LA RELACIÓN DE EULER
UNA CONEXIÓN ENTRE LA TOPOLOGÍA Y LA GEOMETRÍA

ANDRES CAMILO BELLO ROCHA

Cod: 2011140004

C.C. 1076658077

CRISTIAN ANDREY PEÑA ACUÑA

Cod: 2011140056

C.C. 1030594762

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTA D.C

2015

LA RELACIÓN DE EULER
UNA CONEXIÓN ENTRE LA TOPOLOGÍA Y LA GEOMETRÍA

ANDRES CAMILO BELLO ROCHA
Cod: 2011140004
C.C. 1076658077
CRISTIAN ANDREY PEÑA ACUÑA
Cod: 2011140056
C.C. 1030594762

Trabajo de grado presentado para obtener el titulo de Licenciados en Matemáticas.

Asesor:
MARÍA NUBIA SOLER

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTA D.C

2015

Resumen Analítico en educación (RAE).

1. Informacion General	
Tipo de Documento	Trabajo de grado.
Acceso al Documento	Universidad Pedagógica Nacional / Biblioteca Central.
Titulo del Documento	La relación de Euler una conexión entre la Topología y la Geometría.
Autor(es)	Bello Rocha, Andres Camilo; Peña Acuña, Cristian Andrey.
Director	Soler Alvarez, Maria Nubia.
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2015, 73p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional UPN.
Palabras Claves	VÉRTICES, ARISTAS, CARAS, HISTORIA, TOPOLOGÍA, HOMEOMORFISMO, SÓLIDOS, FÓRMULA DE EULER, DESCARTES, DEFICIENCIA ANGULAR, POLÍGONO, CORTES, POLIEDROS CONVEXOS, LEGENDRE, ESFERA, GRAFO, GRAFO, RELACIONES ENTRE TOPOLOGÍA Y LA GEOMETRÍA.

2. Descripción

Este documento presenta un estudio de la Relación de Euler, queriendo con ello desvelar la importancia de este descubrimiento para el desarrollo de las matemáticas, en particular para el surgimiento de la topología.
También se aborda la relación de Euler desde su concepción, evidenciando su proceso de creación, construcción, formulación y demostración, ligando este proceso, y las ideas que este conllevó, al nacimiento de la topología, brindando así una idea del porqué, todo este proceso, sienta las bases para el surgimiento de esta nueva rama en las matemáticas.

Luego de ello se centra la atención en aquellos momentos históricos que hicieron parte del surgimiento de la topología y se evidencia como estos se encuentran ligados a lo estudiado previamente en la relación de Euler.
Seguido de esto se muestran dos de las aplicaciones que tiene la relación de Euler en la matemática para llegar a concluir algunos resultados de todo lo mencionado en los 4 capítulos que componen este trabajo.

3. Fuentes

Para el desarrollo del trabajo de grado se tomaron algunas fuentes, las cuales hacen referencia a la vida de Leonhard Euler, planteamiento de la relación, al cómo la formula de Euler sienta algunas bases para el surgimiento de la topología y algunas aplicaciones de la fórmula.

Richeson,D. (2008) *EULER'S GEM, The polyhedron formula and the birth of topology*, Princeton university pres.

Anzaldo,A., Delgado,J., y Monroy,F., (2007). *El Legado Matemático de Leonhard Euler a Trescientos Años de su Nacimiento*, Universidad Autonoma Metropolitana, **6** ,5-10.

Napoles,J. (2002). *La fórmula de Euler y la topología*, Argentina, Universidad de la cuenca del plata.

Neumann,M. (2007). *Euler y la geometría de la posicion*, Instituto de matemáticas, UNAM, Mexico..87-96.

Evlero, L.(1758). *Elemental doctrinae solidorum*, Novi commentarii academiæ scientiarum Petropolitanae.

Macho, M. (2002). ¿Qué es Topología?. *Sigma*, *20*, 63-78.

Muñoz, J. (2003). *Topologia Basica*, Departamento de Matemáticas y Estadistica, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C.

Bamon, R. (2009). *Topología y geometría*, facultad de ciencia, departamento de matemática, universidad de Chile, Chile.

Herrero, J. (2011). *Topología de Espacios Métricos.* España, OCW-Universidad de Murcia.

4. Contenidos

Este documento contiene cuatro capítulos. En primera instancia se encuentra lo que corresponde con la justificación, la introducción y los objetivos del trabajo realizado. Como primer capítulo se da evidencia de algunos aspectos del proceso que se llevó a cabo para el descubrimiento de la relación de Euler para poliedros. El segundo capítulo contiene algunas formas usadas para la validación de la fórmula, comenzando por la justificación que dio el propio Euler para su relación, y finalizando con algunas demostraciones que dan evidencia de que la relación de Euler para poliedros en realidad se cumple. En el tercer capítulo se presenta cómo la fórmula de Euler da algunas bases para el surgimiento de la Topología, y por último, en el capítulo cinco se plasman algunas aplicaciones de la misma.

5. Metodología

Durante el desarrollo de esta investigación se da respuesta a dos aspectos: uno tiene que ver con una descripción de las etapas que fueron llevadas a cabo para desarrollar el trabajo; otro tiene que ver con una descripción breve de la metodología misma del estudio.

Así mismo esta investigación responde a: ¿qué en la relación de Euler para poliedros contribuye al nacimiento de la topología? y ¿por qué la relación de Euler para poliedros se considera una joya de las matemáticas?, el responder estas preguntas llevó a estudiar la relación de Euler y evidenciar como las ideas y los elementos que hicieron parte de la construcción y elaboración de la relación, aportaron al nacimiento de la Topología, todo esto con ayuda del análisis de textos, particularmente el libro "Eulers Gem's", en el que se centra la mayoría del trabajo realizado.

En los documentos revisados se encontró que la importancia de la relación de Euler para el nacimiento de la topología no se centraba en ser el primer elemento matemático que se podía relacionar con esta rama de estudio, como se pensaba inicialmente, si no que fue aquel que mostró a los matemáticos de la época una manera diferente de observar los elementos matemáticos, en este caso y en particular, los poliedros. Esto llevo a que fuera necesario replantear lo que se buscaba en los documentos y nutrió de argumentos la conexión entre la relación de Euler y el surgimiento de la topología.

Otro aspecto de interés fue consultar sobre aquellos aspectos que validaban aquellos resultados que se iban obteniendo en el proceso de investigación alrededor de la relación de Euler, para esto fue necesario buscar nuevas fuentes bibliográficas, sin embargo para algunas justificaciones y demostraciones fue ineludible construirlas, ya que no se encontraban fuentes confiables de las que se pudiera sustentar dichas argumentaciones, esto llevo a tener que estudiar alrededor de otras ramas matemáticas y otros aspectos que no se vinculaban directamente con la relación de Euler y, aunque se procuró no indagar más allá en estos aspectos para no perder el horizonte del documento, si fue necesario salir del foco del trabajo para poder entender algunos aspectos propios de la relación de Euler.

Por último se compiló toda la información recogida y se eligió la que se consideraba pertinente para dar respuestas a los objetivos del documento; en este punto se encuentra que la relación de Euler no solo aporta al surgimiento de la topología sino que además contribuye al cambio en la manera de observar los objetos matemáticos, lo que lleva a cambiar la concepción que se tenía de elementos que ya habían sido estudiados exhaustivamente, como lo son los poliedros.

6. Conclusiones

Las conclusiones de este trabajo se presentan de acuerdo con los objetivos planteados al iniciar el mismo y de acuerdo al proceso histórico que se llevó a cabo para determinar como esta relación tubo gran impacto en el surgimiento de una nueva área del conocimiento como lo es la Topología.

- Durante el desarrollo de este documento se mostró el proceso que se llevó a cabo para el surgimiento de la relación de Euler y algunas de las implicaciones que tubo a través de la historia.

- Después de que se descubre la Relación para poliedros, se descubre que existe una fórmula elaborada por Descartes años atrás y que es equivalente a la de Euler, con la diferencia de que la planteada por Descartes utilizaba medidas, mientras que la de Euler no lo hacia.

- El trabajo de Leonhard Euler en el problema de los puentes de Könisberg y la relación para poliedros convexos resultan ser los dos primeros trabajos con los cuales se empieza a hablar de topología, ya que esta se desligada totalmente de la geometría clásica de la época.

- Ademas del aporte de Leonhard Euler a la topología, es de resaltar el aporte que hace Legendre al demostrar la fórmula de Euler para poliedros, ya que la forma en que se demuestra esta relación es mediante una transformación de un poliedro a una esfera que posteriormente da paso a hablar de otra área del conocimiento como lo es la topología.

- El estudio de la relación de Euler no solo aporta al surgimiento de la topología, ademas de esto contribuye en una nueva manera de ver los poliedros, es decir, si son o no poliedros Eulerianos.

- La relación de Euler ayuda a replantear las ideas que se tienen de lo que es y no es un poliedro.

- De acuerdo a las diferentes contribuciones de esta relación se puede decir que esta es un joya de la matemática, digna de estudiar, un elemento que por su sencillez y aplicación, muestra que la matemática no es complicada para ser bella e invita a todos los que la logran admirar a que la estudien, se apropien de ella y se enamoren de este trabajo.

- La realización de este trabajo de grado ha contribuido al desarrollo de competencias como la lectura, la escritura, la búsqueda de fuentes, entre otras cosas, que fueron necesarias para el entendimiento y la comunicación de los temas tratados en el trabajo de grado.

- el trabajo propuesto por Euler al rededor de la relación para poliedros convexos, contribuye al surgimiento de la topologia, no solo por sus resultados matemáticos sino por la manera diferente de como se observaban los poliedros, dejando de un lado las medidas y fijándose mas en la forma de los objetos.

- El trabajo realizado por Legendre, deja en evidencia una manera de transformar un poliedro, mostrando con ello el concepto de homeomorfismo que tiempo después da surgimiento al estudio de la topología.

- El trabajo de Luilier, Hessel y Poinsot, no solo aporta al surgimiento de la topología, sino que ademas contribuye al cambio de concepción que se tiene de que es un poliedro.

Elaborado por:	Andres Camilo Bello Rocha, Cristian Andrey Peña Acuña.
Revisado por:	Maria Nubia Soler Alvarez

Fecha de elaboración del Resumen:	22	06	2015.

Índice general

0.0.1. Justificación

Este trabajo surge de una pequeña investigación que se hizo alrededor de la relación de Euler para poliedros convexos, dentro de esta investigación se vio la necesidad de conseguir información de fácil acceso que hablara sobre ¿cómo se involucra este hecho matemático con el surgimiento de la topología?, fueron muchos los documentos que se consultaron pero, en su mayoría, no brindaban respuestas precisas del por qué se considera la relación de Euler, un objeto matemático que proporciona algunas bases para el surgimiento de la topología. Esto hizo que poco a poco se considerará importante crear un documento en el que se pudiera plasmar esta información y dejara en claro al lector, por qué la relación de Euler para poliedros convexos es considerada una joya dentro de las matemáticas.

Lo mencionado anteriormente no es lo único por lo que este documento es un trabajo rico y sobre todo pertinente, es importante rescatar que cualquier documento que sea fuente de información confiable y contribuya al enriquecimiento intelectual del lector, es un documento que vale la pena crear, por este motivo se procuró brindar información concisa, clara y lo más importante, comprensible para estudiantes de carreras de pregrado que se relacionen con las matemáticas; para que cuando se enfrenten a materias como la topología, puedan encontrar en este trabajo una manera diferente de empezar a abordar el tema.

También se considera pertinente la creación de este trabajo de grado por su alto contenido de información histórica, es incuestionable que una buena manera de abordar un tema es aquella en la que se observa su evolución a lo largo de la historia, esto es algo que se presenta en el documento; para cualquier lector que se encuentre interesado en saber cómo surge la topología , pero sobre todo conocer detalles especiales sobre ella, encontrará en este documento un gran compendio de información que aclarara muchas de sus dudas.

Otro aspecto a rescatar es la información que en este documento se presenta, en ella se buscó, en pro de obtener un documento rico en información, presentar de una manera sencilla, clara y entendible para cualquier estudiante de pregrado, todas las demostraciones que se vinculen directamente con la relación de Euler para poliedros, esto se evidencia en el desglose de la información y en los aplicativos que se crearon para que el lector pueda manipularlos, y así se convenza, con ayuda de estos medios tecnológicos, de algunas de las aseveraciones que se hacen a lo largo de todo el documento; además, no hay que pasar por alto que este escrito brinda información que ayuda a entender la relación de Euler para poliedros, algo que lo hace atrayente para el lector.

Solo falta por decir que aunque hay aún mucho por abordar en cuanto a la relación de Euler para poliedros y su conexión con el surgimiento de la topología, este documento brinda al lector una oportunidad de ver las matemáticas desde una perspectiva diferente a la que usualmente se presenta, brinda herramientas para su fácil entendimiento, contribuye a que el lector se enamore de este trabajo y sobre todo es un documento conciso y serio que contribuye al desarrollo intelectual de quien lo lee.

0.0.2. Introducción

En esta investigación, se realiza un recorrido histórico alrededor de la fórmula de Euler para poliedros convexos, indagando acerca de ¿Cómo surge? y de qué manera aporto y sentó algunas bases para el surgimiento de la topología. Este trabajo tiene como finalidad brindar a los estudiantes de pregado y carreras a fines, un escrito claro, conciso y confiable que explique con detalle la relación de Euler para poliedros y la manera en que la fórmula de Euler aporta al surgimiento de la topología. Así pues, como futuros docentes de matemáticas sentimos que es necesario ampliar el conocimiento que ayude a las futuras generaciones a entender y aplicar herramientas que faciliten el aprendizaje en esta ciencia.

Fue necesario realizar una búsqueda exhaustiva en diferentes documentos que nos ayudaran a orientar dentro de un contexto histórico, y a partir del mismo encontrar respuestas a las inquietudes planteadas inicialmente sobre el surgimiento de la formula de Euler y su contribución hacia el área de la topología como una nueva área del conocimiento.

Una vez obtenida esta información se realizo una análisis de todos los documentos que hacían referencia al tema, seleccionándose solo aquellos que aportaban al desarrollo del mismo.

Al realizar esta selección fue evidente la poca información confiable que se conseguía en relación al tema, por lo que fue necesario recurrir a la bibliografía de los pocos documentos que brindaban una información relevante, y de aquí conseguir información que aportaran al desarrollo del trabajo propuesto. Durante este proceso, se encontró un documento el cual era citado por la mayoría de liblros o artículos(Euler's Gem). Este libro se pudo adquirir gracias a la intervención de un profesor de ciudad de México, aun así esta información no fue suficiente por lo que fue necesario indagar exhaustivamente en las bases de datos de las bibliotecas de la universidad Nacional, Sergio Arboleda, Andes, Universidad Pedagógica Nacional y portales bibliotecarios.

Por último se realizó el trabajo escrito dividiéndolo en 4 capítulos los cuales hacen referencia a algunos de los eventos mas relevantes alrededor de la historia y que a su vez dan evidencia de que la fórmula de Euler sienta las primeras bases para el surgimiento de la topología. La estructura de este trabajo de grado obedece a: en el primer capítulo se da evidencia del proceso que se llevó a cabo para el descubrimiento de la relación de Euler. El segundo capítulo contiene la validación de la relación de Euler, comenzando por la justificación que dio el propio Leonhard para su relación, luego de esto se esboza la demostración realizada por Legendre para la relación de Euler, una demostración utilizada por Cauchy y estudiada por Lakatos, esto da paso a que la comunidad matemática afirme esta relación como verdadera. En el tercer capítulo se presenta ¿cómo la fórmula de Euler sienta algunas bases para el surgimiento de la Topología?, y por último, en el cuarto capítulo se plasman algunas aplicaciones de la fórmula de Euler.

Cabe resaltar que este trabajo ha sido presentado en algunos eventos, como por ejemplo El 22 encuentro de Geometría y sus aplicaciones, en la calidad de comunicación breve, al cual asistieron profesores de diferentes partes, dando un muy buen concepto del trabajo realizado, así mismo se presentó en la jornada del educador matemático en la calidad de ponencia e igualmente el trabajo fue bien aceptado por profesores y estudiantes de la licenciatura.

0.0.3. Objetivos

Objetivo General

- Evidenciar como las ideas y los elementos que hicieron parte de la construcción y elaboración de la relación de Euler, aportaron al nacimiento de la Topología.

Objetivos específicos

- Estudiar la relación de Euler, entendiendo por estudiar, el entender y apropiarse de los elementos que constituyen la formulación y demostración de la relación de Euler.
- Identificar diferentes aspectos históricos que contribuyeron al desarrollo de la formula de Euler para poliedros.
- Comprender algunos conceptos matemáticos que puedan aportar a la comprensión de la relación de Euler.
- Realizar un documento en el cual se plasme el desarrollo de la relación de Euler y las bases que esta aporta para el surgimiento de la topología.

0.0.4. Metodología

Durante el desarrollo de este ítem se pretende dar respuesta a dos aspectos: uno tiene que ver con una descripción de las etapas que fueron llevadas a cabo para desarrollar el trabajo; otro tiene que ver con una descripción breve de la metodología misma del estudio.

Todo este trabajo se centró en responder ¿qué en la relación de Euler para poliedros contribuye al nacimiento de la topología? y ¿por qué la relación de Euler para poliedros se considera una joya de las matemáticas?, el responder estas preguntas llevó a estudiar la relación de Euler y evidenciar como las ideas y los elementos que hicieron parte de la construcción y elaboración de la relación de Euler, aportaron al nacimiento de la Topología, todo esto con ayuda del análisis de textos, particularmente el libro .Eulers Gem's", en el que se centra la mayoría del trabajo realizado.

En los documentos revisados se encontró que, la importancia de la relación de Euler para el nacimiento de la topología no se centraba en ser el primer elemento matemático que se podía relacionar con esta rama de estudio, como se pensaba inicialmente, si no que fue aquel que mostró a los matemáticos de la época una manera diferente de observar los elementos matemáticos, en este caso,los poliedros.

Otro aspecto de interés fue consultar sobre aquellos aspectos que validaban los resultados que se iban obteniendo en el proceso de indagación alrededor de la relación de Euler, para esto fue necesario buscar nuevas fuentes bibliográficas, sin embargo para algunas justificaciones y demostraciones fue ineludible construirlas, ya que no se encontraban fuentes confiables de las que se pudiera sustentar dichas argumentaciones, esto llevo a tener que estudiar alrededor de otras ramas matemáticas y otros aspectos que no se vinculaban directamente con la relación de Euler. Aunque se procuró no indagar más allá en estos aspectos para no perder el horizonte del documento, si fue necesario salir del foco del trabajo para poder entender algunos aspectos propios de la relación de Euler.

Por último se compiló toda la información recogida y se eligió la que se consideraba pertinente para dar respuestas a los objetivos del documento; en este punto se encuentra que la relación de Euler no solo aporta al surgimiento de la topología sino que además contribuye al cambio en la manera de observar los objetos matemáticos, lo que lleva a cambiar la concepción que se tenía de elementos que ya habían sido estudiados exhaustivamente, como lo son los poliedros.

0.1. PROCESO QUE SE LLEVÓ A CABO PARA EL PLANTEAMIENTO DE LA FÓRMULA DE EULER

Para el desarrollo de este trabajo, se tomará lo propuesto por Richeson (2008) en su libro Euler´s Gem. The Polyhedron Formula and the birth of Topology, el cual nos brindará algunas bases teóricas para el desarrollo del mismo.

Hubo descubrimientos matemáticos que aportaron al surgimiento de la topología como área del conocimiento. Uno importante, fue el descubrimiento de una fórmula que relaciona el número de vértices, aristas y caras de un poliedro convexo:

$$V + C - A = 2 \tag{1}$$

Un resultado equivalente fue propuesto por Descartes en 1640 y re-descubierto por Euler en 1752. En lo que sigue se muestran algunos procesos históricos que influyeron en el descubrimiento de esta fórmula y, que posteriormente al realizar varios estudios sobre diferentes clases de poliedros, contribuyeron el nacimiento de la topología.

Para llevar a cabo la contextualización sobre los procesos que llevaron a Leonhard Euler [1] a platear la relación para poliedros convexos es necesario situar el momento histórico de este matemático, quien nace a inicios del siglo XVIII, 4300 años después de que se empiece a pensar en geometría y poco más de 1700 años después de que Platón empiece con el estudio de los poliedros regulares (los que se conocen como sólidos platónicos).

0.1.1. Descartes y Euler

Un siglo antes de ser planteada la relación para poliedros convexos, presentada por Euler, Descartes había encontrado una fórmula equivalente, que no tuvo el mismo impacto ya que no se lograba desprender de las medidas de los poliedros, como se describirá más

[1]Para tener una idea de la vida la vida de Leonhard Euler dirijase al Anexo 1

adelante, Leonhard Euler logra asociar una fórmula que en ningún momento usa medidas. En lo que sigue se presenta la fórmula de Descartes y su equivalencia con la relación de Euler para poliedros convexos.

Descartes descubre que la suma de todas las deficiencias angulares de un poliedro convexo siempre es igual a 4π, escrito de otra forma, si Δ_i es la deficiencia del vértice V_i de un polígono convexo, entonces $\sum_{i=1}^{v} \Delta_i = 4\pi$, para poder comprender la relación es necesario tener claro que es una deficiencia angular. A continuación se presenta una explicación.

Si se piensa en un poliedro convexo hecho de papel y se extienden todas las caras que contienen uno de sus vértices, sobre un mismo plano, se observa que las caras aplanadas no alcanzan a rodear el vértice por completo. La medida del ángulo faltante es la que Descartes denominó Deficiencia Angular, para ilustrar de mejor manera dicho concepto, pensemos en un poliedro cualquiera, en este caso tomaremos un cubo Figura (1).

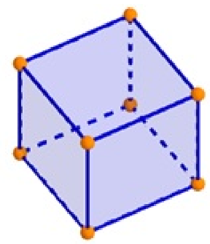


Figura 1: Cubo

Suponga que este cubo fue hecho en papel, por lo que se podría desplegar de tal manera que, para cada uno de los vértices, las caras que este tenga en común, se puedan extender sobre un mismo plano como se observa en la figura (2).

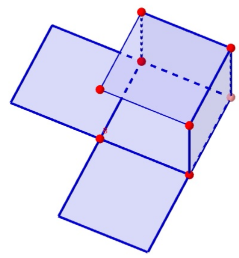


Figura 2: Cubo de papel

Se puede observar que alrededor del vértice B Figura 3 todas las caras que comparten el vértice están en el mismo plano, como si se hubiera desprendido parte del cubo, ahora se llama deficiencia angular del vértice B a la medida del ángulo con ”Marca Roja”.

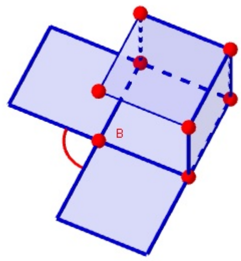


Figura 3: Deficiencia angular

De acuerdo con la Figura 4 se puede evidenciar que para el ángulo B su Deficiencia Angular es la que tiene marca roja, este ángulo tiene como medida 90° ó $\pi/2$; por otro lado se observa que la suma total de los ángulos que tienen como vértice B es igual a 360° lo que es igual a 2π. Si para cada ángulo del poliedro se realiza el mismo proceso se obtiene que la medida de todas las deficiencias angulares es la misma.

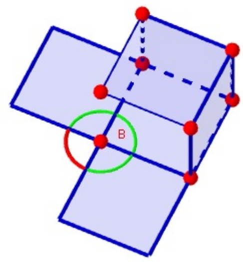


Figura 4: Deficiencia angular

Así pues, la suma de todas las deficiencias angulares es $4\pi(\frac{8\pi}{2})$ debido a que cada ángulo aporta $\frac{\pi}{2}$ y son 8 vértices, además se observa que la suma de todas las deficiencias angulares de cualquier poliedro convexo siempre es igual 4π, a esta característica se le llamó “Fórmula para las Deficiencias Angulares[2]”.

De acuerdo con lo anterior y teniendo claro lo que propone Descartes, a continuación se mostrara la equivalencia entre, lo propuesto por Descartes y lo propuesto por Euler.

0.1.2. De la fórmula de Descartes a la Relación de Euler

Inicialmente se asume que la fórmula de Descartes es cierta y se buscará concluir que la relación de Euler para poliedros es equivalente. Se parte de que las deficiencias angulares para cada ángulo de un poliedro siempre tendrán un valor mayor a 0 y menor a 2π, esto lo asegura el teorema **Suma de las medidas de los ángulos internos de las caras**

[2]Para visualizar este resultado pero con otro tipo de poliedros, diríjase al siguiente link. https://tube.geogebra.org/m/1498139

de un poliedro.

Si se piensa en un poliedro convexo cualquiera, que tiene una cantidad A de aristas, C de caras y V de vértices, además que para cada vértice se puede hallar una deficiencia angular asociada acotada entre 0 y 2π, de aquí se puede asumir que $\Delta_i = 2\pi - S_i$ sabiendo que Δ_i es la deficiencia angular y S_i la suma de los ángulos recurrentes al vértice V_i, ahora si se quisiera obtener la suma total de la medida los ángulos del polígono tendríamos que:

$$S = \sum_{i=1}^{v} 2\Pi - \Delta_i \tag{2}$$

De 2 se obtiene:

$$S = 2\Pi V - \sum_{i=1}^{v} \Delta_i$$

.

Pero como $\sum_{i=1}^{v} \Delta_i = 4\pi$. **Fórmula para las deficiencias angulares.** se concluye que:

$$S = 2\Pi V - 4\Pi$$

.

Si se calcula de otra forma S, y se parte de que A_i es la cantidad de aristas que tiene la cara de un polígono, por ejemplo $A_3 = 3, A_4 = 4, A_5 = 5, ..., A_n = n$. La suma de los ángulos de dicha cara es $A_i\pi - 2\pi$ esto se debe esencialmente a que, si tenemos A_i aristas sobre una cara, esta se puede dividir en A_i triángulos, uno por cada arista del polígono, pero al hacer esto es necesario restar 2π a la suma de los ángulos de aquellos que se forman al dividir la cara. Un ejemplo de esto se observa en la figura 5 en donde se encuentra un octágono con sus ángulos resaltados en verde, al hacer la división de este polígono en triángulos, es fácil determinar que la suma de todos los ángulos de los triángulos es 2π, más la suma de los ángulos del octágono.

Si se nota a C_i como el número de caras que tienen A_i aristas se sabe que $C = C_3 + C_4 + ... + C_k$ (debido a que no puede haber una cara con menos de 3 lados) teniendo

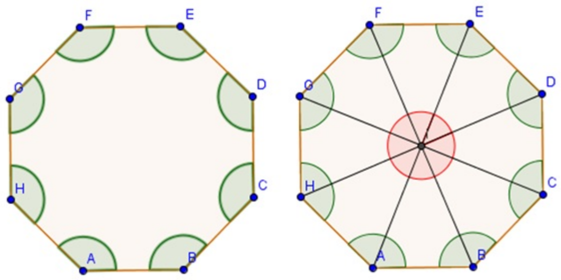


Figura 5: Octágono

a k como la cantidad máxima de aristas que tiene una cara en el polígono; es preciso decir que al sumar los ángulos de las caras con $3, 4, 5, ..., k$ aristas se obtiene S, si se escribe esta suma en términos de C_i teniendo en cuenta que para cada cara la suma de sus ángulos es $A_i\pi - 2\pi$ se obtiene:

$$S = \sum_{i=3}^{k}((i-2)(C_i\Pi)) \tag{3}$$

A partir de (3) se obtiene:

$$S = (\sum_{i=3}^{k} iC_i - \sum_{i=3}^{k} 2C_i)\Pi \tag{4}$$

Y de (4) es fácil observar que:

$$S = (2A - 2C)\Pi$$

.

Es importante aclarar que $\sum_{i=3}^{k} iC_i = 2A$ debido a que cada arista se encuentra dos veces en esta sumatoria.

Igualando las dos formulas para S se obtiene (5)

$$2\Pi V - \Delta = (2A - 2C)\Pi \tag{5}$$

si despejamos Δ de (5) se tiene:

$$\Delta = 2\Pi V - (2A - 2C)\Pi$$

$$\Delta = 2\Pi(C - A + V) \tag{6}$$

Pero Descartes demostró que $\Delta = 4\pi$ y el reemplazar en (6) se obtiene:

$$4\Pi = 2\Pi(C - A + V)$$

$$2 = C - A + V$$

0.1.3. De la relación de Euler a la fórmula de Descartes

Ahora tomemos como verdadera la fórmula de Euler para poliedros y probemos que es equivalente con la formula para las deficiencias angulares propuesta por Descartes.

Dado un poliedro P convexo, se sabe con seguridad que para un número de caras (C), número de vértices (V) y número de aristas (A) se cumple que $V + C - A = 2$, por otro lado se sabe que la deficiencia angular Δ_i de un vértice V_i en el polígono P es igual a $2\pi - V_1$, (siendo V_1 la suma de los ángulos concurrentes al vértice) esto debido al "teorema de la suma de los ángulos internos de las caras de un poliedro", partiendo de esta idea, y, sumando las deficiencias angulares de todos los vértices del polígono P se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^{V} \Delta_i = 2\Pi V - \text{suma de los ángulos de las caras del poliedro.} \tag{7}$$

Para calcular la suma de todos los ángulos se dividen las caras del poliedro P de acuerdo a la cantidad de lados; así C_3 determinará la cantidad de caras en el poliedro P que tiene 3 lados, esto representa todas las caras triangulares del poliedro. C_4 es la cantidad de caras en el poliedro P con 4 lados, de manera general C_k es la cantidad de caras en el poliedro P con k lados; del mismo modo se tendría como característica que $C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7 + ... + C_k + ... + C_n = C$ siendo n el número máximo de lados que tiene P en alguna de sus caras.

Si se piensa en una cara determinada por 3 lados se sabe con seguridad que la suma de las medidas de sus ángulos internos es igual a π, para los polígonos determinados por 4 lados se sabe que su suma es 2π, de manera general se asegura que para cualquier polígono con k lados la suma de las medidas de sus ángulos internos es igual a $(k - 2)\pi$, es fácil de corroborar si se triangula el polígono, así si se desea saber la suma de todos los ángulos de las caras del poliedro P, que se denotara como $\sum_{i=1}^{j} m_i$, de esta manera:

$$\sum_{i=1}^{j} m_i = ((3-2)C_3 + (4-2)C_4 + (5-2)C_5 + ... + (n-2)C_n)\pi \tag{8}$$

De (7) y (8) se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{V} \Delta_i = 2\Pi V((3-2)C_3 + (4-2)C_4 + (5-2)C_5 + ... + (n-2)C_n)\pi$$

Por otro lado si se escribe en términos de $C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7 + ... + C_k + ... + C_n$ las aristas, se sabe que:

$$3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + 6C_6 + 7C_7 + ... + kC_k + ... + nC_n = 2A$$

Esto se debe a que C_n determina la cantidad de caras con n lados en el polígono P; para saber la cantidad de aristas que contienen las caras con k lados basta multiplicar C_k por k, pero como cada arista esta exactamente 2 veces en el polígono P el resultado de la suma de los kC_k es igual a $2A$.

Reescribiendo se tiene que:

$$(1)C_3 + (2)C_3 + (2)C_4 + (2)C_4 + (2)C_5 + (3)C_5 + ... + (2)C_n + (n-2)C_n = 2A$$

$$(1)C_3 + (2)C_4 + (3)C_5 + ... + (n-2)C_n = 2A - 2(C_3 + C_4 + C_5 + ... + C_n)$$

Pero esto no es mas que:

$$(1)C_3 + (2)C_4 + (3)C_5 + ... + (n-2)C_n = 2A - 2C$$

Al utilizar este resultado en los obtenidos anteriormente se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^{V} \Delta_i = 2\Pi V - (2A - 2C)\Pi$$

$$\sum_{i=1}^{V} \Delta_i = 2\Pi V + 2\Pi C - 2\Pi A$$

Pero como se sabe que $V + C - A = 2$, también se tiene que $2\pi V + 2\pi C - 2\pi A = 4\pi$, por lo que se asegura que:

$$\sum_{i=1}^{V} \Delta_i = 4\Pi$$

Con esto se demuestra la fórmula para las deficiencias angulares de Descartes y se puede asegurar la equivalencia entre las dos fórmulas.

Si nos damos cuenta, en este capítulo se tuvo en consideración tanto la formula para las deficiencias angulares de Descartes como la relación de Euler para poliedros convexos, evidenciando en estas un transición en la forma de ver los objetos, en donde Euler se desliga de las medidas y es así como aporta al surgimiento de la topología.

0.1.4. Euler y Goldbach

Aunque como se mostró anteriormente, Euler propone una relación que se deriva de una fórmula descubierta por Descartes años atrás, la relación de Euler toma importancia en su manera de ser concebida debido a las ideas que llevaron a su descubrimiento, para mostrarlas es necesario hablar sobre el proceso de creación de la relación; uno de los primeros registros que se tiene como lo menciona (Napoles,2002,p6) y que se puede relacionar con el nacimiento de la fórmula, se remonta a 1750 en una carta a su colega Christian Goldbach, en la que Euler escribió:

> *...Recientemente se me ha ocurrido determinar propiedades generales de los sólidos limitados por superficies planas, porque no hay duda de que se podrían encontrar teoremas generales sobre ellos. Asi como para figuras planas rectilíneas hay propiedades como las siguientes:*
>
>> *En cada plano de la figura el número de lados es igual al número de ángulos.*
>>
>> *La suma de todos los ángulos interiores es igual a dos rectos por el número de lados menos cuatro rectos.*[3]

Si nos detenemos y analizamos la frase que dice En cda plano de la figura el numero de lados es igual al numero de ángulos, es aquí donde se hace evidente que la forma de pensar de Leonhard Euler y la manera en como se observaban los objetos, esta totalmente desligada de las medidas y se enfoca mas hacia la forma, dando así los primeros pasos hacia lo que se llamaría topología.

Euler debió observar diferentes tipos de figuras planas y a partir de estas generalizar sus resultados, sin embargo, esto es netamente especulativo pues no hay evidencia que muestre como realmente fue el trabajo que se realizó para llegar a estas conjeturas.

Llegado a este punto Euler sigue trabajando alrededor de esta nueva manera de observar las figuras y poco tiempo después dice: *Así como para figuras planas es necesario considerar lados y ángulos. Para los sólidos es necesario tener en cuenta varios elementos* Napoles (2002). como caras del poliedro, ángulos sólidos, ángulos planos, vértices, lados de cada una de las caras y las aristas del poliedro, de donde se obtiene:

- - *En cada cara, el número de lados es igual al número de ángulos planos. Dos caras se encuentran en un lado, entonces la cantidad de lados total de todas las caras es el doble de la cantidad de aristas del poliedro. Por lo tanto, la cantidad total de lados de todas las caras es siempre un número par. Cada cara tiene por lo menos tres lados, entonces la cantidad total de lados de todas las caras es mayor o igual que tres veces el número de caras*[3]

Para evidenciar lo que planteaba Euler en esta carta, tomaremos un poliedro cualquiera, en este caso se utilizará el Cuboctaedro (Figura 6).

[3]Citado por Cronwell, Peter,*Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, pp. 190, extraido de Biggs, N. L. E. K. Lloyd y R. J. Wilson, *Graph Theory 1736-1936*, Clarendon Press, Oxford, 1976.

Se observa que para sus 8 caras triangulares y 6 caras cuadradas, siempre los vértices de un polígono tienen justamente la misma cantidad de lados que lo determinan.
Para hablar de la cantidad de lados determinados por las 14 caras de este poliedro, se deberá pensar en este como una figura echa de papel, y extenderla sobre una superficie plana como se muestra en la figura 7.

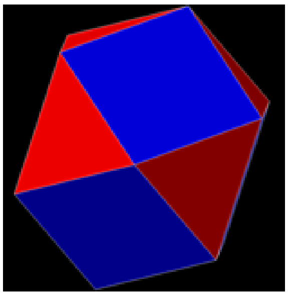


Figura 6: Cuboctaedro

Es fácil concluir que la suma total de los lados de cada una de las caras es 48 (24 lados para las caras cuadradas y 24 lados para las caras triangulares), sin embargo si nos fijamos en el poliedro sin desarmar Grafico 6 es claro que las aristas del poliedro son 24, justamente la mitad con respecto a la suma total de lados de cada una de las caras, esto debido a que a cada arista, exactamente 2 polígonos concurren en ella, de aquí que la cantidad de lados sea igual a, exactamente, 2 veces la cantidad de aristas; este resultado es el que menciona Euler cuando dice “la cantidad de lados total de todas las caras es el doble de la cantidad de aristas del poliedro”.

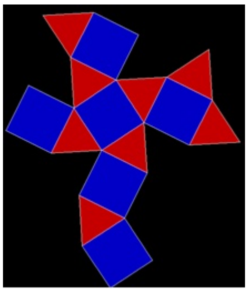


Figura 7: Sobre un plano

Otra propiedad que menciona Euler, es que cualquier polígono está determinado por al menos 3 lados, con esta información se concluye que la cantidad total de lados o caras es mayor o igual a 3 veces el número de las caras sea cual sea el poliedro.

Después de que Euler recopila dicha información, se da cuenta que no es fácil encontrar propiedades que rigen la construcción de los poliedros, para lo cual dice:

> *...aunque ya había encontrado muchas propiedades comunes a los poliedros que son análogas a las propiedades que comparten todos los polígonos, no sin gran sorpresa descubrí que las más importantes de esas propiedades eran tan recónditas que todo el tiempo y esfuerzo que invertí buscando una prueba de ellas había sido, hasta ahora, en vano...Leonard Euler(1752)*[4]

Lo que descubrió Euler es que en un poliedro convexo el número de vértices, más el número de caras excede en dos al número de aristas:

$$V + C - A = 2.$$

Aunque las fórmulas de Descartes y Euler están muy ligadas, tienen una gran diferencia, la relación de Euler no hace ninguna referencia a medidas (Ángulos, longitudes, volúmenes, etc...) Al parecer Euler no estaba al tanto de la fórmula de Descartes, pero la re-descubrió y se dio cuenta de que una fórmula llevaba a la otra.

0.2. VALIDACIÓN DE LA FÓRMULA DE EULER

Luego de que Euler propone la fórmula para poliedros convexos en el documento “Elemenal Doctrine Solidorum”, se presenta el reto de demostrar que lo que se había propuesto realmente era cierto, Euler propone una justificación de su resultado, la cual se expondrá brevemente.

La idea central de la justificación presentada por Euler se basa en que, a cualquier poliedro convexo diferente al tetraedro, se le puede retirar un único vértice de manera algebraica y geométrica, haciendo un corte conveniente; aunque Euler no señala cuál es su corte conveniente se puede pensar en que, si por ejemplo, se desea retirar un vértice, se realiza un corte determinado por un plano que contenga 3 vértices del poliedro diferentes del que se desea retirar y que además estén contenidos en segmentos que concurran a este.

Para entender mejor este proceso, a continuación se presenta un ejemplo mostrando la transformación del cubo al tetraedro, entendiendo como transformación, una secuencia de cortes conveninetes a cada uno de los poligonos resultantes partiendo de un poligono convexo.

Para cualquier poliedro, se puede decir con seguridad que se tiene cierta cantidad finita de vértices, en particular, para el cubo (Figura 8) se observa que tiene 8 vértices.

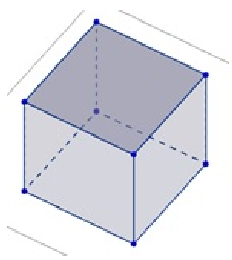


Figura 8: Cubo.

En primer lugar se elige un vértice y, como se explicó anteriormente, se eligen 3 aristas que concurran a este; se puede determinar un plano que divide en dos partes al poliedro con los vértices del extremo de estos segmentos, como se muestra en la figura 9.

El poliedro rojo (Figura 9) es el resultado del corte descrito anteriormente, si se llama (V) a la cantidad de vértices, (C) a la cantidad de caras y (A) a la cantidad de aristas del poliedro inicial, se puede concluir que, al realizar el corte de la figura 9 se obtiene un nuevo poliedro, que tiene como característica un vértice menos con respecto al polígono anterior, además la cantidad de caras del nuevo polígono aumenta en uno y las aristas permanecen iguales con respecto al polígono anterior. Escrito algebraica-mente se sabe que $V_1 = V - 1$, $C_1 = C + 1$ y $A_1 = A$ siendo V_1, C_1 y A_1 la cantidad de vértices, caras y aristas del polígono que resulta del corte 1 (P_1).

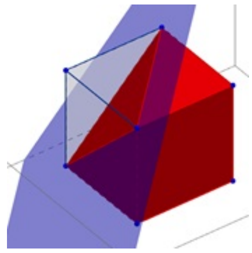


Figura 9: Corte 1

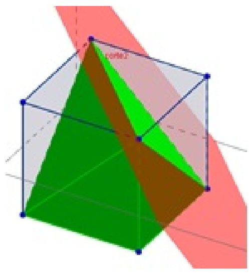
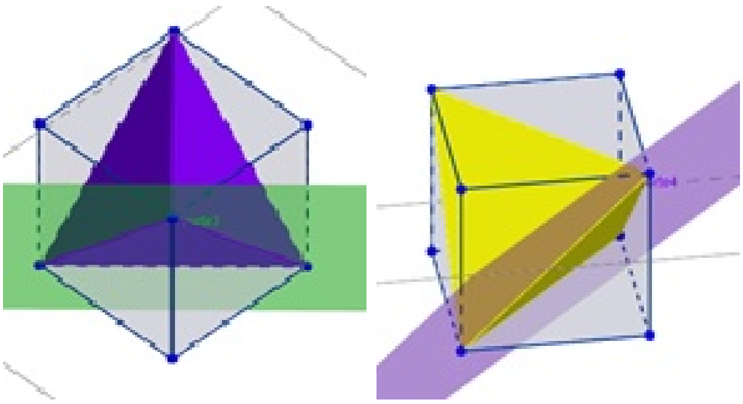


Figura 10: Corte 2.

Transformando el polígono resultante del corte 1, visto de color rojo en la figura 9, al realizar un nuevo corte, se obtiene un nuevo poliedro P_2, como se ve en la figura 10. Esta nueva figura tiene un vértice menos con respecto a (P_1), pero 2 con respecto a P (polígono inicial), además $C_2 = C_1$ y $A_2 = A_1 - 1$ (con A_2, C_2 y V_2 las aristas, caras y vértices de P_2, lo que escrito en términos de V, C y A, es igual a $V_2 = V - 2, C_2 = C + 1$ y $A_2 = A - 1$.

De igual forma,al realizar el corte 3, (figura 11a) se puede concluir que $V_3 = V - 3$, $C_3 = C$ y $A_3 = A - 3$. Para terminar se realizara un ultimo corte que da origen a una pirámide con base triangular como se observa en la figura 11b, de donde se obtiene $V_4 = V - 4$, $C_4 = C - 2$ y $A_4 = A - 6$.



(a) Corte 3 (b) Corte 4

Figura 11

De manera general para cada uno de los cortes se obtiene el cuadro 1:[4]

Cortes	Vértices	Caras	Aristas
Corte 1	$V_1 = V - 1$	$C_1 = C + 1$	$A_1 = A$
Corte 2	$V_2 = V - 2$	$C_2 = C + 1$	$A_2 = A - 1$
Corte 3	$V_3 = V - 3$	$C_3 = C$	$A_3 = A - 3$
Corte 4	$V_4 = V - 4$	$C_4 = C + 2$	$A_4 = A - 6$

Cuadro 1

Al realizar el corte 4, el poliedro resultante es un tetraedro, para el cual se sabe que su cantidad de caras es 4, de vértices 4 y de aristas 6, tomando los resultados obtenidos en la parte algebraica del Cuadro 1 se sabe qué:

$$C_4 = 4 = C - 2, V_4 = 4 = V - 4, A_4 = 6 = A - 6$$

Despejando el valor de C, V y A en cada una de las ecuaciones tenemos que:

$$C = 6, V = 8, A = 12$$

[4]Para visualizar de una mejor manera estos resultados, diríjase al siguiente link. https://tube.geogebra.org/material/show/id/1499103

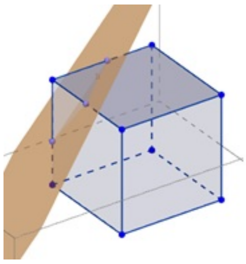


Figura 12

Obteniendo con esto la cantidad de caras, vértices y aristas del poliedro inicial; Euler creía que este proceso siempre se cumplía para cualquier poliedro convexo, sin embargo, aunque es ingenioso el método, fue criticado por los matemáticos de la época; donde lo primero que se señala es el hecho de no saber con precisión que corte era el que consideraba Euler conveniente, puesto que no todos los cortes hechos a un poliedro forzarían, al poliedro resultante, a tener un y solo un vértice menos, ejemplo de esto se muestra en la figura 12, es evidente que el polígono obtenido a raíz del corte tiene más vértices en comparación al poliedro inicial; es por esto que si se quiere llegar a la pirámide con base triangular, no sería posible, puesto que en vez de disminuir la cantidad de vértices, este tendería a incrementar. Otra critica que llevó a que la justificación realizada por Euler no fuera aceptada, fue el hecho de que en algunos polígonos retirar un vértice en particular no es posible, para evidenciar este hecho de manera más clara, se presentan a continuación algunos ejemplos[5].

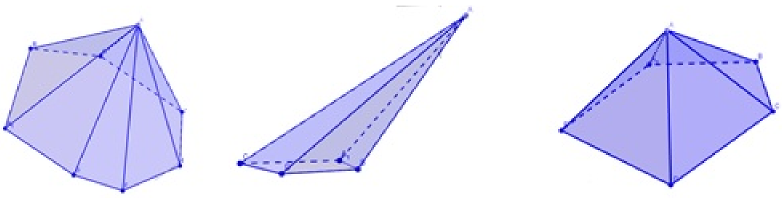


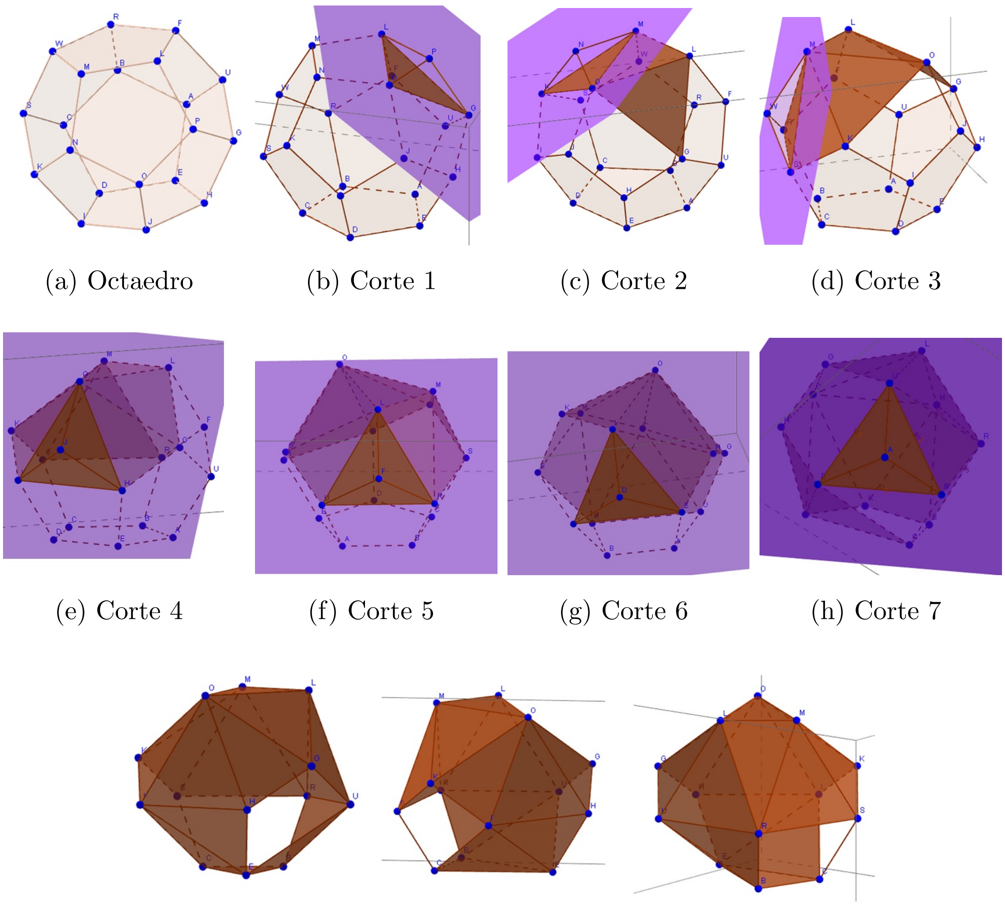
Figura 13

Si se desea retirar el vértice que no pertenece a la base de las pirámides de la figura 13 no sería posible debido a que para cualquier corte conveniente tendría que ser el mismo plano que contiene a la base de la pirámide.

En algunas ocasiones, luego de haber realizado varios cortes, sobre una poliedro, es posible encontrar un poliedro al cual no se le puede retirar algún vértice sin que los vértices del polígono resultante aumenten, para ilustrar este problema se muestra a continuación

[5]Si desea ver que ocurre al realizar los cortes convenientes propuestos por Euler diríjase a: https://tube.geogebra.org/m/1497413

una secuencia de cortes realizados a un dodecaedro[6].



(a) Octaedro (b) Corte 1 (c) Corte 2 (d) Corte 3

(e) Corte 4 (f) Corte 5 (g) Corte 6 (h) Corte 7

(i) (j) (k)

Figura 14

Obsérvese que para realizar el corte 8 a alguna de las Figuras 14i,14j,14k y tratar de retirar uno de los vértices que hacen falta del poliedro inicial no es posible, ya que aumenta la cantidad de vértices del poliedro resultante[7].

Este tipo de inexactitudes fueron las que llevaron a determinar a los matemáticos de la época, que, la justificación propuesta por Euler no era una demostración del todo cierta para la relación que había propuesto, sin embargo, para Leonhard este argumento bastaba para convencerse que lo planteado en la relación era cierto, y fue por esto que hasta este

[6]Para manipular el aplicativo en el que se muestran los cortes sobre el dodecaedro diríjase a: https://tube.geogebra.org/m/1497205

[7]Ver vídeo en Anexos

punto se trabajó en ello.

0.2.1. Demostración de Legendre

Después de que Leonhard Euler presentará su justificación de la relación que había propuesto, debieron pasar alrededor de 40 años, para que el matemático francés Adrien Marie Legendre, propusiera en 1794 la primera demostración de la relación de Euler que posteriormente sería aceptada por la comunidad matemática; esta demostración se basa en una manera de encontrar una función biyectiva de cualquier poliedro convexo a la esfera y, a partir de esta, trabajar con geometría esférica para corroborar el resultado $V+C-A=2$.

Esta prueba tuvo gran impacto para la matemática debido a que fue la primera demostración formal de la relación y, además, por que brinda históricamente la primera noción de transformación topológica, de lo que se habla con más detalle en el capítulo 3; es por eso que se presenta a continuación una breve explicación de la demostración, basándose en lo que se presume propuso Legendre en 1794.

La prueba que se presenta a continuación se realiza con el propósito de complementar la que propone Legendre y de profundizar en el conocimiento de los poliedros.

Inicialmente Legendre probó que es posible encontrar una función biyectiva de un poliedro convexo a una esfera; a continuación se presenta este resultado partiendo de una circunferencia y un polígono.

Como se puede ver, en la figura 15 se tiene un polígono, inscrito en una circunferencia de radio 1, en este caso un cuadrado, ademas de esto un punto F que pertenece a uno de los lados del polígono inscrito.

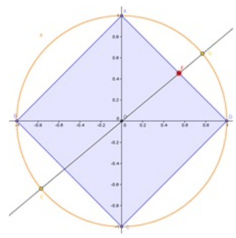


Figura 15

Las coordenadas x, y de este punto F cumplen que:

$$\begin{array}{lll} \text{Si } x,y>0 & \text{entonces} & x+y=1 \\ \text{Si } x>0,y>0 & \text{entonces} & x+|y|=1 \\ \text{Si } x,y<0 & \text{entonces} & x+y=-1 \\ \text{Si } x<0,y>0 & \text{entonces} & x+|y|=1 \end{array}$$

Con el punto F y O (centro de la circunferencia para este caso el punto (0,0)) se determina una recta, está interseca a la circunferencia en dos puntos G,E, se asume como la imagen de F aquel punto que se encuentre en su mismo cuadrante, esto contribuye en que para todo punto sobre alguno de los lados de un polígono (en este caso en particular el rectángulo) se puede encontrar un punto al que llamaremos su imagen en la circunferencia, además gráficamente es fácil observar que la función es biyectiva.

Es importante tener claro que este proceso no solo se puede hacer para un polígono regular y además no necesariamente debe estar inscrito en la circunferencia, como por ejemplo para el caso que se muestra en la figura 16 también es posible determinar la correspondencia de puntos, sin embargo no todos los polígonos cumplen esta característica, por ejemplo pensemos en un polígono no convexo que cumpla tener un "hueco"dentro de él, aunque para este poliedro podemos asignar a todos los puntos de los lados del polígono uno en la circunferencia, esta función resulta no ser biyectiva.

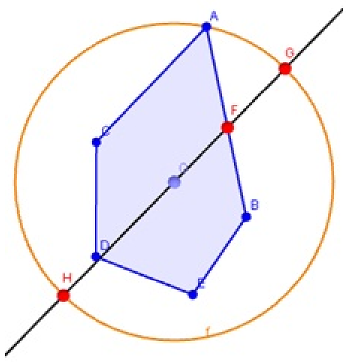


Figura 16

Nótese que para la figura 17, se asigna a los puntos K y H el mismo valor J, lo que impedirá que la función sea biyectiva, algo necesario para poder hablar de la transformación del polígono a la circunferencia.

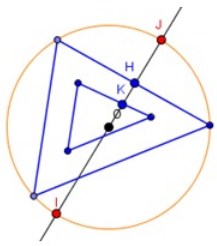


Figura 17

Sin embargo solo se considerarán polígonos convexos, ya que en el momento de extender la idea de función de un poliedro a una esfera , la caras de estos deberán ser convexas.

Volviendo a la construcción de la función que servirá de puente para la demostración de Legendre, y observando los resultados obtenidos en la figura (15) se sabe que:

Se tiene $F = (x_0, y_0)$ tal que (x_0, y_0) cumplen las características mencionadas anteriormente (ya que pertenecen al dominio), además los puntos F, O con $O = (h, k)$ determinan una recta que se notara con la letra l, para esta recta se tiene que la ecuación determina los puntos que pertenecen a la misma y cumplen que $\left(\frac{(y_0 - k)}{(x_0 - h)}\right)(x) = y$, para el caso particular de este ejemplo de tomará a $(O = (0, 0)$ obteniendo así que los puntos que pertenecen a l cumplen que $\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(x) = y$; por otro lado si se toma en consideración el condominio o conjunto de llegada, y se sabe con seguridad que los puntos (x, y) que pertenecen a este conjunto cumplen que $x^2+y^2 = 1$, con estos datos se buscan las intersecciones de la recta con la circunferencia, reemplazando en la ecuación de la circunferencia el valor de y en la recta l se obtiene:

$$x^2 \left(\frac{x_0}{y_0}(x)\right)^2 = 1. \tag{9}$$

$$x^2 \left(1 + \frac{y_0^2}{x_0^2}\right) = 1. \tag{10}$$

De 9 y 10 tenemos que:

$$x^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{y_0^2}{x_0^2}\right)}. \tag{11}$$

De 11 se tiene:

$$x^2 = \frac{x_0^2}{x_0^2 + y_0^2}. \tag{12}$$

Al despejar x de 12 se obtiene:

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}. \tag{13}$$

De otro modo, si se desea despejar x de la ecuación de la recta l y se reemplaza en la ecuación de la circunferencia se tiene:

$$\left(\frac{x * y_0}{y_0}\right)^2 + y^2 = 1 \tag{14}$$

Despejando y de 14 tenemos que:

$$y = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Obteniendo que $G = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}), \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\right)$, pero por la raíz se sabe que, para un mismo G se tienen dos posibles soluciones, lo que ya se había previsto cuando se analizó la figura 15, para esto considerando lo que se propuso, el punto de intersección que se encuentre en el mismo cuadrante al punto de coordenadas (x_0, y_0) se obtiene:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Si } x_0, y_0 > 0 & \text{entonces} & \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} > 0 \\
\text{Si } x_0 > 0, y_0 > 0 & \text{entonces} & \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} > 0, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} > 0 \\
\text{Si } x_0, y_0 < 0 & \text{entonces} & \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} < 0 \\
\text{Si } x_0 < 0, y_0 > 0 & \text{entonces} & \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} < 0, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} < 0
\end{array}$$

Hay que recalcar que en esta asignación se deja de lado las condiciones del dominio, por lo que se aparta la idea de que la construcción esta solo dispuesta para un cuadrado. Esto se cumplirá para cualquier polígono convexo que se utilice, ya que si se acomoda de manera tal que uno de los puntos internos del polígono (queriendo decir con esto que el punto pertenezca al polígono pero no esté contenido en ninguna de sus aristas) sea el centro de la circunferencia (con coordenadas (0,0)), no es posible encontrar dos puntos que pertenezcan a los lados del polígono, de tal manera que pertenezcan al mismo cuadrante del plano.

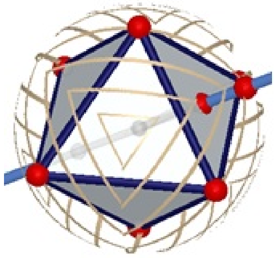


Figura 18: Esfera poliedro

En la figura 18 existe un poliedro convexo (octaedro) en el interior de una esfera la cual esta determinada con algunas rallas que pertenecen a la superficie de esta, para este Octaedro se toma un punto sobre alguna de sus caras y se determina la recta que contiene al punto y al centro de la esfera, este centro debe estar contenido en el poliedro pero no en alguna de sus caras, al realizar el procedimiento análogo al que se hizo con el polígono y la circunferencia se obtiene que dado (x_0, y_0, z_0) un punto sobre alguna de las caras del poliedro le corresponde un punto A sobre la esfera tal que $A = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \right)$, cumpliendo que:

$x_0, y_0, z_0 = 0$	*Entonces*	$\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$, $\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$
$x_0, y_0 > 0$ y $z_0 < 0$	*Entonces*	$\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} > 0$, $\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} < 0$
$x_0 > 0, y_0 < 0, z_0 > 0$	*Entonces*	$\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} > 0$, $\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} < 0$, $\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} > 0$
$x_0 > 0, y_0 < 0, z_0 < 0$	*Entonces*	$\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} > 0$, $\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} < 0$, $\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} < 0$
$x_0, y_0 < 0$ y $z_0 > 0$	*Entonces*	$\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} < 0$, $\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} > 0$
$x_0, y_0 < 0$ y $z_0 < 0$	*Entonces*	$\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} < 0$, $\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} < 0$
$x_0 < 0, y_0 > 0$ y $z_0 < 0$	*Entonces*	$\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} < 0$, $\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} > 0$, $\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} < 0$

Cuadro 2: Función a trozos

Luego de que se obtiene la función para asignar a cada punto sobre la superficie de un poliedro un punto sobre la esfera, basta con demostrar que esta función es biyectiva para poder asegurar que al cumplirse la relación de Euler sobre la esfera, esta se cumplirá para cualquier poliedro convexo, esto se debe a que, por medio de la función se asigna a cada una de las caras del poliedro, una región sobre la esfera , a cada arista exactamente una arista esférica y a cada vértice exactamente un punto que cumple ser la intersección de las aristas esféricas; para visualizar este resultado obsérvese el siguiente ejemplo.

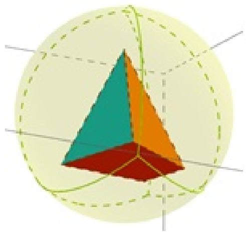


Figura 19

Tomemos como ejemplo una pirámide con base cuadrada, en la gráfica 19 se muestran algunos de los puntos que corresponden a las imágenes de las aristas de la pirámide, estos se encuentran de color verde, Ademas estos puntos se encuentran sobre la superficie de la esfera, de otro modo obsérvese que estas líneas verdes se intersecan en los puntos que son imágenes de los vértices de nuestro poliedro, además que para cada arista del poliedro hay exactamente una arista esférica que le corresponde y además estas dividen la esfera en tantas caras como tiene el poliedro[8].

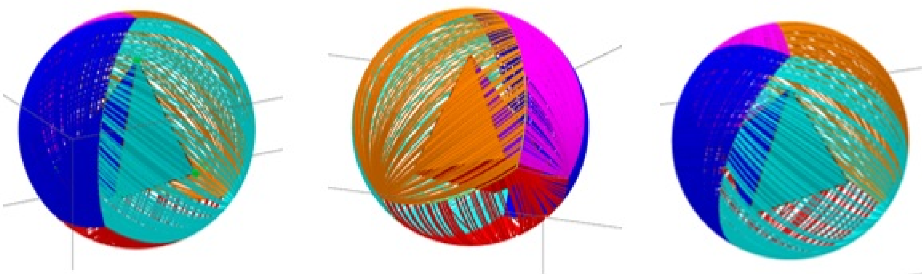


Figura 20

Si se observan la gráficas presentadas en la figura 20, se muestra la imagen para cada uno de los puntos sobre las caras del poliedro visto desde tres perspectivas, estas nunca se cruzan y cubren toda la superficie de la esfera. Para corroborar lo dicho anteriormente es necesario asegurar que la función propuesta siempre es una función biyectiva; seguido de esto, se presenta un breve bosquejo de la justificación para este echo.

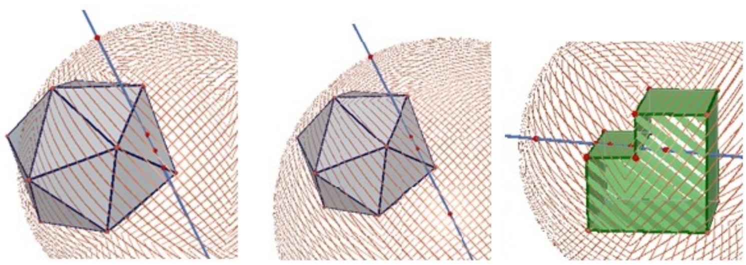
[8]Si se desea manipular el aplicativo con el cual se tomaron las imágenes, dirigirse a https://tube.geogebra.org/m/1497273

Inyectiva

Se llama f a la función de un poliedro P a una esfera E. Se sabe que si $f : D \to C$ es inyectiva, siendo D el conjunto de puntos que pertenecen a las caras del poliedro P y C el conjunto de puntos que forman la esfera E, entonces se cumple que $\forall(a, b) \in D$ si $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$, asumamos que este resultado no es cierto por lo que $\exists(a, b)$ que pertenecen a algunas de las caras del poliedro tal que $a \neq b$ y $f(a) = f(b)$, como la manera en la que se asignó los puntos de las superficies del poliedro P depende del cuadrante en el que se encuentre cada punto se puede asumir que será necesario considerar 8 casos correspondiente a los 8 cuadrantes en los que puede encontrarse el punto.

Caso 1

Como $A \neq B$ se puede determinar la ecuación de la recta que contiene estos dos puntos,la cual notaremos como $\overleftrightarrow{AB}$, además se tiene las rectas que determinan los puntos $A, B, f(A), f(B)$ con el punto $O = (0, 0, 0)$ a las que se les llama como $\overleftrightarrow{AO}$, $\overleftrightarrow{BO}$, $\overleftrightarrow{f(A)O}$ y $\overleftrightarrow{f(B)O}$ respectivamente, ahora, considerando que $f(A) = f(B)$ se puede concluir que $\overleftrightarrow{f(A)O} = \overleftrightarrow{f(B)O}$, además por la manera de construir f, es sencillo determinar que $\overleftrightarrow{AO} = \overleftrightarrow{f(A)O}$ y $\overleftrightarrow{BO} = \overleftrightarrow{f(B)O}$, por transitividad se puede concluir que $\overleftrightarrow{AO} = \overleftrightarrow{BO}$, además por el teorema de la unicidad de la recta en geometría del espacio se sabe que $\overleftrightarrow{AO} = \overleftrightarrow{BO} = \overleftrightarrow{AB}$, de donde se concluye que $O\exists\overleftrightarrow{AB}$, si esto se cumple existen 3 posibles resultados, el caso que O esté contenido en alguna de las caras del poliedro ó que O no esté contenido en el poliedro, casos en los que se niega la condición dada en la construcción de f, ya que se menciona que el punto debe estar contenido en el poliedro pero no en alguna de sus caras y además se tiene la opción que un punto de la arista (P) cumpla que $A - P - O$, en cuyo caso el poliedro resulta ser no convexo.



(a) (b) (c)

Figura 21

Estos 3 posibles casos se observan más claramente en las gráficas de la figura 21, en la gráfica 21a, resulta O estar contenido en una de las caras, en particular en una de sus aristas, para el gráfico 21b se cumple que O no está contenido en el poliedro, y para la gráfica 21c para que se pueda cumplir la condición de que $A - P - O$ el ángulo externo de las dos caras que se encuentran en el cuadrante 1 siempre será menor a 180, por lo que se puede concluir que el poliedro terminará siendo no convexo.

Dado que, para todos los posibles casos se llega a una contradicción, se puede concluir que la hipótesis planteada es falsa, por tanto se concluye que la función es inyectiva. Análogamente se demuestra para los 7 casos restantes (los que corresponden a las 7 partes faltantes del cuadro 2).

Sobreyectiva

Se sabe que si $f : D \to C$ es sobreyectiva, se cumple que $\forall Y \in C, \exists X \in D$ tal que $f(X) = Y$, Sea $Y \in C$, como se sabe por la construcción hecha en la función f basta con mostrar que $\overleftrightarrow{YO}$ se interseca con algunas de las caras del polígono, pero esto es evidente, puesto que si no lo hiciera se tendría que O no estaría contenido dentro del poliedro u O pertenecería a alguna de las caras del poliedro, lo que niega las restricciones que inicialmente se tuvieron al momento de construir f [9].

Con el resultado anterior, se puede asumir que lo dicho sobre la esfera se cumplirá para cualquier poliedro convexo, ya que este se determinó para cualquier poliedro convexo, es por eso que a partir de este punto se centrará el trabajo en propiedades de la geometría esférica para con ellas corroborar asegurar lo dicho en los poliedros.

Se sabe que en el momento de aplicar la función de un poliedro P a una esfera, esta queda dividida en F polígonos esféricos (como se mostró anteriormente), estos polígonos se se notaran como $C_1, C_2, C_3, ..., C_F$, en donde a cada uno de estos polígonos le corresponde exactamente una de las caras del poliedro P, además para cualquier par de polígonos esféricos determinados por la función, su

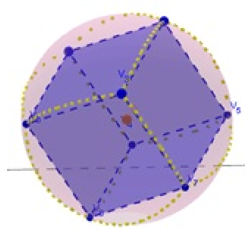


Figura 22

[9]Si se desea ver la transformación propuesta por Legendre desde un triangulo a una superficie esférica diríjase a: https://tube.geogebra.org/m/1499029

intersección es vacía, esto es obvio ya que si no se cumpliera la función f no sería biyectiva.

Con estos datos es posible aplicar una extensión del teorema de Girard, la cual dice que, si A_i es la cantidad de lados de la cara C_i entonces la suma de sus ángulos internos esta dada por la expresión $(A_i - 2) + \frac{área(C_i)}{R^2}$, si se extiende para cada uno de los polígonos esféricos se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^{f} angulos(C_i) = \sum_{i=1}^{f}(A_i - 2) + \sum_{i=1}^{f} \frac{(Area(C_i)}{R^2}. \tag{15}$$

Si se analiza la sumatoria de la izquierda en la ecuación 15, se observa que para cada vértice este aporta a dicha suma 2π, esto se observa claramente en la figura 23, por lo que se deduce que $\sum_{i=1}^{f}(C_i) = 2\pi V_p$, siendo V_p la cantidad de vértices del poliedro P, ya que cada vértice de los polígonos esféricos resultan ser la imagen de uno de los vértices del poliedro P.

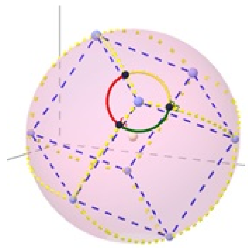


Figura 23

Para la segunda sumatoria de la ecuación 15, se puede decir que:

$$\sum_{i=1}^{f}(A_i - 2) = \sum_{i=1}^{f}(A_i\pi) - \sum_{i=1}^{f}(2\pi)$$

.

De esta manera se sabe que $\sum_{i=1}^{f}(A_i\pi)$ es π veces la cantidad de aristas de todas las caras de los polígonos esféricos, por lo que a su vez también es π veces la cantidad de lados de las caras del poliedro P, pero como cada una de los lados del poliedro está exactamente en dos caras se concluye que $\sum_{i=1}^{f}(A_i\pi) = 2\pi A_p$ siendo A_p la cantidad de vértices del poliedro.

Luego $\sum_{i=1}^{f} 2\pi = 2\pi C_p$ siendo C_p la cantidad de caras del poliedro P.

Por último se sabe que $\sum_{i=1}^{f} \dfrac{Area(C_i)}{R^2} = 4\pi$, con los datos obtenidos se reemplaza en la fórmula obtenida inicialmente y se obtiene:

$$2\Pi V_p = 2\Pi A_p - 2\Pi C_p + 4\Pi \tag{16}$$

De 16 se puede concluir que:

$$V_p + C_p - A_p = 2$$

,

demostrando con esto la relación para poliedros convexos de Euler [10].

0.2.2. Una demostración utilizada por Cauchy y estudiada por Lakatos

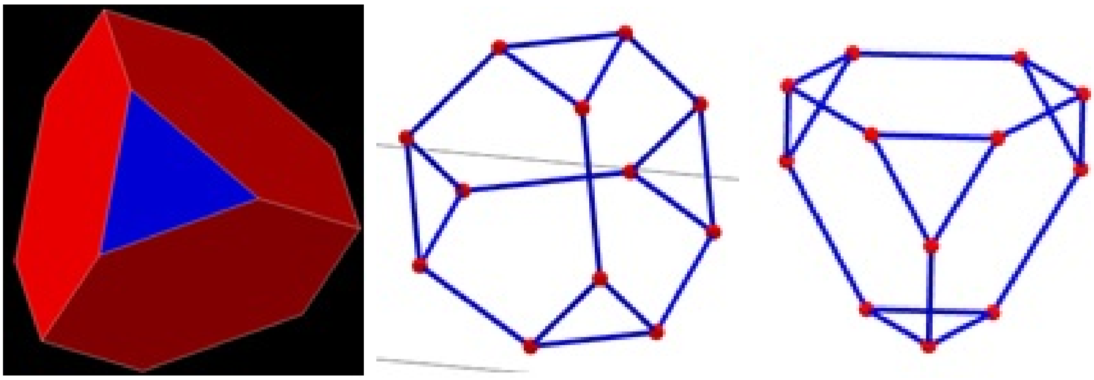
Otra demostración para la relación de Euler, está enfocada en la teoría de grafos, esta, es una variación de una prueba encontrada en (Lakatos, I., Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery, Cambridge, 1976.); se agrega a este documento por su importancia histórica y, por ser estudiada con detalle por Lakatos y Cauchy, esto es gracias a su manera de ligar el análisis multidimiensional y el teorema de Radón. Aunque son temas que no se abordaran en este documento, es importante rescatar cómo el proceso de demostración de la relación de Euler para poliedros convexos, contribuye a otras ramas de la matemática y en el desarrollo de estas.

Esta demostración se basa en dibujar un grafo[11] planar convexo de las aristas y vértices de un poliedro, de tal manera que, se permanezca una correspondencia entre el grafo y el poliedro, para con ello trabajar sobre el grafo planar[12] y así corroborar en él una propiedad que permita verificar la relación de Euler sobre el poliedro.

[10] Para observar la transformación propuesta por Legendre con diferentes poliedros dirigirse a: https://tube.geogebra.org/m/1499003 o https://tube.geogebra.org/m/1499043

[11] Un Grafo es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto

[12] Un grafo planar o plano es un grafo que puede ser dibujado en el plano sin que ninguna arista se cruce



(a) (b) (c)

Figura 24

Antes de entrar en los detalles de la demostración, es necesario entender la manera en cómo se asigna un grafo planar convexo a un poliedro convexo cualquiera, para explicar este proceso se toma un tetraedro truncado, como se observa en el la figura 24a. Considere que este sólido es un objeto que solamente tiene sus aristas y vértices, similar a lo que se observa en la figura 24b, si se mira de frente a una de las caras tal que, exista una cara que está más alejada del punto de vista, esta última determina los bordes de nuestro grafo planar, en el caso de la figura 24c se fijó la mirada en una cara triangular y desde este punto de vista se pudo determinar que la cara más alejada es una cara pentagonal, esto asegura que el grafo planar del poliedro, con este punto de vista, es un pentágono, dentro del cual se encuentra una serie de divisiones determinadas por el poliedro. Ahora si se imagina que esa cara más alejada se vuelve tan grande como se quiera, llegará un momento en que, desde esta vista, no se observe ningún tipo de cruce entre las aristas, obteniendo lo que se observa en la figura 25; a este resultado es el que se llama grafo planar de un poliedro convexo, es lógico que no solo se puede asociar un grafo planar a un poliedro, basta con tomar otro punto de vista y realizar el mismo proceso para obtener otro grafo planar asociado al mismo poliedro, sin embargo para cualquier grafo creado con este método se obtendrán las mismas propiedades.

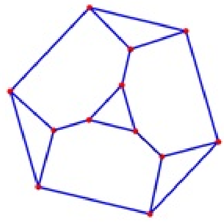


Figura 25

Lo interesante de este grafo es que conserva la misma cantidad de aristas y la de vértices del poliedro inicial y, las regiones que limitan las aristas son exactamente una menos que las caras del poliedro, esto se debe a que la cara que se amplia en el proceso descrito anteriormente no tiene una que le corresponda dentro del grafo; considerando esta relación entre el grafo y el poliedro, es fácil observar que, si se logra demostrar que para el grafo planar, cumple que $V + C - A = 1$, siendo V, A y C vértices, aristas y regiones que delimitan las aristas dentro del grafo, se puede asegurar que la relación de Euler se cumple en el poliedro.

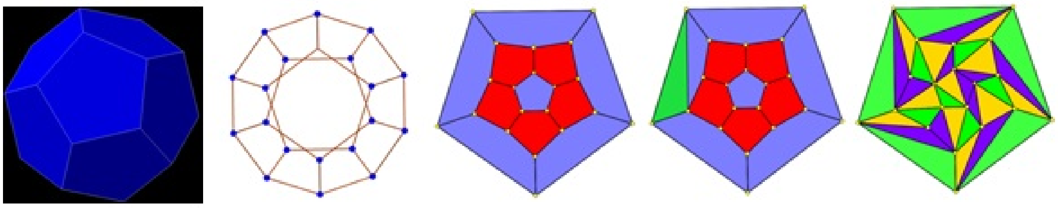


Figura 26

En busca de asentir que $V + C - A = 1$ para todo grafo planar convexo que este asociado a un poliedro cualquiera, se toma un poliedro y se halla uno de sus grafos planares asociados al que se llama G, luego de esto se triangula el grafo G [13], este proceso hace referencia a agregar cuántas aristas sean necesarias tal que, cada una de las regiones determinadas dentro de este nuevo grafo G' sea triangular, no se agreguen vértices y además G' siga siendo un grafo planar; este proceso se ilustra en la gráfica 26.

Al mirar con detalle la triangulación anterior se puede concluir que si este nuevo grafo G' cumple que $V' + C' - A' = 1$, entonces la relación $V + C - A = 1$ se cumple para el grafo G, esto se debe a que, al realizar el proceso, por cada arista que se incluye al grafo este, además, obtiene una nueva región, lo que se traduce en que si se agregan n cantidad de aristas entonces $A' = A + n$, $C' = C + n$ y $V' = V$, que, al sustituir en $V' + C' - A' = 1$ se obtiene que $V + (C + n) - (A + n) = 1$ de donde es fácil concluir que $V + C - A = 1$.

Para continuar con la demostración es necesario retirar aristas al grafo G' hasta que el resultado sea un triángulo, de tal manera que la arista que se retire solo delimite a lo

[13] Para manipular el aplicativo desde el que se tomaron las imágenes utilice el siguiente link: https://tube.geogebra.org/m/1497503

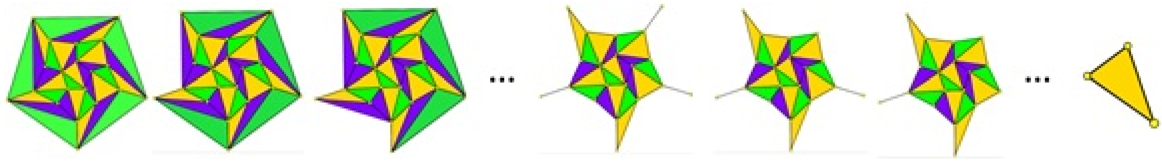


Figura 27

máximo una región del grafo, este proceso se ilustra en la figura 27, se puede vislumbrar que se van retirando primero las regiones que se encuentran en el borde, en esta primera parte del proceso cada vez que se retira una arista desaparece una de sus regiones sin que en este proceso altere la cantidad de vértices del grafo, pero llega un momento en el que, se encuentran aristas que no delimitan con ninguna cara y, en este punto, al retirarlas solo desaparece la arista y uno de los vértices del grafo, sin variar la cantidad de regiones, esto se traduce en que, al retirar las aristas con este método, algebraicamente solo pueden ocurrir dos eventos, que el grafo resultante tenga una arista menos y una región menos con respecto al grafo anterior ó que tenga una arista menos y un vértice menos, para ambos casos si se cumple para G' que $V'+C'-A'=1$ entonces se cumple para todos los grafos que se obtienen de retirar las aristas, de manera análoga si se cumple para uno de los grafos resultante de retirar aristas entonces se cumplirá para G', lo importante es que, como para todo grafo al que se le aplique este proceso una cantidad de veces determinada, se puede asegurar que se puede obtener un triángulo como resultado final, como esto ocurre basta con corroborar que la relación $V+C-A=1$ se cumple para un triángulo y, por lo dicho anteriormente, se concluye que para G' se cumple que $V'+C'-A'=1$, pero este resultado es bastante sencillo de concluir, puesto que del triángulo se sabe que tiene 3 aristas, 3 vértices y una región que delimita, por tanto para el grafo G' se cumple que $V'+C'-A'=1$, como este grafo fue fijo pero arbitrario, entonces este resultado se puede extender para cualquier grafo planar que se derive de un poliedro convexo cualquiera y, como se había dicho anteriormente, esto concluye en decir que la relación de Euler para poliedros convexos se cumple para cualquier poliedro convexo [14].

[14] Para visualizar otra triangulación sobre un grafo planar, diríjase a: https://tube.geogebra.org/m/1497345

0.3. DE LA FÓRMULA DE EULER A LA TOPOLOGÍA

En este capítulo se describe cómo el surgimiento de la fórmula de Euler para poliedros y la solución al problema de los Puentes de Konigsberg, por su manera de ser resueltos y concebidos, marcan el inicio en una nueva forma de ver los elementos matemáticos, en particular los poliedros, abriendo un nuevo campo de estudio en las matemáticas, inicialmente conocido como "Análisis Situs". Paralelo a ello se muestra por que la demostración de Legendre, presentada anteriormente, aporta algunas bases para el desarrollo de esta nueva área de estudio.

Además se muestra el estudio de algunos matemáticos en relación a la clasificación de los poliedros que cumplen ó no la relación de Euler, y da evidencia de cómo esto, aporta al surgimiento a una área denominada Geometría sítus luego llamada Topología. Por último se intenta mostrar como algunas de las ideas y estudios realizados anteriormente dan origen al desarrollo del concepto de homeomorfismo.

Hasta este punto se ha presentado como surge la relación de Euler para poliedros convexos y algunas de la maneras que justificaron y demostraron, en su momento, la relación; pero se ha dejado de lado algo fundamental en todo este proceso, que se relaciona con la diferencia de este resultado matemático a otros obtenidos dentro de la geometría clásica; sin embargo Euler no solo soluciona un problema de este tipo, que por su manera de ser resuelto se diferencia de los problemas usuales en la geometría clásica, presenta la solución de un problema al que se le llamó "Problema de los puentes de Königsberg", para evidenciar el por qué este problema se diferencia de la geometría clásica se presenta a continuación una pequeña explicación del problema.

0.3.1. Puentes de königsberg

El problema está asentado sobre la antigua ciudad Alemana, Konigsberg un ciudad de Prusia del siglo XVIII, actualmente se llama Kaliningrado de Rusia debido a algunos ajustes que se hicieron en la frontera tras la II guerra mundial, los habitantes de dicha ciudad se preguntaban si sería posible hacer un recorrido por la ciudad de tal manera que no se cruzara más de una vez por cada puente, es así como surge este célebre problema matemático.

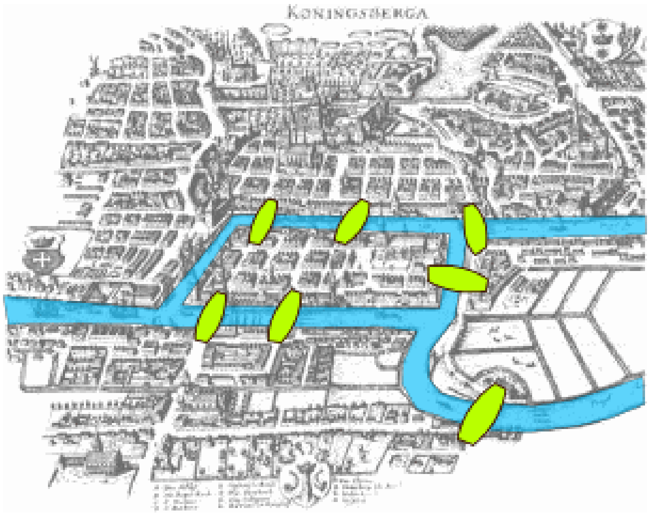


Figura 28: königsberg

15

Euler dio solución a este problema en 1735 ante la academia de ciencias de San Petersburgo; se dio cuenta que para resolver este problema no influía ni la distancia de los puentes, ni el ancho del rio o el tamaño de la isla, sino la posición que tenían ellos sobre la antigua ciudad Alemana, es así, como dar solución a este problema equivaldría a realizar el gráfico de la figura 29, con la condición de que no se podría levantar el lápiz del papel, pasando solo una vez por cada uno de los puentes hasta llegar al punto de partida.

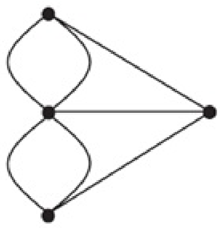


Figura 29

[15]Tomado de: Reseña Histórica, Euler y la Génesis de la Topología. p3

Euler propone una solución que resolvería el problema en muchas situaciones y que dá evidencia que dicho problema sale de los problemas habituales de la geometría clásica:

> *cuando el número de puentes es impar, lo aumento en uno y lo divido por dos, cuando el número es par, lo divido por dos. Entonces, si la suma de los números resultantes es igual a la suma de los puentes más uno, el camino puede realizarse, si bien ha de comenzar en una región a la que conduzca un número impar de puentes pero si la suma es una unidad menor que el número de puentes más uno, el camino es posible si su punto inicial es una región a la que conduzca un número par de puentes, ya que en este caso la suma se incrementa de nuevo en una unidad.* (Garro,(S.F.),p.4)

La solución que da Euler a este problema deja de un lado el estudio de la figura como un objeto rígido y realiza una transformación a un objeto más abstracto en el cual le sea más fácil evidenciar su solución.

Tanto el problema de los puentes de Königsberg como la relación de Euler tienen características similares en la manera como están plateados, en los dos problemas se desprende de la concepción de geometría clásica y se preocupa por la forma y la posición de los objetos; al parecer G. Leibniz (1646-1716) fue el primero en relacionar estos problemas con el nombre de Análisis Sítus, como atestigua L. Euler (1707-1783) en Solution Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis publicado en 1736.

> *Además de esta parte de la geometría que trata de las magnitudes y que desde siempre ha sido cultivada con mucho celo, existe otra completamente desconocida hasta nuestros días, de la que Leibniz hablo por primera vez y que llama "Análisis Situs". Según él, esta parte de la geometría se ocupa de determinar solamente la posición y buscar las propiedades que resulten de esta posición; en este trabajo no es necesario considerar las magnitudes por sí mismas, ni calcular; pero aún no está muy bien establecido cuáles son los problemas de este tipo que pertenecen al "Análisis Situs" cuál es el método que hay que utilizar para*

resolverlo; es por lo que, cuando recientemente se me presentó un problema que parecía ligado a la geometría ordinaria, pero cuya solución no dependía de la determinación de las magnitudes ni del cálculo de las cantidades, no he dudado en relacionarlo con el "Análisis Situs", tanto por las consideraciones de posición que únicamente entran en la solución, como porque el cálculo no interviene para nada. Por tanto, he creído útil expresar aquí, como un ejemplo del "Análisis Situs", el método que he encontrado para resolver los problemas de este género.

Para esta época, al tener tan pocos problemas relacionados con el análisis sítus no es mucho lo que se habla de ella, sin embargo no por eso la relación de Euler deja de ser relevante para la comunidad matemática, hay evidencia de que, en 1810, Poinsot trabaja sobre de la relación de Euler; observa que poliedros como el gran dodecaedro estrellado (estudiado por Keppler en 1619) y el gran icosaedro (estudiado por Poinsot), cumplen la relación y no son poliedros convexos. efectivamente el gran icosaedro, figura 30 costado derecho, y el gran dodecaedro estrellado,figura 30 costado izquierdo, satisfacen la fórmula de Euler aunque no sean poliedros convexos.

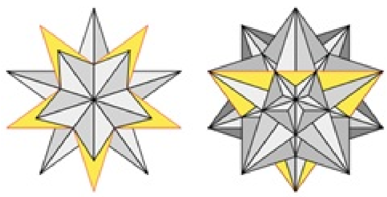


Figura 30: Gran dodecaedro estrellado, Gran icosaedro

Veamos que el gran icosaedro cumple:

- Numero de vértices = 12
- Numero de aristas = 30
- Numero de caras = 20

Al sustituir en la ecuación $V + C - A = 2$ tenemos:

$$12 + 30 - 20 = 2$$

.

A continuación tomemos el Gran dodecaedro estrellado y veamos que:

- Numero de vértices = 20
- Numero de aristas = 30
- Numero de caras = 12

Por consiguiente tenemos que:

$$20 + 12 - 30 = 2$$

Sin embargo para los otros dos casos figura 31, la formula de Euler no se cumple.

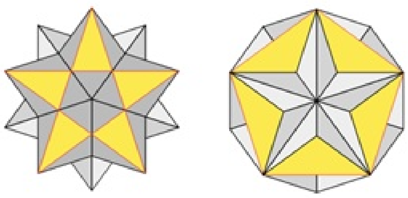


Figura 31: pequeño dodecaedro estrellado y gran dodecaedro

Si tenemos el gran dodecaedro como un poliedro formado por doce caras pentagonales, este no satisface la fórmula de Euler para poliedros ya que tiene 12 vértices, 12 caras y 30 aristas, por lo tanto $12 - 30 + 12 = -6$. El pequeño dodecaedro estrellado también tiene 12 vértices, 30 aristas y 12 caras, así que de nuevo se altera la suma dando como resultado -6. A estos 4 poliedros presentados anteriormente se les conoce con el nombre de Poliedros de Kepler-Poinsot y son un ejemplo de que la relación de Euler no solo se cumple para poliedros convexos, y que, además, no todos los poliedros de este tipo cumplen la relación de Euler.

Esto abre camino a preguntarse ¿Qué poliedros cumplen la relación de Euler?, a estos poliedros se les denominó poliedros Eulerianos, y en la búsqueda de responder esta pregunta surgen algunos estudios de los cuales se habla a continuación [16].

0.3.2. Estudio de Poliedros Eulerianos y no Eulerianos

Uno de los primeros matemáticos interesados en realizar un estudio sobre poliedros Eulerianos fue Simón Antoine Jean Lhuilier (1750-1840), quien en 1813 realiza una contribución importante a la teoría de poliedros y a la fórmula de Euler mencionando que, existen tres clases de poliedros los cuales no cumplen la relación, a esta clase de poliedros los llamó “excepciones”.

La primera clase de excepciones, propuesta por Lhuilier, consiste en poliedros con forma de anillo, tomemos como ejemplo la figura 32 en donde aplicando una fuerza en el centro de una de las caras, produce una arandela cuadrada.

Si nos damos cuenta este poliedro tiene 13 vértices, 10 caras (5 cuadradas, 4 triangulares y una en forma de anillo cuadrado) y 20 aristas de lo cual tenemos:

$$13 - 20 + 10 = 3$$

[16] Para visualizar el proceso de la demostración de Legendre, desde un poliedro estrellado a una superficie esférica diríjase al siguiente link: https://tube.geogebra.org/m/1499061

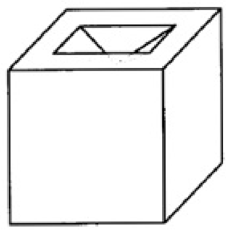


Figura 32: Excepción 1

Y esta relación no cumple la formula de Euler.

La segunda clase de excepciones, consiste en poliedros con uno o más túneles[17] lo cual se evidencia en la figura 33.

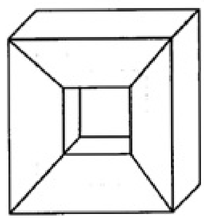


Figura 33: Excepción 2

Este poliedro tiene 16 vértices, 16 caras y 32 aristas para lo cual tenemos $16-32+16=0$ mostrando que este tipo de poliedros no cumple la relación.

Como tercera y última excepción Lhuilier imaginó un poliedro con una cavidad en forma de poliedro en el interior figura 34. Es de aclarar que esta excepción es cierta si hablamos de poliedros sólidos no huecos.

Un cubo con una cavidad en forma de cubo como se muestra en la figura 34cumple:

- 16 vértices.
- 24 aristas.
- 12 caras.

Para lo cual:

[17]Hueco que atraviesa un poliedro de un lado a otro lado

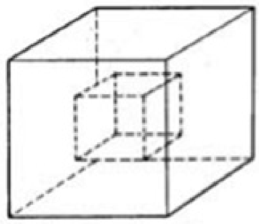


Figura 34: Excepción 3

$$16 - 24 + 12 = 4$$

Además de las excepciones y los ejemplos mostrados, se trata de hacer una clasificación de los poliedros que no cumplen la fórmula de Euler, para lo cual Lhuilier trata de modificar la fórmula teniendo en cuenta las excepciones para las cuales no se cumplía la relación y afirmó que un poliedro con T túneles, C cavidades y P poliedros cumplía:

$$V + C - A = 2 - 2T + P + 2C. \tag{17}$$

Cabe mencionar que la nueva fórmula presentada por Lhuilier funciona tanto para las excepciones mostradas como para los poliedros regulares convexos, y deja en evidencia que es posible extender la relación para que esta abarque un campo más amplio de poliedros, aportando a la idea de cómo generalizar estos resultados; sin embargo, Lhuilier no incluía todas las posibles excepciones, y su fórmula no se aplica a todos los poliedros. Veinte años después de que Lhuilier encontrara estas tres excepciones a la relación de Euler, Johan Hessel (1796-1872) presenta cinco excepciones en 1832, incluyendo las 3 propuestas por Lhulier, sin saber que estas ya habían sido presentadas al mundo matemático, pero esto no impidió que siguiera adelante con su trabajo ya qué él decía que muchas personas no tenían conocimiento de estas excepciones importantes, por tal motivo decide presentar las dos restantes.

La primera excepción es un poliedro formado por dos poliedros unidos mediante un vértice, y la segunda un poliedro formado por dos poliedros unidos por una arista, como se muestra en la figura 35.

En el ejemplo de la figura 35 se observa que el primer poliedro tiene 8 vértices, 14

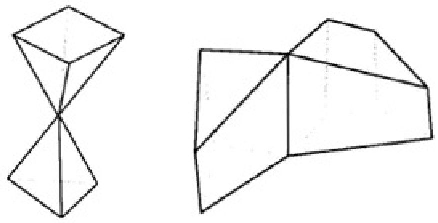


Figura 35: Excepciones de Hessel

aristas y 9 caras, para lo cual $8 - 14 + 9 = 3$ y el segundo tiene 12 vértices, 20 aristas y 11 caras de donde $12 - 20 + 11 = 3$.

Mas adelante en 1847, Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867), encuentra una clase de criterios que, presume, describen los poliedros Eulerianos, asumiendo implícitamente que sus poliedros son cascaras huecas más no sólidos, esos criterios son:

- Es posible ir de cualquier vértice a cualquier otro mediante un camino de bordes.
- Cualquier camino de aristas que comienza y termina en el mismo vértice sin visitar cualquier vértice dos veces (recordemos que ese camino se llama un circuito) divide el poliedro en dos pedazos.

Obsérvese que estos poliedros propuestos por Staudt incluyen muchos poliedros que no son convexos. Un ejemplo de esto se evidencia en la Figura 36.

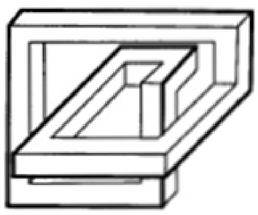


Figura 36: Poliedros de Staud

Este poliedro cumple los criterios de Staudt y de hecho cumple la relación de Euler ya que tiene 48 vértices, 72 aristas y 26 caras por consiguiente al aplicar la fórmula $V + C - A$ tenemos que:

$$48 + 26 - 72 = 2$$

Todos estos Estudios de la relación de Euler y en particular, de aquellos poliedros que cumplen la relación, dieron a los matemáticos, a mediados del siglo XIX, una mayor comprensión de la relación de Euler en los poliedros; sin embargo, debido a la demostración hecha por Legendre (escrita en el capítulo 2), se comienza a pensar si es posible aplicar esta fórmula en otro tipo de objetos, en donde las caras no necesariamente fuesen planas; por ejemplo para cualquier subdivisión de polígonos esféricos $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$ sobre la superficie S de una esfera que cumpla $\bigcup_{1=1}^{n} C_i = S$ y además que para cualquier par de polígonos esféricos su intersección es, a lo sumo, una arista esférica, se cumple la relación de Euler, como se mostró en el capítulo 2 en la demostración propuesta por Legendre.

Al extender la relación de Euler a otros objetos, como se mencionó anteriormente, se ilustra una transición en curso de la manera de pensar y de observar los objetos en donde se desliga de las propiedades clásicas de la geometría y se piensa en algo a lo que la prensa del momento denominó "Geometría de Goma"; (Herrero J, (2012), p.4) define Geometría de Goma de la siguiente manera:

> *Pensemos que una figura esta dibujada en una superficie de goma que se puede deformar: estirar, retorcer, encorvar, etc., es decir, modificaciones que llevan consigo cambios del tamaño o de la forma de la figura original. No valen transformaciones como cortar, hacer agujeros, pegar otro trozo, etc. Las primeras son transformaciones que podemos llamar continuas.[11]*

Hasta este punto en la historia es que se empieza a entender aquellos problemas de estudio que se mencionaban vagamente en el Análisis Situs, si se observa, a lo que se le denominó Geometría de Goma, estudia los mismos problemas que estudia el Análisis Situs ya que no se preocupa por aquellas propiedades propias de la geometría clásica que se ligan a las medidas, si no, que por otro lado, se preocupa por aquellos problemas que se relacionan al estudio de la posición y forma de los objetos, sin embargo se tiene una idea que, como menciona Herrero, va más relacionada a las transformaciones continuas, y, en este punto es donde la geometría de goma empieza a ser un centro de estudio entre los matemáticos.

A mediados del siglo XIX los matemáticos empiezan a cuestionarse sobre aquellos objetos a los que se les podría considerar iguales dentro de lo que se llamó la geometría de goma, uno de los primeros resultados alrededor de este tema está asociado a la relación Euler, para dar respuesta a que poliedros eran poliedros Eulerianos, se toma la demostración de Legendre y con esta idea se dice que todos los poliedros en los que fuera posible encontrar una función biyectiva y continua del poliedro a la esfera serían poliedros Eulerianos, aun cuando algunos poliedros que cumplen la relación de Euler no cumplan esta condición; obsérvese que esta idea de función biyectiva y continua no es más que una transformación de un poliedro a una esfera torciendo, elongando o encogiendo el poliedro, y es por ello, que se puede asegurar que esta respuesta está ligada a la geometría de Goma.

Con esta misma idea y la idea de igualdad, se empieza a hablar de un nuevo término al que se le denominó homeomorfismo, el primero en introducir una definición de cuando dos objetos son homeomorfos en la topología fue Möbius (1790-1868) quien dice: “Dos objetos son topológicamente iguales si existe una correspondencia uno a uno entre puntos en ambos objetos y conservan puntos de proximidad”, a esta correspondencia la llamo “relación primaria”, hoy más conocida como un homeomorfismo, de esta manera se empieza a hablar de cuando dos objetos son iguales en topología. A continuación se presenta algunos ejemplos de figuras que son homeomorfas o topológicamente iguales y un caso en el cual no son topológicamente iguales a la figura inicial.

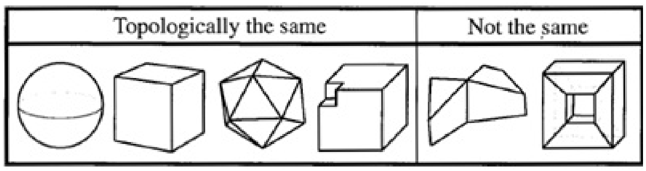


Figura 37

En la figura 37 el cubo, el icosaedro, y el cubo que se muestra con una deformación en la punta son topológicamente iguales a la esfera, pero los poliedros que se muestran a la derecha no lo son, una forma de probar que los sólidos mostrados a la izquierda son topológicamente iguales, es porque todos cumplen la fórmula de Euler, mientras que los de la izquierda no lo son ya que si recordamos estos fueron excepciones presentadas por Lhuilier y Hessel a la relación de Euler.

Sin embargo el hablar de homeomorfismo no fue más que el inicio para plantear otros términos dentro de la topología, uno de los primeros se relaciona justamente con la búsqueda de herramientas agiles para determinar si dos objetos son ó no topológicamente iguales es aquel al que se le denominó invariante topológico, se dice que los invariantes topológicos son aquellas propiedades que trascienden sin importar el tipo de transformación continua que se le aplique al objeto topológico y, por la naturaleza de la definición, es claro pensar que la relación de Euler podría tener cabida dentro de esta definición, pero no solo propiamente la relación de Euler, ya que si recordamos, Lhuilier propone una generalización de la relación de Euler para poliedros con Cavidades, Túneles y abolladuras, de estas ideas surge un término que sería considerado uno de los primeros invariantes topológicos conocidos como la característica de Euler. Se define a la característica de Euler como el valor asociado de una superficie obtenido de la suma de los vértices, las caras y las aristas del objeto matemático, sin embargo es posible asociar este número a superficies que no tengan vértices, caras o aristas, si es posible hacer una transformación continua entre la superficie y un poliedro con una característica de Euler asociada, a continuación en la tabla se presentan algunas superficies con su característica asociada.

Hasta este punto la relación de Euler hace parte de las ideas que constituyen los primeros elementos de la topología, además, las definiciones dadas para la geometría de goma o topología tienen implícitamente aquellas ideas, que como se señaló, en el transcurso de todo el documento, hicieron parte del proceso de construcción y posterior uso de la relación, es por esto y todo lo mencionado anteriormente que se puede asegurar que la relación de Euler y algunas de sus justificaciones y demostraciones sentaron las bases para el surgimiento de lo que conocemos como topología.

0.4. ALGUNAS APLICACIONES

En el desarrollo de este documento se ha presentado un contenido histórico y matemático ligado a la relación de Euler; se ha hecho un estudio de algunos acontecimientos históricos que llevaron a Leonard Euler a plantear la relación $V + C - A = 2$ inicialmente pensados para poliedros convexos y, luego, extendido para los poliedros conocidos como "poliedros Eulerianos", además algunas de las justificaciones y demostraciones de este hecho matemático. Por otro lado, se ha evidenciado cómo las ideas utilizadas en el planteamiento de la relación brindan, históricamente, algunas de las nociones iniciales para el surgimiento de una nueva rama de estudio de las matemáticas conocida como Topología; todo esto para mostrar la importancia de la relación de Euler en el surgimiento de esta nueva rama de la matemática; sin embargo esto no es lo único a destacar de la relación de Euler, sus aplicaciones, que no solo se encuentran en las matemáticas, aportan a que esta sea una relación digna de admirar, a continuación se presentan dos de las aplicaciones de la relación de Euler dentro de las matemáticas.

0.4.1. Los únicos 5 sólidos platónicos

Un echo interesante en las matemáticas es poder demostrar que solo es posible obtener 5 sólidos regulares o sólidos platónicos, pues bien, la relación de Euler nos brinda una manera de corroborar que efectivamente solo es posible tener 5 de estos sólidos, su justificación se basa en observar aquellas características que hacen que un poliedro sea regular y llevarlas a hechos algebraicos que, con la ayuda de la relación de Euler, brindan la justificación de este hecho matemático, a continuación se presenta un breve bosquejo de esta demostración.

Antes de presentar la demostración, es necesario recordar la definición para un poliedro regular, como lo menciona (Quesada, 2006) se define como poliedro regular a *"todo aquel poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares iguales entre sí, y cuyo numero de vértices son iguales"*, es fácil observar que si se cumple esta definición, se puede asegurar que, si se desea reescribir la cantidad de caras de un sólido platónico en términos de sus aristas, basta con saber la cantidad de lados (p) que tiene una de las caras del poliedro, esto es debido a que, todas sus caras son iguales entre sí, y además, como cada cara tiene exactamente p aristas y, cada arista esta exactamente en dos caras se cumpliría que, $pC = 2A$ siendo C la cantidad de caras y A la cantidad de aristas; por otro lado si desea reescribir la cantidad de vértices también en términos de la cantidad de aristas, basta con saber la cantidad de aristas (q) que concurren a un mismo vértice (V), esto debido a que, por la definición de poliedro regular, es imposible que haya dos vértices a los que concurran dos cantidades diferentes de aristas y, como cada arista concurre en exactamente dos vértices se puede observar que se cumple que $qV = 2A$.

Como se sabe que la relación de Euler se cumple para poliedros convexos, se puede asegurar que también se cumplirá para los poliedros regulares, por lo que se tiene que $V + C - A = 2$, sustituyendo V y C de las ecuaciones obtenidas anteriormente se obtiene que:

$$\frac{2A}{q} + \frac{2A}{p} - A = 2 \tag{18}$$

Dividiendo 18 por $2A$ tenemos:

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A}$$

Ahora, como A debe ser obligatoriamente mayor a 0, debido a que no existe ningún poliedro con una cantidad de aristas negativa, se llega a la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$$

Hasta este punto es necesario hacer un alto ya que se debe pensar en aquellos valores que pueden tomar q y p para que se cumpla la desigualdad y además para que tenga sentido en cuanto a las restricciones que traen implícitamente p y q; por un lado tanto p como q obligatoriamente deben ser números naturales mayores o iguales a 3, esto se debe a que, para el caso de p, no es posible tener una cara que tenga menos de 3 lados que la determinen, y, por el lado de q, no es posible que este una menos de tres caras porque si hubiese un vértice que uniera dos caras, esto implicaría que el punto pertenecería a la arista pero no sería ninguno de sus extremos. Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, los únicos valores que puede tomar p y q son $(3, 3), (3, 4), (4, 3), (5, 3)$ y $(3, 5)$ respectivamente, estas 5 posibles combinaciones corresponden a los 5 sólidos platónicos, como se muestra en el cuadro 3.

Nombre	**Imagen**	**Lados de una cara** (p)	**Aristas que concurren a un vértice** (q)
Tetraedro		3	3
Cubo		4	3
Octaedro		3	4
Dodecaedro		5	3
Icosaedro		3	5

Cuadro 3

0.4.2. El estudio de nudos y su clasificación

Otro problema al que se le da solución mediante la relación de Euler (en realidad la solución se presenta por la característica de Euler), es la clasificación de nudos, un problema que se puede considerar joven ya que sus primeras investigaciones se remontan al siglo XVIII.

Este trabajo está enfocado en saber cuándo dos nudos son equivalentes entre ellos, es importante saber que, dos nudos son equivalentes si y solo si es posible pasar de uno a otro solo por medio de una deformación continua, esto visto de una manera coloquial implica que solo sea posible torcer o estirar el nudo, pero nunca cortarlo.

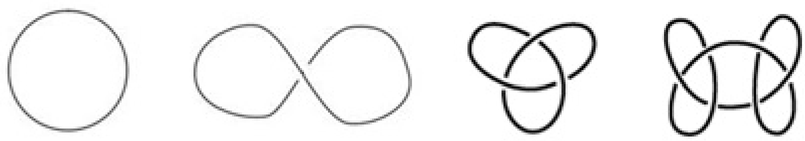


Figura 38

Así por ejemplo en la figura 38 costado izquierdo, basta con hacer una torsión en el primer nudo para obtener el siguiente, por lo que se puede asegurar que estos dos nudos son equivalentes, sin embargo esto no es posible con los nudos de la gráfica 38 costado derecho, ya que indiferentemente de cuantas torsiones o elongaciones se hagan sobre estos nudos no será posible obtener de uno el otro; esta idea lleva a buscar un argumento matemático que garantice cuando dos nudos son equivalentes y cuando no, y es aquí cuando la característica de Euler toma importancia, ya que, resulta ser este un medio para asegurar que dos nudos no son el mismo, lo interesante en esta clasificación es la manera en como se le asocia un número de Euler a cada uno, y es aquí cuando Herbert Seifert (1907-1996) propone un algoritmo simple, pero elegante, conocido como superficie de Seifert, que permite asociar cada nudo con un número.

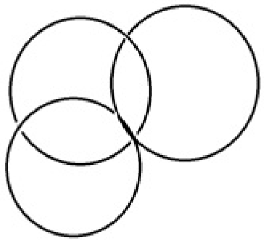


Figura 39

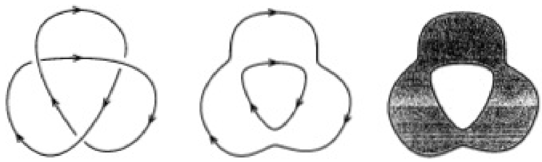


Figura 40

Inicialmente pensemos en cualquier nudo, con una característica particular, evitar que por un mismo punto pasen 3 vertientes del nudo, como se muestre en la figura 39; luego elija una de sus orientaciones, dicho de otra forma camine por un mismo sentido a lo largo de todo el nudo, seguido de esto empiece a dibujar el circuito desde uno de sus cruces de manera tal que siga el sentido que ha elegido anteriormente y además en cada momento que se encuentre uno de sus cruces se elija el camino que lleve más pronto al punto de partida, repita este proceso hasta haber recorrido todo el nudo, es importante tener en cuenta que luego de cerrar un circuito, es imperativo no volver a pasar por el mismo lugar que se ha pasado anteriormente, esto quiere decir que a cada circuito formado recorra lugares disyuntos del nudo en cuestión, un ejemplo de este método se presenta en la figura 40.

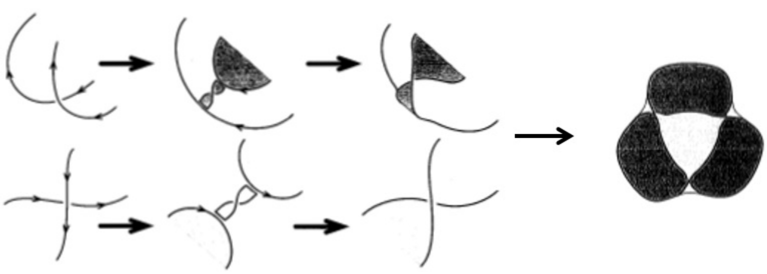


Figura 41

Seguido de esto por cada uno de los cruces, del nudo inicial, agregue un rectángulo con la torsión determinada por el cruce, de manera tal que este conecte a los dos circuitos que se formaron pasando por este cruce, esto se ilustra en la figura 41.

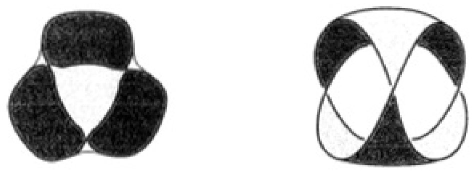


Figura 42

Al realizar este procedimiento siempre se obtendrá una superficie orientable y con frontera, por lo que, por un teorema llamado "teorema de la clasificación de las superficies", el resultado al realizar los pasos anteriores siempre es homeomorfo a una esfera agujereada, véase la figura 42, como a las esferas agujereadas se les puede asignar un número de Euler, también es posible asignarle este número a la Superficie de Seifert; por medio de un análisis a la construcción de la superficie de Seifert es posible deducir que su número de Euler asociado está dado por:

$$(S) = c - b$$

En donde c es la cantidad de circuitos obtenidos en el proceso y b la cantidad de bandas conectoras.

Sin embargo el algoritmo de Seifert no siempre produce para un mismo tipo de nudo la misma superficie de Seifert, este problema se soluciona eligiendo como el número de Euler asociado al nudo o genero del nudo, como el número de Euler más pequeño en todas las superficies de Seifert, brindando con esto una manera de clasificar los nudos por medio de la característica de Euler.

0.5. CONCLUSIONES

Las conclusiones de este trabajo se presentan de acuerdo con los objetivos planteados al iniciar el mismo y de acuerdo al proceso histórico que se llevó a cabo para determinar cómo esta relación tubo gran impacto en el surgimiento de una nueva área del conocimiento como lo es la Topología.

- Durante el desarrollo de este documento se mostró el proceso que se llevó a cabo para el surgimiento de la relación de Euler y algunas de las implicaciones que tubo a través de la historia.

- Después de que se descubre la Relación para poliedros, se descubre que existe una fórmula elaborada por Descartes años atrás y que es equivalente a la de Euler, con la diferencia de que la planteada por Descartes utilizaba medidas, mientras que la de Euler no lo hacia.

- El trabajo de Leonhard Euler en el problema de los puentes de Könisberg y la relación para poliedros convexos resultan ser los dos primeros trabajos con los cuales se empieza a hablar de topología, ya que esta se desligada totalmente de la geometría clásica de la época.

- Ademas del aporte de Leonhard Euler a la topología, es de resaltar el aporte que hace Legendre al demostrar la fórmula de Euler para poliedros, ya que la forma en que se demuestra esta relación es mediante una transformación de un poliedro a una esfera que posteriormente da paso a hablar de otra área del conocimiento como lo es la topología.

- El estudio de la relación de Euler no solo aporta al surgimiento de la topología, ademas de esto contribuye en una nueva manera de ver los poliedros, es decir, si son o no poliedros Eulerianos.

- La relación de Euler ayuda a replantear las ideas que se tienen de lo que es y no es un poliedro.

- De acuerdo a las diferentes contribuciones de esta relación se puede decir que esta es un joya de la matemática, digna de estudiar, un elemento que por su sencillez y aplicación, muestra que la matemática no es complicada para ser bella e invita a todos los que la logran admirar a que la estudien, se apropien de ella y se enamoren de este trabajo.

- La realización de este trabajo de grado ha contribuido al desarrollo de competencias como la lectura, la escritura, la búsqueda de fuentes, entre otras cosas, que fueron necesarias para el entendimiento y la comunicación de los temas tratados en el trabajo de grado.

- el trabajo propuesto por Euler al rededor de la relación para poliedros convexos, contribuye al surgimiento de la topologia, no solo por sus resultados matemáticos sino por la manera diferente de como se observaban los poliedros, dejando de un lado las medidas y fijándose mas en la forma de los objetos.

- El trabajo realizado por Legendre, deja en evidencia una manera de transformar un poliedro, mostrando con ello el concepto de homeomorfismo que tiempo después da surgimiento al estudio de la topología.

- El trabajo de Luilier, Hessel y Poinsot, no solo aporta al surgimiento de la topología, sino que ademas contribuye al cambio de concepción que se tiene de que es un poliedro.

Bibliografía

[1] Richeson, D. (2008). *EULER'S GEM, The polyhedron formula and the birth of topology*, Princeton university pres.

[2] Anzaldo, A., Delgado, J., y Monroy,F., (2007). *El Legado Matemático de Leonhard Euler a Trescientos Años de su Nacimiento*, Universidad Autonoma Metropolitana, **6** ,5-10.

[3] Napoles,J. (2002). *La fórmula de Euler y la topología*, Argentina, Universidad de la cuenca del plata.

[4] Neumann, M. (2007). *Euler y la geometría de la posicion*, Instituto de matemáticas, UNAM, Mexico..87-96.

[5] Debnath, D. (2009). *A brief historical introduction to Euler's formula for polyhedra,topology, graph theory and networks*, University of texas, Department of Mathematics.

[6] Evlero, L.(1758).*Elemental Doctrinae solidorum*,Novi commentarii academiæ scientiarum Petropolitanae.

[7] Vizman, C. Tiglay, F. (2011). *Generalized Euler-Poincare quations on Lie Groups and Homogeneus Spaces, Orbit Invariants and Applications* Department of Mathematics, West University of Timisoara.

[8] Macho, M. (2002). ¿que es Topología?. *Sigma*, *20*, 63-78.

[9] Muñoz, J. (2003). *Topologia Basica*, Departamento de Matemáticas y Estadistica, Universidad Nacional de Colombia, Bogota D.C.

[10] Bamon, R. (2009). *Topología y geometría*, facultad de ciencia, departamento de matemática, universidad de Chile, Chile.

[11] Herrero, J. (2011). *Topología de Espacios Métricos.* España, OCW-Universidad de Murcia.

0.6. Anexos

Anexo 1: Vida de Leonhard Euler

Esta sección contiene algunos eventos importantes en la vida de Leonhard Euler, distribuidos en 4 etapas de su vida: Basilea, Suiza 1707 a 1727- San Petersburgo 1727 a 1741, academia de ciencia de Berlin, Prusia 1741 a 1766, regreso a San Petersburgo 1766 a 1783.

Podemos empezar por aquellos acontecimientos que llevaron a Euler a estudiar matemáticas. El padre de Euler (Paulus Euler) vicario de la iglesia en la parroquia local de San Jacobo, dio a su hijo sus primeras enseñanzas, básicamente latín y griego, y lo alentó en el estudio de las matemáticas que desde temprana edad apasionaron al pequeño Leonhard a profundizar sus estudios en esta área del conocimiento. A los trece años asistió a la universidad y durante los dos primeros años atendió al curso obligatorio de matemáticas dictado por Johann Bernoulli, que incluía, entre otros temas, geometría y aritmética práctica y teórica.

En esta ocasión Euler recitó en latín un discurso a sus compañeros estudiantes, titulado Declamation De Arithmetica et Geometría, allí dio evidencia de su solvencia en latín y su innato talento matemático. Después continúo sus estudios de teología en la Facultad de Filosofía, para satisfacer la voluntad de su padre, lo que le permitió un contacto más cercano con Johann Bernoulli y sus hijos Nicolau, Daniel y Johann, con quienes mantuvo una amistad duradera.

Euler de acuerdo con [2] Anzaldo. Delgado y Monroy (2007) dice que:

> *En 1720 fuí admitido en la Universidad como estudiante público, donde pronto encontré la oportunidad de lograr la cercanía con el famoso profesor Johann Bernoulli, quien tuvo la gentileza de ayudarme en las ciencias matemáticas. Por sus múltiples compromisos, él descartó categóricamente lecciones privadas: sin embargo, me dio un consejo aún más benéfico, el cual consistió en que yo revisara por mi cuenta algunos de los libros más*

> *difíciles de matemáticas y trabajara sobre ellos con diligencia, y donde quiera que yo encontrara alguna objeción o dificultad, él me ofreció libre acceso a él cada sábado por la tarde, y tuvo la amabilidad de dilucidar sobre las dificultades recolectadas, esto sucedió con tal ventaja que cuando él resolvía una de mis objeciones otras diez desaparecían al instante, lo cual es ciertamente el mejor método para avanzar sostenidamente en las ciencias matemáticas (p.6).*

Euler completa sus estudios de filosofía en 1726 y continúa con sus investigaciones independientes en matemáticas.

En 1724 bajo la dirección del Zar Pedro I, el grande, se decide fundar la academia de ciencias de San Petersburgo, con el propósito de llegar a igualar las Academias de Berlín y París, por tal motivo tres años después, en 1727, Euler forma parte del profesorado de la academia, en donde se encuentra con sus amigos de Basilea: Jacob Hermann y Daniel Bernoulli, en esta academia meses más tarde conoce al matemático Cristian Goldbach (1690-1764). Lo que permite que Euler se acentúe en el estudio de las matemáticas.

La correspondencia entre Cristian Goldbach y Leonard Euler es bastante extensa ya que fue frecuente durante 35 largos años, gracias a esta correspondencia y a su amistad duradera Euler es reconocido en el medio de las matemáticas y así mismo en una de sus correspondencias a Goldbach da cuenta de las propiedades especiales que cumplen los poliedros.

La inestabilidad política en Rusia y la muerte de Catalina I hizo que Euler aceptara el ofrecimiento de Federico II de Prusia para dirigir la academia de ciencias Pruciana, durante 25 años Euler enviaría la mitad de trabajos realizados a San Petersburgo para publicarlos. Más de 100 artículos fueron enviados y por lo menos 125 fueron publicados en Berlín.

Cuando Euler llega a Berlín se encuentra en la presidencia de la academia de ciencias con Pierre- Louis Moreau de Maupertius (1658-1759), con quien mantuvo una buena relación y su disposición de colaboración con la academia siempre fue la mejor. Cuando muere el presidente de la academia, Euler asume esta posición tomando varias responsabilidades, pero el Rey Federico II nunca le reconoció el título de presidente de la academia de ciencias de Berlín.

El Rey prusiano no sentía ningún afecto hacia Euler, incluso se refería a él de manera despectiva como un simple matemático, haciendo una cruel referencia a la pérdida de su ojo derecho en el año de 1738. Federico II ofreció a Jean Le Rond D'Alembert la presidencia de la academia de ciencias, y D'Alembert accede a entrevistarse con el Rey en Berlín, pero no para aceptar el ofrecimiento, sino para recomendarle a Euler como la persona capaz de ocupar el cargo. Todo esto hace que Euler tome la decisión de salir de Berlín, y envié una carta al secretario de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, solicitando su regreso. En un principio Federico rechaza la solicitud de Euler, sin embargo, es muy fuerte la presión que ejerce la Zarina Catalina II, quien deseaba restaurar la Academia de Ciencias de San Petersburgo.

Alrededor de 400 memorias fueron escritas en esta segunda estancia a su regreso en San Petersburgo. En este periodo, Euler tiene varios colaboradores, entre ellos su hijo Johann Albretch. Sin duda, las bases para el logro de tal hazaña fueron su memoria prodigiosa y la capacidad para hacer grandes cálculos ya que había perdido la visión. En esta época completó su trabajo sobre el movimiento de la luna y aparecen tres libros: Dioptrica (1769-1721), tres volúmenes de Instituciones Calculi Integralis (1768-1770) y su tratado de Álgebra Vollständige Anleitung zur Algebra (1770).

El recuento histórico realizado anteriormente, muestra que la vida de Leonhard Euler estuvo ligada a las Matemáticas, pero en este apartado nuestro foco será el descubrimiento de la relación:

$$V + C - A = 2.$$