no se percató que la interpretación que se quería favorecer es la promedio y no la moda, pues tienen dificultades para identificar las características de cada concepto, haciendo alusión a que la media aritmética es el valor con mayor frecuencia, así como lo indica Cobo (2003) cuando define a la moda como el valor que presenta mayor frecuencia absoluta.

Figura 21*Porcentajes de respuestas obtenidas para la interpretación de la media aritmética*

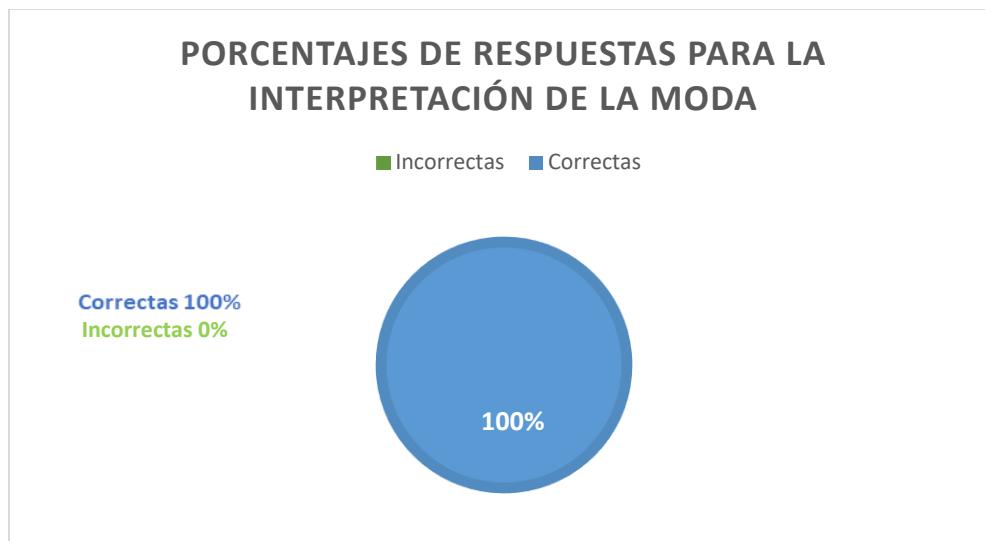
Para el caso de la mediana (Figura 22), un grupo escogió la Opción A (incorrecta), ellos presentaron la dificultad de confundir el concepto de mediana en datos agrupados con el concepto de mediana en datos desagrupados. De esta manera se corrobora lo mencionado por Cobo (2003) quien afirma que los estudiantes no distinguen los conceptos de las MTC-DA en una situación planteada y además seleccionan o aplican procedimientos inadecuados. Mientras otro grupo no señaló ninguna respuesta y los cuatro grupos restantes eligieron de manera adecuada la opción C (correcta) ya que ellos identifican correctamente el significado de mediana y relacionando la ubicación del valor de la mediana con el intervalo que la contiene.

Figura 22

Porcentajes de respuestas obtenidas para la interpretación de la mediana



Para la moda (Figura 23), los grupos de trabajo concuerdan que el intervalo modal es (35 – 38] ya que relacionan correctamente al valor de la moda con su respectivo intervalo modal.

Figura 23*Porcentajes de respuestas obtenidas para la interpretación de la moda*

En cuanto al indicador, la moda no es única en un conjunto de datos [M01], los cinco grupos logran establecer en la Parte E (eliminación del dato 36) que se encuentran dos intervalos modales. Luego de eliminar este dato, los grupos mencionan que “*hay dos barras con la misma altura*”. De esta manera se ratifica lo que afirman Rodríguez, et ál., (2016) quienes señalan que, al presentar este tipo de interpretaciones para la moda, hace caer en la cuenta a los estudiantes de que esta no necesariamente es única (Figura 24).

Figura 24*Misma frecuencia en los intervalos modales*

4. ¿Qué ocurre con los intervalos modales?
El intervalo modal [35,38], perdería una calificación, por lo cual se igualaría al intervalo [29,32]

Sin embargo, el grupo restante describe que se está haciendo mención de datos modales y no a intervalos modales (Figura 25), lo cual conlleva a asumir que estos estudiantes no identifican las propiedades de la moda, como lo señala Becerril, et ál., (2019) en su estudio.

Figura 25*Error al confundir dato con intervalo modal*

4. ¿Qué ocurre con los intervalos modales?

El dato modal Segura siendo igual

La interpretación de las MTC-DA se logra a través de valores extremos [102], que se abordan en la Parte D del taller, momento en el que los estudiantes deben plantear conclusiones sobre las MTC-DA cuando los datos presentados inicialmente (20, 21, 22) cambian a datos atípicos (49, 50, 50). Los grupos de trabajo manifiestan con respecto a:

- La Media aritmética. El 100% de los grupos llegan a la conclusión que esta medida se ve afectada por los datos atípicos ya que el conjunto de datos cambia, por lo que se presenta aumento en las calificaciones y esto hace aumentar el valor de la media (Figura 26). Es de resaltar que uno de los grupos hizo mención del aumento de la marca de clase de ese intervalo (puesto que los estudiantes habían construido distribuciones de frecuencias y allí el cálculo de la marca de clase), (Figura 27), lo que permite evidenciar que conectan los elementos de la fórmula con la interpretación y representación presentada. En consonancia con lo indicado por Hernández, et ál., (2014) quienes afirman que para obtener el valor de la media aritmética se debe multiplicar cada marca de clase por la frecuencia absoluta del respectivo intervalo, luego sumar el resultado de cada producto y dividir dicho valor entre el total de datos, asunto que realizan los estudiantes para verificar su afirmación.

Figura 26

Conclusión sobre la media aritmética cuando hay datos extremos

Porque aumentó la nota q comento logrando mejor el promedio

Figura 27

Relación entre marca de clase y la media aritmética

2. ¿Por qué el valor de la media aritmética aumentó?

Dedido al aumento de la marca de clase

- La Mediana. Para la interpretación de esta medida los estudiantes presentan varias conclusiones. Por ejemplo, mencionan que el valor de la mediana se mantiene en la mitad del conjunto de datos, pero no se realiza una interpretación sobre esto, ratificando la dificultad reportada por Cubides (2011) al no justificar o interpretar los valores obtenidos de las MTC-DA (Figura 28). Del mismo modo se evidencia en algunos grupos que no logran distinguir entre las propiedades y los conceptos de las MTC-DA, pues hacen alusión a una suma, lo que se contrasta con la fórmula algebraica de la media aritmética, validando lo que señala Becerril, et ál., (2019) al destacar que los estudiantes no logran identificar entre las características y propiedades de la media aritmética y la mediana (Figura 29).

Figura 28

Interpretación de la mediana cuando existen datos extremos

3. ¿Por qué el valor de la mediana se mantuvo?

Dedida q que el dato de la mitad se sigue manteniendo en el medio

Figura 29*Error al identificar las propiedades de la mediana en datos agrupados*

3. ¿Por qué el valor de la mediana se mantuvo?

porque la suma no cambia estos factores

- La Moda. En este caso los grupos de trabajo mencionan que el intervalo modal no se vio afectado al cambiar las calificaciones menores por las mayores. Sin embargo, es de aclarar que aunque es correcto afirmar que el valor de la moda no varía, las respuestas de los estudiantes reflejan que confunden el valor de la moda con el intervalo modal ya que tratan al conjunto de datos como si estuviesen desagrupados y no mencionan al intervalo modal quien es el que tiene la mayor frecuencia absoluta en el conjunto de datos agrupados (Figura 30), lo que conlleva a refutar a Cobo (2003) quien señala que cuando los datos se encuentran agrupados, se debe hacer referencia a la moda como el intervalo modal.

Figura 30*Interpretación de la moda cuando hay datos extremos*

4. ¿Por qué el valor de la moda es el mismo?

porque aún sigue siendo la calificación con mayor frecuencia entre los demás estudiantes.

Para el núcleo de atención, el uso de material didáctico facilita la exploración de una situación y ayuda a interpretar gráficos [MD1], se destaca que todos los grupos respondieron correctamente la primera pregunta de la Parte D (Figura 31), reconociendo que el investigador debe eliminar las calificaciones (20, 21 y 22) y ubicar las nuevas calificaciones (49, 50 y 49) en el intervalo correspondiente.

Figura 31*Reemplazar calificaciones*

1. ¿Qué debería hacer el investigador en este caso?

pasó la ficha 10 a 49, 21 a 50 y 1a
22 a 99

En síntesis, el trabajo realizado con el histograma fue adecuado ya que los estudiantes lograron identificar información estadística, explorar, manipular datos y valores de las MTC-DA, establecieron relaciones entre el material didáctico y el contexto en el que se presentaban las situaciones. En contraste a esto, se evidencia que los estudiantes de sexto grado del Colegio del Rosario no interpretan adecuadamente los valores de las MTC-DA.

Ahora bien, para el análisis de actuación a la luz de las acciones docentes, las MenFI resaltan como aspectos positivos por parte de las MenFI el estudio de las MTC-DA, pues en esta indagación se describen estas medidas desde sus conceptos; características; utilidades y desventajas; propiedades; las distintas representaciones de la media aritmética, mediana y moda; la fenomenología y sucesos histórico de estas medidas. Además, se indaga aspectos didácticos respecto a las MTC, recomendaciones para la enseñanza y aprendizaje de la Estadística y las MTC; los errores y dificultades que podían presentar los estudiantes en la puesta en marcha de la actividad, entre otras.

Cabe resaltar que el trabajo con estudiantes es retador pues se presentan acciones o situaciones no previstas en el diseño de las actividades, pero que se pueden modificar en el transcurso de la puesta en la práctica de la actividad. Por ejemplo, en la primera sesión se tomó más tiempo de lo previsto para que los estudiantes organizaron los datos en los intervalos correspondientes. Esto se presentó porque en la elaboración del material didáctico no se tuvo en cuenta si el intervalo inferior es abierto o cerrado; de la misma manera ocurrió con el intervalo superior, lo que llevó a que los estudiantes no ubicaran los datos en su respectivo intervalo. Sin embargo, durante la implementación de las actividades se percata que esta

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

clase de situación se puede enmendar durante la sesión de clase, sin que los objetivos de aprendizaje se vean afectados. Otra situación que generó confusión en los estudiantes se presentó cuando debían eliminar la calificación, dato 36, ya que para las MenFI la redacción de este apartado sería de fácil interpretación para los estudiantes, pero al momento de desarrollar esta parte del taller se evidenció que los estudiantes no comprenden la indicación que debían seguir para resolver esta situación.

Conclusiones y Recomendaciones

En esta sección se expone la descripción de los alcances de la alternativa metodológica en relación con los objetivos propuestos. Del mismo modo, se responde a la pregunta del problema, se establecen recomendaciones y ajustes para una futura implementación de la alternativa.

Teniendo en cuenta el primer objetivo, centrado en identificar elementos teóricos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las MTC-DA, se refleja desde el inicio del trabajo pues se exponen los conceptos; características; utilidades y desventajas; propiedades; las distintas representaciones de la media aritmética, mediana y moda; la fenomenología y sucesos histórico de estas medidas que favorecieron y enriquecieron sustancialmente este trabajo. Teniendo en cuenta que esta alternativa surge de la experiencia personal de una de las autoras de este trabajo en una de sus prácticas (Práctica en Aula); se da inicio al estudio de la indagación evidenciando que la información didáctica para las MTC-DA es escasa. Sin embargo, se exponen asuntos didácticos como la enseñanza y aprendizaje de la estadística, los errores y las dificultades en el aprendizaje de las MTC-DA que complementan esta alternativa metodológica.

El segundo objetivo planteado hace referencia al desarrollo de un material didáctico que favorezca la interpretación de las MTC-DA. Con respecto a esto y dado que la literatura es escasa para la enseñanza de las MTC-DA, se investiga el uso del material didáctico en la Estadística y/o Matemática, encontrando distintas clasificaciones del mismo. Se decide trabajar con tuercas ya que facilitan el conteo, representan el solapamiento de las calificaciones en el histograma, un histograma físico que permite a los estudiantes visualizar la situación de una mejor manera y cuerdas que facilitan la ubicación de los valores de las MTC-DA.

Finalmente, el tercer objetivo planteado para el desarrollo de la alternativa metodología fue corroborar si el material didáctico diseñado aporta a la interpretación de las MTC-DA. En relación con este objetivo, se utiliza el análisis didáctico planteado por Gómez (2002), en donde se siguen etapas para antes y después de la gestión de la actividad en el aula. Al finalizar la gestión se muestra que el material didáctico ayuda a ver las características del conjunto de datos, como lo son el tipo de variable con que se está trabajando; las cuerdas permiten la ubicación de los valores de las MTC-DA, lo cual facilitó a los estudiantes observar e identificar en qué intervalo estaría cada uno de estos valores; el uso de las tuercas aportó a que los estudiantes manipularon el conjunto de datos ya que cada tuerca representaba un dato (calificación) y exploran con mayor facilidad las diferentes situaciones propuestas.

De acuerdo con la información recopilada en esta alternativa, se logra dar respuesta a la pregunta ¿cómo el material didáctico potencializa la interpretación de las medidas de tendencia central en datos agrupados?, se puede establecer que el material didáctico elaborado desarrolla habilidades en el manejo de los conceptos estadísticos estudiados a lo largo del taller; ayuda a identificar las características de las MTC-DA, por ejemplo, en el caso de la moda los estudiantes identifican que en algunas situaciones se tiene más de un intervalo modal, por lo que su valor no va a ser único; para el caso de la media aritmética, el material favorece a que los estudiantes logren distinguir que cuando se presentan calificaciones altas, su valor va a aumentar; es decir que su valor tendrá mayor variabilidad a medida que se agreguen datos atípicos. La cuerda que hace referencia a la mediana ayuda a que los estudiantes ubiquen el intervalo donde se encuentra su valor y de allí interpretan que la mitad de los datos son menores o iguales y la otra mitad sean mayores o iguales a dicho valor. Además, el material didáctico ayuda a la identificación y extracción de información estadística, el manejo de un conjunto de datos, la ubicación de los valores de las medidas y la variación que se presentan al cambiar datos.

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

Por otra parte, el trabajo del docente se enriquece cuando el grupo de estudiantes presenta algunos errores y dificultades, por lo que se torna más retador, lo que conlleva a mejorar su forma de enseñar. Igualmente, nos hace caer en la cuenta de que no toda la información que se le brinde a los estudiantes, especialmente conceptos, por sí solos logra promover la interpretación, para nuestro caso el mayor reto fue al momento de realizar la indagación y evidenciar que para este concepto no hay mucha información con la cual orientar la clase, puede ser este uno de los motivos por los cuales la estadística pasa a un segundo plano en los planes de estudio de muchas instituciones educativas.

Por último, se recomienda que para la implementación de la alternativa metodológica los estudiantes tengan claro el manejo y conocimiento de las medidas de tendencia central tanto en datos agrupados como desagrupados, ya que esto enriquecerá y dará un sentido óptimo al uso del material didáctico presentado. En la ejecución de este trabajo se evidenció que los estudiantes por falta de claridad en cuanto a los límites de los intervalos tomaban algunos datos en el intervalo que no correspondía, esta dificultad proviene de la claridad en la indicación dada en el taller, por lo que se recomienda ser más específicos en los enunciados o instrucciones de este. Además, en el taller elaborado se recomienda ajustar las situaciones y preguntas de acuerdo con el contexto en el que se está trabajando, utilizar terminología relacionada con los estudiantes, con el propósito de que las interpretaciones que puedan brindar los estudiantes sean más acordes al contexto que se presenta y replantear las preguntas o las opciones de respuestas para que no conlleven a errores conceptuales o interpretaciones inadecuadas de la situación que se presente.

Referencias

Álvarez, I., Cano, M. y Gómez, J. (2015). *Propuesta didáctica para abordar la interpretación y cálculo de las medidas de tendencia central* [Memorias]. III Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática, Duitama, Colombia.

Álvarez, H., Arias, E. y Bergamaschi, A. (2020). La educación en tiempos del Coronavirus: Los sistemas educativos de América Latina y el Caribe ante el COVID-19. *Banco Interamericano de Desarrollo* , 3-30.

<https://publications.iadb.org/publications/spanish/document/La-educacion-en-tiempos-del-coronavirus-Los-sistemas-educativos-de-America-Latina-y-el-Caribe-ante-COVID-19.pdf>

Angarita, Y. y Palacios, B. (2015). *Catálogo descriptivo de materiales y recursos didácticos del DMA-UPN para la enseñanza de las matemáticas*. [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional].

<http://repository.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/2216/TE-17957.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Arias, O. y Silva, M. (2012). *Errores presentados por estudiantes de grado octavo entorno a problemas que requieren el uso de la media aritmética* [Tesis de especialización, Universidad Pedagógica Nacional].

<http://repository.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/155/TO-15356.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Areiza, D. y Cáceres, J. (2020). *Desarrollo de la cultura estadística a partir de la comprensión, interpretación y argumentación de información estadística* [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional].

http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/12972/desarrollo_d_e_la_cultura_estad%C3%ADstica.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central *Revista UNO*, 41-58. <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/isboa.pdf>

Batanero, C. y Cobo, B. (2000). La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿un concepto sencillo? *Revista UNO*, 85-96.
<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/MEDIANA.pdf>

Batanero, C. (2001). El currículo de Estadística en C. Batanero (Ed.), *Didáctica de la Estadística* (pp. 117-144). Universidad de Granada.
<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/didacticaestadistica.pdf>

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). Introducción en C. Batanero y C. Díaz, Estadística con proyectos (p. 7) Universidad de Granada.
<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf>

Berreçil, J., Martínez, G. y Romero, M. (2019). *Dificultades en la construcción de las nociones de media, mediana y moda en alumnos de segundo grado de secundaria* [Memorias]. CONISEN, Playas del Rosario, México

Blanco, A. (2018). Directrices y recursos para la innovación en la enseñanza de la Estadística en la universidad: revisión documental. *REDU. Revista de Docencia Universitaria de las Matemáticas*, 16, 251-267. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6511333.pdf>

Cámara de Comercio de Bogotá (2010). Entorno para el desarrollo socioeconómico de Zipaquirá en Cámara de Comercio de Bogotá (Eds.), Plan económico para la competitividad en el municipio de Zipaquirá (pp. 21-29). Bogotá, Colombia.
https://bibliotecadigital.ccb.org.co/bitstream/handle/11520/2853/5919_pec_zipaquirapdf?sequence=1&isAllowed=y

Casallas, L. (2016). *Comprensión de las medidas de tendencia central a partir de una propuesta pedagógica basada en Estadística con proyectos* [Tesis de maestría, Universidad de la Sabana].
<https://repositoriosed.educacionbogota.edu.co/bitstream/handle/001/2633/Luz%20%C3>

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/tesiscobo.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Cobo, B. (2003). *Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria* [Tesis de doctoral, Universidad de Granada].

<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/tesiscobo.pdf>

Colegio del Rosario. (2021). *Proyecto Educativo Institucional PEI* [Manuscrito no publicado].

Colegio del Rosario.

Colegio del Rosario. (2021). *Planes de curso* [Manuscrito no publicado]. Departamento de Matemáticas. Colegio del Rosario.

Cubides, K. (2011). *Dificultades que presentan los estudiantes de educación básica en la obtención e interpretación de las medidas de tendencia central* [Tesis de pregrado, Universidad del Valle].

<http://funes.uniandes.edu.co/11254/1/Cubides2011Dificultades.pdf>

Del Castillo, S. y Salazar, C. (2018). Análisis y descripción de datos en S. Del Castillo y C. Salazar (Eds.), *Fundamentos básicos de la Estadística* (pp.49-79)

<http://www.dspace.uce.edu.ec/bitstream/25000/13720/3/Fundamentos%20B%C3%A1sicos%20de%20Estad%C3%ADstica-Libro.pdf>

Farigua, K. (2016). *Propuesta de enseñanza para medidas de tendencia central a través de objetos virtuales de aprendizaje* [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional].

<http://funes.uniandes.edu.co/12013/1/Farigua2016Propuesta.pdf>

Fernandez, K. (2022). *Parcelador de clases* [Manuscrito no publicado]. Área de Matemáticas.

Colegio del Rosario

Fluza, M. y Fernández, M. (2014). Introducción a las dificultades de aprendizaje y a los trastornos del desarrollo. En M. Fluza y M. Fernández. (Eds.), *Dificultades de aprendizaje y trastornos del desarrollo* (pp. 13-40). Ediciones pirámide.

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

https://altascapacidades.es/portalEducacion/html/otrosmedios/Dificultades_de_aprendizaje_y_trastornos.pdf

Fuentes, A. (2017). *La mediana, la hermana difícil de las medidas de tendencia central: una secuencia didáctica para su aprendizaje* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-2500/UCC2604_01.pdf

Godino, J., Batanero, C. y Font, J. (2004). Recursos para el estudio de las matemáticas en J. Godino (Ed.), *Didáctica de las matemáticas para maestros* (pp. 123-154). Universidad de Granada

Gómez, P. (2006). *El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* [Simposio]. X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Granada, España.

González, D. (2016). *Enseñanza de la Estadística mediante el ciclo de investigación* [Taller]. II Encuentro Colombiano de Educación Estocástica, Antioquia, Colombia

Gutiérrez, L. N. (2020). *Importancia del material didáctico para el aprendizaje de la matemática en el nivel primario*. [Archivo PDF].

<https://www.scielo.br/pdf/aval/v21n3/1982-5765-aval-21-03-00929.pdf>

Gutiérrez, N. (2017). *Conceptualizando el objeto estadístico distribución de frecuencias: Una experiencia de aula con estudiantes de grado 8º* [Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas].

<http://funes.uniandes.edu.co/10970/1/Gutie%CC%81rrez2017Conceptualizando.pdf>

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Sexta edición. <http://observatorio.epacartagena.gov.co/wp-content/uploads/2017/08/metodologia-de-la-investigacion-sexta-edicion.compressed.pdf>

Lara, R. (2017). *Enseñanza de la estadística utilizando el juego y materiales manipulativos como recurso didáctico en 6º de primaria* [Tesis de pregrado, Universidad Internacional de la Rioja].

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

<https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/4779/LARA%20MORENO%2C%20RAQUEL.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Leal, J. (16-20 de septiembre de 2013). *Diseño de estrategias creativas para la enseñanza de las medidas de tendencia central* [Discurso]. VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Montevideo, Uruguay.

Londoño, L. Á. (2017). *Comprensión de las medidas de tendencia central, en los niños de grado tercero, cuarto y quinto, utilizando como estrategia el censo en la Escuela*. [Tesis de Maestría, Universidad Tecnológica de Pereira]

<http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/handle/11059/8143/3727L847.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Mayén, S. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes Mexicanos de Educación secundaria y bachillerato* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada].

<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/TESISsilvia2.pdf>

Maturana, G. y Nagles, O. (2019). *Análisis de la información. Un enfoque socio epistemológico de los usos de las medidas de tendencia central* [Tesis de maestría, Universidad de Medellín].

https://repository.udem.edu.co/bitstream/handle/11407/6324/T_ME_383.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas: Estándares Básicos de Competencias Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional.

https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Mounoud, P. (2001). El desarrollo cognitivo del niño: desde los descubrimientos de Piaget hasta las investigaciones actuales. *Contextos educativos*, 4, 53-77.

file:///C:/Users/Mabel%20Vallejo/Downloads/unige_17009_attachment01.pdf

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

Oviedo, K. (2016). *Análisis de recursos de Internet para la educación secundaria en el tema de medidas de tendencia central*. [Tesis de Maestría, Universidad de Granada]

<http://www.ugr.es/~batanero/documentos/TFMOviedo.pdf>

Plazas, J. (1999). *StadiS 1.05 Beta*. [Software]. Windows 95, Windows 98, Windows 98 SE, Windows ME, Windows 2000 y Windows NT. Madrid, España

Restrepo, J. (2020). Resolución de problemas en medidas de tendencia central para la formación del pensamiento crítico en un grupo de estudiantes de grado décimo. [Tesis doctoral, Universidad de Cuahtémoc]

<https://www.ucuauhtemoc.edu.mx/educacionadistancia/comunidadead/application/views/repositoriodetesis/TesisFinalJohnJairoRestrepoSarta.pdf>

Rodríguez, F., Maldonado, A. y Sandoval, P. (2016). Comprensión de las medidas de tendencia central: un estudio comparativo en estudiantes de pedagogía en matemática en dos instituciones formadoras chilenas. *Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior (Campinas)*, 929-952. <https://www.scielo.br/pdf/aval/v21n3/1982-5765-aval-21-03-00929.pdf>

Rojas, J. (2020). *Aplicación de la lúdica como estrategia de enseñanza en el contenido de medidas de tendencia central* [ensayo pedagógico, Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de San Luis Potosí] [Archivo PDF].

Ruiz, F. y Barón, F (2009). *Medidas descriptivas*. En F. Ruiz y F. Barón, Bioestadística (pp. 38-68). Parainfo

Saavedra, E. (2021). Acerca de la moda. *Revista de Educación Matemática*, 75-90.

<https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/28231/33358>

Silva, M. (2010). *Propuesta didáctica para la superación de algunos errores comunes en la conceptualización de las medidas de tendencia central*. [Manuscrito no publicado]. [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

Socas, P. (2007). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde e enfoque lógico semiótico* [Ponencia]. XI Investigación en Educación Matemática, San Cristóbal de la Laguna, España

Vallejo, M. (2020). *Reflexión PostAcción MenF Práctica en Aula* [Manuscrito no publicado]. Departamento de Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

Velasco, E. (2012). *Uso de material estructurado como herramienta didáctica para el aprendizaje de las matemáticas* [Tesis de pregrado, Universidad de Valladolid]. <https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/1491/TFG-B.114.pdf;jsessionid=D1A3878BC646DD248A9F8BA05761204D?sequence=1>

Vergara, C. (18 de marzo de 2020). *La teoría del desarrollo cognitivo de Jerome Bruner. Actualidad en Psicología.* <https://www.actualidadenpsicologia.com/teoria-desarrollo-cognitivo-jerome-bruner/#:~:text=Bruner%20propone%20que%20los%20alumnos,maestro%20sea%20quien%20lo%20proporcione>.

Wackerly, D., Mendenhall III, W. y Scheaffer, R. (2010). *Estadística matemática con aplicaciones* (J. Romo, trad.). Séptima edición. (Obra original publicada en 2008). [https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/\[Wackerly,Mendenhall,Scheaffer\]Estadistica_Matematica_con_Aplicaciones.pdf](https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/[Wackerly,Mendenhall,Scheaffer]Estadistica_Matematica_con_Aplicaciones.pdf)

Apéndice**Apéndice A: Taller “Estudiando las calificaciones del Área de Matemáticas”**

Nombres: _____

Fecha: _____

Historia

El Departamento de Matemáticas del Colegio del Rosario ha evidenciado que las calificaciones correspondientes a evaluaciones de Matemáticas del primer periodo académico son poco satisfactorias. Es por esto que deciden contratar un investigador en Estadística para estudiar estos datos.

¡USTEDES SERÁN LOS ASISTENTES!**Parte A. Construyendo histograma**

1. Observa los ejes del histograma y respondan

a. ¿Cuántos intervalos hay? _____

b. ¿Cuál es la amplitud de cada intervalo? _____

c. ¿Cuál es el límite inferior y el límite superior del primer intervalo?
_____d. ¿Cuál es el límite inferior y el límite superior del último intervalo?
_____e. ¿Cuál es la calificación más baja de las evaluaciones?
_____f. ¿Cuál es la calificación más alta que puede obtener los estudiantes?

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

2. Enseguida, con ayuda del material (tuercas y ejes) deben construir un histograma. No olviden las marcas de clase de cada intervalo. Luego respondan:

a. ¿Qué tipo de variable estadística se está trabajando?

b. ¿Cuál es la calificación menor y la calificación mayor?

c. ¿Cuántas calificaciones son menores a 35? _____

d. ¿Cuántas calificaciones son mayores o iguales a 35? _____

3. ¿Están de acuerdo que las calificaciones presentadas son “poco satisfactorias”?

4. ¿Cuáles serían algunas conclusiones que podría dar el investigador al departamento de Matemáticas?

Parte B. Ubicando las MTC-DA

En el desarrollo de la investigación, el investigador determina los valores centrales de las calificaciones. Es decir, determinan la media aritmética, la mediana y la moda:

Medidas de Tendencia Central	
Media aritmética	$\bar{x} = 31,81$
Mediana	$Me = 32,85$
Moda	$Mo = 35,54$

Ustedes deben ubicar en el histograma cada una de las medidas con el valor correspondiente. Para ello, utilicen las cuerdas con las etiquetas nombradas con cada medida (media, mediana y moda) y ubíquenlas aproximadamente al valor encontrado por el investigador.

1. Teniendo en cuenta los valores de las medidas de tendencia central ¿Cuáles serían algunas conclusiones que podría dar el investigador?

Parte C. Interpretando el significado de las MTC-D

El investigador tiene diferentes veredictos al momento de interpretar la media aritmética, la mediana y la moda. A continuación, se presentan tres interpretaciones de cada medida. Ustedes deben ayudarlo a seleccionar la que mejor explique la situación.

Interpretaciones de la media aritmética

Los estudiantes de sexto grado, en promedio obtienen la calificación de 31,81 en las evaluaciones.

Los estudiantes de sexto grado obtienen con mayor frecuencia la calificación de 31,81 en las evaluaciones

Los estudiantes de sexto grado, en promedio obtienen la calificación de 35,54 en las evaluaciones

Interpretaciones de la mediana

El intervalo donde se encuentra el valor que divide la mitad de los intervalos es [29 – 32) porque hay tres intervalos a la izquierda y tres a la derecha de este intervalo.

El valor de la mediana es 31,81 y significa que es el punto medio del total de datos y está ubicada en el intervalo [29 – 32).

El punto medio de los datos es 32,23; es decir, la mitad de los datos es menor o igual a 32,23 y la otra mitad es mayor o igual a 32,23. La mediana está ubicada en el intervalo [32 – 35).

Interpretaciones de la moda

El intervalo modal (mayor frecuencia) es [35 – 38) y la calificación que mayor frecuencia tiene es de 35,54.

El intervalo modal (menor frecuencia) es [20 – 23) y la calificación que menos frecuencia tiene es 20.

La calificación que se presenta mayor frecuencia en las tres asignaturas es 35,54 y está ubicado en el intervalo [32 – 35).

Parte D: Datos atípicos

En el transcurso de la investigación el investigador se da cuenta que un estudiante realizó recuperaciones de tres de las evaluaciones realizadas. Las nuevas calificaciones se ven reflejadas de la siguiente manera:

Calificaciones anteriores	Calificaciones actuales
20	49
21	50
22	49

1. ¿Qué debería hacer el investigador en este caso?

El investigador determina nuevamente los valores de la media aritmética, la mediana y la moda.

Usen el histograma para representar los nuevos valores y concluyan.

Medidas de Tendencia Central	
Media aritmética	$\bar{x} = 33,04$
Mediana	$Me = 32,85$
Moda	$Mo = 35,54$

2. ¿Por qué el valor de la media aritmética aumento?

3. ¿Por qué el valor de la mediana se mantuvo?

4. ¿Por qué el valor de la moda es el mismo?

Parte E: Eliminando un dato

El investigador encuentra que hay irregularidades en algunas calificaciones. Por ejemplo, un estudiante que tenía asignada nota de 36 en una evaluación no asistió a clase el día en que la prueba se realizó; sin embargo, la calificación está registrada.

1. ¿Qué debería hacer el investigador en este caso?

2. ¿Creen que el valor de la media aritmética se ve afectada al eliminar ese dato?

3. ¿Creen que el valor de la mediana se mantiene al eliminar ese dato?

4. ¿Qué ocurre con los intervalos modales?

Parte F. Concluyendo sobre MTC-DA

El investigador concluye en el informe presentado al departamento de Matemáticas que la medida que presenta mayor variabilidad es _____ mientras que la medida con menor variabilidad es _____. Del mismo modo se mencionan tres ventajas que tiene la mediana sobre la media aritmética:

Material para la Enseñanza de Medidas de Tendencia Central

1. _____

2. _____

3. _____

También se describen tres ventajas que tiene la media aritmética sobre la mediana:

1. _____

2. _____

3. _____

El investigador hace referencia a los valores de la moda como poco confiables ya que

_____. Por lo que él

considera que la medida más representativa para estas calificaciones es

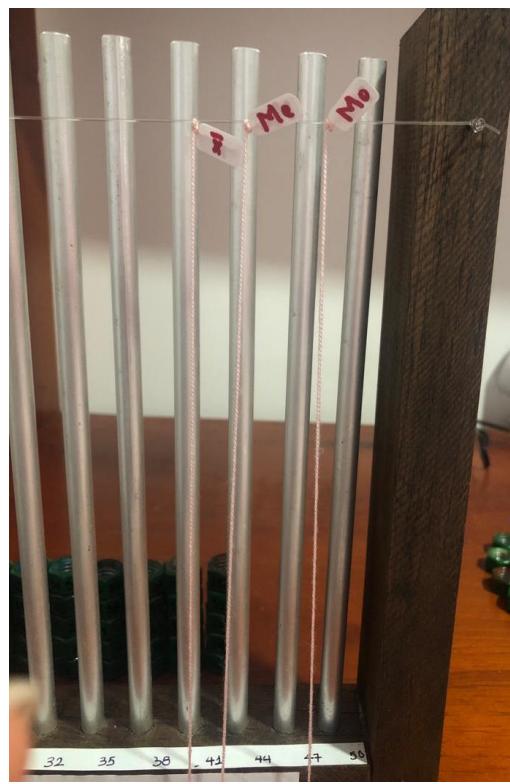
_____. porque _____. .

Por último, el investigador recomienda a los estudiantes de sexto grado que

_____. y a los docentes

que _____. .

_____.

Apéndice B: Histograma**Apéndice C: Cuerdas y etiquetas**

Apéndice D: Tuercas**Apéndice E. Datos atípicos**