ESTUDIO DE LA MÉTRICA DE MANHATTAN. SEGMENTOS, RECTAS, RAYOS, CIRCUNFERENCIAS Y ALGUNOS LUGARES GEOMÉTRICOS EN LA GEOMETRÍA DEL TAXISTA.

RICARDO ANDRÉS CÁRDENAS IZQUIERDO

WILSON PARRA ARDILA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARMAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2013

ESTUDIO DE LA MÉTRICA DE MANHATTAN. SEGMENTOS, RECTAS, RAYOS, CIRCUNFERENCIAS Y ALGUNOS LUGARES GEOMÉTRICOS EN LA GEOMETRÍA DEL TAXISTA.

RICARDO ANDRÉS CÁRDENAS IZQUIERDO

CC: 1´032.437.826

Código: 2007140008

WILSON PARRA ARDILA

CC: 80´257.685

Código: 2007240050

Trabajo de grado para optar el título de Licenciados en Matemáticas

ASESOR

ALBERTO DONADO GIL

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARMAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2013

	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

Código: FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 22-07-2013	**Página 1 de 4**

1.Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	ESTUDIO DE LA MÉTRICA DE MANHATTAN. SEGMENTOS, RECTAS, RAYOS, CIRCUNFERENCIAS Y ALGUNOS LUGARES GEOMÉTRICOS EN LA GEOMETRÍA DEL TAXISTA.
Autor(es)	PARRA Ardila Wilson, CÁRDENAS Izquierdo Ricardo Andrés.
Director	ALBERTO Donado Gil
Publicación	Bogotá, D.C., Universidad Pedagógica Nacional. 52 P.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas.
Palabras Claves	Definición, distancia, lugar geométrico, métrica euclidiana, métrica de Manhattan, postulado, representación, teorema y Transformación.

2.Descripción

El trabajo presenta una transformación de los postulados, teoremas y definiciones de la Geometría de Euclides al realizar un estudio sobre los mismos no con la métrica usual, métrica de Euclides, sino con la métrica de Manhattan, que en este trabajo llamaremos Geometría del Taxista.

Algunos postulados, teoremas y definiciones han sido omitidos del trabajo dado que durante el desarrollo y análisis del mismo se han llegado a conclusiones que permiten determinar que los mismos no existen en la Geometría del Taxista.

3.Fuentes
Entre los recursos seleccionados para la elaboración se destacan tres trabajos investigativos relacionados con el objeto de estudio, diversas fuentes teóricas que abordaban el concepto de métrica y posteriormente realizan un estudio sobre la métrica de Manhattan, al igual que algunos trabajos sobre la geometría euclidiana, sus postulados, teoremas y definiciones. ➢ Samper de Caicedo, (2009). *Libro de Geometría.* Descripción de la axiomática de la geometría euclidiana. ➢ Díaz, (1999). *Geometría de taxistas.* Artículo sobre la definición de la métrica de Manhattan y análisis de las definiciones y características de algunos conceptos geométricos. ➢ Sabatini, (2007). *La geometría del Taxi.* Artículo sobre la definición de la métrica de Manhattan, algunas propiedades y características de los conceptos geométricos como triángulos, circunferencias y otras figuras planas.

4.Contenidos
El documento inicia con una breve reseña historia del concepto de métrica y su definición, la introducción al concepto de distancia euclidea y posteriormente se citan los teoremas, postulado y definiciones de la Geometría Euclidiana que serán tema de análisis. El marco teórico empieza con las representaciones gráficas y analíticas que surgen en la Geometría del Taxista de recta, segmento, rayo y rayo opuesto una vez aplicada la métrica de Manhattan a la Geometría de Euclides. Finalmente se realiza un estudio de los postulados, teoremas y definiciones de Euclides bajo la métrica de Manhattan para determinar cuáles de ellos se mantienen invariantes o

no tienen lugar en la Geometría del Taxista.

Las conclusiones finales son un epítome de los resultados obtenidos durante el estudio y análisis de este documento.

5.Metodología

El trabajo corresponde a un análisis de los postulados, teoremas y definiciones que presenta el libro Samper (2009), aplicando sobre ellos la métrica de Manhattan.

Para ello se hizo un estudio previo de la métrica de Manhattan y sus propiedades, a partir de dicho estudio analizaremos la geometría de Euclides desde dicha métrica.

6.Conclusiones

Las conclusiones generadas del trabajo de investigación se mencionan a continuación:

1. A partir del Teorema 1 y 2 se determina que la noción de colinealidad no está definida en la Geometría del Taxista.
2. Para las nociones de segmentos, rectas y rayos en la Geometría del Taxista se determina más de una sola representación de la misma noción.
3. La definición de rayo opuesto no está definida en la Geometría del Taxista, debido a que se define por medio de colinealidad de puntos.
4. El postulado de la recta en la Geometría del Taxista queda determinado a partir que para cada dos puntos existen infinitas rectas que los contienen.
5. El teorema de punto medio en la Geometría del Taxista está conformado por un conjunto de puntos que cumplen igualmente la característica de ser punto medio de un mismo segmento.

Elaborado por:	PARRA Ardila Wilson, CÁRDENAS Izquierdo Ricardo Andrés.
Revisado por:	ALBERTO Donado Gil

Fecha de elaboración del Resumen:	22	07	2013

Contenido

1. INTRODUCCIÓN

En el campo de la Geometría la demostración es una actividad fundamental y es la base del razonamiento lógico, que proporciona la concepción geométrica como producto del conocimiento y la práctica.

Este documento presenta una axiomática desarrollada a partir de la métrica de Manhattan aplicada a los postulados, teoremas y definiciones de la geometría de Euclides.

Nuestro análisis consistió en determinar qué postulados y teoremas de la Geometría de Euclides permanecían en la Geometría del Taxista una vez aplicada la métrica de Manhattan a estos.

Muchos de los postulados y teoremas de la Geometría de Euclides no fueron analizados, justificando claro está el porqué no fueron analizados, los seleccionados son aquellos que necesitan de un único plano para su estudio.

Al final de este documento se encuentran las conclusiones que se originaron en el transcurso y realización del mismo.

2. JUSTIFICACIÓN

Uno de los motivos por los cuales se justifica la realización de este trabajo de grado radica principalmente en la necesidad de estar en búsqueda de nuevos conocimientos, que es uno de los retos principales del educador matemático, y a su vez proporcionar material de investigación a partir de los resultados obtenidos en este trabajo para futuros docentes de la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

3. OBJETIVOS

De acuerdo con lo que se desea realizar en el trabajo de grado, como objetivo general se plantea:

- Realizar una transformación de la Geometría de Euclides aplicando sobre ella la métrica de Manhattan, llamada en este trabajo Geometría del Taxista, determinando qué postulados, teoremas y definiciones prevalecen una vez aplicada dicha métrica.

Con relación a lo planteado anteriormente, se proponen los siguientes objetivos específicos:

- Determinar las representaciones que surgen de las nociones de segmento, recta, rayo, rayo opuesto, triángulo, circunferencia, entre otros; una vez aplicado la métrica de Manhattan a dichas definiciones.
- Determinar qué postulados y teoremas de la Geometría de Euclides se conservan en la Geometría del Taxista.

4. ANTECEDENTES

La búsqueda y análisis de diversos trabajos de investigación sobre la Geometría del Taxista o la Métrica de Manhattan, nos permitió seleccionar material muy valioso e ideas igualmente valiosas que se convirtieron en referentes teóricos de nuestro trabajo, dentro de los cuales referenciamos el artículo realizado por Díaz (1991), titulado: "*Geometría de Taxistas*" en el cual podemos analizar y observar algunas representaciones y/o lugares geométricos de rectas, segmentos, circunferencias, entre otros, en esta geometría. También podemos encontrar en documento elaborado por Díaz (1991), un paralelismo entre las representaciones que surgen de los elementos de estudio entre caso euclidiano y el caso taxista, al mismo tiempo que se convirtió en un referente teórico bastante importante de nuestro trabajo dado que nos proporciono una visión más amplia y concreta de los aspectos relevantes a tratar en el mismo, es decir, nos permitió realizar un análisis más concreto y dirigido al cumplir con los objetivos que establecimos en nuestro plan de trabajo.

Otra fuente de investigación importante en nuestro trabajo es el libro "*Geometría*" de Carmen (2009), con un lenguaje propio del pensamiento espacial que proponía los enunciados de las definiciones, postulados y teoremas de la Geometría de Euclides que serían tema de estudio en este trabajo. El libro permitió evidenciar afirmaciones claves para descubrir hechos geométricos de gran relevancia en la conformación de nuestra axiomática.

5. MARCO CONCEPTUAL

En la primera parte de este trabajo se realizará un breve resumen histórico y se proporcionara la definición de métrica, sus características y propiedades. Asimismo, se presentarán algunos postulados, teoremas y definiciones sobre recta, segmento y rayo de la Geometría de Euclides que servirán como referente teórico para la geometría del taxista. Lo anterior se realizara a aquellos elementos que sólo necesitan de un plano cartesiano para su análisis, dado que allí donde se ubicará nuestra geometría del taxista.

Finalmente, se mostrarán diferentes interpretaciones y representaciones de estos conceptos geométricos, teniendo en cuenta la geometría euclidiana.

5.1 HISTORIA DE LA MÉTRICA

Es posible mencionar alguna concepción histórica que presente el inicio de la métrica en algunas culturas y que describe los aspectos que se tuvieron en cuenta en el estudio de este concepto matemático. El siguiente es un fragmento que nos acerca al concepto de métrica que estudiaron algunas culturas:

> "La noción de métrica o medida está inmersa en las matemáticas, al menos, desde los mismos orígenes de la *Geometría.* Cuenta Heródoto (Siglo V AC) en la historia del mundo antiguo, que, la geometría tuvo su origen en Egipto, y estaba asociada a las técnicas de medir terrenos; de allí su nombre griego: de *geo*, tierra y *metron,* medida. La medida es tema importante en toda rama de las ciencias fácticas, y particularmente llega a casi todo el espectro del análisis y las matemáticas aplicadas, desde las ecuaciones diferenciales hasta la teoría de probabilidades.
>
> (Heredia, 2008)

5.2 DEFINICIÓN DE MÉTRICA

Una métrica definida en un conjunto S, producto $S \times S$, es una función d, de valor real, con las siguientes propiedades*:*

1. $d(x, x) = 0$
2. $Si \;\; x \neq y, \;\; entonces \;\; d(x, y) > 0$

3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

A la función d así definida, se le da el nombre de métrica, o función distancia en S. A funciones como d, se da el nombre de funciones de conjunto, porque en efecto, asocian con cada conjunto de su dominio, un número real. El par (S, d) se conoce, en análisis matemático, como un *Espacio Métrico*.

De las condiciones (1) y (2) se logra deducir que la distancia no es negativa y que $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

La condición (3) afirma que la distancia $d(x, y)$ es una función simétrica en las variables x, y.

La condición (4) es llamada *desigualdad triangular*; su nombre nace del hecho de que, en el plano euclidiano, la longitud de un lado del triángulo no supera a la suma de los otros dos.

> "Si a y b son dos números reales, puede pensarse al número real no negativo $|a - b|$ como la distancia que separa a de b. Esta operación de asignar distancias a pares de puntos es precisamente lo que da origen a los espacios métricos. La teoría básica que emana del concepto de distancia tiene que ver con las propiedades de subconjuntos (abiertos, cerrados, compactos, conexos), sucesiones (convergentes, Cauchy) y funciones (continuas), y la relación entre estas nociones."
>
> (Heredia, 2008)

5.3 DISTANCIA EUCLIDEA

La distancia euclidea es la que se puede denominar entre dos puntos de un espacio euclideo, la cual se deduce a partir del Teorema de Pitágoras.

Se utiliza cuando las variables sean homogéneas y estén medidas en unidades similares.

En el espacio bidimensional la distancia euclidiana entre dos puntos P_1 y P_2, de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente, es:

$$D(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

En el espacio euclídeo n-dimensional la distancia euclidiana entre los puntos $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ se define como:

$$\sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2}.$$

5.4 GEOMETRÍA EUCLIDIANA, CONCEPTOS BÁSICOS

El método deductivo es el utilizado en la ciencia y principalmente en la geometría. Este método consiste en conectar un conjunto de conocimientos que se aceptan como verdaderos, para obtener nuevas proposiciones que son consecuencia lógica de las anteriores. El método deductivo también es llamado método axiomático. El método deductivo consta de:

- Objetos no definidos: La geometría necesita desarrollar su propio vocabulario y para desarrollarlo comenzamos con unas palabras que se obtienen de la vida cotidiana. Términos no definidos: Punto, Recta, Plano.

- Los Postulados. (Axiomas): Son proposiciones que se aceptan como verdaderas sin demostrarlas.

- Las definiciones: Necesitamos conocer el significado exacto de los términos que utilizamos en geometría y para ello utilizamos las definiciones. Ejemplo: La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que tiene su origen en el vértice del ángulo y lo divide en dos ángulos congruentes.

- Teoremas: Son proposiciones que para aceptarlas como verdaderas deben ser demostradas a partir de postulados, definiciones o teoremas ya demostrados, siguiendo una deducción lógica. En un teorema se deben distinguir dos elementos fundamentales: LA HIPOTESIS Y LA TESIS. La hipótesis son los datos que se dan en el enunciado del teorema. La tesis es la conclusión a la que debemos llegar.

A continuación encontraremos una lista en la cual indicaremos los conceptos, postulados, definiciones y teoremas que serán tema estudio.

OBJETOS NO DEFINIDOS

Punto, recta y plano son términos no definidos en la estructura geometría. Sus respectivas notaciones serán:

- Los puntos los denominaremos por letras mayúsculas, $A, B, C, \dots, Z$.
- La recta la notaremos de la siguiente manera: $r(AB)$ o $r(\mathrm{l})$
- Los planos por letras griegas, $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$.

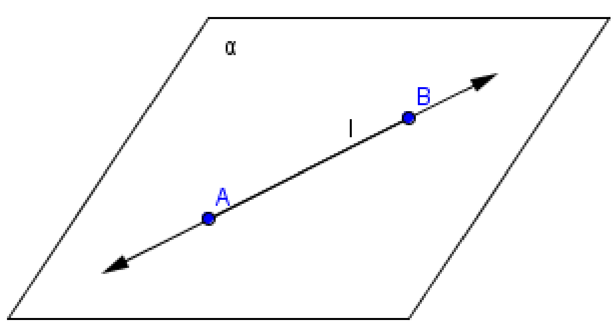


Figura 1.

POSTULADOS (AXIOMAS)

(Samper de Caicedo, 2009)

DE LA RECTA: Dados dos puntos, existe exactamente una recta que los contiene.

DE LA MEDIDA DE ÁNGULOS: A cada ángulo le corresponde un número entre 0 y 180.

DE LA ADICIÓN DE MEDIDAS DE SEGMENTO: Si B está entre A y C, entonces $AB + BC = AC$.

PUNTOS EN EL PLANO: Todo plano tiene al menos tres puntos no colineales.

PARALELA POR UN PUNTO EXTERIOR: Si P es un punto exterior a una recta m, entonces existe una sola recta k paralela a m.

DEFINICIONES

(Samper de Caicedo, 2009)

DEFINICIÓN DE ÁNGULO: Es la figura geométrica formada por dos rayos que no son colineales y tiene el mismo origen.

SEGMENTO: El segmento $s(AC)$ es el conjunto de puntos A, C y todos los puntos entre A y C. Los puntos A y C se llaman los extremos del segmento.

BISECTRIZ DE UN SEGMENTO: Es todo segmento, rayo o recta que contiene el punto medio del segmento.

CIRCUNFERENCIA: Es el conjunto de puntos de un plano que se encuentra a la misma distancia de un punto fijo C llamado centro.

MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO: Es la recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio de éste.

PUNTO MEDIO: El punto T es el punto medio del $s(SX)$, si T está entre los puntos S y X, y la longitud del $s(ST)$ es igual a la longitud del $s(TX)$.

PUNTOS COLINEALES: Tres o más puntos son colineales si existe una recta que los contiene.

INTERESTANCIA: C está entre $A\ y\ B$ si se cumplen las siguientes condiciones:

I. $A, B\ y\ C$ son colineales.

II. $AC + CB = AB$

RADIO: Es un segmento con un extremo en el centro de la circunferencia y el otro un punto de ésta.

RAYO: El $ry(LK)$ está formado por todos los puntos del $s(LK)$ junto con todos los demás puntos de la $r(LK)$, tal que K está entre cualquiera de estos puntos y L. El punto L es el origen del rayo LK.

RAYO OPUESTO: dos rayos son opuestos si son colineales y sólo comparten el origen.

RECTAS PARALELAS: son rectas coplanares que no se intersecan.

SEGMENTOS CONGRUENTES: Son segmentos que tienen la misma medida.

TRIÁNGULO: Dados tres puntos no colineales, es la unión de los tres segmentos que conectan los puntos.

TEOREMAS

(Samper de Caicedo, 2009)

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS: La distancia entre dos puntos siempre es un valor positivo.

EXISTENCIA DEL PUNTO MEDIO: Si se tiene un $s(AB)$, entonces existe su punto medio.

DEL PUNTO MEDIO: Si M es punto medio de $s(AB)$, entonces $AM = \frac{1}{2}AB$.

LOCALIZACIÓN DE PUNTOS: En un rayo, hay exactamente un punto que está a una distancia determinada del extremo del rayo.

PUNTOS EQUIDISTANTES DE LOS EXTREMOS DE UN SEGMENTO: Si un punto equidista de los extremos de un segmento, entonces está sobra la mediatriz del segmento.

MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO: Si un punto está sobre la mediatriz de un segmento entonces equidista de los extremos de un segmento.

NOTACIONES

A continuación se presenta una tabla en la que se evidencia las diferentes notaciones que aparecen en el desarrollo de la investigación. La tabla muestra que el significado de cada concepto será igual pero con una independiente notación entre una geometría y otra; esto con el fin de que el lector logre identificar en que geometría se están refiriendo los conceptos por medio de las notaciones establecidas.

CONCEPTO	**GEOMETRIA EUCLIDEANA**	**GEOMETRIA TAXISTA**
Recta que pasa por los puntos $P\ y\ Q$	$r(PQ)$	$\overleftrightarrow{PQ}$
Rayo con origen en M y con dirección en N	$ry(MN)$	$\overrightarrow{MN}$
Segmento con extremos $C\ y\ D$	$s(CD)$	$\overline{CD}$
Distancia de un punto A hasta un punto B	$D(A,B)$	$d(A,B)$
La coordenada de un $punto\ X$ es la pareja (x,y)	$c(X) = (x,y)$	$X = (x,y)$

Ángulo ABC	$\angle ABC$	No aplica

6. MARCO TEÓRICO

Teniendo en cuenta que uno de los objetivos de este trabajo de grado consiste en las representaciones de las nociones geométricas usando la Métrica de Manhattan a la Geometría de Euclides y, a su vez, la comprobación de los teoremas de: *localización de puntos, interestancia, colinealidad,* etc., que permanecen invariantes en una u otra geometría hemos decido plantearnos las siguientes preguntas con el fin de orientarnos en el desarrollo del trabajo.

1. ¿Cómo quedan las nociones geométricas presentadas en la Geometría del Taxista?
2. ¿Cómo reestructurar los teoremas: *de localización de puntos, de interestancia* y *de colinealidad* de la Geometría Euclidiana para que estos prevalezcan en la Geometría del Taxista?
3. ¿Cómo representan los lugares geométricos de: *recta, segmento, mediatriz, punto medio, rayo, circunferencia y triángulo,* en la Geometría del Taxista.

Algunos lugares geométricos, al igual que algunos elementos de la Geometría del Taxista, han sido ilustrados con el software educativo *GeoGebra* que mediante su interface gráfica nos permiten la manipulación de objetos con el fin de constatar si las propiedades concedidas a los elementos de nuestro estudio permanecen invariantes.

6.1 MÉTRICA DE MANHATTAN

(Reyes, 2007)

La Métrica del Taxista está estrechamente relacionada con la distancia recorrida por un taxista o un caminante en una ciudad ordenada y bien planificada, aunque difícil de encontrar, donde las trayectorias sólo tienen dos sentidos de Norte a Sur (NS) y de Oeste a Este (OE). Como lo ilustra la *Figura 2.*

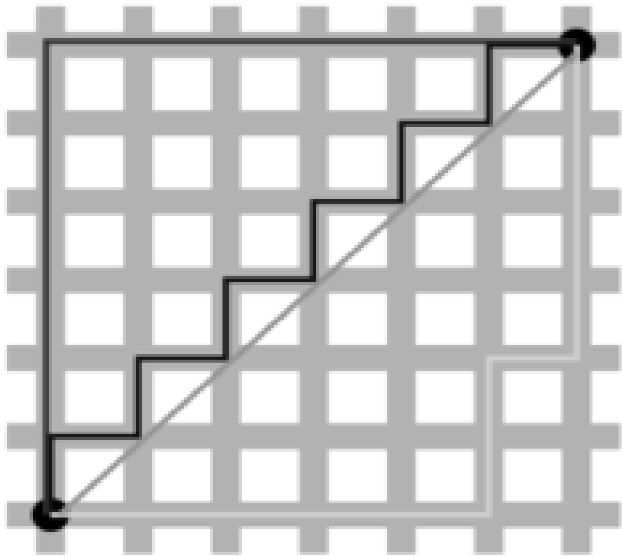


Figura 2.

La Métrica de Manhattan se define como una función $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$Si\ P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}\ ;\ \ Q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}$$

$$d(P, Q) = \ |x_1 - x_2| + \ |y_1 - y_2|$$

En la *figura 2* podemos observar que para desplazarnos de un punto a otro existen varios trayectos, con la salvedad previamente mencionada, los movimientos permitidos serán de Norte a Sur, de Sur a Norte, de Oeste a Este y de Este a Oste. Desde este punto de vista no está permitido el desplazamiento diagonal, dado el hecho que no se puede atravesar por las manzanas que componen la ciudad, sino exclusivamente por sus calles, como lo haría un taxista en su labor diaria.

La métrica de Manhattan es la función definida sobre el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y se asocia como el par $[\mathbb{R} \times \mathbb{R}, d]$ y satisface las propiedades de la definición de espacio métrico de la siguiente manera:

Demostración:

1. $d(X,X) = 0, \forall X \in R.$

$X = (a,b)$	$Dado$
$d(X,X) = \lvert a-a\rvert + \lvert b-b\rvert$	$Definición\ de\ métrica\ de\ Manhattan$
$d(X,X) = \lvert 0\rvert + \lvert 0\rvert$	$Propiedades\ de\ los\ números\ reales$
$d(X,X) = 0$	$Propiedades\ de\ los\ números\ reales$

2. $d(X,Y) > 0$

$X = (a,b)\ ,Y = (c,d)$ $a,b,c,d \in R$ $a \neq c \wedge b \neq d$	$Dado$
$d(X,Y) = \lvert a-c\rvert + \lvert b-d\rvert > 0$	$Definición\ de\ métrica\ de\ Manhattan$

3. $d(X,Y) = d(Y,X)$

$X = (a,b) y\ Y = (c,d)$	$Dado$
$d(X,Y) = \lvert a-c\rvert + \lvert b-d\rvert$ $d(Y,X) = \lvert c-a\rvert + \lvert d-b\rvert$	$Definición\ de\ métrica\ de\ Manhattan$
$\lvert a-c\rvert = \lvert c-a\rvert$ $\lvert b-d\rvert = \lvert d-b\rvert$	$Propiedad\ de\ los\ números\ reales$
$d(X,Y) = \lvert c-a\rvert + \lvert b-d\rvert$	$Sustitución$
$d(X,Y) = d(y,x)$	$Sustitución$

4. $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$

$X = (a,b), Y = (c,d)$ y $Z = (e,f)$	$Dado$

$d(X,Y) = \|a-c\| + \|b-d\|$ $d(Y,Z) = \|c-e\| + \|d-f\|$ $d(X,Z) = \|a-e\| + \|b-f\|$	$Definición\ métrica\ de\ Manhattan$
$d(X,Y) + d(y,z)$	$Propiedad\ de\ los\ números\ reales$
$\|a-c\| + \|b-d\| + \|c-e\| + \|d-f\|$	$Sustitución$
$\|a-c\| + \|c-e\| \geq \|a-c+c-e\|$ $\|b-d\| + \|d-f\| \geq \|b-d+d-f\|$	$Propiedades\ del\ valor\ \ absoluto$
$\|a-c\| + \|c-e\| \geq \|a-e\|$ $\|b-d\| + \|d-f\| \geq \|b-f\|$	$Propiedades\ de\ los\ números\ reales$
$d(X,Y) + d(Y,Z) \geq d(X,Z)$	$Sustitución$

A continuación analizaremos el concepto de interestancia bajo la métrica del taxista, con la excepción que para nuestro caso haremos caso omiso al primer ítem, recordemos que para que exista interestancia en la geometría euclidiana se debe cumplir con dos ítems:

1. $A, B\ y\ C$ son colineales.
2. $AB + BC = AC$

El primero hace referencia indirectamente a la recta de la geometría euclidiana, concepto no definido como ya hemos visto en esta geometría, ver página 14, pero que para el estudio de la geometría de Manhattan se hace necesario definir, es por ellos que omitimos intencionalmente este ítem con fines de definir recta de la geometría del taxista desde la noción de interestancia.

Definición de interestancia entre puntos para la métrica del taxista: el punto B está entre A y C si se cumple la siguiente condición:

I. $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$.

En la siguiente parte de nuestro estudio y a partir de interestancia, como anteriormente lo habíamos mencionado, definiremos recta, segmento, rayo y rayo opuesto de la Geometría de Manhattan, y la representación gráfica de estos en esta Geometría. Posteriormente comenzaremos a determinar cuáles postulados, definiciones y teoremas, de los elementos de estudio, de la geometría de Euclides se cumplen bajo la nueva definición que haremos de recta, segmento, rayo y rayo opuesto.

6.1.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ANALÍTICA DE RECTA, SEGMENTO, RAYO Y RAYO OPUESTO

SEGMENTO: El segmento de extremos A y C es el conjunto de todos los puntos que están entre A y C, incluyendo A y C, recordemos que la de este trabajo será $\overline{AC}$, es decir, $\overline{AC} = \{X \in \alpha | A - X - C\}$.

Si tomamos el segmento con extremos P y Q, $P \neq Q$, con coordenadas $P = (a_1, b_1)$ y $Q = (a_2, b_2)$ respectivamente, pueden ocurrir los siguientes casos:

- Caso 1. Si $a_1 < a_2$ y:
    1. $b_1 = b_2$

Figura 3.

    2. $b_1 > b_2$

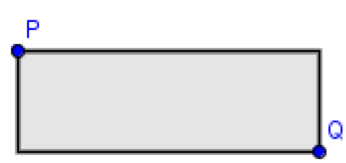


Figura 4.

3. $b_1 < b_2$

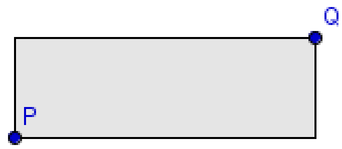


Figura 5.

- Caso 2. Si $a_1 > a_2$ y:

1. $b_1 = b_2$

Figura 6.

2. $b_1 > b_2$

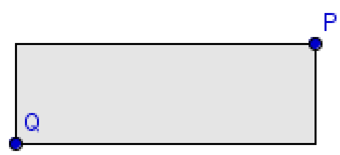


Figura 7.

3. $b_1 < b_2$

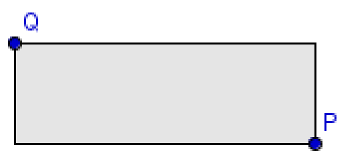


Figura 8.

- Caso 3. Si $a_1 = a_2$ y:

1. $b_1 > b_2$

Figura 10.

2. $b_1 < b_2$

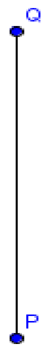


Figura 11.

Podemos concluir que aplicando la métrica del taxista a la definición de segmento, hecha por Euclides, se originan tres tipos básicos de representación de segmento con extremos P y Q, que son:

Segmento

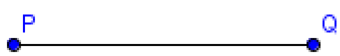


Figura 12.

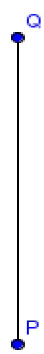


Figura 13.

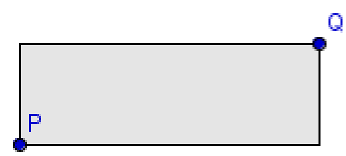


Figura 14.

Caso 1 Caso 2 Caso 3

RECTA: La recta AB, la cual notaremos $\overleftrightarrow{AB}$, es el conjunto de puntos X tales que:

$$\overleftrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X \in \alpha | A - B - X\} \cup \{X \in \alpha | X - A - B\}$$

De forma análoga a como se desarrolló el concepto de segmento desarrollamos el concepto de recta, es decir, ubicamos los puntos A y B en el plano α y a partir de dicha ubicación determinamos las posibles representaciones que surgen de la noción de recta. Con lo anterior podemos concluir que existen tres tipos básicos de recta en la geometría del Taxista las cuales cumplen con la definición que realiza Euclides de la misma.

Caso 1: La siguiente representación (*figura 15*) es un caso particular de una recta en posición horizontal y que es análoga a la representación de recta para la Geometría de Euclides.

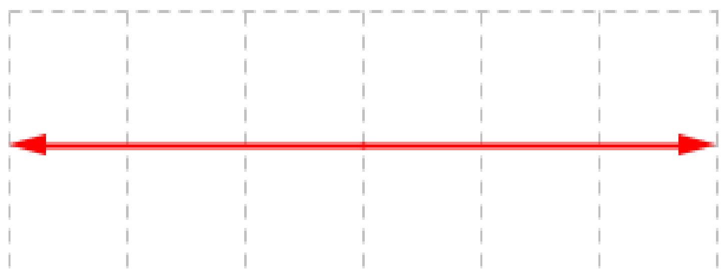


Figura 15.

Caso 2: La siguiente representación (*figura 16*) es un caso particular de una recta en posición vertical y que es análoga a la representación de recta para la métrica usual.

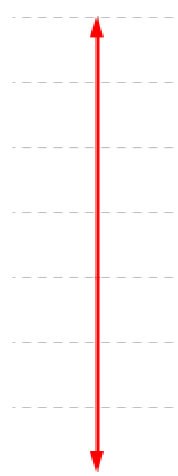


Figura 16.

Caso 3: En la siguiente figura podremos observar un tipo de recta que no coincide con la representación de la misma para la métrica usual, dicha representación es propia de la métrica de Manhattan.

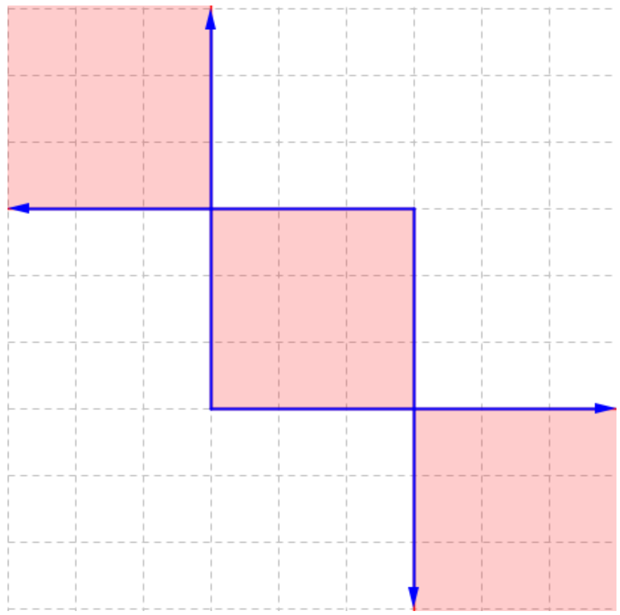


Figura 17.

RAYO: El rayo LK, el cual notaremos $\overrightarrow{LK}$, está formado por todos los puntos X, $X \in \alpha$, y el $\overline{LK}$ tal que $\overrightarrow{LK} = \overline{LK} \cup \{X \in \alpha | L - K - X\}$. El punto L es el origen $\overrightarrow{LK}$.

Dados dos puntos $A = (a_1, b_1)$ y $B = (a_2, b_2)$, y realizando la misma metodología aplicada a segmento, podemos concluir que existen seis representaciones distintas de rayo.

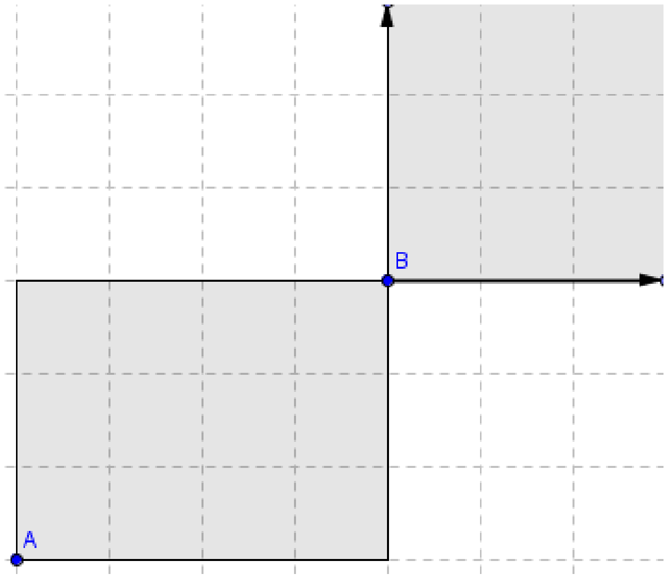


Figura 18.

Caso 1: si $a_1 < a_2$ y $b_1 < b_2$

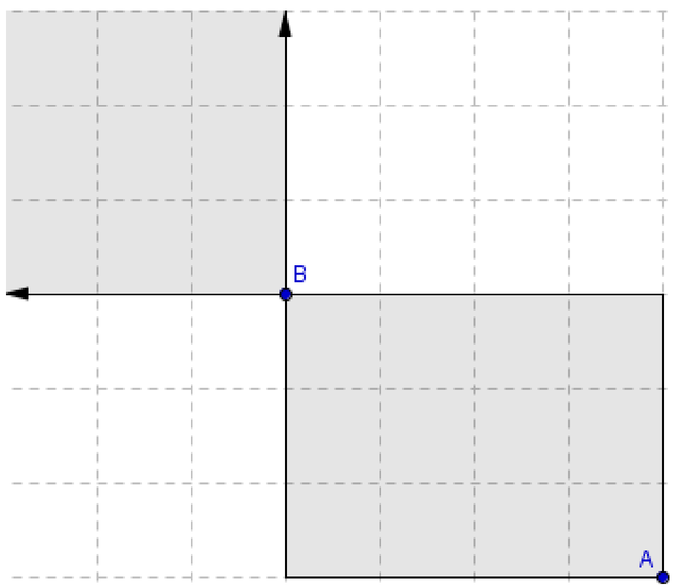


Figura 19.

Caso 2: $a_2 < a_1$y $b_1 < b_2$

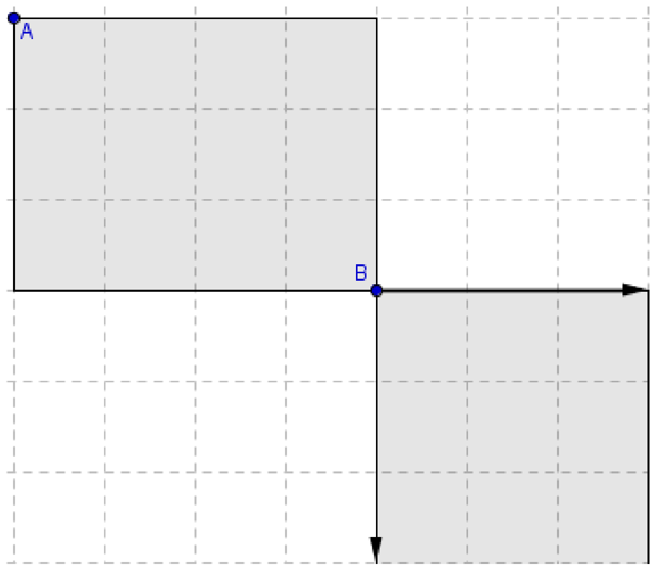


Figura 20.

Caso 3: $a_1 < a_2$ y $b_2 < b_1$

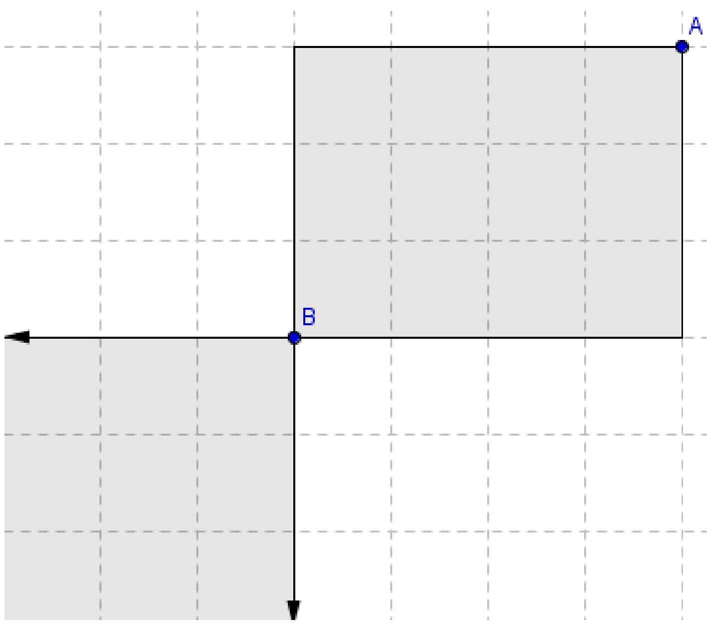


Figura 21.

Caso 4: $a_2 < a_1$ y $b_2 < b_1$

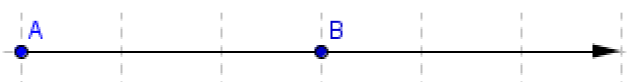
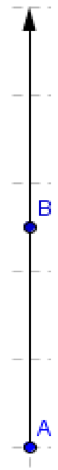


Figura 22.

Caso 5: $a_1 \neq a_2$ y $b_1 = b_2$



Caso 6: $a_1 = a_2$ y $b_1 \neq b_2$

Figura 23.

Podemos concluir también que la relación de contenencia expuesta por Euclides, bajo su métrica, se hace extensa también a la Geometría de Manhattan bajo la métrica del taxista, es decir, $\overline{AB} \subseteq \overrightarrow{AB} \subseteq \overleftrightarrow{AB}$, como se ilustra en la siguiente figura.

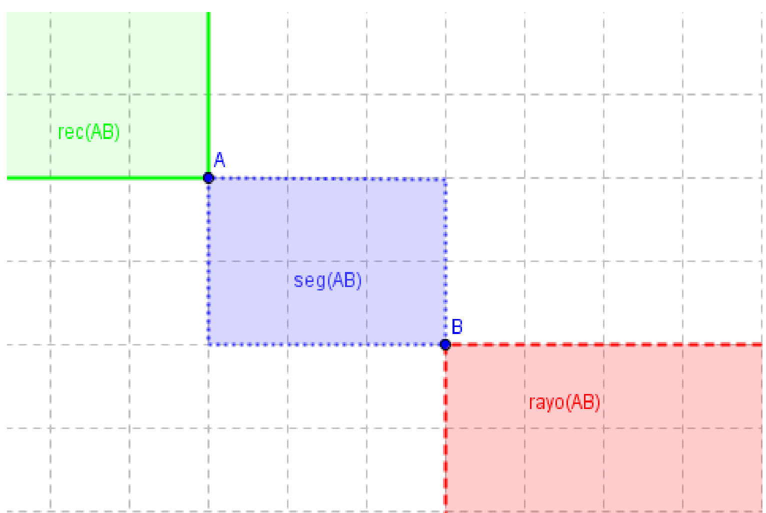


Figura 24.

RAYO OPUESTO: Dos rayos son opuestos si son colineales y sólo comparten el origen.

Al introducirnos en la definición de rayo opuesto nos encontramos con el término colinealidad, termino no estudiado aún, dado que interestancia implica colinealidad, por ello será necesario antes de determinar qué tipo de representaciones surgen de la definición de rayo opuesto, definir colinealidad para la métrica del taxista y a partir de ella determinar qué tipo de representaciones de rayo opuesto surgen.

DEFINICIÓN DE PUNTOS COLINEALES: Tres o más puntos son colineales si existe una recta que los contiene.

A continuación procederemos a determinar si la definición de puntos colineales también se persiste en la Geometría del Taxista desde la métrica de Manhattan.

TEOREMA 1: Dados $A, B\ y\ C$ puntos, A, B y C distintos entre sí, entonces existe una $\overleftrightarrow{PQ}$ que los contiene.

Demostración:

No	Afirmación	Garante
1	$A, B\ y\ C\ puntos$	$Dado$
2	$A = (x_1, y_1)$; $B = (x_2, y_2)$; $C = (x_3, y_3)$	$Ubicación\ de\ Puntos\ en\ el\ Plano$
3	$a = mín\{x_i: i = 1,2,3\}$ $b = mín\{y_i: i = 1,2,3\}$ $c = máx\{x_j: j = 1,2,3\}$ $d = máx\{y_j: j = 1,2,3\}$	$Propiedad\ de\ los\ numeros\ reales$
4	$\exists P \setminus P = (a, b)$ $\exists Q \setminus Q = (c, d)$	$Postulado\ de\ colocación\ de\ la\ regla$ (3)
5	$\exists \overleftrightarrow{PQ}$	$Postulado\ de\ la\ recta$ (4)
6	$a < x_1 < c\ ;\ b < y_1 < d$ $a < x_2 < c\ ;\ b < y_2 < d$ $a < x_3 < c\ ;\ b < y_3 < d$	$Relación\ de\ orden$ (2,3)
7	$d(PA) = \lvert x_1 - a\rvert + \lvert y_1 - b\rvert$ $d(AQ) = \lvert c - x_1\rvert + \lvert d - y_1\rvert$ $d(PB) = \lvert x_2 - a\rvert + \lvert y_2 - b\rvert$	$Definición\ de\ Métrica\ de\ Taxista$

	$d(BQ) = \|c - x_2\| + \|d - y_2\|$ $d(PC) = \|x_3 - a\| + \|y_3 - b\|$ $d(CQ) = \|c - x_3\| + \|d - y_3\|$	(2,3,4,6)
8	$d(PA) + d(AQ) =$ $\|x_1 - a\| + \|y_1 - b\| + \|c - x_1\| + \|d - y_1\|$ $Análogo\ para$ $d(PB) + d(BQ)\ \ y$ $d(PC) + d(CQ)$	$Adición\ de\ Medidas$ (7)
9	$\|c - a\| + \|d - b\|$	$Propiedades\ de\ los$ $Números\ de\ Reales$ (8)
10	$\|c - a\| + \|d - b\| = d(PQ)$	$Definición\ de\ Métrica\ de\ Taxista$ (9)
11	$P - A - Q$ $P - B - Q$ $P - C - Q$	$Teorema\ Interestancia\ (8, 10)$
12	$A, B\ y\ C \in \overleftrightarrow{PQ}$	$Definición\ de\ recta$ (11)
13	$A, B\ y\ C\ son\ colineales$	$Definición\ de\ colinealidad$ (12)

TEOREMA 2: si $A_1, A_2, \dots, A_n$ puntos, entonces existe una $\overleftrightarrow{PQ}$ que los contiene.

Demostración:

No	Afirmación	Garante
1	$A_1, A_2, \dots, A_n \quad puntos$	$Dado$
2	$A_1 = (x_1, y_1); A_2 = (x_2, y_2); A_n = (x_n, y_n)$	$Ubicación\ de\ Puntos\ en\ el\ Plano$ (1)
3	$a = mín\{x_i: i = 1,2, \dots, n\}$ $b = mín\{y_i: i = 1,2, \dots, n\}$ $c = máx\{x_j: j = 1,2, \dots, n\}$ $d = máx\{y_j: j = 1,2, \dots, n\}$	$Propiedad\ de\ los\ Números\ Reales$

4	$\exists P \backslash P = (a,b)$ $\exists Q \backslash Q = (c,d)$	$Postulado\ de\ Colocación\ de\ la\ Regla$ (3)
5	$\exists \overleftrightarrow{PQ}$	$Postulado\ de\ la\ Recta$ (4)
6	$a < x_1 < c\ ;\ b < y_1 < d$ … $a < x_n < c\ ;\ b < y_n < d$	$Relación\ de\ orden$ (2,3)
7	$d(PA_1) = \|x_1 - a\| + \|y_1 - b\|$ $d(A_1Q) = \|c - x_1\| + \|d - y_1\|$ $\dots$ $d(PA_n) = \|x_n - a\| + \|y_n - b\|$ $d(A_nQ) = \|c - x_n\| + \|d - y_n\|$	$Definición\ de\ Métrica\ de\ Taxista$ (2,3,4,6)
8	$d(PA_1) + d(A_1Q) =$ $\|x_1 - a\| + \|y_1 - b\| + \|c - x_1\|$ $+ \|d - y_1\|$ $\dots$ $d(PA_n) + d(A_nQ) =$ $\|x_n - a\| + \|y_n - b\| + \|c - x_n\|$ $+ \|d - y_n\|$	$Adición\ de\ Medidas$ (7)
9	$\|c - a\| + \|d - b\|$	$Propiedades\ de\ los\ Números\ Reales$ (8)
10	$\|c - a\| + \|d - b\| = d(PQ)$	$Definición\ de\ Métrica\ de\ Taxista$ (9)
11	$P - A_1 - Q$ $\dots$ $P - A_n - Q$	$Definición\ de\ Interestancia$ (10)
12	$A_1, A_2, \dots, A_n \in \overleftrightarrow{PQ}$	$definición\ de\ recta$ (11)
13	$A_1, A_2, \dots, A_n\ son\ colineales$	$Definición\ de\ Colinealidad$ (12)

Como hemos visto n cantidad de puntos en la geometría del taxista serán colineales, es decir, dada n cantidad de puntos siempre existirá una recta que los contendrá.

Ahora bien, contemplando la definición de rayo opuesto, dos rayos son opuestos si son colineales y sólo comparten el origen, y la conclusión a la cual hemos llegado de colinealidad, podemos determinar que no existe el rayo opuesto dado que aunque existe una recta que contendrá a los dos rayos, esta recta no es única; además, la unión de los dos rayos será un segmento de tipo tres, (ver figura 25) lo cual contradice el hecho de que dos rayos sean opuestos si sólo comparten el origen.

Si omitimos el hecho de que dos rayos son opuestos si sólo comparten el origen podemos determinar que si existe el rayo opuesto, pero igualmente estaríamos quebrantando el hecho de que la recta que los contenga sea única.

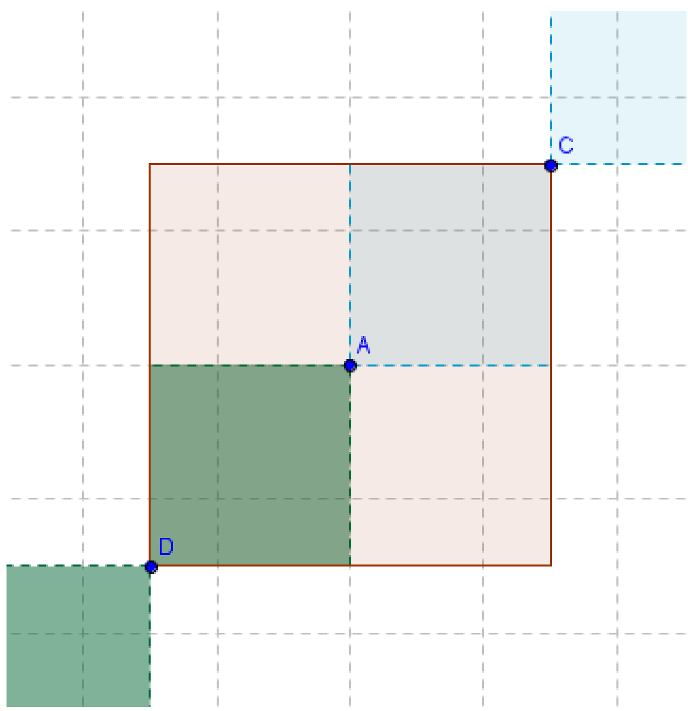


Figura 25.

En la *figura 25* observamos que la unión de los $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ es un segmento de tipo tres, segmento $\overline{CD}$, pero también determinamos que existen infinitos rayos apuestos al $\overrightarrow{AC}$ como observamos en la figura 26, en la cual los rayos $\overrightarrow{AN}$ y $\overrightarrow{AD}$ son opuestos al $\overrightarrow{AC}$ respectivamente.

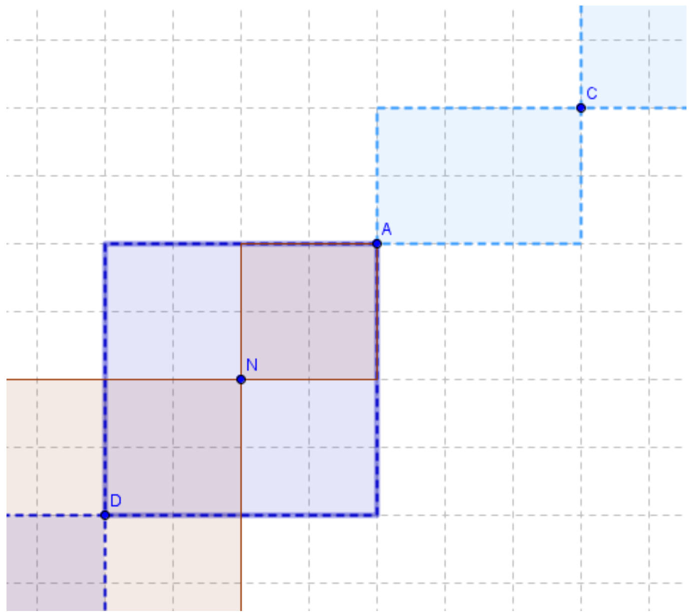


Figura 26.

Con anterior podemos concluir que en la geometría del taxista:

1. No existe un rayo apuesto a un rayo dado.
2. Si omitimos el hecho que la intersección de dos rayos opuestos es su origen para que exista el rayo opuesto, determinamos que:
   - Existen infinitos rayos opuestos a un rayo dado.
   - Existen infinitas rectas que contengan a los dos rayos, unicidad que si existe en la geometría euclidiana.
   - La intersección de los dos rayos opuestos es un segmento de tipo tres, ver *figura 26*.

6.2.1 ESTUDIO DE LOS POSTULADOS Y TEOREMAS DE LA GEOMETRÍA DE EUCLIDES A TRAVÉS DE LA MÉTRICA DE MANHATAN

De aquí en adelante y con fines de no retomar el trabajo de Euclides, dado que los elementos que estudiamos ya fueron validados por el mismo Euclides, sólo tomaremos como elementos de estudios aquellos que difieren con la representación usual que hacía Euclides de segmento, recta y rayo para determinar sí con las nuevas representaciones que encontramos de ellos aún permanecen invariantes, es decir, sus postulados y teoremas siguen siendo válidos.

6.2.2 POSTULADOS

DE LA RECTA: Dados dos puntos, existe exactamente una recta que los contiene. Este postulado no es válido en la geometría del taxista dado que existen infinitas rectas que contienen a dos puntos dados como en la figura 27.

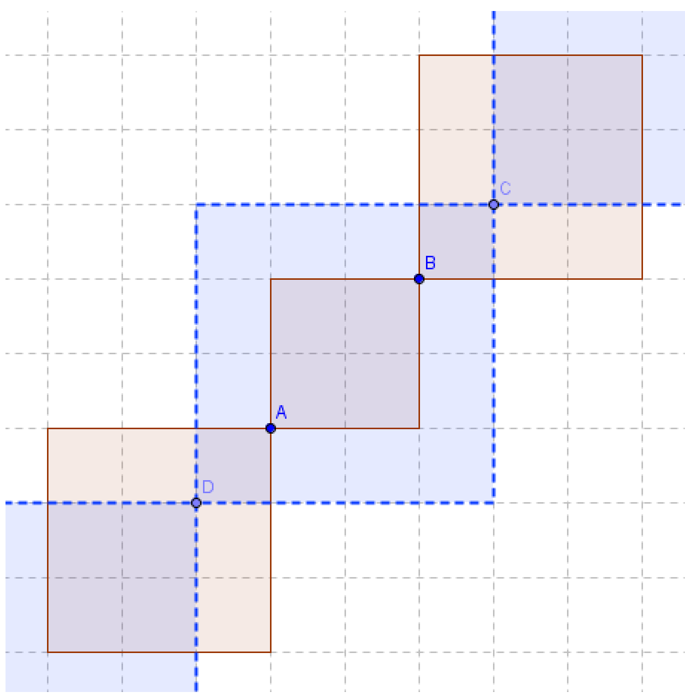


Figura 27.

Como se observa en la figura anterior los puntos A y B están contenidos en las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ respectivamente, lo cual contradice el postulado de unicidad establecido por Euclides.

DE LA INTERSECCIÓN DE RECTAS: dos rectas se cortan en un único punto. Al igual que el postulado de la recta el postulado de la intersección de rectas resulta ser falso, es decir, la intersección de dos rectas de la geometría del taxista resultar ser un conjunto infinito de puntos como se ejemplifica en la figura 28.

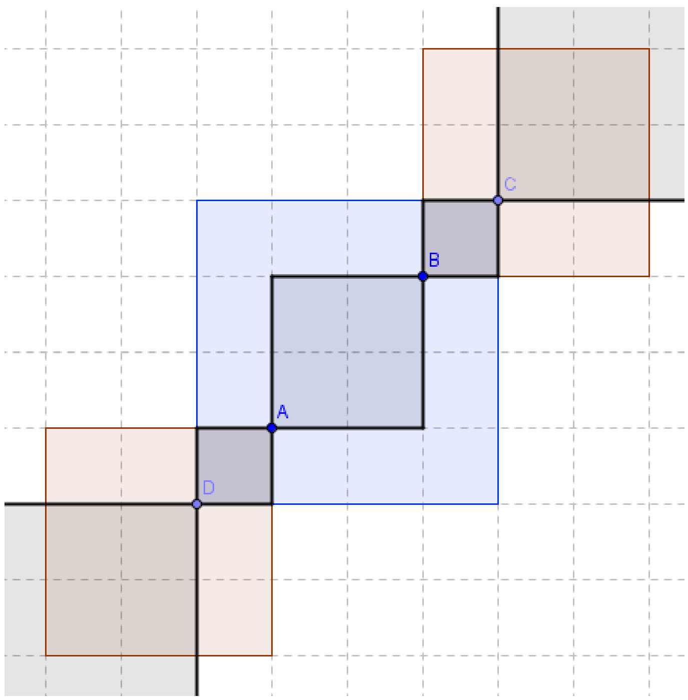


Figura 28.

Aquí se observa que la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ resultar ser el $\overline{AB} \cup \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{AD}$.

DE LA MEDIDA DE ÁNGULOS: A cada ángulo le corresponde un número entre $0°$ y $180°$.

Como podemos observar en el enunciado aparece un nuevo término no contemplado aún, ángulo, por tal motivo primero analizaremos la definición de ángulo para posterior analizar este postulado.

DEFINICIÓN DE ÁNGULO: Es la figura geométrica formada por dos rayos que no son colineales y tiene el mismo origen.

Analizando el enunciado observamos los términos colinealidad y origen, los cuales ya hemos estudiado en el apartado de rayo opuesto; en él, logramos determinar que n puntos siempre serán colineales y que los rayos opuestos no existen, dado que uno de los problemas que se presenta en la definición de rayo opuesto y que no se cumple en la Geometría del Taxista es justamente la de compartir el origen. En el estudio del rayo opuesto logramos determinar que omitiendo colinealidad y conservando origen, este último tampoco se cumple dado que la unión de los dos rayos era un segmento de tipo tres. Con lo anterior podemos determinar que la noción de ángulo no existe en la geometría del Taxista, dado que no se cumple ninguna de sus de características principales, es decir, la colinealidad y la unicidad de su origen.

La anterior conclusión nos traerá como consecuencia que los postulados y teoremas que hablen de ángulo no existan en la Geometría del Taxista.

DE LA ADICIÓN DE MEDIDAS DE SEGMENTO: Si B está entre A y C, entonces $AB + BC = AC$.

Este postulado hace referencia al ítem dos de interestancia desarrollado por Euclides en su trabajo y tomado como único ítem de interestancia para la Geometría del Taxista, y a partir de él definir los conceptos de segmento, recta, rayo y rayo opuesto, es decir, la adición de medidas de segmentos hace uso de la noción de interestancia que hemos utilizado en este trabajo para desarrollar las representaciones de segmento, recta y rayo.

PARALELA POR UN PUNTO EXTERIOR: Si P es un punto exterior a una recta m, entonces existe una sola recta k paralela a m por P.

Antes de entrar a analizar este teorema, primero analizaremos la definición de rectas paralelas para posteriormente abordar este postulado.

RECTAS PARALELAS: son rectas coplanarias que no se intersecan. Es decir, son rectas cuya intersección es vacía o que no tiene puntos en común; si analizamos esta situación desde las rectas de tipo tres, que hemos venido trabajando y mediante el ejemplo que a continuación abordaremos podremos determinar que dos rectas siempre se intersecaran en más de un punto.

Ejemplo: En la figura 29 observamos las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

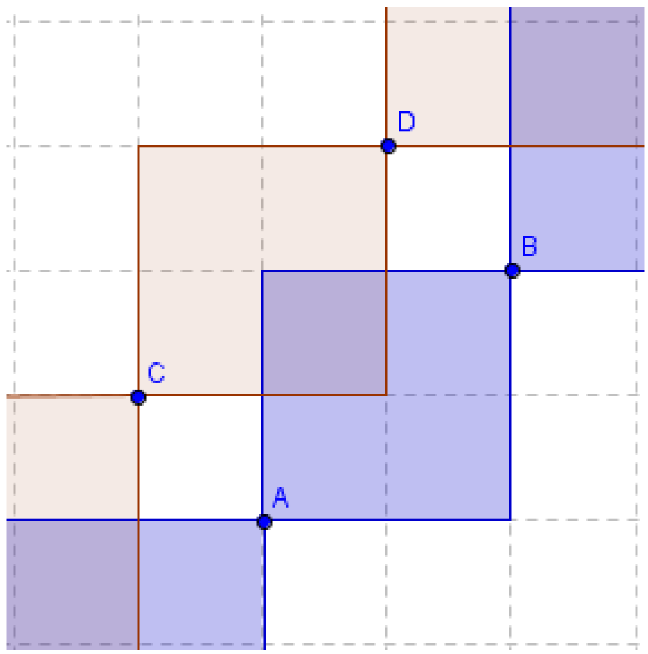


Figura 29.

En la figura 30 observamos que $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{EF} - \overline{DB} - \overline{AC}$. Con lo cual concluimos que en la Geometría del Taxista no existe la noción de paralelismo.

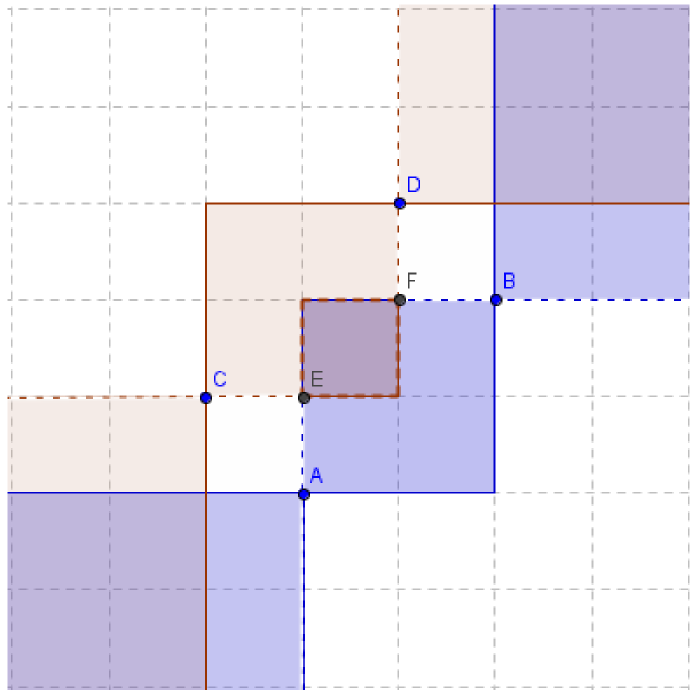


Figura 30.

Con la anterior conclusión procederemos a analizar el postulado paralela por un punto exterior. En él se menciona la unicidad de una recta k paralela a m por P, hecho que contradice la conclusión a la que hemos llegado con respecto a las rectas paralelas la Geometría del Taxista, es decir, no existen las rectas paralelas, por tal motivo podemos afirmar que este postulado no existirá en la geometría del taxista.

6.2.3 TEOREMAS

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS: La distancia entre dos puntos siempre es un valor positivo. Este teorema ya ha sido demostrado anteriormente cuando estudiamos la métrica de Manhattan, en particular, cuando demostramos la propiedad 2 que satisface la definición de espacio métrico, es decir, $d(X,Y) > 0$.

EXISTENCIA DEL PUNTO MEDIO: Si $\overline{AB}$, entonces existe su punto medio.

Para demostrar este teorema primero tendremos que recordar la definición que Euclides da de punto medio: El punto T es el punto medio del $\overline{SX}$, si T está entre los puntos S y X, y la longitud del $\overline{ST}$ es igual a la longitud del $\overline{TX}$. Con lo anterior y bajo un previo análisis hemos podido determinar que en la geometría del taxista existen infinitos puntos que cumplen con la definición de punto medio, los cuales determinaremos a continuación, para ello realizaremos el siguiente procedimiento.

1. Dado el $\overline{CD}$ determinamos la distancia de sus lados, como observamos en la figura 31, en nuestro caso a y b.

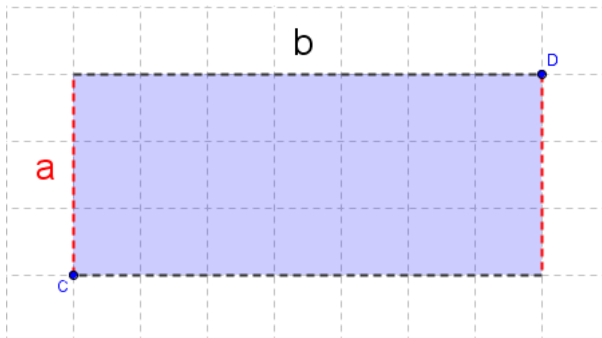


Figura 31.

Posteriormente para encontrar el conjunto de puntos medios en el $\overline{CD}$, haremos uso de la siguiente expresión:

$$m = \frac{a+b}{2}$$

2. Para determinar el punto medio a partir del lado b, teniendo en cuenta que la longitud de a es menor que b, (figura 31) sobre el segmento b (en color negro), agregamos un segmento congruente al segmento a (en color rojo), para determinar un nuevo segmento cuya distancia será $d(CF)$, luego dividiremos el $\overline{CF}$ en dos partes iguales cuya longitud será m (en color verde).

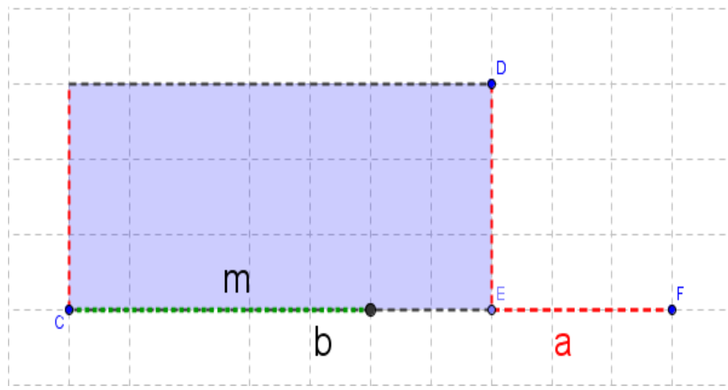


Figura 32.

3. Para determinar el punto medio a partir del lado a, teniendo en cuenta que la longitud de a es menor que b, ilustrado en la *Figura 32,* sobre el segmento a (en color rojo), agregamos un segmento congruente al segmento b (en color negro), para determinar un nuevo segmento cuya distancia será $\overline{CF}$, luego dividiremos el $\overline{CF}$ en dos partes iguales cuya longitud será m (en color verde). Debido a que $\overline{CE}$ es mayor que la longitud de a,entonces, a la medida CE sustraemos a y el excedente lo trasladaremos sobre el lado b adyacente, lo cual nos permitirá ubicar el punto E\` sobre el lado b que correspondería a otro punto medio del $\overline{CD}$.

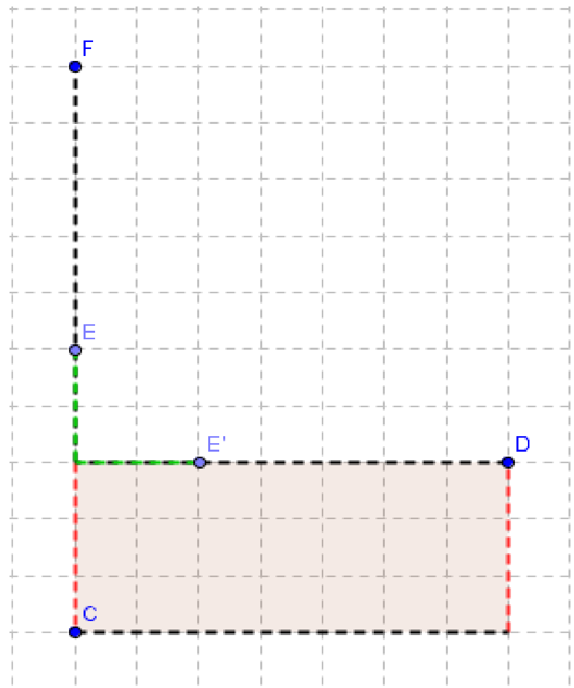


Figura 33.

4. Finalmente para determinar los demás puntos medios del $\overline{CD}$, a partir de los puntos encontrados, unimos dichos puntos mediante un segmento de la geometría usual como lo ilustra la *Figura 34*.

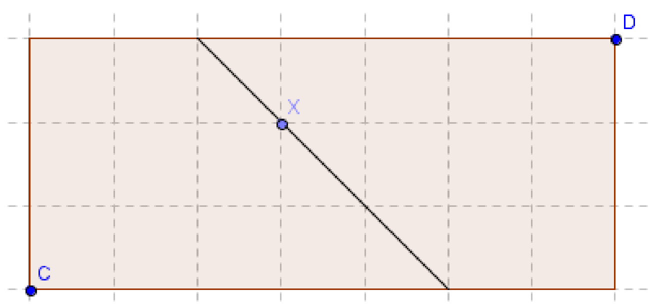


Figura 34.

Los puntos que pertenecen al segmento construido tienen la propiedad de distar de los puntos C y D respectivamente, es decir, la medida del $\overline{CX}$ es igual a la del $\overline{XD}$, lo anterior lo podemos demostrar si asignamos coordenadas a los puntos C, D y X, posteriormente tomamos las medidas de los segmentos $\overline{CD}$, $\overline{CX}$ y $\overline{XD}$.

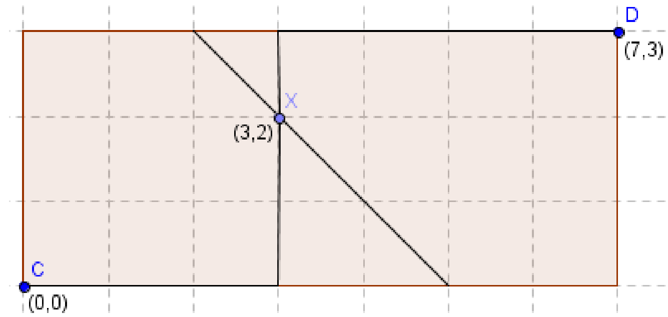


Figura 35.

$CD = |7 - 0| + |3 - 0|$ $\quad CX = |3 - 0| + |2 - 0|$ $\quad XD = |7 - 3| + |3 - 2|$

$CD = 10$ $\quad CX = 5$ $\quad XD = 5$

Con lo anterior determinamos que los segmentos $\overline{CX}$ y $\overline{XD}$, lo que nos indica que el punto X equidista de los puntos C y D respectivamente, además, los puntos $X \in \overline{CD}$ con lo cual se cumplen la definición del punto medio.

Concluimos entonces que en la geometría del taxista existen infinitos puntos que cumplen la definición de punto medio, lo anterior recordando que el punto X hace referencia al conjunto de puntos que pertenecen al segmento de la geometría usual y que tienen por propiedad distar de los extremos C y D respectivamente.

LOCALIZACIÓN DE PUNTOS: En un rayo hay exactamente un punto que está a una distancia determinada del extremo del rayo. Este teorema resulta ser válido para la geometría del taxista y a continuación lo demostraremos teniendo presente que esta la haremos usando un rayo no usual, es decir, el rayo que difiere de los tipos de rayos analizados por Euclides en los que el teorema de localización de puntos ya es válido.

Teorema 4: Dados $\overrightarrow{AB}$ (rayo de tipo 1), w un número positivo, existen $P, Q \in \overrightarrow{AB}$ tales que para todo $X \in S(PQ)$, $d(X, A) = w$.

Demostración:

No.	Afirmación	Garante
1	$\overrightarrow{AB}\ y\ \ w \in R$	$Dado$
2	$A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$	$Ubicación\ de\ Puntos$ $en\ el\ Plano$ (1)
3	1. $w > d(AB)$ 2. $w < d(AB)$ 3. $w = d(AB)$	$Tricotomía$ (1)
4	$w > d(AB)$	**Caso 1**
5	$\exists K/K = (x_3, y_2)$ $\exists T/T = (x_2, y_3)$	$Ubicación\ de\ Puntos$ $en\ el\ Plano$ (3)
6	$\exists r \in R/r = w - d(AB) > 0$	$Propiedades\ de\ los\ números\ reales$ (2)
7	$\exists P \in r(BK)/d(BP) = r$ $\exists Q \in r(BT)/d(BQ) = r$	$Teorema\ Localización\ de\ Puntos$ $(Geometría\ Usual)$ (5,6)
8	$d(AQ) = d(AB) + d(BQ)$ $d(AP) = d(AB) + d(BP)$	$Definición\ Métrica\ del\ Taxista$ (7)
9	$d(BQ) = d(BP)$	$Propiedades\ de\ los$ $números\ reales$ (7,8)
10	$\exists \Delta QBP$	$Definición\ de\ Triángulo\ de\ la$ $Geometría\ Usual$ (2,7)
11	$\forall X/X \in s(PQ)$	$Teorema\ Puntos\ Entre$ (2)
12	$X = (x, y)$ $x_2 < x < x_3$ $y_2 < y < y_3$	$Teorema\ Orden - Interestancia$ $(Geometría\ Usual)$ (7,11)
13	$\exists r(l)/r(l) \parallel al\ eje\ x\ por\ X$ $\exists r(j)/r(j) \perp al\ eje\ x\ por\ X$	$teorema\ de\ las\ paralelas$ $de\ la\ geometría\ usual$ (12)
14	$M = r(l) \cap s(BQ)$ $N = r(l) \cap s(BP)$	$Teorema\ intersección\ de$ $rectas\ de\ la\ geometría\ usual$ (13)

15	$\exists \Delta MQX$	$Definicón\ de\ Triángulo\ de\ la\ Geometría\ Usual\ (7{,}12)$
16	$\angle BPQ \cong \angle MXQ$	$Teorema\ de\ paralelas\ a\ ángulos\ correspondientes\ de\ la\ geometría\ usual\ (11{,}17)$
17	$\angle BQP \cong \angle MQX$	$Reflexibilidad\ (10{,}14{,}15)$
18	$\Delta QBP \sim \Delta QMX$	$Criterio\ AA\ de\ Semejanza\ (Geometría\ Usual(10{,}15{,}16)$
19	$BQ \sim QM;\ \llcorner BQP \sim \llcorner MQX; BP \sim MX$	$Relación\ de\ Semejanza\ entre\ Triángulos\ (Geometría\ Usual(18)$
20	$\frac{BQ}{BQ - MB} = \frac{BP}{MX}$	$Relaciones\ de\ Semejanza\ (18{,}19)$
21	$MX + MB = BQ$	$Propiedades\ de\ los\ Números\ Reales\ (20)$
22	$MX + MB = BX$	$Definición\ de\ Métrica\ del\ Taxista\ (11)$
23	$d(BX) = d(BQ) = d(BP)$	$Transitividad\ (9{,}21{,}22)$
24	$d(AX) = d(AB) + d(BX)$	$Definición\ de\ Métrica\ del\ Taxista\ (3{,}12)$
25	$d(AX) = d(AP) = d(AQ)$	$Propiedad\ de\ los\ Números\ Reales\ (8{,}24)$

A continuación observamos la *figura 36* en la cual muestra el análisis de la situación expuesta por el caso 1.

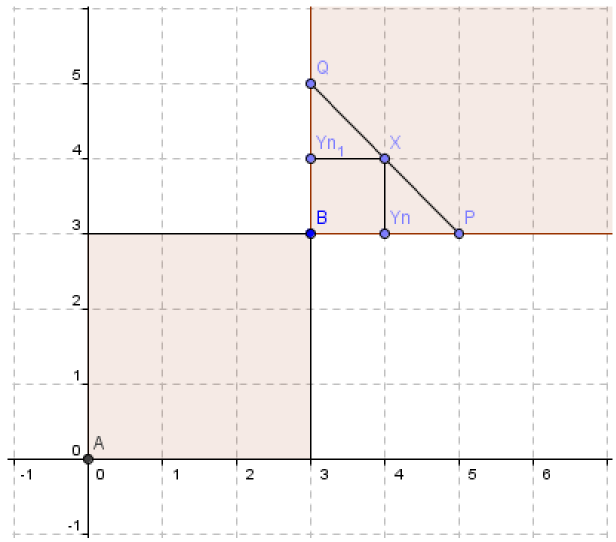


Figura 36.

26	$w < d(AB)$	**Caso 2**
27	$Análogo\ al\ caso\ 1, siendo\ r = \overline{AB} - w.$	

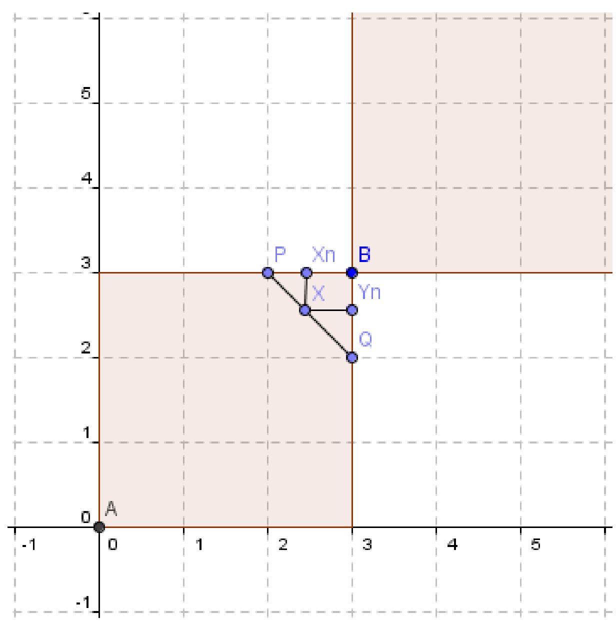


Figura 37.

28	$w = d(AB)$	**Caso 3**

29	$A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$	$Ubicación de\ Puntos\ (1)$
30	$d(AB) = \lvert x_1 + x_2 \rvert + \lvert y_1 + y_2 \rvert$	$Definición$ $Métrica\ del\ \ Taxista (29)$
31	$w = \lvert x_1 + x_2 \rvert + \lvert y_1 + y_2 \rvert$	$Sustitución\ (28{,}30)$

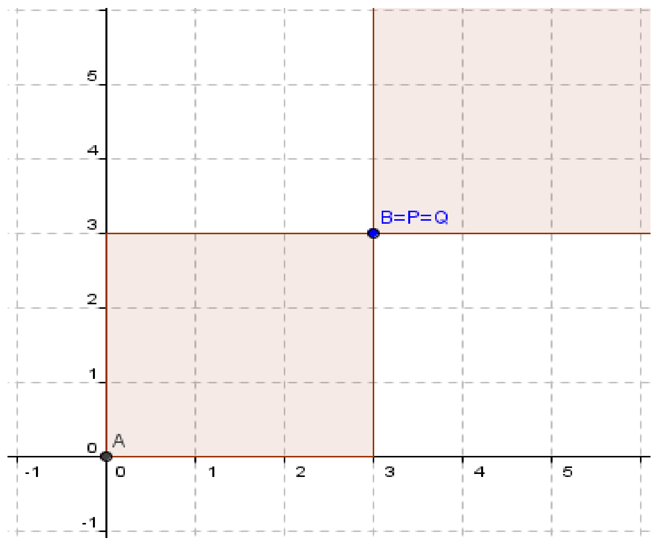


Figura 38.

Ejemplo:

Dado el $\overrightarrow{AB}$ y una distancia $m = 3$, entonces existe $P \in \overrightarrow{AB}$ tal que $d(AP) = 3$.

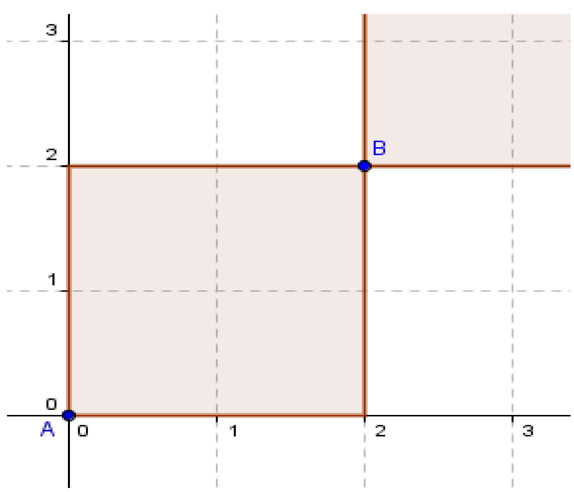


Figura 39.

Entonces existen dos puntos P y Q, que pertenecen al $\overrightarrow{AB}$ y distan del punto A en 3 unidades, a partir de los puntos P y Q se construye el $s(PQ)$. Según el Teorema de Localización de Puntos de la Geometría del Taxista, demostrado anteriormente, los puntos $X \in s(PQ)$ también distan del punto A en 3 unidades. Como P y Q distan del punto A en 3 unidades, sólo se puede dar el caso de que las coordenadas de P y Q sean $(1{,}2)$ y $(2{,}1)$, esto según los criterios establecidos en la conjetura anterior. Con los puntos P y Q se construye el $s(PQ)$ y ubicamos sobre el mismos un punto X, punto que tiene la característica de distar 3 unidades del punto A. Lo cual cumple con la premisa establecida en la conjetura.

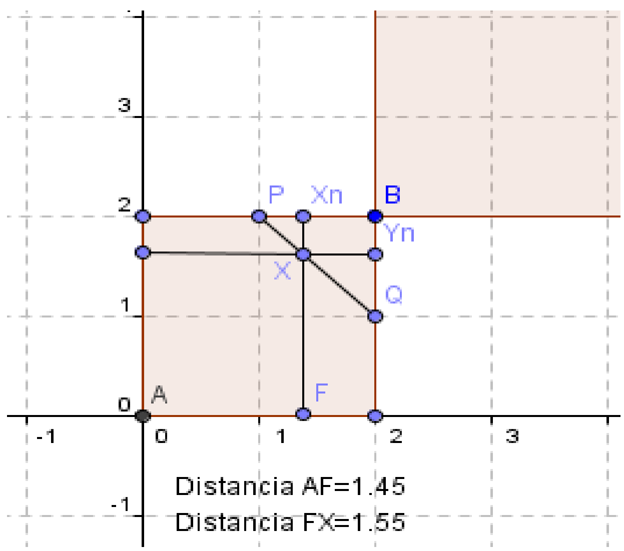


Figura 40.

TEOREMAS DE ÁNGULOS: Los ángulos no son contemplados en la Geometría del Taxista dado el análisis previo realizado en el postulado de la medida de ángulos, en el cual concluimos que no existe la noción de ángulo, por tal motivo los teoremas referentes a ángulos no serán estudiados.

TEOREMAS DE RECTAS PARALELAS: Las rectas paralelas no son contempladas en la Geometría del Taxista dado el análisis previo realizado en el postulado de la paralela por un punto exterior, en el cual concluimos que no existen las rectas paralelas, por tal motivo los teoremas referentes a rectas paralelas no serán estudiados.

TEOREMAS DE TRIÁNGULOS: Antes de entrar a analizar los teoremas de triángulos primero analizaremos la definición de triángulo para determinar su representación gráfica en la Geometría del Taxista.

DEFINICIÓN DE TRIÁNGULO: Dados tres puntos no colineales, es la unión de los tres segmentos que conectan los puntos. Esta definición de entrada presenta dos problemas, por un lado, la no colinealidad de tres puntos en esta geometría como lo concluimos en el estudio previo realizado a la definición de colinealidad. Por tal motivo hemos decidido omitir colinealidad de la definición de triángulo para determinar qué tipo de representación resultaría en la geometría del Taxista de Triángulo.

Si omitimos el término colinealidad de la definición de triángulo, es decir, dado tres puntos, es la unión de los tres segmentos que conectan los puntos, podemos determinar que la representación de triángulo para la geometría del Taxista sería un segmento de tipo tres como lo observaremos a continuación.

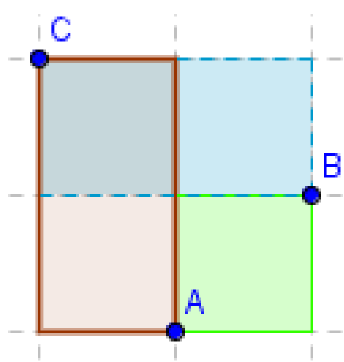


Figura 41

Por otro lado, la relación intrínseca que existe entre los lados de un triángulo y sus ángulos correspondientes pone en manifiesto el otro problema para el estudio de los triángulos, dado la conclusión a la cual hemos llegado en el estudio realizado a la definición de ángulo y en el cual concluimos la no existencia de los ángulos.

Con el anterior análisis podemos determinar que:

- Si omitimos colinealidad de la definición de triángulo obtenemos como resultado un segmento de tipo tres de la Geometría del Taxista, ver figura 41, con lo cual el estudio de triángulos para esta geometría termina siendo un estudio sobre segmentos de esta misma geometría.

- Concluimos que no existen posibilidad de estudiar alguna relación entre la noción de triángulo y la noción de ángulo, dado que ninguno de ellos existe en esta geometría como anteriormente lo concluimos.

TEOREMA PUNTOS EQUIDISTANTES DE LOS EXTREMOS DE UN SEGMENTO: si un punto es equidistante de los extremos de un segmento, entonces está sobre la mediatriz del segmento. Primero estudiaremos la definición de mediatriz y con base en ella analizaremos el Teorema de Puntos Equidistantes de los Extremos de un Segmento.

DEFINICIÓN DE MEDIATRIZ: Es la recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio de este. Pero ¿qué son las rectas perpendiculares? Son rectas o rayos que forman un ángulo recto.

Al introducir la noción de ángulo para definir rectas perpendiculares podemos afirmar que dichas rectas no existen dado que, como anteriormente concluimos, la noción de ángulo no existe en la Geometría del Taxista.

Con lo anterior podemos concluir que no existe la mediatriz de un segmento en la Geometría del Taxista e igualmente concluir que no existe el Teorema de Puntos Equidistantes de los Extremos de un Segmento.

Es más, cuando estudiamos el Teorema de la Existencia del Punto Medio de un Segmento de tipo tres logramos determinar que existen infinitos puntos que cumplen el papel de punto medio, es decir, si omitimos perpendicularidad de la definición de mediatriz existirían infinitas rectas que pasan por estos infinitos puntos e igualmente existirán infinitas rectas a un mismo punto.

Sin embargo, reformulamos la definición de mediatriz logrando encontrar un segmento especial de tipo tres para el cual existe un conjunto de puntos que pertenecen a una recta de tipo tres, dichos puntos tiene la característica de equidistar de los extremos del segmento.

El segmento de tipo tres sobre el cual logramos determinar dicho conjunto de puntos es un cuadrado de la geometría usual, pero contemplando también un segmento de tipo tres en el cual dicho segmento es un paralelogramo de la geometría usual, esto último tiene como finalidad contemplar el hecho de nombrar al cuadrado de la geometría usual como un segmento especial de tipo tres de la Geometría del Taxista e igualmente determinar los lugares geométricos que surgen de estos.

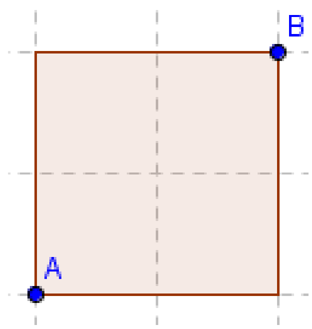


Figura 42.

Para determinar el conjunto de puntos que equidistan de los extremos A y B y que pertenecen al $\overline{AB}$, seguiremos los pasos realizados para encontrar los puntos medio de un segmento de tipo tres, (*página 34*), nombraremos los puntos L y M pertenecientes al $\overline{CD}$, *Figura 34,* L y M vértices del cuadrado de la geometría usual, lo anterior tiene dos fines: Primero, a partir de los puntos L y M crear el $s(LM)$, recordemos que los puntos que pertenecen al $s(LM)$ tienen la característica de equidistar de los puntos A y B respectivamente, segundo, a partir de los puntos L y M crear los rayos $\overrightarrow{LM}$ y $\overrightarrow{ML}$, esto tiene como fin determinar los puntos que no pertenecen al $\overline{AB}$ y que también poseen la característica de distar de los puntos A y B, lo anterior lo podemos garantizar gracias al teorema localización de puntos, en particular el caso uno estudiado para este teorema en la *página 55* en el que la $d(X,L) > d(L,M)$. Es decir, si $d(X,L) = w$ y $d(L,A) = x$, w y x constantes, entonces, $|w - x| = k$, con k constate y mayor que 0. Como $d(L,A) = d(L,B)$ entonces, los puntos X que disten de L en w unidades distaran de A y B en k unidades. En forma análoga encontraremos los puntos X que equidistan de A y B y pertenecen al $\overrightarrow{ML}$.

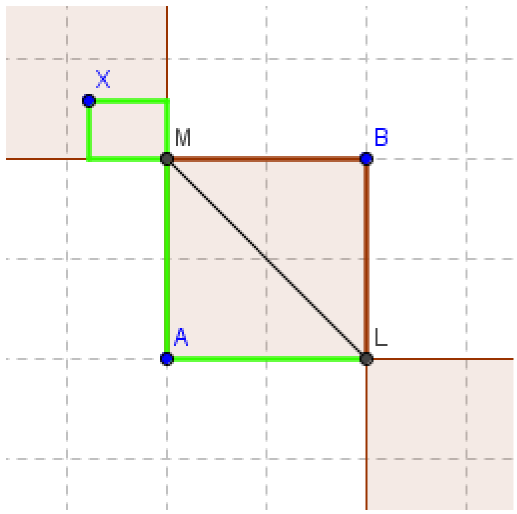


Figura 43.

En particular, el conjunto de puntos X que equidistan de A y B respectivamente, son los $\{X \in \overrightarrow{LM}/L - M - X \cup X \in \overrightarrow{ML}/M - L - X \cup s(LM)\}$ o denotado de otra forma como los $\{X \in (\overleftrightarrow{LM} - \overline{LM}) \cup s(LM)\}$, *Figura 44*.

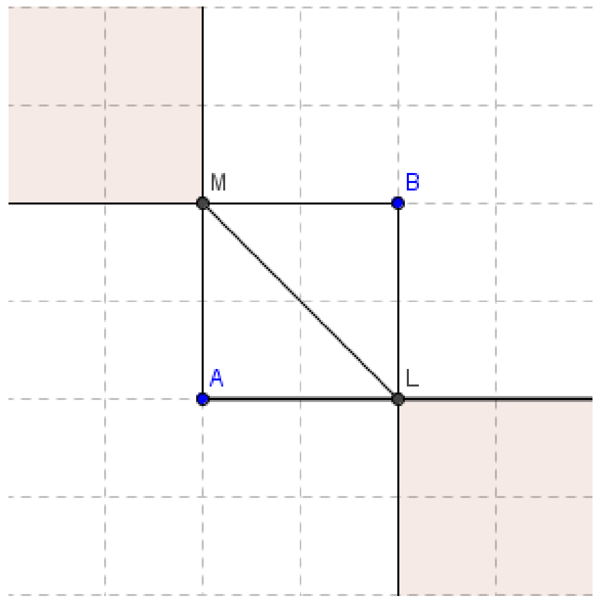


Figura 44.

De forma análoga realizamos el mismo procedimiento para determinar el conjunto de puntos que equidistan de los extremos del $\overline{AB}$, el $\overline{AB}$ es de tipo tres y paralelogramo de la geometría euclidiana.

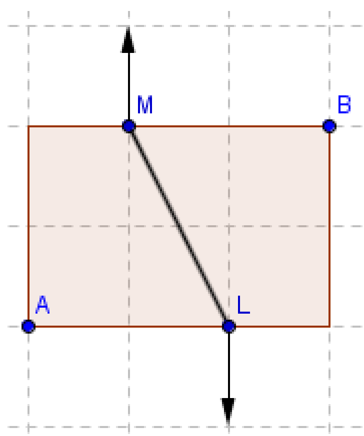


Figura 45.

En la figura observamos que no existe una recta que contenga a los puntos X que equidistan de los extremos A y B, sino dos rayos de tipo uno y un segmento de la geometría usual, es decir, el conjunto de puntos que equidista de los extremos A y

B de un segmento de tipo tres y paralelogramo de la geometría euclidiana son $X \in \overrightarrow{LH} \cup X \in \overrightarrow{MG} \cup X \in s(LM)$.

Retomando el teorema de puntos equidistantes de los extremos de un segmento y con las conclusiones que hemos recogido durante el análisis de mediatriz, podemos concluir que dicho teorema no existe en esta geometría dado que:

- No existen rectas perpendiculares en la Geometría del Taxista.
- No existe la mediatriz de un segmento dado que no existen las rectas perpendiculares en la Geometría del Taxista.

Con la conclusión final que obtuvimos de mediatriz de aquí en adelante omitiremos los teoremas que hablen del mismo.

TEOREMA DE PARALELOGRAMOS Y CUADRILÁTEROS: Durante el desarrollo de este estudio hemos podido concluir que en la Geometría del Taxista no existen las nociones de rectas paralelas y dada la definición de paralelogramo, un paralelogramo es un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos, podemos concluir que estos no existen en la Geometría del Taxistas.

Con la noción de cuadrilátero sucede lo mismo que con la mayoría de conceptos estudiados hasta aquí, introduce en su definición la colinealidad y como la misma no existe en esta geometría concluiremos que la noción de cuadrilátero no existe en esta geometría.

Lo anterior lo podemos constatar analizando la definición de cuadrilátero. Un cuadrilátero es la unión de cuatro segmentos coplanares que sólo se intersecan en los extremos, en la que ningún par de segmentos son colineales, y en la que cada extremo de un segmento es extremo de exactamente de dos segmentos. Los extremos de los segmentos son los vértices del cuadrilátero.

Si analizamos la parte en la que se menciona la no colinealidad de dos segmentos y lo contrastamos con las conclusiones que obtuvimos de colinealidad podemos concluir que dos segmentos siempre serán colineales dado que existe una recta que los contiene, como veremos a continuación.

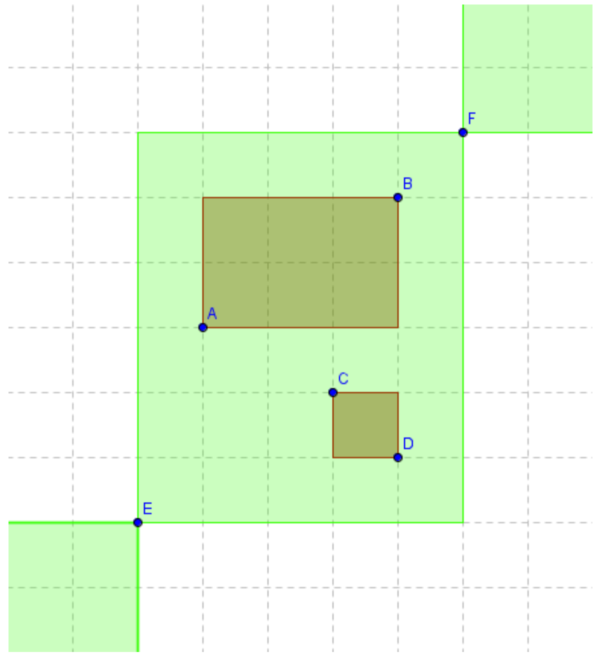


Figura 46.

En la figura podemos observar que los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ están contenidos por la recta $\overleftrightarrow{EF}$, es decir, los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son colineales.

Finalmente estudiaremos la definición de circunferencia, no trabajaremos los teoremas relacionados con ella dado que en ellos se habla de perpendicularidad, tangencia, bisectrices y ángulos, todos ellos descartados de esta geometría, pero la misma definición de circunferencia nos provee de herramientas para determinar qué lugar geométrico origina dicha definición en la Geometría del Taxista.

DEFINICIÓN DE CIRCUNFERENCIA: Es el conjunto de puntos de un plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo C llamado centro.

Apoyándonos en el teorema localización de puntos podemos determinar que existen infinitos puntos que distan de un punto, si notamos a la circunferencia como (C, r) donde C es el punto centro de la circunferencia y r como la distancia entre el centro y los puntos que pertenecen a la circunferencia, podemos determinar que el conjunto de puntos que distan de C son los que se presentan en la *Figura 47.*

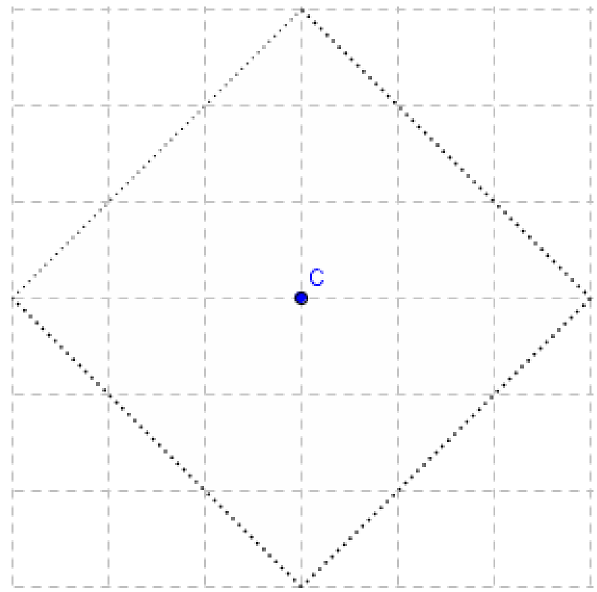


Figura 47.

7. CONCLUSIONES

En el estudio de la Geometría del Taxista se han generado afirmaciones que serán tomadas en cuenta como conclusiones del mismo, las cuales se describen en forma de resumen. A continuación se presentan las conclusiones acordes al análisis:

1. Una de las conclusiones primordiales de este trabajo se deriva de la noción de recta, dado que la misma es una noción no definida de la Geometría de Euclides, sin embargo existe modelos de representarlos en dicha geometría, nosotros nos vimos en la necesidad de definirla a partir de interestancia y omitiendo la colinealidad de los puntos, esto último lo argumentamos a partir del teorema 1 y 2, de la geometría del taxista, en el cual concluimos que n puntos siempre son colineales.

De lo anterior nos permite de antemano omitir algunos postulados, teoremas y definiciones que utilizan la noción de colinealidad para ser descritos, el ejemplo más evidente se encuentra en el triángulo en el cual se menciona la no colinealidad de tres puntos.

2. Encontramos que a partir de la Métrica de Manhattan se pueden establecer varios tipos de segmentos, rectas y rayos según la ubicación de los puntos que determinan sus representaciones en el plano, *(Ver páginas 25 – 33).*

3. En el estudio de rayo opuesto para la Geometría del Taxista encontramos que la definición inicial no permitiría que la noción de rayo opuesto exista para esta geometría, por ello omitimos de su definición la colinealidad para determinar su existencia en la Geometría del Taxista; sin embargo, pudimos concluir que aun omitiendo la colinealidad de su definición se genera otro problema con el hecho de que dos rayos opuestos compartan su origen, como pudimos concluir en el estudio de los rayos opuestos. *(Ver página 33)*

De lo anterior concluimos que la noción de ángulo para la Geometría del Taxista no exista.

4. Dentro de la Geometría de Euclides el postulado de la recta juega un papel preponderante en la construcción de la axiomática, dado que nos permite afirmar que para cada dos puntos distintos existe una única recta que los contiene, unicidad que no existe en la Geometría del Taxista, debido a que para cada dos puntos existen infinitas rectas que los contienen.

De lo anterior se desprende que:

- La intersección de dos o más rectas no es un único punto.
- No existe la noción de rectas paralelas.
- No existe la noción de rectas perpendiculares.
- No existe la noción de mediatriz.
- No existen las nociones de paralelogramos y cuadriláteros.

5. En el análisis del teorema del punto medio, que para la Geometría de Euclides es un único punto de un segmento, logramos determinar que para un segmento de tipo tres de la Geometría del Taxista existen infinitos puntos que igualmente

cumplen con la característica de ser punto medio de dicho segmento. *(Ver página 47)*

6. El único análisis que se realizó sobre circunferencia es sobre su definición, dado que durante el análisis de esta fue lo único con lo que pudimos trabajar, sin embargo, logramos determinar una diferencia en su representación euclidiana y taxista. *(Ver página 61)*

8. BIBLIOGRAFÍA

- Apostol, T. (1976). *Análisis Matemático: Introduccion Moderna al Cálculo Superior.* Reverte.
- Diaz, H. (1991). *Geometría del taxista.* Universidad Pedagógica Nacional.
- Heredia, D. P. (2008). *Métricas, Geometrías y Trigonometrías .* Quindio: Universidad de Quindio.
- Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Wilmington: Addison – Wesley. Iberoamericana, S.A..
- Reyes, E. (2007). Espacios Metricos. En *Metricas que pueden inducirse por una norma* (págs. 53 - 58). Bucaramanga Colombia: Universidad Distrital de Santander.
- Samper de Caicedo, C. (2009). *Geometría.* Bogotá DC: Norma.