ESTUDIO CATEGÓRICO DE LAS RELACIONES CENTRALES

ARTURO BERNAL AMORTEGUI
LEIDYS ODILA TAPASCO LONDOÑO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.

2006

ESTUDIO CATEGÓRICO DE LAS RELACIONES CENTRALES

ARTURO BERNAL AMORTEGUI
LEIDYS ODILA TAPASCO LONDOÑO

Trabajo de grado desarrollado con el objeto de adquirir él titulo de Licenciados en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional

GIL ALBERTO DE JESÚS DONADO NÚÑEZ
Profesor titular
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2006

A TODOS AQUELLOS QUE HAN CONTRIBUIDO CON MI DESARROLLO PROFESIONAL Y ACADEMICO.

ARTURO BERNAL

A MI HIJA Y MIS PADRES QUE ME HAN MOTIVADO CADA DÍA PARA PODER ALCANZAR MIS METAS.

LEIDYS TAPASCO

RESUMEN ANALÍTICO - RAES

Tipo de documento: Trabajo de Grado

Acceso al documento: Universidad Pedagógica Nacional

Titulo del documento: Estudio categórico de las relaciones centrales.

Autor(s): BERNAL AMORTEGUI, Arturo y TAPASCO LONDOÑO Leidys O.

Publicación: Bogotá, 2006,

Unidad Patrocinante: Universidad Pedagógica Nacional

Palabras Claves: Categorías concretas, relaciones centrales, matemáticas.

Descripción:

El presente trabajo es una redacción de notas sobre el estudio de algunas propiedades de las relaciones centrales, las cuales fueron construidas a partir de las relaciones usuales; cambiando las definiciones de estas, para llegar así a la siguiente definición de relación central:

R **es una relación central si y solo si existe** $A \subseteq X$ **tal que** $A \times X \subseteq R$**.**

La idea principal que aquí se presenta es un análisis de las relaciones centrales y algunos resultados obtenidos; los cuales tienen que ver principalmente con un reconocimiento de las relaciones centrales, para poder diferenciarlas de las demás relaciones, para ello encontramos ciertos ejemplos en diferentes conjuntos numéricos y no numéricos.

Se presentan además algunas conexiones entre las relaciones centrales y algunas nociones de tipo conjuntista; con lo que se establecen ciertas proposiciones, las cuales han sido demostradas de manera formal haciendo uso del lenguaje de tipo conjuntista.

Por otra parte haciendo uso de las relaciones centrales y su forma como se construyen a partir de la contenencia de unas en otras; se presentan unos diagramas que permiten visualizar ciertas características en la forma como se organizan las relaciones, pudiendo establecer la manera de encontrar la mayor de todas las relaciones centrales contenidas en otras dos y la menor de todas las relaciones centrales mayores que contienen a otras dos; también se muestra un análisis de los diagramas tratando de presentar ciertos enunciados los cuales se demuestran de manera informal puesto que hay ciertas carencias de regularidad y no encontramos las regularidades pertinentes.

Es importante resaltar que él titulo del trabajo es " **ESTUDIO CATEGÓRICO DE LAS RELACIONES CENTRALES"**; Sin embargo lo que aquí se presenta es una pequeña parte de dicho estudio, encontramos en este una definición de los objetos de la categoría, quedando así abierta la posibilidad que nosotros u otras personas en estudios posteriores puedan completar la categoría de las relaciones centrales y su estudio. El presente es un primer paso para motivar el estudio de la categoría de las relaciones centrales.

Fuentes:

La principal fuente para la elaboración del trabajo fue el curso de categorías concretas tomado como materia electiva, ofrecida por el Departamento de Matemáticas para el II semestre académico del año 2004, pues en él surgió la idea de realizar el trabajo sobre las relaciones centrales definidas también en dicho curso. Por otra parte, contamos con la colaboración del profesor JORGE EDGAR PAEZ asociado a la Universidad Pedagógica Nacional quien a parte de nuestro asesor del proyecto nos orientó sobre posibles textos de utilidad para consultar los temas de trabajo. Además empleamos ciertos textos que más adelante se especifican en la bibliografía; de los cuales los que más consultamos fueron:

DONADO, A., Relaciones de equivalencia y otras estructuras. "Curso taller", X Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Bogotá, D.C., 1993.

MONTAÑEZ, R., RAMÍREZ, A., **Categorías en el encuentro de geometría. "Algunas categorías de relaciones como categorías topológicas", XII Encuentro de Geometría y sus aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C., 2001.**

Contenidos:

La intención del trabajo es presentar una recolección de las principales características de las relaciones centrales como objetos para la formación de la categoría. Partiendo de la comprensión de algunos conceptos básicos sobre la teoría de categorías; presentando por capítulos las características de las relaciones centrales de la siguiente forma:

- Capitulo 0: Nos muestra algunas nociones preliminares obtenidas de libros de texto, las cuales nos son de utilidad en el momento de construir las relaciones centrales.

- Capitulo I: Presenta la definición de las relaciones centrales, ejemplos de ellas y sus características más notorias.

- Capitulo II: Encontramos proposiciones de tipo conjuntista que cumplen las relaciones centrales y sus respectivas demostraciones.

- Capitulo III: En esta parte se muestran conclusiones sobre dos diagramas que organizan las relaciones centrales definidas sobre conjuntos con dos y tres elementos. Para así completar una visión general sobre las relaciones centrales como objetos de la categoría.

Conclusiones:

El presente trabajo recoge un primer acercamiento al **"ESTUDIO CATEGÓRICO DE LAS RELACIONES CENTRALES".** En el se han obtenido algunas conclusiones sobre las relaciones centrales las cuales podemos encontrar a través de cada capitulo así:

- Capitulo I: Se presenta la definición de las relaciones centrales y algunos ejemplos. En esta parte se concluye la manera como podemos identificar cuando una relación es central y que características tienen los gráficos para las relaciones centrales.

- Capitulo II: Encontramos la conexión entre las relaciones centrales y las relaciones usuales que se trabajan en matemáticas. Además se presentan algunos teoremas con sus demostraciones; situación que nos permite establecer ciertos nexos con la teoría de conjuntos.

- Capitulo III: encontramos situaciones de conteo y formas de hallar ciertas relaciones centrales especiales. Concluimos en esta parte nuestro trabajo haciendo la aclaración que se trata de un primer acercamiento al estudio categórico de las relaciones centrales y dejamos abierta la posibilidad para que futuros lectores continúen con dicho estudio o hagan aportes mas profundos a algunos de los resultados que no demostramos de manera formal.

Fecha Elaboración resumen Día 13 Mes 05 Año 2006

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

INTRODUCCION

El tema principal de nuestro trabajo es el estudio de algunas características de un tipo especial de relaciones que hemos decidido llamar **relaciones centrales**. Para establecer los objetos de la categoría de las relaciones centrales como un primer acercamiento al **"ESTUDIO CATEGÓRICO DE LAS RELACIONES CENTRALES".** Relaciones definidas en el desarrollo del curso de categorías concretas, tomado como materia electiva para el programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Con base en esto, nuestro trabajo de grado se reduce a elaborar un documento sustentado en el estudio de las **relaciones centrales** definidas así:

R **es una relación central si y solo si existe** $A \subseteq X$ **tal que** $A \times X \subseteq R$**.**

De tal manera que con ellas se reconozcan unos diagramas que nos permitan visualizar sus propiedades, haciendo un análisis de ellas como objetos de una categoría, de la siguiente manera:

1. Formulación de ejemplos de **relaciones centrales**, en diferentes conjuntos numéricos como lo son:

    - Conjuntos finitos e infinitos

    - El conjunto de los números naturales

- El conjunto de los números reales

- Conjuntos genéricos

2. Búsqueda de nexos entre las **relaciones centrales** y las usuales, tratando de dar respuesta a preguntas como:

   - ¿Son las relaciones simétricas, reflexivas, transitivas; relaciones centrales?

3. Responder algunas preguntas de tipo conjuntista, como por ejemplo:

   - ¿Es la unión de **relaciones centrales** una **relación central**?

   - ¿Es la intersección de **relaciones centrales** una **relación central**?

4. Estructurar diagramas para las relaciones centrales definidas sobre conjuntos con 2 y 3 elementos que nos permitan establecer parámetros, para dar respuesta a preguntas como:

   - Dadas **dos relaciones centrales**, ¿existe el infimun ($\wedge$)?

   - Dadas **dos relaciones centrales**, ¿existe el supremun ($\vee$)?

   - ¿Existe la mayor de todas las **relaciones centrales** menores que están contenidas en ellas?, ¿Existe la menor de las **relaciones centrales** mayores que las contienen a todas?

JUSTIFICACION

Desde el desarrollo del curso de categorías concretas dirigido por el profesor ALBERTO DONADO surge la propuesta de elaborar un trabajo en el cual podamos poner en práctica nuestro quehacer matemático; que en muchas ocasiones dejamos de lado y simplemente nos dedicamos a estudiar lo que otros han hecho, por lo tanto queremos poner a prueba nuestras habilidades y presentar un estudio sobre las **relaciones centrales** logrando demostrar nuestras habilidades matemáticas, creciendo como profesionales de la educación matemática.

Es importante reconocer que no somos matemáticos sino licenciados en matemáticas, pero consideramos que un trabajo como este nos puede llevar a encontrar un aspecto didáctico; pues es en trabajos de este tipo en los que podemos establecer una relación entre lo que se hace y lo que se aprende como lo establece **JEAN PIAGET**[1]**;** quien propone que el aprendizaje y el hacer van de la mano para conseguir la producción de conocimiento científico. Este sería un aspecto importante para hallar una conexión valiosa entre el trabajo que se pretende y nuestra formación como docentes.

La visión principal de nuestro trabajo es enriquecernos profesionalmente tanto en lo matemático como en lo didáctico, queriendo seguir las teorías de **POLYA** quien establece la importancia de proponer en matemáticas como un camino para desarrollar nuestra formación académica y nuestro pensamiento[2].

---

[1] Tratado de lógica y conocimiento científico. Epistemología de la matemática.
[2] Matemathical discovery. Polya

Por ultimo es importante reconocer la necesidad de diseñar nuestro trabajo de grado; para lo que se elabora este proyecto, cuyo tema nos causa curiosidad e interés para trabajarlo, aprovechando los conceptos aprendidos en el curso de categorías concretas.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

- Elaborar un trabajo que nos permita presentar una redacción de notas donde se observen algunas características de las **relaciones centrales;** para definir los objetos de una categoría, como parte inicial del **"ESTUDIO CATEGÓRICO DE LAS RELACIONES CENTRALES"**

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Comprender algunos de los conceptos básicos de la teoría de categorías.

- Formular y demostrar, teoremas y proposiciones con las **relaciones centrales**, que den respuesta a los interrogantes planteados en la introducción.

- Aprender sobre las categorías buscando conexión entre las categorías y otras ramas de las matemáticas.

- Reconocer las conexiones entre la matemática y la didáctica a través de nuestro trabajo, basándonos en la experimentación de proposiciones y la demostración de algunas de ellas

- Presentar nuestro trabajo de grado, como requisito para obtener él titulo de Licenciados en Matemáticas.

METODOLOGIA

La parte inicial de nuestro trabajo está sustentada por el desarrollo del curso de categorías concretas, se escogió el tema, la relación central y se hicieron los primeros acercamientos al tema de trabajo. Durante el desarrollo del curso se definieron las relaciones centrales, apartir de una transformación de las relaciones usuales.

Para la buena realización de nuestro trabajo de grado, después de escoger el tema, la idea principal fue el trabajo en grupo; desde la propuesta de temas por parte del profesor asesor, pretendiendo con ello obtener resultados que nos fueran útiles. Las dificultades presentadas fueron trabajadas con el profesor de manera que mediante la puesta en común se lograron superar.

El ensayo y error; además, de la comparación de las relaciones centrales con las relaciones usuales y algunos conceptos de la teoría de conjuntos hizo que se pudieran obtener ciertos resultados cuyas demostraciones presentamos a través del desarrollo de nuestro trabajo.

La redacción de notas es un trabajo que surgió a medida que los resultados se fueron dando. Dichas notas han fueron corregidas por nuestro profesor asesor para compilar el presente trabajo.

0. NOCIONES PRELIMINARES

En este capitulo hemos querido hacer una pequeña recopilación de los conceptos que necesitamos manejar para llevar a cabo un buen desarrollo de nuestro trabajo, presentando una serie de definiciones que nos serán útiles para lograrlo. Cabe notar que los conceptos que aparecen a continuación han sido extraídos de algunos libros de texto[3] a través de la lectura y documentación; necesaria para poder realizar este trabajo.

Definición 1:

Una relación (binaria) es un conjunto de parejas ordenadas.
Una relación R de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.
El conjunto A se llama conjunto de partida de la relación o fuente y el conjunto B se llama conjunto de llegada de la relación o meta.

El dominio de R es el conjunto formado por los primeros elementos de los pares ordenados que están en R, y el recorrido de R es el conjunto formado por todos los segundos elementos de los pares ordenados que están en R.

[3] Montañez, R., Ramírez, A., Categorías en el encuentro de geometría, "Algunas categorías de relaciones como categorías topologias", XII Encuentro de geometría y sus aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C., 2001. Muñoz, J., Introducción a la teoría de conjuntos, cuarta edición, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.C., 2002.

Definición 2:

Una relación definida en A se llama reflexiva en A, si todo elemento de A está relacionado mediante ella consigo mismo.

R es reflexiva si para cada $x \in R$, entonces $(x,x) \in R$.

Definición 3:

Una relación definida en un conjunto se llama simétrica en dicho conjunto si cada vez que un elemento está relacionado (mediante ella) con otro, también el segundo lo está con el primero.

R es simétrica si para cada $(x,y) \in R$, entonces $(y,x) \in R$.

Definición 4:

Una relación definida sobre un conjunto se llama transitiva en dicho conjunto, si cada vez que un elemento esté relacionado mediante ella con un segundo y este a su vez lo esté con un tercero, entonces también el primero está relacionado con el tercero.
R se dice que es transitiva si para cada $(x,y) \in R$ y $(y,z) \in R$, se tiene que $(x,z) \in R$

Definición 5:

Sea $\leq$ una relación de orden en A y sea B un subconjunto no vacío de A. Un elemento a de A se llama el primero, el menor o el mínimo de B si:

I. $a \in B$

II. $(\forall x \in B)(a \leq x)$

Definición 6:

Sea A ordenado por $\leq$ y sea B un subconjunto no vacío de A. Se dice que un elemento u de A es el ultimo, mayor o máximo de B si:

$u \in B$

$(\forall x \in B)(x \leq u)$

Definición 7:

Sean $\leq$ una relación de orden en A y B un subconjunto de A. Una cota inferior de B, es cualquier elemento m de A tal que :

$(\forall x \in B)(m \leq x)$.

Una cota superior de B, es cualquier elemento s de A tal que:

$(\forall x \in B)(x \leq s)$.

Definición 8:

Sean A un conjunto ordenado por $\leq$ y B un subconjunto de A; llamaremos infimun de B (abreviado Inf B) a la máxima de las cotas inferiores de B, cuando existan. Analogamente, llamaremos supremun de B (abreviado Sup B) a la mínima de las cotas superiores de B, cuando existan.

1. RELACIONES CENTRALES

Decidimos llevar a cabo un estudio categórico sobre las **relaciones centrales** las cuales fueron definidas en nuestro curso de Categorías concretas y surgen como una transformación de las relaciones usuales que se trabajan en las matemáticas, en este capitulo encontraremos la definición para una **relación central** y algunos ejemplos de relaciones centrales, que nos permitan hacernos una idea de dichas relaciones y poder así; establecer algunas conclusiones generales, que se presentaran a lo largo del capitulo.

1.1. Definición de relación central

Sean A y X conjuntos tales que $A \neq \phi$ y $A \subseteq X$; se dice que R es una **relación central** si y solo si $A \times X \subseteq R$.

Podemos imaginar las **relaciones centrales** como una clase de objetos que son formados fijando un conjunto X y seleccionando un subconjunto no vacío R de $X \times X$ que satisface; $A \times X \subseteq R$.

Un objeto (**relación central**) lo podemos escribir como $R = (X, A)$ donde X es el conjunto que lo soporta y $A \subseteq X$, tal que $A \times X \subseteq R$.

Al conjunto formado por todas las **relaciones centrales** que pueden ser construidas sobre el conjunto X lo notamos Cent[X].

1.2. Ejemplos de relaciones centrales

Encontramos para las **relaciones centrales** la posibilidad de definirlas sobre determinados conjuntos con diferentes características, los ejemplos que presentamos a continuación, están definidos para conjuntos finitos, conjuntos numéricos y conjuntos genéricos entre otros. Esto con el fin de hacernos una idea de las **relaciones centrales** para poder así, diferenciarlas de las que no lo son.

1.2.1. Ejemplos en conjuntos finitos

- Sea $X = \{a, b\}$; encontremos todas las posibles **relaciones centrales** que se pueden definir sobre X.

Tenemos que $X \times X = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

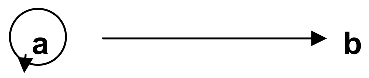
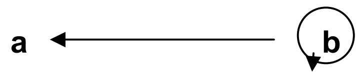
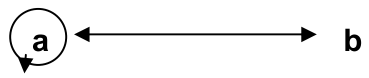
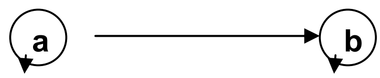
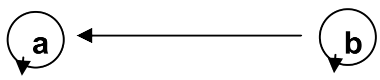
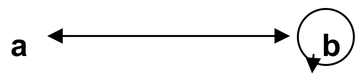
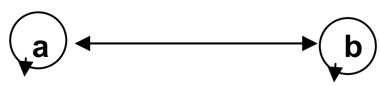
Ahora encontremos todas las posibles relaciones que se pueden formar de X en X. Es decir, debemos hallar todos los subconjuntos de $X \times X$. Como $X \times X$ tiene 4 elementos, entonces tiene $2^4 = 16$ subconjuntos, presentamos en la siguiente tabla cuales son:

Tabla 1: Relaciones definidas sobre un conjunto con dos elementos.

Subconjuntos con 0 elementos	Subconjuntos con 1 elemento	Subconjuntos con 2 elementos	Subconjuntos con 3 elementos	Subconjuntos con 4 elementos
ϕ	$\{(a,a)\}$	$\{(a,a),(a,b)\}$	$\{(a,a),(a,b),(b,a)\}$	$\{(a,a)(a,b)(b,a)(b,b)\}$
	$\{(a,b)\}$	$\{(a,a),(b,a)\}$	$\{(a,a),(a,b),(b,b)\}$	
	$\{(b,a)\}$	$\{(a,a),(b,b)\}$	$\{(a,a),(b,a),(b,b)\}$	
	$\{(a,b)\}$	$\{(a,b),(b,a)\}$	$\{(a,b),(b,a),(b,b)\}$	
		$\{(a,b),(b,b)\}$		
		$\{(b,a),(b,b)\}$		

Ahora, seleccionamos cuales de las anteriores son **relaciones centrales** y las presentamos en la siguiente tabla, donde encontramos cada **relación central** con su respectiva gráfica.

Tabla 2: Relaciones centrales definidas sobre un conjunto con dos elementos.

Relación	Gráfica
$R_1 = \{(a,a),(a,b)\}$	
$R_2 = \{(b,a),(b,b)\}$	
$R_3 = \{(a,a),(a,b),(b,a)\}$	
$R_4 = \{(a,a),(a,b),(b,b)\}$	
$R_5 = \{(a,a),(b,a),(b,b)\}$	
$R_6 = \{(a,b),(b,a),(b,b)\}$	
$R_7 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$	

Podemos notar en la tabla que todas las relaciones que aparecen son centrales puesto que para cada una de ellas se cumple la definición de **relación central**. Por ejemplo:

$R_1 = \{(a,a),(a,b)\}$ Es una **relación central** ya que existe $A = \{a\} \subseteq X$ tal que $A \times X \subseteq R_1$. Y de manera similar pasa con las demás relaciones.

Ya teniendo las **relaciones centrales** definidas sobre un conjunto con dos elementos, construimos un diagrama donde la contenencia nos ilustra como las **relaciones centrales** se forman agregando elementos (parejas) a otras relaciones que también son centrales. Dicho diagrama se presenta en la siguiente figura:

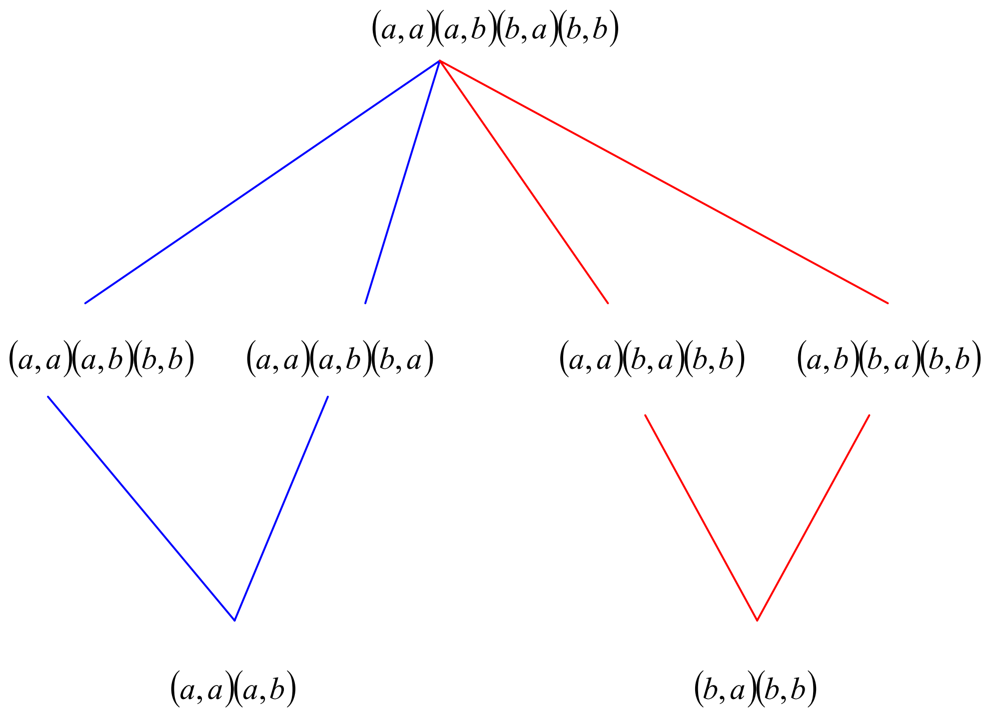


Figura 1.

- Sea $X = \{a,b,c\}$; en el anexo 1; Observamos cuales son las posibles **relaciones centrales** definidas sobre un conjunto con tres elementos[4]. A continuación veremos un diagrama sobre el cual podremos establecer un posible orden dado por la contenencia de unas relaciones en otras.

[4] Anexo 1: Relaciones centrales definidas sobre un conjunto con tres elementos.

1.2.2. Ejemplos en conjuntos numéricos

- Sea $\aleph$ el conjunto de los números naturales y R una relación de $\aleph \times \aleph$, definida así:

$$R = \{(x, y) \in \aleph \times \aleph / m.c.d.(x, y) = 1\}.$$

Se dice que la relación R es central ya que existe $\{1\} \subseteq \aleph$ tal que $\{1\} \times \aleph = \{(x, y)/x = 1\} \subseteq R$. Es decir hay un elemento que se relaciona con todos los demás.

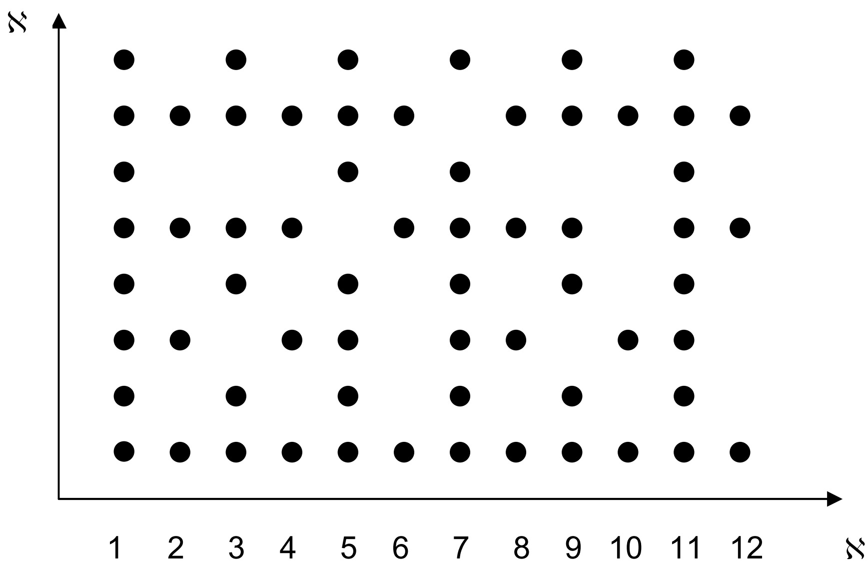


Figura 3.

- Sea $\Re$ el conjunto de los números reales y R una relación de $\Re \times \Re$, definida como:

$R = \left\{(x, y) \in \Re \times \Re \middle/ y \geq \sqrt{16 - x^2} \wedge y \prec -\sqrt{16 - x^2}\right\}$ Es una relación central puesto que existe $A = \{(-\infty, -4) \cup (4, \infty)\} \subseteq \Re$, tal que $A \times \Re \subseteq R$.

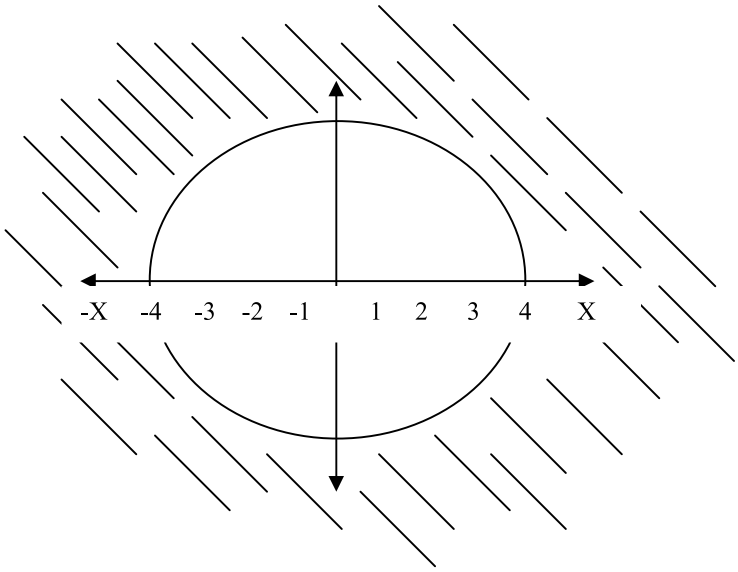


Figura 4.

❖ Otros ejemplos:

En el conjunto $\Re$ de los números reales, la relación R definida en $\Re \times \Re$ como:

$R = \{(x, y)/x \prec k\}$; Donde k es una constante

Es una **relación central** ya que existe $A = (-\infty, k) \subseteq \Re$, tal que $A \times \Re \subseteq R$.

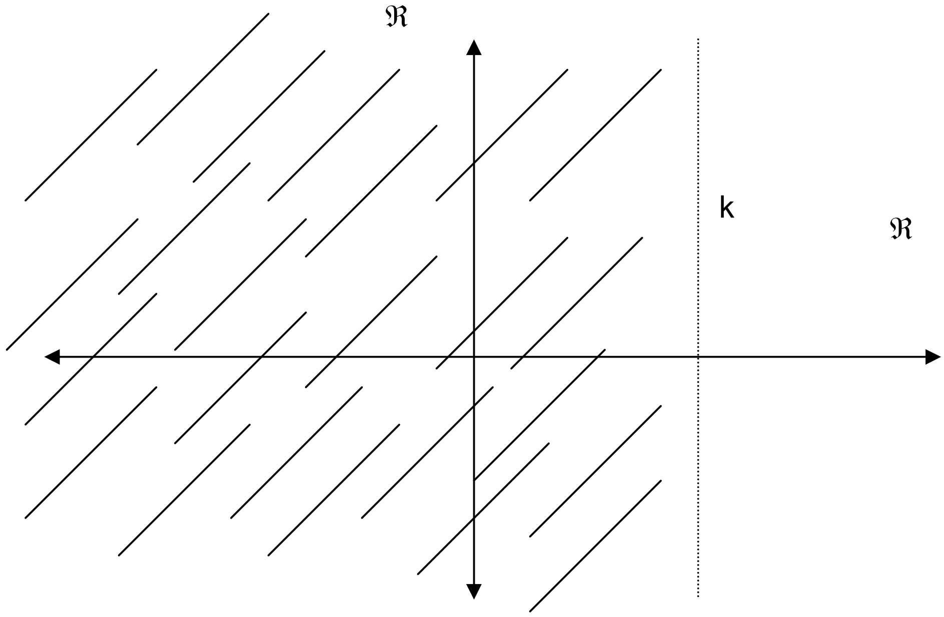


Figura 5.

1.3. conclusiones sobre las gráficas para relaciones centrales

A partir de la definición de las **relaciones centrales** y tomando los ejemplos vistos hasta el momento, podemos establecer algunas conclusiones:
Retomando la definición de **relación central** y las gráficas cartesianas a las que nos conducen los ejemplos de las mismas, podemos observar la existencia de una o varias franjas de la forma $A \times X$ donde $A \subseteq X$; las cuales determinan la existencia de uno o varios elementos del dominio que se relacionan con todos los demás elementos del codominio de la relación. Lo anterior nos lleva a establecer:

Una relación es central si existe un elemento que está relacionado con todos los elementos del conjunto.

Por ejemplo; tomemos la relación:

$$R = \{(x, y) \in \Re \times \Re / y \prec \sqrt{x+1} \wedge y \succ \sqrt{x+1}\}$$

Tenemos que esta relación es central ya que existe; $A = (-\infty, 1] \subseteq \Re$ tal que $A \times \Re \subseteq R$.

Observemos la gráfica para esta relación*:*

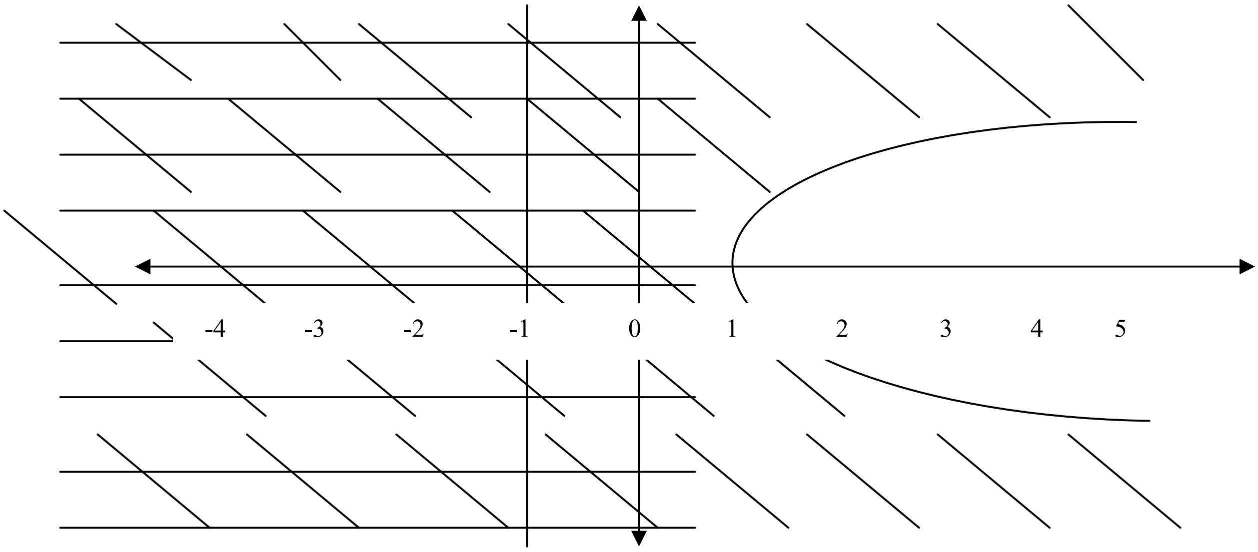


Figura 6.

Aquí se puede verificar que es central, puesto que existe un elemento que se relaciona con todos los demás, como lo es el caso de –1.

Además se puede ver la existencia de una franja, en este caso, la que se encuentra conformada por el producto cartesiano $\left[-\infty,1\right]\times\Re$, donde $\left[-\infty,1\right]\subseteq\Re$ y :

$$\text{i). } \left[-\infty,1\right]\times\Re\subseteq R$$

$$\text{ii). Si } B\times\Re\subseteq R \text{ entonces } B\subseteq\left[-\infty,1\right]$$

Por otra parte se puede notar también, la existencia de más de una franja en las **relaciones centrales**, como en el siguiente ejemplo:

$R=\left\{(x,y)\in\Re\times\Re/M\leq x\leq N\right\}$ Donde M y N son constantes

Sabemos que es una relación central ya que existe $A = (-\infty, M]U[N, +\infty) \subseteq \Re$ tal que $A \times \Re \subseteq R$. Al construir la gráfica tenemos:

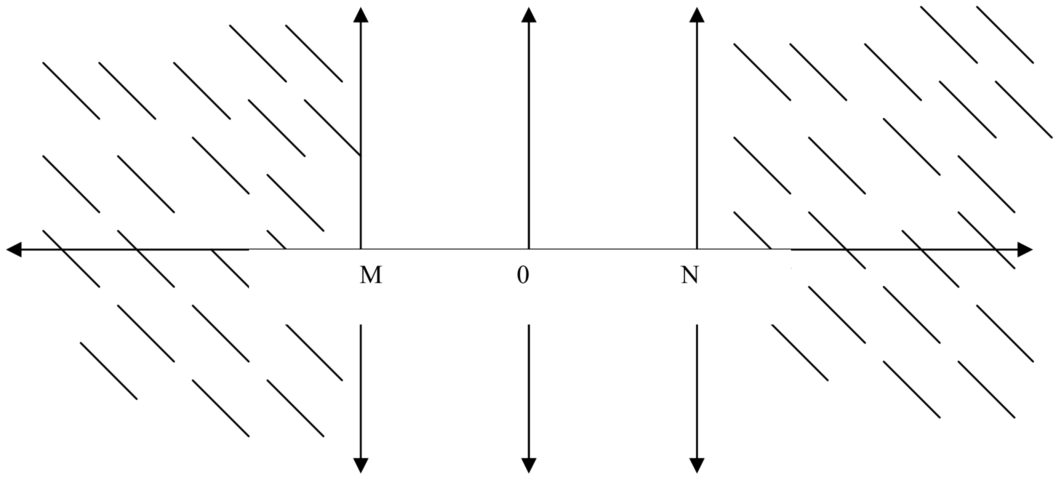


Figura 7.

La existencia de dos franjas una de la forma $(-\infty, M]$ y otra $[N, +\infty)$, estas franjas nos permiten identificar el o los elementos que se relacionan con todos los demás.

La aparición de este tipo de franjas dentro de las **relaciones centrales**, nos lleva a realizar una conclusión importante enmarcada bajo el concepto de núcleo.

Definición:

Se llama núcleo de una ***relación central*** *en* X *al conjunto* $A \subseteq X$ *tal que cumple:*

i). $A \times X \subseteq R$

ii). Si $B \times X \subseteq R$ entonces $B \subseteq A$

El núcleo de una **relación central** R se denota como $Nuc(R)$.

Teniendo en cuenta el hecho que una relación es central si existe un elemento que se relaciona con todos los demás elementos del conjunto sobre el que está definida, entonces, se puede observar que una **relación central** no es una función y que toda función no puede ser una **relación central**. En otros términos:

Si R es una relación central, entonces, R no es función.

Si R es una función, entonces, R no es una relación central.

Como ya sabemos una función es una relación en la cual no existen dos o más parejas distintas con la misma primera componente, por el contrario, una **relación central** tiene como mínimo un elemento relacionado con todos los demás elementos del codominio. Este elemento genera un conjunto de la forma $A = \{(a, x); x \in X\}$.

En el cual existen 2 o más parejas que tienen igual la primera componente, dando así razones al hecho de que las funciones y las relaciones no son compatibles.

El hecho de que exista un elemento que se relacione con el mismo y con todos los demás elementos del conjunto sobre el que está definida la **relación central** nos lleva a reconocer que todos los elementos del conjunto de llegada pertenecen al codominio de la relación. Lo que permite definir que toda **relación central es una relación sobreyectiva**. Es decir, cada uno de los elementos del conjunto de llegada son imágenes de por lo menos un elemento del conjunto de partida.

2. ALGUNAS PROPIEDADES DE TIPO CONJUNTISTA CON LAS RELACIONES CENTRALES

Hemos tratado de dar respuesta aquí a algunas preguntas que nos inquietan sobre las **relaciones centrales**. Queriendo relacionarlas con algunas de las propiedades de la teoría de conjuntos y además comparar las **relaciones centrales** con las relaciones que usualmente se trabajan en las matemáticas. Resolviendo inquietudes como por ejemplo: ¿Es la unión de **relaciones centrales** una **relación central**? ¿Es la diferencia de dos **relaciones centrales** una **relación central**? Y aparte hacer una comparación con las relaciones simétricas, reflexivas y transitivas.

Veamos aquí los resultados obtenidos.

2.1. TEOREMA 1:

La unión de dos **relaciones centrales** es una **relación central**.

Demostración:

I. Sean R_1 y R_2 relaciones centrales definidas sobre un conjunto X.

II. Como R_1 es central entonces,

III. Existe; $A \neq \phi$ y $A \times X \subseteq R_1$, Luego,

IV. $A \times X \subseteq R_1$ Ó $A \times X \subseteq R_2$; así,

V. $A \times X \subseteq R_1 \cup R_2$ Por lo tanto

VI. $R_1 \cup R_2$ Es central□

2.2. TEOREMA 2:

La unión de una familia de **relaciones centrales** es una **relación central**.

Demostración:

I. Sea $\{R_\lambda\}_{\lambda \in L}$ es una familia de relaciones centrales, definidas sobre un conjunto X.

II. Si $L \neq \phi$ existe $\lambda^* \in L$ tal que R_{λ^*} es central. Luego,

III. Existe $A \subseteq X$ tal que $A \times X \subseteq R_{\lambda^*}$, por lo tanto,

IV. $A \times X \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} R_\lambda$ .En conclusión,

V. $\bigcup_{\lambda \in L} R_\lambda$ Es central□

2.3. TEOREMA 3:

La intersección de dos **relaciones centrales** cuyos núcleos son no disyuntos es una **relación central**.

Demostración:

I. Sean R_1 y R_2 relaciones tales que:

$A \neq \phi$, $A \subseteq X$ y $A \times X \subseteq R_1$.

$B \neq \phi$, $B \subseteq X$ y $B \times X \subseteq R_2$.

Es decir son relaciones centrales definidas sobre un conjunto X

II. Si $Nuc(R_1) \bigcap Nuc(R_2) \neq \phi$ entonces,

III. $A \bigcap B = C \neq \phi$, luego existe C tal que

IV. $C \times X \subseteq R_1$ y $C \times X \subseteq R_2$, es decir,

V. $C \times X \subseteq R_1 \bigcap R_2$, en conclusión,

VI. $R_1 \bigcap R_2$, es una relación central□

2.4. TEOREMA 4:

La intersección de una familia de **relaciones centrales** cuyos núcleos son no disyuntos es una **relación central**..

Demostración:

I. Sea $\{R_\lambda\}_{\lambda \in L}$ es una familia de relaciones centrales definidas sobre un conjunto X.

II. Luego $A_\lambda \neq \phi$ y $A_\lambda \times X \subseteq R_\lambda$; para todo $\lambda \in L$.

III. Si $\bigcap_{\lambda \in L} Nuc(A_\lambda) = C \neq \phi$, entonces,

IV. Existe C tal que $C \times X \subseteq R_\lambda$; para todo $\lambda \in L$; es decir,

V. $C \times X \subseteq \bigcap_{\lambda \in L} R\lambda$, en conclusión,

VI. $\bigcap_{\lambda \in L} R\lambda$ Es central□

2.5. TEOREMA 5:

La diferencia de dos **relaciones centrales** tales que el núcleo de una es un subconjunto propio de la otra; es una **relación central**.

Demostración:

I. Sean R_1 y R_2 relaciones tales que:

$A \neq \phi$, $A \subseteq X$ y $A \times X \subseteq R_1$.

$B \neq \phi$, $B \subseteq X$ y $B \times X \subseteq R_2$.

Es decir son relaciones centrales definidas sobre un conjunto X.

II. Si $R_2 \subset R_1$ entonces, existe $C \neq \phi$ tal que,

III. $C \subseteq A$ y $C \not\subset B$ es decir,

IV. $C \times X \subseteq R_1$ y $C \times X \not\subset R_2$ entonces,

V. $C \times X \subseteq R_1 - R_2$ en conclusión,

VI. $R_1 - R_2$ es central□

2.6. LA CONEXIÓN ENTRE LAS RELACIONES CENTRALES Y LAS RELACIONES USUALES

En esta parte de nuestro estudio hemos querido hacer una comparación de las relaciones centrales con las relaciones que usualmente empleamos en matemáticas como lo son las relaciones reflexivas, simétricas y transitivas. Y a través de este estudio hemos podido llegar a que unas relaciones centrales también son de las usuales y en otros casos no se tiene dicha posibilidad. Veamos a continuación el resultado mas importante.

2.6.1. TEOREMA 6:

Si R es una relación simétrica y central, definida sobre un conjunto X entonces R^{-1} es simétrica y central.

Demostración:

I. Sea R una relación central, definida sobre un conjunto X entonces,

II. Existe $A \subseteq X$ tal que $A \times X \subseteq R$.

III. Si R es simétrica entonces $R = R^{-1}$,por proposición demostrada[5] tenemos,

IV. $A \times X \subseteq R^{-1}$, es decir,

V. existe $A \subseteq X$ tal que $A \times X \subseteq R^{-1}$ en conclusión,

VI. R^{-1} es simétrica y central□

[5] *Anexo B:* Demostración de la proposición una relación R definida en X es simétrica en X si y solo si $R = R^{-1}$.

3. ALGUNAS CONCLUSIONES SOBRE LAS RELACIONES CENTRALES

Presentamos aquí un estudio detallado de las preguntas que nos inquietan desde el inicio en la elaboración de nuestro trabajo, proporcionando así mismo las posibles respuestas que nos serán de utilidad para una mayor comprensión de las **relaciones centrales**.

3.1. Existe $\alpha \wedge \beta$ que sea la mayor de todas las relaciones centrales menores que están contenidas en α y β?

Nuestra respuesta inicial es no y esto lo podemos concluir desde el analisis llevado a cabo hasta ahora sobre las **relaciones centrales** y sus diagramas elaborados para, las relaciones definidas sobre conjuntos de dos y tres elementos. Donde podemos notar que siempre que tomemos dos **relaciones centrales**, encontramos que no existe una **relación central** que sea la mayor de todas las estructuras contenidas en α y β **.**

Por ejemplo sean:

$$R_1 = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(b,a)\}$$

$$R_2 = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)\}$$

Si existiera "$\wedge$", una relación central que fuera la mayor de todas las relaciones centrales contenidas en R_1 y R_2 pensaríamos que es la intersección de ellas; es decir:, $R_1 \cap R_2 = \{(a,b)(b,a)\}$; pero por definición esta no es una **relación central** puesto que no existe en ella ningún elemento que se relacione con todos los demás elementos del conjunto sobre le que está definida la relación.

Sin embargo existen algunas **relaciones centrales** que se comportan de otra forma, en ellas si se presenta la mayor de todas las relaciones centrales menores contenidas en α y β.

.

Por ejemplo: $R_1 = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(b,c)\}$

$R_2 = \{(c,a)(c,b)(c,c)(b,a)(b,c)\}$

donde notamos que $R_1 \cap R_2 = \{(c,a)(c,b)(c,c)(b,c)\}$ es una **relación central** ya que c es un elemento que se relaciona con todos los demás elementos del conjunto sobre el que se definen las relaciones.

Lo anterior nos conduce a concluir que no existe un elemento mínimo que sea la mayor de todas las relaciones centrales menores que están contenidas en α y β, en el caso que exista uno de estos elementos que cumpla la condición, este recibirá el nombre de elemento minimal. De esta manera tenemos que en las **relaciones centrales** no existe en infimun $Inf(\alpha,\beta)$.

Nuestra pregunta se reduce ahora a saber cuando existen dichos elementos minimales. Y notamos que se presentan siempre y cuando la intersección entre α y β sea no vacía y central. Es decir cuando $Nuc(\alpha) \cap Nuc(\beta) \neq \phi$

Nuestro resultado se presenta bajo el siguiente teorema:

3.1.1. Teorema 8:

Si $Nuc(\alpha) \bigcap Nuc(\beta) \neq \phi$, existe "$\alpha \wedge \beta$" que es la mayor de todas las relaciones centrales menores que están contenidas en α y β, tal que $\alpha \wedge \beta = \alpha \bigcap \beta$.

Demostración:

I. Sean α y β relaciones centrales definidas sobre un conjunto X,

II. Si $Nuc(\alpha) \bigcap Nuc(\beta) \neq \phi$, entonces,

III. $\alpha \cap \beta \in Cent[X]$ y $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ y $\alpha \cap \beta \subseteq \beta$; por teorema 2.3. del capitulo 2.

IV. Si $T \in Cent[X]$ y $T \subseteq \alpha$ entonces $T \subseteq \beta$ por ii, y por lo tanto $T \subseteq \alpha \cap \beta$

V. Por II y III tenemos que $\alpha \cap \beta = \alpha \wedge \beta$ □

3.2. Existe $\alpha \vee \beta$ que sea la menor de todas las relaciones centrales mayores que contienen a α y β?

Haciendo uso de la unión de **relaciones centrales** podemos notar que para α y β**,** siempre $\alpha \cup \beta$ es una relación central menor a todas las relaciones centrales mayores que contienen a α y β**.** Este resultado lo presentamos bajo el siguiente teorema:

3.2.1. Teorema 9:

Existe $\alpha \vee \beta$ que es la menor de todas las relaciones centrales mayores que contienen a α y β, tal que $\alpha \vee \beta = \alpha \cup \beta$**.**

Demostración:

I. Sean α y β relaciones centrales definidas sobre un conjunto X , luego

II. $\alpha \cup \beta \in Cent[X]$, $\alpha \cup \beta \supseteq \alpha$ y $\alpha \cup \beta \supseteq \beta$;por teorema 2.1. del capitulo 2

III. Si $T \in Cent[X]$ y $T \supseteq \alpha$ entonces $T \supseteq \beta$ por II y por lo tanto $T \supseteq \alpha \cup \beta$

IV. Por I , II y III tenemos que $\alpha \cup \beta = \alpha \vee \beta$ □

El anterior resultado se puede generalizar diciendo que dado un subconjunto no vacío T de $Cent[X]$, la unión de las relaciones centrales que están en el conjunto T determina la menor de todas las **relaciones centrales** mayores que las contienen. En otras palabras podemos decir que en $Cent[X]$, cualquier subconjunto no vacío tiene supremo y que este está determinado por la unión.

$$Sup(T) = \bigcup_{\alpha \in T} \alpha$$

3.3. Sobre los diagramas para las relaciones centrales definidas sobre conjuntos con 2 elementos, con 3 elementos, con 4 elementos, ... con n elementos.

Pretendiendo concluir sobre algunas características de las **relaciones centrales**. Encontramos que los diagramas elaborados para las **relaciones centrales** definidas sobre conjuntos con 2 y 3 elementos, nos permiten encontrar algunas situaciones de conteo tanto en el numero de niveles que presenta cada diagrama, como sobre la cantidad de **relaciones centrales** que se presentan en cada uno de ellos.

3.3.1. El numero de niveles que presenta un diagrama

Observando las figuras 1 y 2; encontramos que el numero de niveles que presenta este diagrama es 3. En el primer nivel encontramos las relaciones con 2 parejas, en el segundo nivel las relaciones con 3 parejas y en el tercer nivel las relaciones con 4 parejas, $\left(2^2\right)$. También podemos notar que no hay relaciones con una pareja a lo que descontamos un nivel (2-1). Encontramos el numero de niveles dado por $2^2-(2-1)=2^2-2+1=3$.

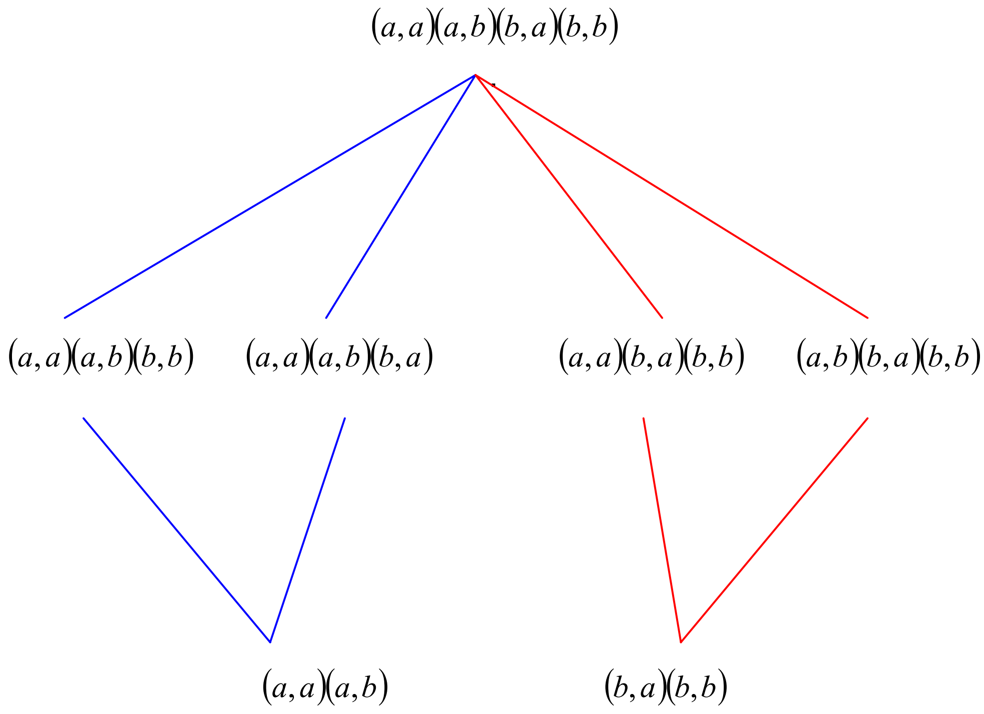


Figura 8.

Por otra parte si nos referimos a la figura 2 presentada anteriormente, encontramos que para las relaciones definidas sobre un conjunto con tres elementos, que el diagrama presenta 7 relaciones. En donde el primer nivel muestra la relaciones con 3 parejas, el segundo nivel las relaciones con 4 parejas, el tercero las relaciones con 5 parejas, el cuarto las relaciones con 6, el quinto las relaciones con 7 , el sexto las relaciones con 8 y en el séptimo y ultimo las relaciones con 9 parejas, $\left(3^2\right)$. Encontramos que no hay relaciones con 1 y 2 parejas a lo que descontamos dos niveles (3-1). Encontramos el numero de niveles dado por $3^2-(3-1)=3^2-3+1=7$.

Entonces establecemos que si tenemos un diagrama para relaciones definidas sobre un conjunto con n elementos , el numero de niveles estará dado desde las relaciones con n parejas, hasta las que tienen n^2 parejas, y se descontarían las que tienen menos de n parejas; es decir (n-1) parejas. Luego el numero de niveles está dado por $n^2-(n-1)=n^2-n+1$. Lo anterior lo presentamos en el siguiente enunciado y su respectiva tabla:

En numero de niveles para un diagrama de relaciones centrales definidas sobre un conjunto con n elementos está dado por $n^2-(n-1)=n^2-n+1$

Tabla 3: Numero de niveles para un diagrama de relaciones centrales definidas sobre un conjunto con n elementos.

Numero de elementos	Numero de niveles en el diagrama
1	$1^2 - 1 + 1$
2	$2^2 - 2 + 1$
3	$3^2 - 3 + 1$
4	$4^2 - 4 + 1$
5	$5^2 - 5 + 1$
6	$6^2 - 6 + 1$
.	.
.	.
.	.
n	$n^2 - n + 1$

3.3.2. El numero de relaciones centrales en los diagramas; definidas sobre conjuntos con dos y tres elementos.

Remitiéndonos nuevamente la los diagramas para las relaciones centrales podemos establecer un conteo sobre el numero de relaciones centrales que aparecen en estos. Si notamos el diagrama para las relaciones sobre conjuntos con dos elementos, tenemos que por niveles se puede realizar un pequeño conteo de cuantas relaciones centrales hay:

Nivel 1 tenemos 2 relaciones centrales.

Nivel 2 tenemos $\frac{2(2^2-2)}{1!}=4$ relaciones centrales ya que cada una de las del nivel 1 se divide en 2. Donde 2 es el nivel y 1! El factorial del nivel anterior.

Nivel 3 tenemos $\frac{2(2^2-3)}{2!}=1$ relación central, pues cada una de las del anterior nivel se van a una sola relación. 3 es el numero del nivel y 2! Es el factorial del nivel anterior.

Si sumamos el numero de relaciones centrales encontradas para cada nivel, el resultado será el total de relaciones centrales en este diagrama es decir; 7 relaciones centrales.

Para las relaciones definidas sobre conjuntos con tres elementos encontramos una regularidad similar a la anterior pero nos damos cuenta que funciona hasta un cierto punto en el que debemos restar cierta cantidad de relaciones para poder obtener el numero de relaciones en cada nivel, esto sin ninguna explicación de regularidad, pero creemos que es por la forma como se empiezan a interrelacionar las relaciones centrales desde el quinto nivel.

Inicialmente queremos notar que en el nivel uno hay 3 relaciones centrales, y en el nivel dos cada una de las del uno se ramifica en seis, cada una de las del nivel dos se ramifica en cinco, las del nivel tres se ramifican en cuatro, las del nivel cuatro en tres y así sucesivamente. Si esto sucediera como regularidad tendríamos:

Nivel 1: 3 relaciones

Nivel 2: $3(3^2-3)=3(6)=18$ relaciones

Nivel 3: $18(3^2-4)=18(5)=90$ relaciones

Nivel 4: $90(3^2-5)=90(4)=360$ relaciones

Nivel 5: $360(3^2-6)=360(3)=1080$ relaciones

Nivel 6: $1080(3^2-7)=1080(2)=2160$ relaciones

Nivel 7: $2160(3^2-8)=2160(1)=2160$ relaciones

Pero podemos observar que este conteo no es, puesto que de un nivel a otro no se ramifican en relaciones diferentes sino que se comparten; esto nos lleva a analizar nuevamente nuestro conteo pero lo anterior nos ayuda a encontrarlo así:

Nivel 1 tenemos 3 relaciones centrales.

Nivel 2 tenemos $\frac{3(3^2-3)}{1!}=18$ relaciones centrales , ya que cada una de las del nivel 1 se ramifica en 6 relaciones centrales.

Nivel 3 tenemos $\frac{18(3^2-4)}{2!}=45$ relaciones centrales , en este nivel cada una de las anteriores se ramifica en 5 pero en el siguiente nivel no llegan a una única relación sino que se comparten de a dos.

Nivel cuatro tenemos $\frac{90(3^2-5)}{3!}-3=57$ relaciones centrales

Nivel cinco tenemos $\frac{360(3^2-6)}{4!}-9=36$ relaciones centrales.

Nivel seis tenemos $\frac{1080(3^2-7)}{5!}-9=9$ relaciones centrales.

Nivel siete tenemos $\frac{2160(3^2-8)}{6!}-2=1$ relaciones centrales.

Advertimos que en algunos niveles tenemos la necesidad de restar cierta cantidad sin justificación alguna. Esto se debe a que hay un momento en el que la distribución del diagrama no es tan uniforme y se llega a un nivel en el que las relaciones se combinan sin ninguna regularidad aparente.

Lo anterior deja abierta la posibilidad para que futuros lectores sugieran alguna posible solucion a esta irregularidad que se presenta y así poder realizar una demostración formal de los conteos.

Hasta aquí hemos hecho un pequeño análisis de las relaciones centrales presentando algunos ejemplos, características y resultados que consideramos importantes pues ya tenemos una idea más clara de los objetos para la categoría de las relaciones centrales. Lo que nos permite establecer un primer acercamiento al **"ESTUDIO CATEGÓRICO DE LAS RELACIONES CENTRALES".** Esperamos que este trabajo anime a mas personas que estén interesadas en el tema de las Categorías Concretas. A seguir compilando este documento.

BIBLIOGRAFIA

ÁDAMEK, J., Theory of Mathematical Estructures. Ed: Reidel Publishing Company. Praga. 1983.

ARDILA, V., MONTAÑEZ, R., Algunos conjuntos ordenados en una categoría. Publicación del XIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Bogotá, D.C., 1996.

ARDILA, V., MONTAÑEZ, R., Categorías en el encuentro de geometría. “Una revisión de la noción de estructura”, XII Encuentro de geometría y sus aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C., 2001.

DONADO, A., Relaciones de equivalencia y otras estructuras. “Curso taller”, X Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Bogotá, D.C., 1993.

DONADO, A., Topología y colecciones. “Un estudio de las nociones topológicas en colecciones a partir de la noción de punto interior”, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C., 1998.

LUQUE, C., MORA L., PAEZ J., Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Los procesos de contar e inducir, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C., 2002.

LUQUE, C., MORA, L., TORRES, J., El proceso matemático de clasificar, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C., 2004.

MONTAÑEZ, R., Fibraciones categóricas: conservación de estructuras y construcciones. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.C., 1994.

MONTAÑEZ, R., RAMÍREZ, A., Categorías en el encuentro de geometría. "Algunas categorías de relaciones como categorías topológicas", XII Encuentro de Geometría y sus aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C., 2001.

MUÑOZ, J., Introducción a la teoría de conjuntos, cuarta edición, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.C., 2002.

PÉREZ, E., Estructuras Algebraicas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C., 2000.

PIAGET, J., Tratado de lógica y conocimiento científico: Epistemología de las matemáticas.

POLYA, Mathematical Discovery.

Anexo A: Relaciones centrales definidas sobre un conjunto con tres elementos.

Relaciones con 3 parejas:

$$R_1 = \{(a,a)(a,b)(a,c)\}$$
$$R_2 = \{(b,a)(b,b)(b,c)\}$$
$$R_3 = \{(c,a)(c,b)(c,c)\}$$

Relaciones con 4 parejas:

$$R_4 = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)\}$$
$$R_5 = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,b)\}$$
$$R_6 = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,c)\}$$
$$R_7 = \{(a,a)(a,b)(a,c)(c,a)\}$$
$$R_8 = \{(a,a)(a,b)(a,c)(c,b)\}$$
$$R_9 = \{(a,a)(a,b)(a,c)(c,c)\}$$
$$R_{10} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)\}$$
$$R_{11} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,b)\}$$
$$R_{12} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,c)\}$$
$$R_{13} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(c,a)\}$$
$$R_{14} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(c,b)\}$$
$$R_{15} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(c,c)\}$$
$$R_{16} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)\}$$
$$R_{17} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)\}$$
$$R_{18} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,c)\}$$
$$R_{19} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(b,a)\}$$
$$R_{20} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(b,b)\}$$
$$R_{21} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(b,c)\}$$

Relaciones con 5 parejas:

$$R_{22} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)\}$$
$$R_{23} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,c)\}$$
$$R_{24} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(c,a)\}$$
$$R_{25} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(c,b)\}$$
$$R_{26} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(c,c)\}$$
$$R_{27} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,b)(b,c)\}$$

$R_{28} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,b)(c,a)\}$

$R_{29} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,b)(c,b)\}$

$R_{30} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,b)(c,c)\}$

$R_{31} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,c)(c,a)\}$

$R_{32} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,c)(c,b)\}$

$R_{33} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,c)(c,c)\}$

$R_{34} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(c,a)(c,b)\}$

$R_{35} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(c,a)(c,c)\}$

$R_{36} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(c,b)(c,c)\}$

$R_{37} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(a,b)\}$

$R_{38} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(a,c)\}$

$R_{39} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(c,a)\}$

$R_{40} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(c,b)\}$

$R_{41} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(c,c)\}$

$R_{42} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,b)(a,c)\}$

$R_{43} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,b)(c,a)\}$

$R_{44} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,b)(c,b)\}$

$R_{45} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,b)(c,c)\}$

$R_{46} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,c)(c,a)\}$

$R_{47} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,c)(c,b)\}$

$R_{48} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,c)(c,c)\}$

$R_{49} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(c,a)(c,b)\}$

$R_{50} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(c,a)(c,c)\}$

$R_{51} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(c,b)(c,c)\}$

$R_{52} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,b)\}$

$R_{53} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,c)\}$

$R_{54} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(b,a)\}$

$R_{55} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(b,b)\}$

$R_{56} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(b,c)\}$

$R_{57} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(a,c)\}$

$R_{58} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(b,a)\}$

$R_{59} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(b,b)\}$

$R_{60} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(b,c)\}$

$R_{61} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,c)(b,a)\}$

$R_{62} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,c)(b,b)\}$

$R_{63} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,c)(b,c)\}$

$R_{64} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(b,a)(b,b)\}$

$R_{65} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(b,a)(b,c)\}$

$R_{66} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(b,b)(b,c)\}$

Relaciones con 6 parejas:

$$R_{67} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(b,c)\}$$

$$R_{68} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(c,a)\}$$

$$R_{69} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(c,b)\}$$

$$R_{70} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(c,c)\}$$

$$R_{71} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,c)(c,a)\}$$

$$R_{72} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,c)(c,b)\}$$

$$R_{73} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,c)(c,c)\}$$

$$R_{74} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(c,a)(c,b)\}$$

$$R_{75} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(c,a)(c,c)\}$$

$$R_{76} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{77} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,b)(b,c)(c,a)\}$$

$$R_{78} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,b)(b,c)(c,b)\}$$

$$R_{79} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,b)(b,c)(c,c)\}$$

$$R_{80} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,b)(c,a)(c,b)\}$$

$$R_{81} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,b)(c,a)(c,c)\}$$

$$R_{82} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,b)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{83} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,c)(c,a)(c,b)\}$$

$$R_{84} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,c)(c,a)(c,c)\}$$

$$R_{85} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,c)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{86} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(c,a)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{87} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(a,b)(c,a)\}$$

$$R_{88} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(a,b)(c,b)\}$$

$$R_{89} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(a,b)(c,c)\}$$

$$R_{90} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(a,c)(c,a)\}$$

$$R_{91} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(a,c)(c,b)\}$$

$$R_{92} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(a,c)(c,c)\}$$

$$R_{93} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(c,a)(c,b)\}$$

$$R_{94} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(c,a)(c,c)\}$$

$$R_{95} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{96} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,b)(a,c)(c,a)\}$$

$$R_{97} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,b)(a,c)(c,b)\}$$

$$R_{98} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,b)(a,c)(c,c)\}$$

$$R_{99} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,b)(c,a)(c,b)\}$$

$$R_{100} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,b)(c,a)(c,c)\}$$

$$R_{101} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,b)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{102} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,c)(c,a)(c,b)\}$$

$$R_{103} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,c)(c,a)(c,c)\}$$

$$R_{104} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,c)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{105} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(c,a)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{106} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,b)(b,a)\}$$

$$R_{107} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,b)(b,b)\}$$

$$R_{108} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,b)(b,c)\}$$

$$R_{109} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,c)(b,a)\}$$

$$R_{110} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,c)(b,b)\}$$

$$R_{111} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,c)(b,c)\}$$

$$R_{112} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(b,a)(b,b)\}$$

$$R_{113} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(b,a)(b,c)\}$$

$$R_{114} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(b,b)(b,c)\}$$

$$R_{115} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(a,c)(b,a)\}$$

$$R_{116} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(a,c)(b,b)\}$$

$$R_{117} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(a,c)(b,c)\}$$

$$R_{118} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(b,a)(b,b)\}$$

$$R_{119} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(b,a)(b,c)\}$$

$$R_{120} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(b,b)(b,c)\}$$

$$R_{121} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,c)(b,a)(b,b)\}$$

$$R_{122} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,c)(b,a)(b,c)\}$$

$$R_{123} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,c)(b,b)(b,c)\}$$

Relaciones con 7 parejas:

$$R_{124} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(b,c)(c,a)\}$$

$$R_{125} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(b,c)(c,b)\}$$

$$R_{126} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(b,c)(c,c)\}$$

$$R_{127} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(c,a)(c,b)\}$$

$$R_{128} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(c,a)(c,c)\}$$

$$R_{129} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{130} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,c)(c,a)(c,b)\}$$

$$R_{131} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,c)(c,a)(c,c)\}$$

$$R_{132} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,c)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{133} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(c,a)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{134} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,b)(b,c)(c,a)(c,b)\}$$

$$R_{135} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,b)(b,c)(c,a)(c,c)\}$$

$$R_{136} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,b)(b,c)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{137} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,b)(c,a)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{138} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,c)(c,a)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{139} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(a,b)(c,a)(c,b)\}$$

$$R_{140} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(a,b)(c,a)(c,c)\}$$

$$R_{141} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(a,b)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{142} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(a,c)(c,a)(c,b)\}$$

$$R_{143} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(a,c)(c,a)(c,c)\}$$

$$R_{144} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(a,c)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{145} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,a)(c,a)(c,b)(c,c)\}$$

$$R_{146} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,b)(a,c)(c,a)(c,b)\}$$
$$R_{147} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,b)(a,c)(c,a)(c,c)\}$$
$$R_{148} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,b)(a,c)(c,b)(c,c)\}$$
$$R_{149} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,b)(c,a)(c,b)(c,c)\}$$
$$R_{150} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(a,c)(c,a)(c,b)(c,c)\}$$
$$R_{151} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,b)(b,a)(b,b)\}$$
$$R_{152} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,b)(b,a)(b,c)\}$$
$$R_{153} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,b)(b,b)(b,c)\}$$
$$R_{154} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,c)(b,a)(b,b)\}$$
$$R_{155} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,c)(b,a)(b,c)\}$$
$$R_{156} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,c)(b,b)(b,c)\}$$
$$R_{157} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)\}$$
$$R_{158} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(a,c)(b,a)(b,c)\}$$
$$R_{159} = \{(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(a,c)(b,b)(b,c)\}$$

Relaciones con 8 parejas:

$$R_{160} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(b,c)(c,a)(c,b)\}$$
$$R_{161} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(b,c)(c,a)(c,c)\}$$
$$R_{162} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(b,c)(c,b)(c,c)\}$$
$$R_{163} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(c,a)(c,b)(c,c)(b,a)(b,b)\}$$
$$R_{164} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(c,a)(c,b)(c,c)(b,a)(b,c)\}$$
$$R_{165} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(c,a)(c,b)(c,c)(b,b)(b,c)\}$$

$$R_{166} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,b)\}$$
$$R_{167} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(c,a)(c,b)(c,c)(a,a)(a,c)\}$$
$$R_{168} = \{(b,a)(b,b)(b,c)(c,a)(c,b)(c,c)(a,b)(a,c)\}$$

Relaciones con 9 parejas:

$$R_{169} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(b,a)(b,b)(b,c)(c,a)(c,b)(c,c)\}$$

Anexo B: Demostración de la proposición una relación R definida en X es simétrica en X si y solo si $R = R^{-1}$.

Una relación R definida en X es simétrica en X si y solo si $R = R^{-1}$.

Debemos demostrar las dos implicaciones:

i. Si R es simétrica en X entonces $R = R^{-1}$.

ii. Si $R = R^{-1}$ entonces R es simétrica en X.

Veamos la demostración para i y ii:

A.

I. Sea $(x, y) \in R$,

II. Como R es simétrica entonces $(y, x) \in R$

III. Por lo tanto $(x, y) \in R^{-1}$,

IV. Es decir 1. $R \subseteq R^{-1}$

V. Sea $(x, y) \in R^{-1}$,

VI. Como R es simétrica entonces $(y, x) \in R^{-1}$

VII. Por lo tanto $(x, y) \in R$,

VIII. Es decir 2. $R^{-1} \subseteq R$

IX. Por 1 y 2 tenemos que $R = R^{-1}$.

B.

I. Sea $(x, y) \in R$

II. Luego $(y, x) \in R^{-1}$

III. Y como $R = R^{-1}$ entonces,

IV. Tenemos que $(y, x) \in R$ y $(x, y) \in R^{-1}$

V. Por consiguiente, $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$.

VI. Es decir, R es simétrica□

De A y B podemos concluir que nuestra proposición ha quedado demostrada.