# CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD EN DIFERENTES BASES

**Asociado a Grupo de Investigación**


*KAREN ESTEFANY OSORIO GUERRERO*

COD.: 2010140034

*EDWIN SALVADOR CASTAÑEDA LÓPEZ*

COD.: 2009140015

**Universidad Pedagógica Nacional**

**Licenciatura en Matemáticas**


**Bogotá, 26 de Mayo de 2014.**

**CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD EN DIFERENTES BASES**

**Asociado a Grupo de Investigación**


***KAREN ESTEFANY OSORIO GUERRERO***

COD.: 2010140034

***EDWIN SALVADOR CASTAÑEDA LÓPEZ***

COD.: 2009140015

**Magister en Docencia de la Matemática**

***LYDA CONSTANZA MORA MENDIETA***

Profesora de planta.

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**

**Licenciatura en Matemáticas**


Bogotá, 10 de Junio de 2014.

**RESUMEN ANALÍTICO EN EDUACIÓN**

**(RAE)**

| **1. Información General** | |
|---|---|
| **Tipo de documento** | Trabajo de grado. |
| **Acceso al documento** | Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central |
| **Título del documento** | Criterios de divisibilidad en diferentes bases. |
| **Autor(es)** | Osorio Guerrero Karen Estefany; Castañeda López Edwin Salvador. |
| **Director** | Lyda Constanza Mora Mendieta. |
| **Publicación** | Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, Mayo 2014. |
| **Unidad Patrocinante** | Universidad Pedagógica Nacional. |
| **Palabras Claves** | Divisibilidad, criterios, bases. |

| **2. Descripción** |
|---|
| Trabajo de grado que propone una extensión a algunos criterios de divisibilidad en diferentes bases numéricas y otros originales creados por los autores, presentando una demostración para cada criterio y ejemplos para cada uno de estos. |

| **3. Fuentes** |
|---|
| Álgebra, G. d. (2013). Notas de clase. *Seminario de Álgebra.* Bogotá.<br><br>Glaser, A. (1971). *History of binay and other nondecimal numeration.* Pensivania: Tomash Publishers.<br><br>Luque, C., Ángel, L. l., & Jiménez, H. (2009). *Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Representar estructuras algebraicas finitas y enumerable.* Bogotá, |

Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C., Mora, L., & Paez, J. (2013). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos, contar e inducir.* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Pisa, L. D. (1602). *Liber Abaci.*

## 4. Contenidos

En la parte inicial se expone una breve reseña histórica sobre los criterios de divisibilidad. Luego se presenta el marco de referencia en donde se sitúa el trabajo y finalmente se muestran los criterios de divisibilidad en diferentes bases. Este trabajo tiene como propósito mostrar el resultado del proceso de conjeturar y demostrar sobre un tema propio de las matemáticas elementales como lo son los criterios de divisibilidad en diferentes bases, así como de servir de base bibliográfica para quienes estén interesados en el tema.

## 5. Metodología

Para la elaboración de este trabajo inicialmente se consultaron fuentes bibliográficas referidas a la Historia de los Criterios y conceptos relacionados con la divisibilidad, luego a partir de esto, se buscaron criterios análogos a los ya conocidos en base 10 y a partir de tablas y con ayuda con programa *Álgebra Finita*, elaborado por el profesor Leonardo Ángel se procedió a buscar las conjeturas, las cuales fueron validadas con ejemplos y luego debidamente demostradas.

## 6. Conclusiones

Personajes como Leonardo de Pisa dedicaron un poco de su vida al estudio de este tema, pues nos muestra unos criterios totalmente diferentes a los utilizados actualmente basados en la regla del 9, tiempo después Pascal muestra un criterio de divisibilidad para todas las bases.

Algunos de los criterios de divisibilidad hallados se obtuvieron por analogía, por ejemplo la divisibilidad por $n$ en base $n$ está basado en el criterio de divisibilidad por diez, el criterio múltiplos de $n + 1$ en base $n$, es el mismo criterio en base diez utilizado para la divisibilidad por 11 y el criterio múltiplos de $n - 1$ en base $n$ es el mismo criterio utilizado en la divisibilidad por 9.

| | |
|---|---|
| **Elaborado por:** | Karen Estefany Osorio Guerrero; Edwin Salvador Castañeda López. |
| **Revisado por:** | Lyda Constanza Mora Mendieta. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Fecha de elaboración del Resumen:** | 26 | 05 | 2014 |

*A Dios por darme fuerzas para luchar*
*y hacerme llegar hasta aquí,*
*superando todas las dificultades.*

*A mis abuelos, mi hermana y mis primas*
*quienes me brindaron su apoyo cada día*
*ante cualquier situación, y a mis padres por la vida.*

*A mi compañero Edwin Castañeda*
*por su paciencia y su amor incondicional.*

*A mi profesora Lyda Mora, por sus enseñanzas,*
*sus conocimientos y su amistad.*

*Karen Osorio*

*A mis padres y hermanas por su apoyo incondicional.*

*A mi compañera Karen Osorio*
*por su dedicación y su gran amor.*

*A todos los profesores que hicieron parte*
*de mi formación académica.*

*Edwin Castañeda*

## Tabla de Contenido

# INTRODUCCIÓN

Conjeturar es uno de los procesos matemáticos que se experimentan en el curso de Aritmética de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional; este proceso permite desarrollar en el maestro en formación diferentes capacidades y estrategias para explorar, buscar, encontrar y finalmente, generalizar propiedades, para ese caso, de los números naturales.

En el curso mencionado, uno de los propósitos es "Relacionar al estudiante de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas con procesos comunes al saber científico, tales como: codificar, decodificar, intuir, conjeturar, formular algoritmos, interpretar, crear, diseñar estrategias, ensayar - errar - corregir, explorar, razonar, generalizar; entre otras."[1], para esto, uno de los tópicos a estudiar son los criterios de divisibilidad, pues estos han sido utilizados como objeto de investigación desde tiempos inmemorables, ya que, entre otras razones, facilitan algunos procedimientos entre números naturales y otros números como por ejemplo los fraccionarios (al hacer simplificaciones) y atienden a la necesidad de la comunidad matemática de simplificar operaciones y cálculos.

Para la elaboración de este trabajo, inicialmente se realizó una consulta histórica acerca de los criterios y algunas definiciones y teoremas relacionados con divisibilidad, pues es vital para un profesor de Matemáticas no solo conocer matemáticas sino también sobre las matemáticas, así que a partir de dicha consulta se empezaron a buscar criterios por analogía reconociendo autores que habían trabajado en el tema; los criterios formulados, algunos conocidos desde el curso de Aritmética, se comprobaban mediante ejemplos, para lo cual se utilizaba la calculadora *Álgebra Finita*, elaborada por el profesor Leonardo Ángel del Grupo de Álgebra. Para hallar otros criterios de divisibilidad, se recurrió a tablas elaboradas en Excel, con el fin de encontrar relaciones numéricas y establecer otros criterios, las cuales se comprobaban de manera similar a los anteriormente mencionados. Posteriormente se construía la demostración del criterio establecido y se consideraban las propiedades matemáticas necesarias, a partir de lo cual se constituyó el Marco de referencia.

---

[1] Tomado del programa del curso de Aritmética elaborada por el profesor Carlos Luque en el segundo semestre de 2013.

Con respecto a los criterios que se encuentran en el cuerpo de este trabajo, vale la pena decir que algunos no simplifican los cálculos, pues resulta mucho más sencillo determinar si un número es divisible entre otro haciendo la división correspondiente (como es el caso del criterio de divisibilidad por siete en el sistema decimal de numeración); no obstante, son criterios hallados por los autores y hace parte del proceso de conjeturar y explorar, mencionado antes.

# JUSTIFICACIÓN

A lo largo de nuestra formación como Licenciados en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, y cumpliendo con el currículo propuesto por el Departamento de Matemáticas y la Facultad de Ciencia y Tecnología hemos asistido a cursos de la Línea de Álgebra, como lo son Aritmética y Sistemas numéricos en particular, que como se mencionó anteriormente tienen como fin, entre otros, incentivar en el docente en formación la búsqueda de conjeturas y regularidades, en diferentes conjuntos numéricos. Durante estos cursos, especialmente en el curso de Aritmética, prima la capacidad del docente en formación en buscar métodos para conjeturar y justificar dichas conjeturas en el conjunto de los números naturales; particularmente, se estudian algoritmos para realizar las operaciones básicas y la caracterización de los múltiplos de un número específico en diferentes bases numéricas; en esta tarea se presentan varias conjeturas para establecer algunos criterios de divisibilidad pero particularmente para múltiplos de 2, 3 y 5 y algunas veces no se alcanzan a estudiar criterios para otros múltiplos ni para justificar o demostrar las conjeturas halladas, asimismo no se establecen relaciones entre los criterios de divisibilidad en base diez que puedan ser extendidos a otras bases, por esto, mediante este documento se pretende desarrollar esta tarea que se inicia en primer semestre, haciendo una extensión de algunos criterios de divisibilidad conocidos en base diez a diferentes bases y otros que surgen en distintas bases, realizando las respectivas demostraciones para tales criterios.

Para el docente de matemáticas no solo es importante saber matemáticas, sino elaborarlas, así que este trabajo aporta a nuestra formación profesional al contribuir en la experiencia de realizar matemáticas elementales, labor propia de un matemático, contribuyendo a la producción académica en pro de nuestra formación profesional como futuros licenciados.

Finalmente, el trabajo de grado espera servir a los futuros docentes en formación como base bibliográfica ante el cuestionamiento o profundización de los criterios de divisibilidad en distintas bases numéricas.

# OBJETIVOS

**Objetivo general:**

Proponer criterios de divisibilidad en diferentes bases numéricas a partir del estudio de criterios propios de la base diez.

**Objetivos específicos:**

- Presentar una demostración para cada criterio de divisibilidad hallado.
- Servir como base bibliográfica a los docentes en formación para la consulta criterios de divisibilidad en diferentes bases numéricas.
- Fundamentar los criterios de divisibilidad desde la Historia de las Matemáticas.
- Experimentar el hacer matemático desde la exploración, formulación y demostración de algunos criterios de divisibilidad en diferentes bases.

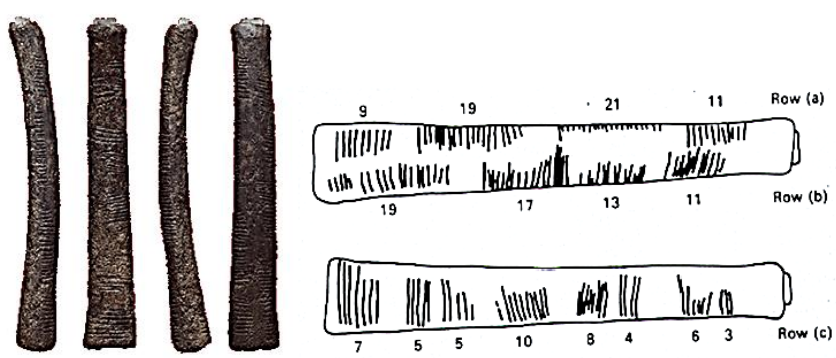
Antes de iniciar vamos a definir criterio de divisibilidad: Un criterio de divisibilidad es un teorema o regla que nos permite saber cuándo un número es múltiplo de otro.

# Capítulo 1: Acerca de la historia de la divisibilidad

El presente capitulo muestra el desarrollo histórico de los criterios de divisibilidad, aunque, si bien la consulta histórica inicialmente no se refiere a los criterios, si a temáticas propias de la divisibilidad, que fueron de gran importancia para llegar a los criterios actuales.

## 1.1. La Pre-historia

Las civilizaciones antiguas fueron las primeras en producir significativos descubrimientos y aportes en el estudio de los números naturales y enteros. El primer indicio acerca de la divisibilidad se dio en la **prehistoria**, pues en 1960 el geólogo y explorador belga Jean de Heinzelin halló el hueso de Ishango cerca de las fuente del río Nilo, lo que actualmente se conoce como la república democrática del Congo, este era el hueso de un babuino que data aproximadamente del año 35.000 a.C. el cual mostraba una serie de marcas de algunos números entre los cuales hay cuatro números primos aislados, lo que, al parecer, indicaba que conocían propiedades de algunos números; luego de ser examinado este hueso se llegó a la conclusión que representa un calendario lunar de la mujer de la edad de piedra.




Imágenes tomadas de Martín (2011).

En la fila b, se ven los cuatro números primos mencionados.

Los antiguos **egipcios** empezaron a utilizar conceptos de divisibilidad como producto de la necesidad del pago de impuestos en función del área de los terrenos que poseían. En el famoso papiro egipcio de Rhind y en el papiro de Moscú se dejaron evidencias acerca de la divisibilidad pues estos dan solución a los problemas de medida.

Al igual que los egipcios, los **babilonios** tenían un sistema decimal y otro sexagesimal, pues este sistema facilitaba la subdivisión exacta, pues 60 es divisible por 2, 3, 6, 12, 15, 20 y 30. La matemática mesopotámica fue mucho más avanzada que la egipcia, pues eran mucho más prácticos. Esto nos muestra como las civilizaciones antiguas buscaban la manera de simplificar cálculos utilizando números que fueran múltiplos de otros.

## 1.2. El aporte de los griegos

Las demostraciones y proposiciones que se presentaran en este apartado fueron tomadas de Vera (1970)

**Euclides de Alejandría** (300 a.C.) con su obra "Los Elementos" logra recoger en sus trece volúmenes el conocimiento matemático de su tiempo de manera axiomática, así en los libros IIX a IX se muestra todo lo correspondiente a la aritmética y la Teoría de Números, estableciendo en el libro IX los siguientes conceptos:

***Número:*** *Un número es una pluralidad compuesta de unidades. Una unidad es aquello en virtud de la cual cada una de las cosas que hay, se llama una.*

***Parte (divisor):*** *Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide el mayor.*

***Partes (no divisor):*** *Cuando no lo mide.*

***Múltiplo:*** *Y el mayor es múltiplo del menos cuando es medido por el menor.*

***Número primo:*** *el medido por la sola unidad.*

***Números primos entre sí:*** *los medidos por la sola unidad como medida común.*

***Número compuesto:*** *es el medido por algún número:*

***Números compuestos entre sí:*** *son los medidos por algún número como medida común.*

***Un número multiplica a otro****: un número multiplica a un número cuando el multiplicado se añade a su mismo tantas veces como unidades hay en el otro y resulta un número."*

En los libros ya mencionados, se construyen objetos teóricos y se establecen propiedades de los números.

El libro VII empieza con las proposiciones 1, 2 y 3, las cuales nos muestran el método de divisiones sucesivas para el cálculo del máximo común divisor o "Antenaresis" como fue llamado:

***Proposición* 1:** *Dados dos o más desigualdades y restando sucesivamente el menor al mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí.*

***Proposición* 2:** *Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.*

***Proposición* 3:** *Dados tres números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.*

***Proposición* 4:** *Todo número es parte o partes de todo número, el menor del mayor.*

La proposición 4 debe ser tomada conjuntamente con las definiciones presentadas anteriormente de número y parte, pues menciona que un número es parte de otro cuando lo mide, pero también es parte cuando no lo mide, así que según Levi (2008), la palabra parte se refiere a fracción.

Los griegos desarrollan la teoría de las proporciones para números mediantes proposiciones, logran establecer propiedades de los números primos entre sí y además clasifican los números en compuestos y primos. Y así como desarrollaron un algoritmo para calcular el máximo común divisor, también se estableció un procedimiento para calcular el mínimo común múltiplo que se establece en las siguientes proposiciones:

***Proposición* 6:** *Dados tantos números como se quiera, hallar los menores que aquellos que guardan la misma razón que ellos.*

***Proposición* 7:** *Dados dos números, hallar el menor número al que miden.*

***Proposición* 8:** *Si dos números miden a algún número, el número menor medido por ellos también medirá al mismo número.*

En el libro IX se establecen importantes teoremas que actualmente hacen referencia a la teoría de números:

***Proposición* 9:** *"hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos",* proposición en que la que se establece la infinitud del conjunto de los números primos.

***Proposición* 10:** *"si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales, por cuantos números primos se ha medido el último por los mismos será medido también el siguiente a la unidad"*

***Proposición* 11:** *"si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales y el siguiente a la unidad es un número primo, el mayor no será medido por ningún otro fuera de los que se encuentran entre los números proporcionales."*

***Proposición* 12:** *"si un número es el menor medido por los números primos, no será medido por ningún otro primo fuera d los que le median desde un principio."*

Estas tres proposiciones se acercan mucho al actual Teorema Fundamental de la Aritmética, pero como los griegos no concibieron los números fuera de las construcciones este teorema no pudo ser concebido por los griegos.

En el libro VII de Euclides, la proposición 29 establece la propiedad que liga el concepto de número primo respecto de otro: *"Todo número primo es primo con cualquier otro número del cual no sea divisor"*, que es lo que actualmente conocemos como primos relativos.

La proposición 30 nos dice:

*"Si p es un número primo y divide al producto de dos enteros positivos, entonces el número primo divide al menos a uno de los números."*

Esta proposición fue la base fundamental en la teoría de la divisibilidad, pues es usada para demostrar el teorema fundamental de la aritmética.

Otro de los más grandes legados de Euclides es el Algoritmo de la división, para encontrar el máximo común divisor de dos números se pueden aplicar las proposiciones 1 y 2 cuantas veces sea necesario, así que si suponemos que $a \geq b$, podemos restar de $a$ el número $b$ tantas veces como se requiera, que es lo mismo que efectuar la división entre $a$ y $b$, así que podemos encontrar números enteros $q$ y $r$ tales que

$$a = bq + r, \qquad q \geq 0 \text{ y } 0 \leq r < b$$

En este caso el máximo común divisor de $a$ y $b$ con el máximo común divisor de $q$ y $r$. El algoritmo de Euclides consiste en repetir el proceso hasta que se llegue a una división exacta.

De otro lado está **Eratóstenes** (Cirene, 276 a. C.[1] – Alejandría,194 a. C.), un personaje que naturalmente hace parte de la historia de la divisibilidad, creó una criba que lleva su nombre, la cual permite la determinación de números primos excluyendo los múltiplos de 2, 3, 4, 5, etc., y de cualquier número natural, su gran aporte consistió en formular un proceso algorítmico para obtener números primos de uno hasta algún número dado y durante tantos años este ha sido el método más usado para encontrar números primos.

## 1.3. El aporte de los indios y árabes.

Stewart (2008) menciona que Bhaskara (1114) en su libro Lilavati, incluye ideas de aritmética, como la conocida Regla del nueve pero llamada por Bhaskara “sacar nueves”, utilizada para la comprobación de operaciones y reglas para la divisibilidad de 2, 3, 5, 7 y 9, basado en las sumas de las cifras de un número. También se sabe que la divisibilidad por 2, 5, 3 y 9 ya era conocida por los indios mucho antes, pero la divisibilidad por 11 no se conoció sino hasta el siglo XVI.

## 1.4. Los aportes de Fibonacci

**Leonardo de Pisa**, llamado Fibonacci (1180 - 1250), escribió el Liber Abaci[2] (1202), una obra que contiene 15 capítulos, en los que trata de manera detallada el uso del sistema de numeración decimal. Los capítulos II al V se refieren a las operaciones fundamentales de los números la descomposición de los números en factores primos y la divisibilidad por 2, 3, 4, 5 y otros.

Con respecto a los números primos, Leonardo de Pisa menciona[3] lo siguiente en su obra:

> (…) cierto número es incompuesto, y hay esos en Aritmética y en geometría que son llamados primos. Esto es porque no existen números mas pequeños, excepto la unidad, que son factores de estos. Los Árabes los llaman ***Hasam.*** Los griegos los llaman ***linear***; como sea nosotros los llamamos irregulares; aquellos que son menores que 100 están escritos en secuencia en la tabla (Tabla 1). Para los primos que son más grandes que 100, yo les enseñaré las reglas para la división. el resto son verdaderamente compuestos, o ***epipedi***, que son áreas, como fueron llamados por el hábil geometra Euclides. Por esta razón todos esos números están construidos por multiplicaciones, como 12 está compuesto de dos[4] por 6, o tres por 4 nosotros los llamamos números regulares (…)

Pisa (1602, p. 57)

| *Table of Hasam Numbers* | | |
|---|---|---|
| 11 | 37 | 67 |
| 13 | 41 | 71 |
| 17 | 43 | 73 |
| 19 | 47 | 79 |
| 23 | 53 | 83 |
| 29 | 59 | 89 |
| 31 | 61 | 97 |

**Tabla 1**[5]

[2] Para la elaboración de este capítulo, uno de los autores de este documento realizó la traducción de los apartados necesarios de este libro que se presentan.

[3](…) Certain numbers are incomposite, and they are those in arithmetic and geometry which are calles primes. This is because no smaller numbers exist, except the unit, which are factors. The Arabs called them *hasam*. The Greeks call them linear; however we call them irregular; those which are less that one hundred are written down in sequence in the table. For other true primes which are greater than one hundred, I shall teach the rule for division. The rest are truly composites, or *epipedi*, that is areas, as they were called by the most skillful geometer Euclides. For that reason all of these numbers are built by multiplication, as twelve which is composed by the multiplication of two by 6, or three by 4; however we call these regular numbers.(…)

[4] Fibonacci en el Liber abaci algunas veces escribe los números en su representación simbólica y otras veces en su representación literal.

[5]Imagen tomada de Pisa (1602)

Con lo anterior, se puede ver que al parecer a Fibonacci no le interesaba trabajar con los primos menores[6] que 10. Los criterios de divisibilidad presentados en el Liber Abaci están basados en un método de comprobación del mismo Fibonacci, llamado "*la prueba del nueve* ", la cual consiste en que sumando las cifras de un número y restándole a este resultado el múltiplo de 9 más cercano a él, se obtiene el residuo de dividir el número entre 9; estos criterios son muy diferentes a los utilizados en la actualidad, pues los actuales son basados en la suma de las cifras o en operaciones entre estas, muy posiblemente, estos métodos son consecuencia del trabajo de Pascal, el cual se presentará más adelante.

Como ya se mencionó, el primer criterio de divisibilidad que puede inferirse en el Liber Abaci es el ***criterio de divisibilidad por* 9**. Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9; esto logra deducirse de la prueba del 9, porque si se suman todas las cifras de un número y esta suma es múltiplo de 9 entonces el residuo de dividir el número entre 9 es cero (la prueba del 9 encuentra el residuo de dividir un número en 9).

Leonardo de Pisa, no hace explícitos sus criterios de divisibilidad en el Liber Abaci, pero en la descripción de algunos sus algoritmos se encuentran ciertos criterios.

Para hallar los factores de un número, Fibonacci indica que lo primero que es necesario saber es si el número es par o impar[7] e indica que si el número es impar se pueden determinar sus factores siguiendo ciertas reglas (aunque no son llamadas así por él), que se presentan enseguida tomando fragmentos de su obra, como se verá, algunas se refieren a ejemplos específicos:

***Criterio de divisibilidad por* 5[8]*:***

"(…) cuando en la figura [cifra[9]]del primer lugar de cualquier número impar está el número 5, se sabe que 5 es un factor, esto es, el número es divisible por 5(…)"

Pisa (1602, p. 66)

[6] Esto se puede ver a través del manejo que le da Leonardo de Pisa a estos números durante todo el libro.
[7]En el Liber Abaci no hay ninguna referencia sobre lo dicho, se concluye luego de estudiar dicho libro.
[8] Therefore when in the figure of first place of any odd number there is the number 5, one will know 5 to be a factor, that is the number is divides integrally by 5.
[9] Leonardo de Pisa llama figuras a las cifras de los números, por eso se hace aquí la salvedad; pero más adelante no se hará la aclaración considerando que aquí ya fue explícita.

***Criterio de divisibilidad por* 3[10][11]*:***

> (…) Si cualquiera otra figura [diferente de cero] aparece en el primer lugar, entonces uno toma el residuo del número entero por la prueba del 9, y si resulta un cero, entonces $\frac{1}{9}$, y si 3 o 6 es el residuo, entonces $\frac{1}{3}$ estará en la composición.
>
> Pisa (1602, p. 66)

Se ve que el criterio no se hace explícito, pero se puede escribir de la siguiente manera: Si el residuo de un número impar, al dividirlo por 9, es 3 o 6, entonces el número es divisible por 3; pues 3 y 6 son múltiplos de 3.

***Criterio de divisibilidad por* 11[12]:**

> (…) si uno quisiera ver cómo encontrar la regla de composición para 957, entonces es dividido por 3 porque 3 es el residuo del número (de dividir por 9), el cociente es 319 que no puede ser dividido por 3 pues el residuo (de dividir por 9) es 4; y si uno lo dividiera por 7, el residuo es 4, entonces este es divisible por 11 (…)
>
> (Pisa (1602, p. 66)

En este caso, el criterio de divisibilidad por 11 no se realiza a través de la prueba del 9, sino por la prueba[13] del 7, así, un número impar es divisible por 11 si el residuo (al dividir por 7) es 4.

Por ejemplo, el número 627 es impar, si se realiza la división usual se puede ver que el residuo de dividir 627 entre 7 es 4. Y efectivamente 627 es divisible por 11, porque $11 \cdot 57 = 627$.

---

[10] Aunque Leonardo no lo hace explícito en su libro, él realiza divisibilidad por 3 pero no por 9.

[11] (…)However if another odd figure will appear in the first place, then one indeed takes the residue of the entire numbers by casting out nines; and if a zephir results, then $\frac{1}{9}$, and if 3 or 6 will be the residue, then $\frac{1}{3}$ will in the composition.

[12] (…)If one seeks to find the composition rule for 957, then he divides it by 3 because 3 is the residue of the number; the quotient is 319 which cannot be divides again by 3 as the residue of it is 4; and if one will divide it by 7, then the remainder is 4, and thus it is divisible by 11 (…)

[13] Esta prueba hace referencia a un método de comprobación de operaciones similar a la prueba del nueve, en donde se hallar el residuo de un número a través de la división módulo 7.

Ahora, si el número dado es par se tienen los siguientes criterios:

***Criterio de divisibilidad por* 6[14]:**

"(…) entonces él toma similarmente el residuo de él (número dado) entre 9, si este es cero, entonces él tendrá $\frac{1}{9}$. Y si es 3 o 6 entonces se tendrá $\frac{1}{6}$ en su composición."

Pisa (1602, p. 68)

***Criterio de divisibilidad por* 10[15]:**

*"*Y si en el primer lugar de un número par un cero se muestra, este es removido, y por este tendrá $\frac{1}{10}$ en la composición del número*"*

Pisa (1602, p. 68)

***Criterio de divisibilidad por* 8 *y por* 4[16]:**

> Si no muestra un residuo, uno confirma que el residuo estará dividiendo por 8 el número de dos cifras el cual está en el primer y segundo lugar, porque si este es cero y en la cifras del tercer lugar aparece un par, 2, o 6, o 8, o 0, entonces uno sabe que el número entero de cualquier número de lugares puede ser dividido por 8. Además, si en la tercera cifra aparece un par, 1 o 3 o 5 o 7 o 9, entonces el número tiene $\frac{1}{4}$ en su composición. Y si verdaderamente muestra 4 como un residuo (de dividir entre 7), y la figura del tercer lugar es impar, entonces el número entero es dividido por 8. Y si muestra un par, entonces habrá $\frac{1}{4}$ en su composición.

Pisa (1602, p. 68)

---

[14](…) then he takes similarly the residue of it by 9, if it is 0, then he will have $\frac{1}{9}$. And if it is 3 or 6, then the rule will have $\frac{1}{6}$ in its composition.

[15](…)And if in the first place of some even number a zephir shows, it is removed, and for it he will have $\frac{1}{10}$ in the composition of the numbers.

[16] However if there will show no residue of it, one checks what the remainder will be upon dividing by 8 the number of two figures which is in the first and second places, because if it is 0, and the figure of the third place appears even, 2 or 6 or 8 or 0, then one knows the entire number of any number of placer can be divides by 8. However if the third figure will appear odd, 1 or 3 or 5 or 7 or 9, then the number has $\frac{1}{4}$ in its composition. If it truly shows 4 as a remainder, and the figure of the third place is odd, then the entire number similarly is divides by 8. And if it shows even, it will have only $\frac{1}{4}$ in its compositions.

Por ejemplo, 352 es divisible por 8, pues el número conformado por sus dos últimas cifras es divisible por 8, ya que si se divide 52 en 7 el residuo es 4, y además la tercera cifra (en este caso 3) es impar.

En el siglo XVI, Stevin (1548 – 1620), realizó la extensión de la teoría de la divisibilidad, pues gracias a su obra publicada en 1634 "Œ*uvres* (*courses*) *mathematiques...*" extiende el algoritmo de Euclides al cálculo del máximo común divisor de dos polinomios.

## 1.5. Los aportes de Pascal

Esta sección está basada en Glaser (1971), cuya traducción se hizo por los autores de este documento.

Fue **Blaise Pascal** (1623 – 1662) en su tratado *De numerismultiplicibus* en 1665, *De los caracteres de la divisibilidad de los números deducidos de la suma de sus cifras,* quien establece unos criterios de divisibilidad basado en la suma de las cifras que componen un número y para eso comienza haciendo una proposición única: *reconocer con la sola inspección de la suma de sus cifras si un número dado es divisible por otro dado.* Pascal, al igual que Fibonacci usa la prueba del 9, pero Pascal intenta hacer una prueba de esta donde manifiesta[17]:

> Nada es mejor conocido en aritmética que la proposición que corresponde a que cualquier múltiplo de 9 está compuesto de dígitos cuya suma es también múltiplo de 9" (…) "esta regla es comúnmente usada, yo no creo que ninguno al presente haya dado una demostración de esta o haya siquiera buscado una generalización de este principio. En este papel, yo justificaré la regla de divisibilidad del 9 y daré reglas similares; yo también daré un método general que permita saber por simple inspección de la suma de sus dígitos si un número dado es divisible por otro número, cualquiera que sea; este método se aplica no solo a nuestro sistema decimal de numeración (un sistema establecido no por

[17]As much as this rule is commonly used, I do not believe that anyone up to the present has given a demonstration of, or has even searched for, a generalization of this principle. In this paper, I will justify the divisibility rule for 9 and several similar rules; I will also reveal a general method which permits one to know by simple inspection of the sum of its digits, if a given number is divisible by another number, whatever it be; this method applies not only to our decimal system of numeration (a system, established not out of natural necessity, as a commonly thought, but by convention, a rather poor one at that) but to any system of numeration of whatever base.

nuestra necesidad natural, como comúnmente se piensa, pero por convención, un poco pobre)" sino a cualquier sistema de numeración en cualquier base (… )

Tomado de Glaser (1971, p. 16)

**Teorema 2.3.:** El número $N = a_n \ldots a_0$ es divisible por $k$ si y solo si el test[18] número T es divisible por *k*, donde $T = a_0 + a_1R_1 + \cdots + a_nR_n$
Y donde los $R_i$´*s* se encuentran de la siguiente manera:

Divide 10 en *k* para obtener el residuo $R_1$
Divide $10R_1$ en *k* para obtener el residuo $R_2$
...
Divide $10R_{n-1}$ en *k* para obtener el residuo $R_n$

Pascal menciona que si $N = a_o$, entonces $T = a_o$ y el teorema resulta evidente. Luego realiza la prueba para un número de 2 y 3 dígitos como sigue:

(Cuando $N = a_0a_1$). Dado que N es un múltiplo de *k*, $N = a_0 + 10a_1 = kp$ para algún entero *p*. Como $10 = kx + R_1$ para algún entero *x*, se tiene que $T = a_0 + (10 - kx)a_1 = a_o + 10a_1 - kxa_1 = kp - kxa_1 = k\,(p - xa_1)$. Luego T es múltiplo de *k*. Por otro lado vemos que T = *kq* para algún entero *q*, y sigue que $T = a_0 + (10 - kx)a_1 = N - kxa_1 = kq$ y $N = k(q + xa_0)$ es múltiplo de *k*. En consecuencia, Pascal recomienda pensar T como $T = a_0R_0 + R_1R_1 + \cdots + R_nR_n$ con $R_0 = 1$.

(Cuando $N = a_0a_1a_2$). Dado que N es un múltiplo de *k*, $N = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 = kp$ para algún entero *p*. Como $10 = kx + R_1$ para algún entero *x*, y $10R_1 = kw + R_2$ se tiene que

$$\begin{aligned} T &= a_0 + (10 - kx)a_1 + (10R_1 - kw)a_2 \\ &= a_0 + (10 - kx)a_1 + (10(10 - kx) - kw)a_2 \\ &= a_0 + (10 - kx)a_1 + (10^2a_2 - kxa_2 - kwa_2) \\ &= a_0 + 10a_1 - kxa_1 + 10^2a_2 - kxa_2 - kwa_2 \end{aligned}$$

[18] Test se refiere a prueba, es decir, que T es el número que se halla para realizar la prueba de divisibilidad.

$$= a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 - kxa_1 - kxa_2 - kwa_2$$

$$T = kp - (kxa_1 + kxa_2 + kwa_2) = k\big(p - (xa_1 + xa_2 + wa_2)\big)$$

Luego T es múltiplo de *k*. Por otro lado vemos que T = $kq$ para algún entero $q$, y sigue que

$$T = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 - kxa_1 - kxa_2 - kwa_2 = N - (kxa_1 + kxa_2 + kwa_2) = kq$$

$N = (q + xa_1 + xa_2 + wa_2)$ es múltiplo de *k*.

Luego dice que la demostración podría ser la misma si el número dado estuviera compuesto por más de tres dígitos.

Finalmente, Pascal escribe[19]:

> (…) las propiedades de la divisibilidad de números deducidos de la suma de las cifras de sus cifras se apoyan al mismo tiempo en una naturaleza inherente de los números y su representación en el sistema decimal de numeración. En los otros sistemas, por ejemplo en el duodecimal el cual usa dos nuevos dígitos, en orden como se asigna el número 10 y el número 11, podría ser no del todo cierto que todo número cuya suma es múltiplo de 9 es múltiplo de 9. Pero este método que yo he dado a conocer y la demostración que he dado resulta adecuado en este sistema y en cualquier otro (…)”
>
> Y concluye que “uno podría también saber que, en este sistema de numeración cualquier número cuya suma de dígitos es un múltiplo de 11 es un múltiplo de 11. En nuestro sistema decimal, la prueba de divisibilidad para 11, sería necesaria que la suma formada por el último dígito, restada del siguiente al último, luego el siguiente restado del anterior, etc., sea un múltiplo de 11. Sería fácil justificar estas dos reglas para obtener algunas otras (…)

Tomado de Glaser (1971, p. 18)

En el teorema 2.4. Pascal menciona otro criterio y establece una tabla con algunos resultados en particular:

**Teorema 2.4:** Dado que $N = (a_n \dots a_0)_\beta$, $R_0$= 1, y $R_i$ es el residuo cuando *k* es dividido por $\beta R_{i-1}$para cada*i*= 1,2,…,*n*, entonces N es un múltiplo de *k* si y solo si T es múltiplo de *k*, donde

---

[19] The divisibility properties of numbers deduced from the sum of their rests simultaneously on the inherent nature of numbers and their representation in the decimal system of numeration. In all others systems, for example in the duodecimal system (a most convenient one indeed) which aside from first nine digits, uses to know symbols, in order to designate the number 10 with the one and 11 the others, in this mode of numeration, it would no longer be true that all numbers whose digit sum is a multiple of 9 is itself a multiple of 9. Bus the method that I have made known and the demonstration which I have given are as a suitable to this system as to any other.

| Theorem No. | T | $\beta$ | K |
|---|---|---|---|
| 2.4 | $a_0R_0 + a_1R_1 + \ldots + a_nR_n$ | all | all |
| 2.5 | $a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 +$ $a_6 + 3a_7 + 2a_8 + 6a_9 + 4a_{10} + 5a_{11} +$ $\ldots$ | 10 | 7 |
| 2.6 | $a_0 + 4a_1 + 4a_2 + 4a_3 + \ldots$ | 10 | 6 |
| 2.7 | $a_0 + a_1 + \ldots + a_n \equiv T_s$ | 10 | 3 |
| 2.8 | $T_s$ | 10 | 9 |
| 2.9 | $a_0 + 2a_1$ | 10 | 4 |
| 2.10 | $a_0 + 2a_1 + 4a_2$ | 10 | 8 |
| 2.11 | $a_0 + 10a_1 + 4a_2 + 8a_3$ | 10 | 16 |
| 2.12 | $a_0 + 3a_1$ | 12 | 9 |
| 2.13 | $T_s$ | 12 | 11 |
| 2.14 | $a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n \equiv T_a$ | 10 | 11 |

Tabla 2

Esta tabla nos muestra cuales son los posibles T's en una base $\beta$ y cuando buscamos divisibilidad por $k$. Por ejemplo, el Teorema 2.9 de la tabla menciona que en base $\beta = 10$, el T requerido para saber si cierto número N, en este caso de dos cifras es divisible por 4. El Teorema 2.5 muestra que en un número N de $n$ cifras, para saber si es divisible por 7 en base 10 el T que se quiere para la prueba es $T = a_0 + 3a_1 + 3a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + 3a_7 + 3a_1 + \cdots$.

Posteriormente se continuó estudiando la divisibilidad, pero no enfocada en criterios sino en propiedades más generales, es decir, se extendió la idea de divisibilidad a otros conjuntos de números como es el caso de Gauss, pero esto no se presenta aquí por cuanto no es la finalidad del trabajo.

Finalmente, aunque no sabemos de donde aparecieron muchos de los criterios que utilizamos ahora, lo último que se conoce sobre el estudio de los criterios de divisibilidad fue gracias a Federico Villareal (1850 - 1923), un profesor de Matemáticas Peruano que dejó aproximadamente 508 publicaciones en diversos campos de la ciencia y tecnología fundamentalmente en matemáticas, ingeniería, física, pedagogía, geografía, historia y lingüística. Respecto a criterios de divisibilidad produjo dos importantes teoremas publicados en 1897:

- La diferencia de dos números que son representados por las mismas cifras en dos sistemas de numeración de bases diferentes es divisible por la diferencia de las bases.

- Un número es divisible por un cierto divisor si lo es la suma de sus cifras cuando se le escribe en el sistema de numeración cuya base es el divisor aumentado en la unidad; o bien si los es la suma de sus cifras de lugar par menos la suma de las de lugar impar cuando se le escribe en el sistema de numeración cuya base es el divisor disminuido en la unidad.

En conclusión, vemos que inicialmente, en la pre-historia o en la época de Euclides se desarrollan una serie de teoremas relacionados con la divisibilidad y todos los términos que lo rodean: mínimo común múltiplo, máximo común divisor, múltiplo, números primos, etc., y algunos adelantos al Teorema fundamental de la aritmética. Luego Eratóstenes nos provee de un algoritmo, algunas veces no tan práctico, pero si el más eficiente de cómo saber cuándo un números es primo a través de la Criba que lleva su nombre. Más adelante, es Bhaskara quien propone una serie de criterios de divisibilidad basados en algoritmos sencillos con la suma de las cifras de un número. Leonardo de Pisa, en su gran obra el Liber Abaci propone criterios de divisibilidad basado en la prueba del nueve que menciona Bhaskara. Finalmente Pascal, nos muestra un criterio de divisibilidad que funciona no solo para base 10, sino para todas las bases en general:

"Dado que $N = (a_n \dots a_0)_\beta$, $R_0$= 1, y $R_i$ es el residuo cuando $k$ es dividido por $\beta R_{i-1}$para cada$i$= 1,2,…,$n$, entonces N es un múltiplo de $k$ si y solo si T es múltiplo de $k$ (Ver Tabla2)"

Este criterio actualmente es conocido como el Criterio general de divisibilidad, enunciado como sigue en Gonzales (2004):

Sea $n$ un entero positivo, sea $\sum_{i=1}^{k} a_i 10^i$ su representación decimal y sean $r_i$ los restos de la división de $10^i$, por $p \geq 2$, $i$ = 1, 2,… $k$. Entonces $n$ es divisible por $p$ si y solo si $\sum_{i=1}^{k} a_i r^i$ lo es.

Así, personajes como Pascal dejaron abierto el estudio de criterios de divisibilidad en otras bases, así que esto nos muestra el proceso por el que tuvo que pasar la humanidad para buscar algoritmos y métodos más sencillos de hacer las operaciones y la transición de cada idea para llegar a los criterios que tenemos actualmente.

# Capítulo 2: Marco de referencia

Antes de presentar los criterios de divisibilidad en diferentes bases, exponemos el marco de referencia base de este trabajo.

Como fundamento se tiene la axiomática de los números Naturales ($\mathbb{N}$) propuesta por Guiusseppe Peano, basados en Luque, Mora y Páez (2013). Para otras secciones de este mismo capítulo también se utilizaron apartes de Rubiano, Jimenéz & Gordillo (2004), en los cuales definen un conjunto de operaciones y algunas propiedades de estas operaciones sobre $\mathbb{N}$ y luego se presentan algunos teoremas que se consideran previos para las demostraciones de los criterios de divisibilidad que más adelante presentamos.

## 2.1. Números Naturales

La propuesta de Guiusseppe Peano presentada en 1889 tiene como axiomas los siguientes:

1. 0 es un número natural.
2. El sucesor de cualquier número natural ($n$) es un número natural ($n^+$).
3. Dos números naturales diferentes no tienen el mismo sucesor; es decir, que si $k \neq n$ entonces $k^+ \neq n^+$.
4. 0 no es el sucesor de algún número. (0 es el primer número natural)
5. Si $P$ es una propiedad tal que:
    *i.* 0 tiene la propiedad $P$.
    *ii.* Siempre que un número $n$ tiene la propiedad $P$ implica que su sucesor $n^+$ también tiene la propiedad $P$

    Entonces todo número natural tiene la propiedad $P$.

El axioma número 5 es conocido como el principio de inducción matemática.

A partir de los axiomas de los números naturales enunciados se definen algunas operaciones sobre el conjunto de los números naturales.

### Definición de adición

La adición sobre $\mathbb{N}$ se define así:

*a.* $n + 0 = n$

*b.* $n + k^{+} = (n + k)^{+}$

$\forall\, n, k \in \mathbb{N}$

### *Propiedades de la adición*

***Teorema* 1 (T1):** $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$n + 0 = 0 + n = n,$$

*Demostración:*

Vamos a usar el axioma 5[20] de los números naturales.

*i.* Demostramos que se cumple para $n = 0$

$0 + 0 = 0 = 0 + 0$, luego se cumple el teorema.

*ii.* Suponemos valido el teorema para $k$, es decir, $0 + k = 0 + k = k$. Debemos demostrar que se cumple para el sucesor de $k$: $0 + k^{+} = k^{+} + 0 = k^{+}$

Esto es inmediato, pues por la definición de adición $k^{+} + 0 = k^{+}$ y $0 + k^{+} = (0 + k)^{+} = k^{+}$.

■

***Lema* 1 (L1):** $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tenemos que $k^{+} + n = (k + n)^{+}$

*Demostración:*

Vamos a hacer inducción sobre $n$.

*i.* Demostramos para $n = 0$

$k^{+} + 0 = (k + 0)^{+}$ propiedad existencia del elemento neutro.

*ii.* Suponemos que se cumple para $n = m$ y debemos demostrar que se cumple para $m^{+}$, es decir $k^{+} + m^{+} = (k + m^{+})^{+}$.

Por definición de adición tenemos que:

$k^{+} + m^{+} = (k^{+} + m)^{+}$

$= ((k + m)^{+})^{+}$ por hipótesis de inducción

---

[20] Este axioma se usará durante todas las demostraciones pero no va a aparecer de manera explícita, se hace en este teorema para que el lector pueda ver la manera de usarlo.

$= (k + m^+)^+$ por la definición de adición

Quedando demostrada la afirmación.

■

***Teorema* 2 (T2):** *Propiedad conmutativa de la adición*

$\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$m + n = n + m.$$

*Demostración:*

Para esta demostración haremos inducción sobre $m$:

*i.* Vamos demostrar que se cumple para $m = 0$, entonces tenemos

$0 + n = n$ por **T1** y definición de adición.

$= n + 0$ por **T1** y definición de adición.

*ii.* Suponemos que se cumple para $m = k$, es decir,

$$k + n = n + k$$

Debemos probar que se cumple para $m = k^+$, es decir:

$$k^+ + n = n + k^+$$

*Demostración:*

$k^+ + n = (k + n)^+$ por **L1**

$= (n + k)^+$ por hipótesis de inducción

$= n + k^+$ definición de adición

Quedando demostrada la afirmación.

■

***Teorema* 3 (T3):** *Propiedad asociativa de la adición*

Para todo $m, n, k \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$(m + n) + k = n + (m + k).$$

*Demostración:* Sean $n, m$, fijos pero arbitrarios, vamos a hacer inducción sobre $k$:

*i.* Vamos a demostrar que se cumple para $k = 0$

$(m + n) + 0 = m + n$ por **T1** y definición de adición.

$= m + (n + 0)$ por **T1** y definición de adición.

*ii.* Suponemos que se cumple para $k = z$ se tiene que $(m + n) + z = m + (n + z)$

Debemos demostrar que se cumple para $z^+$

$$(m + n) + z^+ = m + (n + z^+)$$

Y esto se deduce de

$(m + n) + z^+ = ((m + n) + z)^+$ Definición de adición.

$= (m + (n + z))^+$ Hipótesis

$= (m + (n + z)^+)$ Definición de adición

$= (m + (n + z^+))$.

Quedando demostrada la afirmación.

■

**_Teorema_ 4 (T4):** *Propiedad cancelativa*[21] *de la adición*

Para todo $m, n, k \in \mathbb{N}$ se cumple que:

Si $m + n = m + k$ entonces $n = k$

*Demostración*: Sean $n$, $k$, fijos pero arbitrarios, vamos a hacer inducción sobre $m$:

*i.* Vamos a demostrar que se cumple para $m = 0$

$0 + n = 0 + k$

$n = k$ por **T1** y definición de adición.

*iii.* Suponemos que se cumple para $m = z$ se tiene que si $z + n = z + k$ entonces $n = k$

Debemos demostrar que se cumple para $z^+$

Si $z^+ + n = z^+ + k$ entonces $n = k$

Partiendo de

$z^+ + n = z^+ + k$

$n + z^+ = z^+ + k$ Por **T2**

$(n + z)^+ = (z + k)^+$ Definición de adición

$n + z = z + k$ Por A3

$n = k$ Por hipótesis de inducción

Quedando demostrada la afirmación.

■

[21] Este teorema tambén se puede demostrar. Probando que la adición es una operación definida bajo el conjunto de los números naturales, luego se prueba que esta operación es función y finalmente se llega al resultado deseado.

### Definición de multiplicación

La multiplicación se define de la siguiente forma:

*i.* $n \cdot 0 = 0$

*ii.* $n \cdot k^+ = n \cdot k + n.$

Para cualesquier número naturales $n$ y $k$.

### *Propiedades de la multiplicación*

***Teorema* 5 (T5):** $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n \text{ donde } 1 = 0^+.$$

*Demostración:*

*i.* Para $n = 0$, por la primera parte de la definición de multiplicación se tiene que $1 \cdot 0 = 0$.

Y de la segunda parte,

| | |
|---|---|
| $0 \cdot 1 = 0 \cdot 0^+$ | por la definición de 1 |
| $= 0 \cdot 0 + 0$ | por la definición de multiplicación |
| $= 0 + 0 = 0$ | por definición de multiplicación. |

*ii.* Suponemos válido para $n = k$ que $k \cdot 1 = 1 \cdot k = k$, y debemos demostrar que se cumple para $k^+$; es decir, que $k^+ \cdot 1 = 1 \cdot k^+ = k^+$.

| | |
|---|---|
| $1 \cdot k^+ = 1 \cdot k + 1$ | por la definición de multiplicación |
| $= k + 1$ | por hipótesis de inducción |
| $= k + 0^+$ | por la definición de 1 |
| $= (k + 0)^+$ | por la definición de adición. |
| $= k^+$ | por **L1**. |

Falta probar que $k^+ \cdot 1 = k^+$. Pero esto es inmediato, puesto que

| | |
|---|---|
| $k^+ \cdot 1 = k^+ \cdot 0^+$ | por la definición de 1 |
| $= k^+ \cdot 0 + k^+$ | por la definición de multiplicación |
| $= 0 + k^+$ | por la definición de multiplicación |
| $= k^+$ | por **L1** y **T1** |

Entonces la afirmación es válida para todo número natural $n$. Quedando demostrada la afirmación.

■

***Teorema* 6 (T6):** *Para todo número natural n, se tiene que* $0 \cdot n = 0$

*Demostración*:

Vamos a hacer inducción sobre $n$.

*i.* Demostramos que se cumple para $n = 0$.

$0 \cdot 0 = 0$, por la definición de multiplicación.

*ii.* Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir

$$0 \cdot k = 0$$

Demostramos que se cumple para $n = k^+$

Partiendo de

| | |
|---|---|
| $0 \cdot k^+ = 0 \cdot k + 0$ | Por la definición de multiplicación |
| $= 0 + 0$ | Por la hipótesis de inducción |
| $= 0$ | Por **T1** |

Quedando demostrada la afirmación.

■

***Teorema* 7 (T7):** *Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.*

Para todo $m$, $n$, $k$ números naturales se cumple que $(n + k) \cdot m = n \cdot m + k \cdot m$

*Demostración:*

Sean $n$, $k$ fijos pero arbitrarios, hacemos inducción sobre $m$

*i.* Demostramos que se cumple para $m = 0$.

| | |
|---|---|
| $(n + k) \cdot 0 = 0$ | Por definición de multiplicación |
| $= n \cdot 0 + k \cdot 0$ | Por definición de multiplicación |

*ii.* Suponemos que se cumple $(n + k) \cdot m = n \cdot m + k \cdot m$, para todo $m$ y $n$ números naturales y debemos demostrar que $(n + k) \cdot m^+ = n \cdot m^+ + k \cdot m^+$.

Partiendo de

| | |
|---|---|
| $(n + k) \cdot m^+ = (n + k) \cdot m + (n + k)$ | Por la definición de multiplicación |
| $= (n \cdot m + k \cdot m) + (n + k)$ | Por la hipótesis de inducción. |
| $= (n \cdot m + n) + (k \cdot m + k)$ | Por **T3** y **T4.** |
| $= n \cdot m^+ + k \cdot m^+$ | Por definición de multiplicación y **L1** |

Quedando demostrada la afirmación.

■

***Teorema* 8 (T8):** *Propiedad conmutativa de la multiplicación*

Para todo $m$, $n$, números naturales se cumple que $m \cdot n = n \cdot m$

*Demostración:*

Vamos a hacer inducción sobre $m$, sea $n$ fijo pero arbitrario.

*i.* Demostramos que se cumple para $m = 0$.

$0 \cdot n = 0 = n \cdot 0$ Por definición de multiplicación

*ii.* Suponemos que se cumple para $m = k$, es decir, $k \cdot n = n \cdot k$, y debemos probar que $k^+ \cdot n = n \cdot k^+$.

Teniendo que:

| | |
|---|---|
| $n \cdot k^+ = n \cdot k + n$ | Por la definición de multiplicación |
| $= k \cdot n + n$ | Por la hipótesis de inducción |
| $= k \cdot n + 1 \cdot n$ | Por **T5** |
| $= (k + 1) \cdot n$ | Por **T7** |
| $= (k + 0^+) \cdot n$ | Por la definición de 1 |
| $= (k + 0)^+ \cdot n$ | Por la definición de adición. |
| $= k^+ \cdot n$ | Por **T1** |

Quedando demostrada la afirmación.

■

***Teorema* 9 (T9):** *Propiedad asociativa de la multiplicación*

Para todo $m, n, k$ números naturales se cumple que $(n \cdot k) \cdot m = n \cdot (k \cdot m)$

*Demostración:*

Sean $n, k$ fijos pero arbitrarios, hacemos inducción sobre $m$

*iii.* Demostramos que se cumple para $m = 0$.

$(n \cdot k) \cdot 0 = 0$ Por definición de multiplicación

$= n \cdot (k \cdot 0)$ Por definición de multiplicación

iv. Suponemos que se cumple $(n \cdot k) \cdot m = n \cdot (k \cdot m)$, para todo $m$, $k$ y $n$ números naturales y debemos demostrar que $(n \cdot k) \cdot m^{+} = n \cdot (k \cdot m^{+})$.

Partiendo de

| | |
|---|---|
| $(n \cdot k) \cdot m^{+} = (n \cdot k) \cdot m + (n \cdot k)$ | Por la definición de multiplicación |
| $= n\ (k \cdot m) + (n \cdot k)$ | Por hipótesis de inducción. |
| $= n\ (k \cdot m + k)$ | Por **T7** y **T8** |
| $= n\ (k \cdot m^{+})$. | Por la definición de multiplicación. |

Quedando demostrada la afirmación.

■

**Orden aditivo en $\mathbb{N}$**

La relación que se define a continuación es conocida como *relación de orden*[22]. Sean $a$ y $b$ dos números naturales, existe un número natural $c$, de tal manera que se satisface

$$a + c = b \text{ o } b + c = a$$

Cuando se da la primera condición se tiene que $a \leq b$, lo cual se lee *a es menor o igual que b*, y cuando se da la segunda condición se tiene que $b \leq a$, que lee *b es menor o igual que a*.

[22] Es una relación que cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

La relación cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

La demostración de este teorema y que este orden es un orden total se puede ver con detalle en Luque, Ángel, & Jiménez (2009, p. 220 – 223)

**Definición de Sustracción en $\mathbb{N}$**

Dados dos números cualesquiera $a$ y $b \in \mathbb{N}$, la cantidad $u$ notada, $u = b - a$, se determina si $a \leq b$ y la llamamos la diferencia entre $b$ y $a$. La cantidad $v$ se determina si $b \leq a$ y la notamos

$$v = a - b.$$

Las cantidades $u$ y $v$ son únicas. A este procedimiento lo llamamos o resta. Con base en esto, tenemos que:

$$a + b = c \text{ es equivalente a } c - a = b \text{ o también, que } c - b = a$$

A lo cual llamados relaciones entre adición y sustracción.

A partir de esto formulamos algunos teoremas que relacionan la adición y la sustracción, los cuales se presentan a continuación:

***Teorema* 10 (T10):** $\forall\, a, m \in \mathbb{N}$, se tiene que $(a - m) + m = a$

*Demostración:*

Partiendo de la propiedad reflexiva[23] de la igualdad, en particular de:

$a - m = a - m$ tenemos

$(a - m) + m = a$ Por relación entre sustracción y adición.

Quedando demostrada la afirmación.

■

***Teorema* 11 (T11):** $\forall a, b$ y $c \in \mathbb{N}$, se tiene que $ab - ac = a\,(b - c)$ si $c \leq b$.

[23]Las tres propiedades de la igualdad como relación de equivalencia (reflexividad, simetría y transitividad) se consideran conocidas.

*Demostración:*

| | |
|---|---|
| $ab = a\,((b - c) + c)$ | Por **T10** |
| $ab = a(b - c) + ac$ | Por **T7** |
| $ab - ac = a\,(b - c)$ | Relación entre sustracción y adición. |

Quedando demostrada la afirmación.

■

***Teorema* 12 (T12):** $\forall\ a, b$ y $c \in \mathbb{N}$, se tiene que $(a + b) - c = a + (b - c)$ si $c \leq b$.

*Demostración*

| | |
|---|---|
| Partiendo de $a + b = a + [(b - c) + c]$ | por **T10** |
| $(a + b) - c = a + (b - c)$ | Por **T3** y relación entre adición y sustracción. |

Quedando demostrada la afirmación.

■

***Teorema* 13 (T13):** $\forall\ a \in \mathbb{N}$, se tiene que $(a - 2) + 1 = a - 1$

*Demostración:*

Partiendo de

| | |
|---|---|
| $(a - 2) + 2 = a$ | Por **T10** |
| $(a - 2) + (1 + 1) = a$ | descomponiendo 2 como 1 + 1 |
| $((a - 2) + 1) + 1 = a$ | por **T3** |

Lo cual es equivalente a:

| | |
|---|---|
| $(a - 2) + 1 = a - 1$ | Por relaciones entre adición y sustracción. |

Quedando demostrada la afirmación.

■

## Orden multiplicativo en $\mathbb{N}$

Sean $a$ y $b$ dos números naturales, si *a divide* a $b$ esto es $a|b$ significa que existe $c \in$ N, tal que $ac = b$, y si $b$ divide a $a$, esto es $b|a$, existe un número natural $c$, de tal manera que se satisface $bc = a$. A esta relación se le llama divisibilidad y cumple las siguientes propiedades:

*Reflexividad:* $\forall\, a \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, $a|a$

*Demostración:*

Por **T5** tenemos que $a \cdot 1 = a$, luego por la definición de divisibilidad $a|a$.

■

*Transitividad:* $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$, $a, b \neq 0$, si $a|b$ y $b|d$ entonces $a|d$.

*Demostración:*

Por definición de divisibilidad $b = aq$ y $d = bh$, sustituyendo $b$ en $d = bh$, tenemos $d = aqh$, usando **T9** tenemos $d = a(qh)$, luego $a|d$.

Si $a|b + c$ y $a|c$ entonces $a|b$

*Demostración*:

Por definición de divisibilidad se tiene que $aj = (b + c)$ y $c = ak$, sustituyendo un $c$ en la primera igualdad tenemos $aj = (b + ac)$, sin pérdida de generalidad y asumiendo que $j \geq a$, por relaciones entre adición y sustracción se tiene $b = aj - ac$, luego por **T11** se tiene $b = a\,(j - c)$ por definición de divisibilidad $a|b$.

■

## Definición de división en $\mathbb{N}$

Dados dos números $a$ y $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$. la cantidad $c$ notada,

$$c = a \div b$$

se determina si $b|a$ y la llamamos el cociente entre $a$ y $b$. La cantidad $d$ se determina si $a|b$ y la notamos

$$d = b \div a \text{ con } a \neq 0$$

A este procedimiento lo llamamos división. De acuerdo con esto,

$ab = c$ es lo mismo que $c \div b = a$ *o* también $c \div a = b$, siempre que $a, b \neq 0$.

Las anteriores son las relaciones entre multiplicación y división.

***Definición de número par:***

A un número natural divisible por dos se le llama número par; esto es, si $a$ es par si y solo si $2|a$ es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2n = a$.

***Definición de número impar:***

Un número es impar si y solo si es divisible por dos.

Sea $n$ un número natural que no es par, tenemos que al realizar el algoritmo de la división entre él y 2, existen dos números enteros $r$ y $q$ tales que:

$n = 2q + r$, $0 \leq r < 2$, por el algoritmo de la división de Euclides. Así, $r \in \{0,1\}$. Pero como $n$ no es par, $r \neq 0$, por tanto $r = 1$, luego $n = 2q + 1$.

De esta manera, tenemos que un número tenemos que un número impar tiene la forma $2q + 1$.

***Definición de múltiplo de un número k:***

A un número natural divisible por un número $k$ se le llama múltiplo de $k$; esto es, $a$ es múltiplo de $k$ si y solo si $k|a$, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $kn = a$.

***Algoritmo de la división de Euclides***

Sean $a$, $b$ naturales con $b > 0$. Entonces existen enteros únicos $q$, $r$ tales que

$$a = bq + r \text{ con } 0 \leq r < b.$$

La demostración de este teorema la pueden encontrar de manera detallada junto con los teoremas necesarios para su demostración, como el Principio del Buen orden para números naturales, en Grupo de Álgebra (2013)

***Definición de potenciación***

La potenciación en $\mathbb{N}$ se define por recurrencia de la siguiente manera:

*i.* $a^0 = 1$ con $a \neq 0$

*ii.* $a^{n^+} = a^n\, a$

***Propiedades de la potenciación.***

Para todo $a, b, x, y \in \mathbb{N}$ se cumple que:
Si $a, b \neq 0$ y $x \geq y$ entonces:

***Teorema* 14 (T14):** $a^1 = a$

*Demostración:*

| | | |
|---|---|---|
| Partiendo de | $a^1 = a^{0^+}$ | por definición de 1 |
| | $= a^0\, a$ | por definición de potenciación. |
| | $= 1 \cdot a$ | por definición de potenciación. |
| | $= a$ | por **T5** |

■

***Teorema* 15 (T15):** $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

*Demostración:*

Sean $a$, y $y$ fijos pero arbitrarios, hacemos inducción sobre $x$, pues por la propiedad conmutativa de la adición no es necesario hacer inducción sobre $y$.

*i.* Demostramos que se cumple para $x = 0$; así:
$a^0 \cdot a^y = 1 \cdot a^y = a^y = a^{y+0}$ por **T5**, **T1** y definición de potenciación.

*ii.* Suponemos válido para $x = t$, es decir, $a^t \cdot a^y = a^{t+y}$. Y debemos demostrar que se cumple para su sucesor $t^+$; es decir, que $a^{t^+} \cdot a^y = a^{t^+ + y}$.

Partiendo de

| | |
|---|---|
| $a^{t^+} \cdot a^y = (a^t \cdot a) \cdot a^y$ | Por definición de potenciación |
| $= (a^t \cdot a^y) \cdot a$ | Por **T8** y **T9** |
| $= a^{t+y} \cdot a$ | Utilizando la hipótesis de Inducción |

$= a^{(t+y)^+}$ Por definición de potenciación.

Por tanto la afirmación es válida para todo número natural *x* y *y*.

■

***Teorema* 16 (T16)** = $(a^x)^y = a^{xy}$

*Demostración:*

Sean *a*, y *x* fijos pero arbitrario, hacemos inducción sobre *y*, pues por la propiedad conmutativa de la multiplicación no es necesario hacer inducción sobre *x*.

*i.* Demuestro que se cumple para $y = 0$

$(a^x)^0 = 1 = a^0 = a^{x \cdot 0}$ por definición de multiplicación y de potenciación.

*ii.* Suponemos válido para $y = t$, es decir, $(a^x)^t = a^{xt}$

Y debemos demostrar que se cumple para su sucesor $t^+$; es decir, que

$$(a^x)^{t^+} = a^{x \cdot t^+}$$

Partiendo de

$(a^x)^{t^+} = (a^x)^t a^x$ Por definición de potenciación

$= a^{xt} a^x$ Utilizando la hipótesis de Inducción

$= a^{xt + x}$ Utilizando **T15**

$= a^{x \cdot t^+}$ Por definición de multiplicación.

Ahora, por la propiedad conmutativa de la multiplicación se tiene

$$(a^x)^y = a^{xy} = a^{yx} = (a^y)^x$$

Por tanto la afirmación es válida para todo número natural *x* y *y*.

■

***Teorema* 17 (T17)**: $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

*Demostración:*

Sean $a$, y $b$ fijos pero arbitrarios, hacemos inducción sobre $x$.

*i.* Demuestro que se cumple para $x = 0$

$(a \cdot b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0$ por **T5** y definición de potenciación.

*ii.* Suponemos válido para $x = t$, es decir, $(a \cdot b)^t = a^t \cdot b^t$

Y debemos demostrar que se cumple para su sucesor $t^+$; es decir, que

$$(a \cdot b)^{t^+} = a^{t^+} \cdot b^{t^+}$$

Partiendo de

$$\begin{aligned}
(a \cdot b)^{t^+} &= (a \cdot b)^t (a \cdot b) && \text{Por definición de potenciación} \\
&= a^t \cdot b^t \cdot (a \cdot b) && \text{Utilizando la hipótesis de Inducción} \\
&= (a^t \cdot a) \cdot (b^t \cdot b) && \text{Por } \mathbf{T8} \text{ y } \mathbf{T9} \\
&= a^{t^+} b^{t^+} && \text{Por definición de potenciación.}
\end{aligned}$$

Por tanto la afirmación es válida para todo número natural $x$.

■

En las demostraciones que siguen no se va a trabajar con $n^+$ si no con la notación $n = k + 1$, por comodidad del lector y simplificar la notación.

***Teorema* 18 (T18):** Teorema del binomio[24]

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)} b^{(n-1)} + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n$$

Vamos a hacer una inducción sobre $n$.

Sean $a, b \in \mathbb{N}$

*i.* Vamos a demostrar que se cumple para $n = 0$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = a + b$$

*ii.* Supongamos que se cumple para $n = k$. Demostremos que se cumple para $n = k + 1$

[24] El coeficiente $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial el cual es igual a $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Por **T15** y **T7** tenemos

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^1(a+b)^k = a(a+b)^k + b(a+b)^k$$

Utilizando la hipótesis de inducción

$$= a\left(\binom{k}{0}a^{k-0}b^0 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}a^{k-(k-1)}b^{(k-1)} + \binom{k}{k}a^{k-k}b^k\right) +$$

$$b\left(\binom{k}{0}a^{k-0}b^0 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}a^{k-(k-1)}b^{(k-1)} + \binom{k}{k}a^{k-k}b^k\right)$$

Por **T7** generalizado obtenemos

$$= \left(\binom{k}{0}a^{k+1-0}b^0 + \binom{k}{1}a^{k+1-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k+1-2}b^2 + \cdots + + \binom{k}{k}a^{k+1-k}b^k + \cdots +\right.$$

$$\binom{k}{k-1}a^{k+1-(k-1)}b^{(k-1)} + \binom{k}{k}a^{k+1-k}b^k + \binom{k}{0}a^{k-0}b^{0+1} + \binom{k}{1}a^{k-1}b^{1+1} + \binom{k}{2}a^{k-2}b^{2+1} + \cdots +$$

$$\binom{k}{k-1}a^{k-(k-1)}b^{(k-1)+1} + \binom{k}{k}a^{k-k}b^{k+1}$$

Operando los exponentes de cada término

$$= \left(\binom{k}{0}a^{k+1}b^0 + \binom{k}{1}a^k b^1 + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}a^2 b^{(k-1)} + \binom{k}{k}a^1 b^k\right) +$$

$$\left(\binom{k}{0}a^k b^1 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \cdots + \binom{k}{k-1}a^1 b^k + \binom{k}{k}a^0 b^{k+1}\right)$$

Utilizando **T3**

$$= \binom{k}{0}a^{k+1}b^0 + \binom{k}{1}a^k b^1 + \binom{k}{0}a^k b^1 \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k}a^1 b^k$$

$$+ \binom{k}{k-1}a^1 b^k + \binom{k}{k}a^0 b^{k+1}$$

Por **T7** generalizado tenemos

$$= \binom{k}{0}a^{k+1}b^0 + \left(\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right)a^k b^1 + \left(\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right)a^{k-1}b^2 + \cdots$$

$$+\left(\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}\right)a^1b^k+\binom{k}{k}a^0b^{k+1}$$

Si asumimos que

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$$

Entonces tenemos:

$$\binom{k}{0}a^{k+1}b^0+\binom{k+1}{1}a^kb^1+\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2+\cdots+\binom{k+1}{k}a^1b^k+\binom{k}{k}a^0b^{k+1}$$

Luego la fórmula es válida para cualquier numero natural *n*.

■

**Teorema 19 (T19):** Para todo $k, i \in \mathbb{N}$, $(2k + 1)^i$ es impar.

*Demostración:*

Vamos a hacer una inducción sobre *i*.

Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo pero arbitrario:

*i.* Vamos a demostrar que se cumple para $i = 0$

$(2k + 1)^0 = 1$ por definición de potenciación y 1 es impar, pues no es divisible por 2.

*ii.* Suponemos que se cumple para $i = n$, es decir

$(2k + 1)^n = 2w + 1$ (Hipótesis de Inducción)

Y debemos demostrar que se cumple para $i = n + 1$, es decir $(2k + 1)^{n+1} = 2j + 1$

Partiendo de

| | |
|---|---|
| $(2k + 1)^{n+1} = (2k + 1)^n (2k + 1)$ | Por **T15** |
| $= (2w + 1)(2k + 1)$ | Utilizando la hipótesis de inducción |
| $= 4wk + 2w + 2k + 1$ | Por **T7** |
| $= 2(2wk + w + k) + 1$ | Por **T7** |

Haciendo $2wk + w + k = j$

| | |
|---|---|
| $(2k + 1)^{n+1} = 2j + 1$ | Por sustitución. |

Entonces $(2k + 1)^i$ es impar

■

**Teorema 20 (T20):** $\forall\, n, k \in \mathbb{N}, n \geq 2, (9k + 6)^n = 9m$

*Demostración:*

*i.* Vamos a demostrar que se cumple para $n = 2$

| | |
|---|---|
| $(9k+6)^2 = (9k+6)(9k+6)$ | Por **T15** |
| $= 3(3k+2)\,3(3k+2)$ | Por **T7** |
| $= 9(3k+2)(3k+2)$ | Por **T8** y **T9** |
| $= 9(3k+2)^2$ | Por definición de potenciación. |

Haciendo, $(3k+2)^2 = u$

Entonces $(9k+6)^2 = 9u$

*ii.* Suponemos que se cumple para $n = j$ es decir

$$(9k+6)^j = 9z$$

Demostramos que se cumple para $n = j + 1$

Partiendo de

| | |
|---|---|
| $(9k+6)^{j+1} = (9k+6)^j(9k+6)$ | Por **T15** |
| $= 9z(9k+6)$ | Utilizando la Hipótesis de Inducción |

Haciendo

$z(9k+6) = v$

| | |
|---|---|
| $(9k+6)^{j+1} = 9v$ | Por sustitución |

Entonces $(9k+6)^n$ es múltiplo de 9, $n \geq 2$

■

**Teorema 21 (T21):** $\forall\, a, b, n \in \mathbb{N}, b < a, a^n - b^n$ es múltiplo de $a - b$.

*Demostración:*

Vamos a hacer inducción sobre *n*.

Sean $a, b \in \mathbb{N}$ fijos pero arbitrarios:

*i.* Vamos a demostrar que se cumple para $n = 0$

$$a^0 - b^0 = 1 - 1 = 0, \text{ y } 0 \text{ es múltiplo de } a - b.$$

*ii.* Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir que existe un número $p \in \mathbb{N}$, de tal manera que $a^k - b^k = (a - b)\,p$. Vamos a demostrar que se cumple para $n = k + 1$:

Partiendo de

| | |
|---|---|
| $a^{k+1} - b^{k+1} = a \cdot a^k - b \cdot b^k$ | Por **T15** |

Como $a > b$, existe $c \in \mathbb{N}$, tal que $a = c + b$. Por tanto,

$a^{k+1} - b^{k+1} = (c + b) \cdot a^k - b \cdot b^k$ por sustitución

$= c \cdot a^k + b \cdot a^k - b \cdot b^k$ por **T7**

$= c \cdot a^k + b(a^k - b^k)$ por **T7** y **T9**

$= c \cdot a^k + b(a - b)p$

Como $c = a - b$, se tiene

$a^{k+1} - b^{k+1} = (a - b)a^k + b(a - b)p$

$= (a - b)(a^k + bp)$

$= (a - b)q$

Donde $q = a^k + bp$.

■

## 2.2. Algunos asuntos de notación

***Primera notación***

El primer asunto de notación que vamos a tratar es sobre la base numérica, en el trabajo se verá la notación $k_{(n)}$, lo que quiere decir que el número $k$ está escrito en base $n$; si el subíndice no aparece quiere decir que el número está escrito en base diez a menos que se indique lo contrario.

***Segunda notación***

Por otro lado, sea $N$ un número escrito en base $n$, de $t + 1$ cifras, tal que $C_t$, $C_{t-1}$,…, $C_2$, $C_1$, $C_0$, son sus cifras, esto es, cada $C_i$, $i \in \mathbb{N}$, representa las cifras del número, $N_{(n)}$ se expresa así:

$$N_{(n)} = \sum_{i=0}^{t} n^i\, C_i = n^t C_t + n^{t-1} C_{t-1} + \cdots + n^1 C_1 + n^0 C_0, \quad 0 \leq C_i < n$$

Lo anterior también implica que $n$ esté escribo en base $n$.

***Tercera notación***

Inicialmente, veamos la siguiente tabla

| **Base cinco ($n$ = 5)** |
|---|
| **10 = 4 + 1**<br>**$10 = 4 \cdot 1 + 1 = 4 \cdot w_1 + 1$, $w_1 = 10^0$** |
| **$10^2 = 44 + 1$**<br>**$10^2 = 4 \cdot 11 + 1 = 4 \cdot w_2 + 1$, $w_2 = 10^0 + 10^1$** |
| **$10^3 = 444 + 1$**<br>**$10^3 = 4 \cdot 111 + 1 = 4 \cdot w_3 + 1$, $w_3 = 10^0 + 10^1 + 10^3$** |

Generalizando a cualquier base $n$ tenemos que:

Sabemos que ${10^k}_{(n)} = (0 \cdot n^0) + (0 \cdot n^1) + (0 \cdot n^2) + \cdots + (1 \cdot n^k)$ en base diez, así que en base n todo número menos que $n$ tiene una sola cifra, luego $n - 1$ es un número de una cifra escrito en base $n$, tenemos que al sumar $n - 1$ con 1, la suma es $n$, pero como $n = 10_{(n)}$, no se puede escribir este resultado en una sola posición, en este caso, la de las unidades, pues esto equivale a $0 \cdot n^0 + (1 \cdot n^1)$; lo cual implica que tenemos 0 en la posición de las unidades; esto es $0 \cdot n^0$ y $(1 \cdot n^1)$ se debe sumar con $(n - 1) \cdot n^1$, pero ahora la suma es $100_{(n)}$; queda entonces 0 en la posición de los grupos de $n$ y debemos sumar $(1 \cdot n^2)$ con $((n - 1) \cdot n^2$, obteniendo $1000_{(n)}$; similarmente sucede con las demás posiciones, hasta obtener:

$${10^k}_{(n)} = (0 \cdot n^0) + (0 \cdot n^1) + (0 \cdot n^2) + \cdots + (1 \cdot n^k)$$

Así aplicando **T7**

$$= (n - 1)(n^0 + n^1 + n^2 + \cdots + n^{k-1}) + 1$$

$$= [(n - 1) \cdot n^0 + (n - 1) \cdot n^1 + (n - 1) \cdot n^2 + \cdots + (n - 1) \cdot n^{k-1}] + 1$$

$$= (n - 1) + (n - 1) \cdot n + (n - 1) \cdot n^2 + \cdots + (n - 1) \cdot n^{k-1}] + 1$$

Ahora, aplicando **T7** nuevamente tenemos que:

$$10^k{}_{(n)} = (n-1)(n^0 + n^1 + n^2 + \cdots + n^{k-1})$$

Donde tomamos $w_k = (n^0 + n^1 + n^2 + \cdots + n^{k-1})$, donde $w_k$ implica que este depende de la potencia k – ésima a la que se eleve el número. Luego:

*Cualquier potencia k – ésima de* $10^k{}_{(n)}$ *se puede escribir como* $(n-1)w_k + 1$ *donde* $w_k = 10^0{}_{(n)} + 10^1{}_{(n)} + 10^2{}_{(n)} + \ldots + 10^{k-1}{}_{(n)}$.

**Teorema 22(T22):** Cualquier potencia *n – ésima* de $10_{(n)}$ con $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ es múltiplo de 4, es decir,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, n \geq 2,\, 10^n = 4m$$

*Demostración:*

Tenemos por **T15** que $10^n = 10^2\, 10^{n-2}$, como $10^2$ es múltiplo de 4, entonces $10^n = 4k\, 10^{n-2} = 4w$.

■

***Teorema* 23 (T23):** $n^{2k}{}_{(n)} - 1, n \geq 2$, es múltiplo de $(n+1)$.

Primero veamos algunos ejemplos en esta tabla:

| *k* | n = 2 | n = 3 | … | n =10 |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $10^{10} - 1 = 100 - 1 = 11$ | $10^2 - 1 = 100 - 1 = 11$ | | $10^2 - 1 = 100 - 1 = 99 = 11\,(9)$ |
| **2** | $10^{100} - 1 = 10000 - 1$<br>$= 1111 = 11(101)$ | $10^{11} - 1 = 10000 - 1$<br>$= 2222 = 11(202)$ | | $10^4 - 1 = 10000 - 1$<br>$= 9999 = 11(909)$ |
| **3** | $10^{110} - 1 = 1000000 - 1$<br>$= 111111 = 11(10101)$ | $10^{20} - 1 = 1000000 - 1$<br>$= 222222 = 11(20202)$ | | $10^6 - 1 = 1000000 - 1$<br>$= 999999 = 11(90909)$ |

*Demostración*:

Sea *n* fijo pero arbitrario hacemos inducción sobre *k*.

*i.* Vamos a demostrar que se cumple para $k = 0$.

$$n^0{}_{(n)} - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ y } 0 \text{ es múltiplo de } (n+1)$$

*ii.* Suponemos que se cumple para $k = m$. Demostramos que se cumple para $k = m + 1$, es decir

$$n^{2(m+1)}{}_{(n)} - 1 = (n+1)q$$

Partiendo de

$$n^{2(m+1)_{(n)}} - 1 = n^{2m+2_{(n)}} - 1 \qquad \text{Por } \mathbf{T7}$$
$$= n^{2m_{(n)}} n^{2_{(n)}} - 1 \qquad \text{Por } \mathbf{T15}$$
$$= ((n+1)w+1)n^{2_{(n)}} - 1 \qquad \text{Por hipótesis de inducción.}$$
$$= (n+1)wn^{2_{(n)}} + n^{2_{(n)}} - 1 \qquad \text{Por } \mathbf{T7}$$

Como $n^{2_{(n)}} - 1 = n^2 - 1$, porque $n \geq 2$, entonces $n^{2_{(n)}} - 1 = (n-1)(n+1)$, y $n + 1 = (n + 1)$, por tanto $n^{2_{(n)}} - 1 = (n+1)p$, entonces

$$n^{2(m+1)_{(n)}} - 1 = (n+1)r + (n+1)p = (n+1)g$$

Luego $n^{2(m+1)_{(n)}} - 1 = (n+1)q$.

■

***Teorema* 24 (T24):** $n^{2k+1_{(n)}} + 1$ es múltiplo de $(n + 1)$.

Primero veamos algunos ejemplos en esta tabla:

| *k* | n = 2 | n = 3 | … | n =10 |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $10^{11} + 1 = 1001 = 11 \cdot 11$ | $10^{10} + 1 = 1001 = 11 \cdot 21$ | | $10^{3} + 1 = 1001 = 11 \cdot 91$ |
| **2** | $10^{101} + 1 = 100000+1$ <br> $= 100001 = 11(1011)$ | $10^{12} + 1 = 100000 + 1$ <br> $= 100001 = 11(2021)$ | | $10^{5} + 1 = 100000+1$ <br> $= 100001 = 11(9091)$ |

*Demostración*:

Sea *n* fijo pero arbitrario hacemos inducción sobre *k*.

*i.* Vamos a demostrar que se cumple para $k = 0$.

$$n^{1_{(n)}} + 1 = n + 1 \text{ y } (n + 1) \text{ es múltiplo de } (n + 1)$$

*ii.* Suponemos que se cumple para $k = m$. Demostramos que se cumple para $k = m + 1$, es decir

$$n^{2(m+1)+1_{(n)}} + 1 = (n+1)q$$

Partiendo de

$$n^{2(m+1)+1_{(n)}} + 1 = n^{2(m+1)_{(n)}} n^{1_{(n)}} + 1 \qquad \text{Por } \mathbf{T7} \text{ y } \mathbf{T15}$$
$$= (n+1)p\,(n^{1_{(n)}} + 1) \qquad \text{Por hipótesis de inducción}$$
$$= (n+1)p\,(n+1) \qquad \text{Por } \mathbf{T14}$$

Luego $n^{2(m+1)+1_{(n)}} + 1 = (n+1)q$.

■

## 2.3. Algunos criterios tradicionales en base diez

**Divisibilidad por 2:**

Un número $N$ es divisible por 2 si y solo si la cifra de las unidades de $N$ es par (0, 2, 4, 6 y 8).

*Demostración*

$\Leftarrow$ Sea

$$N = \sum_{\mathrm{i}=0}^{n} 10^{\mathrm{i}}\, \mathrm{C}_{\mathrm{i}} = 10^{n}\mathrm{C}_{n} + 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 10^{2}\mathrm{C}_{2} + 10^{1}\mathrm{C}_{1} + 10^{0}\mathrm{C}_{0},\ \mathrm{i} \in \mathbb{N}$$

Dado que $\mathrm{C}_0$ es par tenemos que $\mathrm{C}_0 = 2k$, donde $k = 0, 1, 2, 3$ o $4$.

Tenemos que

$$N = 10^{n}\mathrm{C}_{n} + 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 10^{2}\mathrm{C}_{2} + 10^{1}\mathrm{C}_{1} + 2k$$

Recordemos que $10 = 5 \cdot 2$, entonces sustituyendo esto en la expresión anterior, se tiene

$$N = (2 \cdot 5)^{n}\mathrm{C}_{n} + (2 \cdot 5)^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + (2 \cdot 5)^{2}\mathrm{C}_{2} + (2 \cdot 5)^{1}\mathrm{C}_{1} + 2k$$

Utilizando **T7**

$$N = 2[(2^{n-1}5^{n})C_{n} + (2^{n-2}5^{n-1})\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + (2 \cdot 5^{2})\mathrm{C}_{2} + 5\mathrm{C}_{1} + w]$$

Donde

$$k = (2^{n-1}5^{n})\mathrm{C}_{n} + (2^{n-2}5^{n-1})\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + (2 \cdot 5^{2})\mathrm{C}_{2} + 5\mathrm{C}_{1} + w$$

Por tanto $N = 2k$ cuando la última cifra es par, por tanto $N$ es divisible por 2.

$\Rightarrow$ Por hipótesis tenemos que $N = 2v$

Por notación 2, $v$ se puede expresar como

$$v = 10^{n}\mathrm{C}_{n} + 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 10^{2}\mathrm{C}_{2} + 10^{1}\mathrm{C}_{1} + 10^{0}\mathrm{C}_{0}$$

Sustituyendo esto en la expresión anterior, se tiene

$$N = 2v = 2(10^n \mathrm{C}_n + 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 10^2\mathrm{C}_2 + 10^1\mathrm{C}_1 + 10^0\mathrm{C}_0)$$

Utilizando **T7**

$$N = 2 \cdot 10^n \mathrm{C}_n + 2 \cdot 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 2 \cdot 10^2\mathrm{C}_2 + 2 \cdot 10^1\mathrm{C}_1 + 2 \cdot 10^0\mathrm{C}_0$$

Luego concluimos que la cifra de las unidades es par por definición de número par.

■

**Divisibilidad por 3:**

Un número *N* es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

*Demostración:*

⇐ Sea

$$N = 10^n \mathrm{C}_n + 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 10^2\mathrm{C}_2 + 10^1\mathrm{C}_1 + 10^0\mathrm{C}_0$$

Utilizando la notación 3, tenemos que $10^n = w_n + 1$. Donde $w_n = 10^0 + 10^1 + \ldots + 10^{n-1}$. Pero $9 = 3 \cdot 3$, así que $10^n = 3(3w_n) + 1$. Esto es $10^n = 3x_n + 1$, donde $3w_n = x_n$

Luego

$$N = (3x_n + 1)\mathrm{C}_n + (3x_{n-1} + 1)\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + (3x_2 + 1)\mathrm{C}_2 + (3x_1 + 1)\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_0$$

Utilizando **T7**

$$N = 3x_n\mathrm{C}_n + \mathrm{C}_n + 3x_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 3x_2\mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_2 + 3x_1\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_1$$

Aplicando **T2**

$$N = 3x_n\mathrm{C}_n + 3x_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 3x_2\mathrm{C}_2 + 3x_1\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_n + \mathrm{C}_{n-1} + \cdots + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_0$$

Por hipótesis se tiene que $\mathrm{C}_n + \mathrm{C}_{n-1} + \ldots + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_0$ es múltiplo de 3, entonces tenemos que $\mathrm{C}_n + \mathrm{C}_{n-1} + \ldots + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_0 = 3w$ donde *w* es un natural cualquiera.

Entonces tenemos que

$$N = 3x_n\mathrm{C}_n + 3x_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 3x_2\mathrm{C}_2 + 3x_1\mathrm{C}_1 + 3w$$

Por **T7**, tenemos

$$N = 3[x_n\mathrm{C}_n + x_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + x_2\mathrm{C}_2 + x_1\mathrm{C}_1 + w]$$

Donde

$$j = x_n\mathrm{C}_n + x_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + x_2\mathrm{C}_2 + x_1\mathrm{C}_1 + w$$

Luego $N = 3j$ de esta forma obtenemos que $N$ es múltiplo de 3.

$\Leftarrow$ Por hipótesis tenemos

$$N = 3j = 10^n\mathrm{C}_n + 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 10^2\mathrm{C}_2 + 10^1\mathrm{C}_1 + 10^0\mathrm{C}_0$$

Por notación 3, tenemos que $10^n = w_n + 1$. Donde $w_n = 10^0 + 10^1 + \ldots + 10^{n-1}$. Pero $9 = 3\cdot 3$, así que $10^n = 3(3w_n) + 1$. Esto es $10^n = 3x_n + 1$, donde $3w_n = x_n$, entonces sustituyendo tenemos

$$N = 3j = (3x_n + 1)\mathrm{C}_n + (3x_{n-1} + 1)\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + (3x_2 + 1)\mathrm{C}_2 + (3x_1 + 1)\mathrm{C}_1 + (3x_0 + 1)\mathrm{C}_0$$

Por **T7**, tenemos

$$N = 3j = (3x_n\mathrm{C}_n + \mathrm{C}_n) + (3x_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \mathrm{C}_{n-1}) + \cdots + (3x_2\mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_2) + (3x_1\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_1) + (3x_0\mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_0)$$

Aplicando **T2** y **T3**:

$$N = 3j = 3x_n\mathrm{C}_n + 3x_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 3x_2\mathrm{C}_2 + 3x_1\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_n + \mathrm{C}_{n-1} + \cdots + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_0$$

$$N = 3j = 3(x_n\mathrm{C}_n + x_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + x_2\mathrm{C}_2 + x_1\mathrm{C}_1) + (\mathrm{C}_n + \mathrm{C}_{n-1} + \cdots + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_0)$$

Entonces para que se de esta condición $\mathrm{C}_n + \mathrm{C}_{n-1} + \cdots + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_0$ debe ser múltiplo de 3.

$\blacksquare$

**Divisibilidad por 4:**

Un número $N$ es divisible por 4 si y solo si el número formado por las cifras de las unidades y las decenas de $N$ es divisible por 4.

*Demostración:*

⇐ Sea

$$N = 10^n C_n + 10^{n-1} C_{n-1} + \cdots + 10^2 C_2 + 10^1 C_1 + 10^0 C_0$$

Si las cifras de las unidades y las decenas de $N$ son divisibles por 4, significa que $10^1 C_1 + 10 C_0 = 4k$. Con esto,

$$N = 10^n C_n + 10^{n-1} C_{n-1} + \cdots + 10^2 C_2 + 4k$$

Además, por **T22** toda potencia n – ésima de 10, con $n > 2$, es múltiplo de 4, luego

$$N = 4mC_n + 4tC_{n-1} + \cdots + 4sC_2 + 4k$$

Y por **T7**

$$N = 4(mC_n + tC_{n-1} + \cdots + sC_2 + k)$$

Por tanto, $N$ es divisible por 4.

⇒ Sea $N = 4z$

Por notación 2, $z$ se puede expresar como

$$z = 10^n \mathrm{C}_n + 10^{n-1} \mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 10^2 \mathrm{C}_2 + 10^1 \mathrm{C}_1 + 10^0 \mathrm{C}_0$$

Sustituyendo esto en la expresión anterior, se tiene

$$N = 4z = 4(10^n \mathrm{C}_n + 10^{n-1} \mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 10^2 \mathrm{C}_2 + 10^1 \mathrm{C}_1 + 10^0 \mathrm{C}_0)$$

Aplicado **T7**

$$N = 4z = 4 \cdot 10^n \mathrm{C}_n + 4 \cdot 10^{n-1} \mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 4 \cdot 10^2 \mathrm{C}_2 + 4 \cdot 10^1 \mathrm{C}_1 + 4 \cdot 10^0 \mathrm{C}_0$$

Si hacemos

$$w = 4 \cdot 10^1 \mathrm{C}_1 + 4 \cdot 10^0 \mathrm{C}_0$$

Aplicado **T7** obtenemos

$$w = 4(10^1 \mathrm{C}_1 + 10^0 \mathrm{C}_0)$$

Concluimos que el número formado por las cifras de las unidades y las decenas de *N* es múltiplo de 4.

■

**Divisibilidad por 5:**

Un número *N* es divisible por 5 si y solo si la cifra de las unidades de *N* es múltiplo de 5.

*Demostración:*

⇐ Sea

$$N = 10^n \mathrm{C}_n + 10^{n-1} \mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 10^2 \mathrm{C}_2 + 10^1 \mathrm{C}_1 + 10^0 \mathrm{C}_0$$

Si $C_o = 5p$

$$N = (2 \cdot 5)^n C_n + (2 \cdot 5)^{n-1} C_{n-1} + \cdots + (2 \cdot 5)^2 C_2 + (2 \cdot 5)^1 C_1 + p$$

Por **T7** tenemos que

$$N = 5[(2^n 5^{n-1}) C_n + (2^{n-1} 5^{n-2}) C_{n-1} + \cdots + (2^2 \cdot 5) C_2 + 2C_1 + p]$$

Luego si

$$k = (2^n 5^{n-1}) C_n + (2^{n-1} 5^{n-2}) C_{n-1} + \cdots + (2^2 \cdot 5) C_2 + 2C_1 + p$$

Tenemos que $N = 5k$, luego *N* es múltiplo de 5.

⇒ Por hipótesis tenemos que $N = 5z$

Por notación 2, *z* se puede expresar como

$$z = 10^n \mathrm{C}_n + 10^{n-1} \mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 10^2 \mathrm{C}_2 + 10^1 \mathrm{C}_1 + 10^0 \mathrm{C}_0$$

Sustituyendo esto en la expresión anterior, se tiene

$$N = 5z = 5(10^n C_n + 10^{n-1} C_{n-1} + \cdots + 10^2 C_2 + 10^1 C_1 + 10^0 C_0)$$

Utilizando **T7**

$$N = 5 \cdot 10^n C_n + 5 \cdot 10^{n-1} C_{n-1} + \cdots + 5 \cdot 10^2 C_2 + 5 \cdot 10^1 C_1 + 5 \cdot 10^0 C_0$$

Como la cifra de las unidades de $N$ es $m = 5 \cdot 10^0 C_0$ por definición de potenciación tenemos que $m = 5 \cdot 1 C_0 = 5\, C_0$ luego para que $5C_0$ es la cifra de las unidades y es múltiplo de 5.

■

**Divisibilidad por 6:**

Un número $N$ es divisible por 6 si y solo si es divisible por 2 y por 3.

Demostración:

$\leftarrow$ Inicialmente tenemos que $2|a$ y $3|a$, por definición de divisibilidad tenemos que $a = 2p$ y $a = 3m$, multiplicando por 3 la primer igualdad y por 2 la segunda tenemos $3a = 6p$ y $2a = 6m$, ahora, sin pérdida de generalidad hacemos la diferencia del número mayor menos el números menos, así que hacemos $6p - 6m = 3a - 2a$, por **T11** $6(p - m) = a$, luego $6|a$.
$\rightarrow$ Tenemos $6|a$, y sabemos que $2|6$ y $3|6$, por propiedad transitiva se tiene que $2|a$ y $3|a$.

■

**Divisibilidad por 7:**

Un número $N$ es divisible por 7 si y solo si la diferencia[25] entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de tal cifra es múltiplo de 7.

*Demostración:*

$\leftarrow$Sea

$$N = 10^n C_n + 10^{n-1} C_{n-1} + \cdots + 10^2 C_2 + 10^1 C_1 + 10^0 C_0,\ n \in \mathbb{N}$$

[25] En este caso la diferencia se realizará restando el mayor número del menor.

Sea $M$ un número de $n$ cifras de base de diez que resulta de eliminar $C_o$ de $N$, esto es:

$$M = 10^{n-1}C_n + 10^{n-2}C_{n-1} + \cdots + 10C_2 + C_1$$

Tenemos que:

$$N = 10M + C_0 \ (1)$$

Sin pérdida de generalidad se toma para la demostración la resta del mayor número menos el menor, Por hipótesis $M$ - $2C_0 = 7k$, luego por relaciones entre adición y sustracción tenemos que $M = 7k + 2C_0$, sustituyendo esto en (1) obtenemos:

$$N = 10(7k+ 2C_0) + C_0$$

Luego $N = 70k + 20C_0 + C_0$ lo cual, utilizando las propiedades distributiva de la multiplicación respecto a la adición y asociativa de la adición, puede escribirse como:

$$N = 70k + 21C_0,$$

Y esto a su vez lo podemos escribir así:

$$N = 7(10k + 3C_0).$$

Si $n$ es impar el razonamiento es análogo. Por lo tanto, concluimos que $N$ es múltiplo de 7.

$\Leftarrow$ Por hipótesis tenemos que $N = 7w$

Por notación 2, $w$ se puede expresar como

$$w = 10^n\mathrm{C}_n + 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 10^2\mathrm{C}_2 + 10^1\mathrm{C}_1 + 10^0\mathrm{C}_0$$

Sustituyendo esto en la expresión anterior, se tiene

$$N = 7w = 7(10^n\mathrm{C}_n + 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 10^2\mathrm{C}_2 + 10^1\mathrm{C}_1 + 10^0\mathrm{C}_0)$$

Utilizando **T7**

$$N = 7 \cdot 10^n\mathrm{C}_n + 7 \cdot 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 7 \cdot 10^2\mathrm{C}_2 + 7 \cdot 10^1\mathrm{C}_1 + 7 \cdot 10^0\mathrm{C}_0$$

Ahora si hacemos que un número $M$ sea la diferencia entre el número $N$ sin la cifra de las unidades y el doble de tal cifra, entonces

$$M = 7 \cdot 10^n\mathrm{C}_n + 7 \cdot 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 7 \cdot 10^2\mathrm{C}_2 + 7 \cdot 10^1\mathrm{C}_1 - 2 \cdot 7 \cdot 10^0\mathrm{C}_0$$

Aplicando **T7** tenemos

$$M = 7(10^{n}C_{n} + 10^{n-1}C_{n-1} + \cdots + 10^{2}C_{2} + 10^{1}C_{1} - 2 \cdot 10^{0}C_{0})$$

Con esto concluimos que *M* es divisible por 7

■

**Divisibilidad por 10:**

Un número *N* es divisible por 10 si y solo si la cifra de las unidades es cero.

*Demostración:*

⇐ Sea $N = 10^{n}C_{n} + 10^{n-1}C_{n-1} + \cdots + 10^{2}C_{2} + 10^{1}C_{1} + 10^{0}C_{0}$ y $C_0 = 0$.

Entonces

$$N = 10^{n}C_{n} + 10^{n-1}C_{n-1} + \cdots + 10^{2}C_{2} + 10^{1}C_{1}$$

$$N = 10\ (10^{n-1}C_{n} + 10^{n-2}C_{n-1} + \cdots + 10^{1}C_{2} + 10^{0}C_{1}) = 10m$$

Luego *N* es múltiplo de 10

⇐ Por hipótesis tenemos $N = 10m$

Sea

$$m = 10^{n-1}C_{n} + 10^{n-2}C_{n-1} + \cdots + 10^{1}C_{2} + 10^{0}C_{1}$$

Entonces

$$N = 10m = 10(10^{n-1}C_{n} + 10^{n-2}C_{n-1} + \cdots + 10^{1}C_{2} + 10^{0}C_{1})$$

Aplicando **T7** tenemos

$$N = 10^{n}C_{n} + 10^{n-1}C_{n-1} + \cdots + 10^{2}C_{2} + 10^{1}C_{1}$$

Luego $C_0 = 0$.

■

**Divisibilidad por 11:**

Un número $N$ es divisible por 11 si y solo si la diferencia entre la suma de las cifras de posición par y la suma de las cifras de posición impar es un múltiplo de 11.

*Demostración:*

Sea

$$N = 10^n C_n + 10^{n-1} C_{n-1} + \cdots + 10^2 C_2 + 10^1 C_1 + 10^0 C_0$$

Sea

$$N = 10^n C_n + 10^{n-1} C_{n-1} + \cdots + 10^2 C_2 + 10^1 C_1 + 10^0 C_0$$

Si $n$ es par

Sin pérdida de generalidad tomamos la diferencia de número mayor menos el número menor, por hipótesis tenemos que:

$$(C_n + \cdots + C_2 + C_0) - (C_{n-1} + \cdots + C_3 + C_1) = 11m$$

Multiplicando lo anterior por $10^n$, se tiene

$$10^n(C_n + \cdots + C_4 + C_2 + C_0) - 10^n(C_{n-1} + \cdots + C_5 + C_3 + C_1) = 11m \cdot 10^n$$

Aplicando **T7** tenemos:

$$10^n C_n + \cdots + 10^n C_4 + 10^n C_2 + 10^n C_0 - 10^n C_1 - \cdots - 10^n C_3 - 10^n C_5 - 10^n C_{n-1} = 11m \cdot 10^n$$

Ahora, sumando y restando cero convenientemente, es decir,

$$C_n 10^n + C_{n-2} 10^n - C_{n-2} 10^{n-2} + C_{n-2} 10^{n-2} + \cdots + C_4 10^n - C_4 10^4 + 10^4 C_4 + C_2 10^n - C_2 10^2 + 10^2 C_2$$

$$+ C_0 10^n - C_0 10^0 + 10^0 C_0 - C_{n-1} 10^n - C_{n-1} 10^{n-1} + 10^{n-1} C_{n-1} - \cdots - C_5 10^n - C_5 10^5 + 10^5 C_5 - C_3 10^n$$

$$- C_3 10^3 + 10^3 C_3 - C_1 10^n - C_1 10^1 + 10^1 C_1 = 11m \cdot 10^n$$

Y aplicando **T1**, **T4**, **T7**, **T9, T2, T11** y relaciones entre adición y multiplicación tenemos

$$(C_n 10^n) + (C_{n-2}(10^n - 10^{n-2})) + \cdots + C_4(10^n - 10^4) \;+\; C_2(10^n - 10^2) + \; C_0(10^n - 10^0)$$

$$- C_{n-1}(10^n + 10^{n-1}) - \cdots - \; C_5(10^n + 10^5) - \; C_3(10^n + 10^3) - \; C_1(10^n + 10^1) + 10^{n-2}C_{n-2}$$

$$+ \cdots + \; 10^4 C_4 + 10^2 C_2 + 10^0 C_0 + \; 10^{n-1}C_{n-1} + \cdots + \; 10^5 C_5 + 10^3 C_3 + 10^1 C_1 = \; 11m \; \cdot 10^n$$

Utilizando **T3**, **T4**, **T7** y **T11**

$$10^n C_n + 10^{n-1}C_{n-1} + 10^{n-2}C_{n-2} + \ldots + \; 10^5 C_5 + 10^4 C_4 + 10^3 C_3 + 10^2 C_2 + 10^1 C_1 + 10^0 C_0$$

$$-C_{n-1}10^{n-1}(10^1 + 1) + (C_{n-2}10^{n-2}(10^2 - 1)) + \cdots - (C_5 10^5(10^{n-5} + 1)) + (C_4 10^4(10^n - 1)$$

$$-(C_3(10^{n-3} + 1) + \; (C_2 10^2(10^{n-2} - 1) \; - (C_1 10^1(10^{n-1} + 1) \; + \; C_0(10^n - 10^0) = 11m \; \cdot 10^n$$

Por el **T23** y **T24**, se tiene que $10^{2k} - \; 1 = \; 11$e, y que $10^{2k+1} \; + \; 1 = \; 11w$, así utilizando **T7**

$$N = 11eg - 11wf = 11m10^n$$

De donde

$N = 11m10^n + 11wf - 11eg = 11z$ debe ser múltiplo de 11 por propiedades de divisibilidad.

Si *n* es impar el razonamiento es análogo. Luego es divisible por 11.

■

***Divisibilidad por* 13:**

Un número *N* es divisible por 13 si y solo si al multiplicar la cifra de las unidades por 9 y restar[26] esta cantidad al número que resulta de quitar la cifra de las unidades el resultado es un múltiplo de 13.

*Demostración:*

⇐ Sea

$$N = 10^n C_n + 10^{n-1}C_{n-1} + \cdots + 10^2 C_2 + 10^1 C_1 + 10^0 C_0$$

Sea *M* el número de *n* cifras de base de diez que resulta de eliminar $C_0$ de *N*

$$M = 10^{n-1}C_n + 10^{n-2}C_{n-1} + \cdots + 10C_2 + C_1$$

[26] En este caso la diferencia se realizará restando el mayor número del menor.

Luego podemos establecer la igualdad:

$$N = 10M + C_0 \ (2)$$

Sin pérdida de generalidad para la demostración hacemos la resta del mayor número menos el mayor, por hipótesis tenemos $M - 9C_0 = 13k$ (de acuerdo con la hipótesis) y las relaciones entre adición y sustracción, tenemos que $M = 9C_0 + 13k$, sustituyendo en (2) se tiene que:

$$N = 10(9C_0 + 13k) + C_0$$

$$N = 91C_0 + 130k$$

$$N = 13\ (7C_0 + 10k)$$

Obtenemos que $N$ es múltiplo de 13 puesto que puede escribirse como $N = 13k$.

$\leftarrow$ Por hipótesis tenemos que $N = 13w$

Por notación 2, $w$ se puede expresar como

$$w = 10^n \mathrm{C}_n + 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 10^2\mathrm{C}_2 + 10^1\mathrm{C}_1 + 10^0\mathrm{C}_0$$

Sustituyendo esto en la expresión anterior, se tiene

$$N = 13w = 13(10^n \mathrm{C}_n + 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 10^2\mathrm{C}_2 + 10^1\mathrm{C}_1 + 10^0\mathrm{C}_0)$$

Utilizando **T7**

$$N = 13 \cdot 10^n \mathrm{C}_n + 13 \cdot 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 13 \cdot 10^2\mathrm{C}_2 + 13 \cdot 10^1\mathrm{C}_1 + 13 \cdot 10^0\mathrm{C}_0$$

Ahora, si hacemos que $M$ sea un número que resulte de multiplicar la cifra de las unidades por 9 y restar esta cantidad al número que resulta de quitar la cifra de las unidades, entonces

$$M = 13 \cdot 10^n \mathrm{C}_n + 13 \cdot 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 13 \cdot 10^2\mathrm{C}_2 + 13 \cdot 10^1\mathrm{C}_1 - 9 \cdot 13 \cdot 10^0\mathrm{C}_0$$

Aplicando **T7** tenemos

$$M = 13(10^n \mathrm{C}_n + 10^{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + \cdots + 10^2\mathrm{C}_2 + 10^1\mathrm{C}_1 - 9 \cdot 10^0\mathrm{C}_0)$$

Se concluye que $M$ es divisible por 13

■

# Capítulo 3: Algunos criterios de divisibilidad en diferentes bases

A continuación se presentan los criterios hallados en bases diferentes a la base 10, hay algunos criterios que son más generales que otros.

## 3.1. Múltiplos de *n* en base *n*.

En cualquier base *n*, un número es divisible por *n* si y solo si la cifra de las unidades es cero.

Ejemplos:

- En base 4, los números $330_{(4)}$, $321220_{(4)}$ son divisibles por $4_{(4)}$, pues $10_{(4)} \cdot 33_{(4)} = 330_{(4)}$ y $10_{(4)} \cdot 32122_{(4)} = 321220_{(4)}$.
- En base 5, los números $43120_{(5)}$, $333240_{(5)}$ son divisibles por 5. pues $10_{(5)} \cdot 4312_{(5)} = 43120_{(5)}$ y $10_{(5)} \cdot 33324_{(5)} = 333240_{(5)}$.
- En base 10, los números $18730_{(10)}$, $10000_{(10)}$ son divisibles por 10, pues la cifra de las unidades es cero, como se demostró en capitulo anterior.

*Demostración:*

$\Leftarrow$ Sea:

$$N_{(n)} = n^t C_t + n^{t-1} C_{t-1} + \cdots + n^2 C_2 + n^1 C_1 + n^0 C_0 \quad \text{(Por la notación 2)}$$

Como la cifra de las unidades de $N_{(n)}$ es cero, esto es $C_0 = 0$; entonces:

$$N_{(n)} = n^t C_t + n^{t-1} C_{t-1} + \cdots + n^2 C_2 + n^1 C_1$$

Y aplicando **T7**, se tiene:

$$N_{(n)} = n[n^{t-1} C_t + n^{t-2} C_{t-1} + \cdots + n C_2 + C_1]$$

Y haciendo

$$w = n^{t-1} C_t + n^{t-2} C_{t-1} + \cdots + n C_2 + C_1$$

$N_{(n)} = nw$, por tanto $N_{(n)}$ es divisible por *n*.

⇀ Por hipótesis tenemos que $N_{(n)} = nw$

Sea

$$w = n^{t-1}C_t + n^{t-2}C_{t-1} + \cdots + nC_2 + C_1$$

Sustituyendo $w$ en la expresión anterior, se tiene

$$N = nw = n(n^{t-1}C_t + n^{t-2}C_{t-1} + \cdots + nC_2 + C_1)$$

Utilizando **T7**

$$N = nw = n^tC_t + n^{t-1}C_{t-1} + \cdots + n^2C_2 + nC_1$$

Se concluye que $C_0 = 0$

■

## 3.2. Múltiplos de *n* – 1 en base *n*

En cualquier base $n$ un número es divisible por $n-1$ si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de $n-1$.

Ejemplos:

En base 10, los números 456372, 12609, 450, 81045, 711 son divisibles por 9 como a continuación se observa, la suma[27] de los dígitos en cada número es múltiplo de 9, pues respectivamente son:

4 + 5 + 6 + 3 + 7 + 2 = 27, 1 + 2 + 6 + 0 + 9 = 18, 4 + 5 + 0 = 9 y 8 + 1 + 0 + 4 + 5 = 18.

En base 4, los números $203211_{(4)}$, $133010202_{(4)}$ y $100100210100_{(4)}$ son divisibles por $3_{(4)}$, como se observa la suma de las cifras de cada número es $21_{(4)}$, $30_{(4)}$, $12_{(4)}$, respectivamente y dichos números son múltiplos de $3_{(4)}$, pues $3_{(4)} \cdot 23313_{(4)} = 203211_{(4)}$, $3_{(4)} \cdot 22112312_{(4)} = 133010202_{(4)}$ y $3_{(4)} \cdot 11122312300_{(4)} = 100100210100_{(4)}$

[27] Este resultado ya era conocido desde Fibonacci

*Demostración:*

Sea

$$N_{(n)} = n^t C_t + n^{t-1} C_{t-1} + \cdots + n^1 C_1 + n^0 C_0 \qquad (1)$$

Entonces, utilizando la notación 3:[28]

$$N_{(n)} = \big((n-1)w_t + 1\big)C_t + \big((n-1)w_{t-1} + 1\big)C_{t-1} + \cdots + \big((n-1)w_2 + 1\big)C_2 + \big((n-1)w_1 + 1\big)C_1 + C_0$$

De donde:

$$N_{(n)} = (n-1)w_t C_t + C_t + (n-1)w_{t-1}C_{t-1} + C_{t-1} + \cdots + (n-1)w_2 C_2 + C_2 + (n-1)w_1 C_1 + C_1$$

Aplicando **T2** y **T3**

$$N_{(n)} = (n-1)w_t C_t + (n-1)w_{t-1}C_{t-1} + \cdots + (n-1)w_2 C_2 + (n-1)w_1 C_1 + C_t + C_{t-1} + \cdots + C_2 + C_1 + C_0$$

Como la suma de las cifras de $N_{(n)}$ es múltiplo de $n – 1$, tenemos que

$C_t + C_{t-1} + \ldots + C_2 + C_1 + C_0 = (n–1)m$, donde $m$ es un número natural cualquiera. Así:

$$N_{(n)} = (n-1)[w_t C_t + w_{t-1}C_{t-1} + \cdots + w_2 C_2 + w_1 C_1 + m]$$

Donde podemos decir que $N_{(n)}$ es múltiplo de $n – 1$, por tanto es divisible por este.

■

[28] $10^k_{(n)}$ se puede escribir como $(n-1)w_k + 1$ donde $w_k = 10^0_{(n)} + 10^1_{(n)} + 10^2_{(n)} + \ldots + 10^{k-1}_{(n)}$.

## 3.3. Múltiplos de *n* + 1 en base *n*

### 3.3.1. Primer criterio

En cualquier base *n* un número *N*, esto es $N_{(n)}$, es divisible por *n* + 1 si y solo si la suma entre el número conformado por las cifras de $N_{(n)}$ excepto la de las unidades y el producto resultante de multiplicar la última cifra de $N_{(n)}$ por *n* es múltiplo de *n* + 1.

Por ejemplo, en base 10 el número 57904 es divisible por 11, pues al multiplicar la última cifra por 10, tenemos 40, este resultado se suma al número 5790, obteniendo 5830. Aún no se sabe si este número es divisible por 11, así que se repite el proceso con el número 5830, luego de multiplicar 0 por 10 tenemos 0 y sumando este resultado al número 583 de donde se tiene como 583, finalmente hacemos el mismo proceso con el número 583, multiplicamos 3 por 10 tenemos 30 y sumando este resultado al número 58 tenemos 88 y ya se sabe que 88 es divisible por 11, por tanto el número 57904 es divisible por 11.

En base 7, el número $21131_{(7)}$ es divisible por $11_{(7)}$, ya que al multiplicar la última cifra por 10 y sumando este resultado a $2113_{(7)}$ se obtiene como resultado$2123_{(7)}$, se realiza el procedimiento nuevamente obteniendo como resultado $242_{(7)}$, aún no se sabe si este número es divisible por $11_{(7)}$, entonces se realiza lo mismo, donde finalmente se obtiene $44_{(7)}$, y se sabe que $44_{(7)}$ es divisible por $11_{(7)}$.

*Demostración*

← Por hipótesis tenemos

$$nC_0 + n^0C_1 + n^1C_2 \dots + n^{t-2}C_{t-1} + n^{t-1}C_t = (n+1)w$$

Multiplicando por *n* a ambos lados de la igualdad

$$n^2C_0 + n^1C_1 + n^2C_2 \dots + n^{t-1}C_{t-1} + n^tC_t = n(n+1)w$$

Sumando $n^0C_0$ y restando $n^0C_0$ al lado izquierdo de la igualdad y utilizando **T3** y **T4** tenemos

$$n^2C_0 - n^0C_0 + n^0C_0 + n^1C_1 + n^2C_2 \dots + n^{t-1}C_{t-1} + n^tC_t = n(n+1)w$$

$$[n^2C_0 - n^0C_0] + [n^0C_0 + n^1C_1 + n^2C_2 \dots + n^{t-1}C_{t-1} + n^tC_t] = n(n+1)w$$

Ahora utilizando **T7**

$$n^0C_0[n^2 - 1] + [n^0C_0 + n^1C_1 + n^2C_2 \dots + n^{t-1}C_{t-1} + n^tC_t] = n(n+1)w$$

$$n^0C_0(n+1)(n-1) + [n^0C_0 + n^1C_1 + n^2C_2 \dots + n^{t-1}C_{t-1} + n^tC_t] = n(n+1)w$$

Aplicando relaciones entre adición y sustracción

$$n^0C_0 + n^1C_1 + n^2C_2 \dots + n^{t-1}C_{t-1} + n^tC_t = n(n+1)w - n^0C_0(n+1)(n-1)$$

Luego por **T7**

$$n^0C_0 + n^1C_1 + n^2C_2 \dots + n^{t-1}C_{t-1} + n^tC_t = (n+1)\big(nw - n^0C_0(n-1)\big)$$

Si hacemos que $z = nw - n^0C_0(n-1)$

Entonces

$$n^0C_0 + n^1C_1 + n^2C_2 \dots + n^{t-1}C_{t-1} + n^tC_t = (n+1)z$$

Luego, $N_{(n)}$ es divisible por $(n + 1)$

→ Para este lado de la demostración se hace un razonamiento similar al realizado en la divisibilidad por 7 en base 10, se deja como ejercicio para el lector.

■

### 3.3.2. Segundo criterio

En cualquier base $n$ un número $N$, esto es $N_{(n)}$, es divisible por $n + 1$ si y solo si la diferencia entre el resultado de sumar las cifras de posiciones impares y el resultado de sumas las cifras de posiciones pares de $N_{(n)}$ es múltiplo de $n + 1$.

Por ejemplo, en base 10, los números 6182 y 4081, son divisibles por 11, pues al realizar el proceso correspondientes se tiene 14 – 3 = 11 y 12 – 1 = 11 respectivamente, y 11 es múltiplo de 11.

En base 5, el número $10302_{(5)}$ es divisible por $11_{(5)}$ pues al sumar las posiciones pares se tiene como resultado 0 y las impares $11_{(5)}$, y $11_{(5)}$ es múltiplo de $11_{(5)}$.

*Demostración:*

← Sea

$$N_{(n)} = n^t C_t + n^{t-1}C_{t-1} + \cdots + n^2 C_2 + n^1 C_1 + n^0 C_0$$

Sin pérdida de generalidad hacemos la resta del mayor número menos el menor.

$$N_{(n)} = n^t C_t + n^{t-1}C_{t-1} + \cdots + n^2 C_2 + n^1 C_1 + n^0 C_0$$

Inicialmente, la hipótesis es

$$(C_t + \cdots + C_2 + C_0) - (C_{t-1} + \cdots + C_3 + C_1) = (n + 1)m$$

Multiplicando lo anterior por $10^t$, se tiene

$$n^t(C_t + \cdots + C_4 + C_2 + C_0) - n^t(C_{t-1} + \cdots + C_5 + C_3 + C_1) = (n+1)m \cdot n^t$$

Aplicando **T7** para el primer término a la izquierda de la igualdad y **T11** para el otro término:

$$n^t C_t + \cdots + n^t C_4 + n^t C_2 + n^t C_0 - n^t C_1 - \cdots - n^t C_3 - n^t C_5 - n^t C_{t-1} = (n+1)m \cdot n^t$$

Ahora, sumando y restando $10^w C_w$, es decir,

$$(C_t n^t) + C_{t-2}n^t - C_{t-2}n^{t-2} + C_{t-2}n^{t-2} + \cdots + C_4 n^t - C_4 n^4 + n^4 C_4 + C_2 n^t - C_2 n^2 + n^2 C_2$$

$$+ C_0 n^t - C_0 n^0 + n^0 C_0 - C_{t-1}n^t - C_{t-1}n^{t-1} + n^{t-1}C_{t-1} - \cdots - C_5 n^t - C_5 n^5 + nC_5$$

$$- C_3 n^t - C_3 n^3 + n^3 C_3 - C_1 n^t - C_1 n^1 + n^1 C_1 = (n+1)m \cdot n^t$$

y aplicando a lo anterior **T1**, **T11**, **T7** y **T12** obtenemos

$$(C_t n^t) + (C_{t-2}(n^t - n^{t-2})) + \cdots + C_4(n^t - n^4) + C_2(n^t - n^2) + C_0(n^t - n^0)$$

$$- C_{t-1}(n^t + n^{t-1}) - \cdots - C_5(n^t + n^5) - C_3(n^t + n^3) - C_1(n^t + n^1) + n^{t-2}C_{t-2}$$

$$+ \cdots + n^4 C_4 + n^2 C_2 + n^0 C_0 + n^{t-1}C_{t-1} + \cdots + n^5 C_5 + n^3 C_3 + n^1 C_1 = (n+1)m \cdot n^t$$

Utilizando **T7**, **T3**, **T4** y **T12**

$$n^tC_t + n^{t-1}C_{t-1} + n^{t-2}C_{t-2} + \dots + n^5C_5 + n^4C_4 + n^3C_3 + n^2C_2 + n^1C_1 + n^0C_0$$

$$-C_{t-1}n^{t-1}(n^1+1) + (C_{t-2}n^{t-2}(n^2-1)) + \cdots - (C_5n^5(n^{t-5}+1)) + (C_4 10^4(n^t-1)$$

$$-(C_3(n^{t-3}+1) + (C_2n^2(n^{t-2}-1) - (C_1n^1(n^{t-1}+1) + C_0(n^t-n^0) = (n+1)m \cdot n^t \qquad (2)$$

Por el **T23** y **T24**, se tiene que $n^{2k_{(n)}} - 1 = (n+1)e$, y que $n^{2k+1_{(n)}} + 1 = (n+1)w$, así para que se dé la igualdad anterior, el número

$$n^tC_t + n^{t-1}C_{t-1} + n^{t-2}C_{t-2} + \dots + n^5C_5 + n^4C_4 + n^3C_3 + n^2C_2 + n^1C_1 + n^0C_0$$

Debe ser múltiplo de $n + 1$. Entonces, $N_{(n)}$ es divisible por $n + 1$

Cuando $t$ es impar la demostración se hace de manera análoga.

→ Para este lado de la demostración se hace un razonamiento basado en la propiedad de la divisibilidad que dice si $a|b + c$ y $a|c$ entonces $a|b$, tomando como $b$ el número $N$ y como $c$ todo el número restante de la igualdad (2).

■

## 3.4. Algunos criterios particulares

### 3.4.1. Divisibilidad por 2

***En bases pares***

Un numero $N_{(2k)}$ en base par es divisible por 2 si y solo si la cifra de las unidades de $N_{(2k)}$ es par.

Ejemplos:

En base 4, el número $32_{(4)}$ es divisible por 2 ya que su última cifra 2, es par.

En base 6, el número $5422_{(4)}$ es divisible por 2, pues si última cifra es par.

*Demostración:*

← Sea

$$N_{(2k)} = (2k)^t C_t + (2k)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (2k)^2 C_2 + (2k)^1 C_1 + (2k)^0 C_0$$

Como $C_0$ es par tenemos que $C_0 = 2w$, donde $w = 0, 1, \ldots, 4$.

Tenemos que

$$N_{(2k)} = (2k)^t C_t + (2k)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (2k)^2 C_2 + (2k)^1 C_1 + (2k)^0 2w$$

Utilizando **T16** y **T7**

$$N_{(2k)} = 2[(2^{t-1} k^t) C_t + (2^{t-2} k^{t-1}) C_{t-1} + \cdots + (2k^2) C_2 + k C_1 + w]$$

Por tanto así, $N_{(2k)}$ es divisible por 2.

→ Esta demostración se hace similar a la realizada para múltiplos de 2 en base 10.

■

***En bases impares***

Un número $N_{(2k+1)}$ en base impar es divisible por 2 si y solo si la suma de las cifras de este número es múltiplo de 2.

Ejemplos:

- Sea $110_{(3)}$, entonces $1 + 1 + 0 = 2$, y 2 es múltiplo de 2, así que $110_{(3)}$ es divisible por 2.
- Sea $24_{(5)}$, si sumamos sus cifras tenemos $2 + 4 = 11_{(5)}$, como quizás no sabemos si $11_{(5)}$ es múltiplo de 2, entonces sumamos nuevamente las cifras de esta número, así tenemos $1 + 1 = 2$, y 2 es múltiplo de 2, así $24_{(5)}$ es divisible por 2.

*Demostración*

Esta demostración es similar a la demostración establecida para el criterio múltiplos de $n - 1$ en base $n$. (Ver Múltiplosnmenos1)

■

### 3.4.2. Divisibilidad por 4

***En bases de la forma 4k***

Un número es divisible por 4 en bases de la forma $4k$ si y solo si su última cifra es múltiplo de 4.

Ejemplos:

- Sea $2264_{(8)}$ como su última cifra es $4_{(8)}$, entonces $2264_{(8)}$ es divisible por $4_{(8)}$. Luego $2264_{(8)} \div 4_{(8)} = 455_{(8)}$
- Sea $2818_{(16)}$ como su última cifra es $8_{(16)}$, entonces $2818_{(16)}$ es divisible por $4_{(16)}$. Luego $2818_{(16)} \div 4_{(16)} = A06_{(16)}$

*Demostración*

Para esta demostración se usa un razonamiento similar a la demostración de múltiplos de $n$ en base $n$. (Ver Múltiplosnmas1)

■

***En bases de la forma 4k + 1***

Un número es divisible por 4 en bases $4k + 1$ si la suma de sus cifras es múltiplo de 4.

Ejemplo:

- Sea $1323012_{(5)}$ es divisible por $4_{(5)}$, ya que $1 + 3 + 2 + 3 + 0 + 1 + 2 = 22_{(5)}$ y $22_{(5)}$ es múltiplo de $4_{(5)}$. luego $4_{(5)} \cdot 455_{(5)} = 1323012_{(5)}$
- Sea $13_{(5)}$ es divisible por $4_{(5)}$, ya que $1_{(5)} + 3_{(5)} = 4_{(5)}$, y $4_{(5)}$ es múltiplo de $4_{(5)}$ . luego $4_{(5)} \cdot 2_{(5)} = 13_{(5)}$
- Sea $88060_{(9)}$ es divisible por$4_{(9)}$, entonces $8_{(9)} + 8_{(9)} + 0_{(9)} + 6_{(9)} + 0_{(9)} = 24_{(9)}$ y $24_{(9)}$ es múltiplo de $4_{(9)}$. Luego $4_{(9)} \cdot 22014_{(9)} = 88060_{(9)}$

*Demostración:*

Esta demostración es similar a la demostración de múltiplos de $n - 1$ en base $n$. (VerMúltiplosnmenos1)

■

***En bases de la forma* 4*k* + 2**

Un número es divisible por 4 en bases de la forma 4*k* + 2, si y solo si el número formado las cifras de las unidades y los grupos de 4*k* + 2 es divisible por 4.

Ejemplo:

- Sea $11100_{(2)}$, como el número formado por sus dos últimas cifras es 00, $11100_{(2)}$ es divisible por $100_{(2)}$. luego $100_{(2)} \cdot 111_{(2)} = 11100_{(2)}$
- Sea $2140_{(6)}$, como el número formado por sus dos últimas cifras es 40, entonces $11100_{(6)}$ es divisible por $4_{(6)}$. Entonces $4_{(6)} \cdot 323_{(6)} = 2140_{(6)}$

*Demostración:*

← Sea

$$N_{(4k+2)} = (4k+2)^t C_t + (4k+2)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (4k+2)^1 C_1 + (4k+2)^0 C_0$$

Se tiene que

$$(4k+2)^1 C_1 + (4k+2)^0 C_0 = 4v$$

Utilizando el **T18** para $(4k+2)^t, (4k+2)^{t-1}, \ldots, (4k+2)^2$, se tiene que:

$$N_{(4k+2)} = \sum_{w=0}^{t} \binom{t}{w} (4k)^{t-w} 2^w + \sum_{j=0}^{t-1} \binom{t-1}{j} (4k)^{t-w} 2^w + \cdots \sum_{g=0}^{2} \binom{2}{g} (4k)^{2} 2^g + \cdots + 4v$$

Como cada uno de los términos que componen la suma anterior es múltiplo de 4, entonces se tiene que

$$N_{(4k+2)} = 4x + 4y + \cdots + 4r + 4v = 4q.$$

Por tanto, $N_{(4k+2)}$ es múltiplo de 4.

→ Para esta demostración se sigue un razonamiento similar al realizado para la demostración de múltiplos de 4 en base 10.

■

***En bases de la forma 4k + 3***

Un número es divisible por 4 en bases de la forma $4k + 3$, si y solo si la suma entre multiplicar la cifra de las unidades por $10_{(4k+3)}$ y el número que se compone de las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades) el resultado es múltiplo de 4.

Ejemplo:

- Consideremos el número $121_{(3)}$, entonces $1 \cdot 10 = 10_{(3)}$, sumamos $10_{(3)}$ y $12_{(3)}$, $12_{(3)} + 10_{(3)} = 22_{(3)}$, y $22_{(3)}$ es múltiplo de $11_{(3)}$.

*Demostración:*

Esta demostración es similar a la demostración de múltiplos de $n + 1$ en base $n$. (Ver Múltiplosnmas1)

■

### 3.4.3. Divisibilidad por 3

***En bases de la forma 3k***

Un número es divisible por 3 si y solo la cifra de las unidades es múltiplo de 3.

Ejemplos:

- Sea $101120_{(3)}$ su última cifra es cero y cero es múltiplo de $10_{(3)}$ luego $10_{(3)} \cdot 10112_{(3)} = 101120_{(3)}$ entonces $101120_{(3)}$ es divisible por $10_{(3)}$.
- Consideremos $1213_{(6)}$, como su última cifra es $3_{(6)}$ y $3_{(6)}$ es múltiplo de $3_{(6)}$, luego $243_{(6)} \cdot 3_{(6)} = 1213_{(6)}$ entonces $1213_{(6)}$ es divisible por $3_{(6)}$.

*Demostración:*

Esta demostración es similar a la demostración de múltiplos de $n$ en base $n$, tomando $n = 3k$. (Ver Múltiplosn)

■

***En bases de la forma*** **3*k* + 1**

Un número es divisible por 3 en bases de la forma $3k + 1$ si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Ejemplos:

- Consideremos el número $555_{(7)}$ la suma de sus cifras es $21_{(7)}$, y $21_{(7)}$ es múltiplo de 3, luego $3_{(7)} \cdot 164_{(7)} = 555_{(7)}$
- $10221_{(4)}$ es divisible por 3 porque la suma de sus cifras es $12_{(4)}$, y $12_{(4)}$ es múltiplo de 3, y además $10221_{(4)} \div 3 = 1203_{(4)}$.

*Demostración:*

Esta demostración es similar a la demostración de múltiplos de $n - 1$ en base $n$. (Ver Múltiplosnmenos1)

■

***En bases de la forma 3k + 2***

Un número es divisible por 3 en bases de la forma $3k + 2$ si y solo si la diferencia entre la suma de las cifras de las posiciones pares y las cifras de posiciones impares el resultado es múltiplo de 3.

Ejemplos:

- Sea $10000001011_{(2)}$, pues la suma de las cifras es posición par es igual a $10_{(2)}$ y la suma de las cifras de posición impar es $10_{(2)}$ entonces la diferencia entre ambos es 0 y 0 es múltiplo de 3.

*Demostración:*

Esta demostración es similar a la demostración de múltiplos de $n + 1$ en base $n$.
(Ver Múltiplosnmas1)

■

### 3.4.4. Divisibilidad por 5

***En bases de la forma 5k***

Un número $N_{(5k)}$ es divisible por 5 si y solo si la cifra de las unidades es múltiplo de 5.

Ejemplos:

- Sea $14200_{(5)}$ es divisible por 5, pues su última cifra es cero, y cero es múltiplo de 5.
- Si tenemos $23220_{(10)}$ es divisible por 5, pues su última cifra es cero, y cero es múltiplo de 5.

*Demostración:*

Esta demostración es similar a la demostración de múltiplos de *n* en base *n*. (Ver Múltiplosn)

■

***En bases de la forma 5k + 1***

Un número $N_{(5k+1)}$ es divisible por 5 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 5.

Ejemplos:

- Consideremos el número $22240_{(6)}$ es divisible por $5_{(6)}$, pues al sumar sus cifras obtenemos $14_{(6)}$ y este número es múltiplo de $5_{(6)}$.
- Tomemos ahora $10F9_{(16)}$, este número es divisible por $5_{(16)}$, pues al sumar sus cifras se tiene como resultado $19_{(16)}$ y este número es múltiplo de $5_{(16)}$.

*Demostración:*

Esta demostración es similar a de la demostración de múltiplos de $n - 1$ en base *n*. (Ver Múltiplosnmenos1)

■

***En bases de la forma 5k + 2***

Un número $N_{(5k+2)}$ es divisible por 5 si y solo si la diferencia entre el resultado de multiplicar la cifra de las unidades por 2 y el número que se compone de las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades) el resultado es múltiplo de 5.

Ejemplos:

- Sea $23663_{(7)}$ al multiplicar la última cifra por 2 se obtiene $6_{(7)}$, al realizar la diferencia entre $2366_{(7)}$ y $6_{(7)}$, es $2360_{(7)}$. Ahora se realiza nuevamente el proceso, pues no se sabe si el número resultante es múltiplo de 5, ahora, al multiplicar la última cifra por dos y realizar la diferencia se tiene $236_{(7)}$, haciendo el proceso nuevamente se tiene como resultado $5_{(7)}$ y este número es múltiplo de 5, de este manera $23663_{(7)}$ es divisible por 5.

*Demostración*

$\leftarrow N_{(5k+2)} = (5k+2)^t C_t + (5k+2)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (5k+2)^2 C_2 + (5k+2)^1 C_1 + (5k+2)^0 C_0,\ t \in \mathbb{N}$

Sea $M_{(5k+2)}$ un número de $t$ cifras de que resulta de eliminar $C_o$ de $N_{(5k+2)}$, esto es:

$$M_{(5k+2)} = (5k+2)^{t-1} C_t + (5k+2)^{t-2} C_{t-1} + \cdots + (5k+2) C_2 + C_1$$

Tenemos que:

$$N_{(5k+2)} = (5k+2) M_{(5k+2)} + C_0 \ (1)$$

Sin pérdida de generalidad vamos a tomar la resta del número mayor menos el número menos, entonces $M_{(5k+2)} - 2C_0 = 5w$ según la hipótesis, entonces por relaciones entre adición y sustracción tenemos que

$M_{(5k+2)} = 5w + 2C_0$, sustituyendo esto en (1) obtenemos:

$$N_{(5k+2)} = (5k+2)(5w+2C_0) + C_0$$

Luego $N_{(5k+2)} = 25kw + 10kC_0 + 10w + 5C_0$, lo cual, utilizando el nuevamente **T7**, puede escribirse como

$$N_{(5k+2)} = 5[5kw + 2kC_0 + 2w + C_0] = 5e.$$

Por lo tanto, concluimos que $N_{(5k+2)}$ es múltiplo de 5.

→ Para esta demostración se hace un razonamiento similar al realizado para la divisibilidad por 7 en base 10.

■

***En bases de la forma 5k + 3***

Un número $N_{(5k+3)}$ es divisible por 5 si y solo si la suma entre el resultado de multiplicar la cifra de las unidades por 2 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 5

Ejemplos:

- Sea $52145_{(8)}$, como su última cifra es $5_{(8)}$, hacemos $5_{(8)} \cdot 2_{(8)} = 12_{(8)}$.
  Ahora $5214_{(8)} + 12_{(8)} = 5226_{(8)}$, siguiendo el algoritmo tenemos $6_{(8)} \cdot 2_{(8)} = 14_{(8)}$, entonces $522_{(8)} + 14_{(8)} = 536_{(8)}$. Finalmente tenemos $6_{(8)} \cdot 2_{(8)} = 14_{(8)}$, entonces $53_{(8)} + 14_{(8)} = 67_{(8)}$ y $67_{(8)}$ es múltiplo de $5_{(8)}$ luego $52145_{(8)}$ es múltiplo de $5_{(8)}$.
- Si tenemos $1786_{(13)}$ como su última cifra es $6_{(13)}$ entonces hacemos $6_{(13)} \cdot 2_{(13)} = C_{(13)}$. Ahora $178_{(13)} + C_{(13)} = 187_{(13)}$. Finalmente tenemos $7_{(13)} \cdot 2_{(13)} = 11_{(13)}$, entonces $18_{(13)} + 11_{(13)} = 29_{(13)}$ y $29_{(13)}$ es múltiplo de $5_{(13)}$ luego $1786_{(13)}$ es múltiplo de $5_{(13)}$.

*Demostración*:

$$\leftarrow N_{(5k+3)} = (5k+3)^t C_t + (5k+3)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (5k+3)^2 C_2 + (5k+3)^1 C_1 + (5k+3)^0 C_0,\ t \in \mathbb{N}$$

Sea $M_{(5k+3)}$ un número de $t$ cifras de que resulta de eliminar $C_o$ de $N_{(5k+3)}$, esto es:

$$M_{(5k+3)} = (5k+3)^{t-1} C_t + (5k+3)^{t-2} C_{t-1} + \cdots + (5k+3) C_2 + C_1$$

Tenemos que:

$$N_{(5k+3)} = (5k+3) M_{(5k+3)} + C_0 \ (1)$$

Según la hipótesis $M_{(5k+3)} + 2C_0 = 5w$, entonces por relaciones entre adición y sustracción tenemos que

$M_{(5k+3)} = 5w - 2C_0$, sustituyendo esto en (1) obtenemos:

$$N_{(5k+3)} = (5k+3)(5w - 2C_0) + C_0$$

Luego $N_{(5k+3)} = 25kw - 10kC_0 + 15w - 5C_0$, lo cual, utilizando el **T7**, puede escribirse como

$$N_{(5k+3)} = 5[5kw - 2kC_0 + 3w - C_0] = 5e.$$

Por lo tanto, concluimos que $N_{(5k+3)}$ es múltiplo de 5 que era lo que deseábamos demostrar.

→ Para esta demostración se hace un razonamiento similar al hecho para la divisibilidad por 7 en base 10.

■

***En bases de la forma 5k + 4***

En base $5k + 4$ un número $N$, esto es $N_{(5k+4)}$, es divisible por 5 si y solo si la diferencia entre el número conformado por las cifras de $N_{(n)}$ excepto la de las unidades y esta cifra es múltiplo de 5.

Ejemplos:

- Sea $2101_{(9)}$ múltiplo de $5_{(9)}$ porque $210_{(9)} - 1_{(9)} = 208_{(9)}$, haciendo nuevamente el procedimiento obtenemos $20_{(9)} - 8_{(9)} = 11_{(9)}$ y $11_{(9)}$ es múltiplo de $5_{(9)}$.
- Si tenemos $3514A_{(14)}$ es múltiplo de 5 ya que $3514_{(14)} - A_{(14)} = 3508_{(14)}$, haciendo nuevamente $350_{(14)} - 8_{(14)} = 346_{(14)}$, nuevamente $34_{(14)} - 6_{(14)} = 2C_{(14)}$ y $2C_{(14)}$ es múltiplo de $5_{(14)}$.

*Demostración*:

$\leftarrow N_{(5k+4)} = (5k+4)^t C_t + (5k+4)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (5k+4)^2 C_2 + (5k+4)^1 C_1 + (5k+4)^0 C_0,\ t \in \mathbb{N}$

Sea $M_{(5k+4)}$ un número de $t$ cifras de que resulta de eliminar $C_0$ de $N_{(5k+4)}$, esto es:

$$M_{(5k+4)} = (5k+4)^{t-1} C_t + (5k+4)^{t-2} C_{t-1} + \cdots + (5k+4) C_2 + C_1$$

Tenemos que:

$$N_{(5k+4)} = (5k+4) M_{(5k+4)} + C_0 \ (1)$$

Sin pérdida de generalidad tomamos la resta del mayor número menos el menor, entonces según la hipótesis $M_{(5k+4)} - C_0 = 5w$, luego por definición de sustracción tenemos que

$M_{(5k+4)} = 5w + C_0$, sustituyendo esto en (1) obtenemos:

$$N_{(5k+4)} = (5k+4)(5w+C_0)+C_0$$

Luego $N_{(5k+4)} = 25kw - 5kC_0 + 20w + 5C_0$, lo cual, utilizando **T7**, puede escribirse como

$$N_{(5k+4)} = 5\,[5kw + kC_0 + 4w + C_0] = 5e.$$

Por lo tanto, concluimos que $N_{(5k+4)}$ es múltiplo de 5.

→ Para esta demostración se hace un razonamiento similar al realizado para la divisibilidad por 7 en base 10.

■

### 3.4.5. Divisibilidad por 7

***En bases de la forma 7k***

Un número es divisible por 7 en bases de la forma $7k$ si y solo si su última cifra es múltiplo de 7.

Ejemplos:

- Sea $65300_{(7)}$ como su última cifra es $0_{(7)}$, entonces $65300_{(7)}$ es divisible por $10_{(7)}$, luego $10_{(7)} \cdot 6530_{(7)} = 65300_{(7)}$
- Sea $1D47_{(14)}$ como su última cifra es $7_{(14)}$, entonces $1D47_{(14)}$ es divisible por $7_{(14)}$, luego $4_{(14)} \cdot 3C9_{(14)} = 1D47_{(14)}$

*Demostración*

Esta demostración es similar a la demostración de múltiplos de *n* en base *n*. (Ver Múltiplosn)

■

***En bases de la forma 7k* + 1**

Un número es divisible por 7 en bases de la forma $7k + 1$ si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 7.

Ejemplo:

- Sea $1024_{(8)}$ es divisible por $7_{(8)}$, entonces $1 + 0 + 2 + 4 = 7_{(8)}$ y $7_{(8)}$ es múltiplo de $7_{(8)}$. Luego $7_{(8)} \cdot 114_{(8)} = 1024_{(8)}$
- Sea $1607_{(15)}$ es divisible por $7_{(15)}$, pues $1 + 6 + 0 + 7 = E_{(15)}$, y $E_{(15)}$ es múltiplo de $7_{(15)}$. Luego $7_{(15)} \cdot 301_{(15)} = 1607_{(15)}$

*Demostración*

Esta demostración es similar a la demostración de múltiplos de $n - 1$ en base $n$. (Ver Múltiplosnmenos1)

■

***En bases de la forma 7k* + 2**

En base $7k + 2$ un número $N$, esto es $N_{(7k+2)}$, es divisible por 7 si y solo si la diferencia entre el resultado de multiplicar la última cifra por 3 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 7.

Ejemplo:

- Tomemos $284_{(9)}$, si realizamos el algoritmo tenemos $4 \cdot 3 = 13_{(9)}$, ahora $28_{(9)} - 13_{(9)} = 15_{(9)}$, y $15_{(9)}$ es múltiplo de 7, por tanto $284_{(9)}$ es múltiplo de 7.
- Consideremos el número $11100_{(2)}$, haciendo el algoritmo para las dos últimas cifras son 0, entonces el número que tenemos es $111_{(2)}$, multiplicando la última cifra por $11_{(2)}$, se tiene que $11_{(2)} - 11_{(2)} = 0$, y 0 es múltiplo de $111_{(2)}$ por tanto $11100_{(2)}$ es múltiplo de $111_{(2)}$

*Demostración*:

Sea

$$\leftarrow N_{(7k+2)} = (7k+2)^t C_t + (7k+2)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (7k+2)^2 C_2 + (7k+2)^1 C_1 + (7k+2)^0 C_0,\ t \in \mathbb{N}$$

Sea $M_{(7k+2)}$ un número de $t$ cifras de que resulta de eliminar $C_o$ de $N_{(7k+2)}$, esto es:

$$M_{(7k+2)} = (7k+2)^{t-1} C_t + (7k+2)^{t-2} C_{t-1} + \cdots + (7k+2) C_2 + C_1$$

Tenemos que:

$$N_{(7k+2)} = (7k+2) M_{(7k+2)} + C_0 \ (1)$$

Sin pérdida de generalidad tomamos la resta del mayor número menos el menos, entonces según la hipótesis $M_{(7k+2)} - 3C_0 = 7w$, por definición de sustracción tenemos que

$M_{(7k+2)} = 7w + 3C_0$, sustituyendo esto en (1) obtenemos:

$$N_{(7k+2)} = (7k+2)(7w + 3C_0) + C_0$$

Luego $N_{(7k+2)} = 49kw + 21kC_0 + 14w + 7C_0$, lo cual, utilizando el **T7**, puede escribirse como

$$N_{(7k+2)} = 7\,[7kw + 3kC_0 + 2w + C_0] = 7e.$$

Por lo tanto, concluimos que $N_{(7k+2)}$ es múltiplo de 7 que era lo que deseábamos demostrar.

→ Para esta demostración se sigue un razonamiento similar al realizado para la divisibilidad por 7 en base 10.

■

***En bases de la forma 7k + 3***

**Primer criterio:** En base $7k + 3$ un número $N$, esto es $N_{(7k+3)}$, es divisible por 7 si y solo si la diferencia entre el resultado de multiplicar la última cifra por 2 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 7.

Ejemplos:

- Tomemos 2646, si realizamos el algoritmo tenemos $6 \cdot 3 = 18$, ahora $264 - 18 = 246$, haciendo el proceso nuevamente obtenemos $6 \cdot 4 = 24$, y $24 - 24 = 0$ y 0 es múltiplo de 7, por tanto 2646 es múltiplo de 7.
- Consideremos el número $10122_{(3)}$, haciendo el algoritmo tenemos que $10_{(3)} \cdot 2_{(3)} = 20_{(3)}$, y $1012_{(3)} - 20_{(3)} = 11_{(3)}$, y $11_{(3)}$ es múltiplo de 7. Por tanto $10122_{(3)}$ es divisible por 7.

*Demostración*:

Sea

$\leftarrow N_{(7k+3)} = (7k+3)^t C_t + (7k+3)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (7k+3)^2 C_2 + (7k+3)^1 C_1 + (7k+3)^0 C_0,\ t \in \mathbb{N}$

Sea $M_{(7k+3)}$ un número de $t$ cifras de que resulta de eliminar $C_o$ de $N_{(7k+3)}$, esto es:

$$M_{(7k+3)} = (7k+3)^{t-1} C_t + (7k+3)^{t-2} C_{t-1} + \cdots + (7k+3) C_2 + C_1$$

Tenemos que:

$$N_{(7k+3)} = (7k+3) M_{(7k+3)} + C_0 \ (1)$$

Sin pérdida de generalidad, para esta demostración tomamos la resta del mayor número menos el menor; según la hipótesis $M_{(7k+3)} - 2C_0 = 7w$, entonces por definición de sustracción tenemos que

$M_{(7k+3)} = 7w + 2C_0$, sustituyendo esto en (1) obtenemos:

$$N_{(7k+3)} = (7k+3)(7w + 2C_0) + C_0$$

Luego $N_{(7k+3)} = 49kw + 14kC_0 + 21w + 7C_0$, lo cual, utilizando el **T7**, puede escribirse como

$$N_{(7k+3)} = 7\,[7kw + 2kC_0 + 3w + C_0] = 7e.$$

Por lo tanto, concluimos que $N_{(7k+3)}$ es múltiplo de 7 que era lo que deseábamos demostrar.

→ Para esta demostración se sigue un razonamiento similar al hecho para la demostración de divisibilidad por 7 en base 10.

■

**Segundo criterio:** En base $7k + 3$ un número $N$, esto es $N_{(7k+3)}$,es divisible por 7 el resultado de multiplicar cada cifra del número por su respectiva potencia de 3, de acuerdo a su posición, y sumar los resultados obtenidos, es múltiplo de 7.

Ejemplos:

- Sea 31969, vamos a multiplicar cada cifra por su correspondiente potencia de 3 y a realizar la adición respectiva, es decir:
  $9 \cdot 3^0 + 6 \cdot 3^1 + 9 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 = 9 + 18 + 81 + 27 + 243 = 378$.
  Como no sabemos si 378 es divisible por 7, realizamos nuevamente el proceso, obteniendo: $8 \cdot 3^0 + 7 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 = 8 + 21 + 27 = 56$, y efectivamente 56 es múltiplo de 7, así que 31969 es divisible por 7.
- Tomemos $861_{(17)}$, entonces tenemos:
  $1_{(17)} \cdot {3_{(17)}}^0 + 6_{(17)} \cdot {3_{(17)}}^1 + 8_{(17)} \cdot {3_{(17)}}^2 = 1_{(17)} + 11_{(17)} + 44_{(17)} = 56_{(17)}$, y efectivamente $56_{(17)}$ es múltiplo de $7_{(17)}$, así que $861_{(17)}$ es divisible por $7_{(17)}$.

*Demostración*:

Sea

$$N_{(7k+3)} = (7k+3)^t C_t + (7k+3)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (7k+3)^2 C_2 + (7k+3)^1 C_1 + (7k+3)^0 C_0,\ t \in \mathbb{N}$$

Por hipótesis tenemos que

$$3^t C_t + 3^{t-1} C_{t-1} + \cdots + 3^2 C_2 + 3^1 C_1 + 3^0 C_0 = 7u \qquad (1)$$

Inicialmente, como en base $7k + 3$, $7k + 3 = 10_{(7k+3)}$, entonces, por **T2**, podemos sumar ceros convenientemente en (1), es decir:

$$3^t C_t - 3^t C_t + 3^t C_t + 3^{t-1} C_{t-1} - 3^{t-1} C_{t-1} + +3^{t-1} C_{t-1} + \cdots$$

$$+3^2 C_2 - 3^2 C_2 + 3^2 C_2 + 3^1 C_1 - 3^1 C_1 + 3^1 C_1 + 3^0 C_0 - 3^0 C_0 + 3^0 C_0$$

$$+ 10^t C_t - 10^t C_t + 10^{t-1} C_{t-1} - 10^{t-1} C_{t-1} + \cdots + 10^2 C_2 - 10^2 C_2$$

$$+ 10^1 C_1 - 10^1 C_1 + 10^0 C_0 - 10^0 C_0 = 7u$$

Por **T2**, **T3**, **T7** y relaciones de adición y sustracción se tiene que

$$(10^{\,t} - 3^{\,t})C_t + (10^{\,t-1} - 3^{\,t-1})C_{t-1} + \cdots + (10^{\,2} - 3^{\,2})C_2 + (10^{\,1} - 3^{\,1})C_1 + (10^{\,0} - 3^{\,0})C_0$$

$$-\,(10^t C_t + 10^{t-1}C_{t-1} + \cdots + 10^2 C_2 + 10^1 C_1 + 10^0 C_0)$$

$$+\,2\,(3^t C_t + 3^{t-1}C_{t-1} + \cdots + 3^2 C_2 + 3^1 C_1 + 3^0 C_0) = 7u \qquad (2)$$

Por **T22** se tiene que ($10^w$ - $3^w$) es múltiplo de 7, entonces general la expresión

$$(10^{\,t} - 3^{\,t})C_t + (10^{\,t-1} - 3^{\,t-1})C_{t-1} + \cdots + (10^{\,2} - 3^{\,2})C_2 + (10^{\,1} - 3^{\,1})C_1 + (10^{\,0} - 3^{\,0})C_0$$

Es múltiplo de 7, además, por hipótesis

$$(3^t C_t + 3^{t-1}C_{t-1} + \cdots + 3^2 C_2 + 3^1 C_1 + 3^0 C_0) = 7k$$

Así que para que (2) sea múltiplo de 7, es necesario que

$(10^t C_t + 10^{t-1}C_{t-1} + \cdots + 10^2 C_2 + 10^1 C_1 + 10^0 C_0)$ sea múltiplo de 7, que era lo que queríamos demostrar.

■

***En bases de la forma 7k* + 4**

Un número $N_{(7k+4)}$ es divisible por 7 si la diferencia entre el resultado de multiplicar la última cifra por 5 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 7.

Ejemplos:

- Sea $28233_{(11)}$, como su última cifra es $3_{(11)}$ entonces hacemos $3_{(11)} \cdot 5_{(11)} = 14_{(11)}$. Ahora $2883_{(11)} – 14_{(11)} = 280A_{(11)}$, siguiendo el algoritmo tenemos $A_{(11)} \cdot 5_{(11)} = 46_{(11)}$, entonces $280_{(11)} – 46_{(11)} = 235_{(11)}$. Finalmente tenemos $5_{(11)} \cdot 5_{(11)} = 23_{(11)}$, entonces $23_{(11)} – 23_{(11)} = 0$ y 0 es múltiplo de $7_{(11)}$ luego $28233_{(11)}$ es múltiplo de $7_{(11)}$.
- Si tenemos $1012_{(4)}$ como su última cifra es $2_{(4)}$ entonces hacemos $2_{(4)} \cdot 11_{(4)} = 22_{(4)}$. Ahora $101_{(4)} – 22_{(4)} = 13_{(4)}$ y $13_{(4)}$ es múltiplo de $13_{(4)}$ luego $1012_{(4)}$ es múltiplo de $13_{(4)}$.

*Demostración*:

Sea

$$N_{(7k+4)} = (7k+4)^t C_t + (7k+4)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (7k+4)^2 C_2 + (7k+4)^1 C_1 + (7k+4)^0 C_0,\ t \in \mathbb{N}$$

Sea $M_{(7k+4)}$ un número de $t$ cifras de que resulta de eliminar $C_0$ de $N_{(7k+4)}$, esto es:

$$M_{(7k+4)} = (7k+4)^{t-1} C_t + (7k+4)^{t-2} C_{t-1} + \cdots + (7k+4) C_2 + C_1$$

Tenemos que:

$$N_{(7k+4)} = (7k+4)M_{(7k+4)} + C_0 \ (1)$$

Según la hipótesis $M_{(7k+4)} - 5C_0 = 7w$, entonces por definición de sustracción tenemos que $M_{(7k+4)} = 7w + 5C_0$, sustituyendo esto en (1) obtenemos:

$$N_{(7k+4)} = (7k+4)(7w + 5C_0) + C_0$$

Luego $N_{(7k+4)} = 49kw + 35kC_0 + 28w + 21C_0$, lo cual, utilizando el **T8**, puede escribirse como

$$N_{(7k+4)} = 7\,[7kw + 5kC_0 + 4w + 3C_0] = 7e.$$

Por lo tanto, concluimos que $N_{(7k+4)}$ es múltiplo de 7 que era lo que deseábamos demostrar.

■

***En bases de la forma 7k*** **+ 5**

En base $7k + 5$ un número $N$, esto es $N_{(7k+5)}$, es divisible por 7 si la diferencia entre el resultado de multiplicar la última cifra por 4 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 7.

Ejemplos

- Si tenemos $2213_{(5)}$ su última cifra es $3_{(5)}$, entonces hacemos $3_{(5)} \cdot 4_{(5)} = 22_{(5)}$. Ahora $221_{(5)} - 22_{(5)} = 144_{(5)}$.Finalmente tenemos $4_{(5)} \cdot 4_{(5)} = 31_{(5)}$, como $31_{(5)} > 14_{(5)}$.
  Entonces $31_{(5)} - 14_{(5)} = 12_{(5)}$ y $12_{(5)}$ es múltiplo de $12_{(5)}$ luego $2213_{(5)}$ es múltiplo de $12_{(5)}$.

- Sea $22638_{(12)}$, como su última cifra es $8_{(12)}$ entonces hacemos $8_{(12)} \cdot 4_{(12)} = 28_{(12)}$. Ahora $2263_{(12)} - 28_{(12)} = 2237_{(12)}$, siguiendo el algoritmo tenemos $7_{(12)} \cdot 4_{(12)} = 24_{(12)}$, luego $223_{(12)} - 24_{(12)} = 1BB_{(12)}$. Finalmente tenemos $B_{(12)} \cdot 4_{(12)} = 38_{(12)}$, como $38_{(12)} > 1B_{(12)}$ entonces $38_{(12)} - 1B_{(12)} = 19_{(12)}$ y $19_{(12)}$ es múltiplo de $7_{(12)}$ luego $22638_{(12)}$ es múltiplo de $7_{(12)}$.

*Demostración*:

Sea

$$N_{(7k+5)} = (7k+5)^t C_t + (7k+5)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (7k+5)^2 C_2 + (7k+5)^1 C_1 + (7k+5)^0 C_0,\ t \in \mathbb{N}$$

Sea $M_{(7k+5)}$ un número de $t$ cifras de que resulta de eliminar $C_o$ de $N_{(7k+5)}$, esto es:

$$M_{(7k+5)} = (7k+5)^{t-1} C_t + (7k+5)^{t-2} C_{t-1} + \cdots + (7k+5) C_2 + C_1$$

Tenemos que:

$$N_{(7k+5)} = (7k+5) M_{(7k+5)} + C_0 \ (1)$$

Sin pérdida de generalidad, tomamos la resta del número mayor menos el número menor, según la hipótesis $M_{(7k+5)} - 4C_0 = 7w$, entonces por relación de adicción y sustracción tenemos que

$M_{(7k+5)} = 7w + 4C_0$, sustituyendo esto en (1) obtenemos:

$$N_{(7k+5)} = (7k+5)(7w + 4C_0) + C_0$$

Luego $N_{(7k+5)} = 49kw + 28kC_0 + 35w + 21C_0$, lo cual, utilizando el **T8**, puede escribirse como

$$N_{(7k+5)} = 7\,[7kw + 4kC_0 + 5w + 3C_0] = 7e.$$

Por lo tanto, concluimos que $N_{(7k+5)}$ es múltiplo de 7 que era lo que deseábamos demostrar.

→ Para esta demostración se razona similarmente a divisibilidad por 7 en base 10.

■

***En bases de la forma 7k + 6***

En base $7k + 6$ un número $N$, esto es $N_{(7k+6)}$,es divisible por 7 si y solo si la diferencia entre el resultado de sumar las cifras de posiciones impares y el resultado de sumas las cifras de posiciones pares de $N_{(7k+6)}$ es múltiplo de 7.

Ejemplos:

- Sea $23023_{(6)}$, realizando la suma de las cifras de posiciones pares e impares se tiene $3 + 2 = 5$ y $2 + 0 + 3 = 5$, respectivamente, y $5 – 5 = 0$. Como 0 es múltiplo de 5, entonces $23023_{(6)}$ es múltiplo de 5.
- Tomemos $10B5_{(13)}$, se tiene $1 + B = C$ y $0 + 5 = 5$, hacemos $C – 5 = 7$, y 7 es múltiplo de 7 en base 13.

*Demostración*:

Esta demostración es similar a la realizada en múltiplos de $n + 1$ en base $n$, segundo criterio. (Ver Múltiplosnmas1)

■

### 3.4.6. Divisibilidad por 11

***En bases de la forma 11k***

Un número $N_{(11k)}$ es divisible por 11 si y solo si la cifra de las unidades es múltiplo de 11.

Ejemplos:

- Sea $4AAA0_{(11)}$ es divisible por 11, pues su última cifra es cero, y cero es múltiplo de 11.
- Si se tiene $44510_{(11)}$ es divisible por 11, pues su última cifra es cero, y cero es múltiplo de 11.

  *Demostración:*

Esta demostración es similar a la realizada para múltiplos de $n$ en base $n$. (Ver Múltiplosn)

■

***En bases de la forma* 11*k* + 1**

Un número $N_{(11k+1)}$ es divisible por 11 si la suma de sus cifras es múltiplo de 11.

Ejemplos:

- Consideremos el número $35680_{(12)}$, la suma de sus cifras es $3_{(12)} + 5_{(12)} + 6_{(12)} + 8_{(12)} + 0_{(12)} = 1A_{(12)}$ y $1A_{(12)}$ es divisible por $B_{(12)}$, luego $35680_{(12)}$ es múltiplo de $B_{(12)}$.
- Sea $29506B_{(12)}$, la suma de sus cifras es $2_{(12)} + 9_{(12)} + 5_{(12)} + 0_{(12)} + 6_{(12)} + B_{(12)} = 29_{(12)}$ y $29_{(12)}$ es divisible por $B_{(12)}$, luego $29506B_{(12)}$ es múltiplo de $B_{(12)}$.

*Demostración:*

Esta demostración es similar a la demostración de múltiplos de $n - 1$ en base $n$. (Ver Múltiplosn)

■

***En bases de la forma* 11*k* + 2**

En base $11k + 2$ un número $N$, esto es $N_{(11k+2)}$, es divisible por 11 si la suma entre el resultado de multiplicar el número sin la cifra de sus unidades por 2 y la cifra de las unidades, el resultado es múltiplo de 11.

Ejemplos:

- Sea $2807_{(13)}$, como el numero sin la cifra de sus unidades es $280_{(13)}$, hacemos $280_{(13)} \cdot 2_{(13)} = 530_{(13)}$. Ahora $530_{(13)} + 7_{(13)} = 537_{(13)}$, siguiendo el algoritmo tenemos $53_{(13)} \cdot 2_{(13)} = A6_{(13)}$, entonces $A6_{(13)} + 7_{(13)} = B0_{(13)}$, ahora tenemos $B_{(13)} \cdot 2_{(13)} = 19_{(13)}$, entonces $19_{(13)} + 0_{(13)} = 19_{(13)}$ y $19_{(13)}$ es múltiplo de $B_{(13)}$ luego $2807_{(13)}$es múltiplo de $B_{(13)}$.
- Sea $39669_{(13)}$ como el numero sin la cifra de sus unidades es $3966_{(13)}$, hacemos $3966_{(13)} \cdot 2_{(13)} = 75CC_{(13)}$. Ahora $75CC_{(13)} + 9_{(13)} = 7608_{(13)}$, siguiendo el algoritmo tenemos $760_{(13)} \cdot 2_{(13)} = 11C0_{(13)}$, entonces $11C0_{(13)} + 8_{(13)} = 11C8_{(13)}$, ahora realizando el procedimiento nuevamente, $11C_{(13)} \cdot 2_{(13)} = 23B_{(13)}$, entonces $23B_{(13)} + 8_{(13)} = 246_{(13)}$, ahora tenemos $24_{(13)} \cdot 2_{(13)} = 48_{(13)}$, entonces $48_{(13)} + 6_{(13)} = 51_{(13)}$ finalmente tenemos

$5_{(13)} \cdot 2_{(13)} = A_{(13)}$, entonces $A_{(13)} + 1_{(13)} = B_{(13)}$ y $B_{(13)}$ es múltiplo de $B_{(13)}$ luego $24_{(13)} \cdot 2_{(13)} = 48_{(13)}$, entonces $48_{(13)} + 6_{(13)} = 51_{(13)}$es múltiplo de $B_{(13)}$.

*Demostración:*

Sea

$$N_{(11k+2)} = (11k+2)^t C_t + \cdots + (11k+2)^2 C_2 + (11k+2)^1 C_1 + (11k+2)^0 C_0,\ t \in \mathbb{N}$$

Y sea $M_{(11k+2)}$ un número de $t$ cifras de que resulta de eliminar $C_o$ de $N_{(11k+2)}$, esto es:

$$M_{(11k+2)} = (11\mathrm{k}+2)^{t-1} C_t + (11\mathrm{k}+2)^{t-2} C_{t-1} + \cdots + (11\mathrm{k}+2) C_2 + C_1$$

Por hipótesis tenemos que

$$2M_{(11k+2)} + C_0 = 11k \qquad (1)$$

Como

$$N_{(11k+2)} = (11k+2) M_{(11k+2)} + C_0$$

Por relaciones entre adición y sustracción tenemos que

$$N_{(11k+2)} - (11k+2) M_{(11k+2)} = C_0$$

Sustituyendo esto en (1), llegamos a

$$2M_{(11k+2)} + N_{(11k+2)} - (11k+2) M_{(11k+2)} = 11k$$

Aplicando **T7** y **T11** obtenemos

$$2M_{(11k+2)} + N_{(11k+2)} - 11kM_{(11k+2)} - 2M_{(11k+2)} = 11k$$

Utilizando relaciones entre adición y sustracción

$$N_{(11k+2)} - 11kM_{(11k+2)} = 11k$$

Aplicando nuevamente relaciones entre adición y sustracción y **T8**

$$N_{(11\mathrm{k}+2)} = 11k + 11kM_{(11k+2)} = 11\left(k + kM_{(11k+2)}\right)$$

Por tanto $N_{(11k+2)}$ es múltiplo de 11.

■

***En bases de la forma* 11*k* + 3**

En base $11k + 3$ un número $N$, esto es $N_{(11k+3)}$, es divisible por 11 si y solo si la diferencia entre el resultado de multiplicar la última cifra por 7 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 11.

Ejemplos:

- Sea $1C252_{(14)}$, como su última cifra es $2_{(14)}$, hacemos $2_{(14)} \cdot 7_{(14)} = 10_{(14)}$. Ahora $1C252_{(14)} - 10_{(14)} = 1C15_{(14)}$, siguiendo el algoritmo tenemos $5_{(14)} \cdot 7_{(14)} = 27_{(14)}$, entonces $1C1_{(14)} - 27_{(14)} = 198_{(14)}$, ahora tenemos $8_{(14)} \cdot 7_{(14)} = 40_{(14)}$, entonces como $40_{(14)} > 19_{(14)}$ luego $40_{(14)} - 19_{(14)} = 25_{(14)}$ y $25_{(14)}$ es múltiplo de $B_{(14)}$ luego $1C252_{(14)}$ es múltiplo de $B_{(14)}$.
- Consideremos el número $12022_{(3)}$, como su última cifra es $2_{(3)}$, hacemos $2_{(3)} \cdot 21_{(3)} = 112_{(3)}$. Ahora $1202_{(3)} - 112_{(3)} = 1020_{(3)}$, finalmente tenemos $0_{(3)} \cdot 21_{(3)} = 0_{(3)}$, entonces $102_{(3)} - 0_{(3)} = 102_{(3)}$ y $102_{(3)}$ es múltiplo de $102_{(3)}$ luego $12022_{(3)}$ es múltiplo de $102_{(3)}$.

*Demostración:*

Esta demostración es similar a la demostración para múltiplos de 7 en base $7k + 2$. (Ver Div7B7k2)

■

***En bases de la forma* 11*k* + 4**

En base $11k + 4$ un número $N$, esto es $N_{(11k+4)}$, es divisible por 11 si y solo si la suma entre el resultado de multiplicar la última cifra por 3 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 11.

Ejemplos:

- Sea $8643_{(15)}$, como su última cifra es $3_{(15)}$, hacemos $3_{(15)} \cdot 3_{(15)} = 9_{(15)}$. Ahora $864_{(15)} + 9_{(15)} = 86D_{(15)}$, siguiendo el algoritmo tenemos $D_{(15)} \cdot 3_{(15)} = 29_{(15)}$, entonces

$86_{(15)} + 29_{(15)} = B0_{(15)}$. Finalmente tenemos $0_{(15)} \cdot 3_{(15)} = 0_{(15)}$, entonces $B_{(15)} + 0_{(15)} = B_{(15)}$ y $B_{(15)}$ es múltiplo de $B_{(15)}$ luego $8643_{(15)}$ es múltiplo de $B_{(15)}$.

- Si tenemos $2033_{(4)}$ como su última cifra es $3_{(4)}$ entonces hacemos $3_{(4)} \cdot 3_{(4)} = 21_{(4)}$. Ahora $203_{(4)} + 21_{(4)} = 230_{(4)}$.Finalmente tenemos $0_{(4)} \cdot 3_{(4)} = 0_{(4)}$, entonces $23_{(4)} + 0_{(4)} = 23_{(4)}$ y $23_{(4)}$ es múltiplo de $23_{(4)}$ luego $2033_{(4)}$ es múltiplo de $23_{(4)}$.

*Demostración:*

Esta demostración es similar a la realizada en múltiplos de 5 en base $5k + 3$. (Ver Div5B5k3)

■

### *En bases de la forma* $11k + 5$

En base $11k + 5$ un número $N$, esto es $N_{(11k + 5)}$, es divisible por 11 si y solo si la diferencia entre el resultado de multiplicar la última cifra por 2 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 11.

Ejemplos:

- Si tenemos $720A_{(16)}$ su última cifra es $A_{(16)}$, entonces hacemos $A_{(16)} \cdot 2_{(16)} = 14_{(16)}$. Ahora $720_{(16)} - 14_{(16)} = 70C_{(16)}$.Finalmente tenemos $C_{(16)} \cdot 2_{(16)} = 18_{(16)}$, entonces tenemos $70_{(16)} - 18_{(16)} = 58_{(16)}$ y $58_{(16)}$ es múltiplo de $B_{(16)}$ luego $720A_{(16)}$ es múltiplo de $B_{(16)}$.
- Sea $1104_{(5)}$ su última cifra es $4_{(5)}$, entonces hacemos $4_{(5)} \cdot 2_{(5)} = 13_{(5)}$. Entonces $110_{(5)} - 13_{(5)} = 42_{(5)}$ y $42_{(5)}$ es múltiplo de $14_{(5)}$ luego $1104_{(5)}$ es múltiplo de $14_{(5)}$.

*Demostración:*

Esta demostración es similar a la realizada para múltiplos de 7 en bases $7k + 3$. (Ver Div7B7k3)

■

***En bases de la forma* 11*k* + 6**

Un número $N_{(11k+6)}$ es divisible por 11 si y solo si la suma entre el resultado de multiplicar la última cifra por 2 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 11.

Ejemplos:

- Sea $54515_{(6)}$, como su última cifra es $5_{(6)}$, hacemos $5_{(6)} \cdot 2_{(6)} = 14_{(8)}$. Ahora $5451_{(6)} + 14_{(6)} = 5505_{(6)}$, siguiendo el algoritmo tenemos $5_{(6)} \cdot 2_{(6)} = 14_{(6)}$, entonces $550_{(6)} + 14_{(6)} = 1004_{(6)}$, ahora $4_{(6)} \cdot 2_{(6)} = 12_{(6)}$, entonces $100_{(6)} + 12_{(6)} = 112_{(6)}$ Finalmente tenemos $2_{(6)} \cdot 2_{(6)} = 4_{(6)}$, entonces $11_{(6)} + 4_{(6)} = 15_{(6)}$ y $15_{(6)}$ es múltiplo de $15_{(6)}$ luego $54515_{(6)}$ es múltiplo de $15_{(6)}$.
- Si tenemos $1914_{(17)}$ como su última cifra es $4_{(17)}$ entonces hacemos $4_{(17)} \cdot 2_{(17)} = 8_{(17)}$. Ahora $191_{(17)} + 8_{(17)} = 199_{(17)}$, siguiendo el algoritmo tenemos $9_{(17)} \cdot 2_{(17)} = 11_{(17)}$ luego $19_{(17)} + 11_{(17)} = 2A_{(17)}$. Finalmente tenemos $A_{(17)} \cdot 2_{(17)} = 13_{(17)}$ luego $2_{(17)} + 13_{(17)} = 15_{(17)}$ y $15_{(17)}$ es múltiplo de $15_{(17)}$ luego $1914_{(17)}$ es múltiplo de $15_{(17)}$.

*Demostración:*

Esta demostración es similar a la realizada para múltiplos de 5 en bases 5*k* + 3. (Ver Div5B5k3)

■

***En bases de la forma* 11*k* + 7**

En base 11*k* + 7 un número *N*, esto es $N_{(11k+7)}$, es divisible por 11 si y solo si la suma del producto de la cifra de las unidades por $10_{(11k+7)}$ y esta cifra es múltiplo de 11.

Ejemplos:

- Sea $225366_{(7)}$, como su última cifra es $6_{(7)}$, realizando el algoritmo con la última cifra tenemos $66_{(7)}$. Ahora $22536_{(7)} + 66_{(7)} = 22635_{(7)}$, siguiendo el mismo procedimiento tenemos $55_{(7)}$, entonces $2263_{(7)} + 55_{(7)} = 2351_{(7)}$, ahora tenemos $11_{(7)}$, entonces $235_{(7)} + 11_{(7)} = 246_{(7)}$, ahora tenemos $66_{(7)}$, entonces $24_{(7)} + 66_{(7)} = 123_{(7)}$, finalmente llegamos a $33_{(7)}$, entonces $12_{(7)} + 33_{(7)} = 45_{(7)}$ y $45_{(7)}$ es múltiplo de $14_{(7)}$, luego $225366_{(7)}$ es múltiplo de $14_{(7)}$.

- Si tenemos $23340_{(7)}$, como su última cifra es $0_{(7)}$, multiplicando esta por 10 y sumando 0, tenemos $00_{(7)}$.Ahora $2334_{(7)} + 00_{(7)} = 2334_{(7)}$, siguiendo el algoritmo tenemos $44_{(7)}$, entonces $233_{(7)} + 44_{(7)} = 310_{(7)}$, Finalmente llegamos a $00_{(7)}$, entonces $31_{(7)} + 00_{(7)} = 31_{(7)}$ y $31_{(7)}$ es múltiplo de $14_{(7)}$, luego $23340_{(7)}$ es múltiplo de $14_{(7)}$.

*Demostración:*

$$N_{(11k+7)} = (11k+7)^t C_t + (11k+7)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (11k+7)^2 C_2 + (11k+7)^1 C_1 + (11k+7)^0 C_0,\ t \in \mathbb{N}$$

Sea $M_{(11k+7)}$ un número de $t$ cifras de que resulta de eliminar $C_0$ de $N_{(11k+7)}$, esto es:

$$M_{(11k+7)} = (11k+7)^{t-1} C_t + (11k+7)^{t-2} C_{t-1} + \cdots + (11k+7) C_2 + C_1$$

Tenemos que:

$$N_{(11k+7)} = (11k+7) M_{(11k+7)} + C_0$$

Según la hipótesis tenemos $M_{(11k+7)} + ((11k+7)^1 C_0 + (11k+7)^0 C_0) = 11w$

Esto es

$$[(11k+7)^{t-1} C_t + (11k+7)^{t-2} C_{t-1} + \cdots + (11k+7) C_2 + C_1] + [(11k+7)^1 C_0 + (11k+7)^0 C_0] = 11w$$

Multiplicando a ambos lados de la igualdad por $11k + 7$ tenemos

$$[(11k+7)^t C_t + (11k+7)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (11k+7)^2 C_2 + (11k+7) C_1] + [(11k+7)^2 C_0 + (11k+7) C_0] = 11w(11k+7)$$

Por **T1,** sumando y restando $(11k+7)^0 C_0$ al lado izquierdo de la igualdad, tenemos

$$[(11k+7)^t C_t + (11k+7)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (11k+7)^2 C_2 + (11k+7) C_1] + [(11k+7)^2 C_0 + (11k+7) C_0] + (11k+7)^0 C_0 - (11k+7)^0 C_0 = 11w(11k+7)$$

Por **T4**, y **T12** llegamos a

$$[(11k+7)^t C_t + (11k+7)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (11k+7)^2 C_2 + (11k+7) C_1 + (11k+7)^0 C_0] + [(11k+7)^2 C_0 + (11k+7) C_0 - (11k+7)^0 C_0] = 11w(11k+7)$$

Como

$$N_{(11k+7)} = (11k+7)^t C_t + (11k+7)^{t-1} C_{t-1} + \cdots + (11k+7)^2 C_2 + (11k+7)^1 C_1 + (11k+7)^0 C_0$$

Entonces

$$N_{(11k+7)} + [(11k+7)^2 C_0 + (11k+7)C_0 - (11k+7)^0 C_0] = 11w(11k+7)$$

$$N_{(11k+7)} + [(11k+7)^2 C_0 + (11k+7)C_0 - (11k+7)^0 C_0] = 11w(11k+7)$$

Como $(11k+7)^2 C_0 + (11k+7)C_0 - (11k+7)^0 C_0 = 11p$, si hacemos $11w(11k+7) = 11q$ entonces tenemos$N_{(11k+7)} + 11p = 11q$.

Así que para que se dé esa igualdad, por propiedades de divisibilidad se tiene que $N_{(11k\,+\,7)}$ es múltiplo de 11. Luego $N_{(11k+7)}$ es múltiplo de 11.

■

***En bases de la forma* 11*k* + 8**

En base $11k$ + 8 un número $N$, esto es $N_{(11k\,+\,8)}$,es divisible por 11 si y solo si la diferencia entre el resultado de multiplicar la última cifra por 4 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 11.

Ejemplos:

- Si tenemos $226043_{(8)}$ su última cifra es $3_{(8)}$, entonces hacemos $3_{(8)} \cdot 4_{(8)} = 12_{(8)}$, luego $22604_{(8)} – 12_{(8)} = 22570_{(8)}$. Ahora tenemos $0_{(8)} \cdot 4_{(8)} = 0_{(8)}$, luego $2257_{(8)} – 0_{(8)} = 2257_{(8)}$, siguiendo el algoritmo $7_{(8)} \cdot 4_{(8)} = 34_{(8)}$, luego $225_{(8)} – 34_{(8)} = 171_{(8)}$, finalmente tenemos $1_{(8)} \cdot 4_{(8)} = 4_{(8)}$, luego $17_{(8)} – 4_{(8)} = 13_{(8)}$ y $13_{(8)}$es múltiplo de $13_{(8)}$ luego $226043_{(8)}$ es múltiplo de $13_{(8)}$.
- Sea $13204_{(8)}$ su última cifra es $4_{(8)}$ entonces tenemos $4_{(8)} \cdot 4_{(8)} = 20_{(8)}$, luego $1320_{(8)} – 20_{(8)} = 1300_{(8)}$, siguiendo el algoritmo $0_{(8)} \cdot 4_{(8)} = 0_{(8)}$, luego $130_{(8)} – 0_{(8)} = 130_{(8)}$, finalmente tenemos $0_{(8)} \cdot 4_{(8)} = 0_{(8)}$, luego $13_{(8)} – 0_{(8)} = 13_{(8)}$ y $13_{(8)}$ es múltiplo de $13_{(8)}$ luego $13204_{(8)}$ es múltiplo de $13_{(8)}$.

*Demostración:*

Esta demostración es similar a la realizada para múltiplos de 7 en bases $7k$ + 5. (Ver Div7B7k5)

■

***En bases de la forma* 11*k* + 9**

En base $11k + 9$ un número $N$, esto es $N_{(11k + 9)}$, es divisible por 11 si y solo si la diferencia entre el resultado de multiplicar la cifra de las unidades por 6 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 11.

Ejemplo:

- Si tenemos $672070_{(9)}$ su última cifra es $0_{(9)}$, entonces hacemos $0_{(9)} \cdot 6_{(9)} = 0_{(9)}$, luego $67207_{(9)} - 0_{(9)} = 67207_{(9)}$. Ahora tenemos $7_{(9)} \cdot 6_{(9)} = 46_{(9)}$, luego $6720_{(9)} - 46_{(9)} = 6663_{(9)}$, siguiendo el algoritmo $3_{(9)} \cdot 6_{(9)} = 20_{(9)}$, luego $666_{(9)} - 20_{(9)} = 646_{(9)}$, finalmente tenemos $6_{(9)} \cdot 6_{(9)} = 40_{(9)}$, luego $64_{(9)} - 40_{(9)} = 24_{(9)}$ y $24_{(9)}$ es múltiplo de $12_{(9)}$ luego $672070_{(9)}$ es múltiplo de $12_{(9)}$.
- Sea $7348_{(9)}$ su última cifra es $8_{(9)}$, entonces hacemos $8_{(9)} \cdot 6_{(9)} = 53_{(9)}$, luego $734_{(9)} - 53_{(9)} = 671_{(9)}$, finalmente tenemos $1_{(9)} \cdot 6_{(9)} = 6_{(9)}$, luego $67_{(9)} - 6_{(9)} = 61_{(9)}$ y $61_{(9)}$ es múltiplo de $12_{(9)}$ luego $7348_{(9)}$ es múltiplo de $12_{(9)}$.

*Demostración:*

Esta demostración es similar a la realizada para múltiplos de 7 en bases $7k + 5$. (VerDiv7B7k5)

■

***En bases de la forma* 11*k* + 10**

Un número $N_{(11k + 10)}$ es divisible por 11 si y solo si la suma de las cifras de posición par se le resta la suma de las cifras de posición impar y se obtiene 0 o un múltiplo de 11.

Ejemplo:

- Sea 69872 entonces la suma de las cifras de posición par es 7 + 9 = 16, la suma de las cifras de posición impar es 2 + 8 + 6 = 16, haciendo la diferencia tenemos 16 – 16 = 0, entonces 69872 es múltiplo de 11.
- Si tenemos 60214 entonces la suma de las cifras de posición par es 1 + 0 = 1, la suma de las cifras de posición impar es 4 + 2 + 6 = 12, haciendo la diferencia tenemos 12 – 1 = 11, entonces 60214 es múltiplo de 11.

*Demostración:*

Esta demostración es similar a la realizada para el criterio $n + 1$ en base $n$ segundo criterio. (Ver Múltiplosnmas1)

■

## 4. Conclusiones

Grandes matemáticos como Leonardo de Pisa dedicaron un poco de su vida al estudio de este tema, pues nos muestra unos criterios totalmente diferentes a los utilizados actualmente basados en la regla del 9, tiempo después Pascal nos deja ver un asombroso criterio que sirve para todas las bases:

"Dado que $N = (a_n \dots a_0)_\beta$,$R_0$= 1, y $R_i$ es el residuo cuando $k$ es dividido por $\beta R_{i-1}$para cada$i$= 1,2,…,$n$, entonces N es un múltiplo de $k$ si y solo si T es múltiplo de $k$ (Ver Tabla2)"

Este recuentro histórico nos sirvió para visualizar y reconocerla magnitud del trabajo que se ha venido haciendo respecto al tema y tener ideas sobre dónde empezar para buscar criterios diferentes y creativos.

Con respecto a los criterios, podemos concluir que basarnos en los criterios base diez ya conocidos nos permitió generalizarlos y realizar la extensión para otras bases, por ejemplo, el criterio de divisibilidad por $n$ en base $n$ está basado en el criterio de divisibilidad por diez, el criterio múltiplos de $n + 1$ en base $n$, es el mismo criterio en base diez utilizado para la divisibilidad por 11 y el criterio múltiplos de $n - 1$ en base $n$ es el mismo criterio utilizado en la divisibilidad por 9. De la misma manera, todos los criterios de divisibilidad por $n$ en bases de la forma $nk + 10$ o $nk + w = 10$, son los mismos conocidos en base diez, por ejemplo, en bases de la forma $7k + 10$ o $7k + 3$, el criterio de divisibilidad por 7 es el mismo usado en base diez solo que de manera general.

Sobre el contenido del trabajo, concluimos que los para saber si un número es múltiplo de $n$ en base $n$, únicamente basta con mirar la última cifra, pues esta debe ser cero.

En bases de la forma $nk$, un número es múltiplo de otro en base $n$ si su última cifra es múltiplo de $n$.

Los criterios de divisibilidad por 5 y 7, son criterios análogos y comparten un algoritmo similar, en donde debemos hacer una operación con la cifra de las unidades y luego usar el número que se compone de las cifras restantes sin la cifra de las unidades.

Hay algunos criterios que a primera vista parecen no funcionar en cuanto a la falta de relación que tiene con la base a la que está escrito, como es el caso del segundo criterio de divisibilidad por 7 en bases de la forma $7k + 3$, pues, este criterio se comporta de manera diferente relacionando la posición de cada cifra del número con una potencia de 3.

La labor matemática que se realizó nos sirvió para formar un cimiento en nuestra formación profesional para que en un futuro podamos producir investigación y academia no solo en el ámbito matemático sino pedagógico, también nos permitió evaluar nuestras habilidades matemáticas y la manera en que comunicamos nuestras ideas.

Finalmente, esperamos que este trabajo sirva como base bibliográfica a los docentes en formación de la Licenciatura en matemáticas no solo de la Universidad Pedagógica Nacional, sino de otras, con el fin de contribuir en posibles consultas asociadas al tema de divisibilidad, como ¿En qué momento de los elementos aparece el algoritmo de la división como proposición?

# 5. Bibliografía


Álgebra, G. d. (2013). Notas de clase. *Seminario de Álgebra.* Bogotá.

Beppo, L. (2006). *Leyendo a Euclides.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Euclides. (1970). *Elementos de Geometría* (Vol. 1). (F. Vera, Trad.) Dover.

Glaser, A. (1971). *History of binay and other nondecimal numeration.* Pensivania: Tomash Publishers.

Gonzalés, F. (2004). *Apuntes de Matemática Discreta. Divisibilidad. El algoritmo de la division.* Cádiz, España: Universidad de Cádiz.

Illiana, J. (Junio de 2008). Matemáticas y astronomía en la Mesopotamía. *Suma*(58), 49 - 61.

Luque, C., Ángel, L. l., & Jiménez, H. (2009). *Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Representar estructuras algebraicas finitas y enumerable.* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C., Mora, L., & Paez, J. (2013). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos, contar e inducir.* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Martín, C. (2012). *Unidad didáctica: Divisibilidad de números naturales, múltiplos y divisores.* Universidad de Granada. Granada: Universidad de Granada.

Pisa, L. D. (1602). *Liber Abaci.*

Rubiano, G., Jimenéz, L., & Gordillo, J. (2004). *Teoría de números para principiantes* (Segunda ed.). Bogotá, Colombia: Pro - Offset Editorial Ltda.

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.* Barcelona: Crítica.