TIPIFICACIÓN DE ERRORES Y DIFICULTADES EN EL DESARROLLO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO

JOHN KEVIN ZUBIETA LAGOS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2018

TIPIFICACIÓN DE ERRORES Y DIFICULTADES EN EL DESARROLLO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO

JOHN KEVIN ZUBIETA LAGOS

Trabajo de grado

Directora
TANIA JULIETH PLAZAS MERCHÁN
Profesora

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2018

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos.

Agradecimientos

Expreso mis agradecimientos:

A la Universidad Pedagógica Nacional, por formarme como profesional integral para el desarrollo de la sociedad.

A mi Asesora de Trabajo de Grado, Profesora Tania Julieth Plazas Merchán, quien fue de vital importancia para el desarrollo de este documento.

A los estudiantes de grado décimo del colegio Integral Ervid año 2017, quienes permitieron y desarrollaron las actividades propuestas para el estudio.

A mi madre Blanca Lagos, quien ha sido mi mayor apoyo durante mi formación como docente en cada momento.

A mi novia, Cindy Garzón, quien ha compartido todo este tiempo conmigo y estuvo siempre a mi lado.

A mi hermana Kelly Montenegro, que desde el cielo es mi ángel de la guarda.

A mi amiga, Jasbleidy Vivas, quien ha sido un gran apoyo en mi carrera.

1. Información General

Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Título del documento	Tipificación de errores y dificultades en el desarrollo de las funciones trigonométricas de estudiantes de grado décimo.
Autor(es)	Zubieta Lagos, John Kevin
Director	Plazas Merchán, Tania Julieth
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2018, 70 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	ERRORES, DIFICULTADES, TRIGONOMETRÍA.

2. Descripción

Este documento presenta es el trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, el cual se adscribe a la modalidad monografía asociada al estudio de un interés particular del estudiante.

En este trabajo de grado se hace un análisis de errores y dificultades que los estudiantes de grado décimo presentan en torno al estudio de las funciones trigonométricas y algunas de sus transformaciones. Este trabajo nace de un interés del autor por analizar los posibles errores y dificultades que se presentan en el manejo de las funciones trigonométricas.

Para ello, se diseñaron actividades, con el fin de recolectar información sobre los errores y dificultades de los estudiantes, estas actividades tienen como propósito:

Actividad 1: Construir la función coseno, por medio de la copia de medidas de segmento generadas por los triángulos rectángulos en el círculo unitario.

Actividad 2: Grafica de la función secante

Actividad 3: Transformar y hacer la gráfica de una función trigonométrica.

Con los datos recolectados se realiza un análisis sobre errores y dificultades que presentan los estudiantes durante el desarrollo de estas tareas, a partir de unos errores y dificultades establecidos, por el autor de este trabajo, previamente en el capítulo de 3, metodología.

3. Fuentes

Engler, A., Gregorini, M, Müller D, Vrancken, S., Hecklein, M. (2004). *Los errores en el aprendizaje de las matemáticas.* Facultad de ciencias agrarias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina.

Fernández, J., (2010). *Unidad Didáctica: Trigonometría.* Máster en formación al profesorado de enseñanza secundaria. Universidad de granada.

Flores, F., (2008). *Historia y didáctica de la trigonometría.* Portada diseño y difusión de la obra: Ittakus. Recuperado en *www.publicatuslibros.com* .

Franchi, L., Hernández, A., (2004). *Tipología de errores en el área de geometría plana.* Universidad de los Andes. Mérida. Venezuela. Educere, vol. 8.

Godino, J., Batanero, C., Font, V., (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Proyecto Edumat-Maestros.

González, C., Mendoza, A, Mora, L, (2017). *Currículo de trigonometría ¿Decisión de otros?* Universidad Pedagógica Nacional. Colegio Calasanz. Foro EMAD 2017.

López, L. Alanís, A. Pérez, O. (2005). *La habilidad ubicación espacial matemática, como habilidad esencial en la visualización matemática*. Acta Latinoamérica de matemática educativa. Vol. 18.

Malva, A., Rogiano, C., Roldán, G., Banchik, M. (2008). *Fortaleciendo las habilidades matemáticas de los alumnos ingresantes desde los entornos virtuales.* Facultad de ciencias económicas. UNL. Argentina.

Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia. (2006*). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Pág. (87-89).

Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia. (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Colombia Aprende. Grado Décimo.

Montalvo, R. (2012). *Historia de la trigonometría y su enseñanza*. Facultad de ciencias fisicomatemáticas. Benemérita Universidad autónoma de Puebla. México

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de la Laguna

Ruano, R. Socas, M. Palarea, M. (1984). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra.

Sánchez, H., (2014), *Las funciones trigonométricas seno y coseno a partir de sus aplicaciones.* Maestría en la enseñanza de las ciencias exactas y naturales. Universidad Nacional de Colombia.

Steward, J., Redlin, L., Saleem, W. (2007). *Precalculo.* Matemáticas para el cálculo. Cengage Learning. Quinta edición.

4. Contenidos

En este trabajo se presentan cinco capítulos los cuales están organizados de la siguiente manera. El *capítulo uno* está de la justificación del trabajo y los objetivos general y específicos. El *capítulo dos* está dedicado al marco teórico que fundamenta este trabajo desde los campos matemáticos y didácticos. En el *capítulo tres* se describe la metodología, se presentan las etapas del estudio que incluye: descripción de la población, descripción de las actividades y las categorías de análisis. En el *capítulo cuatro*, se muestra el análisis de las actividades aplicadas, se hace el análisis de cinco estudiantes escogidos aleatoriamente. Por último, en *el capítulo cinco* se establecen las conclusiones. Este documento también se presenta la bibliografía y los respectivos anexos.

5. Metodología

Para el desarrollo de este trabajo se diseñaron algunas actividades, con el fin de aplicarlas a estudiantes de grado décimo, los propósitos de dichas actividades eran: recolectar información sobre el trabajo y desarrollo de las funciones trigonométricas, evidenciar errores y dificultades presentados por los estudiantes. Esto permitió el análisis de las actividades realizadas por cinco estudiantes, escogidos aleatoriamente, utilizando categorías de análisis fundamentadas en la teoría y la experiencia del maestro en formación.

6. Conclusiones

El trabajo con funciones trigonométricas para estudiantes de grado décimo ha sido fundamental en el currículo de matemáticas colombiano durante más de 60 años, por ello, el objetivo principal de este trabajo es analizar los procesos de aprendizaje identificar y tipificar los posibles errores y dificultades (realizados por los autores) de los estudiantes en la transformación de dichas funciones. Además de ello, se encontraron nuevos errores y dificultades que no están en los documentos consultados, por ello se hace una tipificación de los mismos.

En general, las actividades desarrolladas fueron diseñadas con el fin de analizar tres ámbitos en el trabajo de las funciones trigonométricas, la gráfica de una función trigonométrica a partir del circulo unitario y usando los valores que se obtienen de tabular y las transformaciones de funciones trigonométricas. Sin embargo se evidencia que los estudiantes tienen falencias relacionadas con preconceptos como ubicación de puntos en el plano cartesiano, la definición de función y en relación al manejo de artefactos, como el transportador.

Durante el análisis de las tareas desarrolladas por los estudiantes, al realizar comparaciones entre los ellos, se observó que los errores **ER1, EP1** y **DUCR1** se presentan en todos los estudiantes, por lo cual, se establece que los estudiantes tienen errores y dificultades con el manejo del plano cartesiano, del curvígrafo y el trazo de las curvas, que son importantes al momento del trabajo de las funciones trigonométricas. Aunque en clases anteriores y posteriores se realizaron socializaciones de lo realizado en las tareas, con el fin de superar las dificultades presentadas y minimizar los errores, en la última actividad se siguieron presentando algunos de estos.

En las producciones de los estudiantes no solo se evidenciaron los errores establecidos en la teoría en la que se basó este trabajo, sino que se presentaron nuevos errores y dificultades que no se tenían previstos, los cuales se denominaron **DAC0, ECE1, DNG1, DCTR1** y **DMTI** respectivamente. El autor de este trabajo considera que tales errores y dificultades son consecuencias de vacíos conceptuales, problemas en la enseñanza, dificultades en la interpretación de la definición y el mal uso del curvígrafo y transportador.

Se recomienda que, para tratar de corregir dichos errores y dificultades, se deben diseñar actividades que propicien a un mejor desarrollo de los contenidos, en donde se refuerce el trabajo con funciones trigonométricas mediante el uso de las TIC y la buena manipulación de la regla y el compás.

Durante el proceso de elaboración de este trabajo de grado he tenido crecimiento desde el aspecto personal, académico y profesional. En lo personal, porque ha sido una gran responsabilidad llevar a cabo todo el estudio, además me ha permitido mejorar en la puntualidad. Desde lo académico, que el diseño de las actividades, para estudiantes, debe ser algo riguroso, en lo cual se deben tener en cuentas varios aspectos tanto cognitivos, como sociales del estudiante. Profesionalmente, como futuro licenciado en matemáticas, soy consciente que este tipo de trabajos ayuda a mejorar la forma de escribir y obtener una mejor capacidad de investigación en el ámbito educativo.

Elaborado por:	Zubieta Lagos, John Kevin
Revisado por:	Plazas Merchán, Tania Julieth

Fecha de elaboración del Resumen:	26	04	2018

CONTENIDO

Tabla de ilustraciones

Tablas

INTRODUCCIÓN

Este documento presenta el trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, el cual se adscribe a la modalidad monografía asociada al estudio de un interés particular del estudiante.

En este trabajo de grado se hace un análisis de los errores y dificultades que los estudiantes de grado décimo presentan en torno al estudio de las funciones trigonométricas y algunas de sus transformaciones. Para ello, se diseñaron actividades relacionadas con el tema, con el fin de recolectar información sobre los errores y dificultades de los estudiantes.

En este trabajo se presentan cinco capítulos los cuales están organizados de la siguiente manera:

En el *capítulo uno* está la justificación del trabajo y los objetivos general y específicos.

El *capítulo dos* está dedicado al marco teórico que fundamenta este trabajo desde los campos de la matemática y su didáctica.

En el *capítulo tres* se presenta la metodología, se describe la población, las actividades propuestas y las categorías de análisis.

En el *capítulo cuatro*, se muestra el análisis de las actividades aplicadas, se hace el análisis de cinco estudiantes escogidos aleatoriamente.

Por último, en *el capítulo cinco* se establecen las conclusiones. Este documento también se presenta la bibliografía y los respectivos anexos.

1. JUSTIFICACIÓN

1.1. Justificación

Los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (LCM) proponen que se deben desarrollar diferentes procesos que provean, a los estudiantes, herramientas para que afronten situaciones que involucran las matemáticas en el diario vivir.

Los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (EBCM) como referente nacional en Colombia MEN (2006), establecen que un estudiante de grado décimo debe:

- Describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.
- Modelar situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas.
- Comparar y contrastar las propiedades de los números racionales, irracionales y reales, con sus operaciones y relaciones para construir.
- Manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.
- Analizar desde el punto de vista geométrico, reconociendo e identificando en forma visual, gráfica y algebraica las propiedades de las funciones trigonométricas y sus transformaciones.

Por tanto, el profesor debe promover en el aula procesos que permitan que el estudiante logre desarrollar las competencias antes mencionadas.

Por otro lado, de acuerdo con los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) (MEN, 2017) los estudiantes de grado décimo deben desarrollar algunos relacionados con las funciones trigonométricas, estos y sus evidencias relacionadas son:

Derecho 4. Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica su respuesta.

Evidencias relacionadas

- Reconoce el significado de las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo.
- Explora en una situación o fenómeno de variación periódica, valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diferentes representaciones.
  Modela fenómenos periódicos a través de las funciones trigonométricas
- Calcula algunos valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario.

Derecho 5. Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones

Evidencias relacionadas

- Localiza objetivos geométricos en el plano cartesiano.
- Representa lugares geométricos en el plano cartesiano, a partir de su expresión algebraica.

Derecho 6. Comprende y usa el concepto de razón de cambio para estudiar el cambio promedio y el cambio alrededor de un punto y lo reconoce en representaciones gráficas numéricas y algebraicas

Evidencias relacionadas

- Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y sus procesos de aproximación sucesiva
- Determina la tendencia numérica en relación con problemas prácticos como predicción del comportamiento futuro

Derecho 7. Resuelve problemas mediante el uso de propiedades de las funciones y usa representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes.

Evidencias relacionadas

- Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y sus procesos de aproximación sucesiva
- Utiliza representaciones gráficas o numéricas para tomar decisiones en problemas prácticos

Dado que se deben desarrollar las competencias antes mencionadas estipuladas por la ley en torno al desarrollo de las funciones trigonométricas, hemos encontrado algunos autores que han realizado trabajos de investigación sobre errores y dificultades que de presentan cuando los estudiantes trabajan funciones trigonométricas. Así mismo, Fernández (2010) en su unidad didáctica *Trigonometría* resalta algunos de ellos, éstos están en el ámbito algebraico, geométrico y aritmético. Por otro lado, Sánchez (2014) en su trabajo de grado *Las funciones trigonométricas seno y coseno a partir de sus aplicaciones* menciona diferentes dificultades en el aprendizaje de las funciones trigonométricas.

Como maestro en formación, debido a las experiencias personales, durante las prácticas pedagógicas he evidenciado errores y dificultades en el trabajo de las transformaciones de las funciones trigonométricas, en estudiantes de grado décimo. Es por ello, que por medio de este trabajo se hará una identificación y análisis de las tareas realizadas por los estudiantes de grado décimo del Colegio Integral Ervid al momento de trabajar las funciones trigonométricas y sus transformaciones.

1.2. Objetivos

1.2.1 General:

Tipificar los errores y dificultades que presentan los estudiantes de grado décimo en el trabajo con funciones trigonométricas y sus transformaciones.

1.2.2 Específicos:

- Diseñar algunas tareas para estudiantes de grado décimo en las cuales se estudien las funciones trigonométricas y sus transformaciones.
- Aplicar las tareas diseñadas a los estudiantes de grado décimo, en torno a las funciones trigonométricas y sus transformaciones, con el fin de recolectar información para posterior análisis.
- Realizar una revisión bibliográfica sobre dificultades y errores aritméticos, algebraicos y geométricos.
- Describir los errores y dificultades sobre funciones trigonométricas, que se utilizan como categorías de análisis de las tareas, que desarrollaron los estudiantes.
- Identificar errores y dificultades que presentan los estudiantes de grado décimo, durante el trabajo con funciones trigonométricas y sus transformaciones.

2. Marco teórico

2.1. Marco Matemático:

2.1.1 Historia de la trigonometría

Montalvo (2012) menciona que la historia de la trigonometría podría extenderse por más de 4000 años, los primeros registros se encuentran en la civilización babilónica, en donde determinaron aproximaciones de medidas de ángulos o de longitudes. Se tienen registros de tablas grabadas sobre arcilla, por ejemplo, en la siguiente ilustración se evidencian 15 ternas pitagóricas, y una columna de números que puede ser interpretada como una tabla de funciones trigonométricas

El nacimiento de los primeros ángulos, en donde se remonta a la época de la construcción de las pirámides en Egipto, allí los sacerdotes de esta era ya conocían dos hechos. El primero se debe al tiempo constante que se registran cuando dos estrellas dadas pasan por el meridiano de un mismo lugar, es decir, los momentos en que cada estrella alcanza su más alta posición; el segundo es que, en cualquier parte del mundo, al momento de que una estrella pase por el meridiano, el ángulo formado por la visual dirigido a la estrella y a la línea horizontal (ángulo de altura) siempre es el mismo.

Según Flores (2008), los inicios de la trigonometría datan hace más de 3.000 años en las civilizaciones egipcia y babilónica, en donde empleaban los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas para realizar medidas en la agricultura y los egipcios especialmente para la construcción de las pirámides. También se utilizó la trigonometría para resolver problemas astronómicos, además los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos, manejado, incluso, hoy en día. Grecia adoptó estos conocimientos de las civilizaciones egipcia y babilónica y fue Hiparco de Nicea creador de unas tablas de cuerdas para la resolución de triángulos planos, quien desarrolló la trigonometría. Luego, Tolomeo incorpora su libro de astronomía en donde daba bastantes ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo.

Al mismo tiempo que los griegos, los hindús desarrollaban un sistema trigonométrico basado en la función seno. En esta época el seno se estableció como la longitud del lado opuesto a un ángulo, en un triángulo rectángulo, de hipotenusa dada.

A finales del siglo VIII los astrónomos árabes siguieron desarrollando la trigonometría con la función seno, luego en el siglo X se completó el estudio de todas las funciones (seno, coseno, tangente, cotangente, cosecante, secante). También demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría, para triángulos planos y esféricos. Fueron ellos quienes sugirieron que el radio se tomase con valor 1 en vez de 60 (las civilizaciones anteriores trabajaron con dicha medida), esto generó los valores modernos de las funciones trigonométricas. Estos descubrimientos permitieron un desarrollo en la astronomía logrando medir el tiempo astronómico y direcciones respecto a su ubicación y un lugar específico. Estos científicos compilaron tablas de gran exactitud con un error menor que 1 dividido por 700 millones (Flores, 2008).

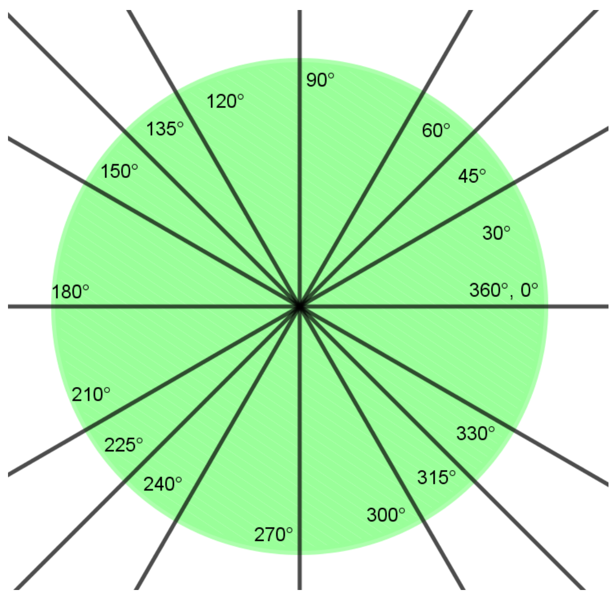


Ilustración 1. Ángulos

Después de ello, el matemático y astrónomo Johann Müller realizó el primer trabajo importante llamado “De Triangulus”, el cual se compone de cinco libros, en el segundo apartado de estos se establece la Ley del Seno y su aplicación en algunos problemas con triángulos. Determina el área de un triángulo mediante el conocimiento de dos lados y el ángulo que los sustenta. Fue hasta el siglo XVI que François Viete encontró fórmulas para expresar las funciones de ángulos múltiples en función de potencias de las funciones de los ángulos simples.

En el siglo XVII el inventor de los logaritmos John Napier, encontró reglas mnemotécnicas[1] para resolver triángulos esféricos y algunas proporciones para resolver triángulos esféricos oblicuos, más conocidas como las analogías de Napier. Isaac Newton, el padre del cálculo diferencial e integral, 50 años después, exploró con series infinitas de potencias de la variable x, encontrando así la serie para $sen(x)$ y series similares para $\cos(x)\ y\tan(x)$.

Luego del nacimiento del cálculo, las funciones trigonométricas fueron incorporadas en el análisis donde aún se ven vigentes en las matemáticas puras y en las aplicadas. Finalmente, en el siglo XVIII Leonhard Euler fundó la trigonometría moderna, definiendo las funciones trigonométricas mediante expresiones con exponenciales de números complejos. De allí, demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos.

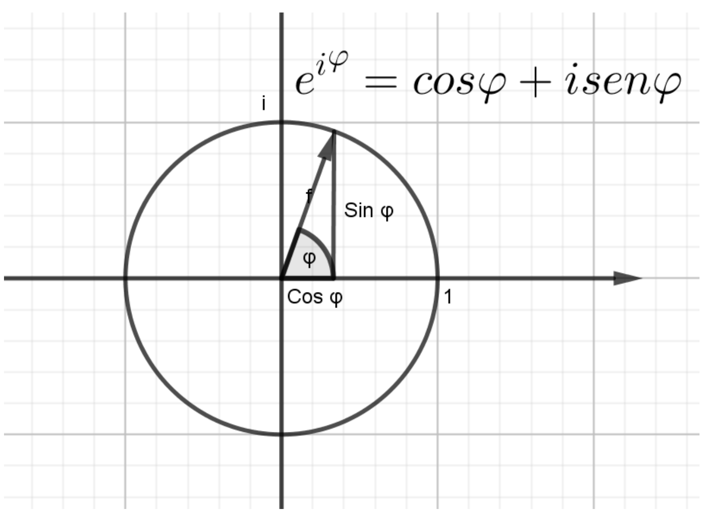


Ilustración 2. Circulo Unitario con números complejos

[1] La palabra "Mnemotecnia" deriva del griego mnéemee (memoria), y téchnee (arte). **Una regla mnemotécnica es un sistema sencillo utilizado para recordar** una secuencia de datos, nombres, números, y en general para recordar listas de datos relacionando palabras, imágenes, etc.

Trigonometría en la educación colombiana (1975, separatas del tiempo)

En el trabajo *Currículo de trigonometría ¿Decisión de otros?* realizado por, Gonzales, Mendoza y Mora (2017), describen medianamente la historia de la trigonometría en Colombia según la normatividad. Primero, se nombra el decreto 2550 de 1951 en donde se realizaron cambios al currículo escolar y se incluye, por primera vez, la trigonometría, en el año quinto de secundaria, se comienza a implementar el curso de geometría y trigonometría. Después el decreto 45 de 1962 establece el ciclo básico de educación media y se determina el plan de estudios para el bachillerato, el cual en el área de matemáticas se obtiene la asignación de materias por cursos y allí se decretó que la Trigonometría sería obligatoria en el curso quinto, algo parecido en el decreto 2550 de 1951, en donde se estipulan las materias obligatorias desde el año primero hasta el año quinto de bachillerato que se deben enseñar en todos los colegios.

2.1.2. Definiciones y Hechos Geométricos

A continuación se presentan algunas definiciones asociadas a la función trigonométrica.

Stewart, Redlin, y Saleem (2007) definen dos maneras distintas este concepto, pero son equivalentes. La primera como funciones de ángulos en donde se enfoca a resolver problemas geométricos en los que se requiere ángulos y distancias, y la segunda como funciones de números reales donde se presta particularmente al movimiento periódico modelado. Hay muchos problemas en la vida cotidiana que requirieron un punto de vista desde las matemáticas, y las funciones trigonométricas se adaptaron a estos problemas, por ejemplo, las vibraciones de una hoja en el viento (izquierda, derecha, izquierda, derecha…), la presión en los cilindros de un motor de carro (alta, baja, alta, baja…) entre muchos otros ejemplos en donde se describen valores que aumentan y disminuyen indefinidamente.

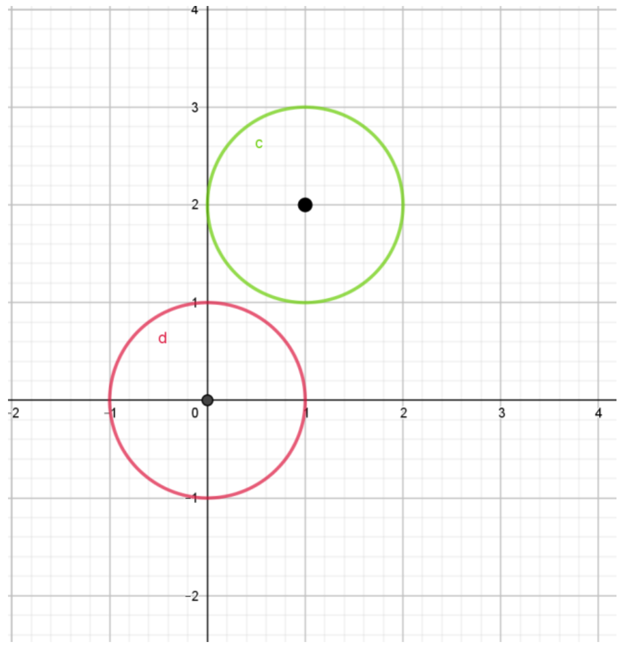
La construcción de la función trigonométrica está dada por las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo y el círculo unitario, según Steward, Redlin, y Saleem (2007) el círculo unitario es:

- ✓ ***Circulo unitario:*** Circunferencia de radio igual a 1 y su centro está en el origen de un plano xy. Su ecuación es:

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ con centro en } (0,0)$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = 1 \text{ con centro en } (h, k)$$

Ilustración 3. Círculos Unitarios en el plano



✓ ***Definición de funciones trigonométricas:*** Sea θ un ángulo en posición estándar y sea $P(x, y)$ u punto sobre el lado terminal. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, (r siendo el radio) es la distancia del origen al punto $P(x, y)$, entonces:

Tabla 1. Funciones trigonométricas

Función seno	Función coseno	Función tangente
$\sin\theta = \frac{y}{r}$	$\cos\theta = \frac{x}{r}$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$
Función cosecante	Función secante	Función cotangente
$\csc\theta = \frac{r}{y}$	$\sec\theta = \frac{r}{x}$	$\cot\theta = \frac{x}{y}$

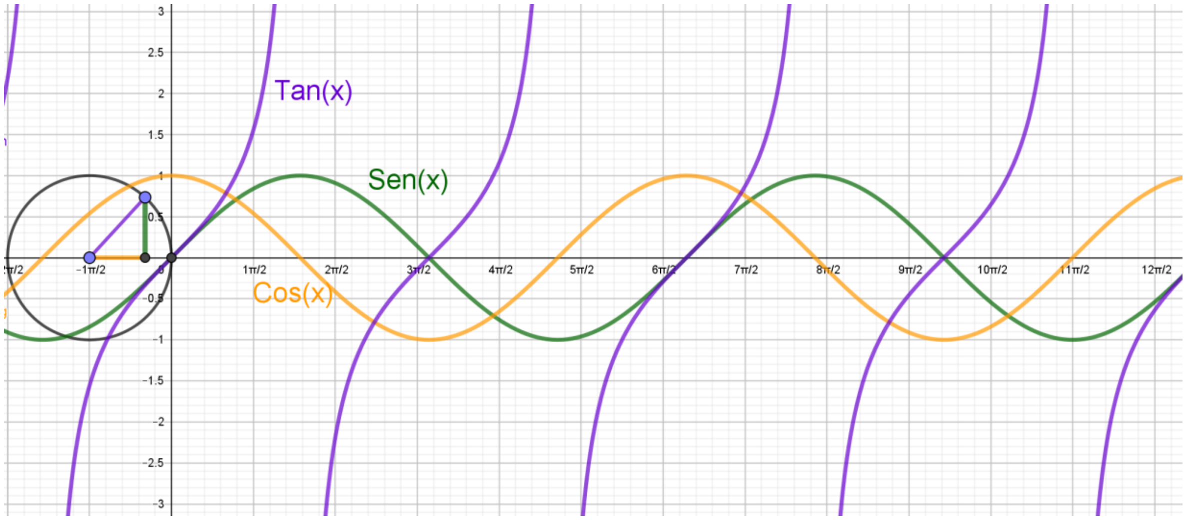


Ilustración 4: Gráficas de las funciones trigonométricas con círculo unitario

✓ ***Razón Trigonométrica:*** Una razón trigonométrica es el cociente entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

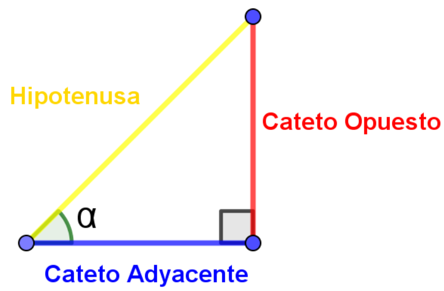


Ilustración 5. Triángulo Rectángulo

$$Sen(\propto) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} \qquad Csc(\propto) = \frac{Hipotenusa}{Caateto\ Opuesto} = \frac{1}{sen(\propto)}$$

$$Cos(\propto) = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} \qquad Sec(\propto) = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ Adyacente} = \frac{1}{scos(\propto)}$$

$$Tan(\propto) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente} \qquad Cot(\propto) = \frac{Cateto\ Adyacente}{Cateto\ Opuesto} = \frac{1}{tan(\propto)}$$

Steward, Redlin, y Saleem (2007) expresa las siguientes definiciones que serán útiles para la comprensión de los conceptos a analizar:

- ✓ ***Ángulo central:*** es aquel tipo de ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son los radios
- ✓ ***Longitud de arco:*** En un círculo de radio r, la longitud s de un arco que subtiende un ángulo central de θ radianes es:

$$s = r\theta$$

- ✓ ***Número de referencia:*** Sea t un número real. El número de referencia $\boldsymbol{\imath}$ asociado a t es la distancia más corta a lo largo del círculo unitario entre el punto sobre la circunferencia determinado por t y el eje x.

- ✓ ***Funciones Trigonométricas de ángulos:*** Cuyo dominio es el conjunto de ángulos o rotaciones

- ✓ ***Función Circular a Función Trigonométrica:*** Si C es una función circular, definida en el conjunto de los números reales, existe una función trigonométrica T correspondiente, definida en el conjunto de los ángulos o rotaciones tal que:

$T(\propto) = C(t)$, donde t es la medida del ángulo $\propto$ en radianes.

- ✓ ***Definición de medida en radianes:*** Si un círculo de radio 1 se traza con el vértice de un ángulo en su centro, entonces la medida de ese ángulo en **radianes** es la longitud del arco que subtiende el ángulo.

- ✓ ***Funciones trigonométricas:*** Sea t un número real y sea $P(x, y)$ el punto del círculo unitario determinado por t. Definimos

$$\sin t = y \qquad \cos t = x$$

$$\tan t = \frac{y}{x}; (x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y}; (y \neq 0)$$

$$\sec t = \frac{1}{x}; (x \neq 0) \qquad \csc t = \frac{1}{y}; (y \neq 0)$$

- ***Propiedades pares e impares***: El seno, la cosecante, la tangente y la cotangente son funciones impares; el coseno y la secante son funciones pares.

$$\sin(-t) = -\sin t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$
$$\csc(-t) = -\csc t \qquad \sec(-t) = \sec t \qquad \cot(-t) = -\cot t$$

- ***Identidades trigonométricas:*** Ecuaciones trigonométricas mediante las cuales se relacionan las funciones trigonométricas.

- ***Identidades Pitagóricas:***

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

- ***Identidades Recíprocas:***

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

- ***Identidades fundamentales para la suma y la diferencia:***

$$\sin(\propto +\beta) = \sin \propto \cos \beta + \sin \beta \cos \propto$$
$$\sin(\propto -\beta) = \sin \propto \cos \beta - \sin \beta \cos \propto$$
$$\cos(\propto +\beta) = \cos \propto \cos \beta - \sin \propto \sin \beta$$
$$\cos(\propto -\beta) = \cos \propto \cos \beta + \sin \propto \sin \beta$$
$$\tan(\propto +\beta) = \frac{\tan \propto + \tan \beta}{1 - \tan \propto * \tan \beta}$$
$$\tan(\propto -\beta) = \frac{\tan \propto - \tan \beta}{1 + \tan \propto * \tan \beta}$$

- ***Identidades para ángulos de medidas $\mathbf{2 \propto}$ y $\mathbf{\frac{\propto}{2}}$:***

$$\sin\left(\frac{\propto}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\propto}{2}} \qquad \cos\left(\frac{\propto}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\propto}{2}} \qquad \tan\left(\frac{\propto}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\propto}{1+\cos\propto}}$$

$$\sin 2\propto = 2\sin\propto\cos\propto \qquad \cos 2\propto = \cos^2\propto - \sin^2\propto \qquad \tan 2\propto = \frac{2\tan\propto}{1-\tan^2\propto}$$

✓***Ley de los senos:*** Dado un triángulo ABC, se tiene:

$$\frac{Sin\ A}{a} = \frac{Sin\ B}{b} = \frac{Sin\ C}{c}$$

Con $A, B\ y\ C$ Ángulos y con $a, b\ y\ c$ los lados correspondientes.

✓***Ley de los cosenos:*** Dado un triángulo ABC, se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos C$$

Con $A, B\ y\ C$ Ángulos y con $a, b\ y\ c$ los lados correspondientes.

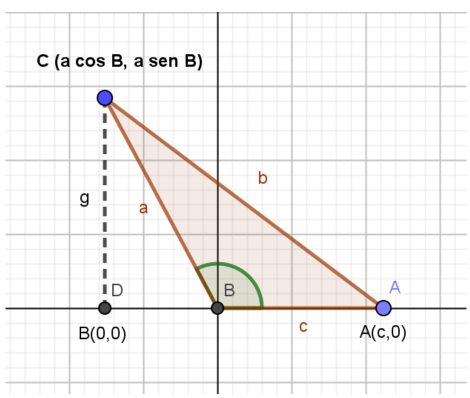


Ilustración 6: Figura 1

2.2 Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

2.2.1 Errores en el aprendizaje de las matemáticas

Godino, Batanero y Font (2003) en su proyecto Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática para maestros afirman que:

Un error es cuando un alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar; (pág. 69), es decir, no cumple con las reglas establecidas por una comunidad matemática.

Franchi y Hernández (2003) en su trabajo *Tipología de errores en el área de la geometría plana* citan a los siguientes autores y sus tipologías de errores:

Tipos de errores de Brousseau (2001):

- Error a nivel práctico: cuando el profesor considera que son errores de calculo
- Error en la tarea: cuando el profesor los atribuye al descuido
- Error de técnica: cuando el profesor critica la ejecución de un modo operativo conocido
- Error de tecnología: cuando el profesor critica la elección de la técnica
- Error de nivel teórico: cuando el profesor incrimina los conocimientos técnicos del alumno que sirven de base a la tecnología y a las técnicas asociadas

Tipos de errores según Movshovitz et al (1979):

- Errores debidos a datos mal utilizados.
- Errores debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje.
- Errores debidos a inferencias no validas lógicamente.
- Errores debidos al uso de teoremas o definiciones deformadas.
- Errores debidos a la falsa verificación en la solución.
- Errores técnicos: es decir errores de procedimiento.

Tipos de errores según Raditz (1979):

- Errores debidos a la dificultad del lenguaje

- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos
- Errores debido a la rigidez del pensamiento: relacionado con los obstáculos
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Tipos de errores según Astolfi (1999)

- Errores debidos a la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas.
- Errores que provienen de los hábitos escolares o de una mala interpretación.
- Errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos.
- Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas.
- Errores debidos a los procesos adoptados.
- Errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad.
- Errores que tienen su origen en otra disciplina.
- Errores causados por la complejidad del contenido.

Engler et al (2004) en su documento *Los errores en el aprendizaje de las matemáticas*, presentan el resultado, de una revisión bibliográfica sobre la evolución del estudio de los errores a través de los años. Por ejemplo, cita a Mulhern (1989) quien hace una caracterización general de errores cometidos por los alumnos:

a. Los errores surgen en la clase generalmente de manera espontánea y sorprenden al profesor
b. Son persistentes, particulares de cada individuo y difíciles de superar
c. Predominan los errores sistemáticos (revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada) con respecto a los errores por azar u ocasionales
d. Los alumnos no toman conciencia del error
e. Algunos errores nacen en la comprensión o el procesamiento que hace el alumno de la información que da el profesor.

Se observa que estas tipologías de errores tienen muchas similitudes y son pocas las diferencias entre sí.

2.2.1.1 Errores en el álgebra y en la geometría

A continuación, se presentan algunos errores, geométricos y algebraicos.

Errores en el álgebra

Ruano, Socas y Palarea (1984) realizaron un estudio en alumnos de educación secundaria sobre tres procesos matemáticos; la sustitución formal, la generalización y la modelización, de este analizan y clasifican errores algebraicos que se presentan comúnmente y los posibles orígenes de estos, de allí afirman que los errores se pueden diferenciar en tres etapas distintas:

- Errores de álgebra que tienen origen en la aritmética. Esto es relacionado con el entendimiento de la generalización de las relaciones y procesos mediante una previa asimilación de un contexto aritmético.
- Errores de procedimiento. Los alumnos no realizan apropiadamente los procesos matemáticos establecidos.
- Errores propiamente algebraicos. Estos se deben a las características propias del lenguaje algebraico usado, por ejemplo, el sentido del signo (=) en álgebra y la sustitución normal.

Palarea (1998) recoge diferentes autores para realizar su teoría. Por ejemplo, cita a Booth (1984) en donde identifica los siguientes tipos de errores algebraicos de los estudiantes:

- El uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento
- Una mala interpretación de los elementos de la pregunta o de lo que pide hacer
- El uso de un método incorrecto para abordar o resolver el reactivo
- Una incorrecta codificación del resultado

Palarea (1998) hace su propia propuesta de clasificación de errores, a partir de los errores que autores como Booth, Lakatos, Krutetskii, entre otros:

1) Errores de álgebra que están en la Aritmética

- Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva
- Errores relativos al uso de recíprocos
- Errores de cancelación

2) Errores de álgebra debido a las características propias del lenguaje

Estos errores son característicos del lenguaje algebraico y no tienen referencia explícita en la Aritmética.

Errores en la Geometría

Franchi y Hernández (2004) en su trabajo *Tipología de errores en el área de la geometría plana* presentan los siguientes tipos de errores:

a) Errores de pre-requisitos

Se deben a un aprendizaje deficiente de habilidades y destrezas que el alumno debió obtener anteriormente. Se considera que está asociado a conceptos previos en álgebra elemental y dibujo técnico.

b) Errores propios del lenguaje geométrico

Están asociados con la interpretación indebida del lenguaje geométrico, estos derivan de las dificultades que tienen los estudiantes para interpretar el lenguaje geométrico. Estos errores se hacen evidentes cuando el estudiante utiliza inadecuadamente la terminología y notaciones propias de la geometría.

c) Errores gráficos

Están asociados con la falta de habilidad para trazar, imaginar e interpretar figuras geométricas. Cuando un estudiante incurre en este tipo de error, se evidencia que dibuja figuras geométricas que no corresponden al enunciado de un problema geométrico propuesto, ignora o toma algún mal dato de una figura geométrica en la solución o demostración de un problema geométrico.

d) Errores de razonamiento

Se derivan del mal uso de las implicaciones y equivalencias lógicas, lo que lleva a un manejo erróneo de axiomas, teoremas, definiciones y corolarios geométricos. Estos errores se manifiestan cuando el alumno añade hipótesis que no están dadas o en la misma demostración intenta resolver sin utilizar algún dato dado.

e) Errores de transferencia

Se deben a la falta de habilidad del estudiante cuando no utiliza los conocimientos adquiridos para resolver situaciones o problema reales. Se presentan cuando el estudiante transforma erróneamente una situación problema en un problema geométrico.

f) Errores de técnica

Estos surgen con la aplicación incorrecta de algoritmos o procedimientos en la solución de problemas geométricos. Se puede evidenciar cuando el alumno realiza un buen procedimiento, pero al momento de justificar o demostrar, enuncia proposiciones sin justificaciones o mal justificadas.

2.2.2 Dificultades

Según Godino Batanero y Font (2003)" El término *dificultad* indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio" (Pág. 69). Este también establece seis tipos:

1. Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos:

La abstracción y generalización de las matemáticas es una posible causa de las dificultades de aprendizaje. De aquí se obtienen obstáculos, los cuales al identificarlos revelan una complejidad del significado de los objetos matemáticos, que en ocasiones y en gran mayoría pasan inadvertidas.

2. Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas:

Estas dificultades tienen causas diferentes, el autor menciona 3:

a) La mal estructuración de los contenidos a enseñar,

b) Los materiales empleados no son claros, mal diseñados, repetitivos, confusos entre muchos errores
c) La presentación del tema que hace el profesor no es clara, no se entiende lo que expone, el manejo del tablero es caótico, no enfatiza en conceptos claves, etc.

3. Dificultades que se originan en la organización del centro

Estas dificultades se originan por contexto dentro del aula, como el horario del curso, el número de alumnos es muy grande, no se disponen materiales ni recursos didácticos, etc.

4. Dificultades relacionadas con la motivación del alumnado

Este tipo de dificultades está relacionado a la autoestima, historia escolar del alumno y pensamiento emocional del mismo, ya que, si las actividades están bien enfatizadas al aprendizaje, estos factores también dificultan el aprendizaje.

5. Dificultades relacionadas con el desarrollo psicológicos de los alumnos

En el currículo de matemáticas debe ser tenido en cuenta el desarrollo cognitivo de los estudiantes, puesto que hay alumnos que no han superado la etapa preparatoria al realizar operaciones concretas, esto genera dificultades y Godino, Batanare y Font, precisa que en la planificación a largo plazo del currículo se deben considerar dos aspectos fundamentales:

a) Cuáles de los objetivos del área de matemáticas corresponde a la etapa preparatoria, cuales a la de las operaciones concretas y cuales a las de las operaciones formales
b) Precisar las edades en que los alumnos aproximadamente pasan de una etapa a la otra

6. Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores

Existen casos en donde el alumno tiene un nivel evolutivo adecuado, pero no tiene conceptos previos para aprender un nuevo contenido, esto genera una distancia entre el nuevo contenido y lo que sabe el alumno.

Fernández (2010) realiza una investigación basándose en el currículo de matemáticas en Granada (España), Los posibles errores y dificultades asociados a las funciones trigonométricas y sus transformaciones de los estudiantes de nivel 4° (estudiantes entre 15 y 16 años):

- ✓ Dificultad en la utilización de la regla de conversión entre grados y radianes
- ✓ Dificultad en la representación de ángulos negativos o mayores de 360° en la circunferencia
- ✓ Problemas con el cálculo “gráfico de las razones de ángulos no agudos.
- ✓ Dificultad en el tratamiento algebraico de las razones trigonométricas, relaciones y fórmulas.

Por otra parte, Sánchez (2014) indica que las limitaciones de tiempo, se suman dificultades que surgen cuando se trabajan las funciones trigonométricas, se enuncian a continuación:

Los estudiantes:

- ✓ Comprenden el concepto de razón trigonométrica y lo aplican, pero les cuesta el entender el paso a la función trigonométrica. El trabajo relacionado con el concepto de función se debe introducir en noveno, pero siempre ha sido una debilidad.
- ✓ No identifican cuáles son los valores que puede tomar la función (rango) y en qué valores se puede evaluar (dominio)
- ✓ Como no han trabajado formalmente las funciones y sus transformaciones, no entienden el significado de estas transformaciones en el análisis de las funciones trigonométricas.
- ✓ Precisamente por la situación anterior, olvidan al poco tiempo lo que significa el periodo y en ocasiones lo confunden con la frecuencia.

Tienen dificultad en utilizar las propiedades de las gráficas de estas funciones trigonométricas, para describir el comportamiento periódico de un fenómeno

Por medio de este trabajo de grado se busca identificar algunos de estos errores y dificultades evidenciados en las tareas realizadas por estudiantes de grado décimo.

3. METODOLOGÍA

Para el desarrollo de este trabajo se diseñaron algunas actividades, de una manera secuencial, que más adelante se describirá, con el fin de aplicarlas a estudiantes de grado décimo, los propósitos de dichas actividades eran: recolectar información sobre el trabajo y desarrollo de las funciones trigonométricas, evidenciar errores y dificultades presentados por los estudiantes. Esto permitió el análisis de las actividades realizadas por cinco estudiantes escogidos aleatoriamente utilizando categorías de análisis fundamentadas en la teoría y la experiencia del maestro en formación.

3.1 Descripción de la población

El Colegio Integral Ervid (CIE) es una Institución de carácter privado, ubicado en la zona de Chapinero, ofrece educación básica primaria, básica secundaria y media en el calendario A. Cada nivel consta de un curso en promedio con 20 estudiantes.

En el grado décimo hay 16 estudiantes (9 mujeres y 7 hombres) entre los diferentes estratos (1-4), sus edades oscilan entre los 14 y 19 años. Durante el proceso de implementación de las actividades trabajaron de manera individual. El docente a cargo del curso en Matemáticas es el mismo maestro en formación que presenta este trabajo de grado. Uno de los contenidos temáticos propuestos en el currículo a ser bordado son las relaciones y funciones trigonométricas y las transformaciones, en dicho curso se aplicaron las actividades diseñadas.

3.2 Descripción de actividades

Para el diseño de las tres actividades cabe aclarar que el docente en formación trabajó como profesor titular durante ese año, por tanto, se manejó las temáticas planteadas por el colegio. Estas actividades se realizaron en tres momentos diferentes durante un periodo de 3 meses, en donde entre cada actividad se realizaron sesiones de clase, socializando los errores y dificultades, y desarrollando los contenidos del curso.

Actividad 1:

Descripción del contexto:

Para abordar esta clase el maestro en formación previamente realizó con los estudiantes el trabajo de la construcción de la función *seno*, allí se explicó el procedimiento correspondiente a la copia de los segmentos y el traspaso al plano cartesiano. Durante esta sesión, se enfatizó en el uso del curvígrafo, transportador, regla y compás.

Propósito

Con esta actividad se pretende que los estudiantes construyan la función coseno por medio del círculo unitario, realizando la copia de los segmentos del triángulo que corresponde a esta función.

Prerrequisitos matemáticos:

a) Noción de razón trigonométrica de seno y coseno
b) Definición de triángulo rectángulo
c) Partes de un triángulo rectángulo
d) Círculo unitario
e) Ubicación de puntos en el plano cartesiano.

Prerrequisitos no matemáticos:

a) Uso del transportador
b) Uso del curvígrafo

Instrucción dada a los estudiantes:

En las hojas milimetradas, se pidió a los estudiantes realizar una circunferencia y el plano cartesiano de tal manera que la circunferencia estuviese en la posición izquierda de la hoja, mientras que el plano cartesiano debía ser construido de tal manera que el origen quede en la circunferencia y el eje vertical sea tangente a la circunferencia. Los valores para el eje X, son los ángulos desde 0 hasta 360 si es posible, de tal manera que se realice de 15 en 15.

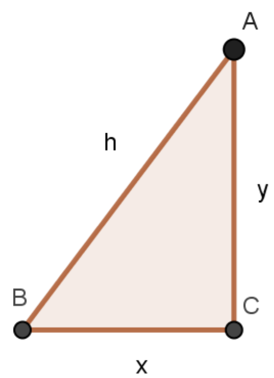
Luego los estudiantes deben realizar la copia de los segmentos creados por los triángulos rectángulos correspondientes a la función coseno.

Descripción

Usando la regla y el compás, se debe realizar la trasferencia de medida de los segmentos del triángulo rectángulo correspondientes a la razón trigonométrica de coseno (x/h para el triángulo de la ilustración 8) en la hoja milimetrada.

Con ello se espera que, al copiar las medidas correspondientes de cada ángulo desde el círculo unitario al plano cartesiano, se evidencie la gráfica de la función coseno.

Ilustración 7. Razón Coseno



Productos esperados por parte de los estudiantes

1) Realizar la circunferencia unitaria
2) Ubicar los ángulos de 15 en 15 sobre el eje x
3) Realizar el plano cartesiano de tal manera que el origen sea la intersección entre la circunferencia y el eje Y

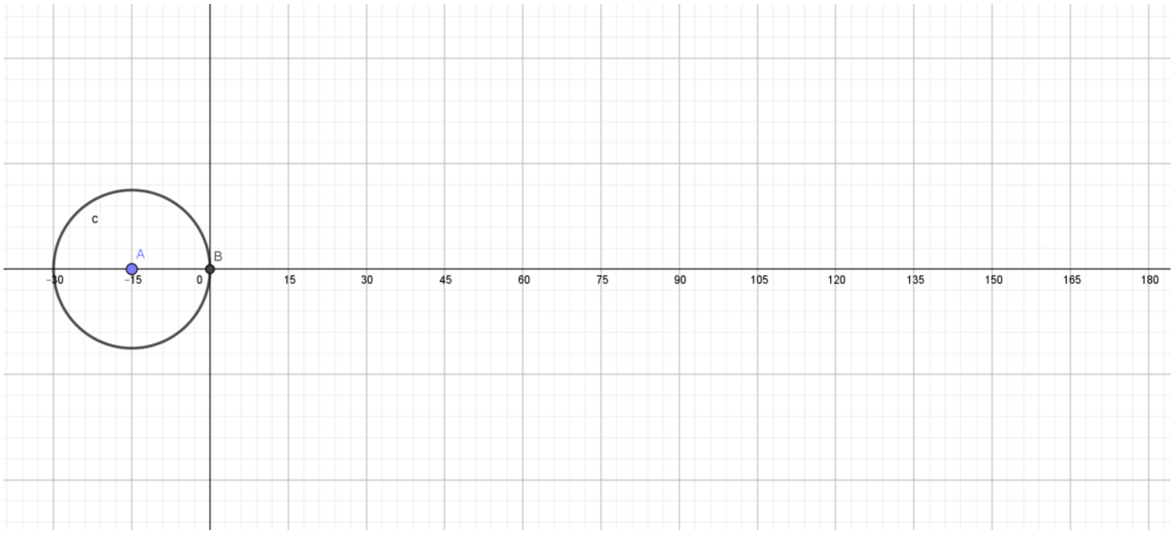


Ilustración 8. Ejemplo

4) Copiar los segmentos ubicando en cada ángulo correspondiente, el segmento de manera que cumpla las propiedades, si es positivo en el cuadrante I y si es negativo en el cuadrante II
5) Al realizar la copia de los segmentos, con el curvígrafo se debe trazar la curva compuesta por la unión de los puntos extremos del segmento, estos puntos son diferentes al extremo del segmento que se encuentra sobre el eje X

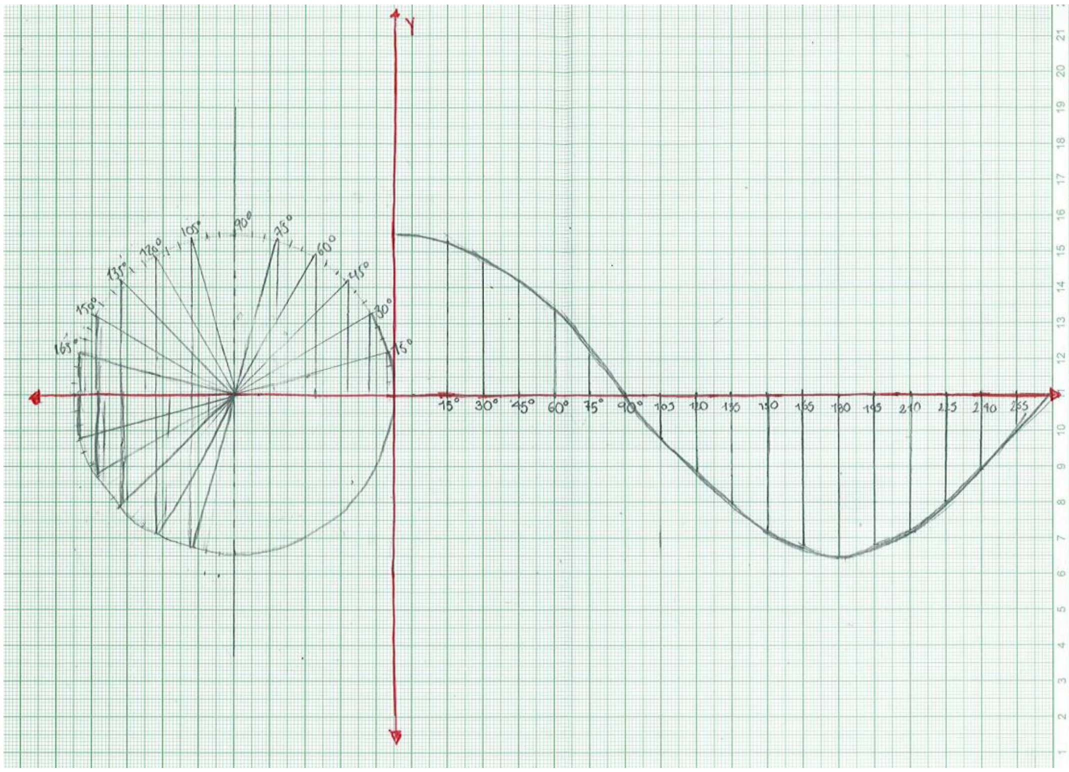


Ilustración 9. Producto esperado

Actividad 2:

Posterior a la actividad 1, se realizaron varios avances en las sesiones, en donde se socializó algunas actividades similares, por ejemplo, la construcción de la función seno y tangente. Los estudiantes evidenciaron diferentes avances en el contenido, por medio de sesiones en clase, talleres, evaluaciones y actividades acordes al curso. Todas las sesiones fueron observadas y guiadas por el docente en formación. Con ello, se propone la actividad 2 que se describe a continuación

Propósito

Con esta actividad se pretende que los estudiantes realicen las grafiquen, a partir de la representación tabular, en el plano cartesiano la función secante.

Prerrequisitos matemáticos:

- Definición de razón trigonométrica secante
- Propiedades de función
- Definición de función trigonométrica
- Ubicación de puntos en el plano cartesiano.

Prerrequisitos no matemáticos:

- Uso del transportador
- Uso del curvígrafo

La descripción

Esta actividad se dividió en dos partes:

1. Realizar una tabla de valores para la función secante, en donde con ayuda de la calculadora se hallan los valores correspondientes
2. Graficar en el plano cartesiano, la función secante a partir de los valores encontrados. Utilizando regla y curvígrafo en las hojas milimetradas ubicando los puntos en el plano cartesiano

Productos esperados por parte de los estudiantes

1. El estudiante por medio de una tabla y ayuda de la calculadora, calcula los valores que puede tomar de 15 en 15, utilizando la identidad trigonométrica de secante para encontrar los valores en la calculadora, puesto que la calculadora solo permite encontrar valores de seno, coseno y tangente.
2. Con los valores encontrados, ubicara los puntos en el plano
3. Con ayuda del curvígrafo, trazar la curva descrita por los puntos ubicados

Actividad 3

Finalmente, aplicadas las dos actividades anteriores el maestro en formación realiza algunas sesiones de clase en las cuales se estudian las transformaciones de funciones trigonométricas, en los trabajos en clase se observaron diferentes ejemplos con el fin de que los estudiantes comprendieran sus propiedades. Por ello, se diseñó la actividad 3 que se describe a continuación.

Propósito

Con esta actividad se pretende que los estudiantes realicen una tabla de algunos valores para una transformación de cualquier función trigonométrica, identifiquen las diferencias y similitudes, y ubiquen en el plano cartesiano, de manera apropiada las coordenadas de cada punto dado. El estudiante tiene que transformar cualquier función trigonométrica que desee, es decir, sumar, restar, multiplicar o dividir por un entero la función, por ejemplo, $sen(x) + 3, 3 \times \cos(x)$, etc.

Prerrequisitos

- Operaciones de números reales
- Jerarquía de operaciones
- Funciones trigonométricas
- Gráficas de funciones trigonométricas
- Ubicación de puntos en el plano cartesiano.

Prerrequisitos no matemáticos

- Uso del transportador
- Uso del curvígrafo

La descripción de la tarea

Esta actividad se diseñó con dos ítems:

1. Realizar la tabla con algunos valores de la función Tangente, utilizando la calculadora en modo radianes.
2. Según los valores obtenidos en las hojas milimetradas, ubicar los puntos en el plano cartesiano y con ayuda del curvígrafo realizar la grafica

Productos esperados por parte de los estudiantes

1. El estudiante elige una función trigonométrica y realiza cualquier transformación que desee
2. Realiza la tabulación apropiada
3. Ubica los puntos en el plano
4. Traza la curva descrita por los puntos

3.3 Categorías de análisis

A continuación, en la tabla 2, se presenta la categoría de análisis, establecida a partir de la búsqueda bibliográfica, estos se basan en Franchi y Hernandez (2004) que se usaran para el análisis de las producciones de los estudiantes. En la tabla se establece el nombre del error, el código para identificarlo y la descripción.

Tabla 2. Errores y Dificultades basados en Franchi y Hernández

Nombre	Código	Descripción
Pre-requisitos Plano cartesiano	**EP1**	Se presenta cuando tiene dificultades en la ubicación de coordinadas (x, y) en el plano cartesiano
Pre-requisito Operaciones aritméticas	**EP2**	El estudiante comete errores al realizar operaciones aritméticas con números racionales.
Pre-requisitos Operaciones aritméticas	**EP3**	Se presenta cuando el estudiante tiene dificultades para operar números irracionales.
Pre-requisito Tipo de triángulo	**EP4**	Tiene lugar cuando el estudiante no identifica el triángulo rectángulo y sus partes.
Lenguaje Geométrico	**ELG5**	Tiene lugar cuando no identifica las propiedades y definición de asíntota
Representación	**ER1**	Se presentan cuando el estudiante traza mal las curvas de una función
Representación	**ER2**	Se generan cuando el estudiante no realiza el bosquejo de funciones con asíntotas
Técnica	**ET1**	Se presentan cuando el estudiante realiza procedimientos sin coherencia.

Análogamente se presentan dificultades basadas en las mencionada por Fernández (2010), los nombres son establecidos por el autor de este trabajo, descritos en la tabla 3, en la cual se establece el nombre del error, el código para identificarlo y la descripción.

Tabla 3. Dificultades basadas en Fernández

Nombre	Símbolo	Descripción
Conversión	**DC1**	Se presenta cuando los estudiantes no utilizan la conversión entre radianes y grados y viceversa.
Representación de ángulos negativos	**DR1**	Se dificulta la representación de ángulos negativos o mayores a 360°
Representación de ángulos no agudos	**DR2**	Se presenta cuando tiene dificultades para graficar ángulos no agudos.
Tratamiento algebraico	**DT1**	Tiene lugar cuando no identifica el tratamiento algebraico pertinente de las razones trigonométricas, relaciones entre sí y fórmulas

Errores y dificultades desde la experiencia del autor

Desde la experiencia del maestro en formación, se han implementado actividades sobre las transformaciones trigonométricas, en donde se evidenciaron los siguientes errores y dificultades, En la tabla se establece el nombre del error, el código para identificarlo y la descripción:

Tabla 4. Errores y Dificultades a partir de la experiencia del maestro en formación

Nombre	Símbolo	Descripción
Uso de calculadora	**DUC1**	Se evidencia con el mal uso de la calculadora en procesos con radianes y grados
Ubicación de puntos en el plano cartesiano	**DUP1**	Se presenta cuando las coordenadas de los puntos son números reales (decimales, fracciones, radianes o grados)

Curvígrafo	**DUCR1**	Se genera cuando el estudiante no sabe manipular la regla adecuadamente en el trazo de las funciones
Métrica de los ejes del plano	**DMP1**	Se presenta cuando los ejes no tienen métrica o no están correctamente proporcionada
Algoritmo de solución	**DAS1**	Se evidencia en los procesos de operaciones entre ángulos o radianes, rompimiento de la jerarquía
Concepto de asíntota	**EAS1**	Al operar en algún punto indeterminado.
Concepto de asíntota	**EAS2**	Gráficamente no se tiene noción de asíntota, es decir, no se aproximan a valores cercanos al punto indeterminado

4. ANÁLISIS

4.1 Análisis de actividades

A continuación, se presenta el análisis del desarrollo de las tareas, realizadas por los estudiantes. Para este análisis se utilizan las categorías establecidas en las tablas 2,3 y 4, para identificar que errores y dificultades se evidencian en las producciones de los estudiantes, para ello se presenta las imágenes de lo realizado por algunos estudiantes, y luego el respectivo análisis.

Para el análisis a continuación se tomó una muestra significativa con respecto a la población del salón, de 15 estudiantes la muestra tomada es de 5 estudiantes, dichos estudiantes fueron elegidos de manera aleatoria y con la condición de que hubieran realizado todas las actividades.

4.1.1 Estudiante A

Actividad 1

En la actividad 1 (Anexo A) se esperaba la construcción de la función coseno por medio del círculo unitario, copiando los segmentos como se ve en la ilustración 9.

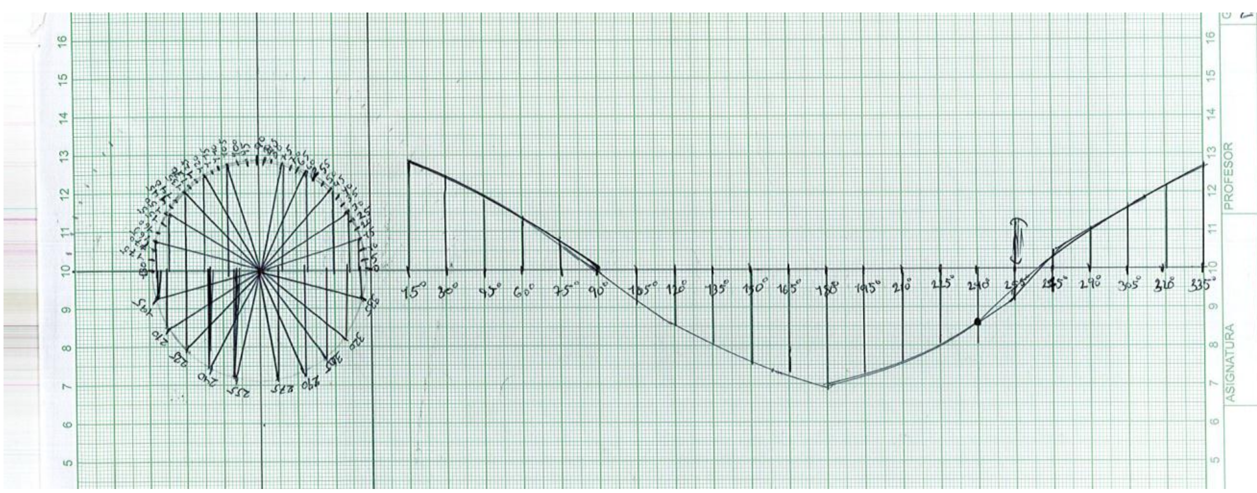


Ilustración 10. Función Coseno Est A

Se evidencia un mal trazo de la curva, es decir, un error de representación **ER1,** se esperaba que el estudiante realizara un bosquejo de la grafica (literal b numeral 3.2 de la metodología). Sin embargo, a pesar de que el estudiante hace la gráfica, ésta no es curva. Además, la copia de los segmentos empieza desde los 15°, el estudiante no tiene en cuenta el ángulo de medida 0° (cero), y que la medida que se copia es representada en el triángulo rectángulo por uno de los lados, es decir, el cateto del triángulo ubicado en el eje *x* es el segmento que se requiere copiar, por ejemplo:

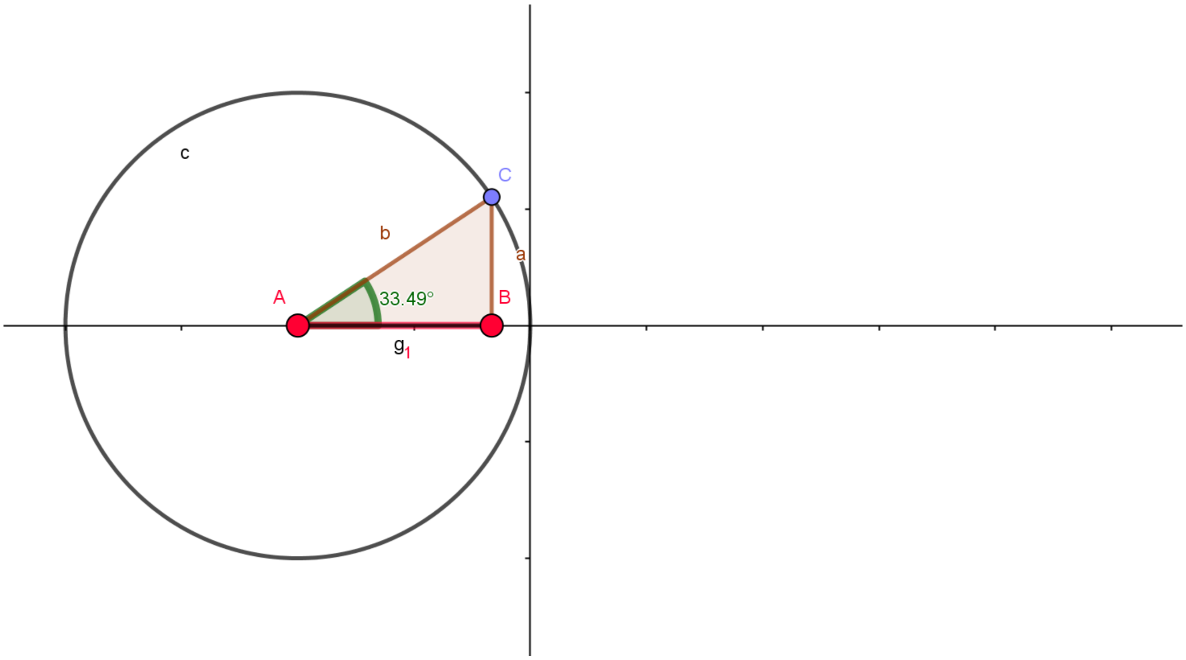


Ilustración 11. Triángulo- Círculo unitario

En el triángulo ABC, el segmento AB corresponde al segmento que se debe copiar, pero el estudiante no tiene en cuenta que para el ángulo cero puntos B y C coinciden a pesar de no haber triángulo, como se muestra en la Ilustración 12. Coseno para el ángulo grado 0°

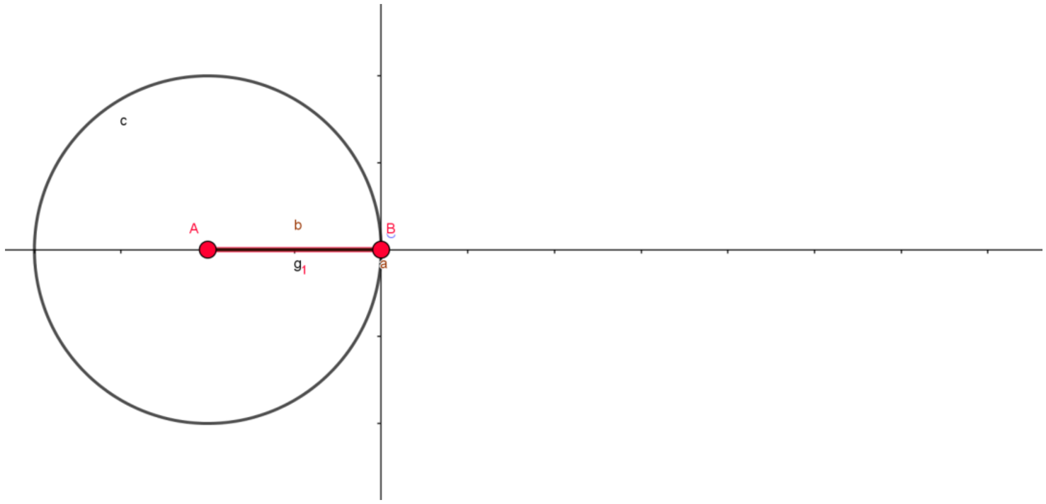


Ilustración 12. Coseno para el ángulo grado 0°

El estudiante no identifica que, aunque no está el triángulo, si hay relación entre los lados establecidos, se genera una dificultad al hablar del triángulo y que no exista el triángulo dado por la misma definición. Además de ello, el estudiante presenta una dificultad en la relación a lo que significa utilizar el círculo unitario para establecer la razón trigonométrica.

Actividad 2

Por medio de la tabla de valores y ubicación de los puntos en el plano, con ayuda del curvígrafo en el trazo de las curvas de la misma. Los resultados que se analizan son los siguientes:

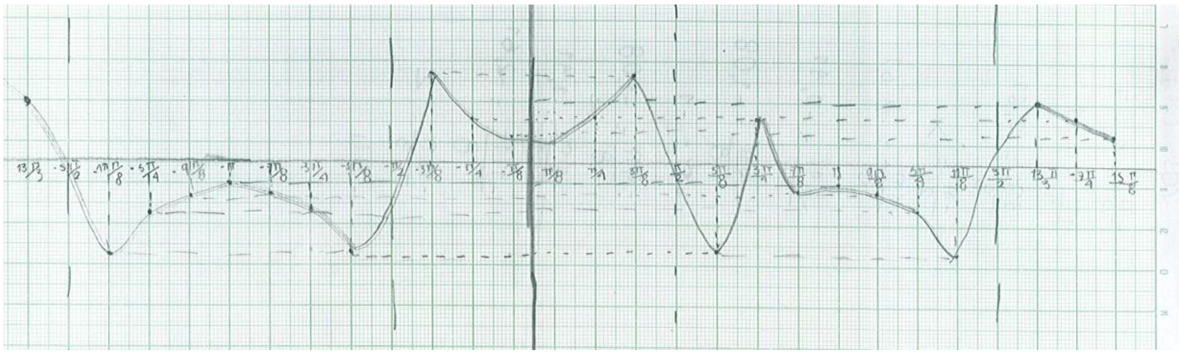


Ilustración 13. Función secante Est A

En esta primera evidencia se observan los siguientes errores y dificultades, en el valor $\frac{3\pi}{4}$ se observa que su imagen está en el cuadrante positivo, se identifica el **EP1** ya que algunos puntos están mal ubicados, lo cual lleva a un mal trazo en la función. También se evidencia una relación entre los errores **EAS2** y **ER2,** como se observa en la gráfica de la función secante hay asíntotas y en la tarea realizada no se toma en cuenta ello, no se hace una aproximación a la asíntota y el estudiante traza por encima de la asíntota la función, es decir, la función dibujada es continua en todos sus puntos. Por último, se evidencia un manejo cómodo del plano cartesiano, sin embargo, no se muestran los valores correspondientes al eje *y*, lo que permite identificar la dificultad **DMP1.**

Actividad 3

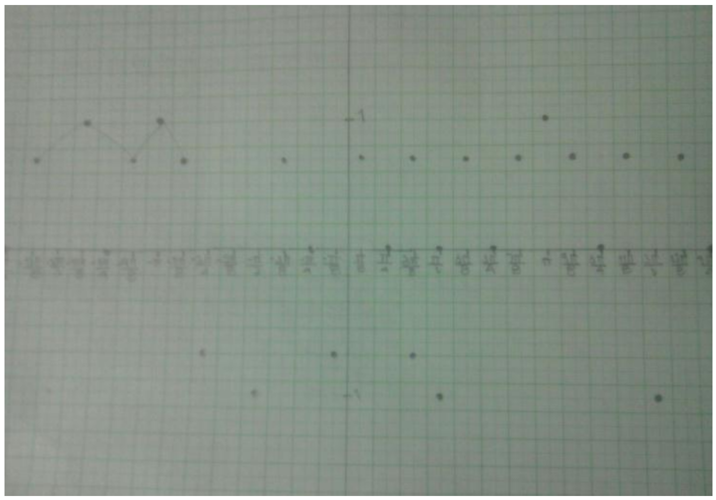


Ilustración 14. Función Transformada Est. A

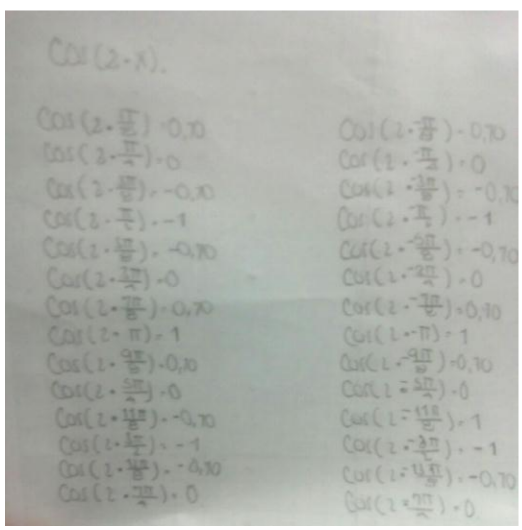


Ilustración 15.Tabulación Est A

En las ilustraciones 13 y 14 se evidencia la relación entre la gráfica y los valores tabulados por el estudiante, se observa que en la realización de la tabulación de la función definida $f(x) = \cos(2x)$ el estudiante no realiza ningún proceso algebraico, es decir, no desarrolla el proceso que se espera, además de ello no incluye en la tabla los valores cuando x es cero. Aunque los valores están bien, el estudiante no realiza el trazo de la curva o lo realiza uniendo los puntos con segmentos y no con curvas.

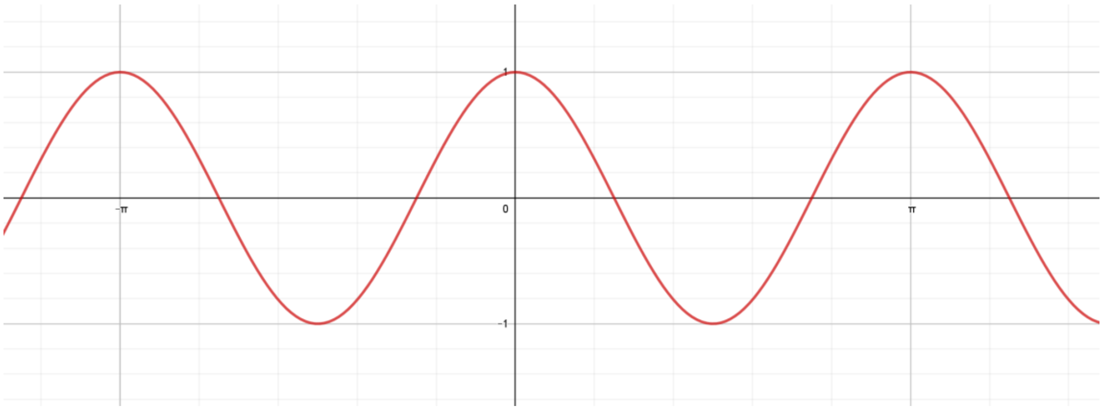


Ilustración 16. Coseno 2x

En la Ilustración 16 se observa el trazo de la función, en donde se evidencia que los cortes de esta misma con el eje *x* son todos los valores de la forma $a\left(\frac{\pi}{4}\right)$, con a cualquier número impar de los enteros. Dicho lo anterior, se deduce el error de tipo **ER1** y la dificultad del manejo del curvígrafo **DUCR1**, ya que el estudiante no realizó el bosquejo de la gráfica correcto, solamente realiza un trazo en un intervalo de la función.

4.1.2 Estudiante B

Actividad 1

Se puede observar en la Ilustración 17. Función Cos (x) Est. Bque el estudiante B comete los mismos errores (**ER1, DUCR1**) adicional se presenta el error **EP1** puesto que no incluye el *eje y* en el plano cartesiano.

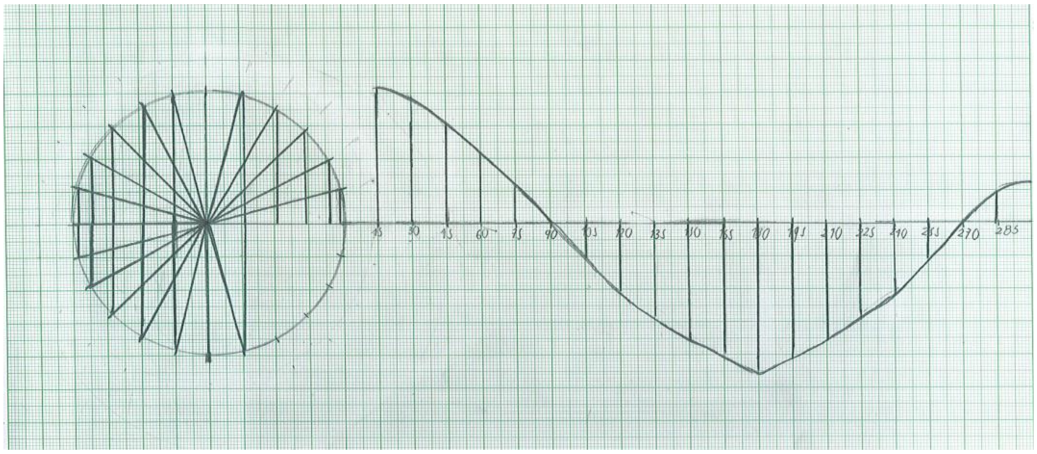


Ilustración 17. Función Cos (x) Est. B

Aunque se infiere que el estudiante copia los segmentos adecuadamente, no se ven referenciados los ángulos correspondientes en cada ángulo del círculo unitario, también se puede evidenciar que ángulos no están bien ubicados en el círculo unitario, por tanto, se presentan las **DR1** y **DR2,** esto por el mal manejo del transportador en el trazo los diferentes tipos de ángulos.

Actividad 2

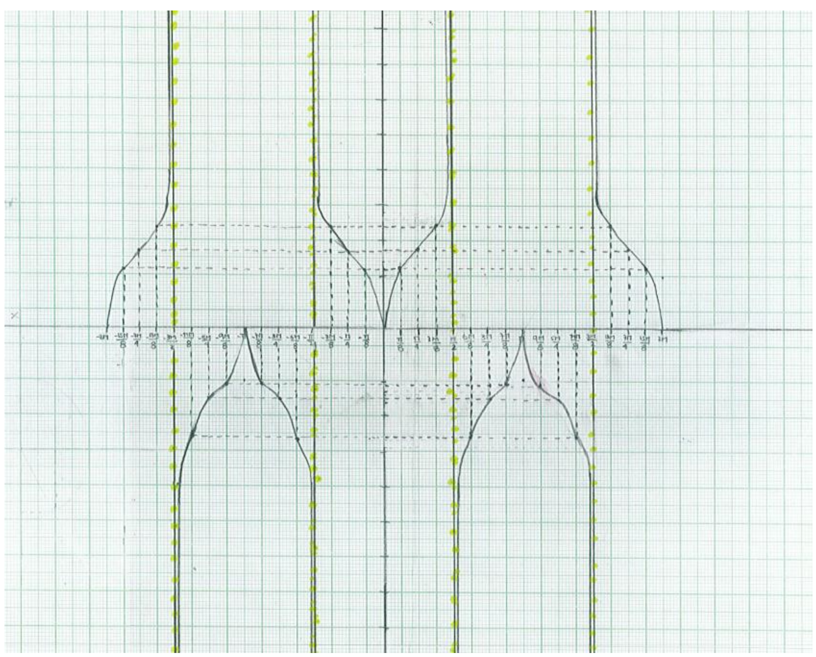


Ilustración 18. Función secante Est. B

En la ilustración 17 se evidencia el error **EP1** en la ubicación de las imágenes de los puntos del eje x $0, \pi, -\pi, 2\pi \ y - 2\pi$, en estos puntos la imagen que grafica el estudiante es 0.

Recordemos que la función secante se puede escribir como:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Si analizamos en los puntos $0, \pi, -\pi, 2\pi \ y - 2\pi$, obtendremos que

$$\sec(0) = \frac{1}{\cos(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec(\pi) = \frac{1}{\cos(\pi)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\sec(2\pi) = \frac{1}{\cos(2\pi)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec(-\pi) = \frac{1}{\cos(-\pi)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\sec(-2\pi) = \frac{1}{\cos(-2\pi)} = \frac{1}{1} = 1$$

Por tanto, se infiere que el estudiante no realizó correctamente los cálculos, cuando el valor del ángulo es $n\pi$ (con n un número entero), lo que se relaciona con el error de tipo **EP3** y la dificultad **DUC1.**

Actividad 3

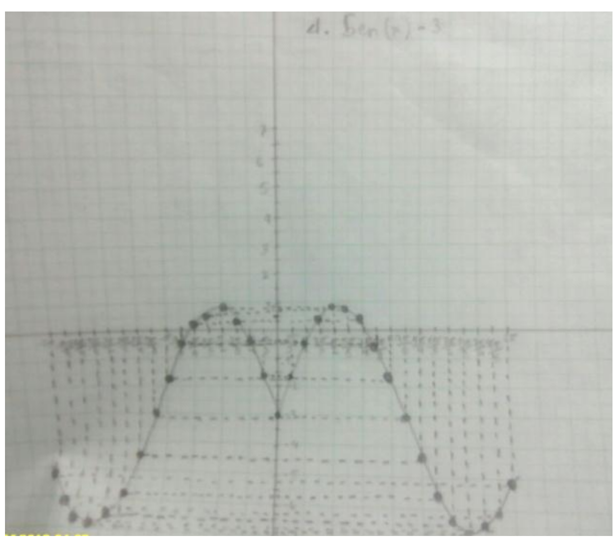


Ilustración 19. Transformación Est. B

En esta tarea el estudiante realiza el bosquejo de $f(x) = 4 \times sen(x) - 3$, se evidencia en la ilustración 19 que los valores tabulados están en su mayoría mal calculados, por ejemplo, si $x = \frac{\pi}{4}$ entonces $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \times sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3$ es un valor negativo, que se aproxima a $-0{,}1$, y el estudiante grafica en $0{,}4$. La gráfica de esta función es:

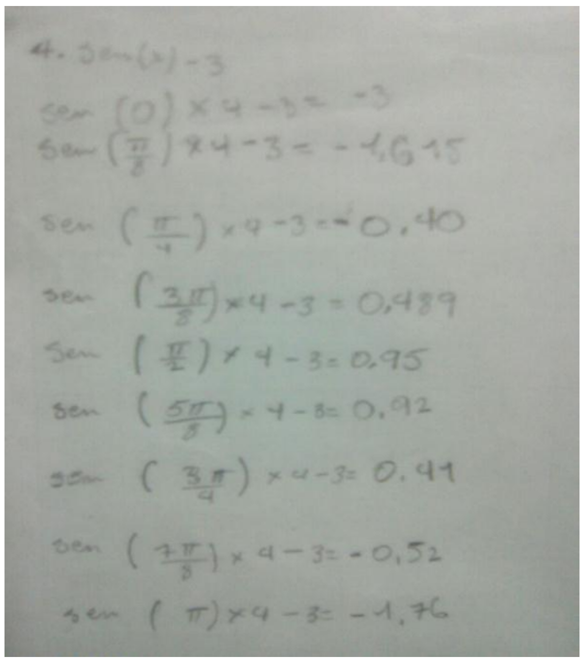


Ilustración 20. Tabulación 2

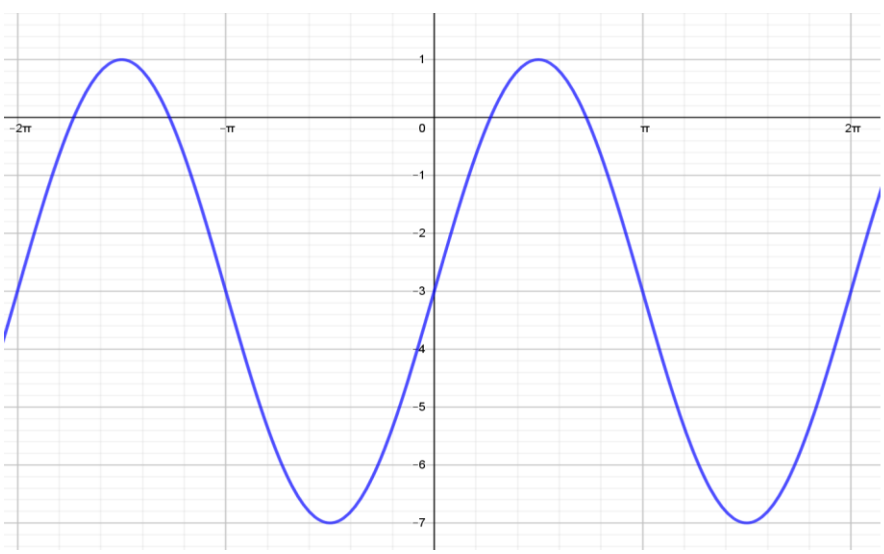


Ilustración 21. 4Sen(x)-3

Por tanto, la gráfica que hace el estudiante no corresponde a la función dada. De aquí, se deduce que se presentan dos errores aritméticos y dos dificultades que son: **EP3, ET1, DUC1** y **DAS1**.

4.1.3 Estudiante C

Actividad 1

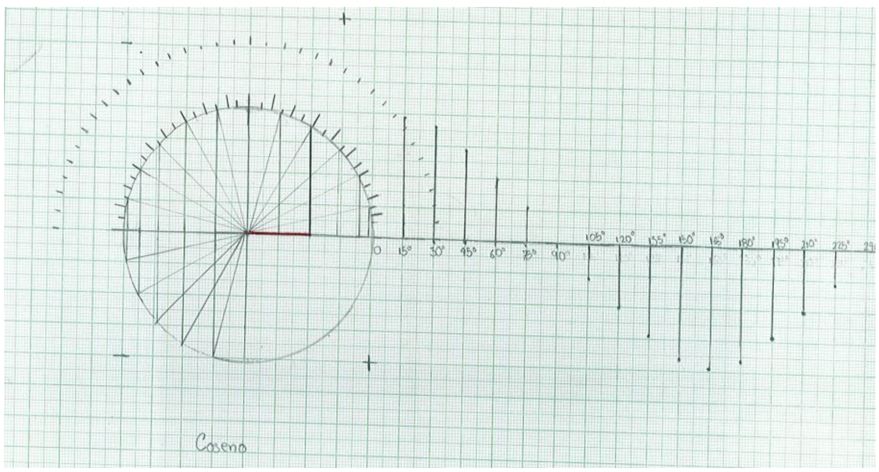


Ilustración 22. Función coseno Est. C

En la Ilustración 22. Función coseno podemos observar que la copia de los ángulos no tiene en cuenta el ángulo 0°, como también en el círculo unitario no se denotan los ángulos correspondientes. Se evidencia el error **EP1** puesto que se observa que no se maneja adecuadamente el plano cartesiano, ya que el *eje y* no está graficado. Algo que llama la atención es que a pesar del buen procedimiento que se observa en la copia de los segmentos, el estudiante no bosqueja la curva correspondiente, por tanto, se presenta el error **ER1**.

Actividad 2

El estudiante C en esta actividad presenta errores de tipo **EP1**, pues al no ubica de manera correcta las coordenadas de los puntos. Además, el bosquejo de la gráfica está mal trazado, ya que no cumple las propiedades de una función, es decir, el estudiante traza la curva de manera que pase por todos los puntos ubicados en el plano, sin tomar en cuenta las asíntotas, además tampoco se evidencia una aproximación en los valores indeterminados. También, se evidencia la mala ubicación de los puntos con coordenadas decimales en varios casos, por ejemplo, los valores como $\frac{3\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, -\ \frac{3\pi}{4}$.

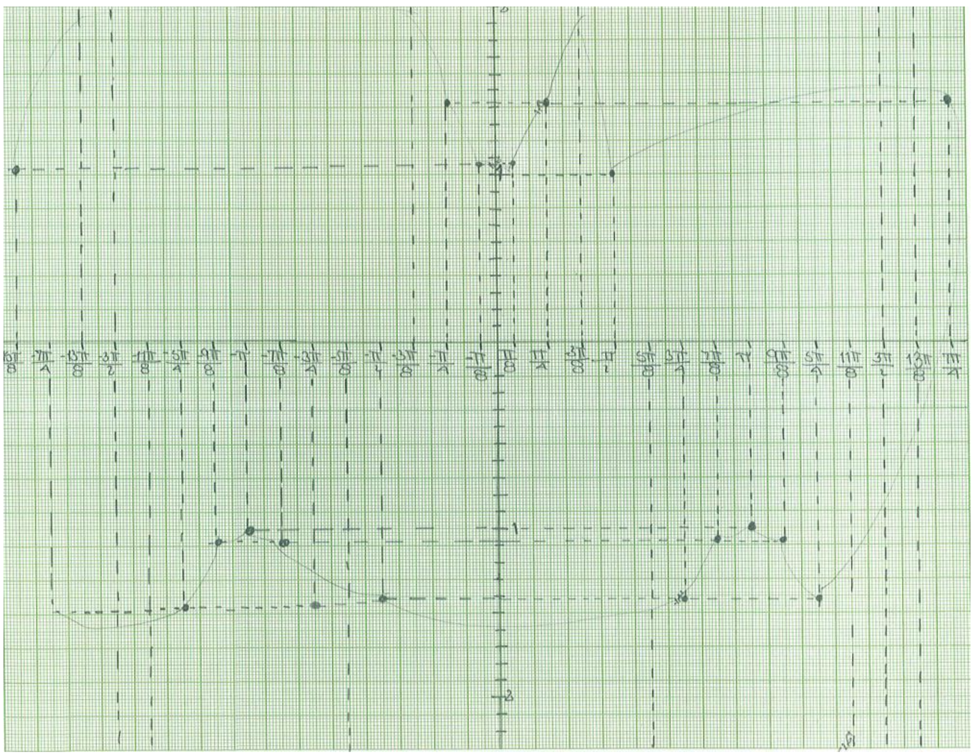


Ilustración 23. Gráfica función secante 3 Est. C

Como se observa en la **Ilustración** 23**23,** se infiere que el gráfico, en los cuadrantes I y II, se traza una curva que pasa por todos los puntos y análogamente por los cuadrantes III y IV se traza otra curva que pasa por todos los puntos. Se presenta el error **ELG5,** ya que el estudiante no identifica las propiedades de la asíntota**;** al momento del bosquejo de la gráfica el estudiante traza mal las curvas y no toma en cuenta sus asíntotas, por ello se presenta los errores **ER1, ER2** y **EAS2;** Finalmente, se presenta una mala ubicación de los puntos cuando sus coordenadas no son números enteros, por ello se evidencia la dificultad de tipo **DUP1.**

Actividad 3

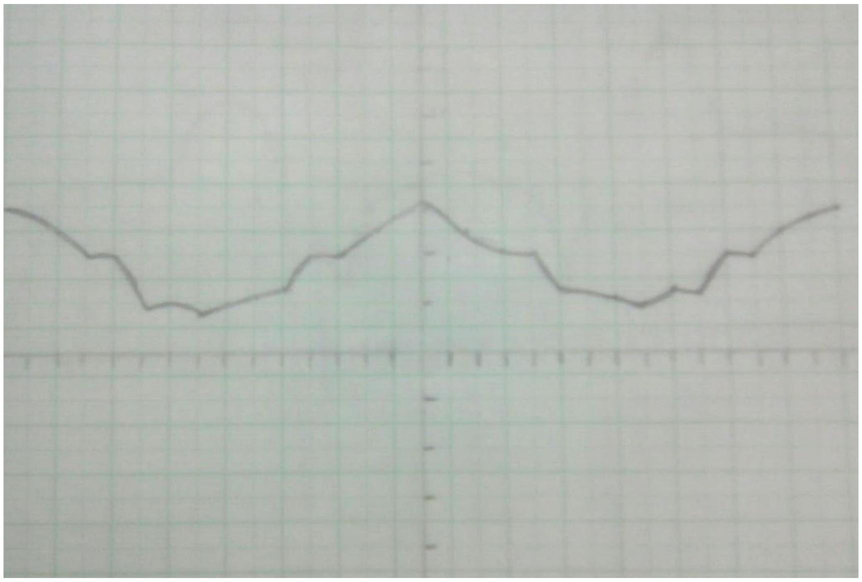


Ilustración 24. Transformada Est. C

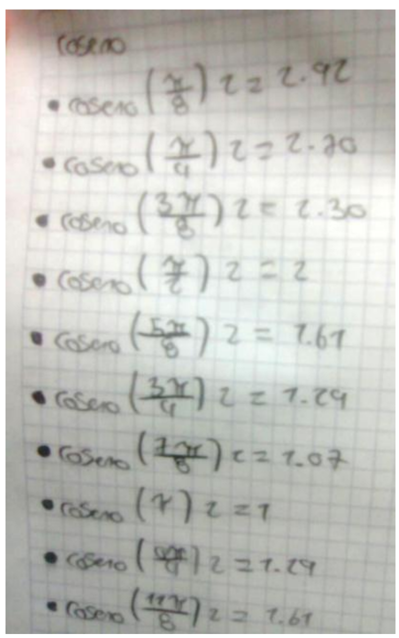


Ilustración 25. Tabulación Est. C

El estudiante en esta tarea no referencia ningún valor en el plano cartesiano, por lo que se hace una comparación con los datos que se tabularon y la función estudiada es $f(x) = \cos(x) + 2$. Se evidencia que los valores tabulados coinciden con la gráfica que se esperaba, pero llama la atención la escritura, ya que el estudiante no realiza proceso y no tiene en cuenta el signo de suma "+", para una primera impresión sería la tabulación de $\cos(x) * 2$, como se observa en la Ilustración 24.

En la ilustración 23 se evidencia un mal trazo de la curva y que los puntos no están bien ubicados en el plano cartesiano, luego se percibe el error **ER1** y **EP1.**

4.1.4 Estudiante D

Actividad 1

Ilustración 26. Función coseno Est. D

Se evidencian algunos errores similares a los presentados por los anteriores estudiantes como el trazo de la curva, la copia del segmento cuando la medida del ángulo es 0°, es decir no establecen la relación entre el triángulo rectángulo y el ángulo de medida 0°. Los errores y dificultades encontrados son **DUCR1, ER1, DR2**. Por ejemplo, llama la atención en el trazo de la gráfica, que esta no pasa por todos los puntos, algunos quedan fuera de la curva, luego se presenta el **ER1,** este error es común en todos los estudiantes analizados sin embargo esta evidencia, en el trazo de las curvas que no pasa por los puntos establecidos, no se había presentado. También se deduce, en la construcción de los triángulos rectángulos, que el estudiante tiene un mal manejo del transportador con ángulos mayores a 180°, por lo que se infiere que tiene la dificultad **DR2.**

Actividad 2

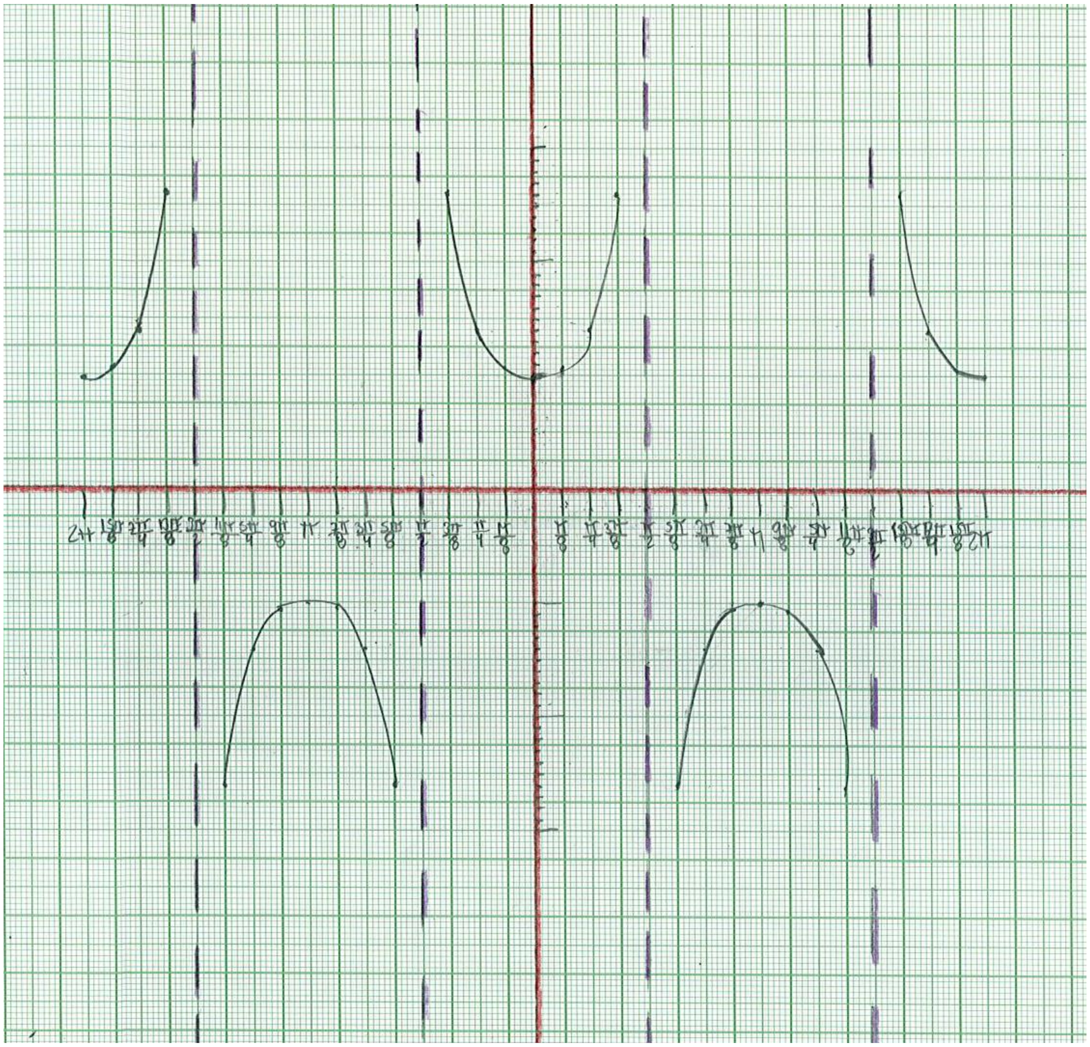


Ilustración 27. Función secante Est. D

En esta tarea se evidencia una mejor aproximación a la gráfica secante aunque hay algunos errores de trazo, sin embargo, no se realiza la gráfica en puntos cerca de los puntos indeterminados, es decir, no se grafica la función cuando tiende a infinito positivo o negativo, luego se evidencia que el estudiante comprende un poco mejor la noción de asíntota, aunque no tenga en cuenta que esta debe tender al infinito (ilustración 27) , por lo que se infiere que presenta **ER2** y **EAS2**

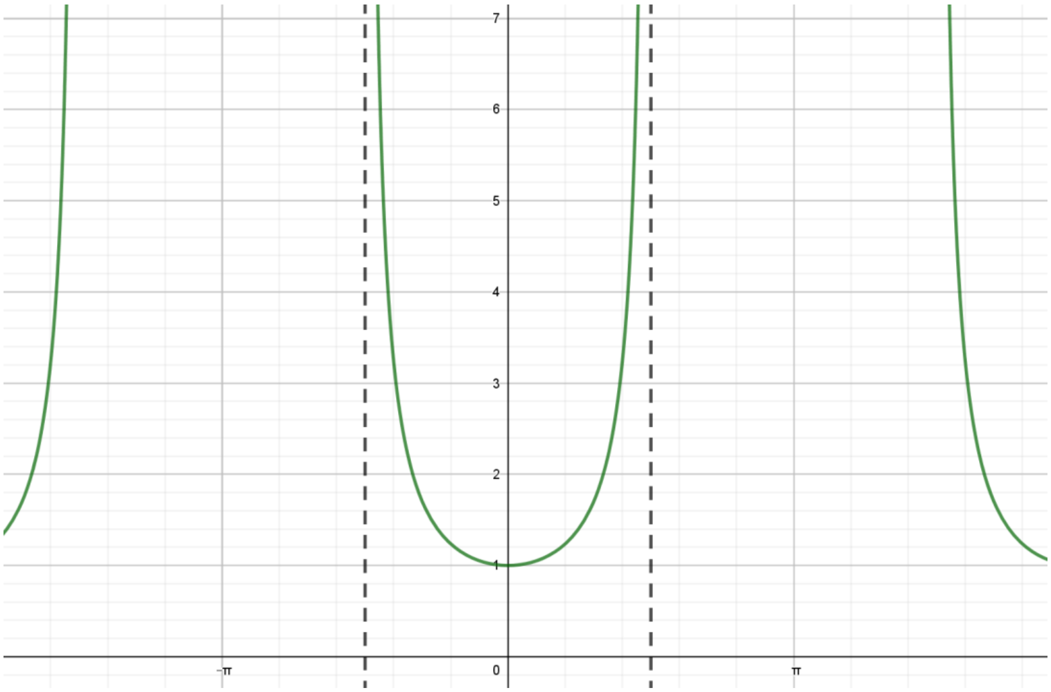


Ilustración 28. Asíntota secante Est. D

Finalmente se evidencia que la gráfica está incompleta, pues no se tiene valores para números mayores a 2π y menores a -2π, por ello se hace referencia a una dificultad de tipo **DR1.**

Actividad 3

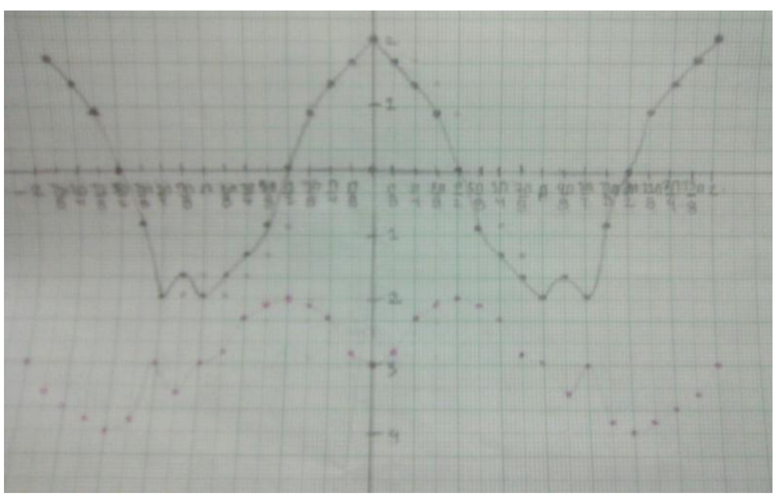


Ilustración 29. Transformada Est. D

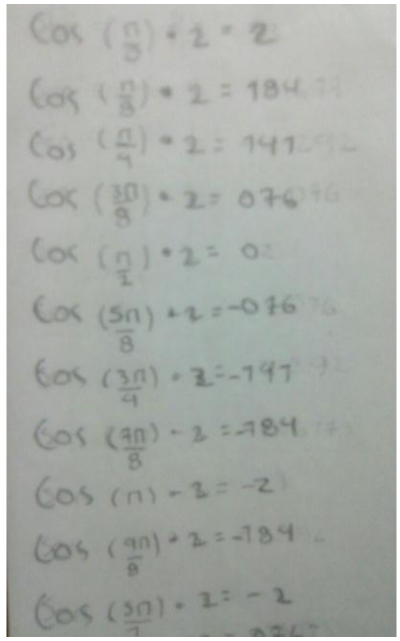


Ilustración 30. Tabulación Est. D

En esta tarea el estudiante realiza la gráfica y tabulación de $f(x) = 2 * \cos(x)$ a diferencia del estudiante C, en la ilustración 29 se evidencia que el estudiante realiza dos veces la ubicación de puntos, pero solo traza la curva utilizando uno de ellos. Sin embargo, este bosquejo tiene errores en el trazo de la curva y la ubicación de los puntos en el plano cartesiano, este error es de tipo **EP1**. Así mismo, junto con la tabulación se evidencia mal manejo de la calculadora ya que se obtienen resultados erróneos que alteran la gráfica, y los valores totales encontrados no están bien escritos, pues muchos son números decimales y no se evidencia, en la tabulación, el uso de la coma “,” notación para los decimales. Se infieren errores de tipo **EP2** y **EP3.**

4.1.5 Estudiante E

Actividad 1

En el desarrollo de esta tarea se evidencia un mal trazo de la curva, es decir, un error de representación **ER1.** Además, la copia de los segmentos empieza desde los 15°, el estudiante no tiene en cuenta el ángulo de medida 0° (cero). También se observa un mal uso del plano cartesiano, no se observa el eje *y* lo que implica un error de tipo **DMP1**.

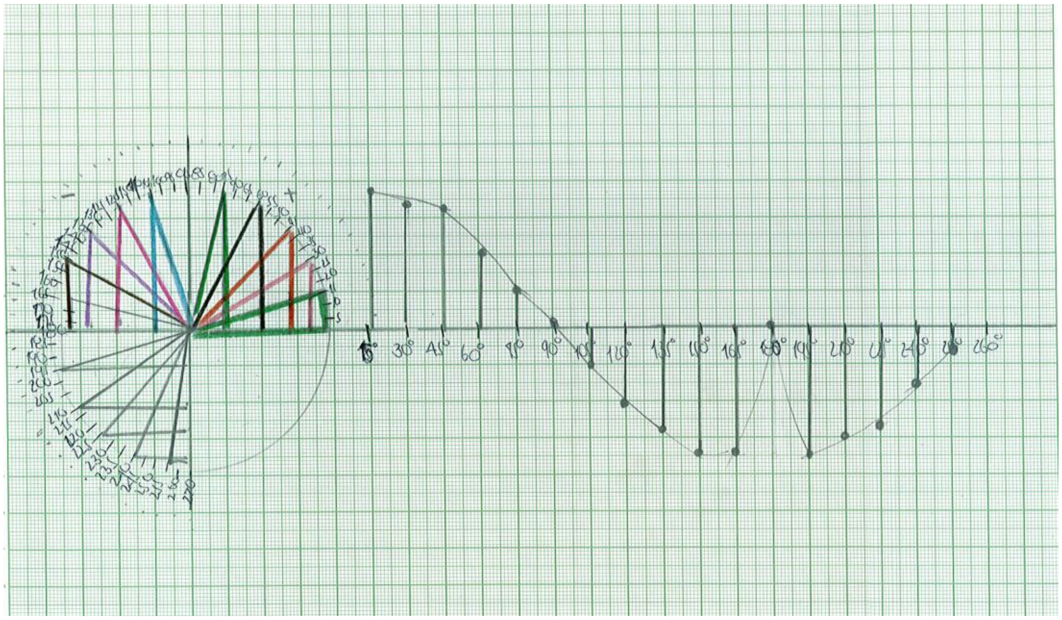


Ilustración 31. Función coseno Est. E

En cuanto a la construcción de la función coseno, mediante la copia de segmentos, se observa que muchos de estos no tienen la medida correcta correspondiente a cada ángulo, por ejemplo, en el ángulo de 180°, el estudiante no copia el segmento y señala que en ese punto no hay segmento, es decir, su medida es 0. Esto se debe a la construcción del triángulo rectángulo, como se mencionó anteriormente.

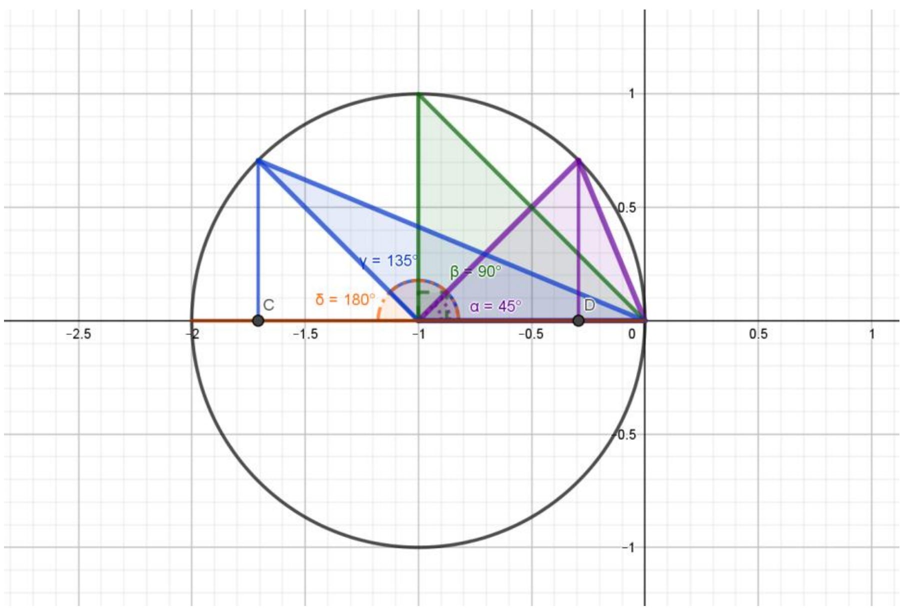


Ilustración 32. Construcción Función coseno 1

En la Ilustración 32 se observan 4 medidas denotadas de diferente color (45° morado, 90° verde, 135° azul y 180° naranja) para la construcción de la función coseno se debe copiar el lado que se ubica sobre el eje *x*, por ejemplo en el triángulo rectángulo con ángulo de 45°, se debe copiar el segmento que esta desde el centro de la circunferencia hasta el punto D como se indica en la Ilustración 32. Construcción Función coseno 1Ilustración 32. En el caso del ángulo de medida 135°, el segmento a copiar es el que tiene como extremos el centro y punto C, en el caso del ángulo con medida de 180°, no se puede realizar el triángulo, se mantiene la relación por ello el segmento a copiar es el que tiene como extremos el centro de la circunferencia y la intersección entre el eje *x* y la circunferencia, es decir el radio de la misma.

Luego el estudiante presenta dificultades con el trazo de los ángulos y mal manejo de las reglas (transportador y curvígrafo), por eso se infiere la dificultad de tipo **DUCR1**.

Al mismo tiempo se observa una mala construcción en los ángulos comprendidos entre 180° y 270°, puesto que el estudiante realiza el segmento perpendicular con respecto al eje *y*.

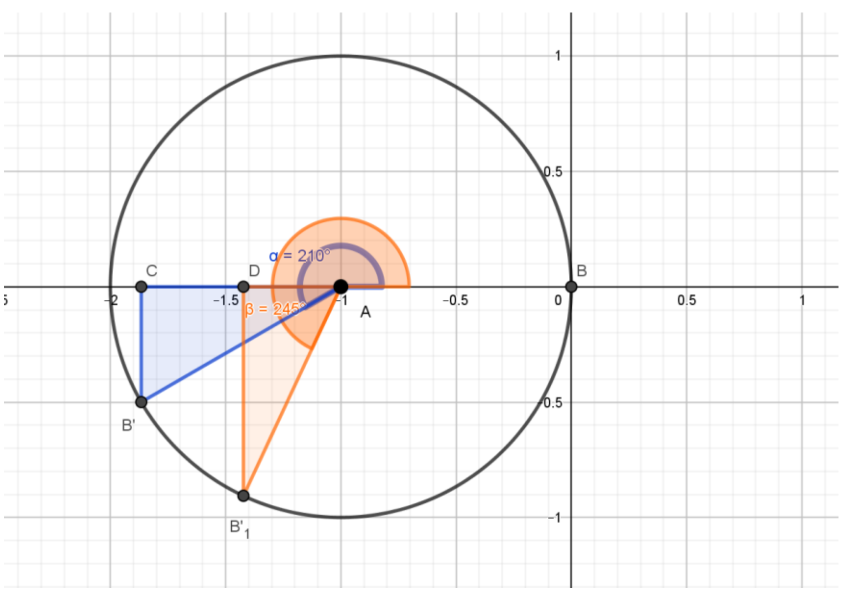


Ilustración 33. Construcción Función coseno 2

En esta ilustración se observa que para los ángulos entre 180° y 360°, la construcción de los triángulos es con respecto al eje *x*, en cambio el estudiante realiza la construcción tomando en cuenta el eje *y*, por lo que se evidencia un error técnico de tipo **ET1.**

Actividad 2

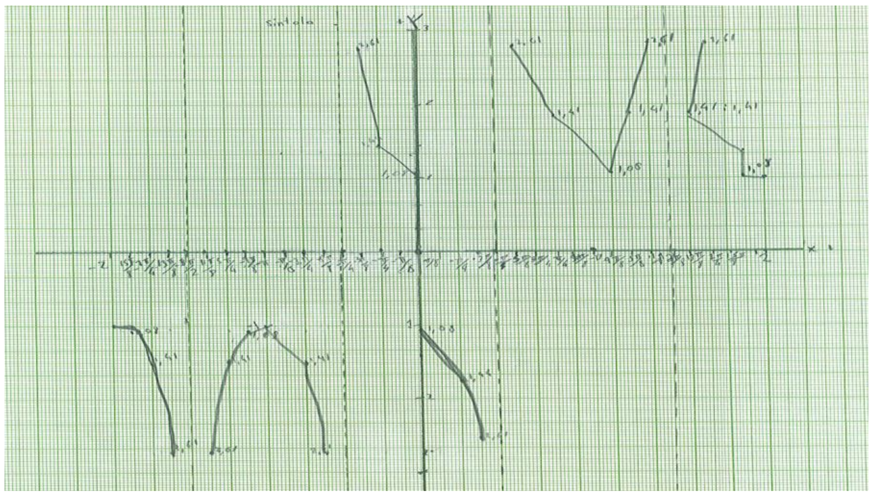


Ilustración 34. Función secante Est. E

Además de los malos trazos de la curva y de algunos errores mencionados como **EP1,** en esta ilustración se evidencia una mala ubicación de los puntos con respecto al signo, por ejemplo, las imágenes de los valores comprendidos en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\left[-5\frac{\pi}{2}, -3\frac{\pi}{2}\right]$ están negativas, como también las imágenes correspondientes a los valores de x en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}]$ son positivas, puesto que su signo difiere respectivamente. Se infiere errores de tipo **EP1** y **EP3,** ya que se evidencia un mal manejo de operaciones entre estos números (irracionales).

También se presentan dos dificultades en la tarea, en primer lugar, la dificultad **DUC1** ya que la actividad está diseñada para usar calculadora, y el estudiante al momento de tabular evidencio mal manejo de ella. En segundo lugar, la dificultad **DMP1,** ya que, se observa una mala graduación en los ejes del plano cartesiano, en el punto $3\frac{\pi}{2}$ se observa que no se mantiene la misma proporción en el eje *x*, al ubicar las abscisas.

Actividad 3

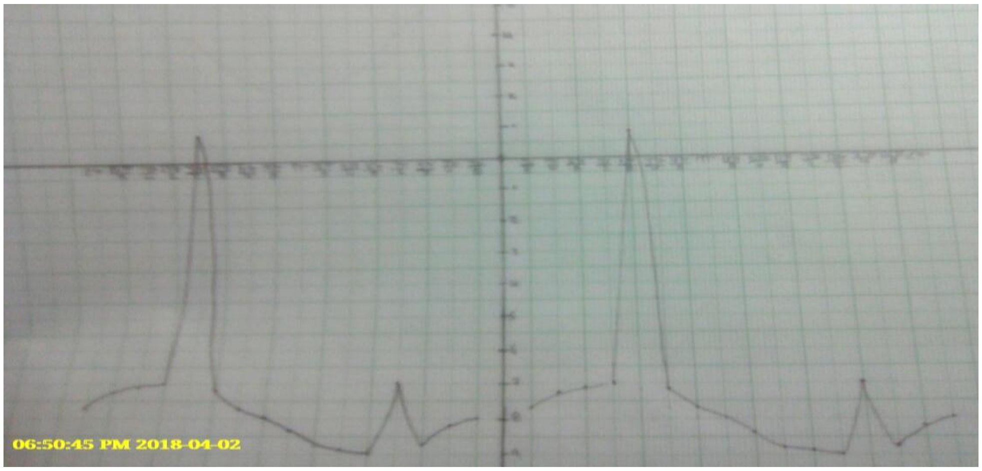


Ilustración 35. Transformada Est. E

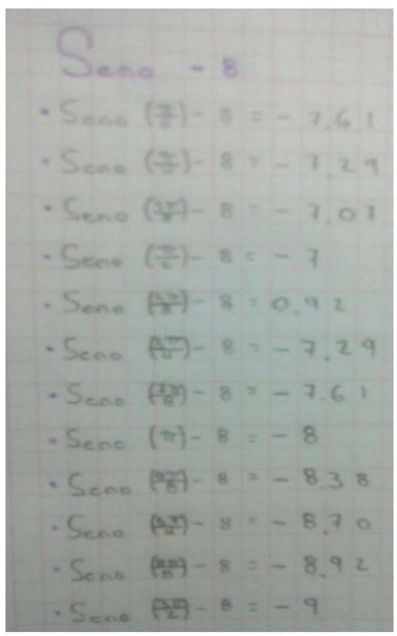


Ilustración 36. Tabulación Est. E

La función que planteó el estudiante en la tarea es $f(x) = sen(x) - 8$, se evidencia un mal trazo de la gráfica y mala ubicación de los puntos, como se observa en la ilustración 34 el estudiante realiza el procedimiento erróneo en algunos puntos como $\frac{5\pi}{8}$ y $\frac{13\pi}{8}$ se observa que el estudiante evalúa mal en estos puntos, por ejemplo, en el valor $x = \frac{5\pi}{8}$ el resultado es

$-7{,}0761$ aproximadamente, pero el estudiante coloca 0,92; analizando allí no se realizó el proceso completo puesto que $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 0{,}9238$ y si le restamos 8 $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) - 8 = 0{,}9238 - 8 = -7{,}0761$, por tanto hay un error de proceso de tipo **ET1**.

4.2 Síntesis de errores y dificultades

Durante el análisis anterior se evidenciaron errores comunes y algunos particulares de cada estudiante analizado, a continuación en la tabla 5 observamos un resumen de los errores presentado por cada estudiante.

Tabla 5. Errores y Dificultades evidenciados en las actividades

Est.	Act.	Errores y dificultades evidenciadas			
Est. A	1	**ER1**	**DUCR1**		
	2		**DUCR1**	**EP1**	**EAS2, ER2, DMP1**
	3	**ER1**	**DUCR1**		**DUC1,**
Est. B	1	**ER1**	**DUCR1**	**EP1**	**DR1, DR2,**
	2		**DUCR1**	**EP1**	**EP3, DUC1,**
	3		**DUCR1**		**EP3, ET1, DUC1, DAS1**
Est. C	1	**ER1**	**DUCR1**	**EP1**	
	2	**ER1**	**DUCR1**	**EP1**	**ELGS5, ER2, EAS2, DUP1**
	3	**ER1**	**DUCR1**	**EP1**	
Est. D	1	**ER1**	**DUCR1**		**DR1,**
	2		**DUCR1**		**ER2, EAS2, DR1,**
	3		**DUCR1**	**EP1**	**EP2, EP3,**

Est. E	1	**ER1**	**DUCR1**		**DMP1, ET1,**
	2		**DUCR1**	**EP1**	**EP3, DUC1,**
	3		**DUCR1**	**EP1**	**ET1, EP2, EP3,**

De la tabla anterior, se observa que todos presentaron errores en la ubicación de los puntos en el plano cartesiano **ER1,** el mal trazo de las curvas en las gráficas de las funciones trigonométricas y sus transformaciones **EP1** y dificultad en el manejo del curvígrafo **DUCR1.**

Se tiene como hipótesis que el manejo del curvígrafo es una dificultad para todos los estudiantes que viene desde el curso anterior, a pesar de que el profesor titular del curso, ya había explicado el manejo del mismo, no se evidenció esta habilidad en los estudiantes. También se cree que el manejo del plano cartesiano no es el adecuado, dadas las dificultades presentadas al ubicar las coordenadas y al graduar los ejes.

Los estudiantes A, B y E presentaron la dificultad **DUC1,** el mal manejo de la calculadora al momento de operar estas funciones se evidencia en las tabulaciones realizadas, por lo que se considera que muchos de ellos no manipulan bien esta herramienta, lo que genera resultados erróneos, a pesar de que durante todo el trabajo con funciones trigonométricas el profesor permitió su uso y dio instrucciones de cómo hacerlo.

En los estudiantes B, D y E se evidenció el error **EP3**, el mal manejo de las operaciones entre números irracionales, por ejemplo, multiplicar o dividir $3\pi \; o \; \frac{\pi}{4}$. El número Pi ($\pi$) genera confusión en los estudiantes por sus diferentes interpretaciones numéricas ya sea en grados o radianes.

4.3 Errores y dificultades emergentes

Así mismo se evidenciaron algunos errores y dificultades que no corresponden la clasificación presentada entre las establecidas en la categoría de análisis, ya que no están relacionados con la teoría encontrada. Por tanto, se hará una tipificación propia partir de lo encontrado en realicen a los errores y dificultades. En la Tabla 6. Errores y Dificultades Emergentes se mencionarán los errores y dificultades evidenciados, se asignará un código, la actividad en donde se presentó y su descripción.

Tabla 6. Errores y Dificultades Emergentes

Nombre	código	Descripción de la dificultad o error	Actividades
Dificultad Ángulo Cero grados	**DAC0**	Se evidencia cuando el estudiante no hace relación entre la medida del ángulo 0° y el triángulo rectángulo.	1, 2 y 3
Error de Construcción con Ejes	**ECE1**	Cuando el estudiante realiza una construcción de la función teniendo dificultad en el manejo de los ejes en la métrica usual, por ejemplo, confunde los ejes intercambiando notación de *x* y *y*.	1
Dificultad Noción Gráfica de una función	**DNG1**	Se evidencia cuando el estudiante traza la gráfica uniendo todos los puntos sin tener en cuenta las propiedades de la función en el plano cartesiano	2
Dificultad Construcción Triángulo Rectángulo	**DCTR1**	Se presenta cuando los ángulos que están comprendidos en los diferentes cuadrantes (I, II, III, IV), los triángulos rectángulos son construidos de manera incorrecta cambiando el eje de orientación.	1
Dificultad Manejo del Transportador	**DMT1**	Se dificulta cuando se da mal manejo al transportador en la construcción de ángulos	1

5. CONCLUSIONES

El trabajo con funciones trigonométricas para estudiantes de grado décimo ha sido fundamental en el currículo de matemáticas colombiano durante más de 60 años, por ello, el objetivo principal de este trabajo es analizar los procesos de aprendizaje identificar y tipificar los posibles errores y dificultades (realizados por los autores) de los estudiantes en la transformación de dichas funciones. Además de ello, se encontraron nuevos errores y dificultades que no están en los documentos consultados, por ello se hace una tipificación de los mismos.

En general, las actividades desarrolladas fueron diseñadas con el fin de analizar tres ámbitos en el trabajo de las funciones trigonométricas, la gráfica de una función trigonométrica a partir del circulo unitario y usando los valores que se obtienen de tabular y las transformaciones de funciones trigonométricas. Sin embargo se evidencia que los estudiantes tienen falencias relacionadas con preconceptos como ubicación de puntos en el plano cartesiano, la definición de función y en relación al manejo de artefactos, como el transportador.

Durante el análisis de las tareas desarrolladas por los estudiantes, al realizar comparaciones entre los ellos, se observó que los errores **ER1, EP1** y **DUCR1** se presentan en todos los estudiantes, por lo cual, se establece que los estudiantes tienen errores y dificultades con el manejo del plano cartesiano, del curvígrafo y el trazo de las curvas, que son importantes al momento del trabajo de las funciones trigonométricas. Aunque en clases anteriores y posteriores se realizaron socializaciones de lo realizado en las tareas, con el fin de superar las dificultades presentadas y minimizar los errores, en la última actividad se siguieron presentando algunos de estos.

En las producciones de los estudiantes no solo se evidenciaron los errores establecidos en la teoría en la que se basó este trabajo, sino que se presentaron nuevos errores y dificultades que no se tenían previstos, los cuales se denominaron **DAC0, ECE1, DNG1, DCTR1** y **DMTI** respectivamente. El autor de este trabajo considera que tales errores y dificultades son consecuencias de vacíos conceptuales, problemas en la enseñanza, dificultades en la interpretación de la definición y el mal uso del curvígrafo y transportador.

Se recomienda que, para tratar de corregir dichos errores y dificultades, se deben diseñar actividades que propicien a un mejor desarrollo de los contenidos, en donde se refuerce el trabajo con funciones trigonométricas mediante el uso de las TIC y la buena manipulación de la regla y el compás.

Durante el proceso de elaboración de este trabajo de grado he tenido crecimiento desde el aspecto personal, académico y profesional. En lo personal, porque ha sido una gran responsabilidad llevar a cabo todo el estudio, además me ha permitido mejorar en la puntualidad. Desde lo académico, que el diseño de las actividades, para estudiantes, debe ser algo riguroso, en lo cual se deben tener en cuentas varios aspectos tanto cognitivos, como sociales del estudiante. Profesionalmente, como futuro licenciado en matemáticas, soy consciente que este tipo de trabajos ayuda a mejorar la forma de escribir y obtener una mejor capacidad de investigación en el ámbito educativo.

BIBLIOGRAFÍA

Engler, A., Gregorini, M, Müller D, Vrancken, S., Hecklein, M. (2004). *Los errores en el aprendizaje de las matemáticas.* Facultad de ciencias agrarias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina.

Fernández, J., (2010). *Unidad Didáctica: Trigonometría.* Máster en formación al profesorado de enseñanza secundaria. Universidad de granada.

Flores, F., (2008). *Historia y didáctica de la trigonometría.* Portada diseño y difusión de la obra: Ittakus. Recuperado en *www.publicatuslibros.com* .

Franchi, L., Hernández, A., (2004). *Tipología de errores en el área de geometría plana.* Universidad de los Andes. Mérida. Venezuela. Educere, vol. 8.

Godino, J., Batanero, C., Font, V., (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Proyecto Edumat-Maestros.

González, C., Mendoza, A, Mora, L, (2017). *Currículo de trigonometría ¿Decisión de otros?* Universidad Pedagógica Nacional. Colegio Calasanz. Foro EMAD 2017.

López, L. Alanís, A. Pérez, O. (2005). *La habilidad ubicación espacial matemática, como habilidad esencial en la visualización matemática*. Acta Latinoamérica de matemática educativa. Vol. 18.

Malva, A., Rogiano, C., Roldán, G., Banchik, M. (2008). *Fortaleciendo las habilidades matemáticas de los alumnos ingresantes desde los entornos virtuales.* Facultad de ciencias económicas. UNL. Argentina.

Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia. (2006*). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Pág. (87-89).

Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia. (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Colombia Aprende. Grado Décimo.

Montalvo, R. (2012). *Historia de la trigonometría y su enseñanza*. Facultad de ciencias fisicomatemáticas. Benemérita Universidad autónoma de Puebla. México

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de la Laguna

Ruano, R. Socas, M. Palarea, M. (1984). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra.

Sánchez, H., (2014), *Las funciones trigonométricas seno y coseno a partir de sus aplicaciones.* Maestría en la enseñanza de las ciencias exactas y naturales. Universidad Nacional de Colombia.

Steward, J., Redlin, L., Saleem, W. (2007). *Precalculo.* Matemáticas para el cálculo. Cengage Learning. Quinta edición.

ANEXO A

Actividad 1

En las hojas milimetradas:

1) Realice el plano cartesiano, con los valores del eje x en grados y el eje y números reales
2) Construya un círculo de radio 1, con centro en (-1,0)
3) Con sus conocimientos de razones trigonométricas y la construcción de la función seno, realice la construcción de la función coseno

ANEXO B

Actividad 2

En las hojas milimetradas:

1) Realice la tabulación de la función $sec(x)$ (recuerde las razones trigonométricas)
2) Realice el plano cartesiano, con los valores del eje x en grados y el eje y números reales
3) Grafique los valores encontrados en el plano cartesiano

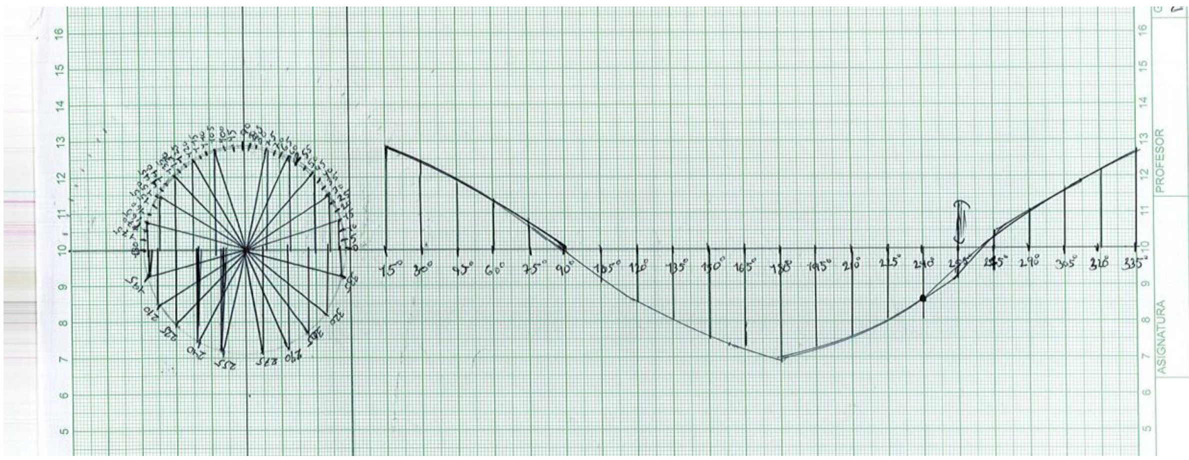
ANEXO C

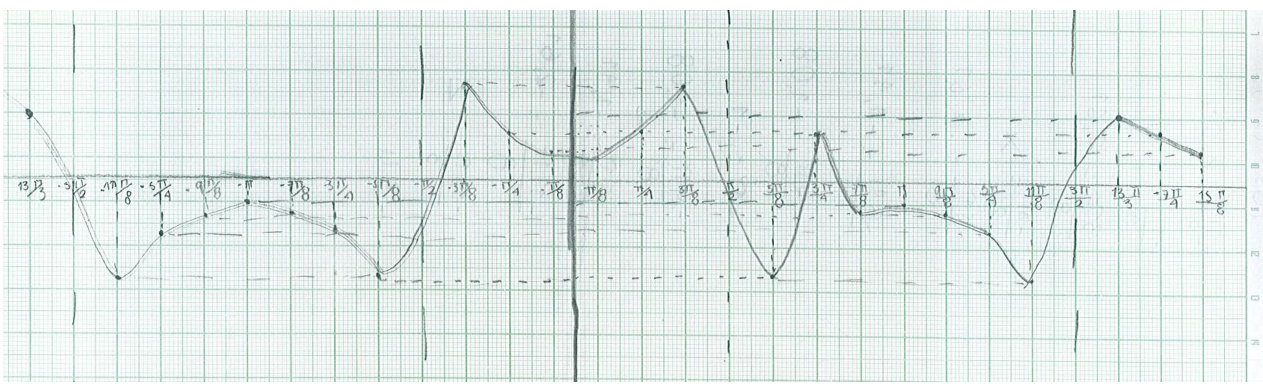
Actividad 3

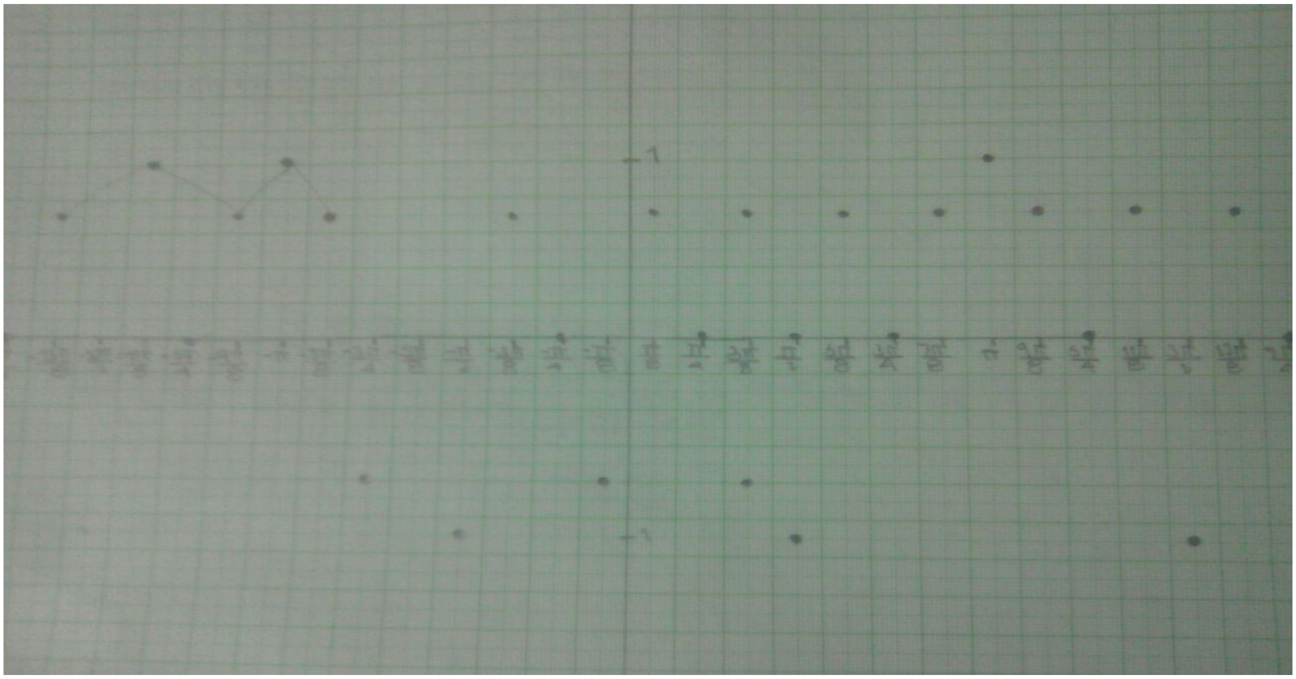
Después de haber visto las transformaciones de las funciones trigonométricas, realice:

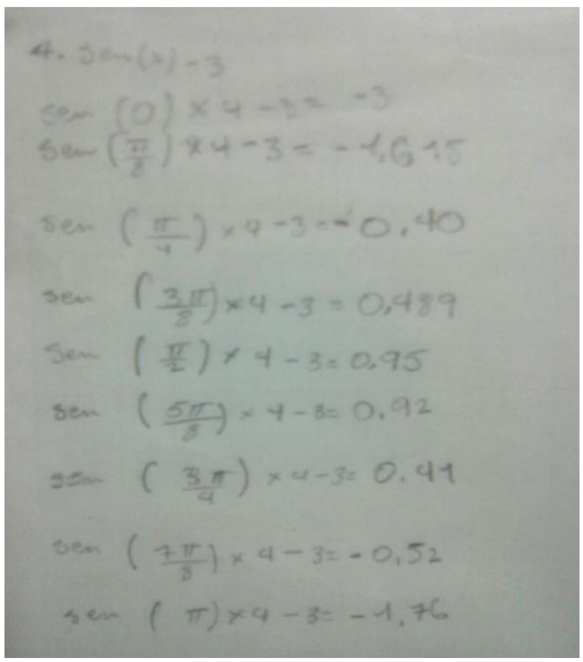
1) Escoja cualquier función trigonométrica
2) Realice una transformación cualquiera a esa función. Ejemplo: $f(x) = \frac{\tan(x)}{2}$
3) Realice la respectiva tabulación
4) Grafique la función transformada

ANEXO D


15°
30°
45°
60°
75°
90°
105°
120°
135°
150°
165°
180°
195°
210°
225°
240°
255°
270°
285°
300°
315°
330°
345°
PROFESOR
ASIGNATURA







4. sen(x) − 3

$sen(0) \times 4 - 3 = -3$

$sen\left(\frac{\pi}{8}\right) \times 4 - 3 = -1{,}615$

$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \times 4 - 3 = -0{,}40$

$sen\left(\frac{3\pi}{8}\right) \times 4 - 3 = 0{,}489$

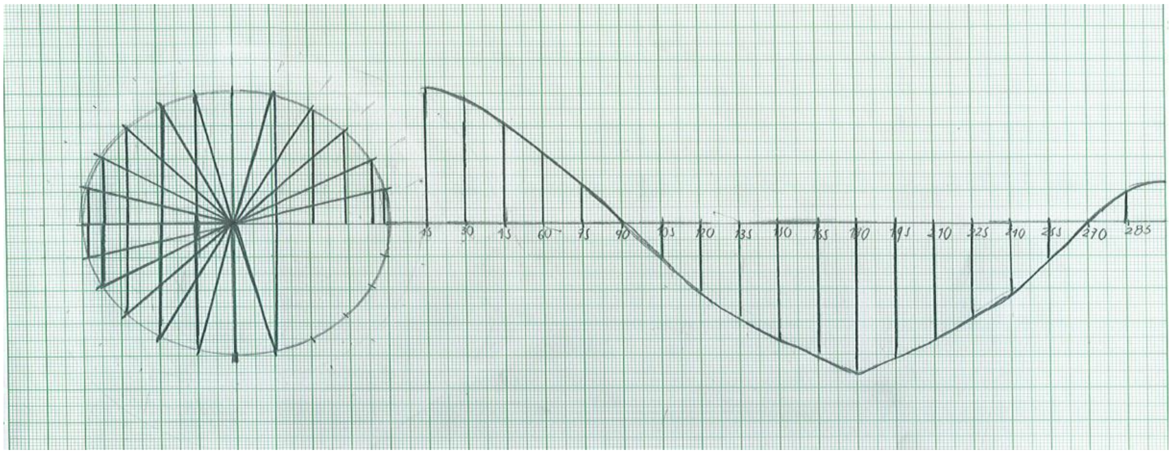
$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \times 4 - 3 = 0{,}95$

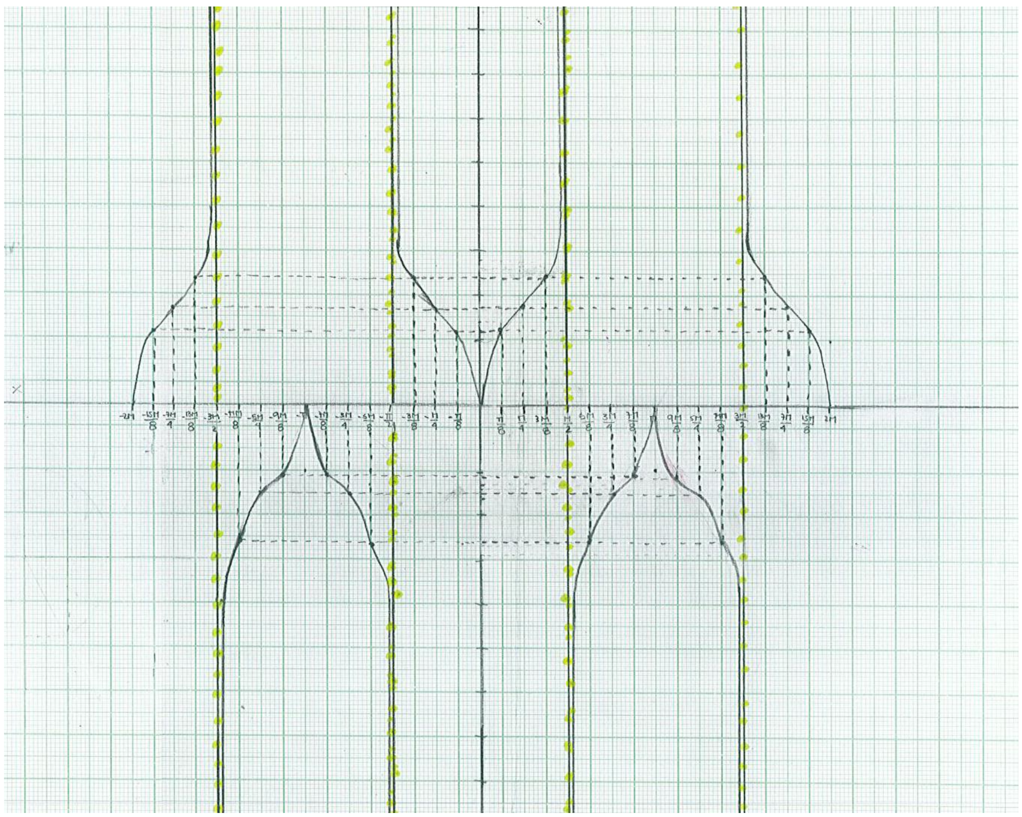
$sen\left(\frac{5\pi}{8}\right) \times 4 - 3 = 0{,}92$

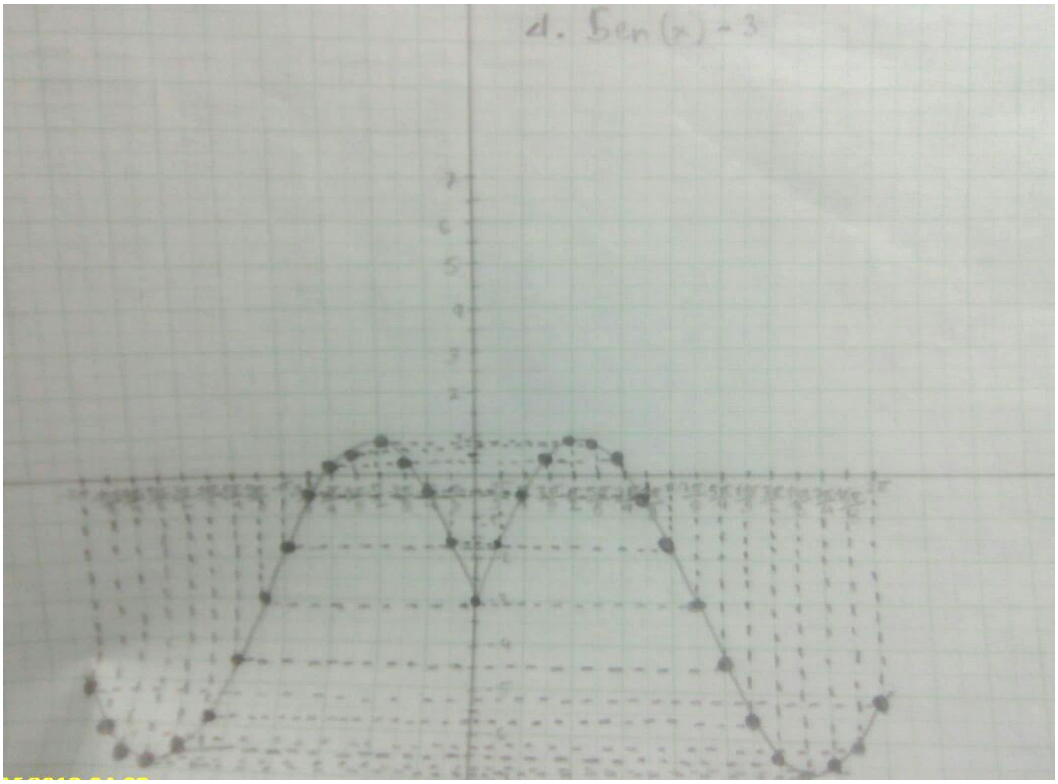
$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) \times 4 - 3 = 0{,}41$

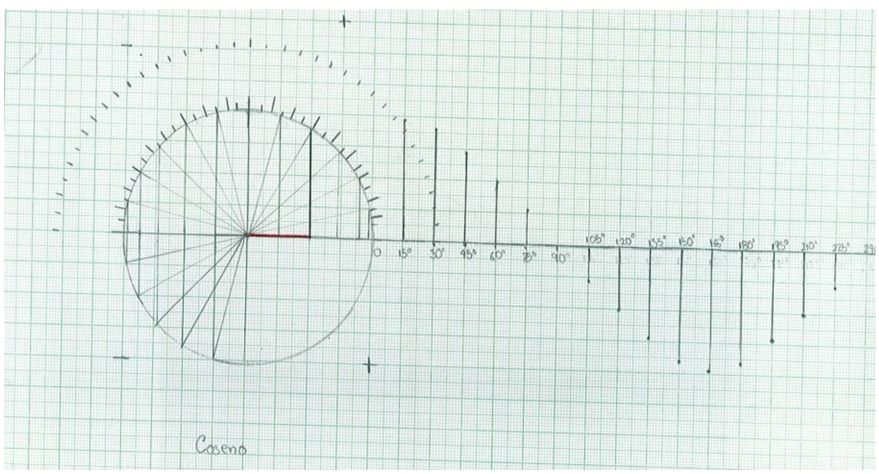
$sen\left(\frac{7\pi}{8}\right) \times 4 - 3 = -0{,}52$

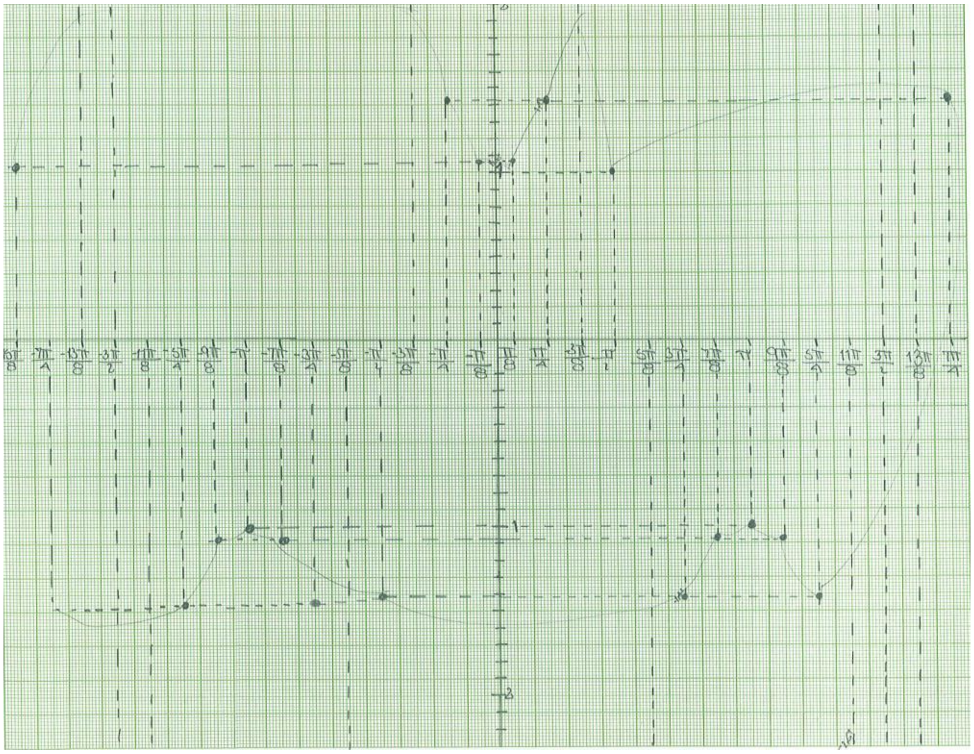
$sen(\pi) \times 4 - 3 = -1{,}76$

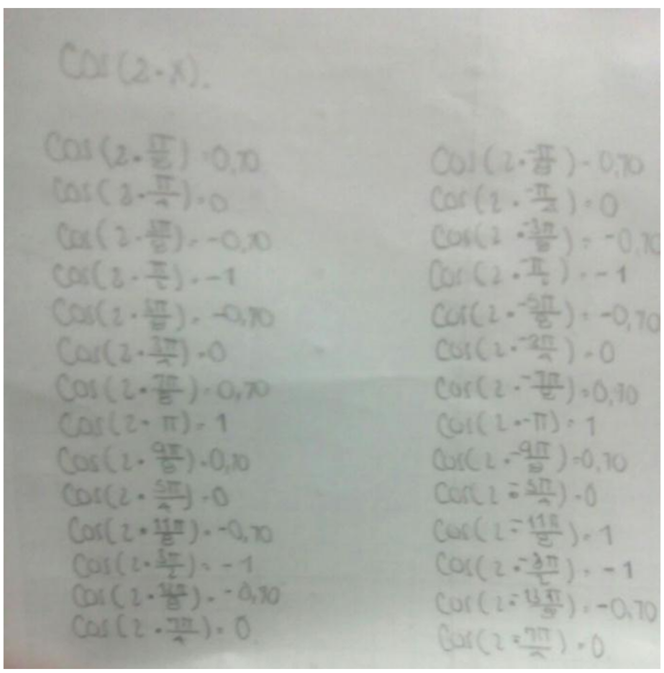

15
30
45
60
75
90
105
120
135
150
165
180
195
210
225
240
255
270
285

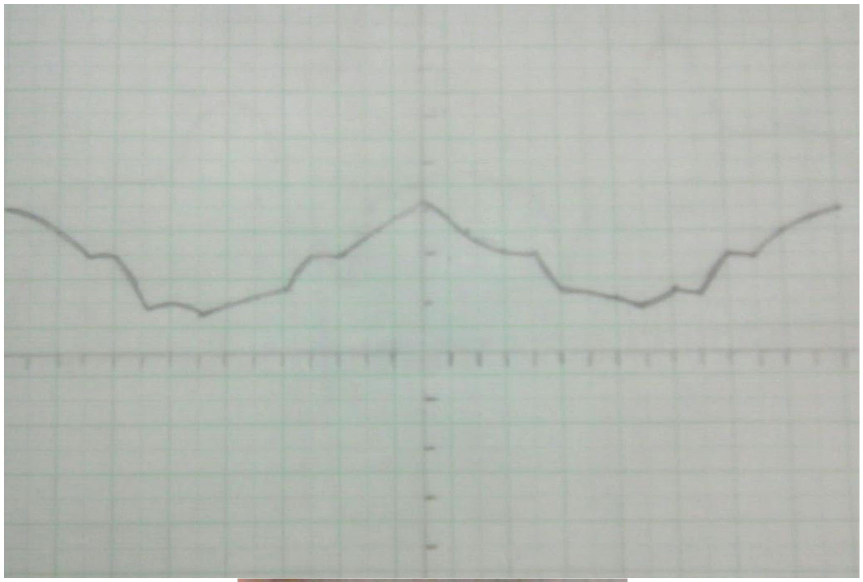


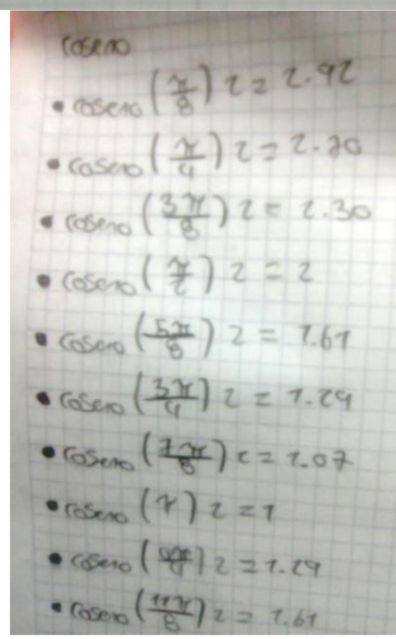

d. Sen(x) - 3


Coseno



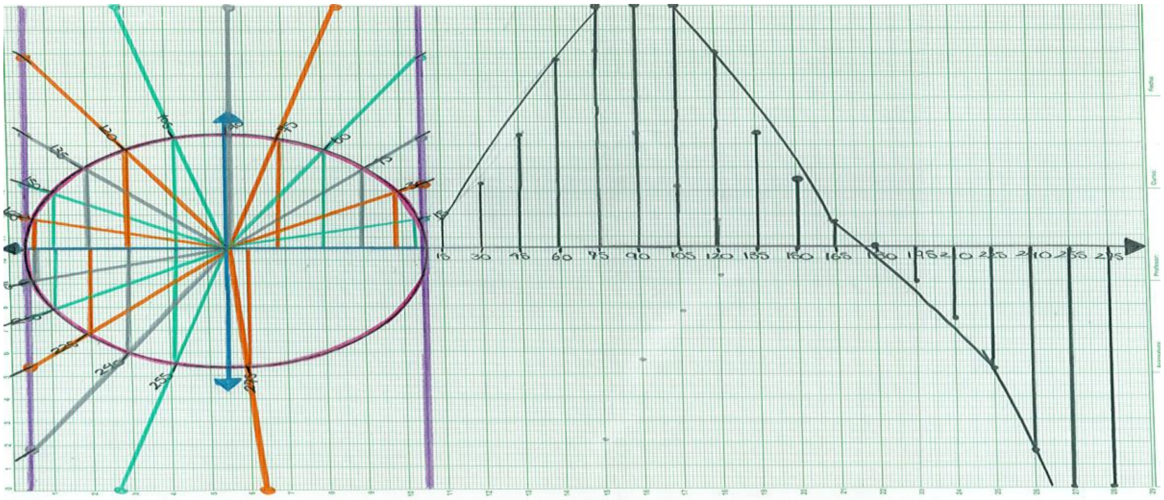

Cos(2·x).
Cos(2·π/8) = 0,70
Cos(2·π/4) = 0
Cos(2·3π/8) = −0,70
Cos(2·π/2) = −1
Cos(2·5π/8) = −0,70
Cos(2·3π/4) = 0
Cos(2·7π/8) = 0,70
Cos(2·π) = 1
Cos(2·9π/8) = 0,70
Cos(2·5π/4) = 0
Cos(2·11π/8) = −0,70
Cos(2·3π/2) = −1
Cos(2·13π/8) = −0,70
Cos(2·7π/4) = 0
Cos(2·−π/8) = 0,70
Cos(2·−π/4) = 0
Cos(2·−3π/8) = −0,70
Cos(2·−π/2) = −1
Cos(2·−5π/8) = −0,70
Cos(2·−3π/4) = 0
Cos(2·−7π/8) = 0,70
Cos(2·−π) = 1
Cos(2·−9π/8) = 0,70
Cos(2·−5π/4) = 0
Cos(2·−11π/8) = 1
Cos(2·−3π/2) = −1
Cos(2·−13π/8) = −0,70
Cos(2·−7π/4) = 0

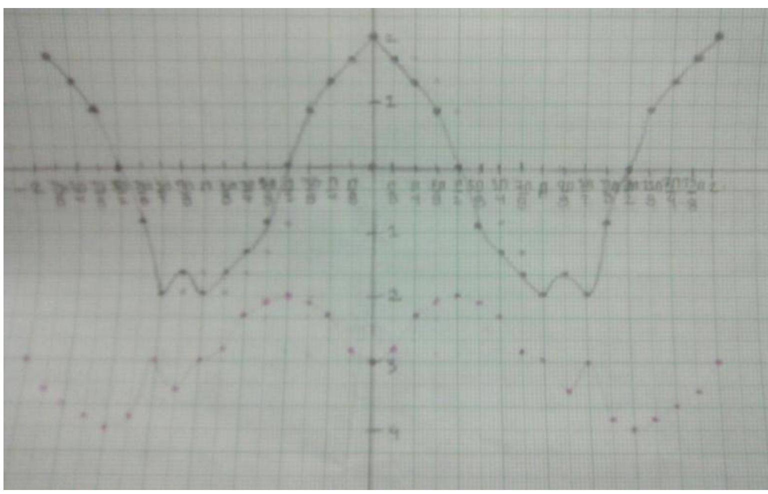


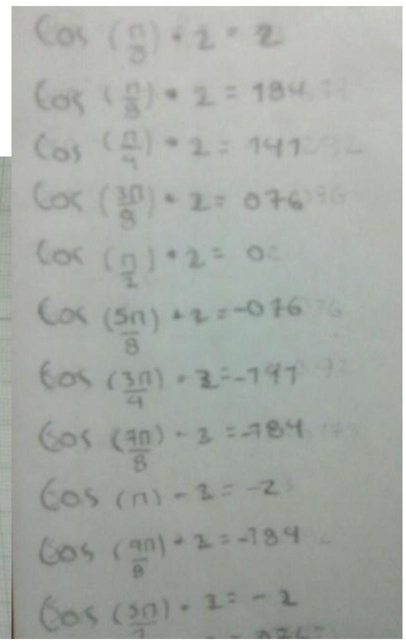


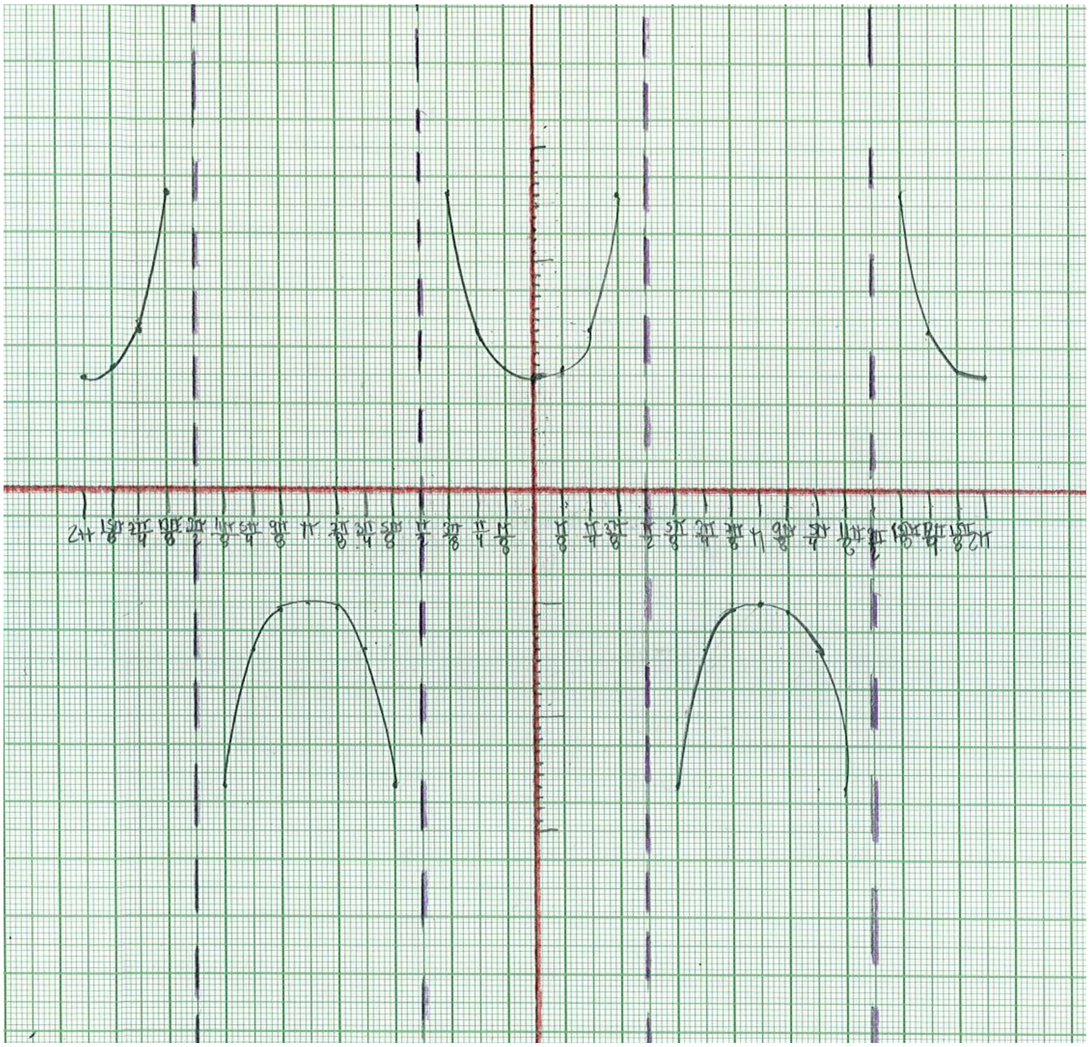
coseno

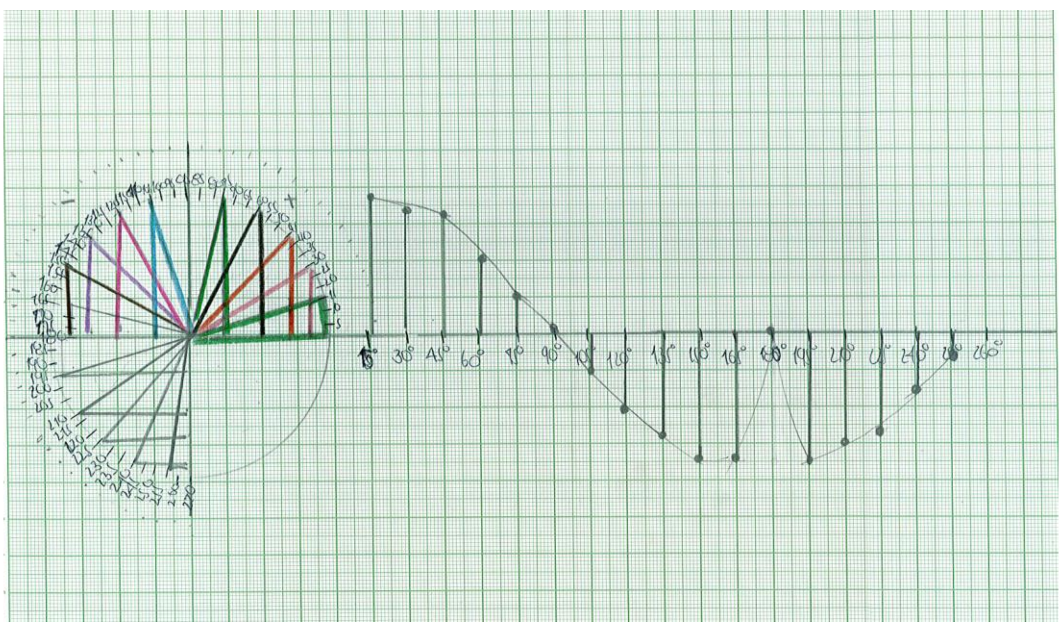
- coseno $\left(\frac{\pi}{8}\right) 2 = 2.92$
- coseno $\left(\frac{\pi}{4}\right) 2 = 2.70$
- coseno $\left(\frac{3\pi}{8}\right) 2 = 2.30$
- coseno $\left(\frac{\pi}{2}\right) 2 = 2$
- coseno $\left(\frac{5\pi}{8}\right) 2 = 1.61$
- coseno $\left(\frac{3\pi}{4}\right) 2 = 1.29$
- coseno $\left(\frac{7\pi}{8}\right) 2 = 1.07$
- coseno $(\pi) 2 = 1$
- coseno $\left(\frac{5\pi}{4}\right) 2 = 1.29$
- coseno $\left(\frac{11\pi}{8}\right) 2 = 1.61$

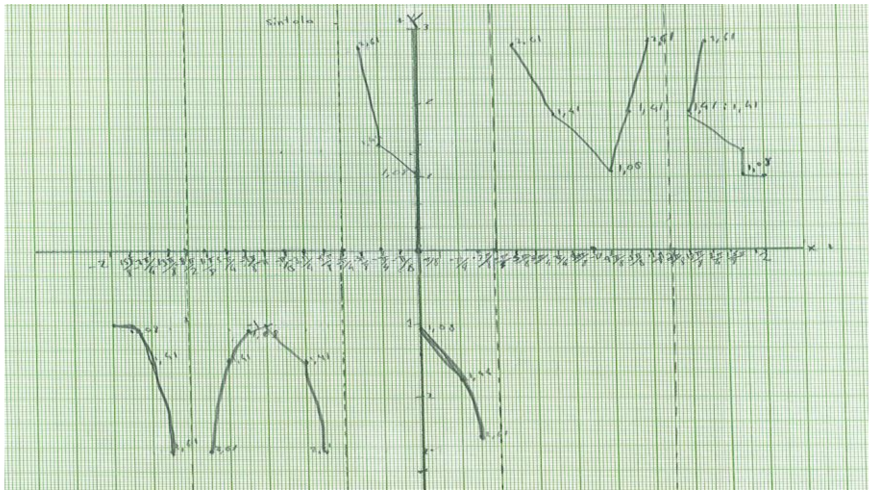


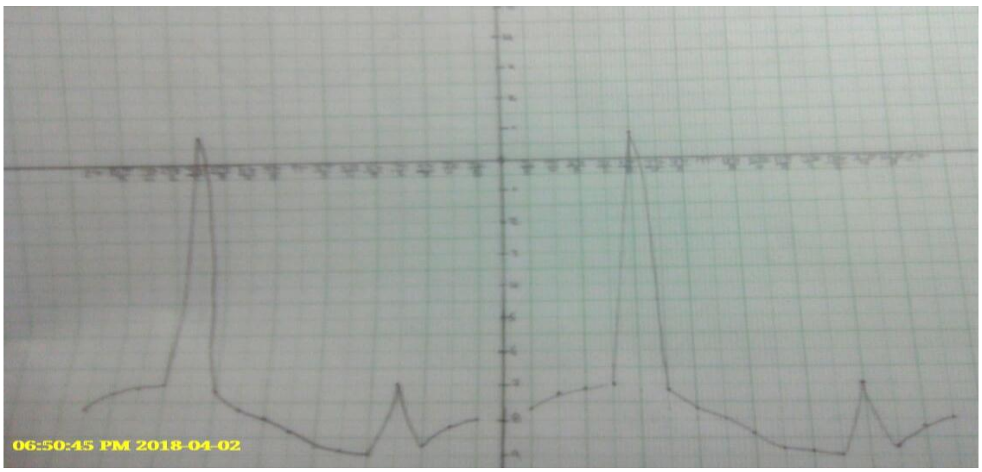


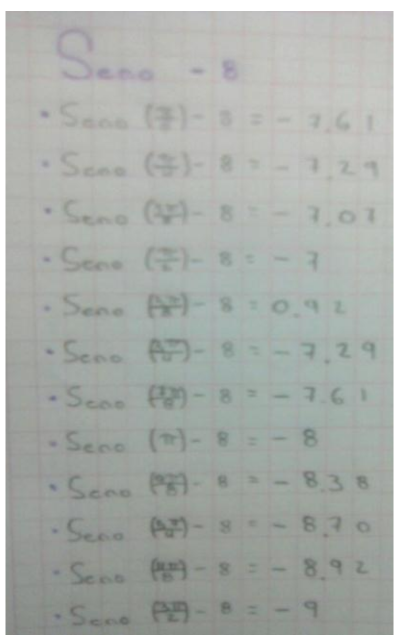

Cos (n/0) * 2 = 2
Cos (n/8) * 2 = 184
Cos (n/4) * 2 = 141
Cos (3n/8) * 2 = 076
Cos (n/2) * 2 = 0
Cos (5n/8) * 2 = -076
Cos (3n/4) * 2 = -141
Cos (7n/8) * 2 = -184
Cos (n) * 2 = -2
Cos (9n/8) * 2 = -184
Cos (5n/4) * 2 = -2











Seno - 8

- Seno ([illegible]) - 8 = - 7,61
- Seno ([illegible]) - 8 = - 7,29
- Seno ([illegible]) - 8 = - 7,07
- Seno ([illegible]) - 8 = - 7
- Seno ([illegible]) - 8 = 0,92
- Seno ([illegible]) - 8 = - 7,29
- Seno ([illegible]) - 8 = - 7.61
- Seno (π) - 8 = - 8
- Seno ([illegible]) - 8 = - 8,38
- Seno ([illegible]) - 8 = - 8,70
- Seno ([illegible]) - 8 = - 8,92
- Seno ([illegible]) - 8 = - 9