COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS CON UNA MÉTRICA NO EQUIVALENTE A LA USUAL, EN LA CONVERGENCIA DE ALGUNAS SUCESIONES

Modalidad: Interés del estudiante

JENNIFER PATRICIA MORENO MORALES
2008240047
CC 1018444840

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C

2015

COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS CON UNA MÉTRICA NO EQUIVALENTE A LA USUAL, EN LA CONVERGENCIA DE ALGUNAS SUCESIONES

JENNIFER PATRICIA MORENO MORALES

Trabajo de grado presentado para optar por el título de Licenciado(a) en Matemáticas.

Asesor: Jorge Edgar Páez

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C

2015

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General

Tipo de documento	Trabajo de grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Título del documento	COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS CON UNA MÉTRICA NO EQUIVALENTE A LA USUAL, EN LA CONVERGENCIA DE ALGUNAS SUCESIONES.
Autor	Moreno Morales, Jennifer Patricia
Director	Páez Ortegón, Jorge Edgar.
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagígica Nacional 2015. 59p.
Unidad patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras clave	MÉTRICA, SUCESIÓN, CONVERGENCIA, LÍMITE, ENTORNO, COMPACIDAD, DIVERGENCIA, MONOTONÍA, SUCESIÓN ACOTADA.

2. Descripción

El presente trabajo de grado se realiza en el marco de la Licenciatura en Matemáticas, con el objetivo de analizar la convergencia de algunas sucesiones, y comparar los resultados conocidos en el espacio $\mathbb{R}$ con la métrica usual $\mathbf{d}$, con los obtenidos en una métrica que se nombra d_{je}[1] no equivalente a ésta, para posteriormente mostrar algunas proposiciones que se verifican en una métrica y en la otra no.

[1] $$d_{je}(x,y) = \begin{cases} \left|\dfrac{x-y}{xy}\right| & \text{si} \quad y \neq 0 \quad y \quad x \neq 0 \quad (1) \\ \left|\dfrac{1}{x}\right| & \text{si} \quad y = 0 \quad y \quad x \neq 0 \quad (2) \\ \left|\dfrac{1}{y}\right| & \text{si} \quad y \neq 0 \quad y \quad x = 0 \quad (3) \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \quad y \quad x = 0 \quad (4) \end{cases}$$

Por tal razón, en la primera parte se presentan algunas definiciones, propiedades y teoremas relacionados con la convergencia de sucesiones, que fueron tomados de los libros de texto referenciados en la bibliografía y que sirven de base para el desarrollo del trabajo.
Luego, se presenta la métrica escogida y la demostración de que el espacio $I\!R$ con la métrica d_{je} es un espacio métrico. En seguida, se presentan los entornos generados con esta nueva métrica en dicho espacio métrico.

Una vez determinados los entornos, se realiza el estudio del comportamiento de algunas sucesiones y se plantean algunas conjeturas, basadas en las observaciones de las posibles relaciones que hay entre las sucesiones analizadas y el caso usual.

Por último, para cada una de las relaciones observadas, se plantean y demuestran algunos teoremas y se presentan las conclusiones obtenidas con los estudios realizados.

3. Fuentes

Las fuentes utilizadas fueron:
APOSTOL, T. (1976). *Análisis Matemático.* Reverté,S.A, segunda edición.
CABELLO, J. (2010-2011). *Tesis de grado en Ingeniería Civil, Obras Públicas y Transportes.* Universidad de Granada.
RUBIANO, G. (1990). *Temas de topología.* Universidad Nacional de Colombia: Editorial UN.
RUBIANO, G. (2010). *Topología general [Un primer curso].* Universidad Nacional de Colombia – sede Bogotá: Editorial UN.
RUDIN, W. (1977) *Principios de análisis Matemático.* Editorial Mc Graw-Hill.
SIN AUTOR (2004,2015) *Lección 8. Acotación y compacidad* Recuperado de: http://www.ugr.es/ rpaya/documentos/AnalisisI/2014-15/Compactos.pdfApostol, T.

4. Contenidos

El presente trabajo de grado se ha ordenado en una sección y cuatro capítulos de la siguiente manera:

En la primera sección, denominada preliminares, se encuentran la introducción, la justificación, y los objetivos del trabajo.

En el Capítulo 1, se retoman las definiciones, propiedades y teoremas relacionados con la convergencia de sucesiones, que se usarán en el desarrollo del trabajo, los cuales fueron tomados de los libros de texto referenciados en la bibliografía,.

En el Capítulo 2, se muestra la métrica escogida, se demuestra que es una métrica y que no es equivalente a la métrica usual. Luego se presentan los entornos obtenidos con esta nueva métrica y se muestran algunos entornos haciendo uso de una hoja de cálculo en excel.

En el Capítulo 3, se analiza la convergencia de algunas sucesiones y se proponen conjeturas, las cuales se verifican con una demostración o en caso de no cumplirse se presenta un contraejemplo.

En el capítulo 4, se presentan las conclusiones obtenidas del estudio realizado en los capítulos anteriores y finalmente la bibliografía que fue utilizada para realizar el presente trabajo.

5. Metodología

La metodología de este trabajo se basa en escoger una métrica en el espacio $\mathbb{R}$ que se llamará d_{je}, la cual no es equivalente a la métrica usual en $\mathbb{R}$, lo que conlleva a que los resultados obtenidos sean diferentes a los usuales en el espacio $\mathbb{R}$.
Luego se determinan los nuevos entornos haciendo uso de la definición de entornos y llevando los resultados de los casos particulares a la generalización y posterior comprobación, y con esto poder analizar las sucesiones con respecto a su convergencia o divergencia.

Por último, se plantean algunos teoremas con respecto a la convergencia de sucesiones, de la misma forma: estudiando sucesiones particulares y generalizando los resultados, los cuales se demuestran y se comparan con resultados conocidos de las sucesiones en el caso usual en el espacio $\mathbb{R}$.

6. Conclusiones

- La determinación de los entornos permitió estudiar la convergencia de las sucesiones tal como se había pensado.

- Se tenía previsto inicialmente estudiar la convergencia de las sucesiones por medio de sucesiones de cauchy, pero no se logró demostrar sino hasta el final que el espacio era completo, por lo cual se utilizó únicamente la definición 8 del límite de una sucesión, haciendo uso de los nuevos entornos.

- Las conjeturas formuladas se lograron plantear utilizando la actividad matemática de pasar de lo particular a lo general, es decir, primero se encontraron resultados particulares que brindaron la información necesaria para formular una conjetura, demostrarla, y posteriormente llamarla teorema.

- Se lograron demostrar 3 teoremas que facilitan el cálculo de la convergencia de algunas sucesiones en el espacio métrico $(I\!R, d_{je})$

  [a] Dada la sucesión $\{x_n\}$ en $(I\!R, d)$, tal que $x_n \neq 0$ converge a $L \neq 0$ si y sólo si la sucesión $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ en $(I\!R, d_{je})$ converge a $\frac{1}{L}$.

  [b] Dada la sucesión $\{x_n\}$ en $(I\!R, d)$, tal que $x_n \neq 0$, x_n converge a 0 si y sólo si la sucesión $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ en $(I\!R, d_{je})$ converge a 0.

  [c] Dada una sucesión estrictamente monótona x_n, con $x_n \neq 0$ para todo $N \in I\!N$, Si x_n es divergente en $(I\!R, d)$ entonces la sucesión x_n converge a cero en $(I\!R, d_{je})$.

Elaborado por	Moreno Morales, Jennifer Patricia
Revisado por	Paéz Ortegón, Jorge Edgar

Fecha de elaboración del resumen	30	07	2015

Agradecimientos

Agradezco con un amor indescriptible a aquella persona quien me ha apoyado, empujado, amado, enseñado y sobre todo acompañado y aconsejado, mi esposo y amigo, César O. Rincón Guerrero, no te imaginas cuánto agradezco haber recorrido este camino a tu lado.

A nuestro hijo Juan Esteban Rincón Moreno, quien con su sonrisa, alegría e inteligencia me impulsa a seguir adelante.

También, quiero agradecer a todas las personas integrantes y ex-integrantes de la Facultad de Ciencia y Tecnología, en especial del departamento de Matématicas, Profesor Mauricio Bautista, Profesora Claudia Salazar, Profesor Alberto Donado, a Chelita, Omaira y Paola. Al profesor Hernán Díaz quien me suministró la base del trabajo: la métrica. Y a quien sin su apoyo este trabajo no sería posible Profesor y Asesor Jorge Edgar Paéz, gracias profe por la paciencia y por la ayuda brindada.

No puedo terminar sin agradecer a mi familia, a mi Mamá Patricia Morales Ávila por darme la vida y apoyar cada paso que doy, a mi padre Jairo Nel Moreno Ladino por ser ejemplo constante de distinción, a mis hermanos por estar siempre acompañandome y a mis sobrinos Ian y Sofía cuyo amor me ha empujado a ser un excelente ejemplo a seguir.

Estoy agradecida también al ejemplo de mi difunta tía Martha Lucía Morales Ávila, quien por ejercer con amor constante la enseñanza, me transmitió con una fuerza enorme, pero sin quererlo, el amor por enseñar.

Índice general

Preliminares

Introducción

Este documento se desarrolla con carácter de monografía, requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. Aquí se presentan las consideraciones, los análisis y los resultados del trabajo de grado titulado "Comparación de resultados obtenidos con una métrica no equivalente a la usual, en la convergencia de algunas sucesiones.".

Este trabajo de grado inicialmente se titulaba "Comparación de resultados obtenidos con una métrica no equivalente a la usual, en la convergencia de algunas sucesiones y la continuidad de algunas funciones", pero debido a que el tiempo que se programó para desarrollarlo, no fue suficiente, fue necesario omitir el estudio de la continuidad de funciones, así que se presenta únicamente el estudio relacionado con la convergencia de algunas sucesiones.

El trabajo consiste en la búsqueda y selección de una métrica en el espacio $\mathbb{R}$, la cual se nombra d_{je} y no es equivalente a la métrica usual en $\mathbb{R}$; con la cual se analiza la convergencia de algunas sucesiones, para comparar los resultados obtenidos en la métrica usual en $\mathbb{R}$, con los obtenidos en esta nueva métrica, y posteriormente mostrar las proposiciones que se verifican en una métrica y en la otra no.

Justificación

La necesidad de encontrar herramientas que permitan enseñar y/o estudiar conceptos básicos del cálculo como la convergencia de sucesiones, se evidencia en cursos de matemáticas avanzadas. Este documento puede ser utilizado como una herramienta de consulta y/o guía para entender dichos conceptos por medio de los resultados obtenidos con la nueva métrica.

Además, el trabajo se realiza con una métrica no equivalente a la métrica usual, lo cual permite encontrar resultados diferentes en cuanto a la convergencia y así afianzar los aprendizajes, ya que se tienen representaciones diferentes para estos conceptos.

Por otro lado, se pretende desarrollar la actividad matemática sujeta a un proceso creativo y propositivo, mediante la formulación y demostración de conjeturas, las cuales constituyen las características principales del trabajo en matemáticas, que son fundamentales en la formación de un licenciado en matemáticas.

Objetivos

General

- Comparar algunos resultados conocidos en la convergencia de sucesiones del espacio $\mathbb{R}$ con la métrica usual, con los obtenidos en el espacio $\mathbb{R}$ con una métrica no equivalente a la métrica usual.

Específicos

1. Determinar la forma general de los entornos en el nuevo espacio métrico.
2. Estudiar las diferentes formas en que se puede determinar la convergencia de una sucesión en el nuevo espacio métrico.
3. Conjeturar y demostrar proposiciones que se cumplen en el nuevo espacio métrico.

Capítulo 1

Marco Teórico

A continuación, se presentan las definiciones, las propiedades y los teoremas que se usarán a lo largo del trabajo.

1.1. Definiciones

Definición 1. Espacio métrico [3]

Un conjunto X está dotado de una distancia o métrica **m**, si **m** es una función definida sobre $X \times X$ que toma valores en los números reales positivos y satisface : Para $x, y, z \in X$,

1. $m(x, y) \leq m(x, z) + m(z, y)$.
2. $m(x, y) = m(y, x)$.
3. $m(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$

Definición 2. Entorno abierto [3]

Dado $y \in (X, m)$ y un número real $\varepsilon > 0$, definimos el entorno abierto con centro en y y radio ε, (la cual notamos $B_\varepsilon(y)$), como

$$B_\varepsilon(y) := \{x \in I\!R : m(x, y) < \varepsilon\}$$

Definición 3. Valor absoluto [1]

Si x es un número real el valor absoluto de x designado por $|x|$, se define como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Definición 4. Métricas equivalentes [3]

Sean d_1 y d_2 dos métricas en X para las cuales si existen constantes $\alpha > 0, \beta > 0$ tales que

$$\alpha d_1(x, y) \leq \alpha d_2(x, y) \text{ y } d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$$

para todos los $x, y \in X$. Entonces las métricas d_1 y d_2 son equivalentes en X.

Definición 5. Sucesión acotada [6]

Si la sucesión $x_n \in I\!R$ para todo $n \in I\!N$, se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión acotada cuando el conjunto $\{x_n : n \in I\!N\}$ está acotado.

Definición 6. Sucesión acotada superiormente [2]

Se dice que una sucesión de números reales x_n, está acotada superiormente, si existe un número real M tal que $x_n \leq M$, para todo $n \in I\!N$.

Definición 7. Sucesión acotada inferiormente [2]

Se dice que una sucesión de números reales x_n, está acotada inferiormente, si existe un número real M tal que $x_n \geq M$, para todo $n \in I\!N$.

Definición 8. Límite de una sucesión [1]

Si la sucesión x_n tiende a L significa que para todo número $\varepsilon > 0$, existe $N \in I\!N$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \in B_\varepsilon(L)$

Definición 9. Sucesión monótona creciente [5]

Si una sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente, $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in I\!N$.

Definición 10. Sucesión monótona decreciente [5]

Si una sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente, $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in I\!N$.

Definición 11. Conjunto acotado [6]

Un conjunto A de un espacio métrico E, está acotado si y solo si está contenido en una bola. De hecho, si A está acotado, para cada $z \in E$ se puede encontrar $r \in I\!R^+$ tal que $A \subset B_r(z)$.

Definición 12. Espacio compacto [1]

Un espacio métrico (X, d) es compacto si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito.

Definición 13. Sucesión divergente [4]

Dado el espacio (X, d) se tiene que una sucesión $\{x_n\}$ es divergente en (X, d) si para todo $r > 0$ y para $z \in X$, existe por lo menos un $x_n \notin B_r(z)$.

1.2. Teoremas

Teorema 1. Valor absoluto[1]

Sean $a, x \in \mathbb{R}$. Si $a \geq 0$, entonces la desigualdad $|x| \leq a$ se cumple si y sólo si,

$$-a \leq x \leq a$$

Teorema 2. Valor absoluto[1]

Sean $a, x \in \mathbb{R}$. Si $|x| > a$ entonces,

$$x < -a \text{ o } x > a$$

Teorema 3. Desigualdad triangular[1]

Para números reales arbitrarios a y b se verifica

$$|a| + |b| \geq |a + b|,$$

Teorema 4. Desigualdad triangular[1]

Para números reales arbitrarios a y b se verifica

$$|a + b| \geq |a| - |b|$$

Capítulo 2

Entornos

Este capítulo se divide en 5 secciones, como sigue:

1. La selección de una métrica no equivalente a la métrica usual.

2. La demostración de que la métrica escogida, es en efecto una métrica.

3. La demostración de que dicha métrica no es equivalente a la métrica usual, ya que si fuera así, los resultados serían iguales que en $\mathbb{R}$.

4. La obtención de los entornos calculados con la nueva métrica, mediante la definición 1.

5. La forma general de los nuevos entornos, y un caso particular de cada uno con su respectiva representación gráfica.

2.1. Selección de una métrica no equivalente a la métrica usual

La métrica seleccionada fue proporcionada por el profesor Hernan Díaz, para el espacio académico de Análisis Matemático, y fue escogida debido a que es una métrica no equivalente a la métrica usual en $\mathbb{R}$, lo cual permite que los resultados sean diferentes en cuanto a la convergencia (esta demostración se presenta más adelante).

La métrica seleccionada en $I\!R$ es la siguiente:

$$d_{je}(x,y) = \begin{cases} \left|\dfrac{x-y}{xy}\right| & \text{si} \quad y \neq 0 \quad y \quad x \neq 0 \quad (1) \\ \left|\dfrac{1}{x}\right| & \text{si} \quad y = 0 \quad y \quad x \neq 0 \quad (2) \\ \left|\dfrac{1}{y}\right| & \text{si} \quad y \neq 0 \quad y \quad x = 0 \quad (3) \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \quad y \quad x = 0 \quad (4) \end{cases}$$

Todos los análisis que se realizan a continuación son los aportes de la autora.

2.2. Espacio métrico

A continuación, se presentan las demostraciones que permiten afirmar que d_{je} es una métrica y por tanto que el espacio $I\!R$ con la métrica d_{je} es un espacio métrico.

Proposición 2.2.1.

El espacio $I\!R$ con la métrica d_{je} es un espacio métrico.
Nota 1: Este espacio métrico lo notaremos $(I\!R, d_{je})$.

Demostración

Para demostrar que $(I\!R, d_{je})$ es un espacio métrico, se prueba que d_{je} define una métrica haciendo uso de la definición 1 como sigue:

Para $x, y, z \in I\!R$, d_{je} satisface :

1. $d_{je}(x,y) \leq d_{je}(x,z) + d_{je}(z,y)$.
2. $d_{je}(x,y) = d_{je}(y,x)$.
3. $d_{je}(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$

Proposición 2.2.1.1

Sean $x, y, z \in I\!R$ entonces $d_{je}(x,z) + d_{je}(z,y) \geq d_{je}(x,y)$.

Demostración

Para demostrar la proposición 2.2.1.1 se deben considerar los siguiente casos:

a) Si $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, Sean $a, b \in I\!R$ tal que

$$a = x - \frac{xy}{z} \text{ y } b = \frac{xy}{z} - y,$$

Por el Teorema 3 de la desigualdad triangular, se tiene:

$$|a| + |b| \geq |a + b|,$$

luego, sustituyendo los valores de a y b,

$$\left|x - \frac{xy}{z}\right| + \left|\frac{xy}{z} - y\right| \geq \left|\left(x - \frac{xy}{z}\right) + \left(\frac{xy}{z} - y\right)\right|$$

Luego,

$$\left|x - \frac{xy}{z}\right| + \left|\frac{xy}{z} - y\right| \geq |x - y|$$

Factorizando $|x|$ y $|y|$,

$$|x|\left|\frac{z - y}{z}\right| + |y|\left|\frac{x - z}{z}\right| \geq |x - y|$$

Dividendo por $|xy|$ en ambos lados de la desigualdad, se tiene,

$$\left|\frac{z - y}{zy}\right| + \left|\frac{x - z}{zx}\right| \geq \left|\frac{x - y}{xy}\right|$$

Luego

$$\left|\frac{x - z}{zx}\right| + \left|\frac{z - y}{zy}\right| \geq \left|\frac{x - y}{xy}\right|$$

Por lo tanto,

$$d_{je}(x, z) + d_{je}(z, y) \geq d_{je}(x, y) \tag{2.1}$$

b) Si $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $z = 0$,

Sean $a, b \in I\!R$ tal que

$$a = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \text{ y } b = \frac{1}{y},$$

Por el Teorema 4 de la desigualdad triangular, se tiene:

$$|a + b| \geq |a| - |b|,$$

luego, sustituyendo los valores de a y b,

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y}\right| \geq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| - \left|\frac{1}{y}\right|$$

Luego,

$$\left|\frac{1}{x}\right| \geq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| - \left|\frac{1}{y}\right|$$

Así,

$$\left|\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{1}{y}\right| \geq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

Luego, por los casos (1), (2) y (3) de la métrica d_{je}, se tiene

$$d_{je}(x,0) + d_{je}(0,y) \geq d_{je}(x,y)$$

Así, como $z = 0$,

$$d_{je}(x,z) + d_{je}(z,y) \geq d_{je}(x,y)$$

c) Si $x \neq 0$, $y = 0$, $z \neq 0$.

Sean $a, b \in I\!R$ tal que

$$a = \frac{1}{x} \text{ y } b = -\frac{1}{z}$$

entonces, sustituyendo el valor de a y b en el teorema 4,

$$\left|\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{z}\right)\right| \geq \left|\frac{1}{x}\right| - \left|\frac{1}{z}\right|$$

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| \geq \left|\frac{1}{x}\right| - \left|\frac{1}{z}\right|$$

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| + \left|\frac{1}{z}\right| \geq \left|\frac{1}{x}\right|$$

Utilizando el caso (2) de la definición de la métrica, se tiene,

$$d_{je}(x,z) + d_{je}(z,0) \geq d_{je}(x,0)$$

$$d_{je}(x,z) + d_{je}(z,y) \geq d_{je}(x,y)$$

d) Si $x \neq 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Como,

$$\left|\frac{1}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right| + 0$$

Se tiene por la definición de la métrica d_{je}

$$d_{je}(x,0) \leq d_{je}(x,0) + d_{je}(0,0)$$

Como $y = 0$ y $z = 0$

$$d_{je}(x,y) \leq d_{je}(x,z) + d_{je}(z,y)$$

e) Si $x = 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, Se demuestra análogamente al item c).

f) Si $x = 0$, $y \neq 0$, $z = 0$.
Se demuestra análogamente al item d), partiendo de

$$\left|\frac{1}{y}\right| \leq \left|\frac{1}{y}\right| + 0$$

g) Si $x = y = z = 0$. Esta demostración es trivial ya que por definición $d_{je}(0,0) = 0$

h) Si $x = y = 0$, $z \neq 0$. Como,

$$0 \leq \left|\frac{1}{z}\right| + \left|\frac{1}{z}\right|$$

Se tiene por la definición de la métrica d_{je}

$$d_{je}(0,0) \leq d_{je}(z,0) + d_{je}(0,z)$$

Como, $x = y = 0$, se tiene,

$$d_{je}(x,y) \leq d_{je}(x,z) + d_{je}(z,y)$$

Por lo tanto, por los items de la a) a la h) queda demostrado que para $x, y, z \in I\!R$,

$$d_{je}(x,y) \leq d_{je}(x,z) + d_{je}(z,y)$$

Proposición 2.2.1.2

Sean $x, y \in I\!R$, entonces $d_{je}(x,y) = d_{je}(y,x)$.

Demostración

Para la demostración se consideran los siguientes casos:

a) $x \neq 0$, $y \neq 0$

$$d_{je}(x,y) = \left|\frac{y-x}{xy}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|-\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right| = \left|-\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\right| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| = d_{je}(y,x)$$

b) $x \neq 0$, $y = 0$

$$d_{je}(x,0) = \left|\frac{1}{x}\right| = d_{je}(0,x)$$

c) $x = 0$, $y \neq 0$

$$d_{je}(0,y) = \left|\frac{1}{y}\right| = d_{je}(y,0)$$

d) $x = y = 0$ Esta demostración es trivial ya que por definición $d_{je}(0,0) = 0$.

Por lo tanto, por los items de la a) a la d) queda demostrado que para $x, y \in I\!R$

$$d_{je}(x,y) = d_{je}(y,x)$$

Proposición 2.2.1.3

Sean $x, y \in I\!R$, $d_{je}(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$

Demostración

La demostración de la proposición 1.3 se divide en dos casos, como sigue:

Caso 1. Si $x = y$ entonces $d_{je}(x,y) = 0$.

Para realizar esta demostración se consideran los siguientes casos:

Caso 1.1 $x \neq 0, y \neq 0$

Por la definición de d_{je}, se tiene

$$d_{je}(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

Como $x = y$,

$$d_{je}(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right|$$

$$d_{je}(x,y) = 0$$

Por lo tanto, si $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x = y$, se tiene que $d_{je}(x,y) = 0$

Caso 1.2 $x = 0, y = 0$

Como $x = 0, y = 0$, por definición de d_{je},

$$d_{je}(x,y) = 0$$

Por lo tanto, si $x = 0 = y$, se tiene que $d_{je}(x,y) = 0$

Así, queda demostrado que si $x = y$ entonces $d_{je}(x,y) = 0$.

Caso 2. Si $d_{je}(x,y) = 0$ entonces $x = y$,

Dado $d_{je}(x,y) = 0$ se tiene por definición de d_{je} que $x = 0, y = 0$ y por lo tanto $x = y$.

Pero puede suceder $x \neq 0, y \neq 0$ y por definición de d_{je},

$$d_{je}(x,y) = \left|\frac{y - x}{xy}\right|$$

luego, por transitividad,

$$\left|\frac{y-x}{xy}\right| = 0$$

Así,

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = 0$$

y para que esto se cumpla, debe suceder que $x = y$.

Con esto, queda demostrado que si $d_{je}(x, y) = 0$ entonces $x = y$.

Por los casos 1 y 2, se demuestra que $d_{je}(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

Así, por las proposiciones 1.1, 1.2 y 1.3, queda demostrado que d_{je} es una métrica.

y por último, la proposición 1 queda demostrada, así que $(I\!R, d_{je})$ es un espacio métrico.

2.3. La métrica d_{je} en el espacio $I\!R$ no es equivalente a la métrica usual en el espacio $I\!R$

A continuación, se presenta la demostración de que la métrica d_{je} en el espacio $I\!R$ no es equivalente a la métrica usual en el espacio $I\!R$, haciendo uso de la definición 4 de métricas equivalentes.

Proposición 2.3.1.

Sean d y d_{je} dos métricas en $I\!R$ entonces d y d_{je} no son equivalentes.

Demostración

Para realizar esta demostración se hace uso de la definición 4 de métricas equivalentes, como sigue:

Sean d y d_{je} dos métricas en $I\!R$ para las cuales si existen constantes $\alpha > 0, \beta > 0$ tales que

$$d(x, y) \leq \alpha d_{je}(x, y) \text{ y } d_{je}(x, y) \leq \beta d(x, y)$$

para todos los $x, y \in I\!R$ entonces las métricas d_1 y d_2 son equivalentes en $I\!R$.

Es decir, que basta encontrar $x, y \in I\!R$ tal que no se cumpla la condición, para demostrar lo que se quiere.

Entonces, se parte del supuesto que d y d_{je} son métricas equivalentes y se mira el caso en que $x \neq 0, y \neq 0$.

Como d y d_{je} son métricas equivalentes, entonces por la definición 4 de métricas equivalente existen $\alpha > 0, \beta > 0$ tales que

$$d(x,y) \leq \alpha d_{je}(x,y) \quad \text{y} \quad d_{je}(x,y) \leq \beta d(x,y)$$

$$|x-y| \leq \alpha \left|\frac{x-y}{xy}\right| \quad \text{y} \quad \left|\frac{x-y}{xy}\right| \leq \beta |x-y|$$

$$|xy| \leq \alpha \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{|xy|} \leq \beta$$

Sumando las desigualdades, se obtiene:

$$|xy| + \frac{1}{|xy|} \leq \alpha + \beta$$

$$\frac{|xy|^2 + 1}{|xy|} \leq \alpha + \beta$$

$$|xy|^2 + 1 \leq (\alpha + \beta)|xy|$$

$$|xy|^2 - (\alpha + \beta)|xy| + 1 \leq 0$$

Factorizando la cuadrática par a $|xy|$

$$(2|xy| + (\alpha + \beta) + \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4})(2|xy| + (\alpha + \beta) - \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4}) \leq 0$$

Como el primer factor no puede ser menor o igual a 0,

$$2|xy| + (\alpha + \beta) \leq \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4}$$

Elevando al cuadrado en ambos miembros de la desigualdad, se obtiene:

$$4|xy|^2 + 4|xy|(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)^2 \leq (\alpha + \beta)^2 - 4$$

$$4(|xy|^2 + |xy|(\alpha + \beta)) \leq -4 \tag{2.2}$$

La ecuación (2.2) presenta un resultado imposible, es decir, que para $x \neq 0, y \neq 0$ no existen $\alpha > 0, \beta > 0$ tal que se cumpla la condición, por lo tanto, d y d_{je} no son equivalentes.

2.4. Entornos

En esta sección, se ejemplifican entornos particulares con la intención de plantear conjeturas que lleven a la generalización de estos y a entender su comportamiento, por lo cual los entornos aquí obtenidos se calculan mediante una hoja de cálculo en excel (Anexo 1) y las gráficas se realizan en el programa Wolfram Alpha Online.

Esto se realiza con la intención de estudiar la convergencia de las sucesiones en el siguiente capítulo por medio de la definición 13 de sucesiones convergentes.

2.4.1. Ejemplos de entornos en la métrica d_{je}

Al calcular los diferentes entornos se toma a r como el radio, y a y como el centro. Teniendo en cuenta que r puede ser muy cercano a cero($r \to 0$) o puede tender a infinito positivo ($r \to \infty$), y que, y puede variar, dependiendo si se acerca a cero por la derecha (0^+) o por la izquierda (0^-), o tender a infinito positivo ($y \to \infty$) o tender a infinito negativo ($y \to -\infty$).

Se hace esta ejemplificación, con la intención de entender el comportamiento de la métrica y poder abstraer la forma general de los entornos, en la siguiente sección, se prueban las conjeturas aquí realizadas.

A continuación se analizan los diferentes casos que se pueden obtener en donde para cada caso, la imagen de la izquierda se muestra los valores de r y de y, y en la imagen de la derecha, se observan los x que cumplen la condición, es decir el entorno.

1. $r \to 0$, $y \to 0^+$,

r	y
0,4	0,3
0,1	0,2
0,3	0,1
0,2	0,4

0,267857143	< x <	0,340909091
0,196078431	< x <	0,204081633
0,097087379	< x <	0,103092784
0,37037037	< x <	0,434782609

Se puede observar que cuando $r \to 0$, $y \to 0^+$, el entorno queda de la forma

$$a < x < b, \text{ para algún } a, b \in I\!R.$$

2. $r \to 0$, $y \to \infty$,

r	y
0,4	100
0,1	150
0,3	200
0,2	250

x < -2,564102564	o	x > 2,43902439
x < -10,71428571	o	x > 9,375
x < -3,389830508	o	x > 3,278688525
x < -5,102040816	o	x > 4,901960784

Se puede observar que cuando $r \to 0$, $y \to \infty$, el entorno queda de la forma

$$x < a \text{ o } x > b, \text{ para algún } a, b \in I\!R.$$

3. $r \to 0$, $y \to 0^-$,

r	y
0,4	-0,3
0,1	-0,2
0,3	-0,1
0,2	-0,4

-0,34090909	< x <	-0,26785714
-0,20408163	< x <	-0,19607843
-0,10309278	< x <	-0,09708738
-0,43478261	< x <	-0,37037037

Se puede observar que cuando $r \to 0$, $y \to 0^-$, el entorno queda de la forma

$$a < x < b, \text{ para algún } a, b \in I\!R.$$

4. $r \to 0$, $y \to -\infty$,

r	y
0,4	-100
0,1	-150
0,3	-200
0,2	-250

x < -2,43902439	o	x > 2,564102564
x < -9,375	o	x > 10,71428571
x < -3,278688525	o	x > 3,389830508
x < -4,901960784	o	x > 5,102040816

Se puede observar que cuando $r \to 0$, $y \to -\infty$, el entorno queda de la forma

$$x < a \text{ o } x > b, \text{ para algún } a, b \in I\!R.$$

5. $r \to \infty$, $y \to 0^+$,

r	y
100	0,3
150	0,2
200	0,1
250	0,4

x < -0,010344828	o	x > 0,009677419
x < -0,006896552	o	x > 0,006451613
x < -0,005263158	o	x > 0,004761905
x < -0,004040404	o	x > 0,003960396

Se puede observar que cuando $r \to \infty$, $y \to 0^+$, el entorno queda de la forma

$$x < a \text{ o } x > b, \text{ para algún } a, b \in I\!R.$$

6. $r \to \infty$, $y \to \infty$,

r	y
100	100
150	150
200	200
250	250

x < -0,010001	o	x > 0,009999
x < -0,006666963	o	x > 0,00666637
x < -0,005000125	o	x > 0,004999875
x < -0,004000064	o	x > 0,003999936

Se puede observar que cuando $r \to \infty$, $y \to \infty$, el entorno queda de la forma

$$x < a \text{ o } x > b, \text{ para algún } a, b \in I\!R.$$

7. $r \to \infty$, $y \to 0^-$,

r	y
100	-0,3
150	-0,2
200	-0,1
250	-0,4

x < -0,009677419	o	x > 0,010344828
x < -0,006451613	o	x > 0,006896552
x < -0,004761905	o	x > 0,005263158
x < -0,003960396	o	x > 0,004040404

Se puede observar que cuando $r \to \infty$, $y \to 0^-$, el entorno queda de la forma

$$x < a \text{ o } x > b, \text{ para algún } a, b \in I\!R.$$

8. $r \to \infty$, $y \to -\infty$,

r	y
100	-100
150	-150
200	-200
250	-250

x < -0,009999	o	x > 0,010001
x < -0,00666637	o	x > 0,006666963
x < -0,004999875	o	x > 0,005000125
x < -0,003999936	o	x > 0,004000064

Se puede observar que cuando $r \to \infty$, $y \to -\infty$, el entorno queda de la forma

$$x < a \text{ o } x > b, \text{ para algún } a, b \in I\!R.$$

9. $r \to 0$, $y = 0$,

r	y
0,4	0
0,1	0
0,3	0
0,2	0

x < -2,5	o	x > 2,5
x < -10	o	x > 10
x < -3,333333333	o	x > 3,333333333
x < -5	o	x > 5

Se puede observar que cuando $r \to 0$, $y = 0$, el entorno queda de la forma

$$x < -a \text{ o } x > a, \text{ para algún } a > 0, a \in \mathbb{R}.$$

10. $r \to \infty$, $y = 0$.

r	y
100	0
150	0
200	0
250	0

x < -0,01	o	x > 0,01
x < -0,006666667	o	x > 0,006666667
x < -0,005	o	x > 0,005
x < -0,004	o	x > 0,004

Se puede observar que cuando $r \to \infty$, $y = 0$, el entorno queda de la forma

$$x < -a \text{ o } x > a, \text{ para algún } a > 0, a \in \mathbb{R}.$$

De todo lo anterior se puede conjeturar que se tendrán al menos 3 formas para los entornos,

1. $a < x < b$, para algún $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $x < a$ o $x > b$, para algún $a, b \in \mathbb{R}$.
3. $x < -a$ o $x > a$, para algún $a > 0, a \in \mathbb{R}$.

Esto lo comprobaremos en la siguiente sección.

2.5. Forma general de los entornos en $(\mathbb{R}, d_{je})$

Con el fin de abordar la convergencia de las sucesiones por la definición 6 del límite de una sucesión, se hace necesario determinar la forma general de los nuevos entornos, los cuales notaremos con $\bar{B}_r(y)$, que es el entorno de radio r y centro en y, tal que $x, y \in \mathbb{R}$ con la métrica d_{je} en $\mathbb{R}$, para lo cual se presentan 3 casos dados por las restricciones de la métrica.

Caso 1

Supongamos que $y \neq 0$.

Un entorno en $(I\!R, d_{je})$, es por la definición 2,

$$\bar{B}_r(y) := \{x \in I\!R : d_{je}(x, y) < r\}$$

Como $y \neq 0$, haciendo uso de la definición de d_{je}, se tiene que es necesario revisar cuando $x \neq 0$ y cuando $y \neq 0$, así,

Caso 1.1

Se mira el caso en que $y \neq 0$, $x \neq 0$

Por la definición de d_{je},

$$\bar{B}_r(y) = \{x \in I\!R : \left|\frac{x-y}{xy}\right| < r\}$$

$$\left|\frac{x-y}{xy}\right| < r$$

$$\sqrt{\frac{x-y}{xy}^2} < r$$

$$\left(\frac{x-y}{xy}\right)^2 < r^2$$

luego,

$$(x-y)^2 < r^2x^2y^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 < r^2x^2y^2$$

$$x^2 - r^2x^2y^2 - 2xy + y^2 < 0$$

$$(1 - r^2y^2)x^2 - 2xy + y^2 < 0. \tag{2.3}$$

Ahora, se analiza la tricotomía para $1 - r^2y^2$,

Caso 1.1.1

Se supone $1 - r^2y^2 = 0$,

sustituyendo $1 - r^2y^2$ en (2.3), se obtiene,
$-2xy + y^2 < 0$ entonces,

$$y^2 < 2xy \tag{2.4}$$

y como $1 - r^2y^2 = 0$, entonces $ry = \pm 1$.

Luego, se tienen los siguientes casos para (2.4),

$$y < 0 \text{ y } y > 0$$

,

Caso 1.1.1.1

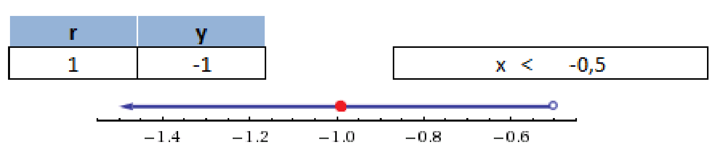
Si $y < 0$ entonces, despejando en (2.4), se obtiene:

$$x < \frac{y}{2}$$

por lo tanto como $y < 0$ entonces $ry = -1$, para el cual,

$$\bar{B}_r(y) = \left(-\infty, \frac{y}{2}\right) \tag{2.5}$$

Ejemplo entorno 1.



Caso 1.1.1.2

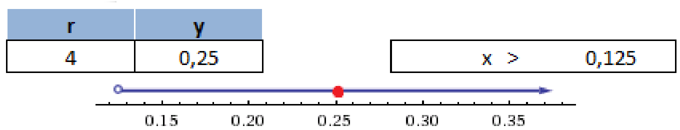
Si $y > 0$ entonces, despejando en (2.4), se obtiene:

$$x > \frac{y}{2}$$

por lo tanto como $y > 0$ entonces $ry = 1$, para el cual,

$$\bar{B}_r(y) = \left(\frac{y}{2}, \infty\right) \tag{2.6}$$

Ejemplo entorno 2.



Caso 1.1.2

Si $1 - r^2y^2 > 0$

como $1 - r^2y^2 > 0$, la desigualdad (2.3), se mantiene, es decir:

$$(1 - r^2y^2)x^2 - 2xy + y^2 < 0$$

$$x^2 - \frac{2y}{1 - r^2y^2}x + \frac{y^2}{1 - r^2y^2} < 0$$

completando cuadrados,

$$x^2 - \frac{2y}{1 - r^2y^2}x + \left(\frac{y}{1 - r^2y^2}\right)^2 - \left(\frac{y}{1 - r^2y^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - r^2y^2} < 0$$

$$\left(x - \frac{y}{1 - r^2y^2}\right)^2 + \frac{y^2(1 - r^2y^2 - 1)}{(1 - r^2y^2)^2} < 0$$

$$\left(x - \frac{y}{1 - r^2y^2}\right)^2 - \frac{y^4r^2}{(1 - r^2y^2)^2} < 0$$

$$\left(x - \frac{y}{1 - r^2y^2}\right)^2 < \left(\frac{y^2r}{1 - r^2y^2}\right)^2$$

sacando raíz en ambos lados de la desigualdad,

$$\left|x - \frac{y}{1 - r^2y^2}\right| < \left|\frac{y^2r}{1 - r^2y^2}\right|$$

Como $\dfrac{y^2r}{1 - r^2y^2} > 0$, se tiene,

$$\left|x - \frac{y}{1 - r^2y^2}\right| < \frac{y^2r}{1 - r^2y^2}$$

ahora, se obtiene:

$$-\frac{y^2r}{1 - r^2y^2} < x - \frac{y}{1 - r^2y^2} < \frac{y^2r}{1 - r^2y^2}$$

$$\frac{y}{1-r^2y^2} - \frac{y^2r}{1-r^2y^2} < x < \frac{y^2r}{1-r^2y^2} + \frac{y}{1-r^2y^2}$$
$$\frac{y(1-yr)}{(1-ry)(1+ry)} < x < \frac{y(yr+1)}{(1-ry)(1+ry)}$$
$$\frac{y}{1+ry} < x < \frac{y}{1-ry}$$

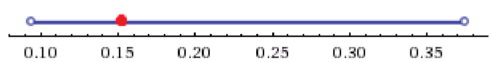
Por lo tanto, como $1 -^2 y^2 > 0$ entonces $-1 < ry < 0$ o $0 < ry < 1$, para lo cual,

$$\bar{B}_r(y) := \left(\frac{y}{1+ry}, \frac{y}{1-ry}\right) \tag{2.7}$$

Ejemplo entorno 3.

r	y
4	0,15

0,09375 < x < 0,375



Caso 1.1.3

Si $1 - r^2y^2 < 0$

como $1 - r^2y^2 < 0$, la desigualdad en (2.3), se modifica, así:

$$x^2 - \frac{2y}{1-r^2y^2}x + \frac{y^2}{1-r^2y^2} > 0$$

completando cuadrados,

$$x^2 - \frac{2y}{1-r^2y^2}x + \left(\frac{y}{1-r^2y^2}\right)^2 - \left(\frac{y}{1-r^2y^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-r^2y^2} > 0$$
$$\left(x - \frac{y}{1-r^2y^2}\right)^2 + \frac{y^2(1-r^2y^2) - y^2}{(1-r^2y^2)^2} > 0$$
$$\left(x - \frac{y}{1-r^2y^2}\right)^2 + \frac{y^4r^2}{(1-r^2y^2)^2} > 0$$
$$\left(x - \frac{y}{1-r^2y^2}\right)^2 > \left(\frac{y^2r}{1-r^2y^2}\right)^2$$

sacando raíz en ambos lados de la desigualdad,

$$\left|x - \frac{y}{1-r^2y^2}\right| > \left|\frac{y^2r}{1-r^2y^2}\right|$$

$$\left| x - \frac{y}{1 - r^2y^2} \right| > - \left(\frac{y^2 r}{1 - r^2 y^2} \right)$$

haciendo uso del teorema 2 del valor absoluto se obtiene:

$$\left(x - \frac{y}{1 - r^2y^2} \right) < \frac{y^2 r}{1 - r^2 y^2} \quad \text{o} \quad x - \frac{y}{1 - r^2y^2} > - \frac{y^2 r}{1 - r^2 y^2}$$

$$x < \frac{y + y^2 r}{1 - r^2 y^2} \qquad \text{o} \qquad x > \frac{y - y^2 r}{1 - r^2 y^2}$$

$$x < \frac{y(1 + ry)}{(1 - ry)(1 + ry)} \qquad \text{o} \qquad x > \frac{y(1 - ry)}{(1 - ry)(1 + ry)}$$

$$x < \frac{y}{1 - ry} \qquad \text{o} \qquad x > \frac{y}{1 + ry}$$

Por lo tanto,

$$x \in \left(-\infty, \frac{y}{1 - ry} \right) \cup \left(\frac{y}{1 + ry}, \infty \right) \tag{2.8}$$

cuando $1 - r^2y^2 < 0$ es decir $ry < -1$ o $ry > 1$.

Caso 1.2

Se evalúa $y \neq 0$, $x = 0$
Por la definición 3 de entorno abierto, se tiene:

$$\bar{B}_r(y) = \{x \in I\!R \text{ tal que } d_{je}(x, y) < r\}$$

luego, se hace uso de la definición de la métrica d_{je} para $y \neq 0$, $x = 0$,

$$\bar{B}_r(y) = \left\{ x \in I\!R \text{ tal que } \left| \frac{1}{y} \right| < r \right\}$$

ahora para que esto sea cierto se tiene que cumplir que

$$1 < ry, \text{ con } y > 0$$

$$-1 > ry \text{ con } y < 0.$$

así, para 1<ry o -1 >ry se tiene que

$$x \in \bar{B}_r(y),$$

luego,

$$0 \in \bar{B}_r(y),$$

En resumen,

$$x \in \bar{B}_r(y), \tag{2.9}$$

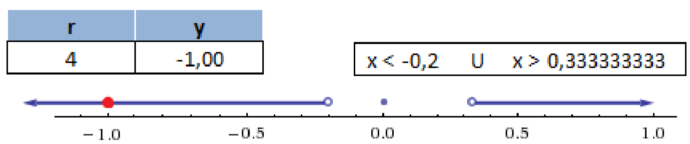
cuando $1 - r^2y^2 < 0$ es decir $ry < -1$ o $ry > 1$.

Por lo tanto, por (2.8) y (2.9), se determina el entorno 4

$$\bar{B}_r(y) := \left(-\infty, \frac{y}{1-ry}\right) \cup \left(\frac{y}{1+ry}, \infty\right) \cup \{0\} \tag{2.10}$$

cuando $1 - r^2y^2 < 0$ es decir $ry < -1$ o $ry > 1$.

Ejemplo entorno 4.



Caso 2

Si $y = 0$
Usando la definición (2), se obtiene:

$$\bar{B}_r(y) := \{x \in I\!R : d_{je}(x, y) < r\}$$

como $y = 0$,

$$\bar{B}_r(y) := \{x \in I\!R : \left|\frac{1}{x}\right| < r\}$$

$$\left|\frac{1}{x}\right| < r$$

$$\frac{1}{r} < |x|$$

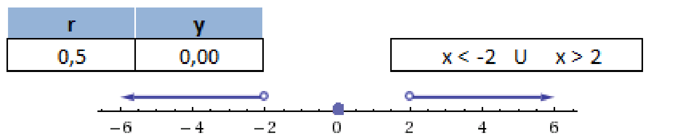
Así,

$$x < -\frac{1}{r} \text{ o } x > \frac{1}{r}$$

Por lo tanto para $y = 0$, se tiene que,

$$\bar{B}_r(y) := \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right) \cup \left(\frac{1}{r}, \infty\right) \tag{2.11}$$

Ejemplo entorno 5.



A continuación se presenta el resumen de los entornos obtenidos en esta sección:

$$
\bar{B}_r(y) = \begin{cases}
\left(-\infty, \dfrac{y}{2}\right), & \text{si} \quad ry = -1; \quad (1)\\[2ex]
\left(\dfrac{y}{2}, \infty\right), & \text{si} \quad ry = 1; \quad (2)\\[2ex]
\left(\dfrac{y}{1+ry}, \dfrac{y}{1-ry}\right), & \text{si} \quad -1 < ry < 0 \text{ o } 0 < ry < 1; \quad (3)\\[2ex]
\left(-\infty, \dfrac{y}{1-ry}\right) \cup \left(\dfrac{y}{1+ry}, \infty\right) \cup \{0\}, & \text{si} \quad ry < -1 \text{ o } ry > 1; \quad (4)\\[2ex]
\left(-\infty, -\dfrac{1}{r}\right) \cup \left(\dfrac{1}{r}, \infty\right) \cup \{0\}, & \text{si} \quad y = 0. \quad (5)
\end{cases}
$$

Capítulo 3

Convergencia de sucesiones en $(\mathbb{R}, d_{je})$

En este capítulo, se presenta un análisis de la convergencia de algunas sucesiones en el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_{je})$, divididas en dos grupos: las que convergen a $L = 0$ y las que convergen a $L \neq 0$; haciendo uso de la definición 8 del límite de una sucesión y de los entornos que se dedujeron en la sección anterior.

Por último, se formulan conjeturas de acuerdo a las observaciones realizadas de los ejercicios realizados, las cuales se verifican con una demostración.

3.1. Sucesiones que convergen a $L = 0$

Ejercicio 1.

La sucesión $x_n = n$ converge a cero en el espacio $(\mathbb{R}, d_{je})$.

Para la solución de este ejercicio se aplica la definición 8 del límite de una sucesión, así:

Proposición 3.1 Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$ entonces $n \in \bar{B}_\varepsilon(0)$.

Demostración

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$,

y como $n > N$ y $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$, se tiene por transitividad:

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

lo que quiere decir que,

$$n \in \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right).$$

Ahora, se toma ε como el radio y, $y = 0$ como el centro. Entonces se tienen las condiciones del entorno (5), así,

$$\bar{B}_\varepsilon(0) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$$

y como $n \in \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$ entonces,

$$n \in \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$$

luego,

$$n \in \bar{B}_\varepsilon(0)$$

y por lo tanto, aplicando la definición 8 del límite de una sucesión, la sucesión $x_n = n$ converge a cero en el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_{je})$.

Ejercicio 2

La sucesión $x_n = \dfrac{n}{(-1)^n}$ converge a cero en el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_{je})$.

Para la solución de este ejercicio se aplica la definición 8 del límite de una sucesión, así:

Proposición 3.2 Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$ entonces $\dfrac{n}{(-1)^n} \in \bar{B}_\varepsilon(0)$.

Demostración

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$,

y como $n > N$ y $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$, se tiene por transitividad:

$$n > \frac{1}{\varepsilon},$$

multiplicando a los dos lados de la desigualdad por -1 se obtiene,

$$-n < -\frac{1}{\varepsilon},$$

es decir que,

1. Si $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ entonces $n \in \left(\dfrac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$

2. Si $-n < -\dfrac{1}{\varepsilon}$ entonces $-n \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$

Ahora,

a) Si n es par, entonces
$$\frac{n}{(-1)^n} = n.$$

b) Si n es impar, entonces
$$\frac{n}{(-1)^n} = -n.$$

Ahora, sustituyendo $a)$ en 1 y $b)$ en 2, se tiene:

- $\dfrac{n}{(-1)^n} \in \left(\dfrac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$ si n es par.
- $\dfrac{n}{(-1)^n} \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ si n es impar.

Por lo tanto,
$$\frac{n}{(-1)^n} \in \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right) \text{ para todo } n \in I\!N.$$

Por otro lado, se toma ε como el radio y, $y = 0$ como el centro. Entonces se tienen las condiciones del entorno (5), así,
$$\bar{B}_\varepsilon(0) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$$

Es decir que, como,
$$\frac{n}{(-1)^n} \in \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right) \text{ para todo } n \in I\!N$$
y
$$\bar{B}_\varepsilon(0) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right),$$
entonces
$$\frac{n}{(-1)^n} \in \bar{B}_\varepsilon(0)$$
y por lo tanto, aplicando la definición 8 del límite de una sucesión,
la sucesión $x_n = \dfrac{n}{(-1)^n}$ converge a cero en el espacio métrico $(I\!R, d_{je})$.

Ejercicio 3.

La sucesión $x_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ converge a 0 en el espacio métrico $(I\!R, d_{je})$.

Para la solución de este ejercicio se aplica la definición 8 del límite de una sucesión, así:

Proposición 3.3 Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in I\!N$, tal que si $n \geq N$ entonces $\dfrac{n^2}{n+1} \in \bar{B}_\varepsilon(0)$.

Demostración

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in I\!N$, tal que $N > \dfrac{1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}$,

como $n > N$, y $N > \dfrac{1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}$, entonces,

$$n > \frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon},$$

luego, existe $a \in I\!R$ tal que

$$a = \frac{1-\sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

de modo que,

$$\frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon} > \frac{1-\sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

entonces por transitividad

$$n > \frac{1-\sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon},$$

por lo cual se tiene $\left(n - \dfrac{1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right) > 0$ y $\left(n - \dfrac{1-\sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right) > 0$

$$\left(n - \frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)\left(n - \frac{1-\sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right) > 0$$

es decir

$$n^2\varepsilon - n - 1 > 0$$

así

$$n^2 > \frac{n+1}{\varepsilon}$$

entonces

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{n^2}{n+1}$$

Por lo tanto
$$\frac{n^2}{n+1} \in \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$$
luego, se toma ε como el radio y, $y = 0$ como el centro. Entonces se tienen las condiciones del entorno (5), así,

$$\bar{B}_\varepsilon(0) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$$

Y como, $\dfrac{n^2}{n+1} \in \left(\dfrac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$, entonces

$$\frac{n^2}{n+1} \in \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$$

es decir,
$$\frac{n^2}{n+1} \in \bar{B}_\varepsilon(0),$$
y por lo tanto, aplicando la definición 8 del límite de una sucesión,
la sucesión $x_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ converge a cero en el espacio métrico $(I\!R, d_{je})$.

Ejercicio 4.

La sucesión $x_n = \dfrac{1}{b^n}$, con $0 < b < 1$ converge a 0 en el espacio métrico $(I\!R, d_{je})$.

Para la solución de este ejercicio se aplica la definición 8 del límite de una sucesión, así:

Proposición 3.4 Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in I\!N$, tal que si $n \geq N$ entonces $\dfrac{1}{b^n} \in \bar{B}_\varepsilon(0)$.

Demostración

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in I\!N$, tal que $N > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln b}$,

como $n > N$, y $N > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln b}$, se tiene por transitividad,
$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln b},$$
y como $0 < b < 1$, por la forma en que está definida la sucesión, entonces,

$$(\ln b)n < \ln \varepsilon,$$

y por propiedades de los logaritmos,

$$\ln(b^n) < \ln \varepsilon$$

$$b^n < \varepsilon$$

es decir,

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{b^n}$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{b^n} \in \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right).$$

Luego, se toma ε como el radio y, $y = 0$ como el centro. Entonces se tienen las condiciones del entorno (5), así,

$$\bar{B}_\varepsilon(0) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$$

y como, $\dfrac{1}{b^n} \in \left(\dfrac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$, entonces

$$\frac{1}{b^n} \in \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$$

es decir,

$$\frac{1}{b^n} \in \bar{B}_\varepsilon(0),$$

y por lo tanto, aplicando la definición 8 del límite de una sucesión,
la sucesión $x_n = \dfrac{1}{b^n}$ converge a cero en el espacio métrico $(I\!R, d_{je})$.

3.2. Sucesiones que convergen a $L \neq 0$

Ejercicio 5.

La sucesión $x_n = \dfrac{1}{n}$ no converge a 0 en el espacio métrico $(I\!R, d_{je})$.

La siguiente demostración se realiza por contradicción suponiendo que $\dfrac{1}{n}$ converge a 0 y llegando a un imposible, como se muestra:

Proposición 3.5 La sucesión $x_n = \dfrac{1}{n}$ no converge a 0 en el espacio métrico $(I\!R, d_{je})$.

Demostración

Suponiendo que $\frac{1}{n}$ converge a 0 entonces por la definición 8 se tiene que existe $N \in I\!N$ tal que si $n > N$ entonces $x_n \in \bar{B}_\varepsilon(0)$, es decir $\frac{1}{n} \in \bar{B}_\varepsilon(0)$

Por la forma entorno (2.11), se tiene que:

$$\bar{B}_\varepsilon(0) := \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right);$$

luego,

$$\frac{1}{n} \in \left(\leftarrow, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$$

y por lo tanto,

$$\frac{1}{n} \in \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$$

es decir, $\frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{n}$, lo que indica que $n < \varepsilon$ y esto es imposible.

Por lo tanto, la sucesión $\frac{1}{n}$ no converge a 0 en el espacio métrico $(I\!R, d_{je})$.

Ejercicio 6.

La sucesión $x_n = b^{-\frac{1}{n}}$, con $b > 0$ converge a 1 en el espacio métrico $(I\!R, d_{je})$.

Para la solución de este ejercicio se aplica la definición 8 del límite de una sucesión, así:

Proposición 3.6 Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in I\!N$ tal que si $n > N$ entonces $b^{-\frac{1}{n}} \in \bar{B}_\varepsilon(1)$

Demostración

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in I\!N$, tal que:

Caso 1) Si $0 < b < 1$ entonces $N > \frac{\ln|b|}{\ln|1-\varepsilon|}$

luego, como $n > N$ y $N > \frac{\ln|b|}{\ln|1-\varepsilon|}$ entonces por transitividad,

$$n > \frac{\ln|b|}{\ln|1-\varepsilon|}$$

y así,

$$\frac{1}{n} < \frac{\ln|1-\varepsilon|}{\ln b}. \tag{3.1}$$

Luego, existe $a \in I\!R$ tal que $a = \dfrac{\ln b}{\ln|1+\varepsilon|}$, de modo que,

$$\frac{\ln b}{\ln|1+\varepsilon|} > a,$$

es decir,

$$\frac{\ln b}{\ln|1-\varepsilon|} > \frac{\ln b}{\ln|1+\varepsilon|},$$

luego, como $n > \dfrac{\ln b}{\ln|1-\varepsilon|}$, entonces nuevamente por transitividad,

$$n > \frac{\ln b}{\ln|1+\varepsilon|}$$

y así

$$\frac{\ln|1+\varepsilon|}{\ln b} < \frac{1}{n}. \tag{3.2}$$

Luego por (3.1) y (3.2), se tiene,

$$\frac{\ln|1+\varepsilon|}{\ln b} < \frac{1}{n} < \frac{\ln|1-\varepsilon|}{\ln b}.$$

Ahora se multiplica por $\ln b$ y resulta,

$$\ln|1+\varepsilon| > (\ln b)\frac{1}{n} > \ln|1-\varepsilon|.$$

Ahora, se multiplica por -1 y se suma $0 = \ln 1$, luego se obtiene,

$$\ln 1 - \ln|1+\varepsilon| < -\frac{1}{n}(\ln b) < \ln 1 - \ln|1-\varepsilon|$$

y por propiedades de los logaritmos,

$$\ln\left|\frac{1}{1+\varepsilon}\right| < \ln(b^{-\frac{1}{n}}) < \ln\left|\frac{1}{1-\varepsilon}\right|$$

es decir,

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < b^{-\frac{1}{n}} < \frac{1}{1-\varepsilon}$$

por lo tanto,

$$b^{-\frac{1}{n}} \in \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right).$$

Por otro lado, si se toma ε como el radio y, $y = 1$ como el centro, entonces se tienen las condiciones del entorno (3). Así,

$$\bar{B}_\varepsilon(1) = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right)$$

es decir que, como

$$b^{-\frac{1}{n}} \in \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right).$$

y

$$\bar{B}_{\varepsilon}(1) = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right)$$

entonces,

$$b^{-\frac{1}{n}} \in \bar{B}_{\varepsilon}(1), \text{ con } 0 < b < 1$$

Caso 2) Si $b > 1$ entonces $N > \dfrac{\ln|b|}{\ln|1+\varepsilon|}$

luego, como $n > N$ y $N > \dfrac{\ln|b|}{\ln|1+\varepsilon|}$ entonces por transitividad,

$$n > \frac{\ln|b|}{\ln|1+\varepsilon|}$$

y así,

$$\frac{\ln|1+\varepsilon|}{\ln b} > \frac{1}{n}. \tag{3.3}$$

Luego, existe $a \in I\!R$ tal que $a = \dfrac{\ln b}{\ln|1-\varepsilon|}$, de modo que,

$$\frac{\ln b}{\ln|1+\varepsilon|} > a,$$

es decir,

$$\frac{\ln b}{\ln|1+\varepsilon|} > \frac{\ln b}{\ln|1-\varepsilon|},$$

luego, como $n > \dfrac{\ln b}{\ln|1+\varepsilon|}$, entonces nuevamente por transitividad,

$$n > \frac{\ln b}{\ln|1-\varepsilon|}$$

y así

$$\frac{\ln|1-\varepsilon|}{\ln b} < \frac{1}{n}. \tag{3.4}$$

Luego por (3.3) y (3.4), se tiene,

$$\frac{\ln|1-\varepsilon|}{\ln b} < \frac{1}{n} < \frac{\ln|1+\varepsilon|}{\ln b}.$$

Se multiplica por $-\ln b$ y se suma $0 = \ln 1$,

$$\ln 1 - \ln|1-\varepsilon| > -\frac{1}{n}(\ln b) > \ln 1 - \ln|1+\varepsilon|$$

y por propiedades de los logaritmos,

$$\ln\left|\frac{1}{1-\varepsilon}\right| > \ln(b^{-\frac{1}{n}}) > \ln\left|\frac{1}{1+\varepsilon}\right|$$

es decir,

$$\frac{1}{1-\varepsilon} > b^{-\frac{1}{n}} > \frac{1}{1+\varepsilon}$$

por lo tanto,

$$b^{-\frac{1}{n}} \in \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right).$$

Por otro lado, si se toma ε como el radio y, $y = 1$ como el centro, entonces se tienen las condiciones del entorno (3). Así,

$$\bar{B}_\varepsilon(1) = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right)$$

es decir que, como

$$b^{-\frac{1}{n}} \in \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right).$$

y

$$\bar{B}_\varepsilon(1) = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right)$$

entonces,

$$b^{-\frac{1}{n}} \in \bar{B}_\varepsilon(1), \text{ con } b > 1.$$

Por último, por el Caso 1) y Caso 2) se tiene que

$$b^{-\frac{1}{n}} \in \bar{B}_\varepsilon(1) \text{ con } b > 0,$$

y por lo tanto, aplicando la definición 8 del límite de una sucesión, la sucesión $x_n = b^{-\frac{1}{n}}$ con $b > 0$, converge a uno en el espacio métrico $(I\!R, d_{je})$.

Ejercicio 7.

La sucesión $x_n = \dfrac{n+1}{8n}$ converge a $\dfrac{1}{8}$ en el espacio métrico $(I\!R, d_{je})$.

Para la solución de este ejercicio se aplica la definición 8 del límite de una sucesión, así:

Proposición 3.7 Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in I\!N$ tal que si $n > N$ entonces $\dfrac{n+1}{8n} \in \bar{B}_\varepsilon\left(\dfrac{1}{8}\right)$.

Demostración

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $N > \dfrac{8-\varepsilon}{\varepsilon}$

como $n > N$ y $N > \dfrac{8-\varepsilon}{\varepsilon}$ entonces por transitividad,

$$n > \frac{8-\varepsilon}{\varepsilon}$$

y por transitividad $n > \dfrac{8-\varepsilon}{\varepsilon}$,

Como $\dfrac{8-\varepsilon}{\varepsilon} > -\dfrac{8+\varepsilon}{\varepsilon}$, entonces por transitividad,

$$n > -\frac{8+\varepsilon}{\varepsilon} \text{ y } n > \frac{8-\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$-\frac{\varepsilon}{8+\varepsilon} < \frac{1}{n} \text{ y } \frac{\varepsilon}{8-\varepsilon} > \frac{1}{n}$$

$$-\frac{\varepsilon}{8+\varepsilon} < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{8-\varepsilon}$$

$$-\frac{\varepsilon}{8(8+\varepsilon)} < \frac{1}{8n} < \frac{\varepsilon}{8(8-\varepsilon)}$$

Aplicando fraccciones parciales,

$$\frac{A}{8} + \frac{B}{8+\varepsilon} = \frac{A(8+\varepsilon)+B8}{8(8+\varepsilon)}$$

Es decir,

$$(A+B)8 + \varepsilon A = \varepsilon$$

Por lo tanto, $A + B = 0$ y $A = 1$,
Así, $B = -1$, luego se tiene que,

$$-\frac{\varepsilon}{8(8+\varepsilon)} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8+\varepsilon}$$

y aplicando el mismo procedimiento de fracciones parciales también se tiene:

$$\frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon}{8-\varepsilon}\right) = \frac{1}{8-\varepsilon} - \frac{1}{8}$$

Es decir,

$$\frac{1}{8+\varepsilon} - \frac{1}{8} < \frac{1}{8n} < \frac{1}{8-\varepsilon} - \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8+\varepsilon} < \frac{1}{8n} + \frac{1}{8} < \frac{1}{8-\varepsilon}$$

de donde,

$$\frac{\frac{1}{8}}{1+\frac{\varepsilon}{8}} < \frac{1}{8} + \frac{1}{8n} < \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{\varepsilon}{8}}$$

lo mismo que,

$$\frac{\frac{1}{8}}{1+\frac{\varepsilon}{8}} < \frac{n+1}{8n} < \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{\varepsilon}{8}}$$

es decir,

$$\frac{n+1}{8n} \in \left(\frac{\frac{1}{8}}{1+\frac{\varepsilon}{8}}, \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{\varepsilon}{8}} \right).$$

Por otro lado, si se toma ε como el radio y, $y = \frac{1}{8}$ como el centro, entonces se tienen las condiciones del entorno 3. Así,

$$\bar{B}_{\varepsilon}\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{\frac{1}{8}}{1+\frac{\varepsilon}{8}}, \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{\varepsilon}{8}} \right)$$

es decir que, como

$$\frac{n+1}{8n} \in \left(\frac{\frac{1}{8}}{1+\frac{\varepsilon}{8}}, \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{\varepsilon}{8}} \right).$$

y

$$\bar{B}_{\varepsilon}\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{\frac{1}{8}}{1+\frac{\varepsilon}{8}}, \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{\varepsilon}{8}} \right)$$

entonces,

$$\frac{n+1}{8n} \in \bar{B}_{\varepsilon}\left(\frac{1}{8}\right)$$

Luego, aplicando la definición 8 del límite de una sucesión, la sucesión $x_n = \frac{n+1}{8n}$ converge a $\frac{1}{8}$ en el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_{je})$.

El siguiente, es un cuadro comparativo entre los resultados obtenidos de las proposiciones anteriores en el espacio métrico $(I\!R, d_{je})$, los resultados conocidos para estas mismas sucesiones en el espacio métrico $(I\!R, d)$, y los resultados conocidos para las sucesiones inversas el espacio métrico $(I\!R, d)$:

Sucesión	$(I\!R, d_{je})$	$(I\!R, d)$	$(I\!R, d)$
$x_n = n$	$\{x_n\}$ converge a 0	$\{x_n\}$ diverge	$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ converge a 0
$x_n = \frac{n}{(-1)^n}$	$\{x_n\}$ converge a 0	$\{x_n\}$ diverge	$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ converge a 0
$x_n = \frac{n^2}{n+1}$	$\{x_n\}$ converge a 0	$\{x_n\}$ diverge	$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ converge a 0
$x_n = \frac{1}{b^n}$ con $0 < b < 1$	$\{x_n\}$ converge a 0	$\{x_n\}$ diverge	$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ converge a 0
$x_n = \frac{1}{n}$	$\{x_n\}$ no converge a 0	$\{x_n\}$ converge a 0	$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ diverge
$x_n = b^{-\frac{1}{n}}$ con $b > 0$	$\{x_n\}$ converge a 1	$\{x_n\}$ converge a 1	$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ converge a 1
$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$\{x_n\}$ no converge a 0	$\{x_n\}$ converge a 0	$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ converge a 0
$x_n = \frac{n+1}{8n}$	$\{x_n\}$ converge a $\frac{1}{8}$	$\{x_n\}$ converge a $\frac{1}{8}$	$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ converge a 8

3.3. Teoremas

Aquí se muestran los teoremas que se conjeturaron a partir de los ejercicios realizados, y su demostración:

Teorema 1

Dada la sucesión $\{x_n\}$ en $(I\!R, d)$, tal que $x_n \neq 0$ converge a $L \neq 0$ si y sólo si la sucesión $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ en $(I\!R, d_{je})$ converge a $\dfrac{1}{L}$.

Demostración

1. Dada la sucesión $\{x_n\}$ en $(I\!R, d)$, tal que $x_n \neq 0$ converge a $L \neq 0$ entonces $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ en $(I\!R, d_{je})$ converge a $\dfrac{1}{L}$.

   Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in I\!N$ tal que si $n > N$ entonces,
$$d(x_n, L) < \varepsilon,$$
   por la definición de la métrica usual,
$$|x_n - L| < \varepsilon$$
   luego,
$$\left| \frac{1}{\frac{1}{x_n}} - \frac{1}{\frac{1}{L}} \right| < \varepsilon$$
   por la definición de la métrica d_{je} se tiene,
$$d_{je}\left(\frac{1}{x_n}, \frac{1}{L}\right) < \varepsilon.$$
   Por lo tanto, por la definición 8, la sucesión $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ en $(I\!R, d_{je})$ converge a $\dfrac{1}{L}$.

2. Dada la sucesión $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ tal que $x_n \neq 0$, si $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ converge a $\dfrac{1}{L}$ en $(I\!R, d_{je})$ entonces $\{x_n\}$ tal que $x_n \neq 0$ converge a $L \neq 0$, en $(I\!R, d)$.

   Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in I\!N$ tal que si $n > N$ entonces,
$$d_{je}\left(\frac{1}{x_n}, \frac{1}{L}\right) < \varepsilon$$

por la definición de la métrica d_{je}, se tiene que,

$$\left|\frac{1}{\frac{1}{x_n}} - \frac{1}{\frac{1}{L}}\right| < \varepsilon$$

luego,

$$|x_n - L| < \varepsilon$$

por la definición de la métrica usual,

$$d(x_n, L) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, por la definición 8 la sucesión $\{x_n\}$ en $(I\!R, d)$ converge a L.

Luego por 1 y 2 queda demostrado el enunciado del Teorema 1.

Teorema 2

Dada la sucesión $\{x_n\}$ en $(I\!R, d)$, tal que $x_n \neq 0$, x_n converge a 0 si y sólo si la sucesión $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ en $(I\!R, d_{je})$ converge a 0.

Demostración

1. Dada la sucesión $\{x_n\}$ en $(I\!R, d)$, tal que $x_n \neq 0$, si x_n converge a 0 entonces la sucesión $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ en $(I\!R, d_{je})$ converge a 0.
   Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in I\!N$ tal que si $n > N$ entonces,

$$d(x_n, o) < \varepsilon,$$

por la definición de la métrica usual,

$$|x_n| < \varepsilon$$

luego,

$$\left|\frac{1}{\frac{1}{x_n}}\right| < \varepsilon$$

por la definición de la métrica d_{je} se tiene,

$$d_{je}\left(\frac{1}{x_n}, 0\right) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, por la definición 8 la sucesión $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ en $(I\!R, d_{je})$ converge a 0.

2. Dada la sucesión $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ en $(I\!R, d_{je})$, tal que $x_n \neq 0$, si $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ converge a 0 entonces la sucesión $\{x_n\}$ en $(I\!R, d)$ converge a 0.

   Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in I\!N$ tal que si $n > N$ entonces,

$$d_{je}\left(\frac{1}{x_n}, 0\right) < \varepsilon$$

   por la definición de la métrica d_{je}, se tiene que,

$$\left|\frac{1}{\frac{1}{x_n}}\right| < \varepsilon$$

   luego,

$$|x_n| < \varepsilon$$

   por la definición de la métrica usual,

$$d(x_n, 0) < \varepsilon.$$

   Por lo tanto, por la definición 8 la sucesión $\{x_n\}$ en $(I\!R, d)$ converge a 0.

Luego por 1 y 2 queda demostrado el enunciado del Teorema 2.

Teorema 3

Dada una sucesión estrictamente monótona $\{x_n\}$, con $x_n \neq 0$ para todo $N \in I\!N$, Si $\{x_n\}$ es divergente en $(I\!R, d)$ entonces la sucesión x_n converge a cero en $(I\!R, d_{je})$.

Demostración
Dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in I\!N$ tal que, por la propiedad arquimediana se verifica,

$$0 < \frac{1}{M} < \varepsilon \tag{3.5}$$

como $\{x_n\}$ es divergente y estrictamente monótona, $\{x_n\}$ es no acotada, luego existe un término de la sucesión positiva que cumple que,

$$x_M > 0$$

tal que

$$x_M > M. \tag{3.6}$$

Además, por ser estrictamente monótona, es creciente o decreciente:

1. Se supone que $\{x_n\}$ es creciente, luego si $n > M$ entonces $x_n > x_M$,
   así, como $x_M > 0$ entonces $|x_n| > |x_M|$,
   por lo tanto,
   $$\frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{|x_M|}. \tag{3.7}$$
   Así por (3.5), (3.6)y (3.7), se tiene
   $$\frac{1}{M} < \varepsilon$$
   $$\frac{1}{|x_M|} < \frac{1}{M}$$
   y
   $$\left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{|x_M|}$$
   Por transitividad
   $$\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$$

2. Se supone que $\{x_n\}$ es dcreciente, luego si $n > M$ entonces $x_n < x_M$,
   así, como $x_M > 0$ entonces $|x_n| < |x_M|$,
   por lo tanto,
   $$\frac{1}{|x_n|} > \frac{1}{|x_M|}. \tag{3.8}$$
   Así por (3.5), (3.6)y (3.8), se tiene
   $$\frac{1}{M} < \varepsilon$$
   $$\frac{1}{|x_M|} < \frac{1}{M}$$
   y
   $$\left|\frac{1}{x_n}\right| > \frac{1}{|x_M|}$$
   Por transitividad
   $$\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$$

Se concluye que dado $\varepsilon > 0$, si $n > M$
$$\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$$
es decir,
$$d_{je}\left(\frac{1}{x_n}, 0\right) < \varepsilon$$

luego

$$x_n \in \bar{B}_\varepsilon(0) \text{ para todo } n > M$$

esto significa que la sucesión $\{x_n\}$ converge a cero en el espacio métrico $(I\!R, d_{je})$.

Capítulo 4

Conclusiones

1. La determinación de los entornos permitió estudiar la convergencia de las sucesiones tal como se había pensado.

2. Se tenía previsto estudiar la convergencia de las sucesiones por medio de sucesiones de cauchy, pero inicialmente no se logró demostrar que el espacio era completo, por lo cual se utilizó únicamente la definición 8 del límite de una sucesión, haciendo uso de los nuevos entornos.

3. Las conjeturas formuladas se lograron plantear utilizando la actividad matemática de pasar de lo particular a lo general, es decir, primero se encontraron resultados particulares que brindaron la información necesaria para formular una conjetura, demostrarla, y posteriormente llamarla teorema.

4. Se lograron demostrar 3 teoremas que facilitan el cálculo de la convergencia de algunas sucesiones en el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_{je})$

   [a] Dada la sucesión $\{x_n\}$ en $(\mathbb{R}, d)$, tal que $x_n \neq 0$ converge a $L \neq 0$ si y sólo si la sucesión $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ en $(\mathbb{R}, d_{je})$ converge a $\dfrac{1}{L}$.

   [b] Dada la sucesión $\{x_n\}$ en $(\mathbb{R}, d)$, tal que $x_n \neq 0$, x_n converge a 0 si y sólo si la sucesión $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ en $(\mathbb{R}, d_{je})$ converge a 0.

   [c] Dada una sucesión estrictamente monótona x_n, con $x_n \neq 0$ para todo $N \in \mathbb{N}$, Si x_n es divergente en $(\mathbb{R}, d)$ entonces la sucesión x_n converge a cero en $(\mathbb{R}, d_{je})$.

Comentario de la autora

Una manera de proyectar este trabajo es abordar la continuidad de funciones, la diferenciación y la integrabilidad que parten de la comprensión de los entornos ya realizada en este trabajo y pudiendo utilizar la misma estructura de este trabajo para su desarrollo.

Bibliografía

[1] Apostol, T. (1976). *Análisis Matemático*. Reverté,S.A, segunda edición.

[2] Cabello, J. (2010-2011). *Tesis de grado en Ingeniería Civil, Obras Públicas y Transportes*. Universidad de Granada.

[3] Rubiano, G. (1990). *Temas de topología*. Universidad Nacional de Colombia: Editorial UN.

[4] Rubiano, G. (2010). *Topología general [Un primer curso]*. Universidad Nacional de Colombia – sede Bogotá: Editorial UN.

[5] Rudin, W. (1977) *Principios de análisis Matemático*. Editorial Mc Graw-Hill.

[6] Sin autor (2004,2015) *Lección 8. Acotación y compacidad* Recuperado de: http://www.ugr.es/ rpaya/documentos/AnalisisI/2014-15/Compactos.pdfApostol, T.