



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL

APLICACIÓN DEL CÁLCULO EN EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Manuel Alejandro Garzón Quiroga

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C., 2021

APLICACIÓN DEL CÁLCULO EN EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Manuel Alejandro Garzón Quiroga

Cód. 2016240034

magarzonq@upn.edu.co

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR

Prof. Benjamín Rafael Sarmiento Lugo

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C., 2021**

Tabla de contenido

Tabla de contenido	1
A. Introducción.....	2
B. Justificación	3
C. Objetivos	4
1. Teoría preliminar	5
1.1. Conceptos básicos de la Estática	5
1.1.1. <i>Cargas y esfuerzos</i>	5
1.1.2. <i>Ley de Hooke</i>.....	11
1.1.3. <i>Fórmula de Curvatura</i>	12
1.2 Teoría básica sobre vigas.....	16
1.2.1 <i>Viga</i>	16
1.2.2 <i>Tipos de Vigas</i>	16
1.2.3 <i>Ecuaciones de equilibrio en las vigas</i>	17
1.2.4 <i>Diagramas para el análisis de una viga</i>.....	18
1.2.5 <i>Relaciones entre carga W, fuerza cortante V y momento flector M.</i>	18
1.2.6 <i>Ecuación diferencial de Euler-Bernoulli</i>	20
1.2.7 <i>Formas alternativas de la elástica y su relación con W, V, M, θ y Y.</i>.....	28
1.2.8 <i>Condiciones de frontera</i>	30
1.3 Métodos de modelación.....	32
1.3.1 <i>Método de doble integración</i>	33
1.3.2 <i>Método de secciones</i>	34
2 Modelación de vigas con integrales.....	35
2.1 Modelación para vigas estáticamente determinadas.....	35
2.1.1 <i>Viga simplemente apoyada: El caso de una carga semiparabólica.</i>	35
2.1.2 <i>Viga en voladizo: El caso de una carga triangular.</i>	45
2.2 Modelación para vigas estáticamente indeterminadas.	57
2.2.1 <i>Viga empotrada-apoyada: El caso de una carga rectangular.</i>	57
2.2.2 <i>Viga biempotrada: El caso de una carga parabólica.</i>	66
Conclusiones	79
Bibliografía	80

A. Introducción

El presente trabajo consiste en un ejercicio de modelación matemática de la fuerza cortante, el momento flector, la pendiente y la deflexión de vigas estáticamente determinadas y estáticamente indeterminadas a partir del cálculo integral. Por tanto, se ha dispuesto su estructuración en dos capítulos de la siguiente manera: el primer capítulo aborda la teoría preliminar empleada en el desarrollo de trabajo, a su vez repartida en tres apartados. El primero aborda los conceptos básicos de la estática como cargas y esfuerzos, ley de Hooke y una demostración de la ecuación de curvatura. El segundo apartado presenta la teoría básica sobre vigas abordando los tipos de vigas, las ecuaciones de equilibrio en las vigas, diagramas para el análisis de una viga, condiciones de frontera y tanto una demostración de la ecuación diferencial de Euler- Bernoulli como su relación existente con la carga, la fuerza cortante, el momento flector, la pendiente y la deflexión de una viga. El tercer apartado presenta los métodos de modelación para el análisis de vigas, tales como el método de doble integración y el método de secciones.

En el segundo capítulo se compone de dos apartados, donde el primero presenta modelos matemáticos de la fuerza cortante, el momento flector, las pendientes y la deflexión para vigas estáticamente determinadas. El segundo y último apartado presenta modelos matemáticos de la fuerza cortante, el momento flector, las pendientes y la deflexión para vigas estáticamente determinadas. Finalmente se presentan las conclusiones producto del ejercicio de modelación en el análisis estructural.

B. Justificación

Durante el desarrollo del curso de cálculo integral se abordaron aplicaciones de este enfocadas principalmente en determinar el área entre dos curvas, la longitud de un arco, superficies de sólidos de revolución, volúmenes de sólidos de revolución y algunas aplicaciones físicas como el centro de masa de una figura plana, trabajo, entre otras.

Al buscar otras aplicaciones del cálculo integral diferentes a las ya nombradas, se destacan aplicaciones en la economía, la ingeniería mecánica, ingeniería de suelos y la ingeniería civil, las cuales interesan cada vez más en los colegios donde se promueve que los estudiantes desarrollen proyectos o monografías relacionadas con las aplicaciones de las ciencias.

Haciendo una revisión en varios libros usados en estas ingenierías, se pudo ver que un tema común es el análisis de estructuras como vigas, columnas, pórticos, cerchas y conchas. Estos elementos están presentes en la ingeniería mecánica (brazos hidráulicos, chasis, etc.), en la ingeniería de suelos (cimentaciones, zapatas, etc.) y en la ingeniería civil (vigas, puentes, etc.). Para garantizar la estabilidad y seguridad de una estructura es necesario analizar cuatro funciones: la fuerza cortante V , el momento flector M , las pendientes o rotaciones θ y la deflexión Y , por ello, para el desarrollo de este trabajo se decidió estudiar cómo se aplica el cálculo integral para la modelación de estas cuatro funciones.

Con este trabajo se pretende dejar un documento donde se presentan algunas aplicaciones del cálculo integral para construir algunos modelos matemáticos importantes para el sector productivo.

C. Objetivos

Objetivo general

Estudiar aplicaciones del cálculo integral en el análisis estructural donde se utilice el método de doble integración y el método de secciones.

Objetivos específicos

- Buscar documentación sobre el método de doble integración y el método de secciones.
- Construir modelos matemáticos para la fuerza cortante, momento flector, pendientes y deflexión de una viga bajo la acción de una carga.

1. Teoría preliminar

1.1. Conceptos básicos de la Estática

En este primer capítulo se abordarán algunas definiciones y representaciones empleadas a lo largo del documento.

1.1.1. Cargas y esfuerzos

Apoyos: En consideración con estructuras en un plano, los apoyos son usados para fijar las estructuras al suelo o a otros cuerpos, restringiendo sus movimientos bajo la acción de las cargas aplicadas. Se clasifican en *apoyos empotrados*, los cuales no permiten ningún movimiento; los *apoyos articulados* no permiten traslaciones, pero si rotaciones; y los *apoyos de rodillo o patines*, los cuales no permiten traslaciones en ningún sentido.

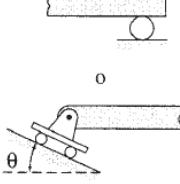
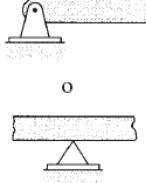
Tipo de apoyo	Representación simbólica
Rodillo o patín	
Articulado	
Empotrado	

Tabla 1: Tipos de apoyo.

Fuente: Adaptado de Kassimali, 2015.

Carga distribuida: Son aquellas cargas que actúan sobre una parte o toda la superficie de un elemento estructural.

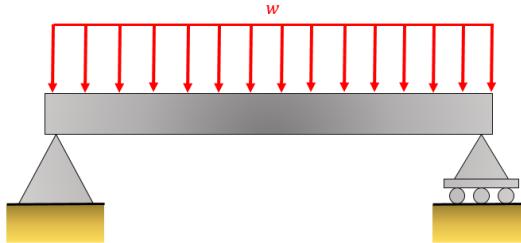


Figura 1.1.1: Carga distribuida.

Fuente: Adaptado de Kassimali, 2015.

Carga puntual o carga concentrada: Son aquellas cargas que actúan sobre un área muy pequeña o punto concreto de la estructura. Son representadas como si actuaran sobre un punto.

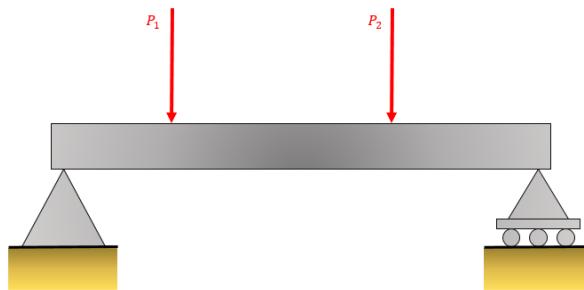


Figura 1.1.2: Cargas puntuales.

Fuente: Adaptado de Kassimali, 2015.

Compresión: Si una viga se encuentra bajo la acción de fuerzas que actúan en sus extremos dirigidas a lo largo de su eje, y si dicha fuerza tiende a acortar el elemento, se trata de una fuerza de compresión.

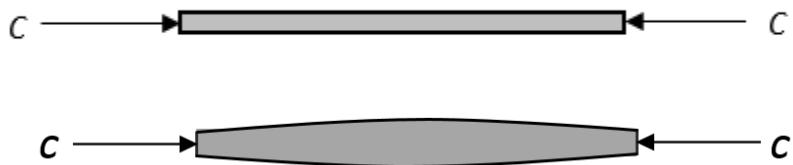


Figura 1.1.3: Viga bajo compresión.

Fuente: Adaptado de Kassimali, 2015.

Deformación: Al actuar una fuerza externa sobre un elemento, se rompe el equilibrio interno existente entre las fuerzas de atracción y repulsión entre los átomos de dicho elemento, produciéndose nuevas fuerzas internas que intentan restablecer el equilibrio, manteniendo la cohesión del material.

Dependiendo el tipo y cantidad de material, las fuerzas internas pueden equilibrar las fuerzas externas, impidiendo que la deformación continúe y el elemento se rompa. Si al suprimir la

carga el cuerpo retorna a su forma y dimensiones originales la deformación es elástica; si por el contrario el cuerpo no recupera la forma y dimensiones iniciales la deformación es plástica.

Deformación unitaria: Se define la deformación unitaria (ε) como la deformación por unidad de longitud del elemento, es decir $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ donde δ es la deformación en todo el elemento o total.

Esfuerzo: se denomina esfuerzo a la fuerza por unidad de área, o la intensidad de las fuerzas distribuidas a través de una sección determinada. Es decir: $\sigma = \frac{F}{A}$

Estructura: Una estructura es cualquier tipo de construcción conformada por uno o varios elementos destinados a soportar la acción de una serie de fuerzas aplicadas sobre ellos.

Estructura en equilibrio: Una estructura es considerada en equilibrio si se encuentra en reposo, es decir; la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la misma es cero, y permanece en ese estado cuando se somete a un sistema de fuerzas y momentos. Cuando una estructura se encuentra en equilibrio, también lo están todos sus elementos y sus partes.

Flexión: La rigidez a la flexión de un elemento se define como el momento que se aplica en los extremos del mismo para generar una rotación unitaria en ese extremo curvando el eje de dicho elemento.

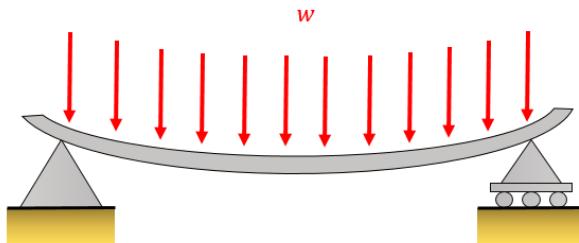


Figura 1.1.4: Viga flexionada.

Fuente: Adaptado de Beer et al, 2017.

Fuerza: Representa la acción que ejerce un cuerpo sobre otro por contacto, caracterizándose por su punto de aplicación, magnitud y dirección. Se representa por medio de un vector.

Fuerza cortante: Consiste en la suma algebraica de las proyecciones de las fuerzas externas activas y reactivas sobre la sección transversal de la viga aplicada a la izquierda de la sección en cuestión.

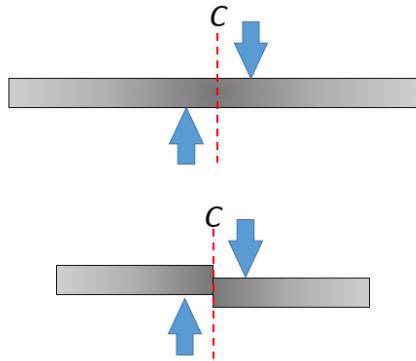


Figura 1.1.5: Fuerza cortante en una viga.

Fuente: Adaptado de Beer, Johnston y Mazurek, 2017.

Fuerzas externas: Consisten en las fuerzas que otros cuerpos ejercen sobre la estructura en cuestión. Principalmente, para el análisis es más conveniente clasificarlas como fuerzas aplicadas, normalmente llamadas cargas (por ejemplo, cargas vivas y las cargas por viento) que tienden a mover la estructura; y fuerzas de reacción o reacciones, comúnmente conocidas como las fuerzas ejercidas por los apoyos sobre la estructura y tienden a evitar el movimiento y a mantenerla en equilibrio. Por lo general, las reacciones son las incógnitas a determinar en el análisis estructural ya que tanto el estado de equilibrio como de movimiento de una estructura en conjunto está gobernada por las fuerzas externas que actúan sobre la misma.

Fuerzas internas: Son aquellas fuerzas o momentos que se ejercen en un elemento o parte de una estructura sobre el resto de ella, produciéndose dentro de ésta y manteniendo sus partes juntas. Dichas fuerzas, principalmente ocurren en pares iguales pero opuestos, debido a que cada elemento o porción del mismo ejerce sobre el resto de la estructura la misma fuerza a la inversa, actuando sobre ella, pero en sentido contrario de acuerdo a la tercera Ley de Newton; debido a lo cual esta clase de fuerzas no se consideran dentro de las fuerzas de equilibrio de la estructura completa. Estas fuerzas internas también son incógnitas a determinar en el análisis mediante las ecuaciones de equilibrio a un elemento individual o partes de la estructura.

Límite elástico: Corresponde a la máxima tensión que se puede alcanzar sin que se produzcan deformaciones permanentes.

Material elástico: Es aquel material capaz de recuperar su forma inicial tras sufrir una tensión.

Material plástico: Es aquel material cuyas deformaciones no son totalmente reversibles después de cierto nivel de tensión.

Módulo de elasticidad o módulo de Young: Corresponde a la relación entre el esfuerzo (σ) y la deformación (ε) en la región tensión-deformación de un material sometido a un esfuerzo por debajo del límite de elasticidad del material.

Momento: El momento de una fuerza F respecto a un punto O se define como el producto vectorial entre el vector posición r y la fuerza F , es decir $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Considerando el ángulo θ comprendido entre el vector \mathbf{r} y la fuerza \mathbf{F} , la magnitud del momento de \mathbf{F} con respecto a O está definida como $M_O = rF \sin \theta = Fd$, donde d representa la distancia perpendicular desde O hasta \mathbf{F} .

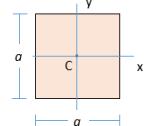
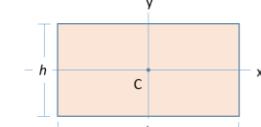
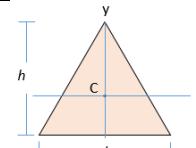
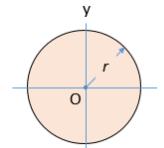
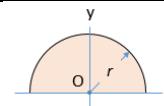
La magnitud de M_O mide la tendencia de la fuerza F para hacer girar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de M_O .

Momento de inercia: El momento de inercia representa la capacidad de la sección de resistir a la deformación causada por los esfuerzos de la flexión.

Los momentos de inercia de una sección dA con respecto a los ejes x y y están dados como $dI_x = y^2 dA$ y $dI_y = x^2 dA$, respectivamente. Asimismo, se determinan por integración para toda el área, es decir:

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

Momentos de inercia de formas geométricas comunes	
Cuadrado	$I_x = \frac{1}{12} a^4$ 
Rectángulo	$I_x = \frac{1}{12} bh^3$ 
Triángulo	$I_x = \frac{1}{36} bh^3$ 
Círculo	$I_x = \frac{1}{4} \pi r^4$ 
Semicírculo	$I_x = \frac{1}{8} \pi r^4$ 

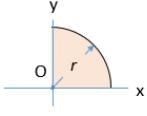
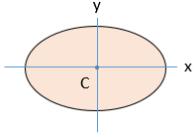
Cuarto de círculo	$I_x = \frac{1}{16}\pi r^4$	
Elipse	$I_x = \frac{1}{16}\pi r^4$	

Tabla 2: Momentos de inercia para formas geométricas comunes.

Fuente: Tomada y adaptado de Beer, Johnston y Mazurek, 2017.

Rigidez: Es la medida de la resistencia de un material a la deformación.

Rigidez a la flexión: Se define como el momento necesario aplicado en un extremo de la viga para generar una rotación en dicho extremo. Corresponde al producto del módulo de elasticidad y el momento de inercia (EI), comúnmente referido como la rigidez de la viga a la flexión.

Tensión: Si una viga se encuentra bajo la acción de fuerzas que actúan en sus extremos dirigidas a lo largo de su eje, y si dicha fuerza tiende a alargar el elemento, se trata de una fuerza de tensión.

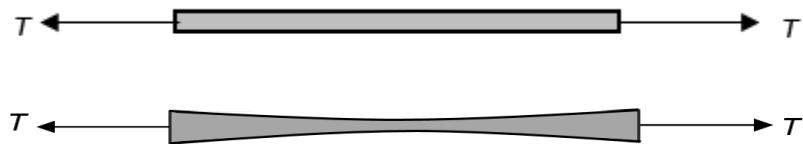


Figura 1.1.6: Viga bajo tensión.

Fuente: Adaptado de Kassimali, 2015.

Torsión: Giro de un cuerpo en torno a su eje horizontal en direcciones opuestas, como producto de la acción de dos momentos torsores opuestos.

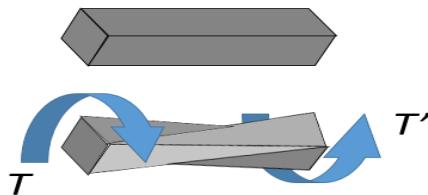


Figura 1.1.7: Viga bajo torsión.

Fuente: Adaptado de Kassimali, 2015.

1.1.2. Ley de Hooke

Como menciona Beer *et al.* (2013) todo sólido es deformado cuando se aplica una fuerza sobre el mismo, no obstante, cuando cesa dicha fuerza el cuerpo tiende a recuperar su forma natural. Esta tendencia es conocida como elasticidad. Las deformaciones que se presentan en parte se deben a las deformaciones elásticas y en otra a deformaciones permanentes.

Como señala Lefevre y Villar (2015) algunos materiales tienen un comportamiento elástico cuando son sometidos a fuerzas causadas por cargas, materiales que fueron estudiados por Hooke, quien representó en un par de ejes las deformaciones producidas al cambiar la intensidad de la fuerza denominando las curvas generadas como gráficas fuerza-deformación (curva tensión-deformación unitaria).

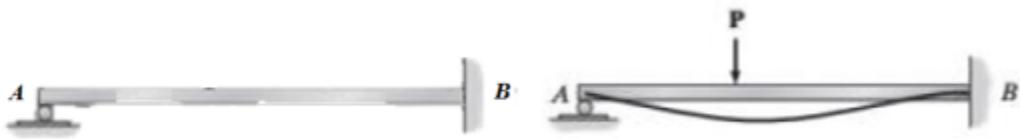


Figura 1.1.2.1: Tendencia de la curva elástica en una viga simplemente apoyada en un extremo y empotrada en el otro al aplicarse una fuerza sobre la misma.

Fuente: Tomado y adaptado de Hibbeler, 2012.

Hooke observó que algunos materiales presentaban un primer tramo recto en la gráfica, en el cual las deformaciones eran directamente proporcionales al esfuerzo aplicado. Concluyendo que si la tensión permanecía por debajo del límite de proporcionalidad el cociente tensión-deformación unitaria era constante (módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young), simbolizándola con la letra E.

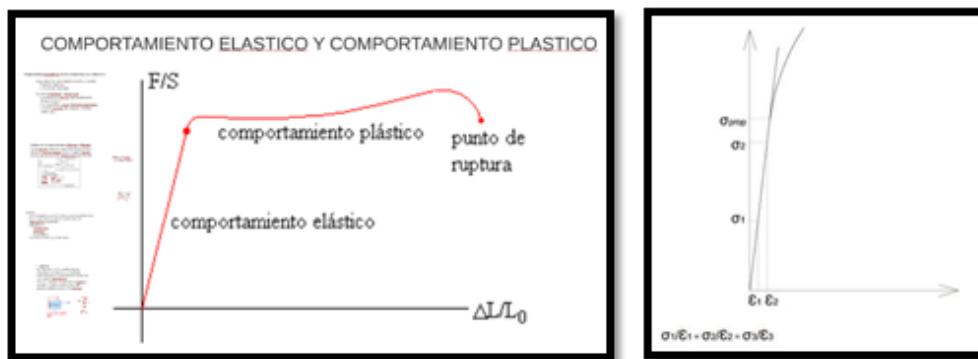


Figura 1.1.2.2: Comportamiento elástico y plástico.

Fuente: Tomado de Lefevre y Villar, 2015.

Es así, que Hooke enunció su ley como $\sigma = \epsilon * E$.

1.1.3. Fórmula de Curvatura

Una fórmula para la curvatura de una gráfica de una función en el plano xy está dada como

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}}. \text{ A continuación, se procede a demostrar la anterior afirmación.}$$

Para $f(x)$ en el plano xy con parametrización $x = x$, $y = f(x)$ y la fórmula vectorial $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$, si f es una función de x dos veces diferenciables entonces:

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}}$$

Demostración:

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right|$$

$$\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j} \quad \mathbf{r}'(x) = \mathbf{v} = \mathbf{1}\mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j} \quad [1]$$

Determinando T :

$$\begin{aligned} T &= \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\langle \mathbf{1}, f'(x) \rangle}{\left| \sqrt{(\mathbf{1})^2 + (f'(x))^2} \right|} \\ T &= \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\langle \mathbf{1}, f'(x) \rangle}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \end{aligned} \quad [2]$$

Determinando $\frac{dT}{dt}$:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\langle 0, f''(x) \rangle \sqrt{1 + (f'(x))^2} - \left[\langle \mathbf{1}, f'(x) \rangle \frac{1}{2\sqrt{1 + (f'(x))^2}} (2f'(x) * f''(x)) \right]}{\left(\sqrt{1 + (f'(x))^2} \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{\langle 0, f''(x) \rangle \sqrt{1 + (f'(x))^2} - \left[\langle 1, f'(x) \rangle \frac{f'(x) * f''(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right]}{1 + (f'(x))^2} \\
\frac{dT}{dt} &= \frac{\langle 0, f''(x) \rangle \sqrt{1 + (f'(x))^2} - \frac{\langle 1, f'(x) \rangle (f'(x) * f''(x))}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}}{1 + (f'(x))^2} \\
\frac{dT}{dt} &= \frac{\langle 0, f''(x) \rangle \sqrt{1 + (f'(x))^2} - \frac{\langle 1, f'(x) \rangle (f'(x) * f''(x))}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}}{1 + (f'(x))^2} \\
\frac{dT}{dt} &= \frac{\left(\langle 0, f''(x) \rangle \sqrt{1 + (f'(x))^2} \right) \left(\sqrt{1 + (f'(x))^2} \right) - \langle 1, f'(x) \rangle (f'(x) * f''(x))}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \\
\frac{dT}{dt} &= \frac{\langle 0, f''(x) \rangle \left(\sqrt{1 + (f'(x))^2} \right)^2 - \langle 1, f'(x) \rangle (f'(x) * f''(x))}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \\
\frac{dT}{dt} &= \frac{\langle 0, f''(x) \rangle \left(1 + (f'(x))^2 \right) - \langle 1, f'(x) \rangle (f'(x) * f''(x))}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \\
\frac{dT}{dt} &= \frac{\left\langle 0, f''(x) + f''(x) * (f'(x))^2 \right\rangle - \left\langle f'(x) * f''(x), (f'(x))^2 * f''(x) \right\rangle}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dT}{dt} = \frac{\frac{\left\langle 0, f''(x) + f''(x) * (f'(x))^2 \right\rangle - \left\langle f'(x) * f''(x), (f'(x))^2 * f''(x) \right\rangle}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}}{\frac{1 + (f'(x))^2}{1}} \\
& \frac{dT}{dt} = \frac{\frac{\left\langle 0, f''(x) + f''(x) * (f'(x))^2 \right\rangle - \left\langle f'(x) * f''(x), (f'(x))^2 * f''(x) \right\rangle}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}}{\frac{1 + (f'(x))^2}{1}} \\
& \frac{dT}{dt} = \frac{\left\langle 0, f''(x) + f''(x) * (f'(x))^2 \right\rangle - \left\langle f'(x) * f''(x), (f'(x))^2 * f''(x) \right\rangle}{\left(\sqrt{1 + (f'(x))^2} \right) \left(1 + (f'(x))^2 \right)} \\
& \frac{dT}{dt} = \frac{\left\langle 0 - f'(x) * f''(x), f''(x) + f''(x) * (f'(x))^2 - (f'(x))^2 * f''(x) \right\rangle}{\left(\sqrt{1 + (f'(x))^2} \right) \left(1 + (f'(x))^2 \right)} \\
& \frac{dT}{dt} = \frac{\langle -f'(x) * f''(x), f''(x) \rangle}{\left(\sqrt{1 + (f'(x))^2} \right) \left(1 + (f'(x))^2 \right)} \\
& \frac{dT}{dt} = \frac{\langle -f'(x) * f''(x), f''(x) \rangle}{\left(\sqrt{1 + (f'(x))^2} \right) \left(1 + (f'(x))^2 \right)} \\
& \frac{dT}{dt} = \frac{\langle -f'(x) * f''(x), f''(x) \rangle}{\left[1 + (f'(x))^2 \right]^{3/2}} \quad [3] \\
& \left| \frac{dT}{dt} \right| = \left| \frac{\langle -f'(x) * f''(x), f''(x) \rangle}{\left[1 + (f'(x))^2 \right]^{3/2}} \right| \\
& \left| \frac{dT}{dt} \right| = \frac{|\langle -f'(x) * f''(x), f''(x) \rangle|}{\left[1 + (f'(x))^2 \right]^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$\left| \frac{dT}{dt} \right| = \frac{\sqrt{(-f'(x) * f''(x))^2 + (f''(x))^2}}{\left[1 + (f'(x))^2 \right]^{3/2}}$$

$$\left| \frac{dT}{dt} \right| = \frac{\sqrt{(f'(x))^2 (f''(x))^2 + (f''(x))^2}}{\left[1 + (f'(x))^2 \right]^{3/2}}$$

$$\left| \frac{dT}{dt} \right| = \frac{\sqrt{(f''(x))^2 [1 + (f'(x))^2]}}{\left[1 + (f'(x))^2 \right]^{3/2}}$$

$$\left| \frac{dT}{dt} \right| = \frac{|f''(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\left[1 + (f'(x))^2 \right]^{3/2}} \quad [4]$$

Determinando $\kappa = \frac{1}{|v|} \left| \frac{dT}{dt} \right|$

Como $\frac{1}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}$ y $\left| \frac{dT}{dt} \right| = \frac{|f''(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\left[1 + (f'(x))^2 \right]^{3/2}}$, luego:

$$\kappa = \frac{1}{|v|} \left| \frac{dT}{dt} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \frac{|f''(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\left[1 + (f'(x))^2 \right]^{3/2}}$$

$$\kappa = \frac{1}{|v|} \left| \frac{dT}{dt} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \frac{|f''(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\left[1 + (f'(x))^2 \right]^{3/2}} \quad [5]$$

Por tanto:

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + (f'(x))^2 \right]^{3/2}} \quad [6]$$

1.2 Teoría básica sobre vigas

1.2.1 Viga

La viga es un elemento estructural diseñado para soportar cargas aplicadas en diferentes puntos a lo largo del mismo. Por lo general consisten en barras de forma prismática recta y larga. En la mayoría de los casos, las cargas se ubican perpendicular al eje de la viga causando flexión y corte en la viga. Cuando las cargas no se encuentran en ángulo recto con el elemento, también producen cargas axiales en el mismo.

Su diseño consiste en dos partes, la primera en determinar las fuerzas cortantes y momentos flectores producidos por las cargas; y la segunda consiste en seleccionar la sección transversal que resista de la mejor forma posible dichas fuerzas trasversales y momentos flectores.

1.2.2 Tipos de Vigas

Como menciona Beer *et al* (2017), las vigas se clasifican de acuerdo a la forma como se encuentren apoyadas debido a que, si se involucran tres incógnitas al determinar las reacciones en los apoyos, se considera una viga estáticamente determinada; de estar involucradas más de tres incógnitas, la viga será estáticamente indeterminada.

Vigas estáticamente determinadas o isostáticas: Son aquellas vigas cuyas condiciones de equilibrio son suficientes para encontrar todas las reacciones de apoyos y las fuerzas internas de los elementos.

Dentro de las vigas estáticamente determinadas se encuentran las vigas con dos apoyos simples y vigas en voladizo



Figura 1.2.2.1: Viga con dos apoyos simples o simplemente apoyada.

Fuente: Tomada y adaptado de Beer, Johnston y Mazurek, 2017.



Figura 1.2.2.2: Viga en voladizo.

Fuente: Tomada y adaptado de Beer, Johnston y Mazurek, 2017.

Vigas estáticamente indeterminadas o hiperestáticas: Son aquellas vigas que presentan una mayor cantidad de incógnitas que ecuaciones de equilibrio, por tanto, se requiere del planteamiento de ecuaciones adicionales obtenidas a partir de condiciones de compatibilidad de las deformaciones experimentadas por sus elementos.

Dentro de las vigas estáticamente indeterminadas se encuentran las vigas empotradas en un extremo y simplemente apoyada en el otro y las vigas empotradas.



Figura 1.2.2.3: Viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro.

Fuente: Tomada y adaptado de Beer, Johnston y Mazurek, 2017.



Figura 1.2.2.4: Viga biempotrada.

Fuente: Tomada y adaptado de Beer, Johnston y Mazurek, 2017.

1.2.3 Ecuaciones de equilibrio en las vigas

Según señala Kassimali (2015) son aquellas estructuras que inicialmente se encuentran en reposo y permanecen en este estado cuando se someten a un conjunto de fuerzas y momentos; esto es, que dichas fuerzas se equilibran sin dar lugar a un momento o fuerza cortante resultante sobre la estructura. Lo anterior se puede expresar en coordenadas cartesianas x, y, z como:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_x &= 0 \\ \sum M_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0\end{aligned}$$

Asimismo, como menciona Hibbeler (2012) las cargas y los principales elementos que las soportan se encuentran en un solo plano. Por tanto, las anteriores ecuaciones pueden reducirse a:

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M_x = 0$$

De las anteriores ecuaciones, $\sum F_x$ representa la suma de las fuerzas que se aplican de forma horizontal a lo largo del eje x, mientras $\sum F_y$ alude a la suma de las fuerzas verticales, es decir las fuerzas perpendiculares a la viga. Así mismo $\sum M_x$ es la sumatoria de momentos producidos por las cargas que se aplican a la viga con respecto a un punto. Por lo tanto, como menciona Beer (2017) para poder escribir las ecuaciones de equilibrio es necesario identificar todas las fuerzas que actúan sobre la estructura y esbozar su respectivo diagrama de cuerpo libre, dado que las ecuaciones obtenidas permiten determinar tanto las fuerzas desconocidas que se ejercen sobre el cuerpo rígido como las reacciones en sus puntos de apoyo.

1.2.4 Diagramas para el análisis de una viga

Para el análisis de una viga, regularmente se formulan los diagramas de carga, fuerza cortante, momento flector, pendiente y deflexión.

Como menciona Kassimali (2015), el diagrama de carga muestra la variación de la carga a lo largo de la longitud de la viga, se denota como W . Asimismo, Beer *et al* (2013) señala que los diagramas de fuerza cortante (V) y momento flector (M) representan respectivamente la fuerza cortante y el momento flector en un punto x a lo largo de la viga, mientras que el diagrama de flexión (Y) representa el comportamiento la curvatura del eje de la viga cuando es sometida a una carga; finalmente el diagrama de pendientes (θ) muestra los ángulos de las pendientes de la elástica con respecto al eje neutro de la viga.

1.2.5 Relaciones entre carga (W), fuerza cortante (V) y momento flector (M).

Como menciona Beer *et al.* (2017) los diagramas de fuerza cortante y momento flector pueden simplificarse al considerar ciertas relaciones existentes entre la carga, el momento flector y la fuerza cortante. Dichas relaciones se pueden establecer partiendo de una carga distribuida (w) sobre una viga simplemente apoyada al considerar una porción la misma limitada por los puntos C y C' separados a una distancia Δx , como se muestra en la figura 1.2.5.1

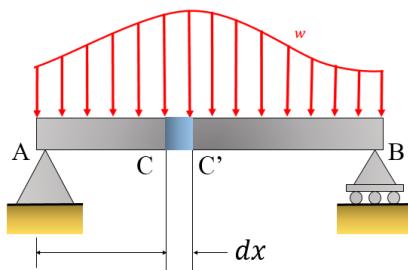


Figura 1.2.5.1: Carga distribuida sobre una viga simplemente apoyada.

Fuente: Adaptado de Beer *et al.*, 2017.

Si se separa el segmento de viga CC' y se esboza su respectivo diagrama de cuerpo libre considerando que la fuerza cortante y el momento flector están representados en el extremo C como V y M respectivamente y en el extremo C' como $V + dV$ y $M + dM$, las fuerzas y los pares estarán dirigidos como se indica en la siguiente figura.

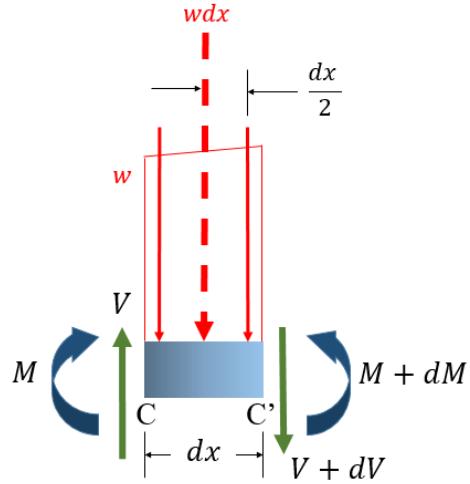


Figura 1.2.5.2: Diagrama de cuerpo libre para una carga de magnitud wdx en el segmento CC' de la viga.

Fuente: Adaptado de Beer et al., 2017.

Como señala Beer et al. (2017) al aplicar las ecuaciones de equilibrio de la estática para el tramo de viga de la figura 1.2.5.2, la suma de fuerzas verticales corresponde a:

$$\begin{aligned}
 \uparrow (+) \sum F_y &= 0: V - Wdx - (V + dV) = 0 \\
 V - Wdx - V - dV &= 0 \\
 -Wdx - dV &= 0 \\
 dV &= -Wdx
 \end{aligned} \tag{7}$$

Al integrar a ambos lados de la ecuación [7], se obtiene:

$$V = - \int Wdx \tag{8}$$

Por otra parte, si se divide por dx en ambos miembros de la ecuación [7], se llega a:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dx} &= \frac{-Wd}{dx} \\
 \frac{dV}{dx} &= -W
 \end{aligned} \tag{9}$$

Ahora, al aplicar las ecuaciones de equilibrio de la estática para el tramo de viga de la figura 1.2.5.2, la suma de momentos con respecto a C' corresponde a:

$$\text{O(+)} \sum M_{C'} = 0: -Vdx + Wdx\left(\frac{dx}{2}\right) - M + M + dM = 0$$

$$-Vdx + W\frac{dx^2}{2} + dM = 0$$

Al considerar que $dx \rightarrow 0$ entonces $dx^2 \rightarrow 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} -Vdx + dM &= 0 \\ dM &= Vdx \end{aligned} \quad [10]$$

A partir de la ecuación [10] surgen dos relaciones entre la fuerza cortante (V) y el momento flector (M), que son las siguientes:

- Al integrar en ambos miembros, se obtiene:

$$M = \int Vdx \quad [11]$$

- Al dividir por dx en ambos miembros, se tiene:

$$V = \frac{dM}{dx} \quad [12]$$

Sin embargo, como menciona Beer *et al* (2013) de la carga W puede obtenerse la curva de la elástica o ecuación de Euler-Bernoulli y a partir de esta última determinar los valores de la fuerza cortante, el momento flector, la función de pendientes y deflexión. Dicha ecuación se demuestra a continuación.

1.2.6 Ecuación diferencial de Euler-Bernoulli

La ecuación de Euler-Bernoulli relaciona la curvatura de la superficie neutra con el momento flector de una viga sometida a deflexión; por tanto, caracteriza la curva elástica o forma de la viga deformada permitiendo determinar la pendiente y la deflexión en cualquier punto de la estructura (Beer *et al.* 2013).

Al momento de realizar un corte transversal en la viga, el momento flector M en cualquier sección es igual en magnitud, por tanto, ésta se flexionará de manera uniforme (figura 1.2.6.1).

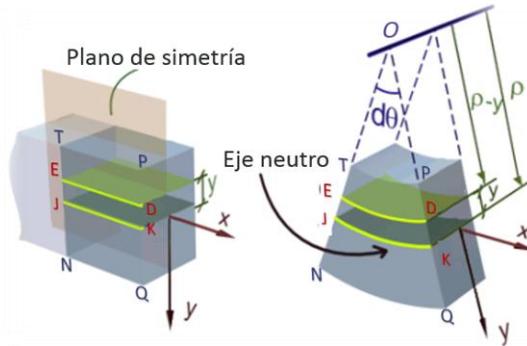


Figura 1.2.6.1: Eje neutro de una viga al ser sometida a flexión

Fuente: Tomada y adaptado de Kassimali, 2015.

Por tanto, la recta de intersección TP entre la cara superior y el plano de simetría tendrá una curvatura constante, es decir \overleftrightarrow{TP} dará lugar a una sección circular con centro O , asimismo sucede con la recta de intersección NQ entre la cara inferior y el eje de simetría.

Debido a que \overleftrightarrow{TP} se comprime y \overleftrightarrow{NQ} se estira, tanto la deformación ε_x como el esfuerzo σ_x son negativos en la parte superior de la viga (*compresión*) y positivos en la parte inferior (*tensión*), como se puede ver en la figura 1.2.6.2.

La *superficie neutra* interseca al plano de simetría según un arco de círculo llamado *eje neutro*.

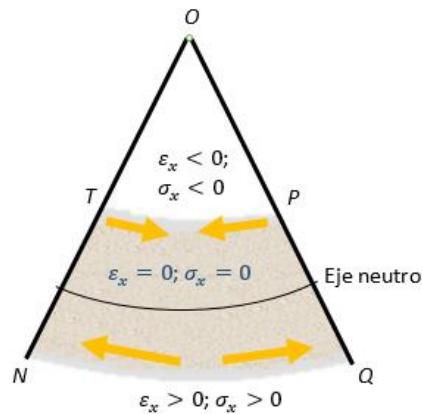


Figura 1.2.6.2: Eje neutro de una viga al ser sometida a flexión

Fuente: Tomada y adaptado de Kassimali, 2015.

Por tanto, se deduce la existencia de una superficie paralela tanto a la cara superior como inferior de la viga donde el esfuerzo σ_x y la deformación ε_x se anulan. Dicha superficie se conoce como *superficie neutra*.

Viga después de la deformación

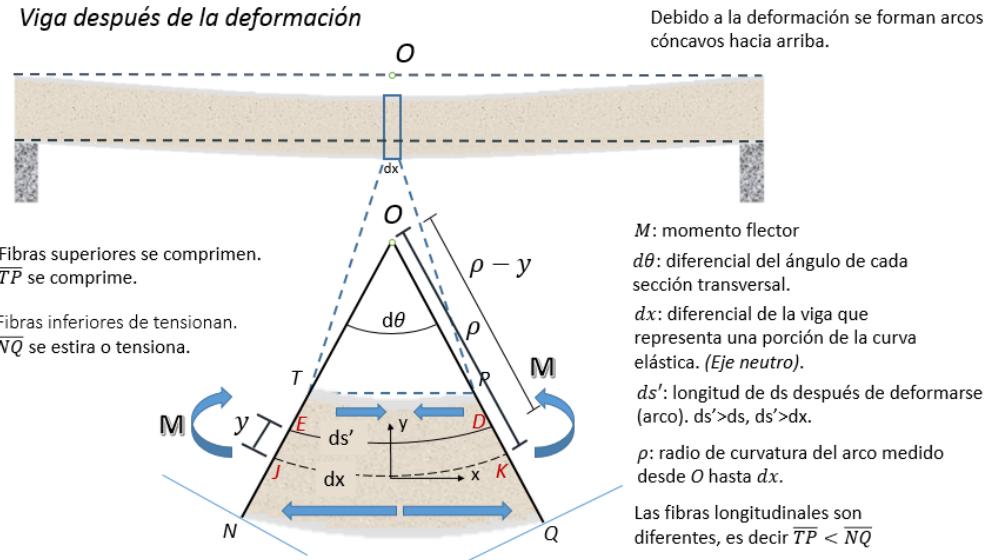


Figura 1.2.6.3: Elementos de una viga después de ser sometida a flexión.

Fuente: Tomada y adaptado de Kassimali, 2015.

Dado que la longitud de JK corresponde a la longitud L de la viga no deformada, se tiene:

$$JK = L \quad [13]$$

Por tanto, el arco ED ubicado a una distancia y de la superficie neutra, tiene una longitud L' , luego:

$$ED = L' \quad [14]$$

Así mismo se tiene que:

$$\tan \theta = \frac{L}{\rho} \quad [15]$$

Reescribiendo [15] se puede expresar de la siguiente manera:

$$\theta = \frac{L}{\rho} \quad [16]$$

Despejando L de [16]:

$$L = \rho\theta \quad [17]$$

Así mismo para L' se tiene:

$$\tan \theta = \frac{L'}{\rho - y} \quad [18]$$

Reescribiendo [18] se tiene:

$$\theta = \frac{L'}{\rho - y} \quad [19]$$

Despejando L' de [19]:

$$L' = \theta(\rho - y) \quad [20]$$

Dado que la longitud del arco DE era igual a L , la deformación total δ es igual a:

$$\delta = L' - L \quad [21]$$

Por tanto, sustituyendo las ecuaciones [17] y [20] en la ecuación [21]:

$$\delta = \theta(\rho - y) - \rho\theta \quad [22]$$

Resolviendo la ecuación [22], se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta &= \theta\rho - \theta y - \rho\theta \\ \delta &= -y\theta \end{aligned} \quad [23]$$

Teniendo en cuenta que la deformación unitaria en el arco DE , esta dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} \quad [24]$$

Sustituyendo las ecuaciones [23] y [17] en [24]:

$$\varepsilon_x = \frac{-y\theta}{\rho\theta} \quad [25]$$

Por lo tanto:

$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \quad [26]$$

O bien:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon_x}{y} \quad [27]$$

“El signo negativo se debe a que el momento flector se tomó positivo y por ende la viga es cóncava hacia arriba”

Sin embargo, la deformación unitaria alcanzará su máximo valor absoluto cuando y es máxima. Sea k la distancia máxima desde la superficie neutra hasta la superficie inferior o superior de la viga, y ε_m el *máximo valor absoluto* de la deformación unitaria se tiene:

$$\varepsilon_m = \frac{k}{\rho} \quad [28]$$

O bien:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_m}{k} \quad [29]$$

Igualando las ecuaciones [27] y [29], se obtiene:

$$-\frac{\varepsilon_x}{y} = \frac{\varepsilon_m}{k} \quad [30]$$

Resolviendo para ε :

$$\varepsilon_x = -\frac{y * \varepsilon_m}{k} \quad [31]$$

Debido a que se analizarán vigas en el rango elástico, éstas presentan los siguientes esfuerzos de flexión (figura 1.2.6.4):

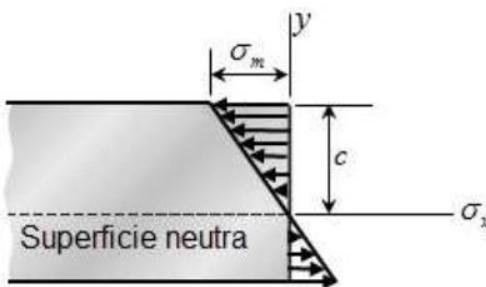


Figura 1.2.6.4: Esfuerzos de flexión.

Fuente: Tomada de Beer et al., 2013.

Donde σ_x es el esfuerzo longitudinal en x y σ_m el *máximo valor absoluto de esfuerzo*. Así mismo, debido a que en el elemento no habrá deformaciones permanentes podrá aplicarse la ley de Hooke para el esfuerzo uniaxial; por tanto, suponiendo que el material es homogéneo y denotando por E al módulo de elasticidad, el esfuerzo en la dirección x está dado por:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad [32]$$

Multiplicando en ambos miembros de la ecuación [31] por E , se tiene:

$$E \varepsilon_x = -\frac{y * (E * \varepsilon_m)}{k} \quad [33]$$

Reemplazando la ecuación [31] en la ecuación [33]:

$$\sigma_x = -\frac{y * (E * \varepsilon_m)}{k} \quad [34]$$

Reescribiendo la ley de Hooke para σ_x :

$$\sigma_m = \varepsilon_m * E \quad [35]$$

Sustituyendo la ecuación [35] en la ecuación [34], se obtiene:

$$\sigma_x = -\frac{y}{k} * \sigma_m \quad [36]$$

Recordando que el esfuerzo normal de un elemento con área transversal A sometido a una carga F_x , se obtiene al realizar el cociente entre la magnitud F_x y el área A :

$$\sigma_x = \frac{F_x}{A} \quad [37]$$

Sin embargo, como se está analizando un punto específico de la sección, el esfuerzo normal está dado por:

$$\sigma_x = \frac{dF_x}{dA} \quad [38]$$

O bien:

$$dF_x = \sigma_x dA \quad [39]$$

Igualando las ecuaciones [36] y [38]:

$$\frac{dF_x}{dA} = -\frac{y}{k} * \sigma_m \quad [40]$$

O bien:

$$dF_x = -\frac{y}{k} * \sigma_m * dA \quad [41]$$

Multiplicando por $-y$ en ambos lados de la ecuación [41] para que el eje z en el que se está analizando el esfuerzo coincida con el eje neutro (*el signo negativo se debe a que un esfuerzo de tensión $\sigma_x > 0$ lleva a un momento negativo de la fuerza normal alrededor del eje z*):

$$-y dF_x = \frac{y^2}{k} * \sigma_m * dA \quad [42]$$

Integrando en ambos miembros de la ecuación [42]:

$$\begin{aligned} \int -y dF_x &= \int \frac{y^2}{k} * \sigma_m * dA = M \\ - \int y dF_x &= \frac{\sigma_m}{k} \int y^2 dA = M \end{aligned} \quad [43]$$

Integrando en ambos miembros de la ecuación [39]:

$$\int dF_x = \int \sigma_x dA \quad [44]$$

Reemplazando la ecuación [44] en [43]:

$$- \int y \sigma_x dA = \frac{\sigma_m}{k} \int y^2 dA = M \quad [45]$$

Considerando que el momento rectangular de inercia con respecto al eje y se define como:

$$I = \int y^2 dA \quad [46]$$

Sustituyendo la ecuación [46] en la ecuación [45]:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_m}{k} \int y^2 dA &= M \\ \frac{\sigma_m * I}{k} &= M \end{aligned} \quad [47]$$

Por tanto, el esfuerzo máximo es igual a:

$$\sigma_m = \frac{M * k}{I} \quad [48]$$

Reescribiendo la ley de Hooke para el esfuerzo máximo:

$$\sigma_m = E * \varepsilon_m \quad [49]$$

Despejando ε_m de la ecuación [49]:

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E} \quad [50]$$

Sustituyendo la ecuación [48] en la ecuación [50], se tiene:

$$\varepsilon_m = \frac{M * k}{E * I} \quad [51]$$

Reemplazando la ecuación [28] en la ecuación [50]:

$$\begin{aligned} \frac{k}{\rho} &= \frac{M * k}{E * I} \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{M}{E * I} \end{aligned} \quad [52]$$

Del cálculo, si f es una función de x dos veces diferenciable, entonces la curvatura está definida por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{\left[1 - \left(dy/dx\right)^2\right]^{3/2}} \quad [53]$$

Y por tanto,

$$\frac{d^2y/dx^2}{\left[1 - \left(dy/dx\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{IE} \quad [54]$$

Esta ecuación corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden, cuya solución proporciona la forma exacta de la curva elástica; suponiendo que las deflexiones en la viga sean provocadas por flexión.

Debido a que para la mayoría de las estructuras la pendiente de la curva elástica es muy pequeña, por ende, al emplear la teoría de la pequeña deflexión se supone que $\frac{dy}{dx} \approx 0$. Por tanto $(\frac{dy}{dx})^2$ será insignificante en comparación con la unidad y por consiguiente la ecuación queda reducida a:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad [55]$$

(La demostración que la curvatura está definida por $\frac{d^2y}{dx^2}$, se encuentra como anexo al final. Por comodidad en dicha demostración se utilizará la notación $f'(x)$ y $f''(x)$).

Después de demostrar la ecuación de Euler-Bernoulli se procede a determinar la relación entre el momento flector, pendiente y deflexión de una viga bajo la acción de una carga.

1.2.7 Formas alternativas de la elástica y su relación con W , V , M , θ y Y .

Como señala Beer *et al.* (2013) al considerar la ecuación elástica expresada como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad [56]$$

Al despejar $M(x)$ de la ecuación [56] se tiene:

$$M(x) = EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad [57]$$

Al derivar la ecuación [57] con respecto a x considerado EI constante, se obtiene:

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dM}{dx} \quad [58]$$

Por lo tanto, al reemplazar la ecuación [12] en la ecuación [58] la relación entre la ecuación elástica y la función de fuerza cortante $V = V(x)$ esta dada por:

$$V(x) = EI \frac{d^3 y}{dx^3} \quad [59]$$

Al derivar la ecuación [59] con respecto a x considerando EI constante, se tiene:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{dV}{dx} \quad [60]$$

Luego, al sustituir la ecuación [9] en la ecuación [60] la relación entre la ecuación elástica y la función de carga $W = W(X)$ es:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -W(x) \quad [61]$$

Como señala Kassimali (2015), la relación entre la curva elástica y las funciones de pendientes y deflexión se establece al integrar sucesivamente la función de momento flector $M = M(x)$, es decir:

Al integrar ambos miembros de la ecuación [57] con respecto a x , la función de pendientes $\theta = \theta(x)$ está definida como:

$$\begin{aligned} \int EI \frac{d^2 y}{dx^2} dx &= \int M(x) dx \\ EI \frac{dy}{dx} &= \int M(x) dx + C_1 \end{aligned} \quad [62]$$

Al considerar $\theta(x)$ como el ángulo, en radianes, entre la tangente a la curva elástica y el eje neutro en un punto $Q(x, y)$ y puesto que es un ángulo pequeño (Beer *et al.* 2013), se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \approx \theta(x)$$

Por lo tanto, al escribir de forma alterna la ecuación [60] se obtiene:

$$EI \theta(x) = \int M(x) dx + C_1 \quad [63]$$

Al integrar ambos miembros de la ecuación [62] con respecto a x , la función de deflexión $Y = Y(x)$ esta dada como:

$$\begin{aligned} \int EI \frac{dy}{dx} dx &= \int \left[\int M(x) dx + C_1 \right] dx \\ EI Y(x) &= \int \left[\int M(x) dx + C_1 \right] dx + C_2 \end{aligned} \quad [64]$$

Finalmente, al reemplazar la ecuación [63] en la ecuación [64] se tiene:

$$EIY(x) = \int EI\theta(x) dx + C_2 \quad [65]$$

Donde las constantes de integración C_1 y C_2 se definen por las condiciones de frontera, es decir, por las condiciones originadas en la viga por sus apoyos.

1.2.8 *Condiciones de frontera*

Según menciona Beer *et al.* (2013), cuando todas las fuerzas que actúan sobre una viga pueden determinarse a partir de las ecuaciones de equilibrio, se dice que la estructura es estáticamente determinada. Dentro de esta clasificación se encuentran las vigas simplemente apoyadas, las vigas de un tramo en voladizo y las vigas en voladizo. Por otra parte, cuando las ecuaciones de la estática no son suficientes para determinar dichas las fuerzas, se dice que la estructura es estáticamente indeterminada, como lo son las vigas empotradas en un extremo y simplemente apoyadas en el otro y las vigas biempotradas.

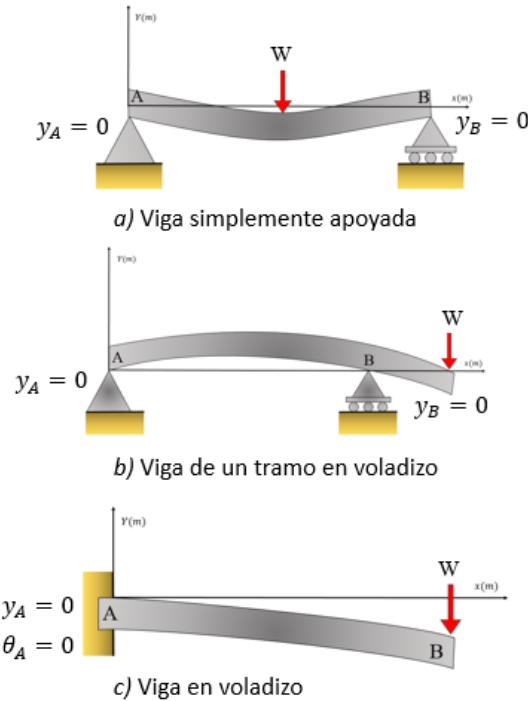


Figura 1.2.8.1: *Condiciones de frontera para vigas estáticamente determinadas.*

Fuente: Adaptado de Beer *et al.* (2013).

Para los dos primeros casos (figura 1.2.8.1a y figura 1.2.8.1b), los apoyos de la viga en el extremo A son fijos y móviles en B en donde la deflexión es cero, por tanto, al evaluar en la ecuación [65] $x = x_A, Y = Y_A = 0$ y luego $x = x_B, Y = Y_B = 0$, se obtienen dos ecuaciones para hallar C_1 y C_2 .

En el caso de la viga en voladizo, tanto la pendiente como la deflexión en A deben ser cero, por tanto, al evaluar $x = x_A, Y = Y_A = 0$ en la ecuación [63] y luego $x = x_A, \theta = \theta_A = 0$ en la ecuación [63], se obtienen dos ecuaciones para hallar C_1 y C_2 .

Como señala Kassimali (2015), el grado de indeterminación de una viga corresponde a la diferencia entre la cantidad de reacciones y las ecuaciones de equilibrio, a partir de la cual es posible determinar el grado de indeterminación de la viga. En consonancia, para la viga de la figura 1.2.8.2 las ecuaciones de la estática no son suficientes para determinar las reacciones A_x, A_y, B_y y el momento M_A puesto que la diferencia entre las incógnitas y las ecuaciones de equilibrio ($4 - 3 = 1$) es diferente a cero, por tanto, corresponde a una estructura estáticamente indeterminada de grado uno en la cual es necesario establecer una ecuación de compatibilidad para hallar de C_1 y C_2 .

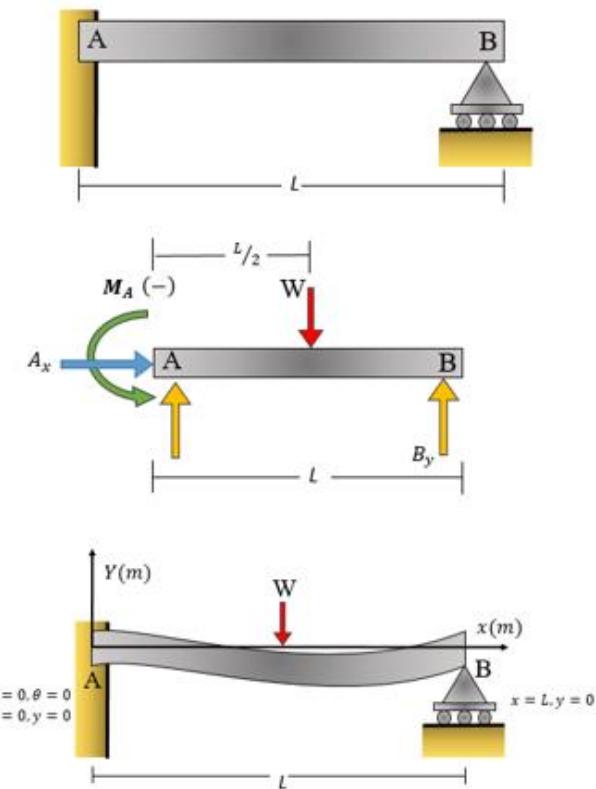


Figura 1.2.8.2: Viga estáticamente indeterminada de primer grado .

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2013).

Si existen dos reacciones redundantes en los apoyos de la viga como se muestra en la figura 1.2.8.3, se dice que es una estructura estáticamente indeterminada de segundo grado y por tanto es necesario establecer dos ecuaciones de compatibilidad para hallar las constantes de integración (Beer *et al.* 2013).

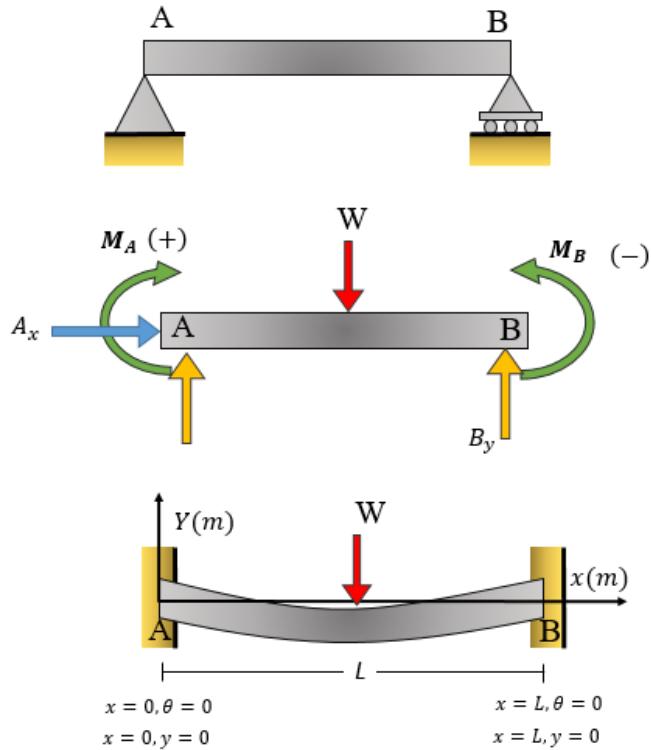


Figura 1.2.8.3: Viga estáticamente indeterminada de segundo grado.

Fuente: Adaptado de Beer *et al.* (2013).

1.3 Métodos de modelación

En los textos de Mecánica de materiales y de Análisis estructural se emplean diferentes métodos para modelar matemáticamente la fuerza cortante, el momento flector, las pendientes y la deflexión de una viga sobre la que actúa una carga. En el presente trabajo se emplearán los métodos de doble integración y el método de secciones.

Principalmente se representa el modelo para el momento flector a partir de la modelación de la ecuación diferencial de Euler-Bernoulli. Posteriormente se obtienen los modelos para la fuerza cortante mediante la primera derivada y los modelos matemáticos para las pendientes y la deflexión derivando dicha ecuación diferencial dos veces.

1.3.1 Método de doble integración

Como menciona Kassimali (2015), el método de doble integración se puede emplear para resolver combinaciones de cargas y condiciones de apoyo en vigas estáticamente determinadas e indeterminadas, en las que el cociente $\frac{M}{EI}$ se pueda expresar como una función en términos de la distancia x a lo largo del eje de la viga; posteriormente obtener las ecuaciones de pendiente y deflexión por medio del cálculo integral. Por tanto, establece funciones para la pendiente y la deflexión a lo largo de la viga permitiendo determinar el punto de máxima deflexión.

Al considerar la ecuación diferencial de la elástica como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad [66]$$

Según señala Hibbeler (2012) el producto EI es una cantidad positiva conocida como la rigidez a la deflexión, la cual debe expresarse en términos de x antes de integrar la ecuación diferencial para el caso de las vigas de sección transversal variable. Sin embargo, para una viga prismática con sección transversal constante, que es el caso en consideración, la rigidez a la deflexión es constante.

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación [66] por EI e integrar respecto a x , se tiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x) dx + C_1 \quad [67]$$

Como menciona Uribe (2002), las variaciones de las deflexiones son relativamente pequeñas y por ende pueden ser despreciadas. Por lo tanto, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta) \approx \theta \quad [68]$$

Por lo tanto, la ecuación [67], puede escribirse como:

$$EI\theta(x) = \int_0^x M(x) dx + C_1 \quad [69]$$

De modo que con la ecuación anterior es posible determinar la pendiente de la tangente a la curva elástica en cualquier punto x a lo largo de la viga.

Al integrar la ecuación [67], se obtiene:

$$EIy(x) = \int_0^x \left[\int_0^x M(x) dx + C_1 \right] dx + C_2 \quad [70]$$

La anterior expresión permite obtener la deflexión para cualquier punto x a lo largo de la viga.

Tanto C_1 como C_2 son constantes de integración que se determinan al evaluar las funciones de pendientes y deflexión en un punto particular de la viga donde se conocen el valor de cada función. Estos valores son conocidos como condiciones de frontera (Hibbeler 2012).

1.3.2 *Método de secciones*

Tal como señala Kassimali (2015), el método de secciones consiste en realizar un corte imaginario en la estructura a través de los elementos en los cuales se requiere determinar las fuerzas que se ejercen. Este método se basa en el principio de que, si un cuerpo rígido se encuentra en equilibrio, entonces cada parte del mismo también lo estará bajo la acción de cualquier carga, reacción y fuerza de los elementos cortados por la sección imaginaria.

Dichas fuerzas se determinan a partir de las ecuaciones de equilibrio aplicadas a una de las dos partes de la viga con respecto al punto donde se realizó el corte. Por lo tanto, se debe de elegir la parte que requiera la menor cantidad de cálculos.

Posteriormente se realiza el debido diagrama de cuerpo libre para la porción seleccionada esbozando las cargas externas, las reacciones y las fuerzas generadas por los elementos cortados por la sección imaginaria. Debido a que en el presente trabajo se consideran únicamente las fuerzas externas, se deben plantear solamente la suma de fuerzas verticales y la suma de momentos con respecto al punto donde se hizo el corte para obtener el momento refector.

2 Modelación de vigas con integrales

2.1 Modelación para vigas estáticamente determinadas

2.1.1 Viga simplemente apoyada: El caso de una carga semiparabólica.

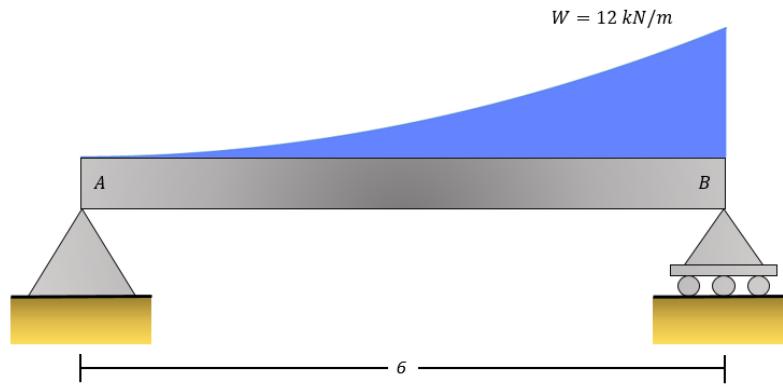


Figura 2.1.1.1: Carga en forma de tímpano parabólico sobre una viga simplemente apoyada.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

Con base en el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 2.1.1.2, se plantean las ecuaciones de equilibrio.

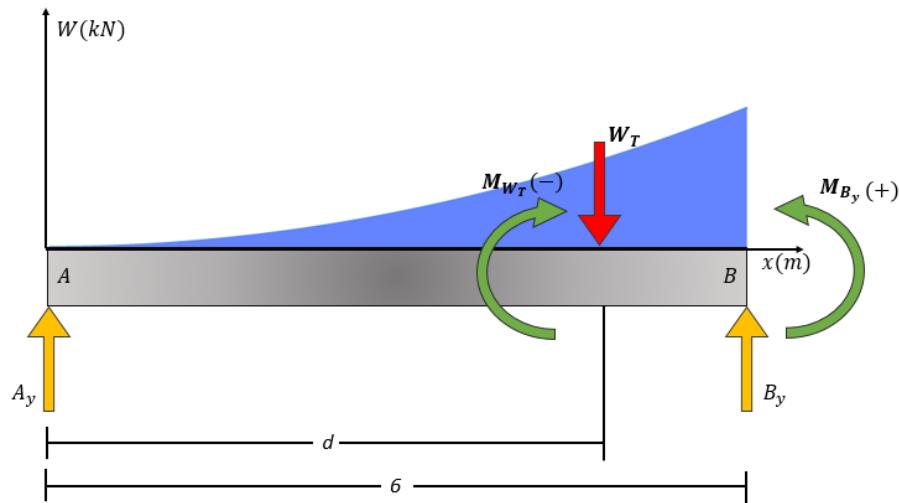


Figura 2.1.1.2: Diagrama de cuerpo libre.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

$$\uparrow (+) \sum F_y = 0 : A_y + B_y - W_T = 0$$

$$A_y + B_y = W_T \quad [71]$$

$$\circlearrowleft (+) \sum M_A = 0 : -W_T d + B_y (6) = 0$$

$$-W_T d + 6B_y = 0 \quad [72]$$

Como la carga es distribuida continua y variable, y con forma parabólica; la función de carga $W(x)$ está definida como:

$$W(x) = kx^2 \quad [73]$$

Cuando $x = 6$, se tiene que $W = 12$. Luego, reemplazando los anteriores valores en la ecuación [73] se tiene:

$$12 = k(6)^2$$

$$k = \frac{1}{3}$$

Por tanto, la función de carga es:

$$W(x) = \frac{1}{3}x^2 \quad [74]$$

Para determinar la carga total $W_T(x)$ se hace:

$$W_T = \int_0^6 W(x) dx = \int_0^6 \frac{1}{3}x^2 dx = \left. \frac{x^3}{9} + C \right|_0^6 = 24$$

$$W_T = 24kN \quad [75]$$

Al reemplazar [75] en las ecuaciones [71] y [72] se obtienen:

$$A_y + B_y = 24 \quad [76]$$

$$-24d + 6B_y = 0 \quad [77]$$

La abscisa d del centro de gravedad está dada por:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xf(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

Por consiguiente, para la función $W(x)$ se tiene:

$$d = \frac{\int_0^6 x \left(\frac{1}{3}x^2\right) dx}{\int_0^6 \frac{1}{3}x^2 dx}$$

$$d = \frac{9}{2}m \quad [78]$$

Al evaluar [78] en la ecuación [77] se obtiene:

$$-24\left(\frac{9}{2}\right) + 6B_y = 0 \quad [79]$$

Despejando B_y de la ecuación [79] se tiene:

$$B_y = \frac{24\left(\frac{9}{2}\right)}{6}$$

$$B_y = 18kN \quad [80]$$

Al sustituir la reacción B_y en la ecuación [76] se obtiene:

$$A_y + 18 = 24$$

$$A_y = 6kN \quad [81]$$

Conocidas las reacciones A_y y B_y , se procede a determinar el momento flector $M = M(x)$ por medio del método de secciones.

Para determinar la función del momento flector $M = M(x)$ por el método de secciones, se realiza un corte en un punto X a lo largo de la viga, como se muestra en la figura 2.1.1.3.

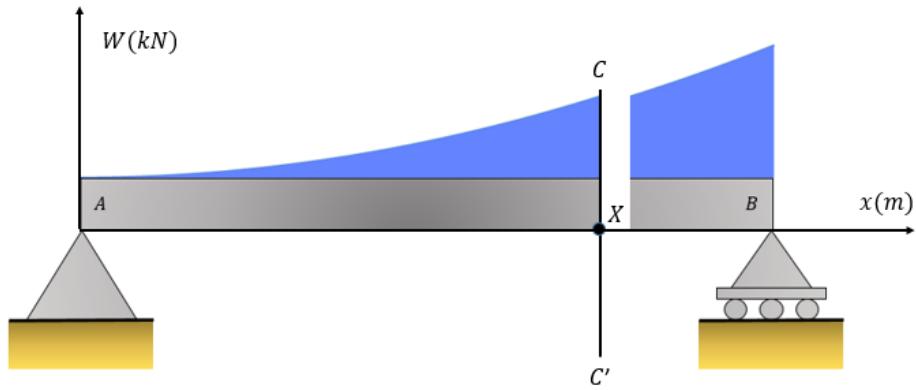


Figura 2.1.1.3: Corte en un punto X de la carga.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

Con base en el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 2.1.1.4, se plantea la suma de momentos con respecto al punto X.

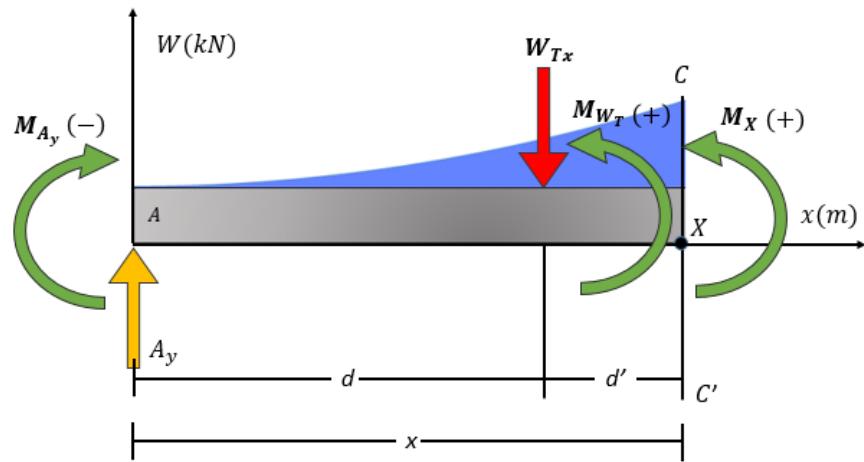


Figura 2.1.1.4: Diagrama de cuerpo libre con respecto al punto X.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

$$\text{O}(+)\sum M_x = 0: -A_y(x) + W_x(d') + M_x = 0$$

$$M_x = A_y(x) - W_x(d') \quad [82]$$

La abscisa del centro de gravedad con respecto al punto A está dada por:

$$d = \frac{\int_0^x t \times W(t) dt}{\int_0^x W(t) dt} \quad [83]$$

Al evaluar la función $W(t)$ (ecuación [74]) en [83], se obtiene:

$$\begin{aligned} d &= \frac{\int_0^x t \left(\frac{1}{3} t^2 \right) dt}{\int_0^x \frac{1}{3} t^2 dt} = \frac{\int_0^x \frac{1}{3} t^3 dt}{\int_0^x \frac{1}{3} t^2 dt} \\ d &= \frac{3x}{4} \end{aligned} \quad [84]$$

Por lo tanto, la abscisa del centro de gravedad con respecto al punto X es:

$$\begin{aligned} d' &= x - d = x - \frac{3x}{4} \\ d' &= \frac{x}{4} m \end{aligned} \quad [85]$$

Pero como W_X corresponde al área bajo la curva comprendida entre el extremo A de la viga y el corte X , por tanto, está dada por:

$$\begin{aligned} W_X &= \int_0^x w(t) dt \\ W_X &= \int_0^x \frac{1}{3} t^2 dt = \frac{t^3}{9} + C \Big|_0^x = \frac{x^3}{9} \\ W_X &= \frac{x^3}{9} \end{aligned} \quad [86]$$

Al sustituir las ecuaciones [85] y [86] en la ecuación [82], se llega a:

$$\begin{aligned} M_X &= 6x - \left(\frac{x^3}{9} \right) \left(\frac{x}{4} \right) \\ M_X &= 6x - \frac{x^4}{36} \end{aligned} \quad [87]$$

Debido a que el momento flector se analiza con respecto a cualquier punto X sobre la viga, entonces M_X está dado por:

$$M(x) = 6x - \frac{x^4}{36} \quad [88]$$

Luego, las funciones de cortante $V = V(x)$, pendientes $\theta = \theta(x)$ y deflexión $Y = Y(x)$ están dadas por:

- Cortante:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{dM(x)}{dx} \\ V(x) &= 6 - \frac{x^3}{9} \end{aligned} \quad [89]$$

- Pendiente:

$$\begin{aligned} EI\theta(x) &= \int M(x) dx \\ EI\theta(x) &= \int \left(6x - \frac{x^4}{36} \right) dx \\ EI\theta(x) &= 3x^2 - \frac{x^5}{180} + C_1 \end{aligned} \quad [90]$$

- Deflexión:

$$\begin{aligned} EIY(x) &= \int (EI\theta(x)) dx \\ EIY(x) &= \int \left(3x^2 - \frac{x^5}{180} + C_1 \right) dx \\ EIY(x) &= x^3 - \frac{x^6}{1080} + C_1 x + C_2 \end{aligned} \quad [91]$$

Para hallar las constantes C_1 y C_2 se consideran las siguientes condiciones de frontera:

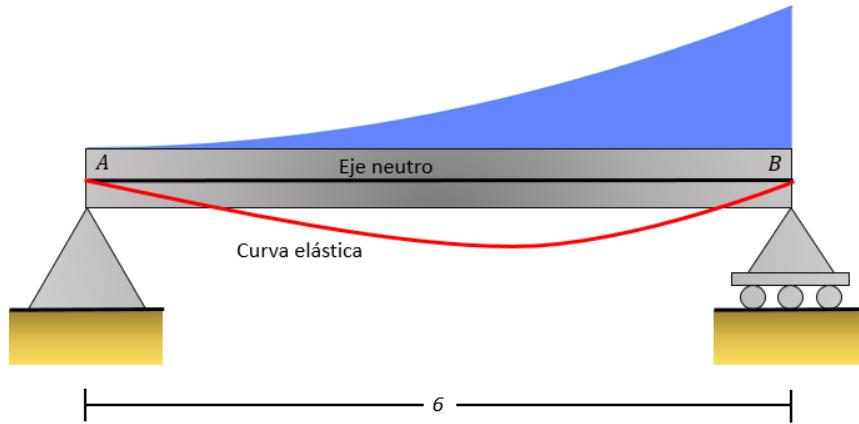


Figura 2.1.1.5: Eje neutro y tendencia de la curva elástica generada por la carga

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

Al considerar la tendencia de la curva elástica generada por la carga (figura 2.1.1.5), se llega a:

- No es posible establecer una condición de frontera en los extremos debido a que no hay simetría en la carga.
- Las condiciones de frontera para la viga simplemente apoyada están dadas por:
 - Cuando $x = 0, Y = 0$ [92]

Por tanto, al aplicar la condición [92] en la ecuación [91] se tiene:

$$C_2 = 0 \quad [93]$$

- Cuando $x = 6, Y = 0$ [94]

Al sustituir la constante C_2 y considerar la condición anterior en la ecuación [90], se tiene:

$$C_1 = -\frac{144}{5} \quad [95]$$

Por tanto, las funciones $\theta = \theta(x)$ y $Y = Y(x)$ están dadas por:

$$EI\theta(x) = 3x^2 - \frac{x^5}{180} - \frac{144}{5} \quad [96]$$

$$EIY(x) = x^3 - \frac{x^6}{1080} - \frac{144}{5}x \quad [97]$$

Gráficas del diagrama flector $V(x)$ y de las funciones $M = M(x)$, $\theta = \theta(x)$, $Y = Y(x)$.

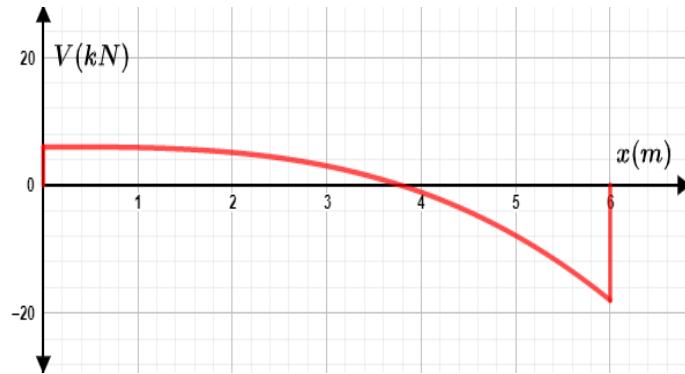


Figura 2.1.1.6: Gráfica de la fuerza cortante $V(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

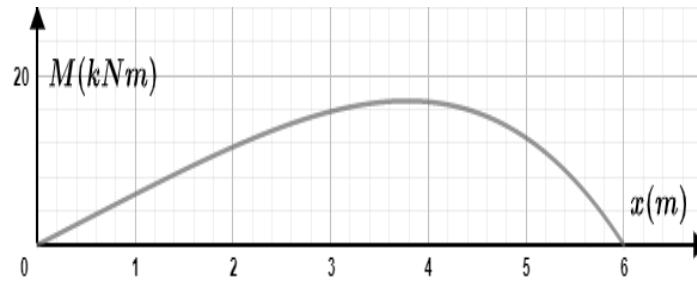


Figura 2.1.1.7: Gráfica de la función del momento flector $M(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

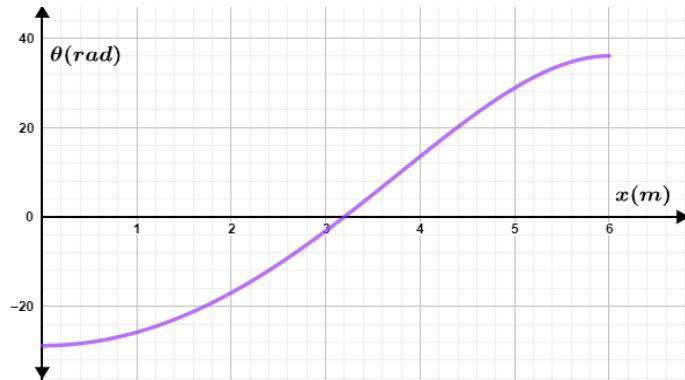


Figura 2.1.1.8: Gráfica de la función de pendientes $\theta(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

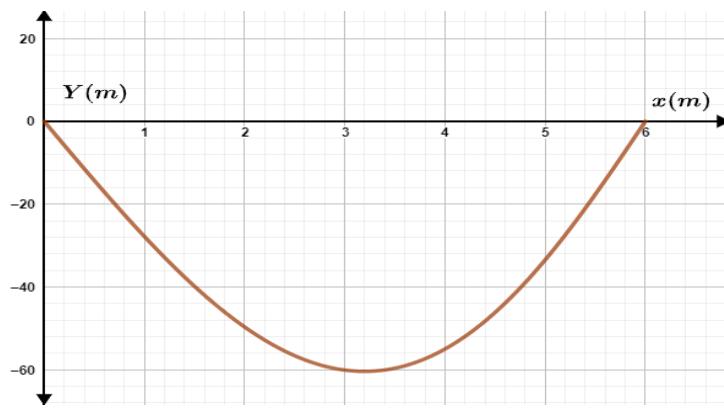


Figura 2.1.1.9: Gráfica de la función de deflexión $Y(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede evidenciar en la figura 2.1.1.10, el momento flector es máximo cuando la función de fuerza cortante es igual a cero, es decir:

$$M(x) \text{ es máximo cuando } V(x) = 0$$

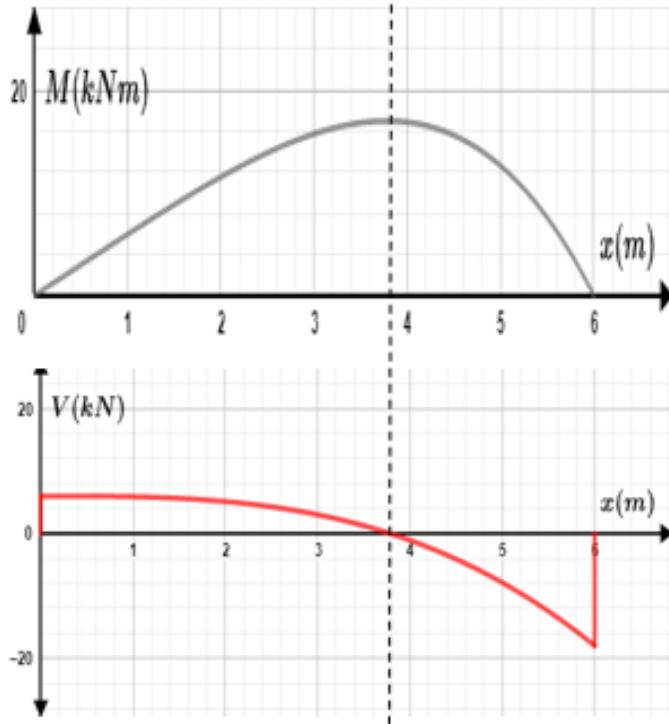


Figura 2.1.1.10: Relación entre las gráficas de la fuerza cortante $V(x)$ y del momento flector $M(x)$

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede evidenciar en la figura 2.1.1.11, la pendiente es extrema cuando la función del momento flector es igual a cero, es decir:

$$\theta(x) \text{ es extrema cuando } M(x) = 0$$

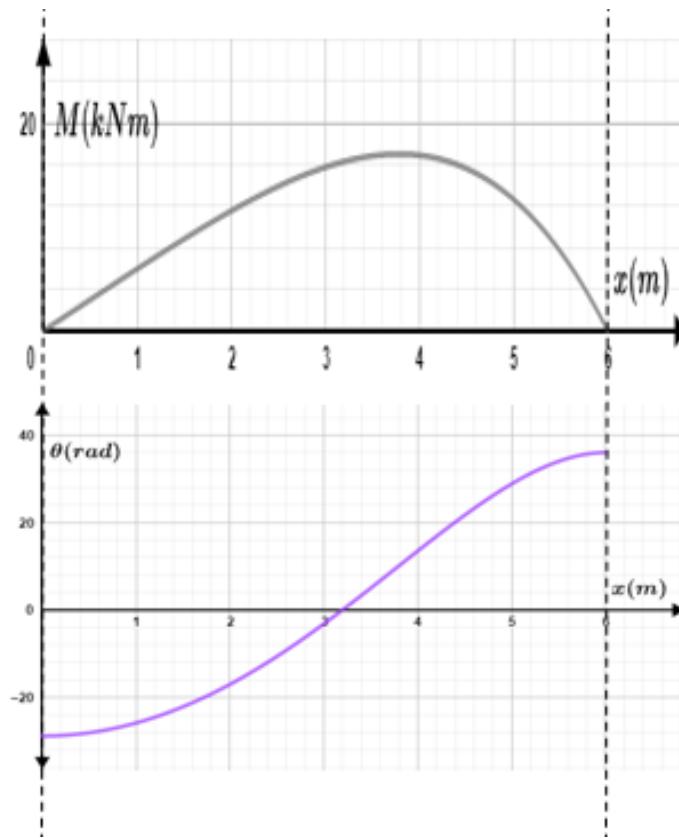


Figura 2.1.1.11: Relación entre las gráficas del momento flector $M(x)$ y de pendientes $\theta(x)$

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede evidenciar en la figura 2.1.1.12, la deflexión es extrema cuando la función de pendientes es igual a cero, es decir:

$$Y(x) \text{ es extrema cuando } \theta(x) = 0$$

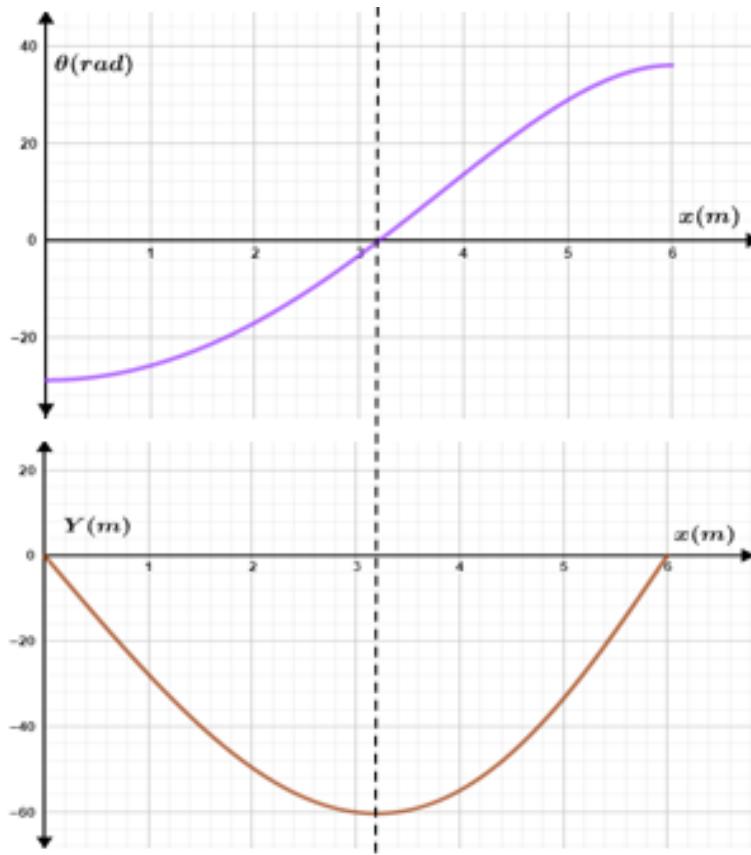


Figura 2.1.1.12: Relación entre las gráficas de la función de pendientes $\theta(x)$ y la función de deflexión $Y(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

2.1.2 Viga en voladizo: El caso de una carga triangular.

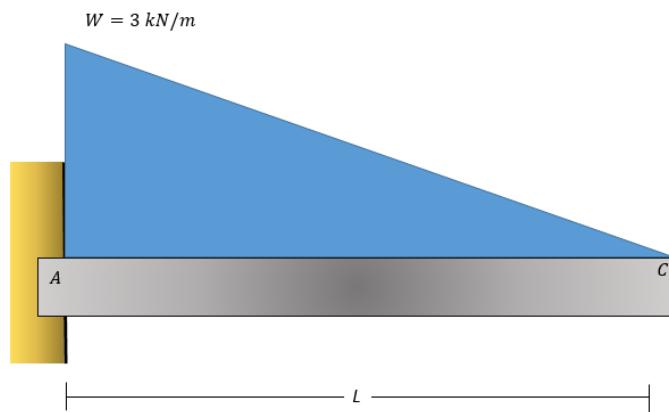


Figura 2.1.2.1: Carga distribuida en forma triangular sobre una viga en voladizo.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

Con base en el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 2.1.2.2, se plantean las ecuaciones de equilibrio.

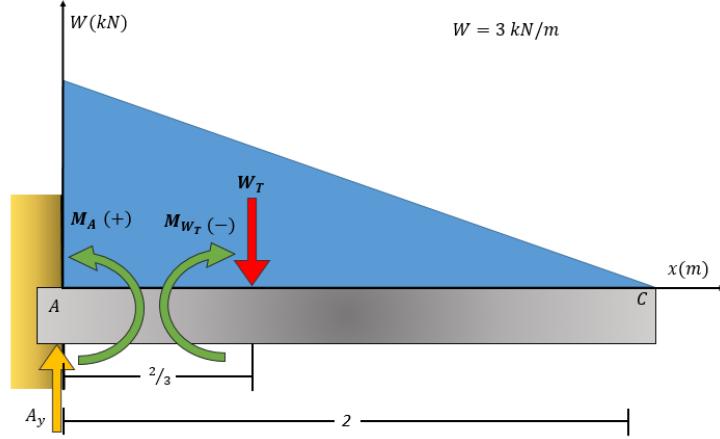


Figura 2.1.2.2: Diagrama de cuerpo libre.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

$$\uparrow (+) \sum F_y = 0 : A_y - W_T = 0 \quad [98]$$

$$A_y = W_T$$

$$\circlearrowleft (+) \sum M_A = 0 : M_A - W_T d = 0 \quad [99]$$

$$M_A = W_T d$$

Debido a que la carga tiene forma triangular, la carga total W_T es:

$$W_T = \frac{2m \times 3 \text{ kN/m}}{2} \quad [100]$$

$$W_T = 3 \text{ kN}$$

Por tanto, al reemplazar la ecuación [100] en las ecuaciones [98] y [99], se tiene:

$$A_y = 3 \text{ kN} \quad [101]$$

$$M_A = 3d \quad [102]$$

Puesto que la carga es una carga variable en forma de triángulo rectángulo, la carga total W_T se ubica a un tercio de distancia del ángulo recto. Por tanto, la distancia d corresponde a:

$$d = \frac{1}{3} \times 2m \quad [103]$$

$$d = \frac{2}{3}m$$

Luego, M_A es:

$$M_A = 3kN \times \frac{2}{3}m \quad [104]$$

$$M_A = 2kNm$$

Conocida la reacción A_y , se procede a determinar el momento flector $M = M(x)$ por el método de secciones.

Para determinar la función del momento flector $M = M(x)$ por el método de secciones, se realiza un corte en un punto X a lo largo de la viga, como se muestra en la figura 2.1.2.3.

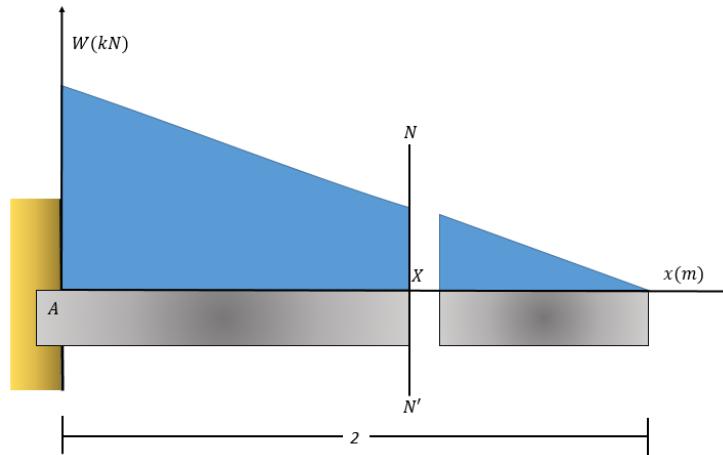


Figura 2.1.2.3: Corte en un punto X de la carga.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

Nótese que debido al corte se tiene que $\Delta ABC \sim \Delta XDC$, como se muestra en la figura 2.1.2.4.

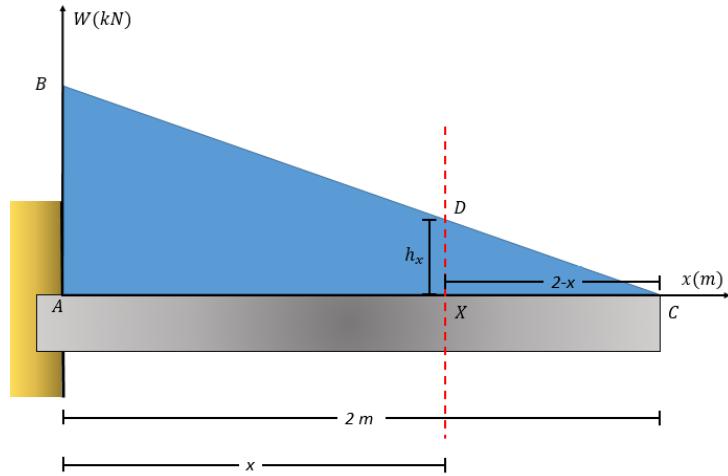


Figura 2.1.2.4: Triángulos semejantes debido al corte en un punto X de la carga.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

Sea h_x la altura del triángulo XDC y $2 - x$ su base, por semejanza de triángulos se tiene:

$$\frac{h_x}{2-x} = \frac{3}{2}$$

$$h_x = \frac{3}{2}(2-x)$$

$$h_x = 1.5(2-x) \quad [105]$$

La carga total se reemplaza por una carga puntual (W_T) que se ubica en el centro de gravedad, cuya abscisa (d) está definida como:

$$d = \frac{h(w_1 + 2w_2)}{3(w_1 + w_2)}$$

Donde w_1 y w_2 son fuerzas cualesquiera.

Deducción de la fórmula de la abscisa del centro de gravedad para una carga de forma trapezoidal.

Considerando el trapecio de la figura 2.1.2.5, se puede obtener el área del mismo si éste se subdivide en un triángulo y un rectángulo y se suman sus respectivas áreas.

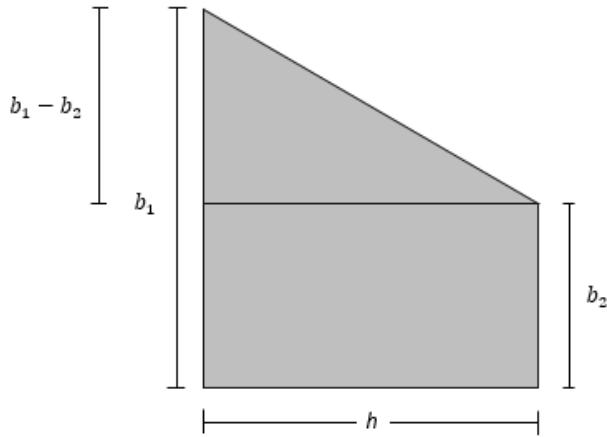


Figura 2.1.2.5: Subdivisión de un trapecio en un triángulo y un rectángulo.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

Por tanto, al hacer un promedio ponderado de las abscisas de los centros de gravedad tanto del rectángulo como del triángulo y tomando como ponderación sus respectivas áreas, es posible obtener la abscisa del centro de gravedad del trapecio, como se muestra en la tabla 3.

Figura	Abscisa del Centro de Gravedad	Áreas	Centro de Gravedad × Áreas
Rectángulo	$\frac{h}{2}$	$A = b_2 h$	$\left(\frac{h}{2}\right) b_2 h$
Triángulo	$\frac{h}{3}$	$A = \frac{(b_1 - b_2)h}{2}$	$\left(\frac{h}{3}\right) \frac{(b_1 - b_2)h}{2}$
Trapecio	$\frac{\left(\frac{h}{2}\right) b_2 h + \left(\frac{h}{3}\right) \frac{(b_1 - b_2)h}{2}}{\frac{(b_1 + b_2)h}{2}}$	$A = \frac{(b_1 + b_2)h}{2}$	$\left(\frac{h}{2}\right) b_2 h + \left(\frac{h}{3}\right) \frac{(b_1 - b_2)h}{2}$

Tabla 3: Abscisas del centro de gravedad para cargas en forma de rectangular, triangular y trapezoidal.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

Por tanto, la abscisa (d) del centro de gravedad del trapecio está dada por:

$$d = \frac{\left(\frac{h}{2}\right) b_2 h + \left(\frac{h}{3}\right) \frac{(b_1 - b_2)h}{2}}{\frac{(b_1 + b_2)h}{2}} \quad [106]$$

Al simplificar, se tiene:

$$d = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)\left(b_2 h + \frac{(b_1 - b_2)h}{3}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)(b_1 + b_2)}$$

$$d = \frac{h(b_1 + 2b_2)}{3(b_1 + b_2)}$$

Expresando las bases como cargas, se obtiene:

$$d = \frac{h(w_1 + 2w_2)}{3(w_1 + w_2)}$$

Con base en el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 2.1.2.6, se plantea la suma de momentos con respecto al punto X.

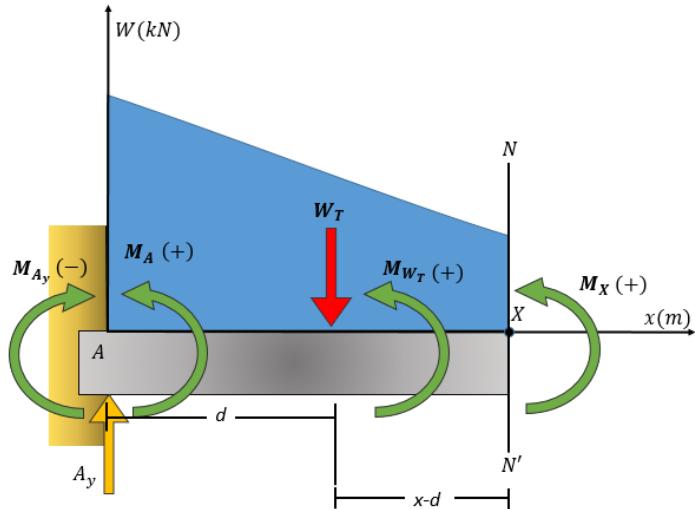


Figura 2.1.2.6: Diagrama de cuerpo libre con respecto al punto X.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

$$\text{O}(+)\sum M_x = 0: M_A - A_y * x + W_T(x-d) + M(x) = 0$$

$$M_x = -M_A + A_y * x - W_T(x-d) \quad [107]$$

Al evaluar M_A y A_y en la ecuación [107], se tiene:

$$M_x = -2 + 3x - W_T(x - d) \quad [108]$$

Como W_T está dada por el área del trapecio, corresponde a:

$$W_T = \frac{(3+h_x)x}{2} \quad [109]$$

Al sustituirla ecuación [105] en la ecuación [109], se obtiene:

$$W_T = \frac{(3+1.5(2-x))x}{2}$$

$$W_T = \frac{(6-1.5x)x}{2} \quad [110]$$

Para el caso que se está analizando, la abscisa del centro de gravedad del trapecio está dada por:

$$d = \frac{h(b_1 + 2b_2)}{3(b_1 + b_2)}$$

$$d = \frac{x(3 + 2(1.5(2-x)))}{3(3 + 1.5(2-x))}$$

Al simplificar, se obtiene:

$$d = \frac{2x(x-3)}{3(x-4)} \quad [111]$$

Al reemplazar las ecuaciones [110] y [111] en la ecuación [108], se llega a:

$$M_x = -2 + 3x - \frac{(6-1.5x)x}{2} \left(x - \frac{2x(x-3)}{3(x-4)} \right)$$

$$M_x = -2 + 3x - \frac{x^2(6-x)}{4}$$

Debido a que el momento flector se analiza con respecto a cualquier punto X sobre la viga, entonces M_X está dado por:

$$M(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2 \quad [112]$$

Luego, las funciones de cortante $V = V(x)$, pendientes $\theta = \theta(x)$ y flexión $Y = Y(x)$ están dadas por:

- Cortante:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

$$V(x) = \frac{3x^2}{4} - 3x + 3 \quad [113]$$

- Pendiente:

$$EI\theta(x) = \int M(x)dx$$

$$EI\theta(x) = \int -2 + 3x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{4} dx$$

$$EI\theta(x) = \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2} - 2x + C_1 \quad [114]$$

- Flexión:

$$EIY(x) = \int (EI\theta(x))dx$$

$$EIY(x) = \int \left(-2x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{16} + C_1 \right) dx$$

$$EIY(x) = \frac{x^5}{80} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{2} - x^2 + C_1 x + C_2 \quad [115]$$

Para hallar las constantes C_1 y C_2 se consideran las siguientes condiciones de frontera:

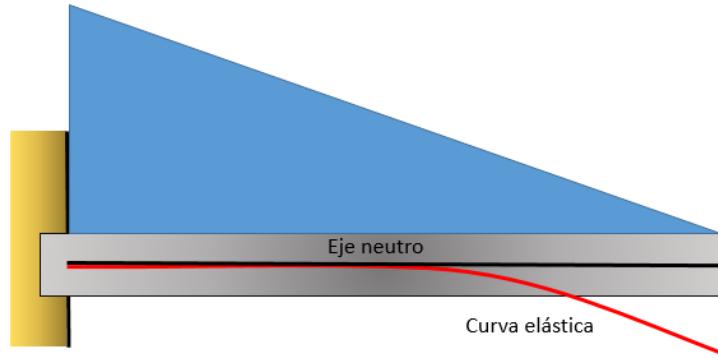


Figura 2.1.2.7: Eje neutro y tendencia de la curva elástica generada por la carga

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

Al considerar la tendencia de la curva elástica generada por la carga (figura 2.1.2.7), las condiciones de frontera están dadas por:

- Cuando $x = 0, \theta(x) = 0$ [116]

Luego, al considerar la condición [116] en la ecuación [114], se tiene:

$$EI(0) = -2(0) + \frac{3(0)^2}{2} - \frac{(0)^3}{2} + \frac{(0)^4}{16} + C_1$$

$$C_1 = 0 \quad [117]$$

- Cuando $x = 0, y(x) = 0$ [118]

Al aplicar la condición [118] en la ecuación [115] se obtiene:

$$EI(0) = -(0)^2 + \frac{(0)^3}{2} - \frac{(0)^4}{8} + \frac{(0)^5}{80} + C_1(0) + C_2$$

$$C_2 = 0 \quad [119]$$

Por tanto, las funciones de pendientes $\theta = \theta(x)$ y flexión $Y = Y(x)$ están dadas como:

$$EI\theta(x) = \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2} - 2x$$

$$EIY(x) = \frac{x^5}{80} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{2} - x^2$$

Gráficas del diagrama flector $V(x)$ y de las funciones $M = M(x)$, $\theta = \theta(x)$, $Y = Y(x)$.

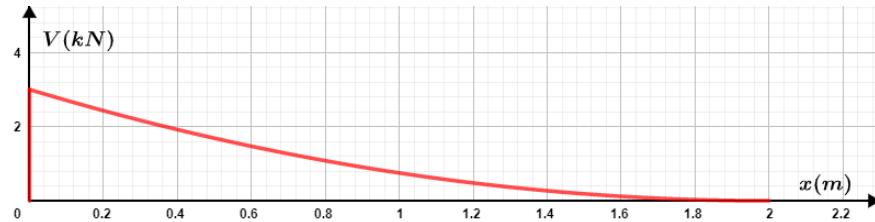


Figura 2.1.2.8: Gráfica de la fuerza cortante $V(x)$.

Fuente: Elaboración propia.



Figura 2.1.2.9: Gráfica de la función del momento flector $M(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

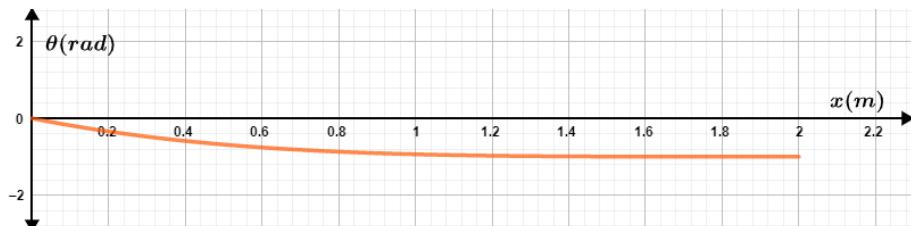
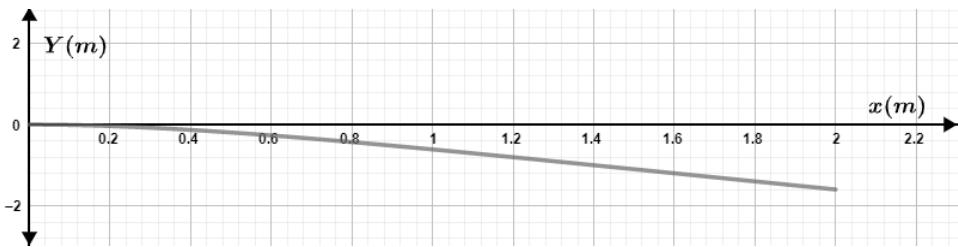


Figura 2.1.2.10: Gráfica de la función de pendientes $\theta(x)$.

Fuente: Elaboración propia.



Nota 2.1.2.11: Gráfica de la función de deflexión $Y(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede evidenciar en la figura 2.1.2.12, el momento flector es máximo cuando la función de fuerza cortante es igual a cero, es decir:

$M(x)$ es máximo cuando $V(x) = 0$

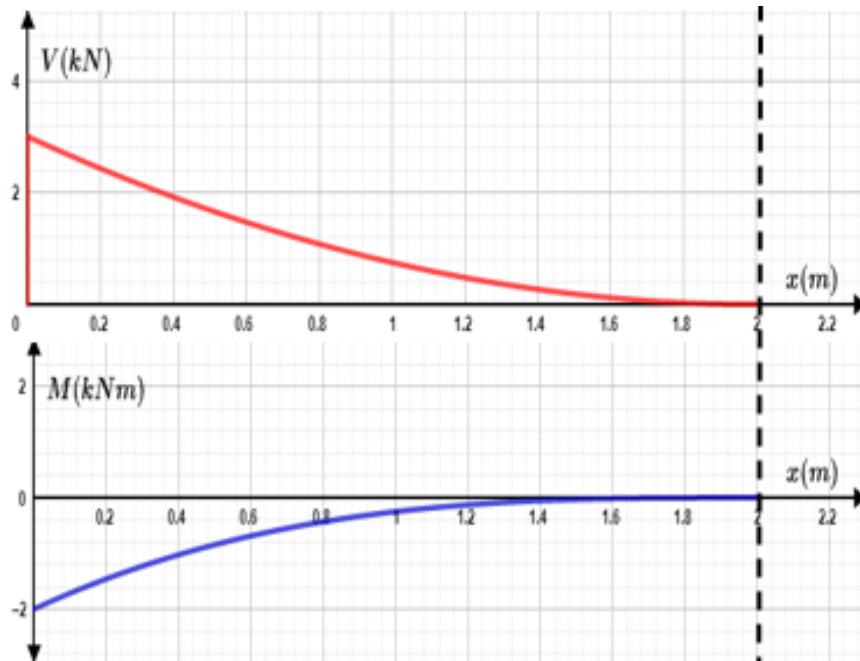


Figura 2.1.2.12: Relación entre las gráficas de la fuerza cortante $V(x)$ y del momento flector $M(x)$

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede evidenciar en la figura 2.1.2.13, la pendiente es extrema cuando la función del momento flector es igual a cero, es decir:

$\theta(x)$ es extrema cuando $M(x) = 0$

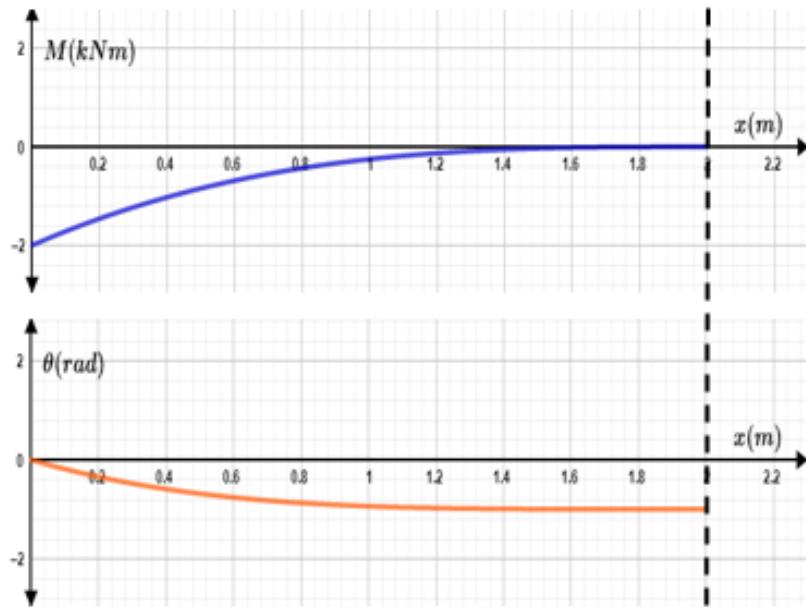


Figura 2.1.2.13: Relación entre las gráficas del momento flector $M(x)$ y de pendientes $\theta(x)$

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede evidenciar en la figura 2.1.2.14, la deflexión es extrema cuando la función de pendientes es igual a cero, es decir:

$$Y(x) \text{ es extrema cuando } \theta(x) = 0$$

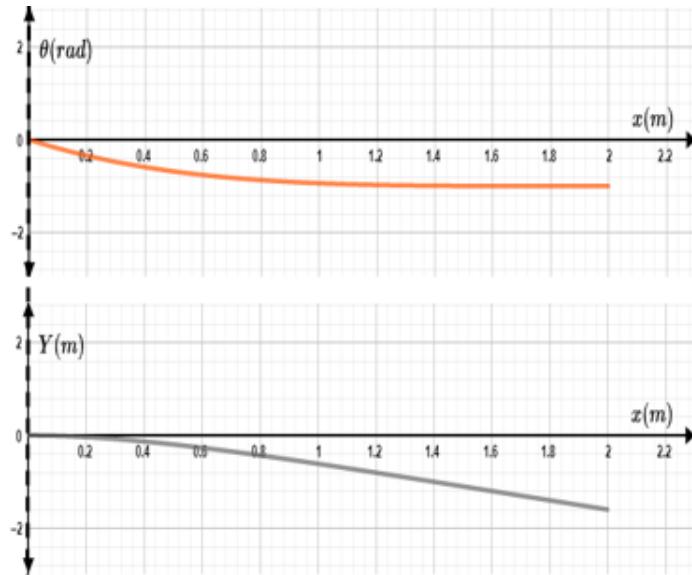


Figura 2.1.2.14: Relación entre las gráficas de la función de pendientes $\theta(x)$ y la función de deflexión $Y(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

2.2 Modelación para vigas estáticamente indeterminadas.

2.2.1 Viga empotrada-apoyada: El caso de una carga rectangular.

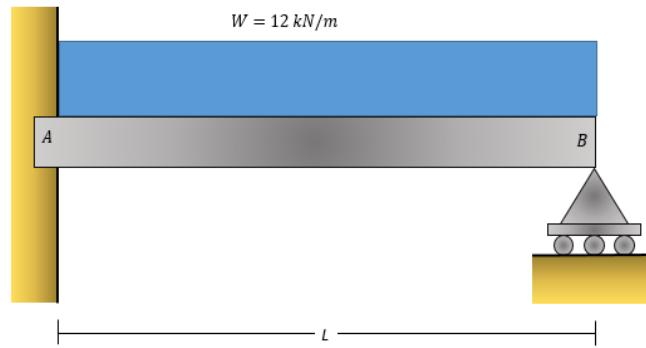


Figura 2.2.1.1: Carga distribuida uniforme sobre una viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

Con base en el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 2.2.1.2, se plantean las ecuaciones de equilibrio.

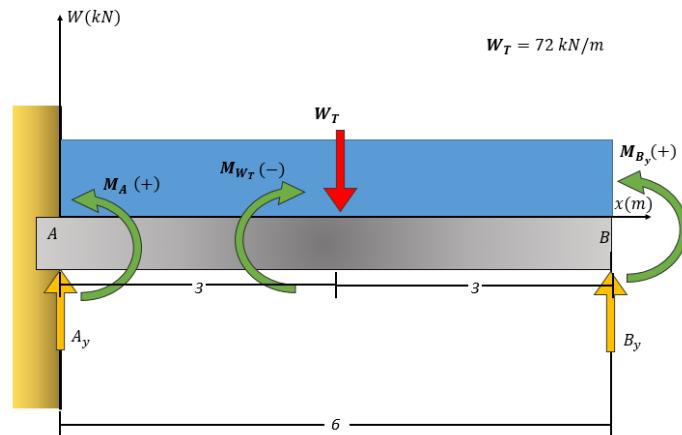


Figura 2.2.1.2: Diagrama de cuerpo libre.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

$$\uparrow (+) \sum F_y = 0 : A_y + B_y - W_T = 0$$

$$A_y + B_y = 72$$

[120]

$$\text{O}(+) \sum M_A = 0 : M_A - W_T(3) + B_y(6) = 0$$

$$M_A - 216 + 6B_y = 0$$

[121]

Sin embargo, las ecuaciones [120] y [121] no son suficientes para determinar las reacciones A_y y B_y y el momento M_A ; por tanto, es necesario establecer una ecuación de compatibilidad.

A continuación, se modelará el momento flector $M = M(x)$ a partir del método de secciones, realizando corte en un punto X a lo largo de la viga, como se muestra en la figura 2.2.1.3.

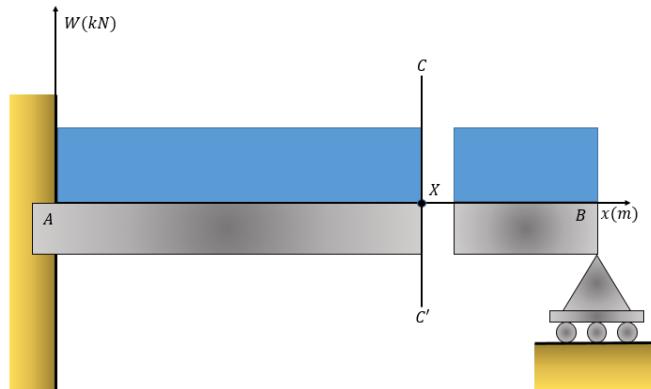


Figura 2.2.1.3: Corte en un punto X de la carga.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

Con base en el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 2.2.1.4, se plantea la suma de momentos con respecto al punto X.

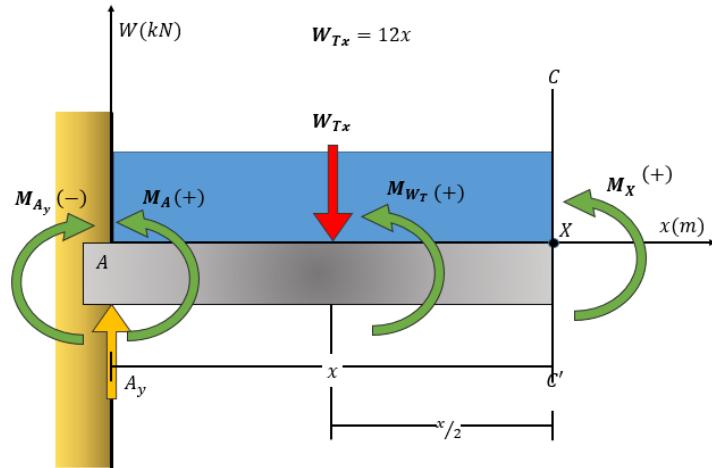


Figura 2.2.1.4: Diagrama de cuerpo libre con respecto al punto X.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

$$\text{O}(+)\sum M_x = 0: -A_y x + M_A + 12x\left(\frac{x}{2}\right) + M(x) = 0$$

$$M(x) = A_y x - M_A - 6x^2 \quad [122]$$

Luego, las funciones de cortante $V = V(x)$, pendientes $\theta = \theta(x)$ y flexión $Y = Y(x)$ están dadas por:

- Cortante:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

$$V(x) = A_y - 12x \quad [123]$$

- Pendiente:

$$EI\theta(x) = \int M(x) dx$$

$$EI\theta(x) = A_y \frac{x^2}{2} - M_A x - 2x^3 + C_1 \quad [124]$$

- Flexión:

$$EIY(x) = \int (EI\theta(x))dx$$

$$EIY(x) = A_y \frac{x^3}{6} - M_A \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} + C_1 x + C_2 \quad [125]$$

Para hallar las constantes C_1 y C_2 se consideran las siguientes condiciones de frontera:

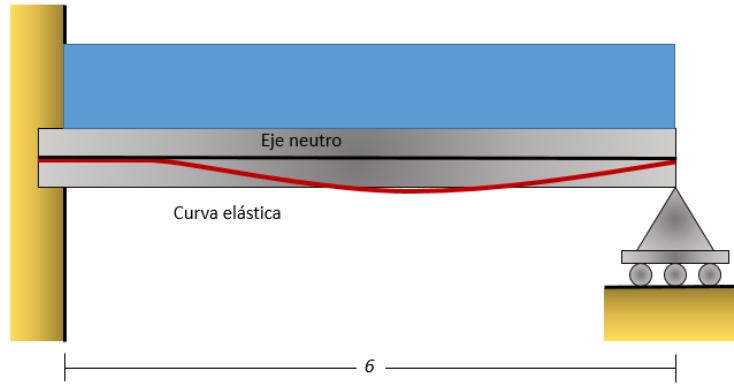


Figura 2.2.1.5: Eje neutro y tendencia de la curva elástica generada por la carga

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

Al considerar la deflexión que se genera por la carga, las condiciones de frontera para la viga en voladizo están dadas por:

- Cuando $x = 0, \theta = 0$ [126]

Por tanto, al aplicar la condición [126] en la ecuación [124] se tiene:

$$C_1 = 0 \quad [127]$$

Luego, la función de pendientes $\theta = \theta(x)$ está dada por:

$$EI\theta(x) = A_y \frac{x^2}{2} - M_A x - 2x^3 \quad [128]$$

- Cuando $x = 0, Y = 0$ [129]

Por tanto, al aplicar la condición [129] en la ecuación [125] se tiene:

$$C_2 = 0 \quad [130]$$

Luego, la función de deflexión $Y = Y(x)$ está dada por:

$$EIY(x) = A_y \frac{x^3}{6} - M_A \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \quad [131]$$

- Cuando $x = 6, Y = 0$ [132]

Al aplicar la condición anterior en la ecuación [131], se tiene:

$$36A_y - 18M_A - 648 = 0 \quad [133]$$

Luego, con las ecuaciones [120], [121] y [133] se establece un sistema de ecuaciones para encontrar los valores de A_y , B_y y M_A .

$$\begin{cases} A_y + B_y = 72 \\ M_A - 216 + 6B_y = 0 \\ 36A_y - 18M_A - 648 = 0 \end{cases}$$

Las soluciones del anterior sistema son:

$$\begin{cases} A_y = 45 \text{ kN} \\ B_y = 27 \text{ kN} \\ M_A = 54 \text{ kNm} \end{cases}$$

Por tanto, las funciones de momento $M = M(x)$, cortante $V = V(x)$, pendientes $\theta = \theta(x)$ y deflexión $Y = Y(x)$ están dadas por:

$$M(x) = 45x - 54 - 6x^2$$

$$V(x) = 45 - 12x$$

$$EI\theta(x) = 45 \frac{x^2}{2} - 54x - 2x^3$$

$$EIY(x) = 15 \frac{x^3}{2} - 27x^2 - \frac{x^4}{2}$$

Gráficas del diagrama flector $V(x)$ y de las funciones $M = M(x)$, $\theta = \theta(x)$, $Y = Y(x)$.

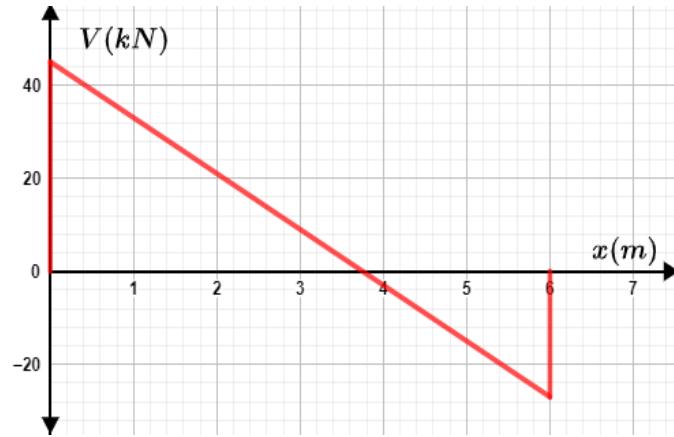


Figura 2.2.1.6: Gráfica de la fuerza cortante $V(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

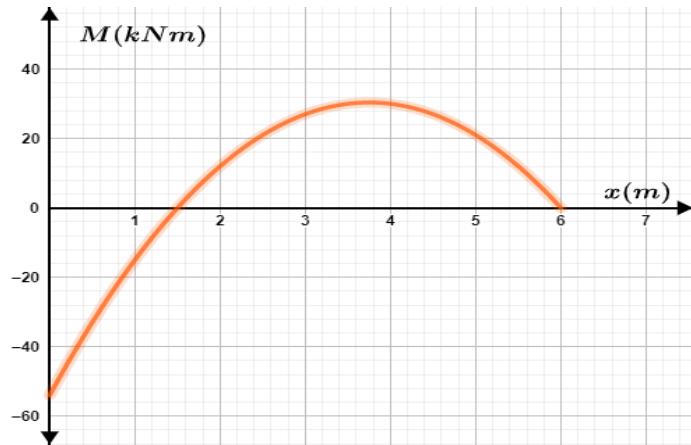


Figura 2.2.1.7: Gráfica de la función del momento flector $M(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

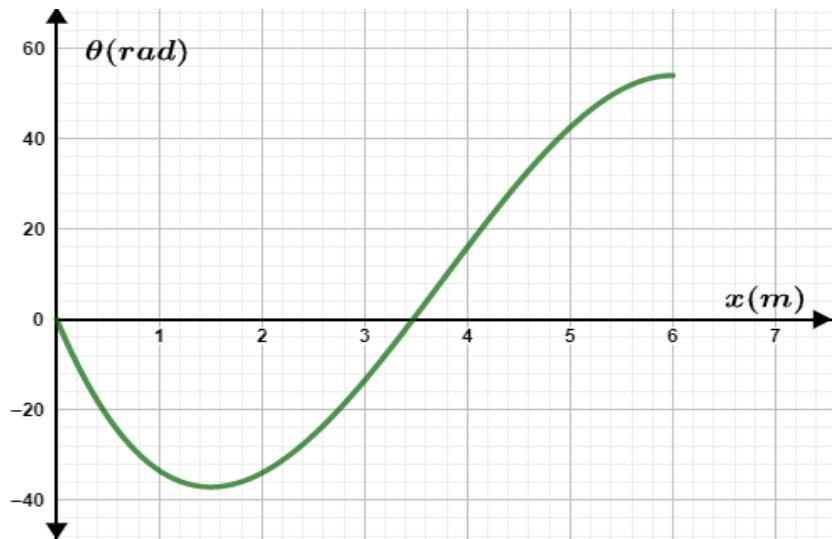


Figura 2.2.1.8: Gráfica de la función de pendientes $\theta(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

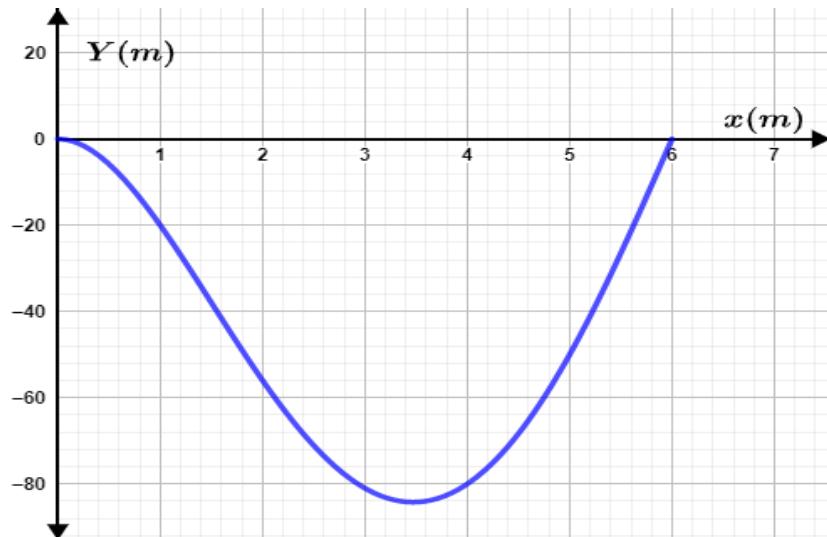


Figura 2.2.1.9: Gráfica de la función de deflexión $Y(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede evidenciar en la figura 2.2.1.10, el momento flector es máximo cuando la función de fuerza cortante es igual a cero, es decir:

$$M(x) \text{ es máximo cuando } V(x) = 0$$

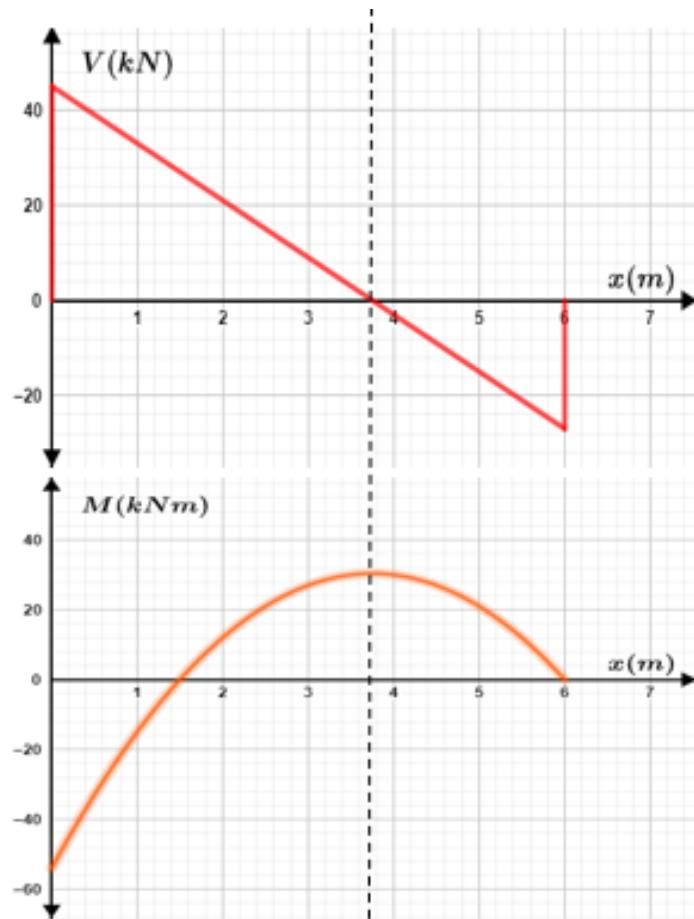


Figura 2.2.1.10: Relación entre las gráficas de la fuerza cortante $V(x)$ y del momento flector $M(x)$

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede evidenciar en la figura 2.2.1.11, la pendiente es extrema cuando la función del momento flector es igual a cero, es decir:

$$\theta(x) \text{ es extrema cuando } M(x) = 0$$

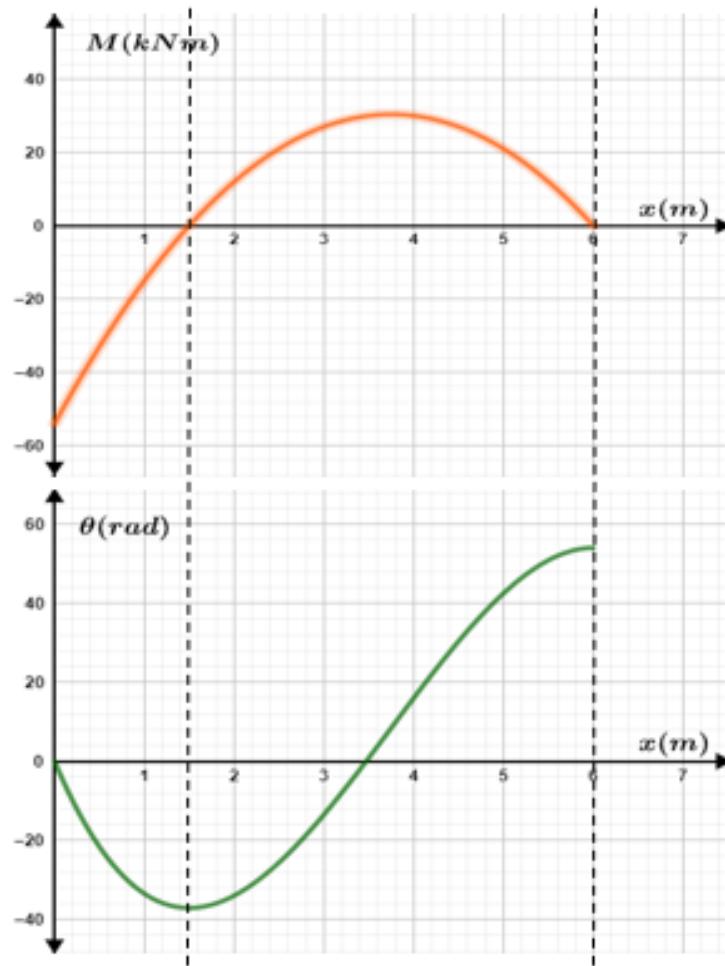


Figura 2.2.11: Relación entre las gráficas del momento flector $M(x)$ y de pendientes $\theta(x)$

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede evidenciar en la figura 2.2.12, la deflexión es extrema cuando la función de pendientes es igual a cero, es decir:

$$Y(x) \text{ es extrema cuando } \theta(x) = 0$$

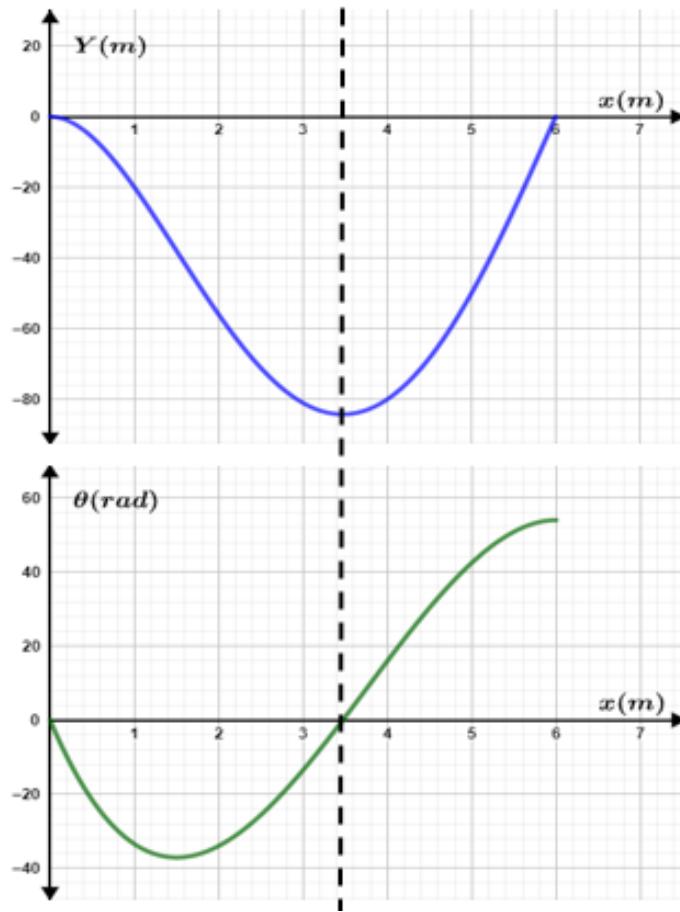


Figura 2.2.1.12: Relación entre las gráficas de la función de pendientes $\theta(x)$ y la función de deflexión $Y(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

2.2.2 Viga biempotrada: El caso de una carga parabólica.

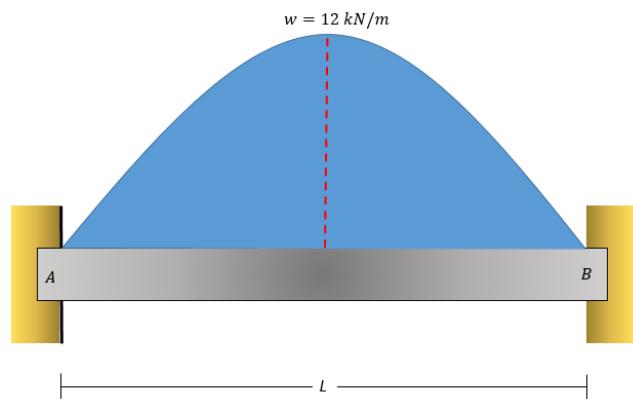


Figura 2.2.2.1: Carga distribuida de forma parabólica sobre una viga biempotrada

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

Con base en el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 2.2.2.2, se plantean las ecuaciones de equilibrio.

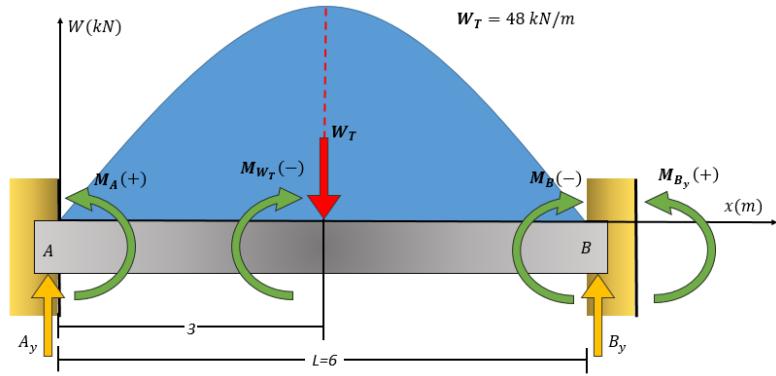


Figura 2.2.2.2: Diagrama de cuerpo libre.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

$$\uparrow (+) \sum F_y = 0: A_y - W_T + B_y = 0$$

$$A_y + B_y = W_T \quad [134]$$

$$\circlearrowleft (+) \sum M_A = 0: M_A - W_T (3) - M_B + B_y (6) = 0$$

$$M_A - M_B + 6B_y = 3W_T \quad [135]$$

Debido a que la carga W es distribuida continua y variable, y tiene la forma de una parábola con concavidad negativa y simétrica con respecto a una recta que pasa por el punto medio de la viga, su ecuación es de la forma:

$$W(x) = kx(6 - x) \quad [136]$$

Cuando $x = 3$ se tiene que $w = 3$. Luego:

$$12 = 3k(6 - 3)$$

$$k = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto, la función de carga es:

$$W(x) = \frac{4}{3}x(6-x) \quad [137]$$

Para determinar la carga total $W_T(x)$ se hace:

$$W_T = \int_0^6 \frac{4}{3}x(6-x)dx = 4x^2 - \frac{4x^3}{9} + C \Big|_0^6 = 48$$

$$W_T = 48 \text{ kN} \quad [138]$$

Al sustituir W_T en las ecuaciones [134] y [135], se tiene:

$$A_y + B_y = 48 \quad [139]$$

$$M_A - M_B + 6B_y = 144 \quad [140]$$

Ya que las ecuaciones [139] y [140] no son suficientes para determinar las reacciones A_y y B_y y los momentos M_A y M_B , es necesario establecer dos ecuaciones de compatibilidad.

Debido a que la carga es simétrica, las reacciones y momentos en los apoyos son iguales, es decir:

$$A_y = B_y = 24 \quad [141]$$

$$M_A = M_B \quad [142]$$

Para determinar la función del momento flector $M = M(x)$ por el método de secciones, se realiza un corte en un punto X a lo largo de la viga, como se muestra en la figura 2.2.2.3.

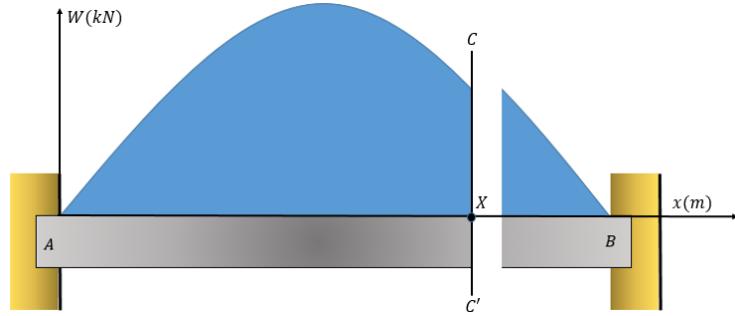


Figura 2.2.2.3: Corte en un punto X de la carga.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

Con base en el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 2.2.2.4, se plantea la suma de momentos con respecto al punto X.

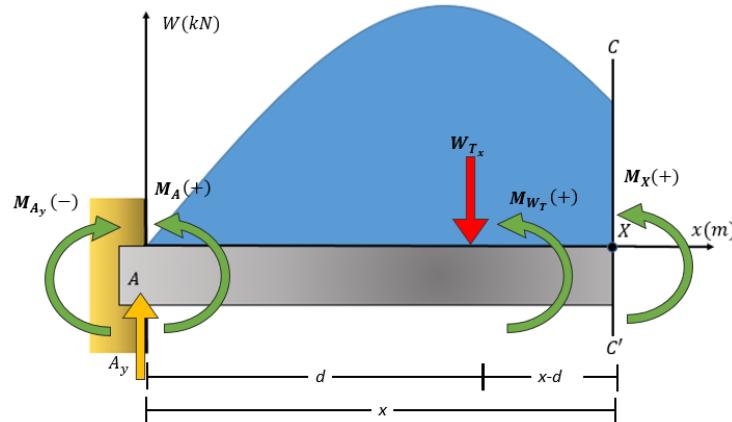


Figura 2.2.2.4: Diagrama de cuerpo libre con respecto al punto X.

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

$$\text{O}(+)\sum M_x = 0: M_A - A_y x + W_{T_x} (x - d) + M_x = 0$$

$$M_x = A_y x - M_A - W_{T_x} (x - d) \quad [143]$$

La carga total comprendida entre el extremo A y el corte X se reemplaza por una carga puntual W_{T_x} definida como:

$$W_{T_x} = \int_0^x w(t) dt$$

$$W_{T_x} = \int_0^x \frac{4}{3}t(6-t)dt$$

$$W_{T_x} = \frac{4x^2(9-x)}{9} \quad [144]$$

Dicha carga puntual (W_{T_x}) se ubica en el centro de gravedad de la carga total, por tanto, la abscisa del centro de gravedad con respecto al punto A está dada por:

$$d = \frac{\int_0^x t \times w(t) dt}{\int_0^x w(t) dt}$$

$$d = \frac{\int_0^x \frac{4}{3}t^2(6-t)dt}{\int_0^x \frac{4}{3}t(6-t)dt}$$

$$d = \frac{3x(x-8)}{4(x-9)} \quad [145]$$

En consecuencia, la distancia $x - d$ es:

$$x - d = x - \frac{3x(x-8)}{4(x-9)}$$

$$x - d = \frac{x(x-12)}{4(x-9)} \quad [146]$$

Al reemplazar las ecuaciones [144] y [146] en la ecuación [143], se llega a:

$$M_x = A_y x - M_A - \frac{4x^2(9-x)}{9} \left(\frac{x(x-12)}{4(x-9)} \right)$$

Debido a que el momento flector se analiza con respecto a cualquier punto X sobre la viga, entonces M_X está dado por:

$$M(x) = 24x - M_A + \frac{x^3(x-12)}{9} \quad [147]$$

Luego, las funciones de cortante $V = V(x)$, pendientes $\theta = \theta(x)$ y deflexión $Y = Y(x)$ están dadas por:

- Cortante:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{dM(x)}{dx} \\ V(x) &= 24 + \frac{4x^2(x-9)}{9} \end{aligned} \quad [148]$$

- Pendiente:

$$\begin{aligned} EI\theta(x) &= \int M(x) dx \\ EI\theta(x) &= \int 24x - M_A + \frac{x^3(x-12)}{9} dx \\ EI\theta(x) &= 12x^2 - M_A x + \frac{x^4(x-15)}{45} + C_1 \end{aligned} \quad [149]$$

- Flexión:

$$\begin{aligned} EIY(x) &= \int (EI\theta(x)) dx \\ EIY(x) &= \int 12x^2 - M_A x + \frac{x^4(x-15)}{45} + C_1 dx \\ EIY(x) &= 4x^3 - M_A \frac{x^2}{2} + \frac{x^5(x-18)}{270} + C_1 x + C_2 \end{aligned} \quad [150]$$

Para hallar las constantes C_1 y C_2 se consideran las siguientes condiciones de frontera:

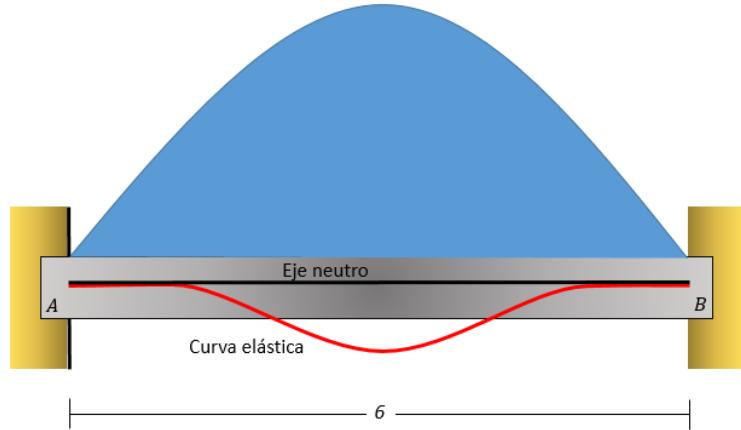


Figura 2.2.2.5: Eje neutro y tendencia de la curva elástica generada por la carga

Fuente: Adaptado de Beer et al. (2017).

Al considerar la tendencia de la curva elástica generada por la carga (figura 2.2.2.5), las condiciones de frontera están dadas por:

- Cuando $x = 0, \theta = 0$ [151]

Por tanto, al aplicar la condición [151] en la ecuación [149] se tiene:

$$C_1 = 0 \quad [152]$$

Luego la función de pendientes $\theta = \theta(x)$ queda así:

$$EI\theta(x) = 12x^2 - M_A x + \frac{x^4(x-15)}{45} \quad [153]$$

- Cuando $x = 0, Y = 0$ [154]

Por tanto, al considerar la condición anterior y sustituir la constante C_1 en la ecuación [150], se tiene:

$$C_2 = 0 \quad [155]$$

Luego la función de deflexión $Y = Y(x)$ queda definida como:

$$EIY(x) = 4x^3 - M_A \frac{x^2}{2} + \frac{x^5(x-18)}{270} \quad [156]$$

- Cuando $x = 6, Y = 0$ [157]

Considerando la anterior condición en la ecuación [156], se obtiene:

$$M_A = \frac{144}{5} \quad [158]$$

Luego:

$$M_B = \frac{144}{5} \quad [159]$$

Por tanto, las funciones de momento $M = M(x)$, cortante $V = V(x)$, pendientes $\theta = \theta(x)$ y deflexión $Y = Y(x)$ quedan definidas de la siguiente manera:

$$M(x) = \frac{x^3(x-12)}{9} + 24x - \frac{144}{5}$$

$$V(x) = 24 - \frac{4x^2(x-9)}{9}$$

$$EI\theta(x) = 12x^2 - \frac{144}{5}x + \frac{x^4(x-15)}{45}$$

$$EIY(x) = 4x^3 - \frac{72x^2}{5} + \frac{x^5(x-18)}{270}$$

Gráficas del diagrama flector $V(x)$ y de las funciones $M = M(x)$, $\theta = \theta(x)$, $Y = Y(x)$.

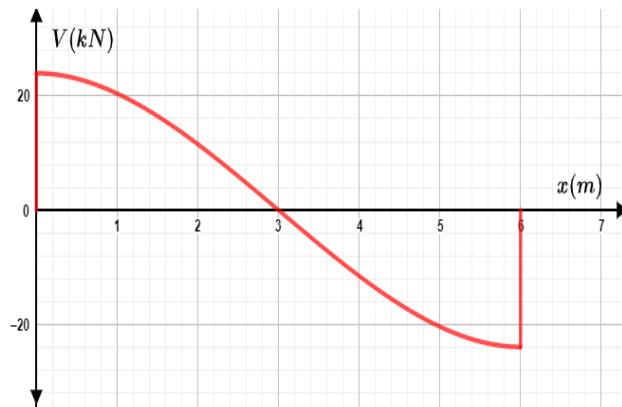


Figura 2.2.2.6: Gráfica de la fuerza cortante V .

Fuente: Elaboración propia.

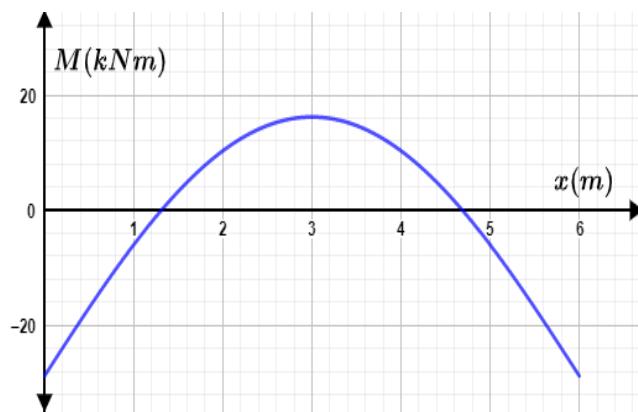


Figura 2.2.2.7: Gráfica de la función del momento flector $M = M(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

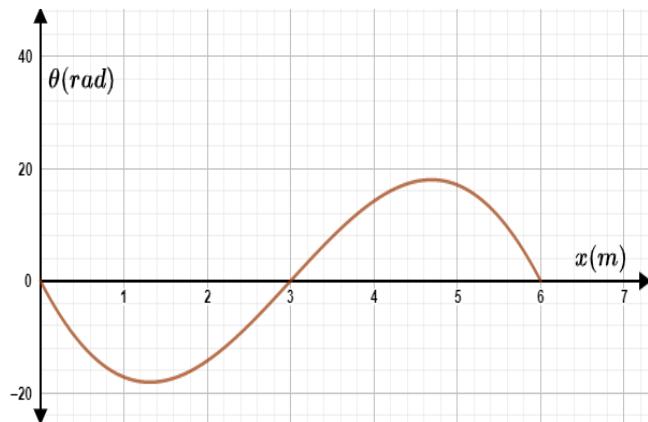


Figura 2.2.2.8: Gráfica de la función de pendientes $\theta(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

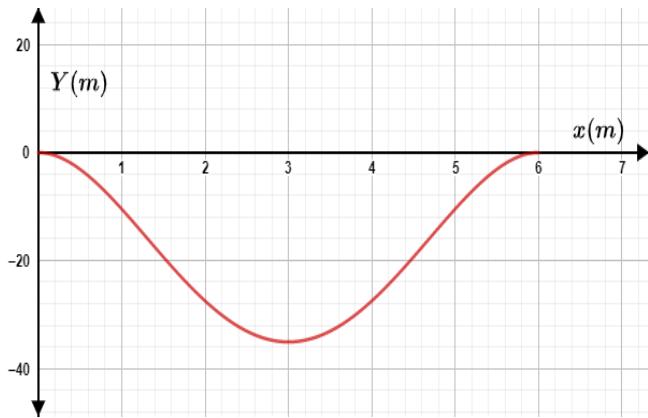


Figura 2.2.2.9: Gráfica de la función de deflexión $Y(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede evidenciar en la figura 2.2.2.10, el momento flector es máximo cuando la función de fuerza cortante es igual a cero, es decir:

$$M(x) \text{ es máximo cuando } V(x) = 0$$

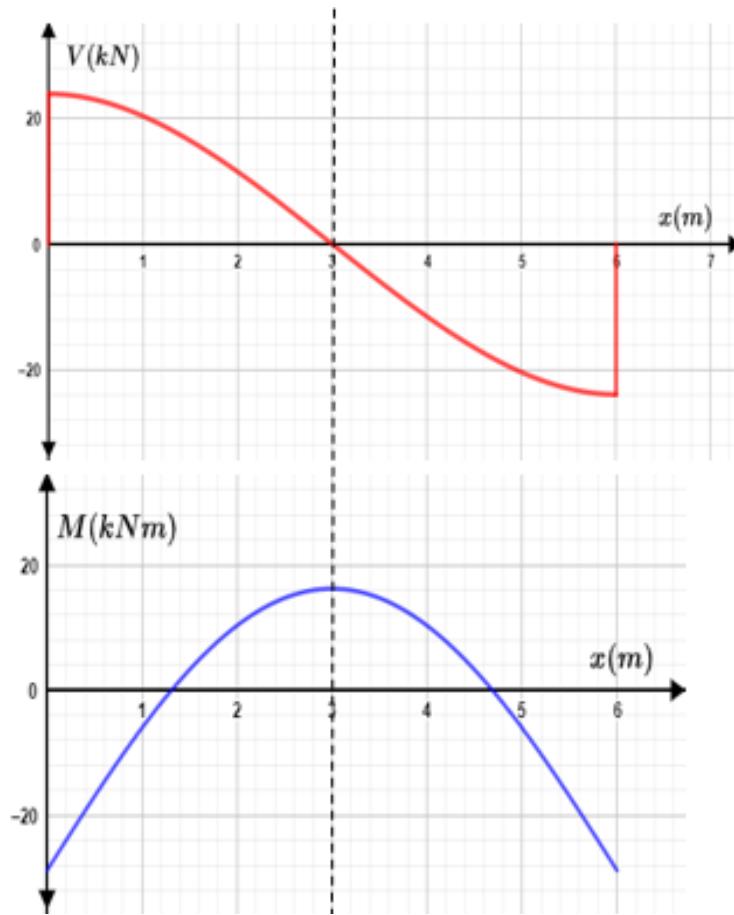


Figura 2.2.2.10: Relación entre las gráficas de la fuerza cortante $V(x)$ y del momento flector $M(x)$

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede evidenciar en la figura 2.2.2.11, la pendiente es extrema cuando la función del momento flector es igual a cero, es decir:

$$\theta(x) \text{ es extrema cuando } M(x) = 0$$

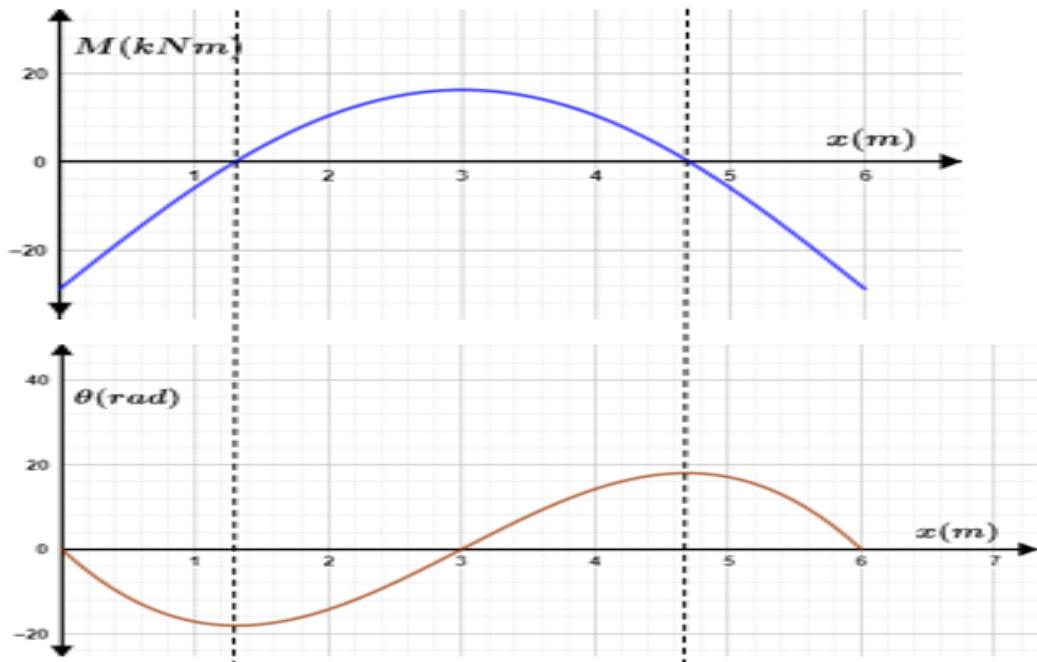


Figura 2.2.2.11: Relación entre las gráficas del momento flector $M(x)$ y de pendientes $\theta(x)$

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede evidenciar en la gráfica 2.2.2.12, la deflexión es extrema cuando la función de pendientes es igual a cero, es decir:

$$Y(x) \text{ es extrema cuando } \theta(x) = 0$$

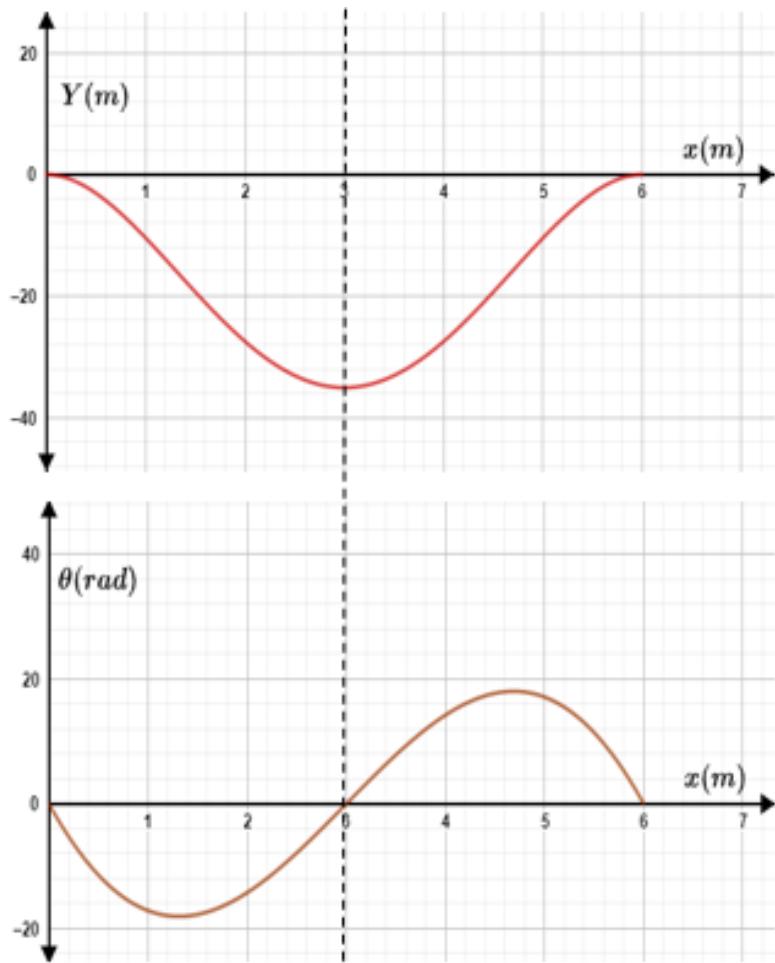


Figura 2.2.2.12: Relación entre las gráficas de la función de pendientes $\theta(x)$ y la función de deflexión $Y(x)$.

Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

El producto final de este trabajo es un recurso bibliográfico que contiene la construcción de cuatro modelos matemáticos muy utilizados en varias ingenierías y en donde básicamente se utiliza la integral para llegar dichos modelos, es decir, se presentan cuatro aplicaciones de la integral diferentes a las aplicaciones que usualmente se presentan en los libros de texto de cálculo integral. Culminado el trabajo, se puede concluir:

Con respecto a los objetivos:

- Se logra finalizar un documento que contiene la construcción de cuatro modelos matemáticos a partir del uso de integrales.
- Se comprenden y se aplican los métodos de doble integración y de secciones.

Sobre los aprendizajes:

El desarrollo de este trabajo se constituyó en un proceso formativo muy enriquecedor ya que permitió:

- Conocer algunas aplicaciones de la integral que no se abordan en los libros de texto de cálculo integral.
- Conocer que una de las bases para el análisis de vigas es una ecuación diferencial desarrollada por Euler y Bernoulli.
- Realizar ejercicios de modelación matemática.

Sobre los aportes:

El principal aporte para la comunidad de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas está constituido por las cuatro aplicaciones que con seguridad no se abordan en libros de texto de cálculo y que a la vez son ejemplos de modelación matemática.

Bibliografía

- Beer, F., Johnston, R. & Mazurek, D. (2013). *Mecánica vectorial para ingenieros* (Undécima ed.). (S. Villalobos & J. Murrieta, Trad.) McGRAW-HILL.
- Beer, F., Johnston, R., DeWolf. J., & Mazurek, D. (2017). *Mecánica de materiales* (Sexta ed.). (S. Villalobos & J. Murrieta, Trad.) McGRAW-HILL.
- Hibbeler. R.C. (2012). *Análisis estructural* (Octava ed.). (J. Murrieta, Trad.) PEARSON EDUCACIÓN.
- Hibbeler, R. (2016). *Ingeniería mecánica - Estática*. Pearson editorial.
- Kassimali, A. (2015). *Análisis estructural* (Quinta ed.). (A. Andrade, Trad.) Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.
- Lefevre, R. & Villa, D. (2015) *Resistencia de materiales*. Rosario, Argentina: Universidad Nacional de Rosario.
- Pérez, A. (2012). *Prontuario y Herramientas Informáticas para Cálculo de Estructuras*. Inter Técnica Ediciones.
- Philpot, T. (2013). *Mechanics of materials: An integrated learning system*.
- Pytel, A. Kiusalaas. (2012). *Ingeniería mecánica - Estática*. Cengage Learning.