

UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DISTRIBUCIÓN A NIVEL
ESCOLAR

KAREN YESENIA BARRERA MANCO
CRISTIAN CAMILO JIMÉNEZ GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.

2019

UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DISTRIBUCIÓN A NIVEL
ESCOLAR

Trabajo de grado de pregrado como requisito para obtener el título

Licenciado en Matemáticas

KAREN YESENIA BARRERA MANCO

Código: 2014140013 C.C 1024583612

CRISTIAN CAMILO JIMÉNEZ GONZÁLEZ

Código: 2014140054 C.C 1069100379

Director:

FELIPE JORGE FERNANDEZ HERNANDEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2019

AGRADECIMIENTOS

A mis padres Flor y Pastor, quienes siempre me han brindado su apoyo para continuar en mi formación profesional y personal.

A mi sobrina Sofía, que siempre me llena de fortaleza para ser cada día una mejor persona y mostrarle que se pueden cumplir sus sueños a partir del esfuerzo, amor y dedicación.

A los directivos, docentes y estudiantes del grado quinto del Instituto San Pablo Apóstol que nos brindaron su apoyo para la realización del proyecto.

Al profesor Felipe Fernández por su colaboración, orientación y apoyo en la realización del trabajo de grado.

A mi compañero Cristian que me ha brindado su amistad, cariño y ayuda a lo largo de mi carrera.

- Karen Barrera


A mi padre Julio Enrique, mi primer maestro; y a mi madre María del Rosario, mi seguidora incondicional desde siempre.

A los profesores del Departamento de Matemáticas, en especial a Felipe Fernández por brindarnos siempre toda su experiencia humana y profesional.

A la comunidad del Instituto San Pablo Apóstol, quienes abrieron sus puertas para el desarrollo de este trabajo.


A mi compañera Karen, por toda su paciencia, compañía y apoyo durante todo este trabajo y a lo largo de la carrera.

- Cristian Jiménez

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>— Educación de Calidad —</small>	FORMATO	
RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE		
Código: FOR020GIB	Versión: 02	
Fecha de Aprobación: 18-07-2019	Página 4 de 112	


Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Una propuesta de enseñanza del concepto de distribución a nivel escolar
Autor(es)	Barrera Manco, Karen Yesenia; Jiménez González, Cristian Camilo
Director	Fernández Hernández, Felipe Jorge
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 109 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional UPN
Palabras Claves	NOCIÓN DE DISTRIBUCIÓN; PROPUESTA DE ENSEÑANZA; CARACTERÍSTICAS DE LA DISTRIBUCIÓN

1. Descripción
Este trabajo presenta el diseño, implementación y análisis de una propuesta de enseñanza acerca

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Formadora de Profesores</i>	FORMATO	
RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE		
Código: FOR020GIB	Versión: 02	
Fecha de Aprobación: 18-07-2019	Página 5 de 112	

del razonamiento sobre la noción de distribución de frecuencias. Tal propuesta fue planificada con base en la caracterización presentada por Bakker y Gravemeijer (2004), quienes la definen como una entidad conceptual compuesta de cuatro ideas principales: centralidad, dispersión, densidad y forma. Además de la caracterización de la distribución, se reportan algunos antecedentes, relacionados con trabajos de investigación acerca de errores, dificultades y obstáculos de enseñanza y aprendizaje. Tales antecedentes se convierten en insumos para materializar el diseño de una secuencia de actividades, que se implementaron en el aula con estudiantes de grado quinto. Asimismo, se reportan los resultados de cada una de las tres actividades aplicadas. Y por último, se hace un balance que pretende evaluar la efectividad del trabajo con base en los resultados.

2. Fuentes
<p>Arteaga, P., Batanero, C. & Contreras, J. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos. Revista Iberoamericana de educación matemática, 18, 93-104.</p> <p>Arteaga, P. & Batanero, C. (2010). Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. In Investigación en educación matemática XIV (pp. 211-222). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.</p> <p>Batanero, C. (2002). Los retos de la Cultura Estadística. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires</p> <p>Batanero, C.; Godino, J.; Vallecillos, A.; Green, D.; Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 25(4), 527-547.</p> <p>Bakker, A., & Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. In D. Ben- Zvi & J. Garfield (Eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking (pp.</p>

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Formadora de Profesores</i>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 02	
Fecha de Aprobación: 18-07-2019	Página 6 de 112	

147-168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ben-Zvi, D & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. In The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking (pp. 3-15).

Ben-Zvi, D & Sharett-Amir, Y. (2005). How do primary school students begin to reason about distributions. In Reasoning about distribution: A collection of current research studies. Proceedings of the fourth international research forum on statistical reasoning, thinking, and literacy (SRTL-4), University of Auckland, New Zealand (pp. 2-7).

Chance, B. L., delMas, R., & Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking (pp. 295–323). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cordero, J., Córdoba, A., & Fernández, S. (2002). Estadística Descriptiva. ESIC Editorial. Madrid, España.


Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., & Gea, M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. Bolema-Boletim de Educação Matemática, 30(55), 713-737.

Doane, P., & Seward, E. (2011). Measuring skewness: a forgotten statistic?. Journal of statistics education, 19(2).

Estepa, A., & Pino, J. D. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 83, 43-63.

Guzmán, M., Pliego, J. (1985). Curso básico de Estadística Económica. Madrid: Editorial AC.

Fernandez, F., Andrade, L & Mendez, M. (2018). Hacia un fortalecimiento de la idea de distribución estadística en la formación de estudiantes para profesores de matemáticas. Proyecto de investigación en educación estadística. Universidad pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Formadora de Profesores</i>	FORMATO	
RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE		
Código: FOR020GIB	Versión: 02	
Fecha de Aprobación: 18-07-2019	Página 7 de 112	

Fernández, F., Soler, N. & Sarmiento, B. (2007). Alfabetización estadística y competencia estadística. En Rojas, Pedro Javier (Ed.), Memorias del 8° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 23-25).

Fischbein, E., Gazit, A. (1984). Does the Teaching of Probability Improve Probabilistic Intuitions? Educational Studies in Mathematics, 15, pp. 1-24.

Friel, S., Curcio, F. & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. Journal for Research in mathematics Education, 124-158.

Guerrero, Y. & Torres, Y. (2017). Tipificación de errores y dificultades en el aprendizaje de tablas de frecuencia. Bogotá, Colombia. Universidad Pedagógica Nacional.

Gómez, E. (2016). Estadística y probabilidad en el currículo colombiano para educación básica y media. XXVI Simposio internacional de Estadística 2016.

Ho, D., & Yu, C. (2015). Descriptive statistics for modern test score distributions: Skewness, kurtosis, discreteness, and ceiling effects. Educational and Psychological Measurement.


Jones, G., Langrall, C., y Mooney, E. (2007). Research in probability: responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (vol. 2, pp. 909-955). Greenwich, CT: Information Age Publishing y NCTM.

Kahneman, D., Slovic, D., Tversky, A. (1982). Judgement under uncertainty: Heuristics and Biases. Cambridge University Press.

Konold, C., & Higgins, T. (2003). Reasoning about data. A research companion to principles and standards for school mathematics.

Li, Y. & Shen, S. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. Teaching Statistics, 14(1): 2-8.

Mokros, J., & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. Journal for Research in Mathematics Education, 20-39.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Formación de Profesores</i>	FORMATO	
RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE		
Código: FOR020GIB	Versión: 02	
Fecha de Aprobación: 18-07-2019	Página 8 de 112	

Makar, K. and D. Canada (2005), Pre-service teachers' conceptions of variation. In H. Chick and J. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Melbourne, Melbourne, 273–280.

Méndez .M & Valero. N. (2014). Experimento de enseñanza para la superación de algunas dificultades y errores referidos a la variable estadística y sus escalas de medición. Maestría en docencia de las Matemáticas. Universidad pedagógica Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia.

Myers, J & Campbell, B. (1976). Distribution and dispersal in populations capable of resource depletion. *Oecologia*, 24(1), 7-20.

Moore, D. & Cobb, G. (1997). “Mathematics, Statistics, and Teaching,” *American Mathematical Monthly*, 104, 801–823.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers* (Vol. 17). Springer Science & Business Media.


Perdomo, E. (2016). Medidas de tendencia central y su uso en contexto. Estudio de caso: IE. Las Brisas - El Patía (Cauca). Maestría thesis, Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales.

Piaget, J. (1973). *To understand is to invent: The future of education*. New York: Grossman.

Pfannkuch, M., Budgett, S., Parsonage, R., & Horring, J. (2004). Comparison of data plots: Building a pedagogical framework. Paper presented at the Tenth International Congress on Mathematics Education (ICME-10), Copenhagen, Denmark, 4-11 July.

Pfannkuch, M., & Reading, C. (2006). Reasoning about distribution: A complex process. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 4–9.

Pearson, K. (1985). Note on regression and inheritance in the case of two parents. *Proc. Royal Soc. (London)* 58, 240–242.


 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formación de Profesores</small>	FORMATO	
RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE		
Código: FOR020GIB	Versión: 02	
Fecha de Aprobación: 18-07-2019	Página 9 de 112	

- Reading, C., & Reid, J. (2006). An emerging hierarchy of reasoning about distribution: From a variation perspective. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 46-68.
- Sandoval, C. (2006). Una propuesta para introducir el concepto de distribución estadística en la escuela. Universidad pedagógica nacional. Bogotá, Colombia.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España. Horsori.
- Wild, C. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal*, 5(2) 10-26.
- Zawojewski, J & Shaughnessy, J. (2000). Data and chance. Results from the seventh mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress, 235-268.

3. Contenidos

El trabajo está organizado en cinco capítulos. En el primero se describe el marco conceptual que considera por una parte la conceptualización de la distribución, con la que se pretende responder ¿qué se entiende por distribución? y ¿cuáles son sus conceptos subyacentes? y por otra parte, se explicitan referentes didácticos que dan cuenta de antecedentes didácticos considerados acerca de la enseñanza y aprendizaje del tema que sustenta el diseño e implementación de la secuencia didáctica.

En el segundo capítulo se hace la presentación de la propuesta de enseñanza llevada al aula, en la que se describen los propósitos de cada una de las tres actividades implementadas. En el tercer capítulo, se presentan los resultados de la implementación de las actividades propuestas, y en el cuarto capítulo se elabora un balance del trabajo; y por último, en el quinto capítulo se reportan las

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formación de Profesores</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 02	
Fecha de Aprobación: 18-07-2019	Página 10 de 112	


conclusiones generales.

4. Metodología

El desarrollo de este trabajo se consolidó en tres fases: en la primera fase se caracteriza la idea de distribución y algunos de los antecedentes para su enseñanza, teniendo en cuenta los trabajos y experiencias previas reportadas en las investigaciones mencionadas, por una parte, y por otra, las políticas educativas nacionales. En la segunda fase se abordó el diseño y aplicación de una secuencia de actividades dirigidas a promover competencias para razonar acerca de la distribución; dicha secuencia fue llevada a cabo con 36 estudiantes de grado quinto del Instituto San Pablo Apóstol de la ciudad de Bogotá. En la tercera fase se consideró el análisis de resultados teniendo en cuenta tanto los propósitos de la actividad como los referentes de investigaciones previas y, además, se exponen algunas posibles rutas de abordaje para futuras experiencias en el aula.

5. Conclusiones

En primer lugar, se aprecia la importancia del trabajo inmerso en la distribución como un concepto que se compone de ideas fundamentales como centralidad, dispersión, forma y concentración de los datos en consonancia con la propuesta sugerida por Bakker y Gravemeijer, (2004). Asimismo, se reconoce que tal caracterización de la distribución aporta al desarrollo de competencias útiles al

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Formación de Profesores</i>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 02	
Fecha de Aprobación: 18-07-2019	Página 11 de 112	

momento de abordar situaciones problema.


En segundo lugar, se reconocen las limitaciones que afectaron el alcance de la propuesta. Una de ellas y la más importante fue omitir la socialización e institucionalización del conocimiento, esto no fue posible, ya que desde el colegio solo se obtuvo el permiso para realizar tres clases con los niños de grado quinto y este tiempo fue muy corto como para incluir este tipo de actividades en el aula.

En tercer lugar, se vieron las bondades de abordar el razonamiento acerca de la distribución al tener en cuenta posibles errores y dificultades que se pueden vincular a los sistemas de representación de datos, ya que son aquellos y las traducciones entre ellos los que permiten apreciar características relevantes de una distribución.

En cuarto lugar, se recomienda que el trabajo con la distribución sea continuo a lo largo de la educación escolar, que permita la transición desde una concepción arcaica, hasta una concepción elaborada de la distribución.

Por último, se considera necesario asociar este tipo de propuestas con los componentes de la Cultura Estadística (Batanero, 2002), ya que si bien se ha consolidado una propuesta que permite el acercamiento al razonamiento acerca de la distribución a través de la resolución de problemas, no se han considerado en el marco del desarrollo de la cultura estadística.

Elaborado por:	Barrera Manco, Karen Yesenia; Jiménez González, Cristian Camilo
-----------------------	---

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>República de Colombia</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 02	
Fecha de Aprobación: 18-07-2019	Página 12 de 112	

Revisado por:	Fernández Hernández, Felipe Jorge
----------------------	-----------------------------------

Fecha de elaboración del Resumen:	17	07	2019
--	----	----	------

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	3
INTRODUCCIÓN	18
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	19
JUSTIFICACIÓN	20
OBJETIVOS	22
Objetivos específicos	22
1. MARCO CONCEPTUAL	23
1.1. Conceptualización de la distribución	23
1.1.1. Centro (Medidas de Tendencia Central)	25
1.1.2. Dispersión	27
1.1.3. Densidad	27
1.1.4. Forma	29
1.2. Variable estadística	31
1.3. Referentes didácticos.....	31
1.3.1. Antecedentes de la Enseñanza de la Noción de Distribución	32
1.3.2. Jerarquía del razonamiento de la distribución.	34
1.3.3. Errores y dificultades en el aprendizaje de los conceptos subyacentes a la noción de distribución	35
1.3.4. Relación entre los Estandares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) con la enseñanza de la noción de distribución.....	38

2.	PROPUESTA DE ENSEÑANZA	41
2.1.	Población o grupo de estudio	41
2.2.	Propósitos de la propuesta.....	41
2.2.1.	Propósitos de las actividades en la investigación	41
2.2.2.	Competencias para el estudiante	42
2.3.	Actividades	42
2.3.1.	Primera actividad	42
2.3.2.	Segunda actividad.	45
2.3.3.	Tercera Actividad.....	48
3.	RESULTADOS DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA.....	51
3.1.	Primera Actividad	53
3.2.	Segunda Actividad	66
3.3.	Tercera Actividad	74
4.	BALANCE DEL TRABAJO	83
4.1.	Balance de las actividades desde los propósitos	83
4.1.1.	Propósitos de investigación.....	83
4.1.2.	Competencias para los estudiantes.....	85
4.2.	Pertinencia y utilidad de los antecedentes a la propuesta.....	85
4.3.	Alcances y limitaciones de la investigación.....	86
4.3.1.	Alcances de la investigación	87
4.3.2.	Limitaciones en la investigación.....	87
4.4.	Cumplimiento de los objetivos específicos de investigación	88

5.	CONCLUSIONES	91
6.	REFERENCIAS.....	94
7.	ANEXOS	99
7.1.	Anexo A. Primera actividad	99
7.2.	Anexo B. Posibles errores que pueden cometer los estudiantes en la primera actividad 100	
7.3.	Anexo C. Segunda actividad	102
7.4.	Anexo D. Posibles errores que pueden cometer los estudiantes en la segunda actividad 106	
7.5.	Anexo E. Tercera actividad.....	108
7.6.	Anexo F. Posibles errores que pueden cometer los estudiantes en la tercera actividad	111

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.	Representación de la definición de Distribución (Bakker & Gravemeijer, 2004).....	24
Tabla 2.	Frecuencias de una Distribución.....	29
Tabla 3.	(Doane y Seward, 2011) Ilustración de diferentes formas que puede tomar la distribución de un conjunto de datos	31
Tabla 4.	(Reading y Reid, 2006) Jerarquía del razonamiento de la distribución.....	35
Tabla 5.	Errores, dificultades y obstáculos de la distribución y sus conceptos subyacentes.....	37
Tabla 6.	Relación entre las tareas propuestas por Reading y Reid (2006) con los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006)	40

ÍNDICE DE IMÁGENES

Imagen 1. Representación de la definición de distribución como el lente que permite a una persona percibir la variación de los datos (Wild, 2006)	23
Imagen 2 Ejemplos de respuestas de los estudiantes a la primera pregunta	54
Imagen 3. Respuestas de los estudiantes a la segunda pregunta	57
Imagen 4. Ejemplos de respuestas de los estudiantes a la tercera pregunta	59
Imagen 5. Ejemplos de respuestas de los estudiantes de la cuarta pregunta	62
Imagen 6. Ejemplos de respuestas de los estudiantes a la sexta pregunta	65
Imagen 7. Ejemplo de respuesta uno de un estudiante al problema propuesto para la segunda actividad	68
Imagen 8. Ejemplo de respuesta dos de un estudiante al problema propuesto para la segunda actividad	69
Imagen 9. Ejemplo de respuesta dos de un estudiante al problema propuesto para la segunda actividad	70
Imagen 10. Respuesta de un estudiante que halla la mediana a datos cualitativos	71
Imagen 11. Respuesta de un estudiante que no puede relacionar el centro y la densidad de las distribuciones	72
Imagen 12. Ejemplo de respuesta correcta para la solución de la situación problema de la tercera actividad	78
Imagen 13. Ejemplo de respuesta incorrecta al problema propuesto en la tercera actividad	79
Imagen 14. Ejemplos de respuestas que concuerdan con los niveles de razonamiento de la distribución	82

ÍNDICE DE GRÁFICAS

Gráfica 1. Errores cometidos por los estudiantes al realizar una representación de la distribución de los datos.....	64
Gráfica 2. Justificaciones dadas por los estudiantes para responder la pregunta principal de la segunda actividad.....	73
Gráfica 3. Tipos de respuestas de los estudiantes a la situación propuesta en la tercera actividad	77

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo describe una propuesta de enseñanza para la noción de distribución de frecuencias para grado quinto, llevada a cabo con los estudiantes del Instituto San Pablo Apóstol sede Jerusalén, en la ciudad de Bogotá. Esta propuesta se realizó en el marco de un trabajo de grado desarrollado en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

En este documento es posible encontrar referentes teóricos que permiten caracterizar a la distribución a través de ideas previas como centralidad, dispersión, densidad y forma. También es posible encontrar referentes teóricos acerca del trabajo previo realizado con estudiantes por investigadores en Educación Estadística, en los cuales se mencionan hallazgos importantes que sustentan la elaboración de este.

A los referentes teóricos sigue la presentación de la planificación de tres actividades, que tienen como propósito permitir que los estudiantes desarrollen competencias en torno al razonamiento acerca de la distribución. Tales actividades buscan que los estudiantes analicen características de una distribución, comparen distribuciones a través de esas características y por último, construyan distribuciones que tengan ciertas características dadas.

Luego de la descripción de la propuesta, se presentan los resultados de su aplicación. Tales resultados se exponen con el ánimo de identificar los errores, dificultades y obstáculos de aprendizaje que los estudiantes experimentaron a lo largo del desarrollo de las actividades. Asimismo, se pretende caracterizar la concepción de la distribución teniendo en cuenta las competencias que han logrado evidenciar los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

Por último, se presenta un balance del trabajo investigativo, mencionando los aspectos más relevantes que han sido identificados luego de la aplicación de las actividades y la reflexión acerca de la experiencia en el aula. Tal balance, intenta describir el alcance de la propuesta y mostrar las consideraciones que se pueden tener en cuenta para futuros trabajos de investigación y en el aula.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las directrices educativas colombianas han contemplado como propósito de aprendizaje para grado quinto desarrollar competencias que permitan describir y comparar las distribuciones de distintos conjuntos de datos (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Las mismas directrices han propuesto algunas competencias previas que debe adquirir el estudiante para poder comparar distribuciones como lo son reconocer y diferenciar algunas medidas de tendencia central (MTC), por ejemplo, la media aritmética y la moda; también es necesario el conocer y representar un conjunto de datos en diversos registros de representación como las tablas de frecuencia y los gráficos de barras o circulares, e interpretar la información que presentan. Sin embargo, el estudio de la distribución como un ente conceptual no se limita a la idea de centralidad que puede brindar las MTC, también existen otros aspectos que permiten caracterizar y comparar las distribuciones como las expuestas por Bakker & Gravemeijer (2004) quienes reconocen que la distribución es una entidad conceptual que cuenta con un centro, dispersión, densidad y forma.

Al realizar una lectura de las competencias que el estudiante debería adquirir a lo largo de su formación escolar (MEN, 2006), es posible evidenciar que las ideas de dispersión, densidad y forma de una distribución se trabajan en grados posteriores, y que se realiza a través del estudio de otros conceptos como las medidas de dispersión o sesgo, con enfoque en la resolución de problemas asociados a contextos, sin que los estándares mencionen a la distribución como un ente conceptual que unifica las ideas antes mencionadas. Además, en los mismos estándares posteriormente se recomienda a los docentes, trabajar con sus estudiantes modelos teóricos de distribución, por ejemplo, la normal; es decir, que se pretende estudiar modelos de distribución de probabilidad sin haber madurado una concepción de distribución.

Por tanto, para proponer una manera de abordar la problemática ante mencionada, es necesario preguntarse: ¿Cómo contribuye la enseñanza de la distribución estadística a los estudiantes de grado quinto, el considerar además de ideas de centralidad, nociones intuitivas de dispersión y forma al desarrollo de su pensamiento estadístico?

JUSTIFICACIÓN

El desarrollo del pensamiento estadístico tiene una importancia remarcable en el campo de la educación matemática (Jones, Langrall y Mooney, 2007). Fischbein y Gazit (1984) resalta que uno de los principales motivos por los que la educación matemática necesite acoplar elementos del pensamiento aleatorio, es porque el mundo actual enfrenta a los ciudadanos con situaciones que no se modelan fácilmente con las matemáticas deterministas. El mismo Fischbein, resalta la importancia de formar ciudadanos que sean capaces de desarrollar habilidades como la comprensión, interpretación, y predicción de fenómenos no deterministas, que los capacite para enfrentar las intuiciones y concepciones que puede poner a prueba en un problema con un conocimiento y dominio articulado de los fenómenos aleatorios ya que *"la incertidumbre y la variabilidad están estrechamente relacionadas: porque hay variabilidad, vivimos en la incertidumbre y porque no todo está determinado o cierto, existe variabilidad"* (Bakker & Gravemeijer, 2004, p. 14).

En el mismo sentido, Wild (2006), a través de su estudio acerca de la variabilidad, sugiere que es recomendable que los estudiantes reconozcan que una de los principales elementos que distinguen al pensamiento estadístico de los otros tipos de pensamiento, es la omnipresencia de la variabilidad de los datos en cualquier tipo de situación problema, por ende ellos proponen que uno de los primeros acercamientos que debería tener un estudiante con el trabajo estadístico es el estudio de la distribución asociada a un conjunto de datos, ya que al observar la distribución como el conjunto formado por distintos valores de una variable estadística ellos comienzan a dar sus primeros pasos para conceptualizar la variabilidad a través de los datos (Bakker & Gravemeijer, 2004). Además, el concepto de la distribución es uno de los pilares del trabajo en estadística, por lo que se hace necesario que el estudiante adquiera distintos estadios de aprendizaje que le permitan interiorizar y usar el concepto con el fin de entender su entorno, proponer acerca de este y además resolver problemas con los datos.

Chance, DelMas, & Garfield, (2004) también encontraron que la comprensión de la distribución crea bases sólidas en el aprendizaje de conceptos en estadística, ya que el conocimiento de la

distribución y la comprensión de los histogramas son requisitos previos, también necesarios para aprender y comprender acerca de las distribuciones de muestreo.

OBJETIVOS

El objetivo general de este trabajo es promover el desarrollo de competencias estadísticas en torno a la noción de distribución en estudiantes de educación básica de grado quinto, como lo son describir de manera cualitativa y cuantitativa la centralidad, forma y dispersión de una distribución.

Objetivos específicos

Se consideran los siguientes:

- Consolidar un marco conceptual que permita caracterizar teóricamente a la distribución, y que permita consolidar una propuesta de enseñanza en torno a ésta.
- Proponer una secuencia de tareas en torno al trabajo con la distribución que esté orientada a los estudiantes de grado quinto.
- Describir y valorar el alcance de la secuencia de la investigación previa y las tareas propuestas a los estudiantes, teniendo en cuenta sus aprendizajes logrados.

Estos propósitos pueden concretarse a través de la elaboración de: un marco conceptual que permita presupuestar posibles errores, dificultades y obstáculos de enseñanza/aprendizaje respecto a la noción de distribución; un estudio del contexto que permita identificar posibles problemáticas que puedan estudiarse a través de los conocimientos estadísticos.

1. MARCO CONCEPTUAL

En este capítulo se describe en primer lugar, características que delinean la idea de distribución acopiada de literatura disponible, y luego se presentan algunos referentes didácticos que se tuvieron en cuenta para la planificación, ejecución y posterior balance de la propuesta de actividades que se presentan para implementar en el aula.

1.1. Conceptualización de la distribución

En este apartado se pretende responder a cuestionamientos como: ¿qué se entiende por distribución? y ¿cuáles son los conceptos subyacentes a la idea de distribución?

Desde un punto de vista general se adhiere a la idea general expresada por Wild (2006) de considerar la distribución como el lente que permite a una persona percibir la variación de los datos en los sistemas de representación y en el mundo real.

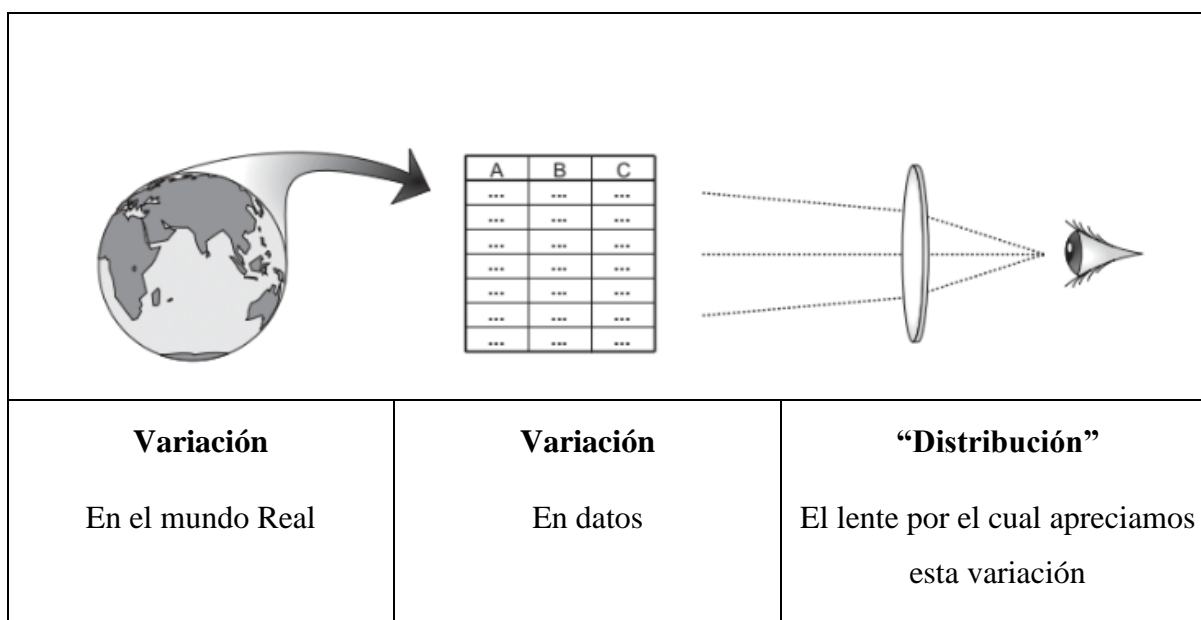


Imagen 1. Representación de la definición de distribución como el lente que permite a una persona percibir la variación de los datos (Wild, 2006)

En particular, este trabajo está en consonancia con Pfannkuch & Reading (2006), cuando señalan que las distribuciones son estructuras de organización conceptual que permiten el

análisis de un conjunto de datos, donde su objetivo es capturar, mostrar y manipular tal conjunto a partir del análisis de su centro, dispersión, densidad, sesgo y valores atípicos.

De manera más concreta, en Bakker & Gravemeijer (2004) se encuentra una propuesta que pretende describir la idea de distribución, precisándola como una entidad conceptual que comprende cuatro ideas generales caracterizadoras de una distribución y diferenciándola de la idea de trabajar con datos como valores individuales, como se muestra en la siguiente tabla:

Distribución (Entidad Conceptual)			
Centro promedio, mediana, moda, ...	Dispersión rango, desviación estándar, rango intercuartil, ...	Densidad frecuencias absolutas, relativa, cuartiles, ...	Forma Asimetría, Simetría, curtosis y Posición de la mayoría de los datos, ...
Datos (valores individuales)			

Tabla 1. Representación de la definición de Distribución (Bakker & Gravemeijer, 2004).

Esta estructura se puede leer de forma ascendente y descendente; Bakker & Gravemeijer (2004) arguyen que estudiar la estructura ascendente significa analizar un conjunto de datos como valores individuales, donde se estudian primero sus medidas de tendencia central, como media y mediana, luego las medidas de dispersión como rango o desviación estándar, luego se analizan la densidad de los datos a partir de la creación de tablas de frecuencia, y por último, solo identifican la simetría de la distribución normal. Sin embargo, trabajar la distribución de esta única manera puede crear dificultades en los estudiantes como no reconocer a las medidas de tendencia central como un representante de la distribución.

Por otro lado, Zawojewski & Shaughnessy, (2000) proponen estudiar la estructura de la distribución de manera descendente, pues crea en los estudiantes la conceptualización de la distribución como una entidad organizadora que se caracteriza por analizar un conjunto de datos a partir de su centro, dispersión, densidad y forma, además de identificar tales aspectos como características de la distribución.

En este trabajo se procura el diseño de actividades en las que el trabajo con la distribución esté asociado con las lecturas ascendente y descendente del gráfico anterior, con el ánimo de que el estudiante se relacione con ambos puntos de vista de la conceptualización de la distribución.

Para describir la noción de distribución se especificaron cada una de los conceptos estadísticos que están relacionados con ella, como centro, dispersión, densidad y asimetría.

1.1.1. Centro (Medidas de Tendencia Central)

Las medidas de tendencia central se usan para describir y resumir por medio de un dato la distribución de un conjunto de datos además que se pueden hallar para cualquier representación que se use para analizar y representar los datos.

En este apartado se describen algunas medidas de tendencia central y sus características importantes que se deben tener en cuenta para analizar una distribución.

La Media Aritmética es el valor promedio de un conjunto de datos, que se puede hallar cuando estos son cuantitativos.

La media aritmética se simboliza con \bar{x} y se puede hallar de dos maneras, cuando los datos están sin agrupar, pueden estar escritos en lista, la segunda cuando los datos están agrupados, cuando están organizados y registrados en una tabla de frecuencias o un gráfico.

Media de datos no agrupados:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Donde n es el número de datos que hay en la distribución y x_i es cada uno de los datos de la distribución.

Media aritmética de datos resumidos en una tabla de frecuencia:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{n} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{n}$$

Donde n es el número de datos que hay en la distribución, x_i es cada uno de los valores de la variable y f_i es la cantidad de datos que hay de cada uno de los valores de la variable (frecuencia).

Cuando se analiza la distribución de un conjunto de datos dispersos que contienen valores extremos alejados de la mayoría de sus datos, implica que la media aritmética no describa apropiadamente a este conjunto de datos (Perdomo, 2016), por tanto es necesario abordar el estudio de la centralidad con otras medidas.

La moda es el valor de la variable estadística que tiene la mayor frecuencia absoluta. Si una distribución tiene solo un valor como Moda, se llama unimodal; si existen dos, es bimodal; y si hay más de dos, se dice que es multimodal. Una de sus ventajas es que se puede hallar para cualquier conjunto de datos, pero una dificultad es que no tiene en cuenta todos los valores de una distribución (Perdomo, 2016).

La Mediana es el dato que ocupa la posición central (del medio) en un conjunto de datos ordenados, su valor no se ve afectado por valores extremos, por ende es utilizada en distribuciones asimétricas, además que en algunos casos esta medida no es un dato de la distribución y solo se puede calcular a variables estadísticas cuantitativas (Perdomo, 2016).

Para el cálculo de la mediana se requiere que los datos se encuentren ordenados de menor a mayor o viceversa. La mediana para datos no agrupados está determinada por:

Si n , la cantidad de datos, es impar	$\hat{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$
---	-------------------------------

Si n es par	$\hat{x} = \frac{\frac{x_n}{2} + \frac{x_{n+1}}{2}}{2}$
---------------	---

1.1.2. Dispersión

(Estepa & Pino, 2013) consideran la dispersión como una medida donde se observa la desviación de los datos respecto a una medida de tendencia central. Aunque la medida de la dispersión sea un elemento importante en el análisis de datos, es necesario comprender que en estadística es más que una medida ya que: *“A la mayor o menor separación de los valores respecto a otro, que se pretende que sea su dato central, se le llama dispersión o variabilidad”*. (Guzmán & Pliego, 1985, p. 57). Pues se entiende la dispersión como la separación de los valores de un valor central.

Para el desarrollo de la propuesta de enseñanza se espera trabajar con la dispersión de los datos a partir de la descripción cualitativa y cuantitativa del rango.

Rango: es una medida de dispersión que existe para datos cuantitativos, pues representa la distancia entre el dato más pequeño y el más grande del conjunto. Esto es:

$$Rango = dato\ mayor - dato\ menor$$

Si bien el rango es una medida muy simplificada de la noción de dispersión, dado que solo tienen en cuenta valores extremos, para los propósitos de este trabajo es una idea fundamental para evidenciar dispersión en una distribución.

1.1.3. Densidad

En la definición de distribución de Bakker & Gravemeijer (2004) se describe “Densidad” como la encargada de analizar y comparar ciertas partes de una distribución a partir de hallar la frecuencia de un dato o la suma de ellas en una parte de la distribución, por ende

las palabras claves que proponen son: Frecuencia absoluta, Frecuencia relativa y Cuartiles, que se definen a continuación:

Frecuencia absoluta: es el número de datos que se repite de cada valor de la variable de una distribución. En la mayoría de casos frecuencia absoluta se representa por f_i (Cordero, Córdoba & Fernández, 2002, p.48).

Frecuencia relativa: es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos de la distribución. El número total de datos lo representamos por n , y la frecuencia relativa se representa por h_i , por lo tanto:

$$h_i = \frac{f_i}{n}$$

Frecuencia absoluta acumulada: es la suma de las frecuencias absolutas de los valores inferiores o iguales al considerado. Los valores de la variable deben de estar ordenados en forma creciente. En general, la frecuencia se representa por F_i , además la última frecuencia absoluta acumulada es igual al total de datos de la distribución.

$$F_i = \sum_{j=1}^i f_j$$

Frecuencia relativa acumulada: es el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada y el número total de datos de la distribución. Los valores de la variable deben de estar ordenados en forma creciente. En general, la frecuencia se representa por H_i , además la última frecuencia absoluta acumulada es igual a 1.

$$H_i = \frac{F_i}{n} = \frac{\sum_{j=1}^i f_j}{n}$$

En la mayoría de los casos todas estas frecuencias se representan con uso de una tabla, así como lo veremos en el siguiente ejemplo:

Valores de la Variable x_i	Frecuencia Absoluta f_i	Frecuencia Relativa $h_i = \frac{f_i}{n}$	Frecuencia Absoluta Acumulada $F_i = \sum_{j=1}^i f_j$	Frecuencia Relativa Acumulada $H_i = \frac{F_i}{n} = \frac{\sum_{j=1}^i f_j}{n}$
x_1	f_1	h_1	F_1	H_1
x_2	f_2	h_2	F_2	H_2
...
x_n	f_n	h_n	$F_n = n$	$H_n = 1$

Tabla 2. Frecuencias de una Distribución.

Cuartiles: Los cuartiles son los valores que dividen una distribución en cuatro partes iguales que previamente han sido ordenados en forma creciente. Existen tres cuartiles que se denominan Q_1 , Q_2 y Q_3 , cada uno posee las siguientes características:

Q_1 : Es el valor de la variable donde el 25% de los datos es menor que este valor.

Q_2 : Es el valor de la variable donde el 50% de los datos es menor, además coincide con el valor de la mediana.

Q_3 : Es el valor de la variable donde el 75% de los datos es menor que él.

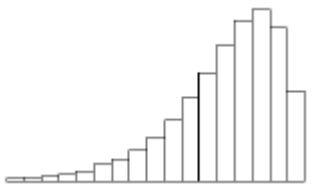
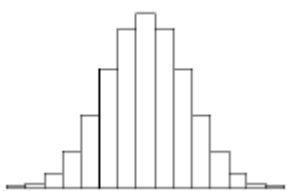
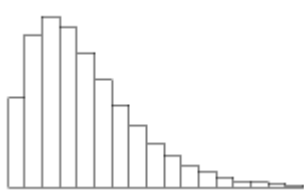
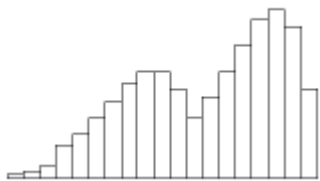
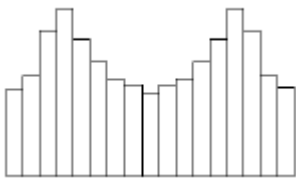
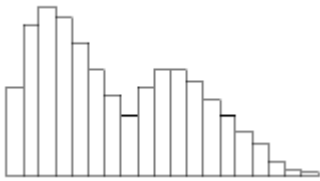
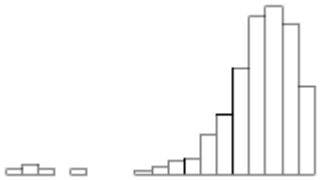
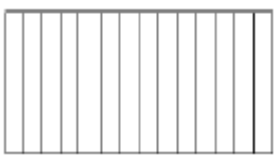
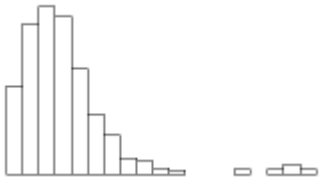
1.1.4. Forma

La forma de una distribución, bien sea para variables continuas o discretas, está influenciada por varios aspectos estadísticos. Por ejemplo un pico alto es causado por una alta frecuencia de cierta clase o valor específico (Moda) y las colas largas a la izquierda o a

la derecha de la distribución, con la moda alejada de la mediana, indican distribuciones asimétricas (Dispersión de los Datos) (Bakker & Gravemeijer, 2004).

Para Pearson (1895) La asimetría es donde una de las colas es más larga que la otra en un distribución, además la asimetría y la curtosis se utilizan como indicadores aproximados del grado de normalidad de las distribuciones o la falta de ellas, si se analiza la forma de una distribución se conocen las diferencias o similitudes que hay entre esta y una distribución normal (Ho & Yu, 2015).

Se resalta que una distribución puede tomar diferentes formas que no son usuales de verse, así como las que se muestran en la siguiente tabla:

Asimétrica a la Derecha	Simétrica	Asimétrica a la Izquierda
 <p>Una Moda</p>	 <p>D. Acampanada</p>	 <p>Una moda</p>
 <p>Bimodal</p>	 <p>Bimodal</p>	 <p>Bimodal</p>
		

Extremos en la cola Izquierda	Uniforme (sin moda)	Extremos en la cola Derecha
-------------------------------	---------------------	-----------------------------

Tabla 3. (Doane y Seward, 2011) Ilustración de diferentes formas que puede tomar la distribución de un conjunto de datos

1.2. Variable estadística

Según Valero & Méndez (2014) *“la variable estadística reconoce las características o atributos observables que tiene una población de estudio, tales están ligados con la variación que se da en dichos elementos con respecto a esos atributos”* (tomado de Perry, Gómez, Mesa y Fernández, 1998). Además, por su naturaleza pueden ser cualitativas o cuantitativas respectivamente, algunos ejemplos de estas son: el estrato socioeconómico, la edad, la estatura, el peso, la edad, nivel educativo y demás.

Las variables cualitativas son aquellas cuya característica permite clasificar a los individuos en categorías, por ejemplo, nacionalidad, sexo, color preferido, etc.

Las variables cuantitativas involucran la noción de cantidad, es decir, son valores de una variable donde sus resultados son hallados a partir de la *medición directa o su conteo*, por ejemplo: peso, estatura, edad, etc.

1.3. Referentes didácticos

En esta parte se describe los antecedentes didácticos considerados acerca de la enseñanza y aprendizaje de la noción de distribución. En primer lugar, se mencionan algunos antecedentes relacionados con propuestas de enseñanza sobre la noción de distribución, que es seguida de una descripción de una propuesta de jerarquía de niveles de razonamiento entorno a la noción de distribución. Después se presenta una recopilación de algunos errores y dificultades que se evidencian en los estudiantes al abordar dicha noción y sus conceptos subyacentes. Finalmente, se identifican relaciones entre los Estandares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y la enseñanza de la noción de distribución.

1.3.1. Antecedentes de la Enseñanza de la Noción de Distribución

En este apartado se exponen algunos trabajos donde se muestran propuestas de enseñanza de la noción de distribución en estudiantes con el fin de resumir las conclusiones e ideas importantes, que han orientado y propuesto la ruta de acción en el marco de este trabajo.

Para comenzar, se ha planteado la importancia de apreciar la noción de distribución como un objeto con características propias, porque Pfannkuch, Budgett, Parsonage & Horring (2004) encontraron que un objetivo clave para desarrollar el razonamiento de la distribución en los estudiantes es dejar ver a la distribución como un objeto que tiene sus propias características, como su centro o forma, todo esto se logra a partir de la creación de actividades donde puedan comparar dos distribuciones, por ejemplo, sugerir a los alumnos observar las distribuciones y comparar los centros, la dispersión y cualquier otra característica, para luego pedir que escriban una conclusión basada en la evidencia.

Luego, se han identificado ventajas del enfoque de razonamiento acerca de la distribución; ya que (Konold & Higgins, 2003, p.203) encontraron que los estudiantes pueden dar un salto conceptual para pasar de ver a los datos como muchos individuos, cada uno con sus propias características, a ver los datos como un conjunto, un grupo en el que en algunas ocasiones sus propiedades no son evidentes; todo esto se puede generar a partir de realizar preguntas cuya respuesta requiera que los estudiantes describan las características de la distribución, por ejemplo: ¿En qué parte de la distribución están agrupados la mayoría de los datos? ¿Cuál es el dato representativo de la distribución?

También se ha mostrado la necesidad del trabajo con distribuciones empíricas, en las cuales el estudiante pueda tener acercamientos intuitivos a esta; ya que una persona al referirse a un nuevo concepto estadístico comprendido tiende a usar una terminología no estándar, pero en algunas ocasiones los maestros no identifican este lenguaje como informal, sino como una dificultad de sus estudiantes (Noss & Hoyles, 1996). Por esta razón es necesario identificar el lenguaje utilizado por los estudiantes para hablar de la distribución y sus conceptos subyacentes, además que es pertinente utilizar un lenguaje informal para referirse a un nuevo concepto estadístico, ya que, al usar términos más informales, que tienen un

significado para los estudiantes, puede ayudarlos para una buena comprensión procedimental y conceptual de la distribución (Makar & Canada, 2005). Además, cuando se pretende enseñar un concepto en estadística es necesario partir de un contexto que sea cercano a los estudiantes, pues los niños pequeños tienen dificultades para verbalizar conceptos abstractos, pero si pueden comunicar sus opiniones acerca de observaciones sobre su entorno y temas cercanos a ellos (Piaget, 1973), además el contexto proporciona un significado a los datos y eso facilita su análisis (Moore & Cobb, 1997).

Una experiencia de campo fue llevada a cabo en España para identificar el nivel de comprensión de futuros profesores; esta evidenció que aunque varios de los participantes del estudio hacían uso de los conceptos primarios que conforman una distribución, como lo son comparación de las frecuencias absolutas de cada uno de los valores de la variable estadística, las medidas de tendencia central, y las medidas de dispersión; omitían otros aspectos para realizar la comparación de distribuciones como el sesgo, las frecuencias relativas de cada uno de los valores de la variable estadística, sin dejar de lado el tener en cuenta fenómenos importantes como la variabilidad (Arteaga, Batanero & Ruiz, 2009). Por lo que además de la comparación de las distribuciones a través del uso de las MTC y MD, es necesario abordar algunas nociones de frecuencia absoluta y relativa que les permitan a los estudiantes ampliar la gama de herramientas cognitivas y de conceptos que les son útiles para realizar tareas como caracterizar o identificar distribuciones.

Desde la perspectiva nacional, en Colombia se realizó un trabajo que tenía como objetivo el fortalecimiento de la idea de distribución para futuros profesores de matemáticas donde se recomienda tratar la distribución entre sus distintos sistemas de representación porque inciden directamente en la conceptualización de la distribución. También dejó entrever que uno de los primeros contactos que tuvieron los profesores en formación con la distribución ha sido con los modelos de distribución teórica como la distribución normal o de Poisson, y que en particular los estudiantes tienden a describir la distribución mediante el uso de los modelos. (Fernández, Andrade y Méndez, 2018).

También es necesario mencionar el trabajo de Sandoval (2006), el cual propone que a partir de desarrollar actividades con los estudiantes donde se realicen, entre otras, las siguientes tareas:

- Ordenar y clasificar datos.
- Usar e interpretar críticamente las tablas y gráficas estadísticas.

Los estudiantes pueden llegar a ver la distribución como ente conceptual, y esto también se puede lograr a partir de plantear actividades centradas en abordaje de situaciones problema donde exista un contexto con uno o varios conjuntos de datos de tal manera que los estudiantes realicen un tratamiento a la información y presentan conclusiones que permitan la resolución de un problema.

1.3.2. Jerarquía del razonamiento de la distribución.

Reading & Reid (2006) proponen una jerarquía del razonamiento de la distribución con el fin de evaluar el conocimiento que tienen los estudiantes sobre la distribución, basada en los niveles de desarrollo cognitivo “*SOLO*” (*Structure of Observed Learning Outcomes*), esta jerarquía está dividida en dos ciclos, el primero hace referencia a la comprensión de los elementos claves de la distribución, el segundo se centra en el uso de la distribución como herramienta para realizar inferencias estadísticas.

Jerarquía del razonamiento de la distribución del Ciclo 1	
Comprender los elementos clave de la distribución.	
Niveles	Características
Preestructural (P1)	<ul style="list-style-type: none"> • No se refiere a elementos clave de la distribución
Uniestructural (U1)	<ul style="list-style-type: none"> • Se enfoca en un elemento clave de distribución

	(centro, dispersión, densidad, asimetría o valores atípicos)
Multistruktural (M1)	<ul style="list-style-type: none"> • Se enfoca en más de un elemento clave de la distribución.
Relacional (R1)	<ul style="list-style-type: none"> • Desarrolla enlaces relacionales entre varios elementos clave de distribución.

Tabla 4. (Reading y Reid, 2006) Jerarquía del razonamiento de la distribución

Como se puede observar se reescribe la primera parte de la tabla que hace referencia a la comprensión de los elementos claves de la distribución ya que están relacionados con los propósitos de las actividades propuestas.

1.3.3. Errores y dificultades en el aprendizaje de los conceptos subyacentes a la noción de distribución

Este apartado tiene como objetivo mencionar la definición de error, obstáculo y dificultad dada por Socas (1997) además de exponer e ilustrar los posibles errores, dificultades y obstáculos de aprendizaje que un estudiante puede enfrentar al trabajar con la distribución. Es necesario aclarar que, al considerar la centralidad, dispersión y forma como ideas subyacentes de la distribución, también se reportarán errores y dificultades referidos a las medidas de tendencia central, de dispersión y frecuencia.

Antes de hacer referencia a los errores, obstáculos y dificultades relacionados a la distribución y sus conceptos subyacentes se definirá a partir de Socas (1997):

Error como una manifestación de las dificultades y obstáculos que presenta el estudiante al aprender un concepto matemático.

Dificultad es un inconveniente que se puede presentar a un estudiante al aprender acerca de un concepto.

Obstáculo es un conocimiento que ha resultado útil al estudiante dentro de determinado contexto, pero fuera de dicho contexto conduce a respuestas falsas, generando un conflicto en el estudiante.

Para exponer los posibles errores, dificultades y obstáculos de aprendizaje que un estudiante puede enfrentar al trabajar con la distribución se realizó la siguiente tabla:

Errores, dificultades y obstáculos de la distribución y a sus conceptos subyacentes	
Distribución	<p>D. E.1 Crear una distribución plana a partir de otra sin tener en cuenta sus picos y su densidad (Ben-Zvi & Sharett-Amir, 2005).</p> <p>D. E.2 Omitir alguno de los ejes horizontal o vertical, o ambos para la construcción de un gráfico que organice los datos de la distribución (Li & Shen, 1992) En (Batanero, Godino, Green, Holmes & Vallecillos, 1994).</p> <p>D.E.3. Utilizar gráficos inadecuados sin tener en cuenta la escala de medición de la variable. (Li & Shen, 1992)</p> <p>D.E.4 Crear un diagrama circular sin tener en cuenta los porcentajes de los datos que hay en cada valor de la variable (Batanero, Godino, Green, Holmes & Vallecillos, 1994).</p> <p>D.E.5. Confundir la frecuencia y la variable (Arteaga & Batanero, 2010).</p> <p>D.D.6. Conflictos relacionados con la interpretación de la finalidad de cada gráfico (Arteaga & Batanero, 2010).</p>
	C. E.1 Hallar el promedio y la mediana a datos cualitativos nominales

Centro	<p>(Méndez & Valero, 2014).</p> <p>C. E. 2 Posicionar el dato representativo de una distribución asimétrica en la mitad de los valores de la variable, ya que en este tipo de distribuciones las medidas de centralidad se desplazan donde hay mayor densidad (Myers & Campbell, 1974).</p> <p>C. D.1 Elegir incorrectamente un representante de la distribución (Mokros & Russell, 1995).</p> <p>C. D.2 No percibir a ninguna de las medidas de tendencia central como un representante de la distribución (Zawojewski & Shaughnessy, 2000).</p>
Dispersión	<p>DI.E.1 Ignorar la dispersión de los datos cuando se efectúan comparaciones entre dos o más distribuciones (Myers & Campbell, 1974).</p>
Densidad	<p>(Guerrero & Torres, 2017) consideran las siguientes dificultades:</p> <p>DE.D.1. Ignorar la igualdad entre las longitudes de intervalos.</p> <p>DE.D.2. Desconocer los tipos de frecuencia o confundirlas.</p> <p>DE.D.3. Visualizar parcialmente el conjunto de los datos estadísticos.</p>
Forma	<p>F.D.1 centrarse más en el grupo modal que en la forma de la distribución (Bakker & Gravemeijer, 2004).</p>

Tabla 5. Errores, dificultades y obstáculos de la distribución y sus conceptos subyacentes.

1.3.4. Relación entre los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) con la enseñanza de la noción de distribución

Este apartado tiene como propósito señalar a la distribución y sus conceptos subyacentes dentro de los documentos de las políticas educativas en matemáticas; por tanto, una de las preguntas que se espera responder es ¿Cuáles de los estándares básicos están relacionados con la enseñanza de la noción de distribución, considerándola como ente conceptual que se caracteriza a partir de la centralidad, dispersión, densidad y forma?

Para intentar resolver la pregunta antes planteada, se realizó la siguiente tabla con el objetivo de relacionar los estándares básicos de competencias del pensamiento aleatorio de los grados cuarto a quinto con los objetivos presentados en el libro *Developing Students' Statistical Reasoning* en el capítulo 8 (Distribución) enfocados a la enseñanza y el aprendizaje de la noción de distribución.

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas	Objetivos que presenta en libro para desarrollar el razonamiento de la distribución
Represento datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares).	Resumir e interpretar conjuntos de datos que son de su interés a partir de representaciones estadísticas como tablas o diagramas.
Se relacionan ya que al representar un conjunto de datos utilizando tablas de frecuencias y diferentes graficos, se puede identificar que esta es una forma de organizar los datos y es mas sencillo analizar la distribución.	
Comparo diferentes representaciones del mismo conjunto de datos.	Identificar que en ciertos tipos de gráficos (por ejemplo, gráficos de puntos, de barras

	e histogramas) es más sencillo observar la forma de una distribución.
Al realizar diferentes representaciones de un mismo conjunto de datos, se puede identificar que en cada representación se resalta una de las características de la distribución más que otras. Por ejemplo, en un diagrama de barras e histograma se evidencia la moda, en cambio con un diagrama de puntos se evidencia dónde está la mayor aglomeración de los datos.	
Describo la manera como parecen distribuirse los distintos datos de un conjunto y la comparo con la manera como se distribuyen otros conjuntos de datos.	Observar y describir la forma y el centro de una distribución con la comparación de distribuciones.
Una manera para encontrar una o más características de una distribución es partir de la comparación de dos o más distribuciones (Friel et al, 2001), por ende, para identificar como se distribuyen dos o más conjuntos de datos se debe comparar la forma y el centro de cada una de las distribuciones.	
Uso e interpreto la media (o promedio) y la mediana y comparo lo que indican.	Analizar dónde está la mayoría de los datos y cual es mitad de los datos.
Las medidas de tendencia central son conceptos relacionados con el centro de una distribución, por ende, es necesario saber que indica cada una de estas medidas y cuando es pertinente utilizar alguna de ellas para relacionarla con la aglomeración de los datos.	
Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.	Comprender que los gráficos estadísticos pueden ser analizados para revelar diferentes aspectos de una distribución

Analizar un conjunto de datos para resolver un problema exige al estudiante realizar una representación de estos para analizar la manera como se distribuyen a partir de sus características.

Tabla 6. Relación entre las tareas propuestas por Reading y Reid (2006) con los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006)

Es posible identificar que en la tabla hay muchas competencias que apuntan a los objetivos descritos para razonar acerca de la distribución uno de ellos es “Resumen e interpretan conjuntos de datos que son de su interés a partir de representaciones estadísticas como tablas o diagramas” (Garfield y Ben-Zvi, 2008, pag 179-180) se relaciona con “Represento datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares)” (MEN, 2014, pag 83) , ya que al representar un conjunto de datos utilizando tablas de frecuencias y diferentes tipos de gráficos los niños identifican que esta es una forma de organizar los datos y es más sencillo para analizar la distribución.

2. PROPUESTA DE ENSEÑANZA

Este capítulo describe la propuesta de enseñanza llevada al aula de clase; primero se realiza una descripción del grupo de estudio. Después se describen los propósitos de investigación y de enseñanza en torno a las actividades. Por último, se expone el material de trabajo que se implementó en el aula, considerando la intencionalidad de cada una de las actividades.

2.1. Población o grupo de estudio

El grupo de estudio corresponde a los estudiantes de grado quinto de la Instituto San Pablo Apóstol, que ofrece educación desde el grado quinto al undécimo, cuyos estudiantes son niños habitantes del barrio Jerusalén en la localidad de Ciudad Bolívar. El grupo se conforma por 36 estudiantes con edades entre los 9 y 12 años, de estrato económico 2 y 3.

Al preguntar al docente que dirige el curso de estadística, acerca del trabajo previo realizado por los estudiantes, manifestó que algunos de los conceptos previos que se han abordado en la clase han sido moda, media aritmética, y frecuencia. Además, los estudiantes han tenido la oportunidad de trabajar con distintos sistemas de representación como tablas de frecuencia, gráficos de barras, circulares y conjuntos de datos por extensión.

2.2. Propósitos de la propuesta

En este apartado se describen los propósitos de investigación para los autores y las competencias que se espera que los estudiantes adquieran durante el desarrollo de las actividades.

2.2.1. Propósitos de las actividades en la investigación

Se tuvieron en cuenta, los siguientes:

1. Promover la conceptualización de la distribución a través de sus características como la centralidad, dispersión y forma.
2. Acercar al estudiante a una conceptualización de la distribución a través del trabajo con situaciones contextualizadas procurando el uso de representaciones gráficas y tabulares.
3. Identificar los registros de representación que los estudiantes priorizan al momento de abordar las distintas actividades.
4. Analizar los posibles errores, dificultades y obstáculos de aprendizaje relacionados con la distribución y sus conceptos subyacentes, con el ánimo de proponer acciones que en futuras aplicaciones de actividades puedan promover su superación.

2.2.2. Competencias para el estudiante

Las competencias consideradas fueron:

1. Identificar características de una distribución relacionadas con la centralidad, la densidad, dispersión y forma mediante la lectura e interpretación de los registros gráficos y tabulares.
2. Comparar distribuciones a través de sus características.
3. Relacionar la distribución de los datos con el contexto en el cual se está considerando el trabajo.

2.3. Actividades

En este apartado se presenta la colección de actividades que conforman la propuesta de enseñanza del concepto de distribución teniendo en cuenta las características conceptuales y didácticas que han sido contempladas en el marco conceptual.

2.3.1. Primera actividad

Esta actividad tiene como finalidad que los estudiantes reconozcan la necesidad de organizar los datos usando algún tipo de representación, tal como tabla de frecuencias o

gráfica e indirectamente analicen la distribución a partir de solucionar las preguntas propuestas.

Propósitos de la actividad

Con esta primera actividad se pretende que los estudiantes:

- Vean la necesidad de organizar u ordenar los datos.
- Agrupen los valores de los datos de acuerdo con su frecuencia, es decir, determinen la frecuencia de cada valor de las variables correspondientes.
- Reconozcan la moda, como el valor de la variable con la frecuencia más alta.
- Determinen el rango.
- Comparen partes del conjunto de datos respecto de toda la distribución.

Intencionalidad de la secuencia de tareas

La actividad 1 (ver Anexo A) consiste en una secuencia de seis preguntas que los estudiantes pueden resolver teniendo en cuenta los datos que resultaron de una encuesta realizada a veinte estudiantes y que buscaba conocer la cantidad de hermanos que tiene cada uno.

La primera pregunta “¿Cuál es el número de hermanos que tiene la mayoría de los estudiantes del curso 5B?” tiene como objetivo que el estudiante determine la moda en los datos, ya que para contestar esta pregunta es necesario que él se fije en la frecuencia que tiene cada número de hermanos y busque el dato con la mayor frecuencia. Como posibles dificultades se considera que el estudiante puede confundir la frecuencia con los valores de la variable y más bien fijarse en los valores extremos, es decir, que escriba el dato mayor en lugar de la moda.

En dicho problema, la variable estadística implicada es una variable cuantitativa, ya que, de acuerdo con las definiciones propuestas en el marco conceptual, proviene de un proceso directo de conteo.

La segunda pregunta de la actividad “*¿Cuál es el número de hermanos que es menos común entre los niños del curso 5B?*” tiene como objetivo que el estudiante identifique aquellos valores de la variable *Número de hermanos* que menos se repiten en la muestra. De manera análoga a lo sugerido en la primera pregunta, es posible que el estudiante que confunda los valores de la variable con la frecuencia se fije en los valores mínimos. Por ello, la segunda pregunta solicita a los estudiantes que justifiquen su respuesta, ya que, al observar sus argumentos, se puede corroborar si cometen el error antes mencionado.

La tercera pregunta tiene dos partes. La primera parte de la pregunta (*¿Hay estudiantes que tengan ocho hermanos?*) tiene como propósito permitir que el estudiante identifique si la variable estadística asume cierto valor en la distribución; en este caso, la variable *Número de hermanos* nunca asume el valor 8, y, por consiguiente, el estudiante debe notar que éste no hace parte de la distribución. De manera similar, la segunda parte de la pregunta (*¿Hay estudiantes que no tienen hermanos?*) pretende que el estudiante identifique la frecuencia de un valor de la variable en la distribución cuando se solicita que se encuentre la cantidad de estudiantes que no tienen hermanos, es decir, la frecuencia del dato cero.

La cuarta pregunta “*con respecto a los datos de la encuesta ¿diría que hay pocos o muchos estudiantes del curso 5B que tienen entre 2 y 4 hermanos?*” tiene como propósito que los estudiantes comparen la concentración de datos de ciertas partes de la distribución. Para esto se considera necesario que los estudiantes organicen los datos en algún sistema de representación gráfico o tabular, que permita comparar la suma de las frecuencias de ciertas partes de la distribución. En consecuencia, el estudiante debe identificar valores de la variable con frecuencias altas.

La quinta instrucción “*presente de manera resumida un informe a sus compañeros que muestre de manera ágil los datos de la encuesta y que responda las preguntas anteriores*” tiene como objetivo que los estudiantes caractericen la distribución a través de los valores

que toma la variable, su moda y la concentración de los datos en algunas partes de la distribución. Se asume como posibilidad que los estudiantes no solo representen tabular o gráficamente la distribución, sino también que describan de manera cualitativa las ideas antes mencionadas. (Ver anexo B)

2.3.2. Segunda actividad.

La segunda actividad (Anexo C) propone al estudiante una serie de tareas que le permiten comparar las distribuciones obtenidas al analizar una misma variable en dos poblaciones distintas. Del mismo modo que en la primera actividad, se espera que el estudiante identifique la moda, valores máximos y mínimos, y la densidad de los datos en ciertas partes de la distribución; también se espera que a partir de estas ideas logre establecer comparaciones entre las distribuciones ya que Friel, Curcio & Bright (2001) afirman que realizar diferentes actividades enfocadas a analizar y comparar una o varias distribuciones en diferentes representaciones ayuda a los estudiantes a reconocer las características importantes de un conjunto de datos además de dar sentido a la información mostrada por los gráficos utilizados para representarlos.

Para el desarrollo de esta se pretende dividir a los estudiantes en dos grupos; al primero se le brindará las distribuciones representadas tubularmente, y al segundo se les presentaran a partir de gráficos de barras, con el ánimo de evidenciar si los estudiantes experimentan dificultades con el manejo de alguno de los tipos de representación.

Propósitos de la actividad

Para esta segunda actividad se espera que los estudiantes:

- Identifiquen los valores máximo y mínimo de las distribuciones dadas.
- Reconozcan aglomeraciones en las distribuciones y las describan cuantitativamente.
- Reconozcan el valor de la variable con la frecuencia más alta (moda).

- Comparen las distribuciones en términos de sus características antes mencionadas.

Descripción de la secuencia de tareas

Para la descripción de la secuencia de tareas, es necesario aclarar, que lo único que diferencia a los insumos que se presentan son los sistemas de representación que se brindan a los estudiantes, ya que las preguntas en ambos casos son las mismas.

Las distribuciones que se presentan en la segunda actividad resultan de estudiar la talla de zapatos de los niños y niñas de un curso en grado quinto, y la pregunta problematizadora es *“Un estudiante de grado octavo afirma que, en general, las niñas tienen pies más grandes que los niños ¿Es esto cierto?”*

En esta actividad la variable estadística *talla de zapatos* es una variable cualitativa ya que, de acuerdo con la definición presentada en el marco conceptual, la talla de zapato no proviene de un proceso directo de medida o de conteo. La talla de zapato es un rótulo que se le asigna al calzado que tienen ciertas especificaciones de tamaño.

La primera pregunta *“¿Qué información se debería analizar para saber si la afirmación es cierta?”* ha sido propuesta con el ánimo de evocar el trabajo realizado anteriormente en la primera actividad. Es decir, se espera que el estudiante mencione características de una distribución como la moda, valores máximos y densidad en ciertas partes. Es posible que los estudiantes mencionen que se deben analizar las gráficas o las tablas de frecuencia, por lo que se considera necesario mostrar que en esos registros se pueden encontrar las mismas características.

La segunda pregunta *“¿Cuál es la talla de zapato más común entre las niñas? ¿Cuántas niñas usan esa talla?”* tiene como propósito que el estudiante encuentre la moda en la distribución correspondiente a las tallas de zapato de las niñas, y que calcule su frecuencia. La tercera pregunta es análoga a la segunda, orientada a la distribución de las tallas de zapatos de los niños.

La cuarta pregunta “¿*Cuáles son las tallas de zapato mínima y máxima que usan las niñas del curso 5B?*” tiene como propósito que el estudiante encuentre los valores extremos de la distribución. La cuarta pregunta es análoga a la quinta pregunta, enfocándose en la distribución de las tallas de zapatos de los niños.

La sexta pregunta “¿*Cuántas niñas utilizan tallas de zapato menores o iguales a 37?*” se ha propuesto con el fin de que el estudiante analice la concentración de datos en una parte específica de la distribución. La octava pregunta es análoga a la sexta, propuesta para analizar la concentración de los datos en la distribución asociada a las tallas de zapatos de los niños. Del mismo modo, la séptima pregunta “¿*Cuántas niñas utilizan tallas de zapato mayores a 37?*” tiene como objetivo que los estudiantes analicen la concentración de los datos en la región restante de la distribución; la novena pregunta es análoga, en la distribución de las tallas de zapato de los niños.

La décima pregunta “¿*Cuál de las tallas representa mejor a la talla de zapato que usan las niñas del curso 5B?*” tiene como objetivo identificar cuáles son las medidas de tendencia central que usan los estudiantes como un representante de la distribución. Es posible que algunos de los estudiantes identifiquen la moda, mediana o media para representar la centralidad de la distribución. Sin embargo, es necesario aclarar que debido al tipo variable (cualitativa) utilizada en el problema, calcular la media o mediana en los datos cualitativos es un error de los antes mencionados. La decimoprimer pregunta es análoga, orientada a la distribución de las tallas de zapatos de los niños. (Ver anexo D)

Las preguntas restantes de la actividad pretenden que los estudiantes comparen las distribuciones correspondientes a las tallas de zapato de las niñas y de los niños teniendo en cuenta dos criterios: el primero es el representante (medida de tendencia central) que hallaron en la décima y decimoprimer pregunta; y el segundo es la concentración de los datos en ciertas regiones de la distribución encontrados de la sexta a la novena pregunta.

Por último, se le solicita al estudiante que responda a la pregunta principal teniendo en cuenta el análisis realizado al resolver la secuencia de preguntas.

2.3.3. Tercera Actividad.

La tercera actividad (Anexo E) propone al estudiante una serie de tareas que le permiten comparar dos distribuciones, se espera que el estudiante identifique la moda, valores máximos y mínimos, y la aglomeración de los datos en ciertas partes de una de las distribuciones, de tal manera que cree otra distribución a partir de las características analizadas.

Propósito de la actividad

Para esta tercera actividad se plantean que los estudiantes:

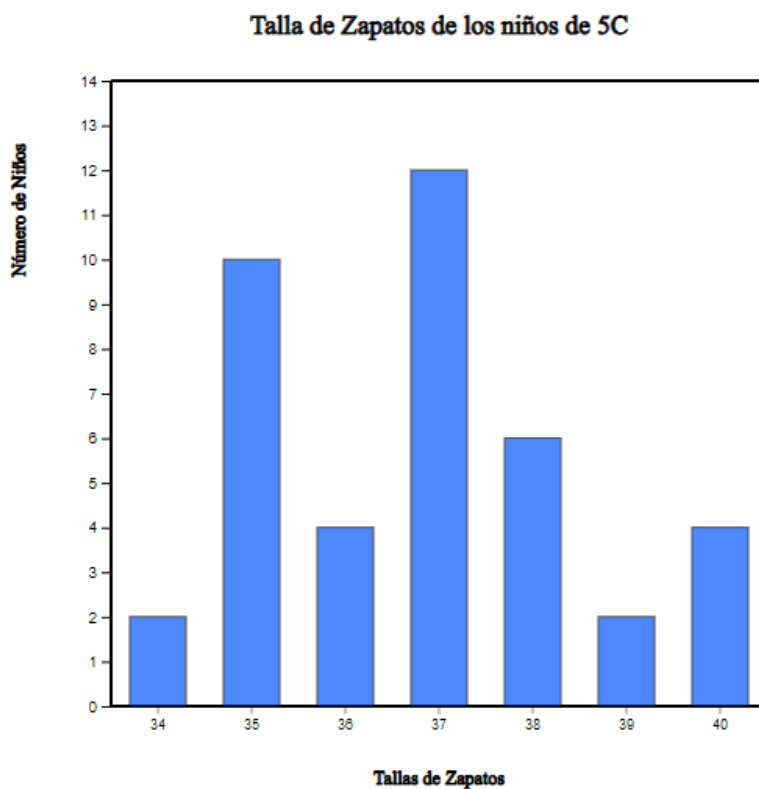
- Identifiquen valores máximos y mínimos de las distribuciones.
- Agrupen los valores de los datos de acuerdo con su frecuencia, es decir, determinen la frecuencia de cada valor de las variables correspondientes.
- Reconozcan la moda.
- Construyan una distribución teniendo en cuenta las características de otra.

Descripción de la secuencia de tareas

La tercera actividad (Anexo C) expone una situación problema con la intención de que los estudiantes comparen dos distribuciones; además de brindarles dos registros diferentes, uno gráfico y otro tabular con el fin de identificar si para ellos es más sencillo comparar dos distribuciones en registros gráficos o tabulares. Una de las suposiciones que se tienen con el desarrollo de la actividad es que algunos los estudiantes cambien todas las distribuciones a un mismo sistema de representación, ya sea el gráfico o tabular.

La situación problema que se presenta es la siguiente:

Luego de realizar una encuesta para conocer las tallas de zapatos de los niños (o niñas) del curso 5B, se obtuvo la siguiente información:



El colegio quiere hacer compra de 20 pares de patines para que los niños del curso puedan usarlos en la hora del descanso, y proponen comprar los 20 patines de la siguiente manera:

Intención de compra para los patines	
Talla de los Patines	Cantidad de Patines
33	2

34	3
35	1
36	3
37	1
38	4
39	3
40	1
41	2
Total	20

La primera instrucción que se presenta a los estudiantes *“Teniendo en cuenta la información presentada ¿qué considera que deben hacer los directivos del colegio para resolver el problema?”* tiene como propósito que los estudiantes evoquen el trabajo realizado en las actividades anteriores, como identificar la moda de la distribución y la concentración de los datos en ciertas partes de ésta.

La segunda instrucción *“Si se quiere comparar la información obtenida acerca de las tallas de zapato que usan los estudiantes con la propuesta de compra de patines que tiene el colegio ¿cómo los compararía?”* tiene como fin que el estudiante mencione características de las distribuciones como las antes mencionadas (moda y concentración de los datos) y que a partir de estas características realice la comparación de las dos distribuciones.

La tercera instrucción *“teniendo en cuenta la comparación anterior, ¿considera que la cantidad de patines que el colegio quiere traer para cada talla es adecuada?”* tiene como intención que el estudiante, a partir de las concepciones que haya consolidado luego del

trabajo previo, decida si es acertada o no la decisión presentada. Se espera que los estudiantes mencionen diferencias tanto generales como particulares entre ambas distribuciones.

La cuarta instrucción presenta dos preguntas que el estudiante puede contestar teniendo en cuenta el trabajo realizado en los ítems anteriores de la actividad, el antecedente a las preguntas *“Si se sabe que en el curso 5B hay 40 estudiantes y que el colegio quiere comprar 20 pares de patines”* fue intencionalmente escogida para que los estudiantes puedan utilizar la proporción existente entre la cantidad total de los datos en ambas distribuciones y la concentración de datos en ciertas partes de cada una de éstas. ¿La primera pregunta *“¿Cómo cree que puede hallar la cantidad de pares de patines que el colegio debe traer para cada talla teniendo en cuenta la encuesta que se realizó a los estudiantes?”* tiene como fin comprobar si los estudiantes hacen uso de la proporción mencionada anteriormente, además de evidenciar otros aspectos acerca de la distribución que puedan evocar para resolver la pregunta. El segundo ítem *“Escriba la cantidad de patines que considera que deben traerse para cada una de las tallas”* pretende que los estudiantes esbocen una distribución que consideren pertinente teniendo en cuenta el trabajo realizado anteriormente y que hagan uso de lo que ellos hayan propuesto en la pregunta anterior.

La última pregunta *“Se debe enviar esta información sobre cómo se deberían comprar los patines teniendo en cuenta las tallas de los estudiantes de tal manera que los datos sean claros, organizados y fáciles de leer ¿Cómo enviaría esa información?”* tiene como objetivo que los estudiantes consoliden y representen la distribución que han venido construyendo a lo largo de la actividad. (Ver anexo F)

3. RESULTADOS DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

En este apartado se presentan los resultados de la implementación de las actividades propuestas. El análisis de las actividades será realizado estadísticamente al tener en cuenta

los resultados generales en cada una de las actividades, haciendo mención a los errores y dificultades que experimentaron los estudiantes; y de manera específica se hará un análisis cualitativo de aquellas respuestas evidenciadas que de uno u otro modo se han considerado relevantes durante la aplicación de la propuesta.

En todas las clases se ejecutó la misma forma de trabajo, que consistía en un primer momento hablar con los estudiantes acerca de la actividad que se proponía; luego, se escogían estudiantes al azar para leer el enunciado y las preguntas propuestas en las actividades, acto seguido, los estudiantes levantaban la mano para proponer una solución a las preguntas o al problema propuesto; después se proporcionaba un espacio para que los estudiantes individualmente solucionaran las preguntas o el problema; y para finalizar, se realizaba una socialización donde los estudiantes comentaban la solución a las preguntas o al problema propuesto.

En todas las sesiones de clase que se realizaron estuvo presente el profesor titular de la institución, cabe resaltar que él intervino en las clases, aunque en general los maestros en formación (MEF) fueron los que orientaron el rumbo que tomaba la implementación de las actividades. Además, se quiere hacer claridad que, previo acuerdo con los directivos de la institución, fue posible grabar en formato de audio las sesiones que se llevaron a cabo con los estudiantes.

Es necesario indicar las convenciones que se usarán para transcribir el material grabado en audio en el desarrollo de las actividades, al referirse algún estudiante se escribirá “*Estudiante*”, al referirse al docente titular de la institución se escribirá “*Profesor*” y al referirse a los autores de la propuesta se escribirán las siglas “*MEF*” (Maestro en formación).

3.1. Primera Actividad

Esta actividad pretendía que los estudiantes vieran la necesidad de organizar, agrupar y determinar las frecuencias de los datos, así como reconocer medidas de resumen como la moda y el rango. Además, se deseaba que compararan partes del conjunto de datos respecto a toda la distribución. Con base en dicha actividad se esperaba que los estudiantes identificaran la situación y solucionaran las preguntas. (ver anexo A)

Para analizar los resultados de la actividad se van a describir los comentarios que comunicaron los estudiantes para solucionar cada pregunta, así como algunas de sus respuestas y errores, obstáculos o dificultades que tuvieron a lo largo de la actividad. (ver anexo B)

En la primera pregunta “¿Cuál es el número de hermanos que tiene la mayoría de los estudiantes del curso 5B?” Se dio la siguiente interacción:

Estudiante A: *yo los agruparía respectivamente, un grupo 3, 1, 4.*

MEF: *tú mirarías cuantos niños tienen un hermano, dos, tres, y luego ¿qué mirarías?*

Estudiante A: *...qué grupo tiene más personas.*

Al parecer, el estudiante inicialmente intenta organizar los datos y partir de ello quiere identificar cual es la frecuencia para cada valor de la variable, y en particular mencionar el valor de la variable con más datos (moda).

Más adelante, en el momento de la socialización, los maestros en formación pidieron respuestas a las preguntas y ocurrieron interacciones en donde ellos no reconocieron que lo que identificaban era la moda. Un ejemplo de ello es:

MEF: *¿Cuál es la solución a la primera pregunta?*

Estudiante H: *yo busqué cual era el número que más veces se repetía en la tabla, este es 3, ya que el 3 se repite 6 veces. Es el que más se repite.*

MEF: *¿saben cómo se llama este valor?...*

Estudiantes: [los estudiantes se quedan en silencio y no responden]

MEF: [luego de algunos segundos]...es la moda.

Vale la pena mencionar que, con antelación a la actividad, el profesor titular manifestó que los estudiantes ya habían trabajado con el concepto de la moda, pero en la actividad no identificaron que esa era la medida que se estaba hallando.

La siguiente imagen muestra algunos tipos de respuesta plasmadas por los estudiantes en la primera pregunta de la actividad.

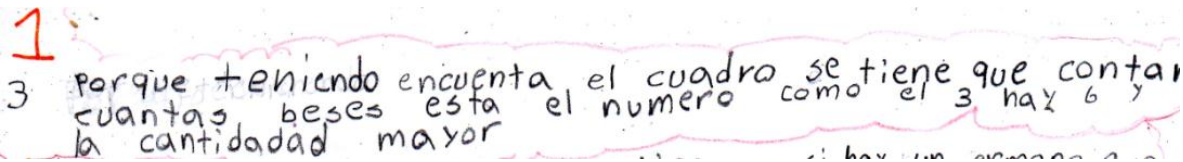

Caso a
 <p><i>“porque teniendo en cuenta el cuadro, se tiene que contar cuantas veces está el número, como el 3 hay 6 y es la cantidad mayor”</i></p>
Caso b
 <p><i>“6 niños tienen 3 hermanos”</i></p>

Imagen 2 Ejemplos de respuestas de los estudiantes a la primera pregunta

En la Imagen 1 se presenta un ejemplo (Caso a) que ilustra una respuesta que fue considerada correcta, mientras que en el caso b, se muestra un ejemplo donde se identifica el error D.E.5.

Respecto a resultados cuantificables, se puede señalar que: 66% de los estudiantes respondieron correctamente la pregunta, aunque el 17% confundieron la frecuencia con la variable (error D.E.5) y el otro 17% no respondió la pregunta.

Es importante señalar que más de la mitad de los niños reconocieron la moda de la distribución, pero no mencionaron que este era el dato hallado, por otro lado, menos de la cuarta parte de los estudiantes tuvieron el error de confundir la variable con la frecuencia al referirse a este valor.

Al abordar la segunda pregunta “¿Cuál es el número de hermanos que es menos común entre los niños del curso 5B?” Se detecta que hay estudiantes que no prestan atención a la frecuencia de los datos sino simplemente al valor de la variable, además que en algunos casos solo analizan una parte de la distribución. Se tiene como ejemplo, esta interacción:

Estudiante B: *Como dijo mi compañera yo ya tendría los datos agrupados, miraría que número está menos repetido, ejemplo el 0 está una vez, entonces el 0 es la menor cantidad dicha por los estudiantes.*

Profesor: *Si hay otro estudiante que tiene un hermano ¿Cuál pondrías?*

Estudiante C: *En este caso 6 también esta una vez. Entonces yo colocaría 6 porque 6 es mayor que 0.*

MEF: *Los dos valen ya que nos preguntan ¿Cuál es el número de hermanos que es menos común entre los niños del curso 5B?... si hay 1 niño que tiene 0 hermanos y 1 niño que tiene 6 hermanos, uno respondería que 0 y 6 hermanos, ya que este es el número de hermanos que tiene la menor cantidad de niños.*

Más adelante en la socialización se preguntó a los estudiantes cual era la respuesta y ellos comentaron:

Estudiante I: *Hay dos respuestas, la menor cantidad de niños respondieron que eran hijos únicos (o hermanos) y que tenían seis hermanos.*

MEF: *Cuantos niños respondieron que eran hijos únicos*

Estudiante I: *Uno*

MEF: *Cuantos niños respondieron que tenían 6 hermanos.*

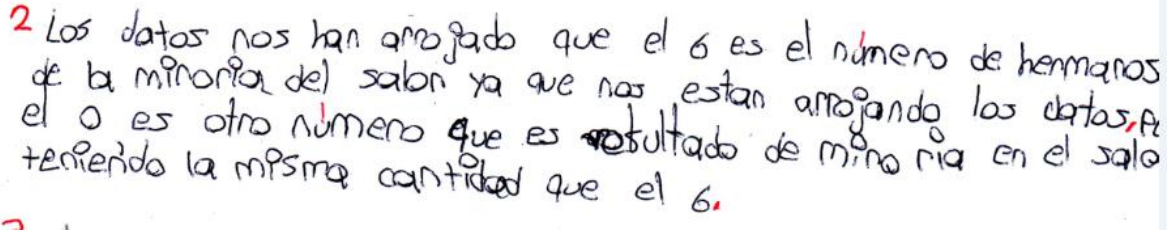
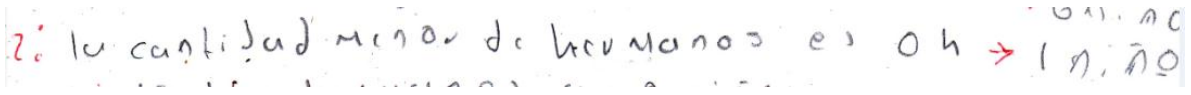
Estudiante I: *Uno*

MEF: *¿Cuáles serían las respuestas?*

Estudiante I: *0 y 6 hermanos.*

En este caso particular, el estudiante que está comunicando su respuesta a todos reconoce que hay dos valores de la distribución que cumplen con esta condición, esto da a entender que dicho estudiante analizó toda la distribución.

La siguiente gráfica permite ver algunas de las respuestas de los estudiantes:

Caso a
 <p><i>“los datos nos han arrojado que el 6 es el número de hermanos de la minoría del salón... el 0 es otro número que es resultado de la minoría del salón, teniendo la misma cantidad que el 6”</i></p>
Caso b
 <p><i>“la cantidad menor de hermanos es 0 hermanos, un niño”</i></p>

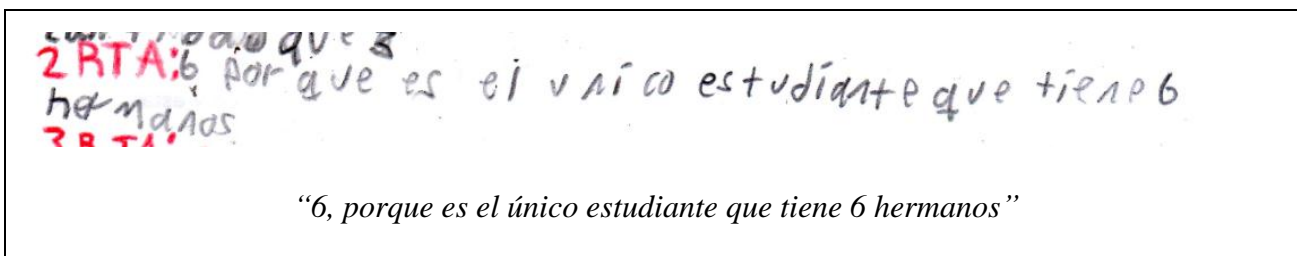


Imagen 3. Respuestas de los estudiantes a la segunda pregunta

En la Imagen 3 se presenta un ejemplo (Caso a) que ilustra una respuesta que fue considerada correcta, mientras que en el caso b, se muestra dos ejemplos donde se identifican que tuvieron la dificultad DE.D.3 (visualizar parcialmente el conjunto de los datos estadísticos).

Al analizar las respuestas escritas de los estudiantes de la segunda pregunta se observa que: el 54% de los estudiantes respondieron correctamente; por otro lado, el 40 % solo tuvo en cuenta uno de los dos valores de la variable de la distribución, solo se fijan en los valores finales o iniciales de la variable. Los demás (6%) no contestaron.

Cabe resaltar que la mitad curso llegó a reconocer cuáles eran los valores de la distribución donde se encontraba la menor aglomeración de los datos, sin embargo, muchos estudiantes solo analizaron una parte de la distribución. Por tanto, se aprecia la necesidad de buscar herramientas que ayuden a los niños a superar esta dificultad (DE.D.3).

Al abordar la tercera pregunta (a. Hay un estudiante de 5B ¿que tenga 8 hermanos? si no, ¿Por qué? b. Hay estudiantes ¿que no tienen hermanos? sí, no ¿Por qué?) Se detecta que los estudiantes reconocen que esta pregunta se soluciona a partir del análisis de la tabla propuesta en la guía y no realizando una representación de la distribución. Se tiene como ejemplo, esta interacción:

MEF: *Como creen que pueden resolver esta pregunta.*

Estudiante C: *Observando la Tabla.*

Se reconoce que los MEF no realizaron más preguntas oportunas en el momento, como ¿Qué observarías de la tabla? ¿Cómo sabemos si en la tabla hay un estudiante que tenga 8

hermanos? Para saber qué tipo de estrategia quería utilizar el estudiante para resolver la pregunta.

Más adelante en la socialización se preguntó a los estudiantes cual era la respuesta y ellos comentaron:

Estudiante J: *No hay niños con 8 hermanos, ya que, si observamos la tabla, el máximo número de hermanos que puede tener un niño es 6.*

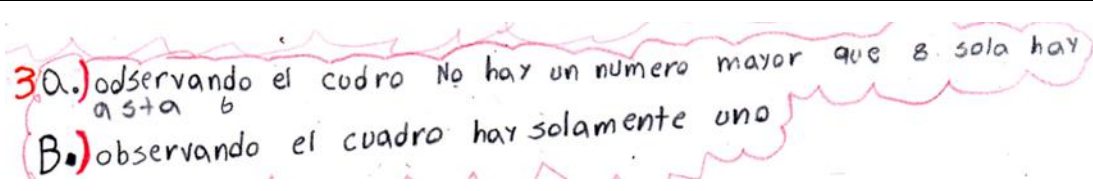
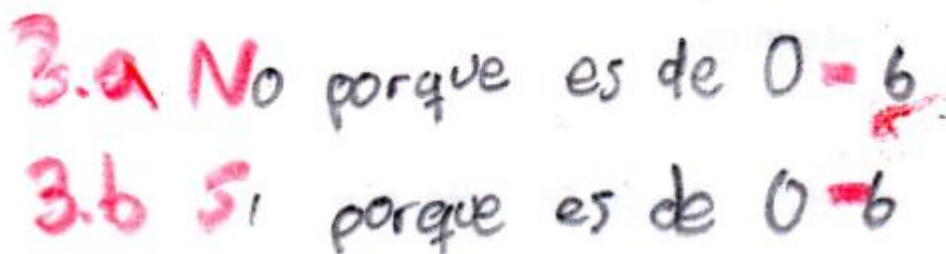
Estudiante K: *Hay niños que no tienen ningún hermano*

MEF: *¿Cuántos niños no tienen ningún hermano?*

Estudiante K: *Uno*

Al analizar el comentario realizado por el estudiante J, se identifica que el solucionó el problema analizando si el número 8 estaba en la tabla propuesta en el taller (Ver anexo A), aunque también identifico cual era el valor máximo de la distribución.

Algunas respuestas escritas presentadas por los estudiantes fueron:

Caso a
 Handwritten text in black ink with red markings. It says: '3a.) observando el cuadro No hay un numero mayor que 8 sola hay asta 6' and '(B.) observando el cuadro hay solamente uno'. The text is enclosed in a hand-drawn red cloud-like border.
Caso b
 Handwritten text in black ink with red markings. It says: '3.a No porque es de 0-6' and '3.b 5! porque es de 0-6'. The numbers '3.a' and '3.b' are written in red.

El estudiante reconoce el menor y mayor valor de todas las variables de la distribución.

Imagen 4. Ejemplos de respuestas de los estudiantes a la tercera pregunta

En la Imagen 4 se presenta dos respuestas que fueron consideradas como correctas, el ejemplo (Caso a) ilustra la respuesta de un estudiante que solo respondió las preguntas, pero no reconoció el rango de la distribución solo el valor máximo, en cambio en el caso b, se muestra que el estudiante responde la pregunta teniendo en cuenta el valor mínimo y máximo de la distribución.

Respecto a resultados cuantificables, se puede señalar que: 95% de los estudiantes respondieron correctamente los dos ítems y la mayoría de niños identificó el mínimo y máximo valor de la variable, pero la tercera pregunta tenía la intención de que los estudiantes reconocieran el rango de la distribución, y ningún la halló, entonces podemos concluir que esta pregunta está enfocada en que los estudiantes identifiquen cuando un dato si esta y no está en la distribución y en encontrar los valores mínimos y máximos de la distribución.

Al abordar la cuarta pregunta “*con respecto a los datos de la encuesta ¿dirías que hay pocos o muchos estudiantes del curso 5B que tienen entre 2 y 4 hermanos?*” Se detecta que uno de los estudiantes reconoce que esta pregunta se soluciona a partir de contar las frecuencias (cantidad de niños) que tienen 2,3 y 4 hermanos, además analiza que necesita sumar estas frecuencias, pero no tiene en cuenta comparar la cantidad de niños que tienen entre 2 y 4 hermanos con la cantidad total de niños encuestados, para reconocer si hay muchos o pocos estudiantes en esta parte de la distribución (Una aglomeración de los datos). Se tiene como ejemplo esta interacción:

MEF: *¿Cómo podrían solucionar esta pregunta?*

Estudiante D: Agruparía en la tabla las personas que tienen entre 2 y 4 hermanos y miraría cuantas personas tienen entre 2 y 4 hermanos.

Se reconoce que los MEF no realizaron más preguntas importantes como ¿después de mirar cuantas personas tienen 2,3 y 4 hermanos qué haría para saber si son muchos o pocos estudiantes que tienen esta cantidad de hermanos? Para orientar y generar en los estudiantes nuevas ideas que les ayudara a resolver la cuarta pregunta. En cambio, se tomó un espacio de la clase donde entre todos se resolvió la pregunta, pues se evidencio que los niños tenían dificultades para solucionarla, esta es la interacción:

MEF: *¿Cuántos niños tienen dos hermanos?*

Estudiantes: *cuatro*

MEF: *¿Cuántos niños tienen tres hermanos?*

Estudiantes: *seis*

MEF: *¿Cuántos niños tienen cuatro hermanos?*

Estudiantes: *cuatro*

MEF: *¿Cuántos niños en total fueron encuestados?*

Estudiantes: *veinte*

MEF: *¿Cuántos niños tienen entre 2 y 4 hermanos? Sumen la cantidad de niños que tienen 2, 3 y 4 hermanos ¿Cuántos nos da?*

Estudiantes: *14*

MEF: *14 es más de la mitad de todos los niños encuestados*

Estudiantes: *si*

MEF: *¿Hay muchos o pocos niños tienen entre 2 y 4 hermanos?*

Estudiantes: *Hay muchos*

MEF: *¿Por qué?*

Estudiantes: *más de la mitad de todos los niños encuestados tienen entre 2 y 4 hermanos.*

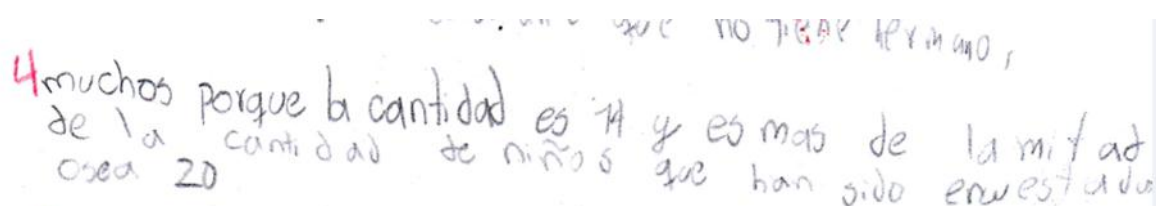
Se reconoce que se llegó a la respuesta esperada, a partir de la suma de las frecuencias, pero esta pregunta también se podía resolver analizando visualmente la distribución con una gráfica de barras, preguntándole a los estudiantes si al observar el diagrama pueden ver si hay muchos niños que tienen 2, 3 y 4 hermanos, que en el resto de toda la distribución.

Más adelante en la socialización se preguntó a los estudiantes cual era la respuesta y ellos comentaron:

Estudiante G: *Muchos, porque hay la mayor cantidad, más de la mitad de los niños encuestados.*

Algunas respuestas escritas presentadas por los estudiantes fueron:

Estudiantes que identificaron la aglomeración de los datos y la pudieron compárala con toda la distribución.



4 muchos porque la cantidad es 14 y es mas de la mitad de la cantidad de niños que han sido encuestados ósea 20

“muchos porque la cantidad es 14 y es más de la mitad de la cantidad de niños que han sido encuetados ósea 20”

Estudiantes que no identifican la aglomeración de los datos

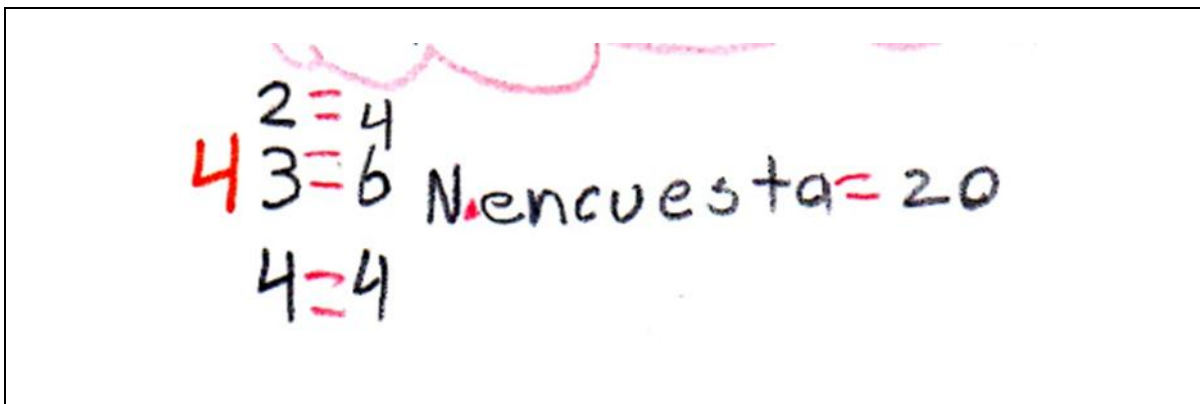


Imagen 5. Ejemplos de respuestas de los estudiantes de la cuarta pregunta

En la Imagen 5 se presenta un ejemplo (Caso a) que ilustra una respuesta que fue considerada correcta, mientras que en el caso b, se muestra una respuesta incompleta pues el estudiante registró las frecuencias de los 3 valores de las variables, pero no hizo nada con ellas para llegar a una respuesta, por ende, no pudo comparar una parte con toda la distribución.

Al analizar las respuestas escritas por los estudiantes, se identificó que el 50 % de los estudiantes respondió correctamente, pero solo el 30% de ellos lo justificó. Esto quiere decir que la mitad del curso reconoce donde está la mayoría de los datos, pero solo la tercera parte de ellos comprende cómo se obtuvo esta respuesta, también se encontró que solo el 4% de los estudiantes registraron las frecuencias de los 3 valores de las variables.

De lo anterior se concluye que la mitad del curso reconoció la aglomeración de los datos en la distribución, pero no visualmente, sino cuantitativamente, posiblemente muchos de los estudiantes no comprendieron la justificación, ya que solo se tomó un camino para resolver la pregunta; por eso es recomendable buscar más caminos donde los niños comparen una parte del conjunto con toda la distribución y encuentren la aglomeración de los datos, por ejemplo, otro camino que se podía tomar era pedir a los estudiantes que crearan un diagrama de barras de la distribución, luego pedir que analizaran visualmente si habían muchos estudiantes que tuvieran 2,3 y 4 hermanos.

Al abordar la quinta pregunta (*“Usted debe presentar un informe a sus compañeros que muestre de manera ágil las respuestas a las preguntas anteriores”*) Se detecta que uno de

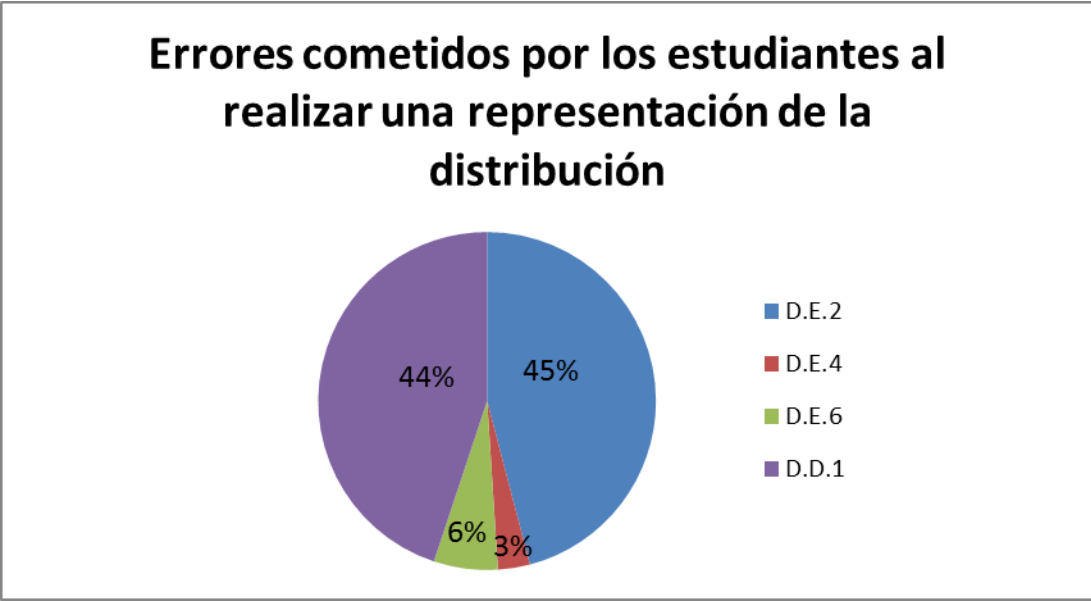
los estudiantes identifica que esta pregunta se soluciona a partir de construir un gráfico. Se tiene como ejemplo, esta interacción:

MEF: *¿Cómo podríamos mostrar a más personas los datos para que resuelvan las preguntas anteriores ágilmente?*

Estudiante E: *Con un gráfico, porque se puede representar y se entiende más rápido que hablado.*

El quinto punto se realizó con el objetivo que los estudiantes organizaran y representaran los datos de la distribución. La mayoría de los estudiantes respondió que debían hacer una gráfica (El 70% de los estudiantes), pero el 60% realmente realizó una representación de la distribución, en este caso dibujaron gráficas de barras, tablas de frecuencias, un diagrama de torta y un pictograma. Esto quiere decir que la mayoría de los estudiantes reconoce que la manera más ágil de analizar una distribución es organizándolos y representándolos con graficas o tablas, además de realizar alguna de estas representaciones.

En las respuestas escritas por los estudiantes de todo el taller se encontró que el 91% de los estudiantes realizaron una representación de los datos, de los cuales el 31% lo hizo para solucionar todas las preguntas del taller, los demás lo hicieron para solucionar la quinta pregunta, pero el 70% de los niños que realizaron una representación de los datos cometieron algún error, aquí está el análisis de los errores que cometieron:



Gráfica 1. Errores cometidos por los estudiantes al realizar una representación de la distribución de los datos.

Aunque la mayoría de los niños realizaron una representación de los datos y cometieron uno o más errores, se puede concluir que los estudiantes encontraron necesario realizar una representación de los datos para analizar las características de la distribución ágilmente.

La sexta pregunta tenía como objetivo identificar que ideas y preguntas surgían a los estudiantes sobre el trabajo realizado en la clase, solo el 10% de los estudiantes respondieron esta pregunta, algunas de las preguntas interesantes que realizaron los estudiantes son:

Pregunta
Caso a

<p>6 Cuantos niños encuestaron</p> <p>20 niños encuestados</p> <p>“¿Cuántos niños encuestaron? 20 niños encuestados”.</p>
<p>Caso b</p> <p>6. En la tabla hay niños que tienen 4 hermanos y otros que tienen 2 hermanos ¿Qué relación hay entre esos 2 datos?</p> <p>Rta: Que 4 niños tienen 4 hermanos y que 4 niños tienen 2 hermanos</p> <p>“En la tabla hay niños que tienen 4 hermanos y otros que tienen 2 hermanos ¿Qué relación hay entre estos dos datos?”</p> <p>Rta: Que 4 niños tienen 4 hermanos y 4 niños tienen 2 hermanos”.</p>

Imagen 6. Ejemplos de respuestas de los estudiantes a la sexta pregunta

En la imagen 6 se presentan dos respuestas escritas por los estudiantes, en el caso a, se observa que el estudiante comienza a cuestionarse cuantos niños fueron encuestados en la situación propuesta y en el caso b el niño analiza que datos tienen la misma frecuencia en la distribución.

Aunque fueron muy pocos los estudiantes que realizaron una pregunta y la resolvieron teniendo en cuenta todo el trabajo realizado en clase, se puede observar que los niños comienzan a realizar preguntas orientadas a analizar las características de la distribución como por ejemplo, en el caso b, el estudiante analiza en que partes de la distribución se

encuentra la misma aglomeración de los datos, esto quiere decir que con este tipo de actividades se está logrando que los estudiantes creen un acercamiento a la noción de distribución y comiencen a analizar sus características.

Al hacer el análisis de resultados teniendo en cuenta los niveles de razonamiento de la distribución (Reading & Reid, 2006), se encontró que el 58% de los estudiantes tuvieron una concepción multiestructural de la distribución al desarrollar el taller, ya que pudieron fijarse en más de un elemento clave de la distribución, sin embargo, no establecieron relaciones entre tales elementos. El 32% tuvieron una concepción uniestructural de la distribución ya que se enfocan en solamente un elemento de la distribución como por ejemplo la frecuencia de un dato en específico. Por último, el 14% tuvieron una visión preestructural de la distribución ya que no se refirieron a ningún elemento clave de la distribución.

3.2. Segunda Actividad

Esta actividad pretendía que los estudiantes compararan las distribuciones dadas a partir de sus valores máximos y mínimos, además de reconocer las aglomeraciones y describir sus frecuencias cuantitativamente, también podían hallar un dato representativo de cada una de las distribuciones, para así abordar el problema propuesto. (ver anexo C)

Para analizar los resultados de la actividad se van a describir las participaciones de los estudiantes para abordar el problema propuesto; así como algunos errores, obstáculos o dificultades que se observaron a lo largo de la actividad. (Ver anexo D)

En primer lugar, se pidió a los estudiantes que leyeran el enunciado de la situación propuesta y a partir de la información dada, buscaran como podían analizar las distribuciones para abordar el problema. A continuación, se muestra una de las participaciones en la clase:

MEF: *¿Qué podemos notar en las tablas de frecuencias o en los gráficos de barras para responder la pregunta?*

Estudiante A: *Analizar cuantas niñas y niños utilizan las tallas mayores de zapatos.*

MEF: *¿Cuáles son las tallas mayores y menores de zapatos?*

Estudiante B: *37, 38 y 39 (Tallas Mayores).*

MEF: *¿Cuáles son las tallas menores de zapatos?*

Estudiante C: *Las tallas menores son 34, 35 y 36.*

Se pidió a otro estudiante que explicara lo comentado por el compañero, para que todos los estudiantes tuvieran en cuenta esta sugerencia para solucionar la pregunta problematizadora. Esto fue lo que contestó:

Estudiante B: *Tenemos que mirar las tallas de los zapatos tanto de las niñas como de los niños, luego observar que tanta cantidad de niñas y niños ocupan esta talla.*

MEF: *Contar cuantos niños y niñas utilizan las tallas 39, 38 y 37, en cada distribución, luego comparar y mirar en que distribución hay mayor cantidad de estudiantes.*

En las conversaciones mostradas hay dos ideas importantes que comentan los estudiantes. La primera es comparar las dos distribuciones y la segunda, analizar la aglomeración de los datos en la parte final de las de las distribuciones, que en este caso es la suma de las frecuencias de las tallas 37, 38 y 39. Los niños ven como necesidad comparar y analizar la concentración de los datos de las dos distribuciones para llegar a la solución del problema.

Algunas respuestas escritas por los estudiantes utilizando este método para solucionar el problema:

Talla	Niños	Niñas
37	7	3
38	5	7
39	5	1
11		11
17		11

Esto es falso por que en la talla más grande predominan los niños con una gran cantidad de 17 niños contra 11 niñas

“Esto es falso porque en las tallas más grandes predominan los niños con gran cantidad, ya que son 17 niños contra 11 niñas.”

Imagen 7. Ejemplo de respuesta uno de un estudiante al problema propuesto para la segunda actividad

En la imagen 7 podemos evidenciar un ejemplo de las respuestas escritas por los estudiantes, en este caso el estudiante halla la cantidad de niños y niñas que utilizan las tallas 37, 38 y 39 (aglomeración de los datos en una parte de la distribución), luego compara en cuál distribución hay mayor cantidad de personas, que en este caso es la distribución de las tallas de zapatos de los niños y a partir de ello resuelve la pregunta propuesta.

Respecto a resultados cuantificables, se puede señalar que el 80% de los estudiantes respondieron la pregunta problematizadora usando como justificación la comparación de la aglomeración de los datos en cada una de las distribuciones.

También se encontró que 2 estudiantes (6%) resolvieron la pregunta principal comparando las frecuencias del dato mayor en cada una de las distribuciones. Aunque llegaron a la respuesta correcta, la justificación presentada no sustenta completamente el resultado; ya que, al cambiar únicamente la frecuencia del dato mayor en ambas distribuciones, de tal manera que las tallas mayores de los niños todavía tengan mayor frecuencia que las tallas mayores de las niñas, puede conducir a una respuesta incorrecta usando el mismo razonamiento.

En la imagen 8 se observa un ejemplo de la respuesta escrita por un estudiante realizando el análisis anteriormente descrito:

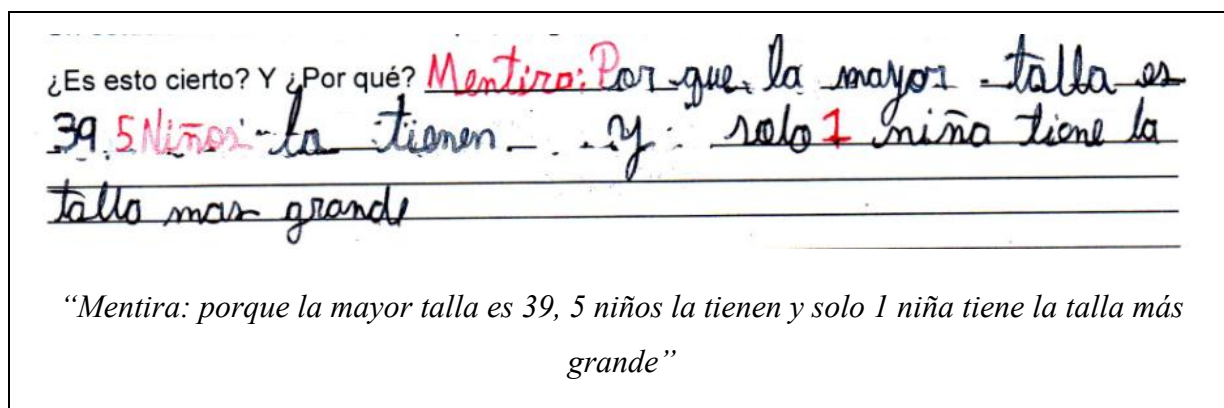


Imagen 8. Ejemplo de respuesta dos de un estudiante al problema propuesto para la segunda actividad

Del mismo modo, otro estudiante mostró una manera distinta de solucionar el problema, analizando la moda de cada una de las distribuciones y compararlas, como se muestra en la siguiente participación:

Estudiante D: *miraría las barras más altas (la talla que más se repite en la distribución), que en este caso son 37 para los niños y 38 para las niñas, como 38 es mayor que 37, entonces las niñas tienen el pie más grande.*

Este estudiante intentó responder el problema a partir de comparar la moda de las dos distribuciones, sin tener en cuenta otras características de la distribución como la densidad de los datos en algunas partes de la distribución y su dispersión. En este caso el estudiante

no tiene una visión multiestructural de la distribución, pues al abordar la pregunta consideró únicamente una de las características de la distribución.

El estudiante D escribió la siguiente respuesta para responder la pregunta problema:

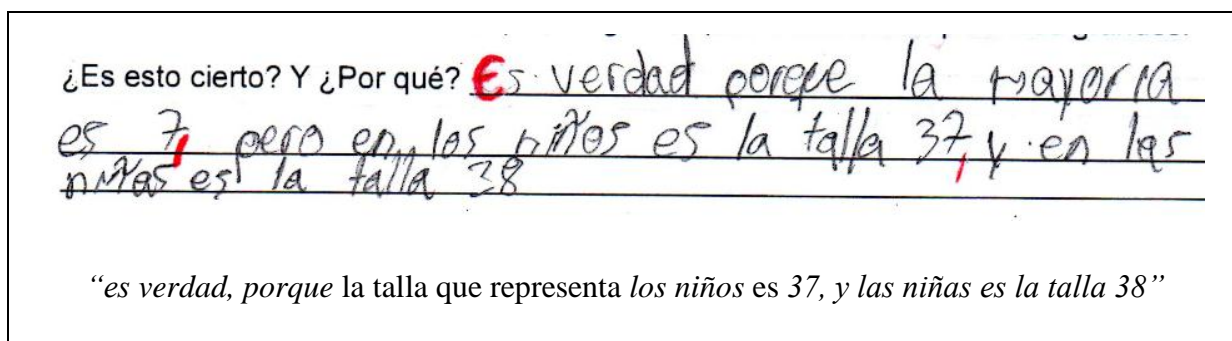


Imagen 9. Ejemplo de respuesta dos de un estudiante al problema propuesto para la segunda actividad

Analizando la respuesta del estudiante D, es posible apreciar que no tiene una visión multiestructural de la distribución, y solo tiene en cuenta la moda de los datos para justificar su respuesta. Además, se encontró que el 6% de todos los estudiantes respondieron esta pregunta a partir de comparar y hallar un representante de cada una de las distribuciones.

Cabe resaltar que después del comentario realizado por el estudiante D, en la clase se discutió sobre cuál podría ser un dato que represente a cada una de las distribuciones, la mayoría de los estudiantes acordaron que el dato que representaba a cada una de las distribuciones era la moda. Esto se puede ver en la siguiente interacción:

MEN: *¿Cuál sería la talla de zapato que represente todas las tallas de zapatos que utilizan de los niños?*

Estudiante G: *es la talla 38*

MEF: *¿Por qué?*

Estudiante G: *Porque es la barra más larga y 7 niños utilizan esta talla de zapato.*

MEF: *Teniendo en cuenta lo dicho por su compañero ¿cuál sería la talla de zapatos que representa a las niñas?*

Estudiante F: *puede ser la talla 37, porque muchas niñas usan esta talla.*

Aunque esta fue una conclusión general en la socialización, el 6% de todos los estudiantes reportó en sus respuestas escritas que uno de los representantes de la distribución podía ser su mediana; ellos cometieron el error de hallar la mediana a un grupo de datos cualitativos (C.E.1), ya que los datos propuestos en la segunda actividad son cualitativos, ya que las tallas de los zapatos son etiquetas. En la imagen 9 se puede observar un ejemplo de la respuesta de los estudiantes que cometieron el error C.E.1.

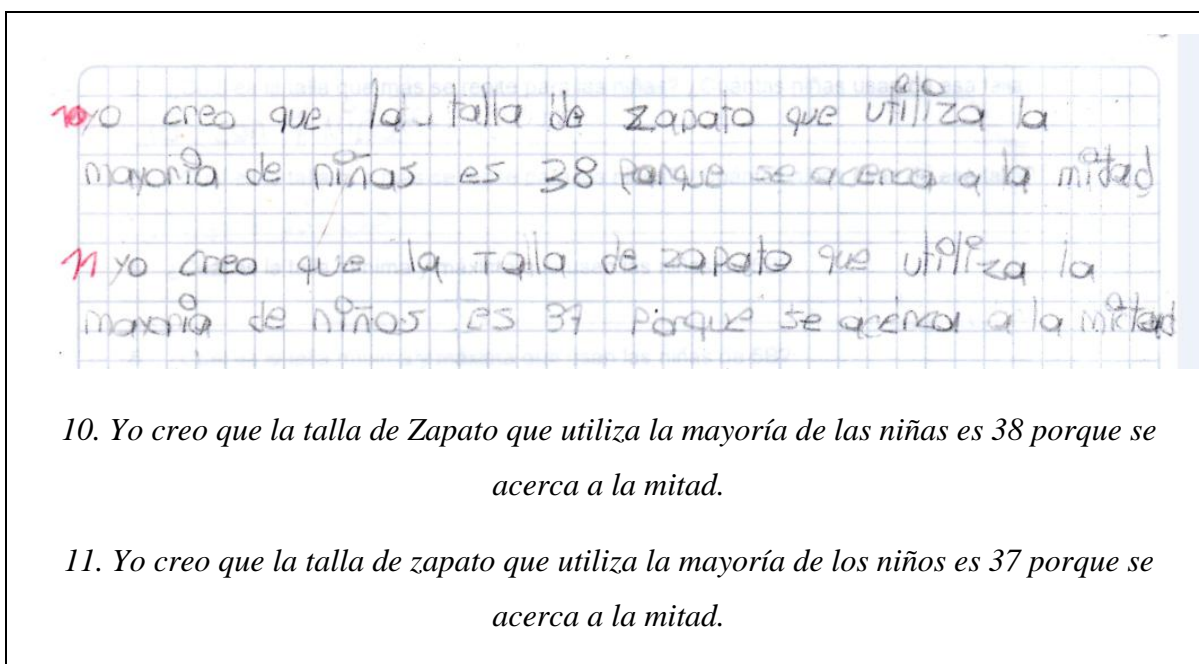


Imagen 10. Respuesta de un estudiante que halla la mediana a datos cualitativos

También se encontró con estudiantes que tuvieron en cuenta las características de centro y densidad en la comparación de las distribuciones, pero no pudieron relacionarlas para resolver la pregunta y terminaron confundiéndose para llegar a la solución del problema. Esto se puede evidenciar en la imagen 10 que muestra la respuesta de un estudiante a la pregunta propuesta.

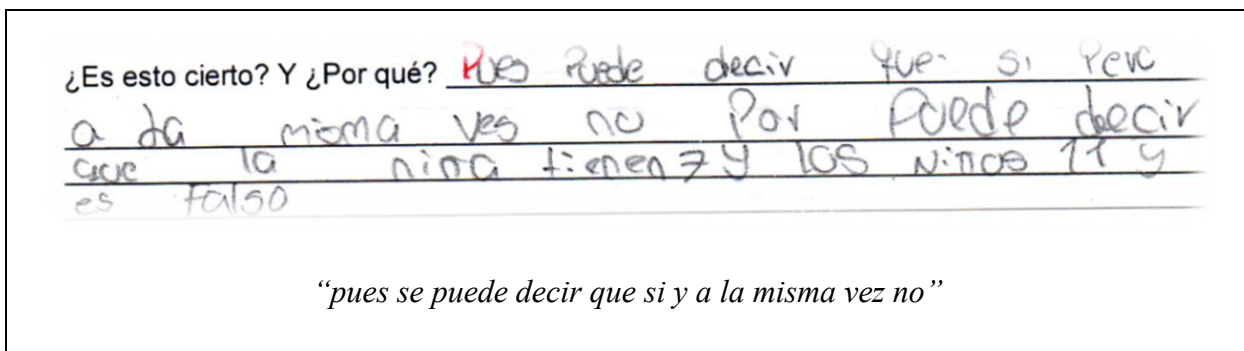
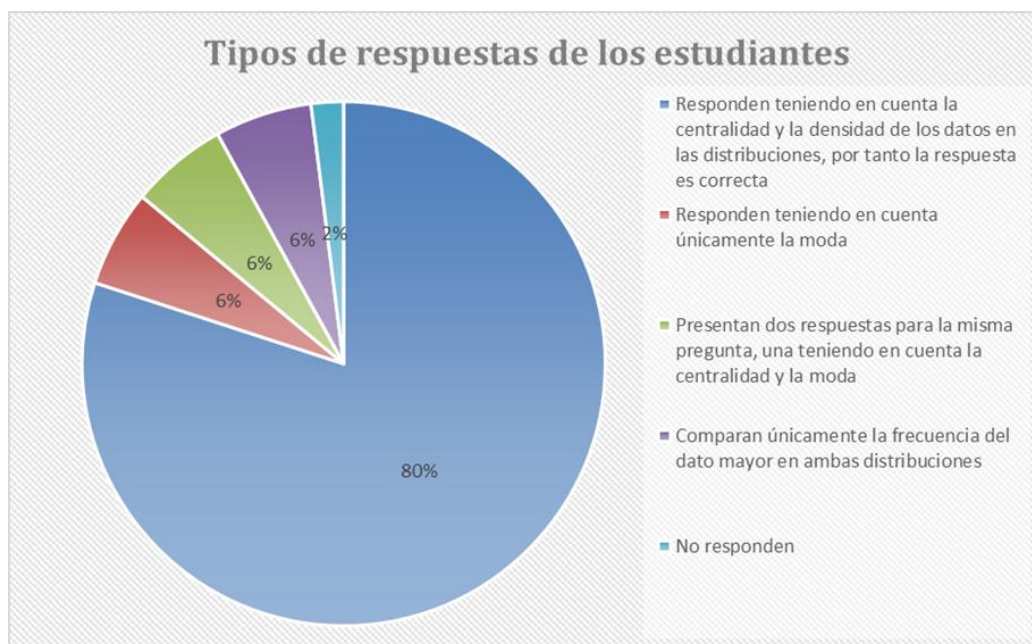


Imagen 11. Respuesta de un estudiante que no puede relacionar el centro y la densidad de las distribuciones

Como se puede ver en la imagen 11, en la respuesta del estudiante al guiarse por el análisis de la centralidad (la moda) piensa que las niñas tenían el pie más grande que los niños, en cambio con la comparación de la suma de las frecuencias de las tallas mayores de las distribuciones concluye que los niños tienen el pie más grande que las niñas.

De manera general, se encontró diferentes respuestas con cuatro justificaciones diferentes para responder la pregunta principal, estas son:



Gráfica 2. Justificaciones dadas por los estudiantes para responder la pregunta principal de la segunda actividad.

Al analizar los resultados de la actividad teniendo en cuenta los niveles de razonamiento de la distribución presentado por Reading y Reid (2006), se encontró que el 4% de los estudiantes tuvieron una concepción preestructural de la distribución ya que experimentaron dificultades al identificar o referirse a elementos claves de la distribución. El 36% de los estudiantes tuvieron una concepción uniestructural de las distribuciones ya que abordan la situación problema comparando sólo un elemento clave (comúnmente la frecuencia del dato mayor o la moda). El 47% tuvieron una concepción multiestructural, ya que comparan más de un elemento clave de las distribuciones para abordar la pregunta del problema, y por último, el 13% tuvo una concepción relacional de la distribución, ya que además de tener en cuenta más de un elemento clave de la distribución, identifica que implicaciones tiene comparar las distribuciones usando cada uno de estos elementos.

3.3. Tercera Actividad

La actividad pretendía que los estudiantes compararan dos distribuciones y evaluaran críticamente la información presentada en una de éstas. Luego se les solicitaba que construyeran una tercera distribución que diera solución al problema propuesto teniendo en cuenta los valores máximos y mínimos, moda, la frecuencia de cada dato y la forma de la primera distribución (ver anexo E).

Para analizar los resultados de la actividad se van a describir las participaciones de los estudiantes para abordar el problema propuesto; así como algunos errores, obstáculos o dificultades que se observaron a lo largo de la actividad. (Ver anexo F)

En primer lugar, los MEF explicaron la situación problema que se abordaría a lo largo de la clase. Luego, se pidió a los estudiantes que, a partir de la información dada en el problema, identificaran una posible ruta de solución a éste, pero por el contexto del problema surgió la siguiente conversación:

Estudiante A: *“porque solo iban a entregar 20 pares de patines si hay 40 estudiantes”.*

Docente: *“Es necesario acoplarse al problema y buscar una solución para que todos los estudiantes utilicen los 20 pares de patines”*

Estudiante B: *“Si el descanso dura 30 minutos se divide el curso en dos grupos, cada uno de 20 personas y los primeros 15 minutos patina un grupo y en los últimos 15 minutos patina le otro grupo de estudiantes.”*

Estudiante C: *“Se divide el curso en dos grupos, y se turnan los grupos para montar en los patines”.*

Estas participaciones permiten entrever que algunos estudiantes no estaban de acuerdo con la situación propuesta, así que optaron por solucionar el problema con otro tipo de estrategias que desplazan el trabajo en estadística. Por tanto, fue necesario impulsar a los estudiantes a resolver el problema usando algunas de las tareas previas que están

relacionadas con razonar mediante las características de una distribución. Para esto se dieron las siguientes indicaciones:

MEF: *“Vamos a centrarnos en buscar una estrategia para solucionar el problema planteado, miremos que nos preguntan. Está de acuerdo con las personas de la fundación de traer esta cantidad de pares de patines para cada una de las tallas escritas en la tabla”*

Estudiante G: *“Yo no estoy de acuerdo con la cantidad de patines que quieren traer, como esta en la tabla, porque el diagrama empieza desde 34 y el de la tabla en 33 y el diagrama termina en 40 y la tabla termina en 41”.*

En esta interacción podemos observar que los estudiantes se están acoplando a la situación propuesta y comienzan a comparar las distribuciones, a partir de esto el estudiante G encuentra el valor máximo y mínimo de la primera distribución (talla de zapatos de los estudiantes de 5C), a partir de este comenario más niños identifican las diferencias que tienen estas distribuciones, como se muestra en el siguiente dialogo:

MEF: *“Para mirar si los datos que nos muestra la fundación concuerdan con la distribución de las tallas de zapatos de los niños de 5C ¿qué debemos hacer?”*

Estudiante D: *“Comparando las distribuciones”.*

MEF: *“¿Cómo las compararía?”*

Estudiante D: *“por ejemplo, hay 2 niños que utilizan la talla 34 y las personas de la fundación quieren traer 3 pares de patines de esta talla, yo compararía en número de niños de cada talla con el número de patines que quieren traer”*

Se identifica que este estudiante comienza a apreciar las diferencias particulares entre las dos distribuciones, pues analiza la cantidad de niños que utilizan cada una de las tallas de la distribución, con el número de patines que quieren traer de esa talla, como es una idea importante, se pide a los niños que presten atención a la idea presentada, para que al momento de responder la pregunta problematizadora todos tuvieran en cuenta esta sugerencia, por ende, se desarrolla la siguiente conversación:

MEF: “¿Alguien quiere explicar lo que dijo su compañero?”.

Estudiante E: “Observar la talla de zapatos, la cantidad de niños que la utiliza, luego compararla con la tabla, luego mirar si la cantidad que esta hay es correcta o no”.

MEF: “vamos a retomar el ejemplo do Holman (Estudiante D) hay 2 niños que utilizan la talla 34 y las personas de la fundación quieren traer 3 pares de patines de esta talla ¿esto tiene sentido?”

Estudiante D: “no, porque sobra un par de patines, y quien lo va a usar”

MEF: “entonces ¿Cuántos patines deberían donar?”

Estudiante D: “dos”

MEF: “Recuerden que son 40 estudiantes y solo van a donar 20 pares de patines”

En la conversación podemos evidenciar que la Estudiante E reconoce que se deben comparar las frecuencias de las distribuciones para un mismo dato (talla de zapato) e analizar si coinciden o no; pero como se ve en la interacción aún persiste la idea de que se debían traer la misma cantidad de patines que niños que usaban una talla en particular (no tienen en cuenta el contexto del problema), aunque esta dificultad se pudo superar, tomando como ejemplo la frecuencia de dos datos, esto se evidencia en la siguiente interacción:

MEF: “Sabemos que hay 12 niños que utilizan la talla 37, entontes ¿cuántos patines deberían entregar de esa talla?”

Estudiante H: “12”

MEF: “Si traen 12 patines de esa talla, sobran 8 ¿estos 8 patines nos alcanzarían para las otras tallas?”

Estudiante J: “No”

MEF: “Miren hay 10 niños que utilizan la talla 35 ¿Cuántos pares de patines deberían donar de esta talla?”

Estudiantes: [los estudiantes se quedan en silencio y no responden]

Estudiante D: “seria decirle a la fundación que mandara la mitad de cada talla”

MEF: “un ejemplo”

Estudiante D: “si 10 niños utilizan la talla 35, pedir a la fundación que envíen 5 pares de patines de esta talla”

Como se ve en la interacción, se mostraron dos ejemplos particulares, que fueron las frecuencias más altas de la distribución, donde su suma es mayor a la cantidad de patines que quieren donar las personas de la fundación, esto logro que los estudiantes reconocieran cuantos pares de patines se debían donar por cada talla. Así llego a que las personas de la función deben donar la mitad de los pares de patines del número de niños que utilizan cada una de las tallas mostradas en la primera distribución.

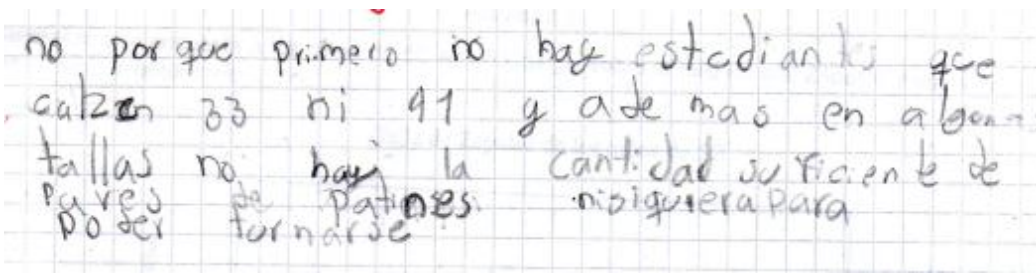
Analizando las expuestas escritas de los niños se pudo encontrar que:



Gráfica 3. Tipos de respuestas de los estudiantes a la situación propuesta en la tercera actividad

En la gráfica 3 se puede evidenciar los diferentes tipos de respuestas dadas por los estudiantes para la solución de la situación propuesta, el 80% de los estudiantes crearon una nueva distribución, teniendo en cuenta los criterios dados del problema, en este caso ellos encontraron de la primera distribución los valores máximos y mínimos, la frecuencia de cada dato, para obtener su mitad, y a partir de estos datos crear una nueva distribución y obtener la representación de los datos.

En la imagen 12 se muestran algunos ejemplos de estas respuestas.



no porque primero no hay estudiantes que calzen 33 ni 41 y además en algunas tallas no hay la cantidad suficiente de pares de patines, ni siquiera para poder turnarse

Talla de Patines	Cantidad de pares Patines
34	1
35	5
36	2
37	6
38	3
39	1
40	2

Imagen 12. Ejemplo de respuesta correcta para la solución de la situación problema de la tercera actividad

En cambio, el 12% de los niños no tuvo en cuenta todas las características dadas del problema, como la cantidad de patines que quería donar la fundación (20 patines), por esta razón, solucionaron la actividad representando la primera distribución en una tabla de frecuencia, en la imagen 13 se muestra un ejemplo de este tipo de respuesta.

$N = \text{niño}$	$T = \text{talla}$
2	34
10	35
4	36
12	37
6	38
2	39
4	40

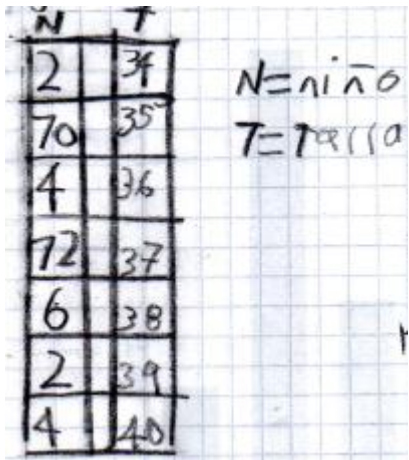


Imagen 13. Ejemplo de respuesta incorrecta al problema propuesto en la tercera actividad

Analizando las respuestas escritas de los estudiantes, teniendo en cuenta los niveles de la jerarquía del razonamiento de la distribución, se puede evidenciar que el 28% de los estudiantes razonan relacionamente (R1) ya que comunican por escrito las diferentes características de la distribución como los valores máximos y mínimos de la distribución, la frecuencia de cada dato y su representación gráfica, el 59% de los niños tienen un razonamiento multiestructural (M1) ya que hallan las características de la distribución para realizar su representación gráfica, pero no comunican de manera escrita estas características.

El 13% tienen un nivel de razonamiento uniestructural (U1), ya que solo se enfocan en una característica de la distribución, como comparar las frecuencias de un mismo dato ó hallar el máximo o mínimo de las distribuciones. En la imagen 14 se puede ver ejemplos de respuestas de cada uno de los niveles de razonamiento.

Ejemplo de respuestas de los estudiantes

Relacional (R1)

Si, porque se turnan los patines los niños un día la mitad y el otro día la otra mitad.
 No, porque 33 y 41 no están en las tallas de los niños de 5C, tocaría 1 de 34, 5 de 35, 2 de 36, 6 de 37, 3 de 38, 1 de 39, 2 de 40 y se turnan los patines

“Si, porque se turnan los patines los niños un día la mitad y el otro día la otra mitad. No porque 33 y 41 no están en las tallas de los niños de 5C, tocaría 1 de 34, 5 de 35, 2 de 36, 6 de 37, 3 de 38, 1 de 39, 2 de 40 y se turnan los patines”

Talla	# de patines
34	1
35	5
36	2
37	6
38	3
39	1
40	2
Total	20

Multiestructural (M1)

0: No, porque la cantidad de pares de patines de cada talla tiene una cantidad errónea. Pues las cantidades de niños en una talla a veces es más grande y otras es más chica la cantidad.

“No, porque la cantidad de pares de patines de cada talla tienen una cantidad errónea, pues las cantidades de niños en una talla a veces es más grande y otras es más chico la cantidad”

05:45

Talla de los Patines	Número de Patines
34	1
35	5
36	2
37	6
38	3
39	1
40	2

31: 1
 33: 5
 36: 2
 37: 6
 38: 3
 39: 1
 40: 2

Uniestructural (U1)

no, por que no hay tallas 33 ni 41

“no, porque no hay tallas 33 ni 41”

1) NO porque en la tabla hay datos que no son ciertos como por ejemplo la talla 37 dice que hay 12 niños pero solo hay un par de patines de talla 37

“No, porque en la tabla hay dato que no son ciertos, como, por ejemplo, la talla 37 hay 12 niños, pero solo hay un par de patines de talla 37”

Imagen 14. Ejemplos de respuestas que concuerdan con los niveles de razonamiento de la distribución

4. BALANCE DEL TRABAJO

Este apartado busca presentar un balance de la propuesta de enseñanza teniendo en cuenta cuatro aspectos: el primero es la consecución de los propósitos considerados, tanto de investigación como de enseñanza; el segundo es la pertinencia y utilidad de la investigación previa a la implementación de la propuesta; el tercero es evaluar los alcances y limitaciones del trabajo en el campo de investigación de la Educación Estadística; y el cuarto es el cumplimiento de los objetivos específicos propuestos para el desarrollo de esta monografía.

4.1. Balance de las actividades desde los propósitos

Para evaluar la propuesta desde el cumplimiento de los propósitos se tendrán en cuenta los propósitos de enseñanza y de investigación presentados en la planificación de las actividades, se describirá su alcance, se reportarán aquellas incidencias que tengan efecto en las posibles limitaciones al llevar a cabo las actividades, y se propondrán las posibles rutas que potencien el alcance de la propuesta.

4.1.1. Propósitos de investigación

El primer propósito “Promover la conceptualización de la distribución a través de sus características como la centralidad, dispersión y forma” fue cumplido de manera parcial, ya que si bien se trabajaron acercamientos intuitivos a la distribución a través de las características antes mencionadas, no hubo espacios que permitieran la consolidación de caracterización de estas nociones; ya que en el desarrollo de las actividades no se presentó espacios que permitieran la socialización de resultados, exposición de errores y dificultades que experimentaron los estudiantes, principalmente causado por el espacio limitado a cuatro sesiones de clase que otorgó el colegio para llevar a cabo la implementación de la propuesta; por otro lado, la planificación de las actividades que estuvo centrada en la resolución de un problema dejó de lado espacios en los que se revisaran e institucionalizaran conceptos y nociones que hacen parte de la distribución. Por tanto, el objetivo no es cumplido a cabalidad, ya que la aplicación de las actividades no

necesariamente promovió una conceptualización de la distribución, sin embargo, brinda una posible ruta de abordaje a la noción de distribución a través de las ideas que la componen.

El segundo propósito “acercar al estudiante a una conceptualización de la distribución a través del trabajo con situaciones contextualizadas procurando el uso de representaciones gráficas y tabulares” fue cumplido, ya que en todas las actividades se promovió actividades como la lectura, análisis y construcción de gráficos y tablas, sin embargo, como se mostró en los resultados los estudiantes cometen errores usando los sistemas de representación. Estos errores no pudieron ser reorientados, sin embargo, quedó como recomendación al profesor tutor trabajar con sistemas de representación en miras de identificar y elaborar estrategias para la superación de los errores y dificultades asociadas a los sistemas de representación.

El tercer propósito “identificar los registros de representación que los estudiantes priorizan al momento de abordar las distintas actividades” permitió identificar que, en el marco de estas actividades, no hay un registro que prioricen los estudiantes, es decir, no es posible afirmar en el marco de esta propuesta que los estudiantes prefieren los registros gráficos o tabulares. Sin embargo, si se puede afirmar que los estudiantes, en su mayoría, identificaban las mismas características de una distribución independientemente del sistema de representación con el que contaban. Por tanto, el identificar los sistemas de representación que utilicen los estudiantes para abordar problemas usando el razonamiento sobre la distribución es una posibilidad de investigación para futuros trabajos.

El cuarto propósito “analizar los posibles errores, dificultades y obstáculos de aprendizaje relacionados con la distribución y sus conceptos subyacentes, con el ánimo de proponer acciones que en futuras aplicaciones de actividades puedan promover su superación” se ha concretado, ya que fue posible identificar los errores considerados en los referentes didácticos y ponerlos en evidencia como se han mostrado en los resultados de las actividades. Más adelante se propondrán algunas consideraciones necesarias para promover la superación de las dificultades, errores y obstáculos que los estudiantes puedan llegar a experimentar con experiencias futuras de aprendizaje en el que se tengan en cuenta el razonamiento sobre la distribución.

4.1.2. Competencias para los estudiantes

La primera competencia propuesta para los estudiantes “identificar características de una distribución relacionadas con la centralidad, la densidad, dispersión y forma mediante la lectura e interpretación de los registros gráficos y tabulares” ha sido cumplida por la mayoría de los estudiantes; ya que como, es posible apreciar en los resultados de la propuesta, los estudiantes realizan tareas como encontrar la moda, identificar el rango, la densidad y la frecuencia de los datos de una distribución en los distintos sistemas de representación brindados.

La segunda competencia propuesta “comparar distribuciones a través de sus características” ha sido cumplida, ya que en el desarrollo de la segunda y tercera actividad, se puede apreciar que los estudiantes son capaces de comparar distribuciones a través de sus características, principalmente a través de la comparación de las frecuencias de los datos, también se puede apreciar que algunos estudiantes incluso son capaces de relacionar características de centralidad y de densidad a través de estudiar la frecuencia de ciertos datos en cada una de las distribuciones.

La tercera competencia “relacionar la distribución de los datos con el contexto en el cual se está considerando el trabajo” fue conseguida por los estudiantes, ya que en el resultado es posible evidenciar que las respuestas de cada una de las preguntas están expresadas en términos del problema, por lo que es posible afirmar que en el marco de la aplicación de la secuencia se logró conseguir que los estudiantes identificaran las características del problema, y que resolvieran las preguntas teniendo en cuenta esas características.

4.2. Pertinencia y utilidad de los antecedentes a la propuesta

Para realizar el balance de los antecedentes a la propuesta se tendrán en cuenta los hallazgos de investigación de los apartados anteriores. El objetivo es determinar posibles carencias o insuficiencias en la investigación previa al diseño de actividades, con el ánimo

de exponer cuáles son esos aspectos a tener en cuenta para experiencias en aula o de investigación futuras.

Respecto al marco conceptual, se puede evidenciar que muchos de los conceptos expuestos, como las medidas de tendencia central o dispersión no fueron usados para la gestión de las clases. Por tanto, se reconoce que una posible ruta que podría tener este apartado es una recopilación de las experiencias en aula con el tratamiento de la centralidad, la dispersión y la forma, ya que el objetivo de esta propuesta está orientado al desarrollar estas nociones de forma arcaica mediante la resolución de problemas.

Respecto a los referentes didácticos, han expuesto algunos de los errores, dificultades y obstáculos de enseñanza y aprendizaje referidos a la distribución y a sus ideas subyacentes; los cuales también han sido tenidos en cuenta para el desarrollo de las actividades y la evaluación de los resultados. Sin embargo, se reconoce que en los referentes didácticos considerados sólo se han expuesto aquellos que afectan directamente al concepto de distribución, por lo que se reconoce la necesidad de elaborar trabajos investigativos que puedan relacionar el desarrollo de esta propuesta con la cultura estadística (Batanero, 2002).

Respecto a la descripción de la población de estudio es necesario aclarar que, si bien se puede apreciar el trabajo realizado por los estudiantes con la lectura de gráficas, también demostraron errores y dificultades con la representación de la información estadística. Por tanto, para futuras actividades de investigación o en aula es necesario realizar insumos que permitan identificar las competencias estadísticas que tienen los estudiantes; ya que, en desarrollo de este trabajo, la planificación de las actividades se realizó con los supuestos que tenía el docente acerca de las competencias estadísticas de los estudiantes.

4.3. Alcances y limitaciones de la investigación

En este apartado se pretende describir algunos de los alcances y limitaciones del trabajo investigativo que se presenta en esta monografía. Estos han sido identificados por los

autores luego de la experiencia en el aula y en el desarrollo de la evaluación de la propuesta; luego, se han redactado con el objetivo de mostrar algunas consideraciones para tener en cuenta en el desarrollo de experiencias en aula o futuras investigaciones.

4.3.1. Alcances de la investigación

Uno de los alcances de la propuesta es la descripción de una propuesta en el aula centrado en el estudio de múltiples características de una distribución. Además, recopila algunas caracterizaciones de la distribución en investigaciones previas, que han sido expuestas por los autores.

También es posible encontrar un conjunto de actividades que pretenden desarrollar la noción de distribución según la caracterización expuesta por Bakker & Gravemeijer (2004), en la que se pretende estudiar la distribución a través de su centralidad, forma y dispersión de los datos; además se puede evidenciar que tales tareas pueden ser desarrolladas a través del estudio de situaciones problema.

Además, esta propuesta contrasta algunas de las competencias que deben adquirir los estudiantes para razonar acerca de la distribución con algunas expuestas en los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas, y es posible evidenciar que hay mínimas diferencias entre ambos documentos. Es decir, el razonamiento acerca de la distribución desarrolla gran parte de las competencias del pensamiento aleatorio para grado quinto.

Por último, esta propuesta muestra algunas de las limitaciones y posibles nuevas rutas de investigación que deberían ser considerados al llevar a cabo futuras investigaciones o acciones en el aula, por tanto, la propuesta muestra algunos problemas que pueden abordarse en el futuro, con el ánimo de desarrollar las características del pensamiento aleatorio en los estudiantes a través del razonamiento acerca de la distribución.

4.3.2. Limitaciones en la investigación

Una de las principales limitaciones que se pueden apreciar es la intensidad de las actividades propuestas, ya que al ser sólo tres actividades limitan la propuesta a un

acercamiento a la noción de la distribución, por tanto, para futuras acciones en aula o investigación es necesario tener posibilidad de más sesiones de clase que permitan aplicar más actividades, realizar socialización e institucionalización del conocimiento y una evaluación a los estudiantes.

También es necesario mostrar que el trabajo se enfoca en desarrollar nociones de la distribución mediante la resolución de problemas, dejando de lado el cómo afecta el desarrollo de la alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico en los estudiantes. Por otro lado, este trabajo no tuvo en cuenta el desarrollo de la Cultura Estadística. Por tanto, para futuras investigaciones o acciones en el aula de estadística se reconoce como necesario realizar una propuesta que aporte al desarrollo de la Cultura Estadística en los estudiantes.

4.4. Cumplimiento de los objetivos específicos de investigación

En este apartado se espera mostrar un balance de cumplimiento de los objetivos específicos propuestos. Es necesario aclarar que hay apartados de éste capítulo en el que se han cuestionado asuntos que están estrechamente ligados con los objetivos específicos por tanto en caso de ser necesario, se aludirá a otras partes del documento para presentarlos.

Respecto al primer objetivo “consolidar un marco conceptual que permita caracterizar teóricamente a la distribución, y que permita consolidar una propuesta de enseñanza en torno a ésta” se puede afirmar que el objetivo se ha cumplido, ya que en el trabajo se han expuesto distintas caracterizaciones de la distribución. Luego se ha escogido una de esas caracterizaciones y se ha elaborado un desarrollo teórico que sirve de insumo para el distinto desarrollo de las actividades. Cabe resaltar que se han mencionado anteriormente en el apartado 4.2 *Pertinencia y utilidad de los antecedentes a la propuesta* algunas limitaciones del marco teórico, las cuales serán tenidas en cuenta para futuros trabajos en el aula y en la investigación; en tal apartado se pueden apreciar las limitaciones que, desde la experiencia de enseñanza, se han identificado. En resumen, se reconoce que en el marco

teórico se pudieron incluir asuntos como análisis didácticos y epistemológicos de las ideas que subyacen a la distribución, como la centralidad o la dispersión.

Respecto al segundo objetivo “proponer una secuencia de tareas en torno al trabajo con la distribución que esté orientada a los estudiantes de grado quinto” se ha cumplido, ya que al desarrollar la secuencia de actividades se ha buscado usar los antecedentes expuestos. Además, se propusieron objetivos de la propuesta, tanto en la enseñanza como en la investigación que han sido expuestos anteriormente en el apartado 4.1 *Balance de las actividades desde los propósitos*, cuyas limitaciones y alcances han sido desarrollados detalladamente. En resumen, a través de la reflexión acerca de los resultados logrados en el desarrollo de la propuesta, se pudo identificar que una de las principales limitaciones fue la falta de tiempo para realizar muchas más actividades, ya que la conceptualización de la distribución puede ser desarrollada a lo largo de la enseñanza de la estadística (Reading & Reid, 2006).

Respecto al tercer objetivo “describir y valorar el alcance de la secuencia de la investigación previa y las tareas propuestas a los estudiantes, teniendo en cuenta sus aprendizajes logrados”, se entiende este capítulo de balance del trabajo como la evidencia del cumplimiento de este objetivo, ya que se ha elaborado a través de la observación y análisis reflexivo de las acciones, procesos y resultados llevados a cabo en el desarrollo de este trabajo.

Respecto al cumplimiento del objetivo general, fue posible evidenciar que algunos de los estudiantes tuvieron una transición entre los niveles de razonamiento de la distribución desde el nivel preestructural hasta el multiestructural. Además, Moore (citado por Fernández, Soler & Sarmiento, 2007) exponen que “... *Responder a la pregunta ¿Qué conceptos y habilidades específicas serán necesitadas en el contexto de un trabajo específico? Es un asunto de competencia estadística*” (p. 1). Implica que en este trabajo se desarrollaron competencias estadísticas en torno a la distribución; puesto que los estudiantes tuvieron que desarrollar habilidades específicas como identificar las características propias de una distribución; comparar dos distribuciones a través de esas

características, y construir distribuciones con ciertas características dadas hacen parte de las habilidades que se habían considerado a desarrollar a través de la secuencia de tareas.

Sin embargo, en este trabajo no se consideraron competencias como la recolección de datos, ya que esta propuesta estuvo centrada en desarrollar habilidades del manejo de datos. Por tanto, para futuros trabajos, se sugiere el tener en cuenta el desarrollo de competencias de recolección y manejo de datos.

Por tanto, se puede afirmar que el cumplimiento de este objetivo ha sido parcial, ya que al reconocer limitaciones como las anteriores, es posible afirmar que han quedado asuntos pendientes que pudieron extender el alcance del objetivo general propuesto para este trabajo.

5. CONCLUSIONES

Las conclusiones de este trabajo se organizan atendiendo a tres asuntos: El primero da cuenta de los resultados más significativos de la fase previa a planificación de las actividades; el segundo reporta hallazgos encontrados en el análisis de los resultados de la propuesta; y el tercero expone aspectos relevantes de la evaluación del trabajo investigativo.

En primer lugar, se pudo apreciar la importancia del trabajo inmerso en la distribución como un concepto que se compone de ideas fundamentales como centralidad, dispersión, forma y concentración de los datos en consonancia con la propuesta sugerida por Bakker y Gravemeijer, (2004), que obligaba a contemplar la necesidad de planificar actividades que involucraran el trabajo con más de una de estas características. Ello, con el ánimo de facilitar o propiciar, por una parte, que el estudiante relacionara al menos dos de ellas, y que, dependiendo de la intención, escogiera características atinadas para el propósito de aprendizaje planteado; y, por otra parte, para que el docente se viera comprometido a identificar y planificar posibles actividades en contexto, que posibilitaran un abordaje multiestructural, e incluso relacional.

Aunque en este trabajo no se tuvo en cuenta la idea de considerar a la distribución como el lente a través del cual se aprecia la variación en un conjunto de datos y en el mundo real (ver Wild, 2006) si aporta una posible nueva ruta de indagación, que implica la planificación de una serie de actividades que favorezcan este tipo de conceptualización.

En segundo, lugar, durante el desarrollo del trabajo fue posible apreciar una transición de algunos estudiantes desde una concepción preestructural, hacia la manifestación de ideas multiestructurales y relacionales de la distribución. Sin embargo, en varios de los resultados se identificaron errores relacionados con los registros de representación; por ejemplo: usar gráficos circulares para representar la frecuencia absoluta de una variable, no colocar rótulos o títulos correspondientes a los gráficos de barras, e incluso confundir la frecuencia con los valores de la variable al momento de leer los gráficos.

Desde la perspectiva del razonamiento estadístico, hay que hacer mención importante a otros aspectos que no fueron componentes fundamentales ligados al concepto de distribución, pero que lo afectaron al momento de abordar algunas de las situaciones problema, como la propuesta en la tercera actividad. En efecto, y en concordancia con una de las preocupaciones de Kahneman, Slovic & Tversky (1982) de propiciar el desarrollo de heurísticas propias del trabajo de un estadístico en los estudiantes, que permitieran apreciar y evaluar objetivamente capacidades y particularidades que distinguen el trabajo del pensamiento aleatorio de los demás tipos de pensamientos contemplados en el conocimiento matemático, fue posible evidenciar que algunos de los estudiantes hacían uso de otro tipo de razonamiento, más ligado con abordajes preliminares, usando por ejemplo, pensamiento aditivo.

Se reconoce además que la propuesta sufrió bastantes limitaciones que afectaron su alcance, una de las más importantes fue la intensidad de actividades con las cuales se pretendía acercar a los estudiantes a una conceptualización acerca de la distribución. Esta en particular, obligó a los autores a dejar de lado actividades importantes como la socialización y la institucionalización de conceptos. Sin embargo, muestra que algunos de los estudiantes logran identificar algunas ideas acerca de la distribución y resolver problemas usando esas características.

Igualmente es necesario mencionar la recomendación de trabajar la distribución considerando la visión de Bakker & Gravemeijer (2004) donde se integren las concepciones de centralidad, dispersión, forma y densidad a lo largo del trabajo con estadística. Por tanto, se asume como una posibilidad que, mediante el razonamiento acerca de la distribución, se aborden y establezcan relaciones entre distintas temáticas como medidas de tendencia central, dispersión, densidad, sistemas de representación y resolución de problemas en la clase de estadística.

Por último, se considera necesario el vincular este tipo de propuestas con los componentes de la Cultura Estadística (Batanero, 2002). Ya que, si bien se ha consolidado una propuesta que permite el acercamiento al razonamiento acerca de la distribución a través de la resolución de problemas, no se han considerado en el marco del desarrollo de la cultura

estadística. Por tanto, este es un problema de investigación para futuros trabajos relacionados con el razonamiento acerca de la distribución.

6. REFERENCIAS

- Arteaga, P., Batanero, C. & Contreras, J. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 18, 93-104.
- Arteaga, P. & Batanero, C. (2010). Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. In *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 211-222). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Batanero, C. (2002). Los retos de la Cultura Estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*. Buenos Aires
- Batanero, C.; Godino, J.; Vallecillos, A.; Green, D.; Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527–547.
- Bakker, A., & Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 147-168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Ben-Zvi, D & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. In *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15).
- Ben-Zvi, D & Sharett-Amir, Y. (2005). How do primary school students begin to reason about distributions. In *Reasoning about distribution: A collection of current research studies. Proceedings of the fourth international research forum on statistical reasoning, thinking, and literacy (SRTL-4)*, University of Auckland, New Zealand (pp. 2-7).
- Chance, B. L., delMas, R., & Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 295–323). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Cordero, J., Córdoba, A., & Fernández, S. (2002). Estadística Descriptiva. ESIC Editorial. Madrid, España.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., & Gea, M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 713-737.
- Doane, P., & Seward, E. (2011). Measuring skewness: a forgotten statistic?. *Journal of statistics education*, 19(2).
- Estepa, A., & Pino, J. D. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 83, 43-63.
- Guzmán, M., Pliego, J. (1985). Curso básico de Estadística Económica. Madrid: Editorial AC.
- Fernandez, F., Andrade, L & Mendez, M. (2018). Hacia un fortalecimiento de la idea de distribución estadística en la formación de estudiantes para profesores de matemáticas. Proyecto de investigación en educación estadística. Universidad pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia.
- Fernández, F., Soler, N & Sarmiento, B. (2007). *Alfabetización estadística y competencia estadística*. En Rojas, Pedro Javier (Ed.), *Memorias del 8º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 23-25).
- Fischbein, E., Gazit, A. (1984). Does the Teaching of Probability Improve Probabilistic Intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, pp. 1-24
- Friel, S., Curcio, F & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, 124-158.
- Guerrero, Y. & Torres, Y. (2017). Tipificación de errores y dificultades en el aprendizaje de tablas de frecuencia. Bogotá, Colombia. Universidad Pedagógica Nacional.

- Gómez, E. (2016). *Estadística y probabilidad en el currículo colombiano para educación básica y media*. XXVI Simposio internacional de Estadística 2016.
- Ho, D., & Yu, C. (2015). *Descriptive statistics for modern test score distributions: Skewness, kurtosis, discreteness, and ceiling effects*. Educational and Psychological Measurement.
- Jones, G., Langrall, C., y Mooney, E. (2007). Research in probability: responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, pp. 909-955). Greenwich, CT: Information Age Publishing y NCTM.
- Kahneman, D., Slovic, D., Tversky, A. (1982). *Judgement under uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge University Press.
- Konold, C., & Higgins, T. (2003). Reasoning about data. A research companion to principles and standards for school mathematics.
- Li, Y. & Shen, S. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics*, 14(1): 2-8.
- Mokros, J., & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20-39.
- Makar, K. and D. Canada (2005), Pre-service teachers' conceptions of variation. In H. Chick and J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Melbourne, Melbourne, 273-280.
- Méndez .M & Valero. N. (2014). Experimento de enseñanza para la superación de algunas dificultades y errores referidos a la variable estadística y sus escalas de medición. *Maestría en docencia de las Matemáticas*. Universidad pedagógica Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia.

- Myers, J. & Campbell, B. (1976). Distribution and dispersal in populations capable of resource depletion. *Oecologia*, 24(1), 7-20.
- Moore, D. & Cobb, G. (1997). "Mathematics, Statistics, and Teaching," *American Mathematical Monthly*, 104, 801–823.
- Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers* (Vol. 17). Springer Science & Business Media.
- Perdomo, E. (2016). Medidas de tendencia central y su uso en contexto. Estudio de caso: IE. Las Brisas - El Patía (Cauca). Maestría thesis, Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales.
- Piaget, J. (1973). *To understand is to invent: The future of education*. New York: Grossman.
- Pfannkuch, M., Budgett, S., Parsonage, R., & Horring, J. (2004). Comparison of data plots: Building a pedagogical framework. Paper presented at the Tenth International Congress on Mathematics Education (ICME-10), Copenhagen, Denmark, 4-11 July.
- Pfannkuch, M., & Reading, C. (2006). Reasoning about distribution: A complex process. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 4–9.
- Pearson, K. (1985). Note on regression and inheritance in the case of two parents. *Proc. Royal Soc. (London)* 58, 240–242.
- Reading, C., & Reid, J. (2006). An emerging hierarchy of reasoning about distribution: From a variation perspective. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 46-68.
- Sandoval, C. (2006). Una propuesta para introducir el concepto de distribución estadística en la escuela. Universidad pedagógica nacional. Bogotá, Colombia.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España. Horsori.

Wild, C. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal*, 5(2) 10-26.

Zawojewski, J & Shaughnessy, J. (2000). Data and chance. Results from the seventh mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress, 235-268.

7. ANEXOS

7.1. Anexo A. Primera actividad

Número de Hermanos de los Niños de 5B

Se realizó una encuesta a los niños del curso 5B, sobre el número de hermanos que tienen y estas fueron sus respuestas:

5	3	3	3
6	1	4	0
2	2	3	2
1	2	3	4
4	3	4	5

Teniendo en cuenta los datos dados, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el número de hermanos que tiene la mayoría de los estudiantes del curso 5B? ¿Por qué?
2. ¿Cuál es el número de hermanos que es menos común entre los niños del curso 5B? ¿Por qué?
3. a. Hay estudiantes de 5B ¿que tenga 8 hermanos? sí, no ¿Por qué?

<p>b. Hay estudiantes ¿que no tienen hermanos? sí, no ¿Por qué?</p> <p>4. Con respecto a los datos de la encuesta ¿diría que hay pocos o muchos estudiantes del curso 5B que tienen entre 2 y 4 hermanos? ¿Por qué?</p> <p>5. Presente de manera resumida un informe a sus compañeros que muestre de manera ágil los datos de la encuesta y que responda las preguntas anteriores.</p> <p>6. Si usted fuera profesor, ¿qué otra pregunta se le ocurre hacer? Responda la pregunta que haga.</p>

7.2. Anexo B. Posibles errores que pueden cometer los estudiantes en la primera actividad

En la siguiente tabla se describen los errores, obstáculos y dificultades que pueden presentar los estudiantes al responder las preguntas de la primera actividad.

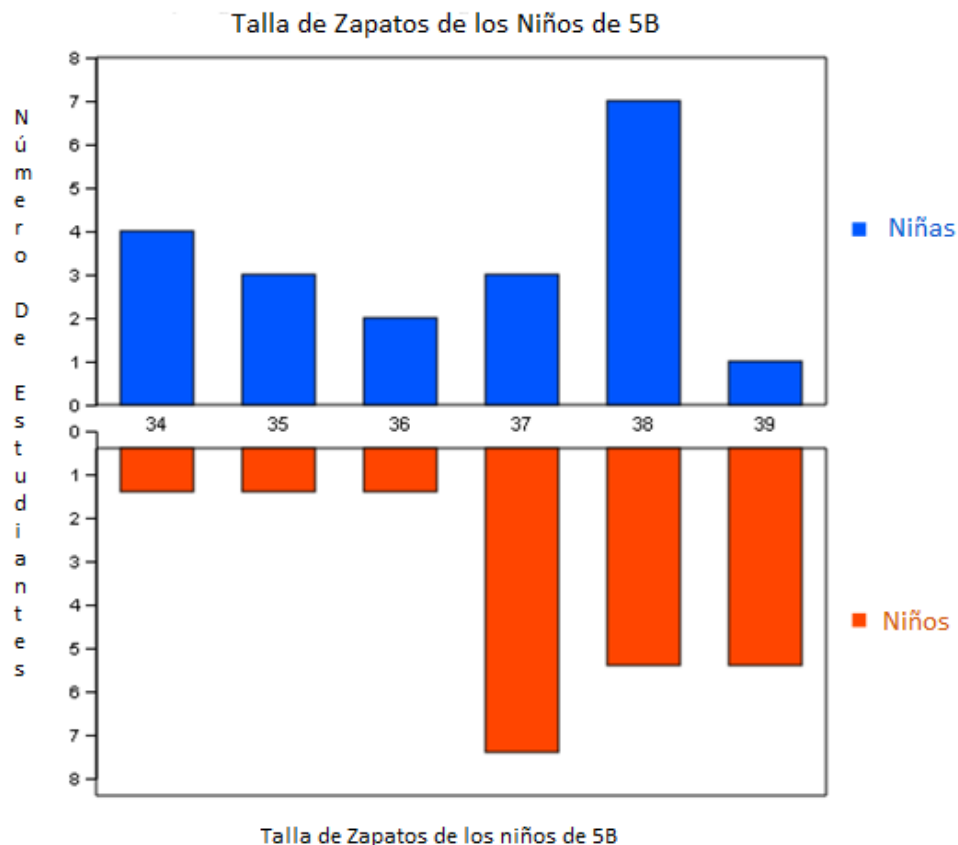
Pregunta de la actividad	Posibles errores
1. ¿Cuál es el número de hermanos que tiene la mayoría de los estudiantes del curso 5B? ¿Por qué?	<p>C.D.1 Elegir incorrectamente un representante de la distribución (Mokros y Russell, 1995).</p> <p>C. D.2 No percibir a ninguna de las medidas de tendencia central como un representante de la distribución (Zawojewski y Shaughnessy, 2000).</p>
2. ¿Cuál es el número de hermanos que es menos común entre los niños del	DE.D.2. Desconocer los tipos de frecuencia

curso 5B? ¿Por qué?	<p>o confundirlas.</p> <p>DE.D.3. Visualizar parcialmente el conjunto de los datos estadísticos.</p>
4. Con respecto a los datos de la encuesta ¿dirías que hay pocos o muchos estudiantes del curso 5B que tienen entre 2 y 4 hermanos? ¿Por qué?	<p>DE.D.2. Desconocer los tipos de frecuencia o confundirlas.</p> <p>DE.D.3. Visualizar parcialmente el conjunto de los datos estadísticos.</p>
5. Presente de manera resumida un informe a sus compañeros que muestre de manera ágil los datos de la encuesta y que responda las preguntas anteriores.	<p>D. E.2 Omitir alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos para la construcción de un gráfico que organice los datos de la distribución (Li y Shen, 1992) En (Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, 1994).</p> <p>D.E.3. Utilizar gráficos inadecuados sin tener en cuenta la escala de medición de la variable. (Li y Shen, 1992)</p> <p>D.E.4 Crear un diagrama circular sin tener en cuenta los porcentajes de los datos que hay en cada valor de la variable (Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, 1994).</p> <p>D.E.5. Confundir la frecuencia y la variable (Arteaga & Batanero, 2010).</p>

7.3. Anexo C. Segunda actividad

Tarea B - Tallas de Zapatos de las niñas y niños de 5B

Se realizó una encuesta a los estudiantes de 5B en un Colegio de la ciudad de Bogotá, sobre la talla de sus Zapatos y estos fueron los datos que se obtuvieron:



Pregunta principal

Un estudiante de octavo afirma que, en general, las niñas tienen pies más grandes. ¿Es esto cierto? y ¿Por qué?

Para resolver la pregunta principal debe resolver las siguientes preguntas:

1. ¿Qué información se debería analizar para saber si la afirmación es cierta?
2. ¿Cuál es la talla de zapato más común entre las niñas? ¿Cuántas niñas usan esa talla?

3. ¿Cuál es la talla de zapato más común entre los niños? ¿Cuántos niños usan esa talla?
4. ¿Cuáles son las tallas de zapato mínima y máxima que usan las niñas del curso 5B?
5. ¿Cuáles son las tallas de zapato mínima y máxima que usan los niños del curso 5B?
6. ¿Cuántas niñas utilizan tallas de zapato menores o iguales a 37?
7. ¿Cuántas niñas utilizan tallas de zapato mayores a 37?
8. ¿Cuántos niños utilizan tallas de zapato menores o iguales a 37?
9. ¿Cuántos niños utilizan tallas de zapato mayores a 37?
10. ¿Cuál de las tallas representa mejor a la talla de zapato que usan las niñas del curso 5B?
11. ¿Cuál de las tallas representa mejor a la talla de zapato que usan los niños del curso 5B?

Tarea A - Tallas de Zapatos de las niñas y niños de 5B

Se realizó una encuesta a los estudiantes de 5B en un Colegio de la ciudad sobre la talla de sus Zapatos y estos fueron los datos que obtuvimos:

Talla de Zapatos de las Niñas de 5B	Número de Niñas
34	4
35	3
36	2
37	3
38	7
39	1
Total	20

Talla de Zapatos de los Niños de 5B	Número de Niños
34	1
35	1
36	1
37	7
38	5
39	5
Total	20

Pregunta principal

Un estudiante de octavo afirma que, en general, las niñas tienen pies más grandes. ¿Es esto cierto? y ¿Por qué?

Para resolver la pregunta principal debe resolver las siguientes preguntas:

1. ¿Qué información se debería analizar para saber si la afirmación es cierta?
2. ¿Cuál es la talla de zapato más común entre las niñas? ¿Cuántas niñas usan esa talla?
3. ¿Cuál es la talla de zapato más común entre los niños? ¿Cuántos niños usan esa talla?
4. ¿Cuáles son las tallas de zapato mínima y máxima que usan las niñas del curso 5B?
5. ¿Cuáles son las tallas de zapato mínima y máxima que usan los niños del curso 5B?
6. ¿Cuántas niñas utilizan tallas de zapato menores o iguales a 37?
7. ¿Cuántas niñas utilizan tallas de zapato mayores a 37?
8. ¿Cuántos niños utilizan tallas de zapato menores o iguales a 37?

9. ¿Cuántos niños utilizan tallas de zapato mayores a 37?
10. ¿Cuál de las tallas representa mejor a la talla de zapato que usan las niñas del curso 5B?
11. ¿Cuál de las tallas representa mejor a la talla de zapato que usan los niños del curso 5B?

7.4. Anexo D. Posibles errores que pueden cometer los estudiantes en la segunda actividad

En la siguiente tabla se describen los errores, obstáculos y dificultades que pueden presentar los estudiantes al responder las preguntas de la segunda actividad.

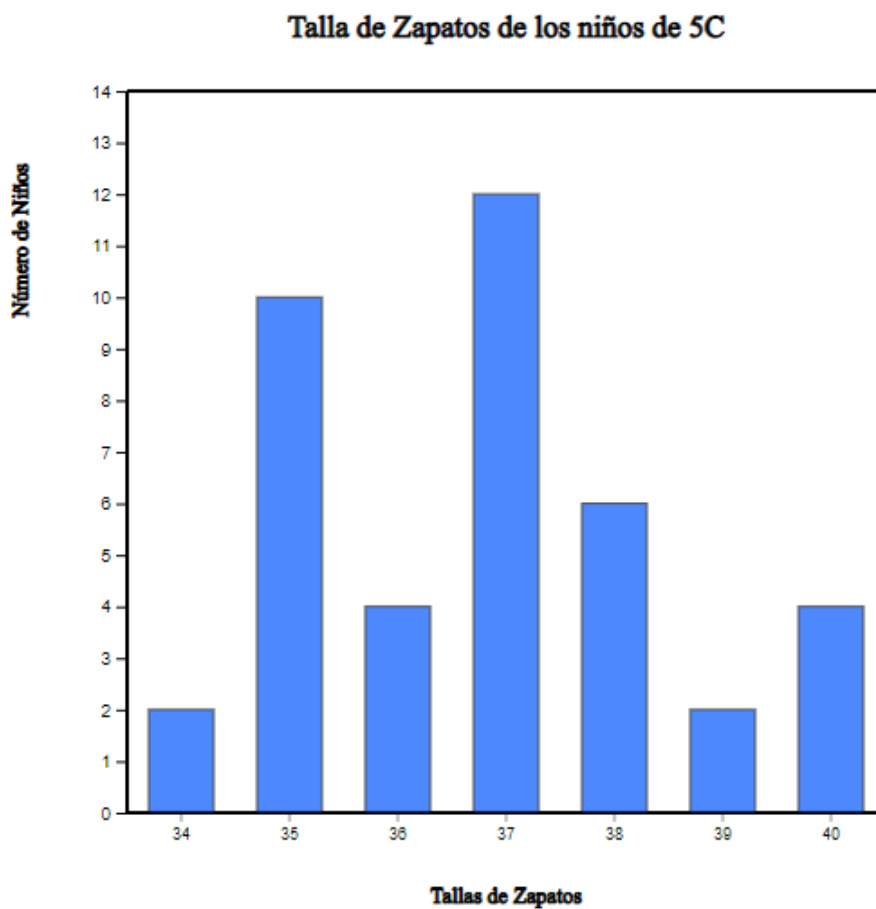
Pregunta de la actividad	Posibles errores
<p>2. ¿Cuál es la talla de zapato más común entre las niñas? ¿Cuántas niñas usan esa talla?</p> <p>3. ¿Cuál es la talla de zapato más común entre los niños? ¿Cuántos niños usan esa talla?</p>	<p>D.E.5. Confundir la frecuencia y la variable (Arteaga & Batanero, 2010).</p> <p>C. E.1 Hallar el promedio y la mediana a datos cualitativos nominales (Méndez y Valero, 2014).</p>
<p>4. ¿Cuáles son las tallas de zapato mínima y máxima que usan las niñas del curso 5B?</p> <p>5. ¿Cuáles son las tallas de zapato mínima y máxima que usan los niños del curso 5B?</p>	<p>DI.E.1 Ignorar la dispersión de los datos cuando se efectúan comparaciones entre dos o más distribuciones (Myers y Campbell, 1974).</p>
<p>6. ¿Cuántas niñas utilizan tallas de zapato menores o iguales a 37?</p> <p>7. ¿Cuántas niñas utilizan tallas de zapato mayores a 37?</p> <p>8. ¿Cuántos niños utilizan tallas de zapato menores o iguales a 37?</p> <p>9. ¿Cuántos niños utilizan tallas de zapato mayores a 37?</p>	<p>DE.D.3. Visualizar parcialmente el conjunto de los datos estadísticos.</p> <p>DE.D.2. Desconocer los tipos de frecuencia o confundirlas.</p>

10. ¿Cuál de las tallas representa mejor a la talla de zapato que usan las niñas del curso 5B?	C.D.1 Elegir incorrectamente un representante de la distribución (Mokros y Russell, 1995).
11. ¿Cuál de las tallas representa mejor a la talla de zapato que usan los niños del curso 5B?	<p>C. D.2 No percibir a ninguna de las medidas de tendencia central como un representante de la distribución (Zawojewski y Shaughnessy, 2000).</p> <p>D.E.5. Confundir la frecuencia y la variable (Arteaga & Batanero, 2010).</p> <p>C. E.1 Hallar el promedio y la mediana a datos cualitativos nominales (Méndez y Valero, 2014).</p>

7.5. Anexo E. Tercera actividad

Donación de Patines

Se realizó una encuesta a los niños de 5C en un Colegio sobre la talla de sus Zapatos y estos fueron los datos que obtuvimos:



El colegio quiere hacer compra de 20 pares de patines para que los niños del curso puedan usarlos en la hora del descanso, y proponen comprar los 20 patines de la siguiente manera:

Intención de compra para los patines	
Talla de los Patines	Cantidad de Patines

33	2
34	3
35	1
36	3
37	1
38	4
39	3
40	1
41	2
Total	20

Responda las siguientes preguntas a partir de la información dada:

1. Teniendo en cuenta la información presentada ¿qué considera que deben hacer los directivos del colegio para resolver el problema?
2. Si se quiere comparar la información obtenida acerca de las tallas de zapato que usan los estudiantes con la propuesta de compra de patines que tiene el colegio ¿cómo los compararía?
3. teniendo en cuenta la comparación anterior, ¿considera que la cantidad de patines que el colegio quiere traer para cada talla es adecuada?
4. ¿Cómo cree que puede hallar la cantidad de pares de patines que el colegio debe traer para cada talla teniendo en cuenta la encuesta que se realizó a los estudiantes?
5. Escriba la cantidad de patines que considera que deben traerse para cada una de las tallas.
6. Se debe enviar esta información sobre cómo se deberían comprar los patines

teniendo en cuenta las tallas de los estudiantes de tal manera que los datos sean claros, organizados y fáciles de leer ¿Cómo enviaría esa información?

7.6. Anexo F. Posibles errores que pueden cometer los estudiantes en la tercera actividad

En la siguiente tabla se describen los errores, obstáculos y dificultades que pueden presentar los estudiantes al responder las preguntas de la tercera actividad.

Pregunta de la actividad	Posibles errores
3. teniendo en cuenta la comparación anterior, ¿considera que la cantidad de patines que el colegio quiere traer para cada talla es adecuada?	<p>DI.E.1 Ignorar la dispersión de los datos cuando se efectúan comparaciones entre dos o más distribuciones (Myers y Campbell, 1974).</p> <p>DE.D.3. Visualizar parcialmente el conjunto de los datos estadísticos.</p> <p>F.D.1 centrarse más en el grupo modal que en la forma de la distribución (Bakker y Gravemeijer, 2004).</p>
<p>4. ¿Cómo cree que puede hallar la cantidad de pares de patines que el colegio debe traer para cada talla teniendo en cuenta la encuesta que se realizó a los estudiantes?</p> <p>5. Escriba la cantidad de patines que considera que deben traerse para cada una de las tallas.</p>	DE.D.2. Desconocer los tipos de frecuencia o confundirlas.
6. Se debe enviar esta información sobre cómo se deberían comprar los patines teniendo en cuenta las tallas de los	D. E.1 Crear una distribución plana a partir de otra sin tener en cuenta sus picos y su densidad (Ben-Zvi & Sharett-Amir, 2005).

<p>estudiantes de tal manera que los datos sean claros, organizados y fáciles de leer ¿Cómo enviaría esa información?</p>	<p>D. E.2 Omitir alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos para la construcción de un gráfico que organice los datos de la distribución (Li y Shen, 1992) En (Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, 1994).</p> <p>D.E.3. Utilizar gráficos inadecuados sin tener en cuenta la escala de medición de la variable. (Li y Shen, 1992)</p>
---	--