

**CARACTERIZACIÓN DEL PROCESO DE GENERALIZAR EN ESTUDIANTES  
DE GRADO SÉPTIMO**

AZDRUBAL ADRIÁN CERON ORTIZ  
NILZA ALEJANDRA MURCIA MURCIA

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ D.C**

**2019**

# **CARACTERIZACIÓN DEL PROCESO DE GENERALIZAR EN ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO**

Trabajo de grado asociado al estudio de un asunto de interés profesional de los estudiantes

Trabajo de grado como requisito parcial para optar por el título de Licenciado en  
Matemáticas

Azdrubal Adrián Ceron Ortiz

Código: 2013240097

C.C: 1.019.069.071

Nilza Alejandra Murcia Murcia

Código: 2013240045


C.C: 1.014.265.111

Asesora

María Nubia Soler Álvarez

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ D.C**

**2019**

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Calidad de la educación</i>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
<b>Código: FOR020GIB</b>	<b>Versión: 01</b>	
<b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>	<b>Página 1 de 4</b>	

<b>1. Información General</b>	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de Grado
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	Caracterización del proceso de generalizar en estudiantes de grado séptimo.
<b>Autor(es)</b>	Cerón Ortiz, Azdrubal Adrián; Murcia Murcia, Nilza Alejandra
<b>Director</b>	Soler Álvarez, María Nubia
<b>Publicación</b>	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2019, 98 p.
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional
<b>Palabras Claves</b>	GENERALIZACIÓN; NIVELES DE CONSTRUCCIÓN DE LA GENERALIZACIÓN; ETAPAS DE LA GENERALIZACIÓN; PATRONES DE CONTEO.

<b>2. Descripción</b>
<p>Este trabajo de grado buscó caracterizar el proceso de generalizar patrones gráficos en estudiantes de grado séptimo del Colegio Gimnasio el Lago. Para lograr el objetivo se diseñaron tareas que permitieran observar como los participantes de este estudio lograban pasar de un nivel a otro en las diferentes etapas consideradas. Esto se hizo a través de las tareas diseñadas expresamente para que el participante pudiera ver el patrón de conteo, decir cuál es el patrón que se le mostro y por último llegar a realizar un registro bien sea gráfico, numérico o simbólico y verbal.</p>

### 3. Fuentes

Se consultaron 24 documentos entre libros, artículos, tesis de pregrado y maestría, normatividad en educación respecto al proceso de generalizar y su importancia en el aula de clase. Las fuentes más destacadas para la realización del presente trabajo de grado y herramienta de análisis de las tareas diseñadas fueron:

Esquinas Sancho, Ana María (2009) Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente. [Tesis]

García, S. (2011). Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizadas por estudiantes de 13 años. Tesis de Maestría. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gower, N. (1999). Rutas y raíces hacia el Álgebra. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Valenzuela, J y Gutiérrez, V. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. Educación Matemática, vol. 30, núm. 2

Cañadas, C., Castro, E. Y Castro, E. (2012) Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones. Revista la Gaceta Vol 15, Num 3, p (561- 563).

### 4. Contenidos

El trabajo de grado inicia presentando los preliminares donde se encuentra la introducción; es decir, una muestra del contenido del documento; la problemática y aportes y los objetivos.

Posteriormente, se presenta el marco teórico en el que se describe lo que se entiende por generalización en las matemáticas y en ramas diferentes a esta, las etapas de este proceso, estrategias que emplean los estudiantes en tareas de generalización, los diferentes tipos de generalización, los distintos niveles de construcción de la generalización y las dificultades que se pueden presentar en tareas de generalizar.

Luego de ello, se encuentra la metodología organizada en cuatro componentes, el primero respecto al diseño de las tareas, el segundo al análisis de estas, el tercero referente a la recolección de la información y por último los métodos para el análisis.

A continuación, se presenta el análisis y por último las conclusiones, reflexiones y proyecciones que se establecen a partir del trabajo realizado.

## **5. Metodología**

La metodología que se utilizó para la elaboración del presente trabajo de grado se encuentra en el capítulo tres y se organizan en cuatro componentes: El primero es el diseño de las tareas el cual hace referencia a los procesos y múltiples cambios que se efectuaron para proponer la versión final de las tareas. El segundo, el análisis de las tareas diseñadas en el cual se propone una matriz de análisis. El tercero, la recolección de información en el que se presentan las diferentes evidencias que se recogieron durante la implementación del trabajo de grado y cómo se codificó la información para poder analizarla y por último los métodos para el análisis en la cual se proponen dos matrices para analizar el alcance del proceso de generalizar en estudiantes de grado séptimo.

## **6. Conclusiones**

En cuanto al propósito de caracterizar el proceso de generalizar, a través del diseño de tareas con secuencias graficas se concluye lo siguiente:

Se logró evidenciar que la etapa de ver, es la más importante de todas, ya que, si los estudiantes logran identificar correctamente el patrón, tienen mayor probabilidad de expresarlo correctamente, ya sea de forma oral o escrita; sin embargo, cuando no identifican correctamente el patrón o la forma de contar, genera producciones erradas o incompletas como se pudo observar. Por ejemplo, con el segundo grupo, que en la cuarta tarea identificaron una forma de contar la cual no contribuyó a encontrar la respuesta correcta respecto a la cantidad de baldosas que se necesitaban para cercar una cantidad de jardineras mayor; sin embargo, los estudiantes registran correctamente dos conjeturas, basadas en dos formas de contar completamente distintas a la que habían planteado en un principio.

Respecto a la etapa de decir, se puede concluir que el diseño de las tareas no contribuyó significativamente para poder evidenciar el tránsito de los estudiantes por los diferentes niveles, se pueden deducir algunas cosas teniendo en cuenta las producciones escritas y los audios en los cuales describían las formas de contar; sin embargo, una de las formas para dar cuenta de esta etapa es la formulación de preguntas de indagación sobre cómo van desarrollando las tareas, propiciar discusiones entre los estudiantes, entre otras.

A lo largo del tránsito de los estudiantes por la etapa de registrar podemos concluir que el diseño de las tareas fue esencial para llegar a un nivel III o IV en la construcción de la generalización respecto

a la etapa de registrar, debido a que los primeros registros de los estudiantes no daban cuenta de los aspectos relevantes y finalizan estableciendo conjeturas con un lenguaje correcto, que aunque no fue simbólico, es significativo para tan poco tiempo de aplicación.

Además se concluye que el presente trabajo amplió el conocimiento de los autores respecto al quehacer en el aula de clase y además la importancia del proceso de generalizar en las actividades matemáticas de los estudiantes de grado séptimo.

<b>Elaborado por:</b>	Cerón Ortiz, Azdrubal Adrián; Murcia Murcia, Nilza Alejandra
<b>Revisado por:</b>	Soler Álvarez, María Nubia

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	10	11	2019
----------------------------------------------	----	----	------

## ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: **“Caracterización del proceso generalizar en estudiantes de grado séptimo”**, elaborado por los estudiantes:

**Nilza Alejandra Murcia Murcia** código 2013240045 y cédula 1014265111.

**Azdrubal Adrian Cerón Ortiz** código 2013240097 y cédula 1019069071.

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **45** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

En constancia se firma a los doce (12) días del mes de marzo de 2020.

Directora del Trabajo: Profesora

  
MARIA NUBIA SOLER ÁLVAREZ

Jurado:

Profesora

  
CLAUDIA SALAZAR AMAYA

## TABLA DE CONTENIDO

1. PRELIMINARES	12
1.1. INTRODUCCIÓN	12
1.2. PROBLEMÁTICA Y APOORTE	13
1.2.1. El proceso de generalizar en el Currículo Colombiano	13
1.2.1.1. El proceso de generalizar y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.	13
1.2.1.2. El proceso de generalizar y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.	14
1.2.1.3. El proceso de generalizar y los Derechos Básicos de Aprendizaje	15
1.2.2. Descripción de los participantes y aporte.	16
1.2.2.1. Acerca de la institución	16
1.2.2.2 Características de la institución	16
1.2.2.3 Participantes	18
1.2.2.4. Aporte.	18
1.3. OBJETIVOS	19
1.3.1. Objetivo General	19
1.3.2. Objetivos Específicos	19
2. MARCO TEÓRICO	21
2.1. GENERALIZAR	21
2.2. PROCESO DE GENERALIZAR	22
2.2.1. Ver	22
2.2.2. Decir	22
2.2.3. Registrar	23
2.2.4. Dificultades	27
3. ASPECTOS METODOLÓGICOS	30
3.1 DISEÑO DE LAS TAREAS	30
3.2 ANÁLISIS DE LAS TAREAS DISEÑADAS	36
3.3. RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN	39
3.3.1. Videos, Audios y Producciones escritas	40
3.3.2. Codificación de la información	41



3.4. MÉTODOS PARA EL ANÁLISIS	41
4. ANÁLISIS	43
4.1. ANÁLISIS PRIMER GRUPO.	43
4.1.1. ANÁLISIS VER	43
4.1.2. ANÁLISIS DECIR	45
4.1.3. ANÁLISIS REGISTRAR	47
4.2. ANÁLISIS SEGUNDO GRUPO	50
4.2.1 ANÁLISIS VER	50
4.2.2. ANÁLISIS DECIR	54
4.2.3. ANALISIS REGISTRAR	56
5. CONCLUSIONES, REFLEXIONES Y PROYECCIONES	63
5.1. CONCLUSIONES	63
5.2. REFLEXIONES	65
5.3. PROYECCIONES	66
BIBLIOGRAFÍA	66
ANEXOS	69

## TABLA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Tarea de generalización. LCM (1998, p. 62) .....	14
Ilustración 2. Tarea de generalización. DBA (2016, p.56).....	15
Ilustración 3. Enseñanzas de Matemáticas para grado 7. Plan de estudios. ....	19
Ilustración 4. Dificultad 1.....	28
Ilustración 5. Dificultad 2.....	28
Ilustración 6. Dificultad 3.....	28
Ilustración 7. Secuencia hexagonal lineal .....	30
Ilustración 8. Formas de contar. Secuencia Hexagonal.....	31
Ilustración 9. Secuencia Hexagonal Cuadrática. ....	32
Ilustración 10. Secuencia 1.....	34
Ilustración 11 Formas de contar la secuencia 1.....	34
Ilustración 12. Secuencia 2.....	34
Ilustración 13. Formas de contar Secuencia 2.....	34
Ilustración 14. Secuencia de la jardinera.....	35
Ilustración 15. Secuencia tarea 1.....	35
Ilustración 16. Secuencia tarea 2.....	36
Ilustración 17. Nivel I. Etapa Ver. ....	43
Ilustración 18. Nivel II. Etapa Ver. ....	44
Ilustración 19. Nivel III. Etapa Ver.....	45
Ilustración 20. Nivel II. Etapa Decir. ....	46
Ilustración 21. Nivel III. Etapa Decir. ....	46
Ilustración 22. Nivel I. Etapa Registrar Gráfica y Numérica o Simbólica. ....	47
Ilustración 23. Nivel I. Etapa Registrar Verbal. ....	48
Ilustración 24. Nivel II. Etapa Registrar Numérico o Simbólico. ....	49
Ilustración 25. Nivel II. Etapa Registrar Verbal.....	49
Ilustración 26. Nivel III. Etapa Registrar Gráfica. ....	50
Ilustración 27. Nivel I. Etapa Ver. ....	51
Ilustración 28. Nivel II. Etapa Ver. ....	52
Ilustración 29. Nivel III. Etapa Ver.....	53
Ilustración 30. Nivel IV. Etapa Ver.....	54
Ilustración 31. Nivel 1. Etapa Registrar - Gráfica.....	56
Ilustración 32. Nivel 1. Etapa Registrar Numérica o Simbólica. ....	57
Ilustración 33. Nivel 1. Etapa Registrar Verbal. ....	57
Ilustración 34. Nivel II. Etapa Registrar Gráfica.....	58
Ilustración 35. Nivel II. Etapa Registrar Numérica o simbólica. ....	58
Ilustración 36. Nivel II. Etapa Registrar Verbal.....	59
Ilustración 37. Nivel III. Etapa Registrar Gráfica. ....	59
Ilustración 38. Nivel III. Etapa Registrar Numérica o Simbólica. ....	60

Ilustración 39. Nivel III. Etapa Registrar Verbal. ....	60
Ilustración 40. Nivel IV. Etapa Registrar Gráfica. ....	61
Ilustración 41. Nivel I. Etapa Registrar. ....	61
Ilustración 42. Nivel IV. Etapa Registrar. ....	62

## TABLA DE ANEXOS

Anexo 1. Tarea 1. Secuencia en L. ....	69
Anexo 2. Tarea 2. Secuencia de puntos. ....	74
Anexo 3. Tarea 4. Secuencia hexagonal. ....	81
Anexo 4. Tarea 4. Secuencia jardineras. ....	87
Anexo 5. Matriz de análisis de las tareas diseñadas. ....	90
Anexo 6. Matriz de análisis primer grupo. ....	92
Anexo 7. Matriz de análisis segundo grupo. ....	94

## **1. PRELIMINARES**

### **1.1. INTRODUCCIÓN**

El presente trabajo surge debido al interés profesional de los estudiantes respecto a los procesos de generalización y cómo estos permiten transitar una ruta óptima para lograr la transición de la aritmética al álgebra por parte de estudiantes de grado séptimo. Se diseña una serie de tareas, apoyadas en el sustento del marco teórico de procesos de generalización, para estudiantes del Colegio Gimnasio el Lago.

El presente trabajo abarca cuatro actividades propias del ejercicio de investigación en educación. En primera instancia se establece una problemática, la cual se presenta en la sección 1.3, en esta se identifica el contexto de los estudiantes a los cuales se les va a aplicar el instrumento y la razón por la cual se lleva a cabo el presente trabajo, en esta misma sección se presentan las tareas propuestas por el ministerio de educación en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (LCM), los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM) que relacionan la generalización con el pensamiento variacional para grado séptimo. Esto con el propósito de justificar la importancia de incluir en las aulas los procesos de generalización en la institución.

En segunda instancia, en el capítulo 2, se lleva a cabo una apropiación de referentes teóricos, tomando como base las tres etapas del proceso de generalizar propuestas por Mason et al (1999); analizando los diferentes tipos de generalización propuestos por Cañadas (2012), los cuales dependen de cómo razonan los estudiantes en tareas que implican variación; estableciendo las posibles estrategias o dificultades que se pueden evidenciar en tareas de generalización presentadas por diferentes autores como Valenzuela & Gutiérrez (2018), Alonso et. (1993) o Warren (2005). Estos referentes constituyen el sustento para el análisis de las tareas diseñadas y de las producciones de los estudiantes; además, se apoya el presente análisis con la taxonomía propuesta por García (2011) cuando refiere cuatro niveles en la construcción de la generalización en sus diferentes etapas, con el fin de ubicar a los participantes en cada una de estas.

A la altura del capítulo 3, se presentan los aspectos metodológicos de la construcción y análisis de las tareas diseñadas, los cuales se sustentan a través de la teoría mencionada previamente.

En el capítulo 4, se hace la interpretación de los resultados, analizando el alcance de dos grupos de estudiantes, respecto a las diferentes etapas del proceso de generalizar tales como ver, decir y registrar.

Finalmente, en el capítulo 5, se presentan las conclusiones respecto al desarrollo de cada etapa y el alcance del instrumento en relación con las tareas y secuencias que se pueden proponer para las diferentes etapas del proceso de generalizar; adicionalmente se hace una reflexión por parte de los autores respecto al significado y el aporte a la formación como docentes de matemáticas y una proyección para continuar con la investigación en futuros trabajos.

## **1.2. PROBLEMÁTICA Y APOORTE**

En esta sección se evidencian las diferentes tareas de generalización propuestas para grado séptimo en el Currículo Colombiano, además una descripción general del contexto de los participantes, con el fin de aportar a la institución, lo establecido en la norma respecto a la importancia del proceso de generalización en el aula.

### **1.2.1. El proceso de generalizar en el Currículo Colombiano**

La Ley General de Educación de 1994, estructura el sistema educativo colombiano y define las expectativas de educación en el país, dando autonomía a cada institución respecto a la organización del currículo, estableciendo para matemáticas tres referentes de calidad como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (LCM) en 1998, los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (EBCM) en 2006 y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) en el 2016. En los cuales se establece los temas obligatorios de enseñanza y algunas cuestiones que influyen en el currículo de matemáticas de una institución.

#### **1.2.1.1. El proceso de generalizar y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.**

Los Lineamientos Curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional pretenden posibilitar, promover y orientar el currículo de las instituciones (MEN, 1998) De tal manera propone tres grandes aspectos para organizar el currículo de Matemáticas:

1. Procesos generales: El razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.  
La generalización está presente en algunos de estos procesos, por ejemplo, en el razonamiento cuando lo definen como el suceso de encontrar patrones y expresarlos matemáticamente; en la resolución de problemas es visto como el descubrir y reflexionar sobre una ley y en la modelación se especifica que generalizar es alcanzar uno de los niveles más altos de modelación.
2. Conocimientos básicos: Procesos que desarrollan el pensamiento matemático.  
Entre los cinco tipos de pensamiento matemático, la generalización está inmersa principalmente en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.
3. El contexto: El ambiente que rodea al estudiante y a su vez le da sentido a las matemáticas que aprende.

A continuación, en la *Ilustración 1*, se presenta una de las actividades que proponen los LCM para trabajar la generalización en estudiantes de grado séptimo.

Para construir un cuadrado  $2 \times 2$  con palillos de la misma longitud hacen falta 12 palillos. ¿Es cierto que para construir un cuadrado  $8 \times 8$  se necesita un número cuadrado de palillos?

a)  $2 \times 2$

12 palillos  
2 palillos en cada fila  
2 palillos en cada columna  
3 filas y 3 columnas

c)  $4 \times 4$

40 palillos  
4 palillos en cada fila  
4 palillos en cada columna  
5 filas y 4 columnas

b)  $3 \times 3$

24 palillos  
3 palillos en cada fila  
3 palillos en cada columna  
4 filas y 4 columnas

Si se sigue este patrón, se encuentra que para un cuadrado  $8 \times 8$  hay:

- 8 palillos en cada fila y 9 filas, luego hay 72 palillos en las filas.
- 8 palillos en cada columna y 9 columnas, luego hay 72 palillos en las columnas.
- En total hay 144 palillos y como  $144=12^2$ , se necesita un número cuadrado de palillos.

Como la tendencia de los estudiantes es a construir el cuadrado de  $8 \times 8$ , vale la pena mostrarles que se puede llegar también a la solución mediante otra estrategia.

*Ilustración 1. Tarea de generalización. LCM (1998, p. 62)*

### 1.2.1.2. El proceso de generalizar y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

Un conjunto de estándares se ha de entender como el desarrollo gradual e integrado de competencias, con el fin de superar la complejidad que se presenta a lo largo del proceso educativo (MEN, 2006) Se puede decir que los estándares proponen los criterios y temáticas que se esperan desarrollar en matemáticas.

Los estándares fueron diseñados de tal forma que existe una interacción entre la faceta práctica y formal de las matemáticas y entre lo conceptual y procedimental del conocimiento. Además, propone una coherencia vertical; es decir, una relación con los estándares del mismo pensamiento de otros grados y una horizontal que es la relación entre los estándares de un mismo grado, pero en diferentes tipos de pensamiento.

Los EBCM argumentan que los procesos de generalización se basan en visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras y de igual forma sustentan que el cálculo algebraico surge de la generalización del trabajo aritmético. (MEN, 2006, p 67 y 68)

La generalización se enmarca en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, definido el inicio del desarrollo de este pensamiento como “el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente” (MEN, 2006, p.66).

A continuación, se presentan algunos de los estándares que relacionan la generalización dentro del pensamiento variacional para grado séptimo.

- ✓ Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- ✓ Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).

### 1.2.1.3. El proceso de generalizar y los Derechos Básicos de Aprendizaje

Los Derechos Básicos de Aprendizaje son un conjunto coherente de conocimientos y habilidades que organizan los aprendizajes. En los DBA podemos encontrar una serie de actividades que se pueden realizar desde transición a grado once y se busca que a partir de este proceso los estudiantes año tras año alcancen los aprendizajes y habilidades propuestos en los LCM y los EBCM.

En el año 2015 se presentó la primera versión de los DBA y a partir de una revisión con la comunidad educativa y diferentes escenarios de discusión se publica en el siguiente año la segunda versión en la cual se proponen tres elementos en la estructura de cada DBA: enunciado, evidencia de aprendizaje y ejemplo. (MEN, 2016)

A continuación, en la *Ilustración 2*, se presentan algunas tareas para grado séptimo en las cuales está inmersa la generalización, ya que en los DBA no es explícita.

**7** Plantea y resuelve ecuaciones, las describe verbalmente y representa situaciones de variación de manera numérica, simbólica o gráfica.

**Evidencias de aprendizaje**

- Plantea modelos algebraicos, gráficos o numéricos en los que identifica variables y rangos de variación de las variables.
- Toma decisiones informadas en exploraciones numéricas, algebraicas o gráficas de los modelos matemáticos usados.
- Utiliza métodos informales exploratorios para resolver ecuaciones.

**Ejemplo**

Con base en la información gráfica encuentra el peso de cada una de las gallinas (Los pesos están expresados en libras).

*Ilustración 2. Tarea de generalización. DBA (2016, p.56)*

### **1.2.2. Descripción de los participantes y aporte.**

A continuación, se presenta el contexto en el que se encuentran los estudiantes que participan en este estudio, una breve descripción de ellos y el aporte que se pretende hacer a partir del presente trabajo.

#### **1.2.2.1. Acerca de la institución**

El trabajo de campo de esta monografía se desarrollará en el Colegio Gimnasio el Lago, ubicado en el barrio Santa María del Lago, en Bogotá.

El colegio Gimnasio el Lago abrió sus puertas en diciembre de 1993. Magdalena García, rectora de la institución, junto a su socio, adecuaron el primer piso de su vivienda para que comenzará a funcionar un jardín infantil bajo el nombre de Liceo Pedagógico Ángel de la Guarda. Al siguiente año, por motivos de legalización frente a la secretaria de educación, cambió su nombre a Gimnasio Psicopedagógico El Lago de la Fantasía. Cuatro años después adquirió el segundo piso de la casa donde funcionaba la institución con el fin de habilitar primaria. Con el tiempo fueron adquiriendo viviendas en los alrededores. El proyecto era abrir grado sexto para emprender hacia la educación media; sin embargo, la aceptación de la comunidad hizo que el colegio abriera los grados de 6º, 7º y 8º, en el año 2000 y de igual forma este mismo año por razones de ampliación a la atención a estudiantes de más edad, cambió nuevamente su nombre adoptando el que lleva hasta el día de hoy: Gimnasio El Lago. Posteriormente en el año 2003 se graduó la primera promoción de la institución.

El 26 de septiembre de 2008, el instituto colombiano de Normas Técnicas y Certificación - ICONTEC- le otorgó a la institución el certificado del Sistema de Gestión de Calidad ISO 9001:2000; en septiembre de 2011 se renovó el certificado de calidad en la NTC-ISO 9001:2008; y en Junio de 2014 se renovó el certificado de calidad en la NTC-ISO 9001:2008. En septiembre de 2016 nuevamente el ICONTEC otorgó el certificado de calidad en la NTC-ISO 9001:2015, que es aplicable a las actividades de diseño y presentación del servicio educativo en los niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria y media, siendo con esto el primer colegio de Bogotá en certificarse en la versión 2015. Para el mes de noviembre de 2017 mantiene la categoría A+ de acuerdo a la clasificación generada por el instituto colombiano de la Educación ICFES.

#### **1.2.2.2 Características de la institución**

Hoy en día se reconoce como una institución de carácter mixto y privado; maneja calendario A y jornada única desde preescolar hasta grado once. La institución tiene énfasis empresarial y manejo de idioma inglés, en proyección al bilingüismo, además de una formación deportiva, artística y en valores.

El colegio se rige por un modelo de pedagogía conceptual, propuesta por la Fundación Merani, que tiene el propósito de desarrollar competencias intelectuales, la actitud creadora, crítica e investigativa con bases éticas y morales para responder a las exigencias del mundo



actual; formando así estudiantes, críticos, autónomos, auto-regulados y capaces de buscar alternativas que beneficien su accionar.

El colegio cuenta con una planta física muy grande, con un área total de  $40.000\text{ m}^2$ , que se encuentra distribuida en torres en donde funcionan los diferentes estamentos de la institución: La torre administrativa y 3 torres para la rama académica, de cinco pisos cada una, distribuidas así: la torre de pre escolar; cuenta con una sala de informática, salón de música, sala de profesores de bachillerato en su tercer piso y en el cuarto la sala de profesores de primaria y pre escolar, en este mismo piso se encuentra el laboratorio de inglés, el cual cuenta con computadores para cada estudiante y video beam; en el último piso de esta torre se encuentra el restaurante de pre escolar y primaria. La torre de primaria cuenta con un laboratorio de física equipado y la biblioteca. La torre de bachillerato cuenta, en su último nivel, con una sala de informática y un salón muisca que cuenta con un video beam, tablero y espacio amplio para reunión con grupos de estudiantes o profesores; además en cada nivel de la torre se disponen de dos módulos (televisor, modulo e internet) para llevar a los respectivos salones.

Para su funcionamiento cuenta con un personal de 140 personas, entre directivos, docentes y empleados de apoyo logístico, de los cuales 67 son profesores de las diferentes asignaturas de bachillerato y primaria, y de estos 10 son de matemáticas. Es un personal idóneo, capacitado para dictar la asignatura correspondiente, la mayoría se encuentra en categoría 7 del escalafón docente, el 30% con buen tiempo de antigüedad en la institución y por tanto, con gran experiencia en la labor educativa. El 80% de los docentes del área de matemáticas, y que orientan clase en los diferentes grados de la básica secundaria, son licenciados en la materia con buena trayectoria en educación, tres de ellos con magíster en esta rama del conocimiento y capacitados para emprender proyectos de enseñanza aprendizaje de la matemática. El otro 20% son ingenieros con magister en educación. A nivel del área de matemáticas, con el fin de mejorar la enseñanza, se implementó un proyecto de Robótica apoyados por el área de tecnología, además organización y participación en olimpiadas intercolegiales, con el fin de hacer un contraste frente a otras instituciones. El colegio cuenta con un evaluador externo, Asesorías Académicas Milton Ochoa, el cual da origen al proyecto *Martes de Prueba* con el cual se busca hacer un diagnóstico temprano de las debilidades y fortalezas en el proceso académico que se realiza al interior de las instituciones en todos los grados; por lo cual se ha convertido en la plataforma de mejoramiento continuo en los resultados de Pruebas de Estado y por ende de la educación en Colombia.

El número actual de estudiantes es de 1600, de los cuales 850 son de secundaria distribuidos de la siguiente manera: 3 grupos en 11°, 4 en 10°, 4 en 9°, 5 en 8°, 6 en 7° y 5 en 6°; el resto de los estudiantes son de primaria. Debido al sector en donde se encuentra ubicado el colegio, los estudiantes son de estratos 2, 3 y algunos de un estrato mayor teniendo en cuenta el plan de estudios, la calidad académica y oportunidades que ofrece la institución. Los estudiantes desarrollan diferentes habilidades artísticas y deportivas que eligen al inicio de año,

participando todos los viernes de 2 a 4 en escuelas de formación como natación, patinaje, porras, ping pong, manicure, etc.

### **1.2.2.3 Participantes**

Los participantes de este trabajo van a ser estudiantes de grado 7° del colegio Gimnasio el Lago. En lo que sigue presentamos algunas características de estos jóvenes y el aporte que queremos hacer con este trabajo de grado en relación con los procesos de razonamiento como la generalización para dar paso de la aritmética al álgebra, proceso que no se contempla en el plan de estudios de matemáticas para grado 7°.

Se cuenta con un total de 180 estudiantes en este nivel, divididos en 6 grupos de 30 estudiantes cada uno. Estos estudiantes se encuentran en un rango de 12 a 13 años de edad, se entrevistó a uno de los docentes que dicta matemáticas en grado séptimo, él manifestó que en este grado caracterizan a los niños como: “estudiantes muy disciplinados en cuanto a sus actividades y tareas se refiere, son muy competitivos así que fluyen en los ejercicios en los que se les impongan retos o desafíos, esta característica es de algunos, no es de forma generalizada, son muy atentos sino que se distraen con mucha facilidad, lo cual dificulta mucho su proceso académico, teniendo en cuenta que las matemáticas requieren de mucha concentración.” Además, la docente hace referencia a las fortalezas y debilidades que detecta en los estudiantes como: “su mayor fortaleza en una sola palabra es el método y su mayor dificultad es la lógica” Otra dificultad que tienen, según este maestro, corresponde a las “operaciones básicas entre números enteros, al no saber asociar los números positivos y negativos fácilmente”.

Según el plan de estudios de matemáticas para grado séptimo del colegio Gimnasio el Lago, se busca hacer un paso de lo aritmético a lo algebraico por medio de la enseñanza *Razón Y Proporción* y posteriormente solucionar *Ecuaciones De Primer Grado Con Una Incógnita*.

En entrevista con el jefe de área de matemáticas, manifestó “Nosotros buscamos hacer ese paso a través del estudio de razón y proporción, ya que considero que la generalización es una cuestión un tanto complicada; sin embargo, me llama mucho la atención desarrollar esos procesos de razonamiento en los estudiantes”.

### **1.2.2.4. Aporte.**

Teniendo en cuenta el plan de estudios de matemáticas para grado séptimo, en el cual no se contemplan tareas que impliquen procesos de generalización, como se observa en la *Ilustración 3*; además, el propósito del jefe de área de establecer procesos de razonamiento en los estudiantes y la visión del colegio en formar estudiantes competitivos; se da a lugar el presente trabajo de grado que busca desarrollar uno de los procesos generales de la actividad matemática por medio de la generalización, para potenciar el pensamiento variacional, teniendo en cuenta que autores como Radford (citado por Vergel, 2014) considera la generalización como la vía principal para introducir el álgebra en el aula, teniendo en cuenta que acerca a los estudiantes a situaciones que implican variación. MEN (2006, p. 67) de igual

forma afirma que las actividades de generalización de patrones geométricos preparan el aprendizaje significativo y comprensivo mucho antes de llegar al grado séptimo y octavo.

La docente de matemáticas de grado séptimo de la institución afirma que los estudiantes no presentan dificultad al desarrollar tareas que impliquen utilizar un método; sin embargo, en actividades de lógica y razonamiento presentan gran dificultad. Por tal motivo nuestro aporte a la institución es acercar a los estudiantes al proceso de generalizar por medio de una serie de tareas diseñadas para tal fin.

PRIMERO	<b>1.1 NÚMEROS ENTEROS.</b> 1.1.1 Propiedades de los números enteros. 1.1.2 Potenciación 1.1.3 Radicación 1.1.4 Logaritmicación <b>1.2 MOVIMIENTOS EN EL PLANO.</b> 1.2.1 Traslación 1.2.2 Rotación <b>1.3 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL PARA DATOS NO AGRUPADOS.</b> 1.3.1 Media Aritmética 1.3.2 Mediana 1.3.3 Moda	TERCERO	<b>3.1 RAZÓN Y PROPORCIÓN.</b> 3.1.1 Magnitudes directamente e inversamente proporcionales. 3.1.2 Regla de tres simple directa, simple inversa y compuesta  <b>3.2 HOMOTECIAS</b> 3.2.1 Definición 3.2.2 Constante de proporcionalidad 3.2.3 Aplicaciones  <b>3.3 MEDIA</b> 3.3.1 Geométrica, armónica, cuadrática, ponderada
SEGUNDO	<b>2.1 NÚMEROS RACIONALES.</b> 2.1.1 Propiedades de los números racionales  <b>2.2 OPERACIONES BÁSICAS ENTRE NÚMEROS RACIONALES, POTENCIACIÓN, RADICACIÓN Y LOGARITMICACIÓN.</b>  <b>2.3 TRIÁNGULOS.</b> 2.3.1 Clasificación de los triángulos 2.3.2 Rectas notables de los triángulos  <b>2.4 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL PARA DATOS AGRUPADOS</b> 2.4.1 Media Aritmética 2.4.2 Mediana 2.4.3 moda	CUARTO	<b>4.1 ECUACIONES</b> 4.1.1 Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. 4.1.2 Solución de problemas con números enteros y números racionales.  <b>4.2 TEOREMA DE PITÁGORAS.</b>  <b>4.3 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA MEDIDA</b> 4.3.1 Razón de probabilidad 4.3.2 Diagrama de puntos muestrales

*Ilustración 3. Enseñanzas de Matemáticas para grado 7. Plan de estudios.*

### 1.3. OBJETIVOS

Luego de establecer la problemática de estudio, se presenta como objetivo principal:

#### 1.3.1. Objetivo General

Caracterizar el proceso de generalizar que desarrollan los estudiantes de grado séptimo del Colegio Gimnasio el Lago

#### 1.3.2. Objetivos Específicos

Con el fin de alcanzar el objetivo general se proponen los siguientes objetivos específicos:

- Identificar características del proceso de generalización reportadas en la literatura existente
- Diseñar actividades para estudiantes de grado séptimo del Colegio Gimnasio el Lago, que permitan desarrollar procesos de generalización.

- Describir los procesos de generalización desarrollados por los estudiantes de grado séptimo del Colegio Gimnasio el Lago.

## **2. MARCO TEÓRICO**

### **2.1. GENERALIZAR**

#### **Generalizar en contextos cotidianos o de otras ciencias**

La generalización ha estado muy presente en diferentes contextos, fuera del estudio de las matemáticas continuamente usamos la frase “generalmente” o “comúnmente”, palabras que han sido definidas en diferentes enfoques como los siguientes:

En la epidemiología, Orozco S, Peñaranda F, Restrepo D, Mejía L, Arias S (2014) define generalización como “abstracción realizada a partir de un conjunto de datos que permite plantear formulaciones universales”; por otro lado en la Psicología, Merani (1969) define como el “proceso mental por el cual se extiende a una clase completa de objetos lo observado en algunos objetos de la misma clase”; de igual forma en el diccionario soviético de filosofía, se define generalización como “Proceso lógico del tránsito de lo singular a lo general, del conocimiento menos general al más general (por ejemplo, el paso del concepto de “calor” al de “energía” o), así como el resultado generalizado de este proceso: concepto, juicio, ley de la ciencia o teoría” y por último la Real Academia de la Lengua define generalizar como “Abstraer lo que es común y esencial a muchas cosas, para formar un concepto general que las comprenda todas”.

#### **Generalización Matemática**

Desde las investigaciones en educación matemática, se ha buscado de igual forma definir generalización, por ejemplo:

Mason (1989, citado por Esquinas, 2009, p. 94) afirma que “generalizar significa descubrir una ley general que nos indique: qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece que es cierto (una justificación); donde parece que es cierto, esto es, un planteamiento más general al problema”

Polya (1965) afirma que “Generalizar consiste en pasar (...) del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado”.

Otros autores como Pérez (2005), definen generalizar como el proceso que permite pasar de un conjunto de datos o hechos particulares a lograr establecer leyes y verificar bajo qué condiciones se cumplen, en otro conjunto de elementos dados.

Cañadas (2012) afirma que el estudiante generaliza, cuando es capaz de identificar una característica común la cual ha sido abstraída de un conjunto de diversos casos particulares; es decir, logra aplicar un argumento a una situación específica.

En el libro *Lecciones del área de Matemáticas número uno* del centro de investigaciones docentes, 2001, realiza un estudio acerca de los principios heurísticos en la actividad matemática, los cuales contribuyen a la búsqueda de nuevos conocimientos e ideas para dar

solución a diferentes problemas, es decir los principios de hallar, descubrir e inventar; entre estos principios se encuentra el de generalizar y se define como el proceso que permite suponer algo para un conjunto de objetos a partir del análisis de un caso especial. (Restrepo. L, 2001)

## **2.2. PROCESO DE GENERALIZAR**

Mason et al. (1999) afirma que “la generalización es la vida de las matemáticas y el álgebra el lenguaje con que se expresa” además se enuncia que la generalidad es el centro del pensamiento matemático y la ruta hacia el desarrollo del álgebra. En su libro Rutas y raíces hacia el álgebra, este autor describe cuatro etapas iniciales el proceso de generalizar:

1. “Ver” un patrón
2. “Decir” cuál es el patrón
3. “Registrar” un patrón
4. Prueba de la validez de las fórmulas

Estas etapas buscan que el estudiante generalice a partir de la relación de ver y decir, haciendo uso de la identificación de estructuras mentales (**ver**), articulación de lo que se ha reconocido en el proceso de identificación (**decir**), luego hacer visible lo que se articula, por medio de símbolos y distintas maneras de comunicación escritas (**registrar**).

Radford (2015), identifica tres componentes que subyacen en el proceso de generalizar, el componente fenomenológico, el epistemológico y por último el semiótico. A continuación, se relaciona como se desarrollan los componentes en las diferentes etapas del proceso de generalizar.

### **2.2.1. Ver**

Ver hace referencia a identificar o percibir algo, la Real Academia Española define ver de diferentes formas, pero en cada una de ellas presenta acciones importantes que realiza un sujeto como: percibir con los ojos, percibir con la inteligencia algo, comprobar, observar, examinar, reconocer, encontrar, poner atención, advertir, reflexionar, deducir, entre otras. Es decir, que durante un proceso de generalizar, el estudiante debe poner en práctica cada una de estas acciones de tal forma que se pueda lograr identificar el patrón.

En esta primera etapa nos vamos a concentrar en el componente fenomenológico descrito por Radford (2015) como el uso de las determinaciones sensibles del ser humano: la intuición, atención e intención y cómo estas a su vez interactúan para tratar los objetos particulares que subyacen fundamentalmente en la generalización.

### **2.2.2. Decir**

Decir hace referencia a describir, no simplemente por medio de palabras, sino aplicar los conocimientos que se tienen de los objetos particulares, de tal forma que se pueda inferir o afirmar algo sobre otro objeto, a esto se le conoce como el componente epistemológico del proceso de generalizar; pero, además involucra el componente semiótico en el que se

involucra medios de comunicación como el lenguaje gestual o verbal. Rojas P & Vergel, R. (2013) identifican una jerarquía en la generalización la cual es estudiada a partir de los medios por los cuales el sujeto se expresa; se presentan tres niveles de generalización; sin embargo, vamos a relacionar aquellos que hacen referencia a la etapa de decir: **Generalización factual**, la que involucra un lenguaje gestual; es decir, un sistema de gestos, signos corporales e indicaciones acompañadas de pocas palabras.

**Generalización contextual**, la cual deja a un lado los gestos y se orienta en utilizar palabras clave como por ejemplo “la siguiente figura es dos por la figura 1 más dos”, en las cuales ya está identificando patrones y regularidades por medio de un lenguaje natural, siendo este un poco más formal.

### 2.2.3. Registrar

Por último, respecto a “registrar”, el componente semiótico toma gran importancia, ya que es el que involucra medios como el lenguaje oral y escrito, dibujos, gestos y signos, entre otros; a través de los cuales se pueden afirmar cosas sobre el objeto que se está generalizando; sin embargo, nos vamos a centrar en todos aquellos medios escritos con los cuales el sujeto puede expresar la generalidad. Debido a que registrar también es un medio de expresar la generalidad, vamos a relacionar aquellos niveles descritos por Rojas P & Vergel, R. (2013) que hacen referencia a la etapa de registrar:

**Generalización contextual**, la cual deja a un lado los gestos y se orienta en utilizar palabras clave como por ejemplo “la siguiente figura es dos por la figura 1 más dos”, en las cuales ya está identificando patrones y regularidades, pero a diferencia de la etapa de decir, el medio de comunicación es escrito y con un lenguaje más formal

**Generalización simbólica**, en la cual el sujeto hace uso del lenguaje matemático para expresar la regularidad por medio de símbolos.

Cañadas y Castro (2007) complementa las etapas que se involucran en un proceso de generalización, buscando abarcar y analizar las estrategias que utiliza el estudiante al momento de razonar, en casos de razonamiento inductivo, para dar solución a situaciones de variación que involucran patrones y regularidades. A continuación, se presenta el modelo propuesto por estos autores:

1. Trabajar con casos particulares.
2. Organizar los casos particulares.
3. Identificar el patrón.
4. Formular una conjetura.
5. Comprobar la conjetura propuesta.
6. Generalizar.

## 7. Demostrar la expresión propuesta para generalizar.

En este modelo cada paso hace parte de una de las etapas, las cuales se pueden agrupar de la siguiente forma: en los pasos 1, 2 y 3 el estudiante se encuentra en la etapa de ver, ya que está observando cada caso particular y logra identificar un patrón por medio de la observación y aquellos componentes como la intuición, atención e intención; en los pasos 4 y 5 el estudiante comienza a describir el patrón, ya sea a partir de un lenguaje natural o factual; en los pasos 5 y 6 ya se comienza a registrar el patrón a partir de cualquier medio de comunicación escrito, como símbolos, palabras, representaciones; y es de aquí que se desprenden cuatro tipos de generalización, según Cañadas (2012), los cuales dependen de cómo razona el estudiante en problemas que implican variación. Los tipos de generalización son los siguientes:

1. Generalización empírica, en la cual se detecta una regularidad, a partir de la aplicación de diversos ejemplos.
2. Generalización gráfica, se construye una expresión gráfica que generalice la propiedad común de los elementos.
3. Generalización verbal, en la cual, a partir de un lenguaje natural de tipo verbal, se generaliza la propiedad común de los elementos.
4. Generalización algebraica, en la cual se construye una expresión simbólica de la regularidad.

Valenzuela & Gutiérrez (2018) presentan estrategias de generalización en sucesiones de figuras; es decir, la forma de actuar de un sujeto en una tarea de este tipo y la presenta en la Tabla 1.

*Tabla 1. Estrategias de generalización de patrones Valenzuela & Gutiérrez (2018)*

<i>Estrategias</i>	<i>Propiedades</i>
<i>Conteo</i>	Incluye el cálculo numérico de los términos a partir de la diferencia constante entre cada uno de ellos.
<i>Recursiva-aditiva</i>	Se caracteriza por la obtención de términos a partir del uso del término previo.
<i>Multiplicar con las diferencias</i>	En este caso los estudiantes, a partir de la diferencia constante entre los términos, expresan el valor de cada término como la multiplicación del término por la diferencia.
<i>Contextual</i>	Se construye una regla enfocada en el contexto, es decir, sobre la información relacionada con la situación.
<i>Explícita</i>	Involucra la relación entre dos variables, a fin de determinar cualquier término. Establece una función mediante el uso de la expresión general que puede ser usada para encontrar n término de la sucesión.



Tener en cuenta este tipo de estrategias o formas de actuar de un estudiante frente a una tarea de generalización de patrones figúrales, permite diseñar y analizar las actividades que se pueden proponer para llevar al estudiante a generalizar.

Una forma más general de ver las diferentes estrategias que se emplean en tareas de generalización dependiendo de cada etapa, es la propuesta por García (2011) en la que propone una serie de niveles inmersos en cada una de las etapas del proceso de generalizar y las organiza en cuatro niveles: En el nivel I se presentan las estrategias en las cuales el ver, decir y escribir parten de la imagen como un todo. En el nivel II se descompone la imagen para ser vista y expresada por las características comunes de los casos particulares. En el nivel III hace relaciones de las características comunes de los casos particulares y por último, en el nivel IV se comienza a conjeturar a partir de las relaciones establecidas.

La tabla 2 presenta las estrategias mencionadas previamente según García (2011)

*Tabla 2. Fases en la construcción de una generalización. García (2011)*

Estrategias de nivel	FASES EN LA CONSTRUCCIÓN DE UNA GENERALIZACIÓN			
	VER	DECIR	ESCRIBIR	VERIFICAR
I	(OI) Observar la imagen como un todo.	(DIT) Describir características de la imagen como un todo.	Escribir las propiedades comunes entre los casos.	
			(EPCP) Escribir con palabras las características de la imagen.	
			(EPCM) Escribir con palabras y símbolos las características de la imagen.	
			(EPCS) Escribir con símbolos las características de la imagen.	
II	(AI) Analizar la imagen (Descompone el todo en sus partes)	(DPC) Describir las propiedades comunes entre los casos particulares.	Escribir características de las partes de un todo.	
			(ECPP) Escribir con palabras las propiedades comunes entre los casos particulares.	

			(ECPM) Escribir con palabras y símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares.	
			(ECPS) Escribir con símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares.	
III	Establecer relaciones entre las partes de la imagen.	(DRP) Describir la forma en que se relacionan las partes	Escribir la forma en que se relacionan las partes.	
	(ERN) Establecer relaciones necesarias.		(EFRP) Escribir con palabras la forma en que se relacionan las partes.	
	(ERS) Establecer relaciones suficientes.		(EFRM) Escribir con palabras y símbolos la forma en que se relacionan las partes.	
			(EFRS) Escribir con símbolos la forma en que se relacionan las partes.	
IV	(CRP) Conjeturar acerca de las relaciones entre las partes de la imagen	(DCR) Describir la conjetura observada de las relaciones entre las partes.	Escribir la conjetura observada de las relaciones entre las partes.	(VCTC) Verifica su conjetura construyendo un término cercano.
			(ECOP) Escribir con palabras la conjetura observada de las relaciones entre las partes.	(VCC) Verifica su conjetura haciendo uso de la calculadora.
			(ECOM) Escribir con palabras y símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes.	(VCM) Verifica su conjetura manualmente.
			(ECOS) Escribir con símbolos la conjetura	(NVC) No verifica su conjetura.

			observada de las relaciones entre las partes.	
--	--	--	-----------------------------------------------	--

#### 2.2.4. Dificultades

Cuando se proponen actividades de generalización de patrones es posible que el tránsito por las etapas propuestas por Alonso, et al (1993) no resulte del todo fácil. Por ejemplo, es posible que exista dificultad para abstraer la regla o dificultad para generar la expresión algebraica que subyace en la secuencia gráfico - numérica.

Warren (2005) informa sobre dificultades que han experimentado estudiantes al acercarse al estudio del álgebra y, en particular, a la generación de expresiones algebraicas a partir de la exploración visual de patrones. Este estudio se enfocó en dos aspectos: Describir secuencias en términos de la posición y encontrar el término de una posición cualquiera, reconociendo que las dificultades que presentaron los estudiantes se deben a las limitadas experiencias que tienen con secuencias aritméticas.

Durante las últimas décadas distintas investigaciones, han centrado su atención en analizar dificultades asociadas al aprendizaje y enseñanza del álgebra en la escuela. Estas investigaciones han reportado que algunas dificultades surgen en el paso de la aritmética al álgebra, en ocasiones porque el álgebra se presenta de manera abrupta, es decir, sin procesos que medien de manera paulatina en la transición de la aritmética al álgebra.

Por ejemplo, Socas, Camacho y Hernández señalan que el aprendizaje del álgebra genera dificultades a los estudiantes debido a la complejidad de sus objetos, a los procesos de pensamiento algebraico, al desarrollo cognitivo de los estudiantes, a los métodos de enseñanza y a las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra. Alonso, et al (1993) plantea algunos errores y dificultades en la generalización de secuencias. Igualmente, Mora (2012) enuncia algunas de las dificultades más comunes para los estudiantes al llevar a cabo procesos de generalización para sucesiones dadas.

- Dificultad 1:

Encontrar la forma de abordar el problema, principalmente cuando los estudiantes nunca han tenido un acercamiento al estudio de secuencias como la secuencia de la *Ilustración 4*. La falta de familiaridad con este tipo de actividades o el desconocimiento puede ocasionar que para el estudiante la secuencia no les represente algo o no focalicen en la “variación o cambio” de los elementos de la secuencia.

Ejemplo:



*Ilustración 4. Dificultad 1.*

- Dificultad 2:

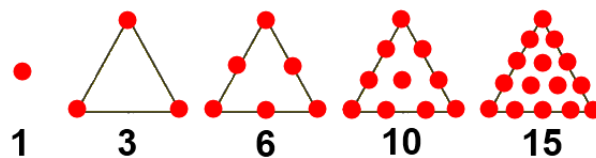
Al utilizar configuraciones geométricas, es posible que, al observarlas, se encuentre gran variedad de características de tales configuraciones, que pueden resultar difíciles de guardar en la memoria, de relacionar, clasificar o identificar cuáles son las más importantes para disponer de una solución. Por ejemplo, en la *Ilustración 5*, se ve una representación gráfico-numérica en la que la secuencia aumenta de 2 cuadros tanto vertical como horizontalmente, pero no es suficiente con que el estudiante sume 4 cuadritos por posición, sino que debe tener en cuenta que la configuración empieza con 3 cuadritos y a partir de ahí se suman 4 por cada posición adicional.



*Ilustración 5. Dificultad 2.*

- Dificultad 3:

Proponer características irrelevantes, de tipo anecdótico, para describir lo observado en una secuencia. Por ejemplo, indicar que la *Ilustración 6* corresponde a triángulos formados por puntos.



*Ilustración 6. Dificultad 3.*

- Dificultad 4:

Confundir características necesarias con características suficientes de las sucesiones de figuras.

- Dificultad 5:

El intento de establecer una regla es muy probable que resulte infructuoso (Alonso, et al, 1993, p. 43). Así pues, se considera que si el estudiante no percibe o identifica el patrón en la secuencia gráfico-numérica no describirá de forma precisa lo relevante en la secuencia.

- Dificultad 6:

Dificultad para encontrar términos generales para las sucesiones y lograr expresarlos de manera simbólica, utilizando un lenguaje matemático apropiado. Así pues, es posible que durante el proceso de generalizar los estudiantes no logren empoderarse del patrón o la regularidad en la sucesión que les permita formular enunciados, operaciones, procedimientos o estrategias bien fundamentadas y los conlleve a determinar la “regla” para cualquier término de la sucesión.

- Dificultad 7:

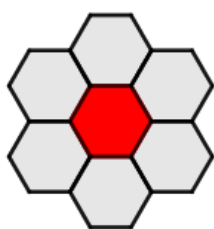
Dificultades en la representación simbólica en lenguaje matemático de la expresión general hallada. Estos son conocidos como errores de traducción (del lenguaje natural o verbal al lenguaje simbólico de las matemáticas). Por ejemplo, puede darse que dada la sucesión de números naturales 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... el estudiante determine que los términos de la sucesión se construyen a partir de la relación “ser el doble del anterior” y cuando intenta expresarlo a través de la representación simbólica, escriba  $2 + n$ .

### 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

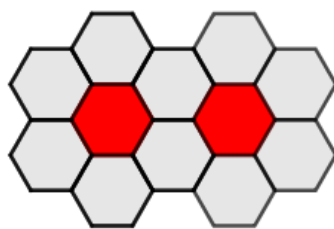
#### 3.1 DISEÑO DE LAS TAREAS

Como el objetivo de la monografía es caracterizar a los estudiantes de grado séptimo en procesos de generalización de patrones gráficos, se empezó el diseño de las tareas donde se exponía una serie de secuencias geométricas y a continuación se realizaban preguntas respecto a la secuencia dada.

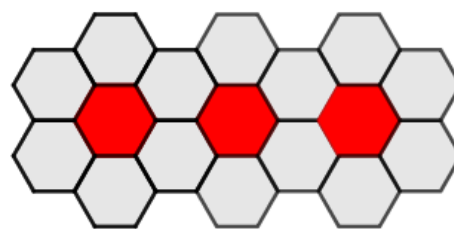
Para darle inicio al diseño de las tareas a implementar con los estudiantes, se comenzó buscando secuencias geométricas donde se pudiera evidenciar generalización de patrones gráficos, en este proceso se encontraron 4 secuencias, entre las cuales estaba la secuencia gráfica hexagonal lineal que se muestra en la *Ilustración 7*.



*Figura1*



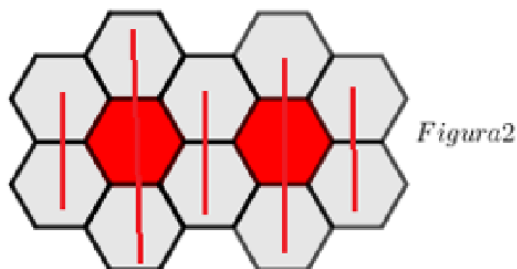
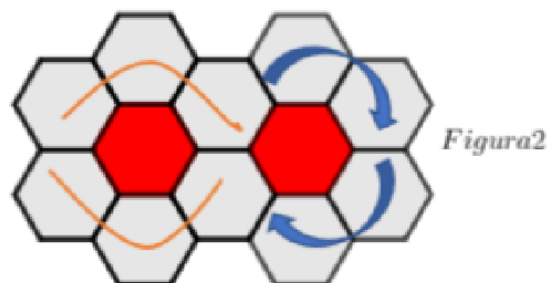
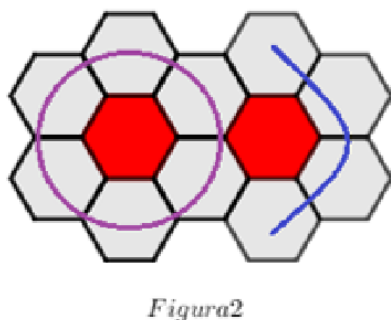
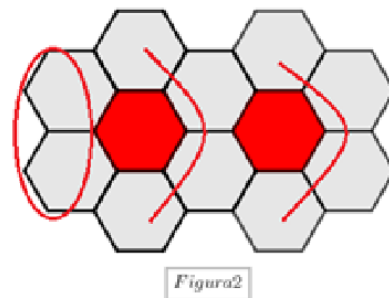
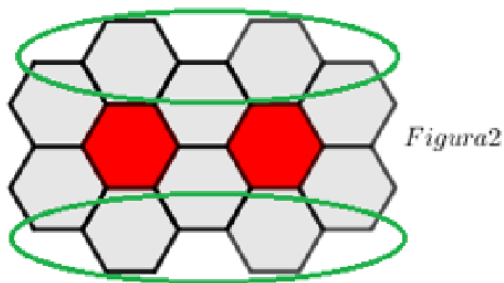
*Figura2*



*Figura3*

*Ilustración 7. Secuencia hexagonal lineal*

Para determinar si esta secuencia era útil para el diseño de las tareas, se buscaron diferentes formas de contar los hexágonos grises que rodeaban los hexágonos rojos. Se encontraron 5 formas diferentes de realizar este conteo. Estas se encuentran en la *Ilustración 8*.



*Ilustración 8. Formas de contar. Secuencia Hexagonal.*

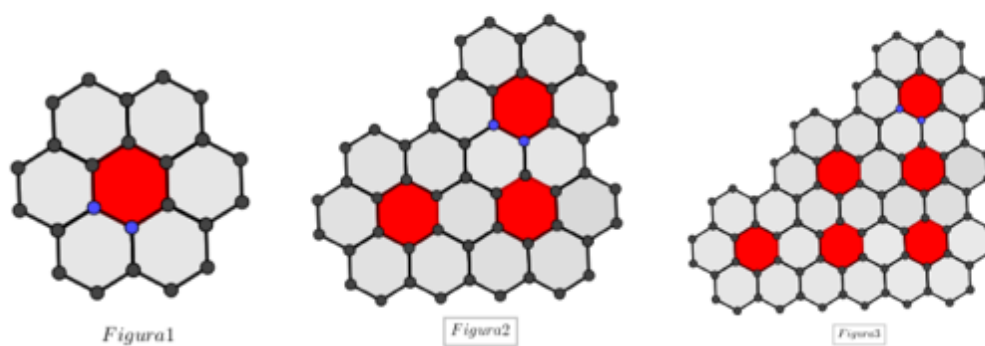
Adicional a esto se plantearon varias preguntas en las que se pedía contar el número de hexágonos grises teniendo en cuenta el número de hexágonos rojos en cada figura, hasta realizar la pregunta para una enésima figura. Las preguntas se muestran a continuación.

1. Cuando hay solo una baldosa roja ¿Cuántas baldosas grises la cubren? Describa la manera como encontró el número de baldosas grises.
2. Cuando hay 2, 3 y 4 baldosas rojas ¿Cuántas baldosas grises las cubren respectivamente? Describa la manera como encontró el número de baldosas grises.

3. Si se continúa con la secuencia en la figura 5 habrá 5 baldosas rojas ¿cuántas baldosas grises las cubrirían? Describa la manera como encontró el número de baldosas grises. ¿Esta manera funciona para el ítem 4?
4. En la figura 7 y 10 habrá 7 y 10 baldosas rojas respectivamente. ¿Cuántas baldosas grises las cubrirían respectivamente? Describa la manera como encontró el número de baldosas grises. ¿Esta manera funciona para el ítem 5?
5. En la figura 20 y 100 habrá 20 y 100 baldosas rojas respectivamente. ¿Cuántas baldosas grises habría respectivamente? Describa la manera como encontró el número de baldosas grises. ¿Esta manera funciona para el ítem 6?
6. En la figura 534 habrá 534 baldosas rojas. ¿Cuántas baldosas grises habría? Describa como lo hizo
7. Si se tiene la figura  $n$  habrá  $n$  baldosas rojas ¿Cuántas baldosas grises habría?

Esta primera versión de la tarea se examinó con detenimiento y se observó que era posible que los jóvenes de grado séptimo para quienes se estaba pensando la actividad, no pudiesen responder las preguntas, debido a que se pretendía que el estudiante llegase directamente a plantear la fórmula de conteo de la  $n$ -ésima figura sin un proceso previo.

Teniendo en cuenta lo ocurrido y lo que se estaba encontrando en el marco de referencia sobre generalización, se realizó una segunda versión de la tarea para el estudiante de esta secuencia hexagonal, una de las modificaciones es la que se muestra en la secuencia hexagonal cuadrática en la *Ilustración 9*.



*Ilustración 9. Secuencia Hexagonal Cuadrática.*

En esta secuencia geométrica, se empezó contando los hexágonos grises en cada figura expuesta. Al revisar con detenimiento la secuencia geométrica se identificó lo siguiente: la



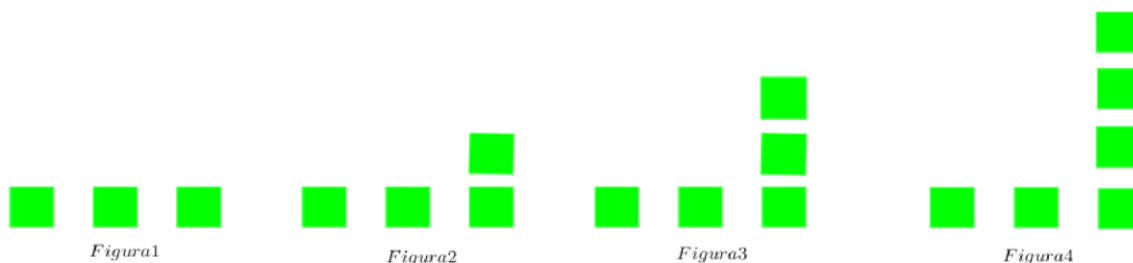
variación de la secuencia es de tipo cuadrático, más concretamente hace referencia a los números triangulares; considerar esta secuencia como una primera actividad para estudiantes de grado séptimo, era muy probable que no la pudiesen abordar debido a que en la institución no se desarrollan procesos de generalización en estos cursos y adicional a esto este proceso debe desarrollarse de forma secuencial y progresiva, lo cual requiere de un largo tiempo de trabajo, el cual no ha sido desarrollado en la institución educativa donde se hace el trabajo de campo.

Para la siguiente versión de la tarea para el estudiante se continuó con la secuencia hexagonal lineal de la *Ilustración 7*, pero ya enseñándoles a contar los hexágonos grises de cada figura y una tarea por cada forma de conteo, es decir con la misma secuencia hexagonal se diseñaron 4 tareas diferentes, pero con el mismo objetivo y finalidad.

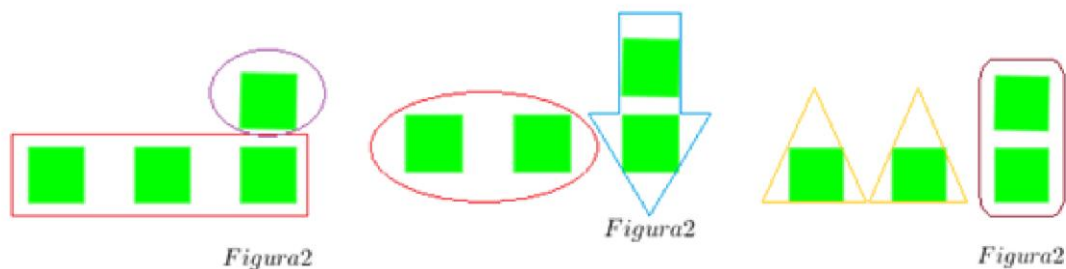
Siendo conscientes de la dificultad que implicaba empezar el trabajo de campo con la secuencia de la *ilustración 7*, se procedió a buscar cinco posibles secuencias geométricas a las cuales se pudieran adaptar y diseñar para las posibles tareas adecuadas para los participantes del estudio. Para así poder formular instrucciones y preguntas para mostrarle a los estudiantes diferentes formas de contar y llevarlo de una manera progresiva en el proceso de generalización. Teniendo en cuenta que el proceso de generalización debe ser de forma secuencial y progresiva se decidió tener en cuenta secuencias con variaciones menos complejas como la lineal o afín y después de trabajar con estas, llegar a variaciones más complejas como la cuadrática.

De las secuencias que se buscaron y encontraron se decidió iniciar a plantear y diseñar tareas y preguntas para los estudiantes con la secuencia de la *Ilustración 10*, con esta se encontraron tres formas de contar los cuadrados verdes, las cuales se nombraron así: dos constante, tres constante y conteo vertical, estas se muestran en la *Ilustración 11* respectivamente, con estas formas de conteo se diseñaron las tareas para los estudiantes y preguntas pertinentes para que reconocieran patrones en la secuencia y así llevarlos de manera progresiva al proceso de generalización. Esta secuencia tiene la particularidad de ser la de menor complejidad ya que nos lleva a una formula general  $n + 2$ , como se puede observar en las formas de conteo.

Luego de haber diseñado la tarea 1 con esta secuencia, se aplicó una prueba piloto, esta prueba nos ayudó a reconocer que con las dos primeras formas de contar era suficiente y necesario para ir alcanzando el objetivo y finalidad hasta el momento. Se tomó la decisión de que en la primera tarea solo quedarán 2 subtareas para no llegar a perder el interés en el desarrollo del trabajo de campo con los jóvenes de grado séptimo.

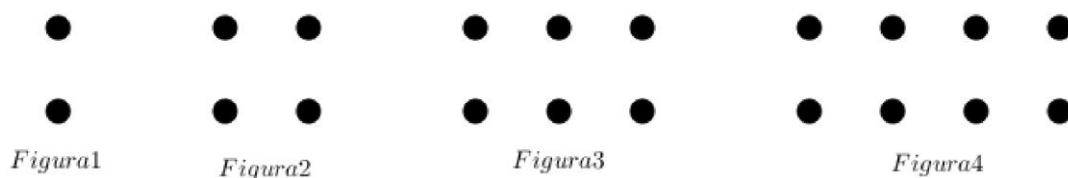


*Ilustración 10. Secuencia 1.*

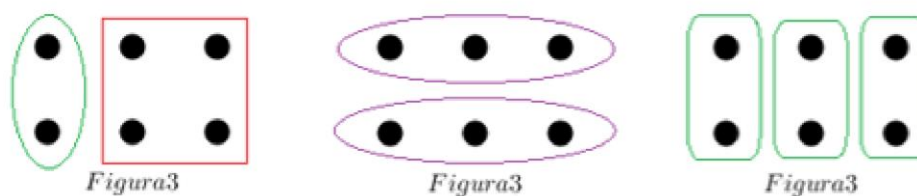


*Ilustración 11 Formas de contar la secuencia 1.*

La segunda secuencia escogida es la que se muestra en la *Ilustración 12*, como se puede observar tiene un grado mayor de complejidad respecto a la secuencia de la *Ilustración 10*. En esta secuencia se encontraron tres formas de contar los puntos de tal forma que los participantes reconocieran el patrón en cada figura, las tres formas de contar se muestran en la *Ilustración 13*.



*Ilustración 12. Secuencia 2.*

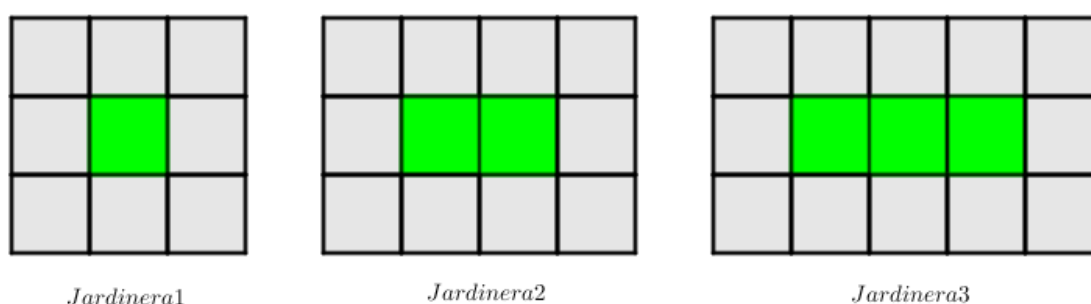


*Ilustración 13. Formas de contar Secuencia 2.*

Con esta secuencia y las formas de contar se diseñó la segunda tarea. Por la forma de la secuencia la tarea quedó diseñada de tal forma que hubiese un grado más de complejidad respecto a la primera tarea, teniendo en cuenta que nos lleva a una formula general  $3n$ , como se puede observar en las formas de conteo.

La última secuencia se muestra en la *Ilustración 14*, con esta se diseñó la cuarta tarea, pero con la diferencia que ya no se le muestra al estudiante formas de contar, sino que se le da una serie de instrucciones de tal manera que él mismo descubra y encuentre patrones que le ayude a contar y generalizar números muy grandes de las figuras.

Con esta tarea se pretende verificar en el estudiante que afianzamiento tiene con el proceso de generalización.

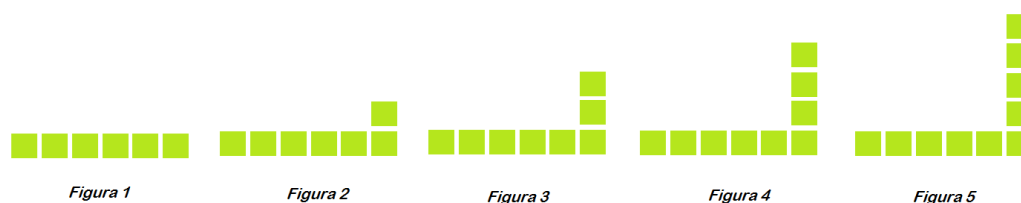


*Ilustración 14. Secuencia de la jardinera.*

Luego de una última revisión de las actividades ya diseñadas se tomaron algunas decisiones respecto a las tareas en cada actividad, estos cambios se especifican a continuación:

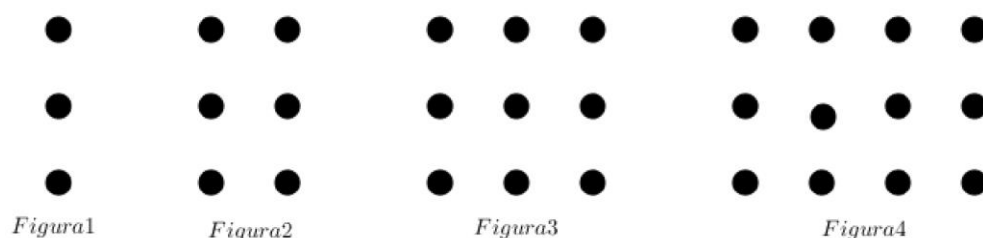
En la primera tarea se optó por cambiar la secuencia, de tal forma que si se llega a la generalización de la  $n$ -ésima figura sea  $5 + n$ , como se muestra en la *Ilustración 15*.

Con cada actividad se pretendía llevar al estudiante de forma progresiva al proceso de la generalización, es por esto que la primera actividad tiene dos tareas en las cuales se les dan elementos a los estudiantes para observar e identificar la forma de contar los cuadrados verdes y al final pedirles que describan la forma de contar en cada tarea. (Ver Anexo 1)



*Ilustración 15. Secuencia tarea1.*

En la segunda actividad también se cambió la forma de la secuencia a utilizar para el diseño de las tareas de tal forma que la generalización de la  $n$ -ésima figura sea de la forma  $3n$  como se muestra en la *Ilustración 16*, con esta secuencia se diseñaron 3 tareas en las cuales se le explica una forma de contar de manera verbal por cada tarea y se le pide al estudiante verificar si es correcta o incorrecta. (Ver Anexo 2)



*Ilustración 16. Secuencia tarea 2.*

En la tercera tarea la secuencia quedo la misma pero su finalidad es llevar al estudiante a que la generalización sea de forma verbal y simbólica, por lo tanto, se les pide a los estudiantes que, dadas unas formas de contar, las cuales están de manera verbal y simbólica, si estas son correctas o incorrectas. Con esta secuencia se diseñaron dos subtareas en las cuales, al final, se les pregunta por qué las formas de contar que se describen son equivalentes. (Ver Anexo 3)

Para la cuarta tarea no se cambió la secuencia y se les pide a los estudiantes que busquen maneras de contar los cuadrados que cubren las jardineras. (Ver Anexo 4)

### 3.2 ANÁLISIS DE LAS TAREAS DISEÑADAS

Para analizar las tareas que se diseñaron y estudiarlas desde la perspectiva teórica y la percepción de los autores respecto a lo que hace parte del proceso de generalización, se construyó una matriz (Ver Anexo 5), en la cual se organizaron once columnas.

En la primera columna se ubicaron las subtareas. Las subtareas hacen referencia a las diferentes formas de contar y las preguntas que surgen para cada secuencia; por ejemplo:

- La primera tarea presenta dos formas de contar, a la primera (cinco constantes) la llamaremos 1A y a la segunda (seis constantes) 1B.
- En la segunda tarea se presentan tres formas de contar y las subtareas se nombran de la siguiente forma: la primera forma de contar (tres constantes), como 1B, la segunda (Arriba, medio y abajo) como 2B y por último (conteo vertical) como 3B.
- En la tercera tarea se presentan dos formas de contar y una pregunta que relaciona estas dos formas de contar, las subtareas se nombran de la siguiente forma: la primera forma de contar (Cinco constantes) como 1C, la segunda (seis constantes) como 2C y por último, la pregunta 3C.

- La cuarta tarea se nombra como 4, ya que es la actividad que los estudiantes van a realizar, teniendo en cuenta las actividades previamente realizadas.

En la segunda columna se presentan los numerales de las tareas; es decir, en cada una de las tareas existe una intención propuesta por los autores para llevar a cabo el proceso de generalizar, por tal motivo:

- Se llamará numeral 1.1 a la primera parte de la tarea, iniciando con la presentación de la secuencia y las primeras filas de la tabla propuesta para desarrollar la actividad enfocada al proceso de ver, observar un patrón o regularidad.
- Se llamará numeral 1.2, a la sección de las tareas, en las cuales se tiene como objetivo comenzar a decir el patrón a partir de lo observado en el numeral 1.1, además se espera a partir de esta tarea que los estudiantes comiencen a generalizar gráficamente.
- Se llamará numeral 1.3, a la sección de la tarea que busca que los estudiantes registren el patrón. Se nombró 1.3.1 a la subtarea en la cual, a partir de una serie de preguntas orientadoras, se les pedía a los estudiantes que describieran la forma de contar, esto con el fin de registrar libremente aquello que consideraban importante y relevante. La siguiente 1.3.2 aun cuando está enfocada a llevar a los estudiantes al proceso de registrar, la intención cambia respecto a la anterior, puesto que en esta se les presenta a los estudiantes la forma de describir de una pareja de estudiantes, con el fin de orientar la forma de describir o registrar el patrón y además que analicen y comprendan el patrón para poder argumentar si es correcta o incorrecta la descripción. Por último, la 1.3.3 se realiza con la intención de guiar al estudiante por las diferentes etapas para pasar del lenguaje contextual o verbal, al lenguaje simbólico, teniendo en cuenta que este proceso no se da con mucha facilidad; sin embargo, se pretende guiarlos, presentándoles tres descripciones dadas por distintas parejas de estudiantes, sobre la forma de contar partiendo de un lenguaje verbal, combinando lenguaje verbal con simbólico y finalizando con el simbólico.
- El numeral 1.4 hace referencia a una pregunta de la subtarea 3C, cuya intención es que el estudiante identifique que, en una misma secuencia, se pueden identificar distintas formas de contar y cada una de ellas evoca a una operación y forma de describir distinta pero aun mismo resultado.
- El numeral 1.5 hace referencia a la tarea 4 en la cual los estudiantes pondrán en práctica todo lo observado y aprendido en las tareas previas.

Ahora bien, en la tercera columna se va a identificar el tipo de generalización que a luz de la teoría puede desarrollar el estudiante según la intención de cada numeral y en la cuarta columna se presenta la justificación.

- Para la tarea del numeral 1.1 se desarrolla la generalidad empírica, debido a que es el primer acercamiento del estudiante a las actividades de generalización y se espera que a través de diversos ejemplos logren identificar la regularidad o patrón.

- Para la tarea del numeral 1.2 se desarrolla la generalidad empírica, debido a que los estudiantes continúan en el proceso de identificar el patrón a partir de casos particulares y gráfica, ya que los estudiantes deberán construir una expresión gráfica que generalice todas las propiedades comunes que había observado, a medida que el número de la figura aumenta.
- En los numerales 1.3.1 y 1.3.2 construyen y observan un tipo de generalización verbal, la cual usa un lenguaje natural y muchas veces cómodo para los estudiantes.
- En el numeral 1.3.3 se les presenta la descripción de la forma de contar en un lenguaje verbal y simbólico de tal forma que identifiquen las distintas formas de registrar el patrón.
- En el numeral 1.5, la cual corresponde a la tarea 4, se espera que el estudiante transite y desarrolle cada uno de los tipos de generalización, iniciando por el empírico abstrayendo características en casos particulares, gráfico generalizando la representación de la secuencia y por último verbal o simbólico según el alcance de los estudiantes.

En la columna cinco se presentan las estrategias de las cuales pueden hacer uso los estudiantes en tareas de generalización y la columna seis es su correspondiente justificación.

- En el numeral 1.1 se emplea la estrategia de conteo, presentándole a los estudiantes diferentes formas de contar una secuencia.
- En el numeral 1.2 los estudiantes continúan estudiando una forma de contar, identificando la diferencia constante que existe en cada uno de ellos y se espera que a medida que avanza en su actividad logre relacionar componentes, es decir que varía y que permanece constante; por lo tanto, usa estrategias de conteo y explícita.
- En los numerales 1.3.1, 1.3.2 y 1.3.3 se espera que los estudiantes hayan logrado identificar y relacionar lo que permanece constante y lo que varía en la forma de contar, para describir, analizar y argumentar la forma de registrar el patrón.
- En el numeral 1.5 los estudiantes pueden hacer uso de cada una de las estrategias citadas por Valenzuela & Gutiérrez (2018) como conteo, identificando una forma de contar, recursividad, obteniendo el término a partir del anterior o de forma explícita, encontrando relación entre lo constante y variable en la forma de contar.
- En la columna siete se presentan la etapa a la cual apunta cada subtarea en el proceso de generalizar tanto en los numerales 1.1 y 1.2 las actividades apuntan a guiar a los estudiantes en el proceso de ver el patrón por medio de identificar las formas de contar una secuencia. En los numerales 1.2 y 1.3.1 se busca que los estudiantes digan el patrón, extrapolen aquello que han observado y por último en los numerales 1.2, 1.3.1, 1.3.2 y 1.3.3 se lleva a los estudiantes a la etapa de registrar por cualquier tipo de método escrito, gráfico, simbólico o verbal; en el numeral 1.5 los estudiantes pasan por cada una de las etapas llevando a cabo de esta forma el proceso de generalizar.

En la columna nueve se encuentran los errores y dificultades asociadas a cada proceso de generalización, identificando en cada tarea cual se podría presentar en los estudiantes y la columna 10 su respectiva justificación.

- Para las subtareas 1A, 1B, 2A, 2B, 2C, 3A, 3B y 4 se presentan las dificultades 1 y 2 en las cuales se les presenta secuencias geométricas en un ejercicio de generalización que es nuevo para ellos.
- Para la subtarea 4 se puede presentar la dificultad 3, debido a que en secuencias gráficas es común identificar características que no son relevantes como la forma, el color, etc.
- La dificultad 5 se puede presentar en cada una de las subtareas, pues va direccionada a la etapa de ver, en la cual, si no se comprende o se logra abstraer el patrón, es decir plantear una regla o conjetura.
- Para las subtareas 1A, 1B y 4 se puede presentar la dificultad 6, debido a que no es fácil lograr expresar por medio de un enunciado la generalidad.
- Para las subtareas 3A, 3B y 4 se puede presentar la dificultad 7, debido a que si el estudiante hace el paso del lenguaje natural al simbólico puede presentar dificultades al realizar dicha traducción.

En la columna 11 se encuentra las precepciones de los autores de la presente monografía, respecto a las consideraciones que se realizaron al diseñar cada numeral de las tareas.

### **3.3. RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN**

En esta sección se describen los procesos que se llevaron a cabo para desarrollar las tareas con los estudiantes, se especifican los medios de recolección de información y cómo se codificó para posteriormente analizarla.

Para recoger la información se proyectó desde un principio hacerlo con los seis grupos de estudiantes de grado séptimo del Colegio Gimnasio el Lago, en primera instancia se solicitó a la rectora de la institución, poder llevar a cabo el presente trabajo de grado, teniendo en cuenta que se iban a hacer tomas de video y audio y producciones escritas.

En el horario de la institución se contempla una hora de trabajo pedagógico, en la cual los estudiantes pueden desarrollar las tareas o trabajos que se tienen pendientes. Se concertó con la coordinadora académica desarrollar el trabajo en esta hora para no afectar las otras materias y actividades académicas de los estudiantes.

Para poder recoger la información se planteó hacer una prueba piloto con uno de los seis grupos de grado séptimo en la cuarta semana del mes de septiembre para hacer las últimas modificaciones al trabajo de grado de tal forma que se pudiera aplicar con los cinco grupos restantes; sin embargo, durante esta semana se llevó a cabo en la institución la “semana cultural” por tal motivo se tuvo que aplazar la aplicación, debido a que se programaron actividades en las cuales los estudiantes de los diferentes grados debían participar.

Teniendo en cuenta el inconveniente presentado en la institución para desarrollar la prueba piloto en esa fecha y dado que la siguiente semana realizaban evaluaciones bimestrales, se pospuso la aplicación para la semana siguiente a la de receso; sin embargo, no se iba a realizar prueba piloto por cuestiones de tiempo, sino que se iba a realizar directamente la aplicación de las tareas. Al volver de la semana de receso, la institución implementó una estrategia académica para mitigar la pérdida del año en primaria y bachillerato, la cual se desarrollaría durante las siguientes dos semanas, por tal motivo no se pudo llevar a cabo como se tenía previsto. Observando que las semanas estaban pasando y cada vez era más complicado poder llevar a cabo la aplicación de las tareas por las múltiples actividades de la institución, se escogió solo uno de los cursos de grado séptimo con los siguientes criterios: Que hubiese sido uno de los cursos en los que rotaba la docente de matemáticas que se había entrevistado previamente y que estuviese al día con las enseñanzas<sup>1</sup> de matemáticas propuestas para el cuarto periodo, con el fin de no afectar el debido cumplimiento del plan de estudios. Estableciendo estos criterios se escogió al curso 7B del Gimnasio el Lago para implementar las tareas de generalización durante tres sesiones.

### **3.3.1. Videos, Audios y Producciones escritas**

A continuación, se enlistan los diferentes medios con los cuales se recolecta la información:

- **Video:**

**VID-171019-A0001:** El cual fue tomado durante la primera sesión de la aplicación, en la cual se desarrollaron las dos primeras subtareas.

- **Audios:**

**AUD171019-9.06:** El cual fue tomado durante la primera sesión de la aplicación en distintos grupos a los cuales se acercaba la maestra en formación.

**AUD251019-8.30:** El cual fue tomado durante la segunda sesión, en la cual se desarrollaron las cuatro siguientes subtareas, en distintos grupos a los cuales se acercaba la maestra en formación.

**AUD281019-10.45:** El cual fue tomado durante la tercera sesión, en la cual se desarrollaron las últimas dos subtareas, en distintos grupos a los cuales se acercaba la maestra en formación.

- **Producciones escritas:**

Se recolectaron 15 pruebas escritas, teniendo en cuenta que los estudiantes desarrollaron las tareas en parejas.

---

<sup>1</sup> Enseñanzas hace referencia a los contenidos planteados en la malla curricular de matemáticas. Son llamados así por el modelo de pedagogía conceptual.



### **3.3.2. Codificación de la información**

Luego de desarrollar las tareas con 27 estudiantes del colegio Gimnasio el lago que cursan grado séptimo de bachillerato, cuyo trabajo fue desarrollado en parejas, ya que como menciona Mason et al. (1999) el trabajo en pares favorece el poder debatir o discutir las maneras en que se describe o registra las diferentes formas de contar, esperando que cada integrante participe con una idea o una discusión. Se procedió a realizar el análisis de las producciones de los estudiantes respecto a las tareas propuestas, se tuvo en cuenta el video y los audios, con el fin de identificar la etapa de decir, es decir las palabras, gestos, indicaciones, entre otros. Las producciones escritas se convierten en el principal garante de la etapa de registrar y permite indagar respecto a la etapa de ver.

Con el fin de analizar el tránsito del estudiante por las tres etapas del proceso de generalizar, se decidió escoger dos parejas en las cuales se identificaran distintos niveles en la construcción de la generalización, que hubiesen desarrollado todas las tareas propuestas, además que los integrantes hubiesen permanecido juntos durante en el desarrollo de las tres sesiones y finalmente los grupos en donde más se hubiese recogido información de audio y video. Lo anterior, con el fin de lograr analizar, observar e identificar todo el proceso, debilidades y fortalezas, avances o retrocesos que llevaron a cabo cada pareja. Por tal motivo se escogen dos grupos. El primero conformado por dos niñas que evidenciaban un nivel por debajo de los demás grupos respecto a la etapa de registrar y de las cuales se tenía mayor evidencia. El segundo grupo conformado por dos niños de los cuales se tenía mayor información y se observó el tránsito por los diferentes niveles de la construcción de la generalización.

### **3.4. MÉTODOS PARA EL ANÁLISIS**

Para hacer el respectivo análisis, se diseñó una matriz para la primera pareja, la cual fue seleccionada teniendo en cuenta los objetivos planteados en el presente documento, el marco teórico y además los niveles nombrados por García (2011). La primera pareja de estudiantes alcanzó el nivel III en las fases para la construcción de una generalización y no lograron trascender al nivel IV, respecto a la etapa de registrar (Ver Anexo 6). Por otra parte se construye una segunda matriz para la segunda pareja, la cual fue seleccionada teniendo en cuenta los elementos mencionados previamente; sin embargo, esta pareja logró trascender al nivel IV en las fases para la construcción de una generalización (Ver Anexo 7).

Las matrices se organizan en columnas de la siguiente forma:

- En la primera columna se ubicaron las subtareas, puesto que se diseñaron de tal manera en que a medida que avanzaban los estudiantes en su desarrollo encontraban un grado mayor de complejidad.
- En la segunda columna el análisis de las respuestas enfocadas a la etapa de ver, contrastando esta información con el marco teórico, respecto al nivel de construcción de la generalización en el que se encuentran los estudiantes, las dificultades que pudiesen presentar respecto a esta etapa, el tipo de generalización que se logró

alcanzar y en la tercera columna su respectiva evidencia como producciones escritas en las cuales se logra indagar e identificar respecto a la etapa de ver y audios en los cuales expresan verbalmente aquello que observaron.

- En la cuarta columna el análisis de las respuestas enfocadas a la etapa de decir, contrastando esta información con el marco teórico, respecto al nivel de construcción de la generalización en el que se encuentran los estudiantes, las dificultades que pudiesen presentar respecto a esta etapa, el tipo de generalización que se logró alcanzar y en la quinta columna su respectiva evidencia, principalmente audios y videos en los que presentan palabras, gestos e indicaciones que logran dar cuenta de cómo los estudiantes expresan el patrón que han observado y también a través de producciones escritas en las cuales se logra indagar e identificar respecto a la etapa de decir.
- En la sexta columna el análisis de las respuestas enfocadas a la etapa de registrar, respecto al nivel de construcción de la generalización en el que se encuentran los estudiantes, las dificultades que pudiesen presentar respecto a esta etapa, el tipo de generalización que se logró alcanzar contrastando esta información con el marco teórico y en la séptima columna su respectiva evidencia en las producciones escritas, en las cuales se identifican diferentes formas de registrar un patrón.

#### 4. ANÁLISIS

A continuación, se presenta el análisis de cada una de las etapas del proceso de generalizar en el desarrollo de las tareas de cada uno de los grupos previamente seleccionados.

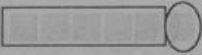
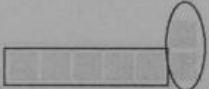
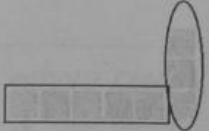
##### 4.1. ANÁLISIS PRIMER GRUPO.

Para analizar la evolución del grupo uno en cada una de las etapas del proceso de generalizar, se identificará el nivel que alcanzaron en cada etapa según García (2011) y la matriz de análisis del grupo 1.

##### 4.1.1. ANÁLISIS VER

Se comenzará identificando la construcción del proceso de generalización recorriendo cada una de las subtareas centrándose solo en la etapa ver.

**Nivel I:** *Observar la imagen como un todo – OI:* los estudiantes se percataron de que al iniciar la subtarea 1A la secuencia dada no concordaba con la forma que se les muestra para contar los cuadrados como se muestra en la *Ilustración 17*, es decir comenzaron a ver la secuencia como un todo antes de pasar a descomponer en partes relevantes cada una de las figuras, en este momento los estudiantes corrigen el error de manera correcta.

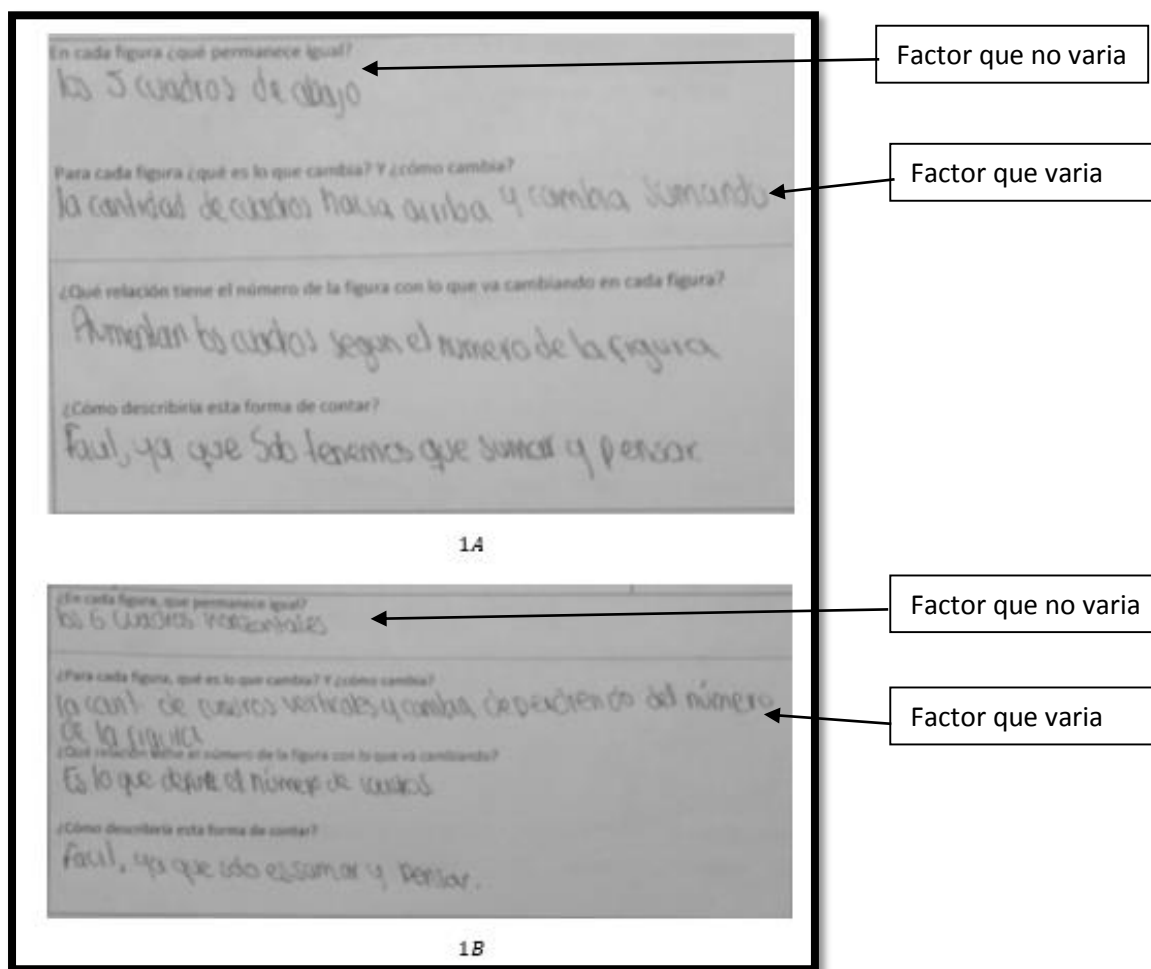
FIGURA	REPRESENTACIÓN	NÚMERO DE CUADRADOS VERDES
1	 <i>Figura 1</i>	$5 + 1 = 6$ $2 + 1 = 3$
2	 <i>Figura 2</i>	$5 + 2 = 7$ $2 + 2 = 4$
3	 <i>Figura 3</i>	$5 + 3 = 8$ $2 + 3 = 5$

*Ilustración 17. Nivel I. Etapa Ver.*

##### **Nivel II:** *Analizar la imagen – AI*

Los estudiantes alcanzan este nivel porque al momento de socializar las preguntas ellos identifican aquello que es constante para cada subtarea y lo que permanece igual; por

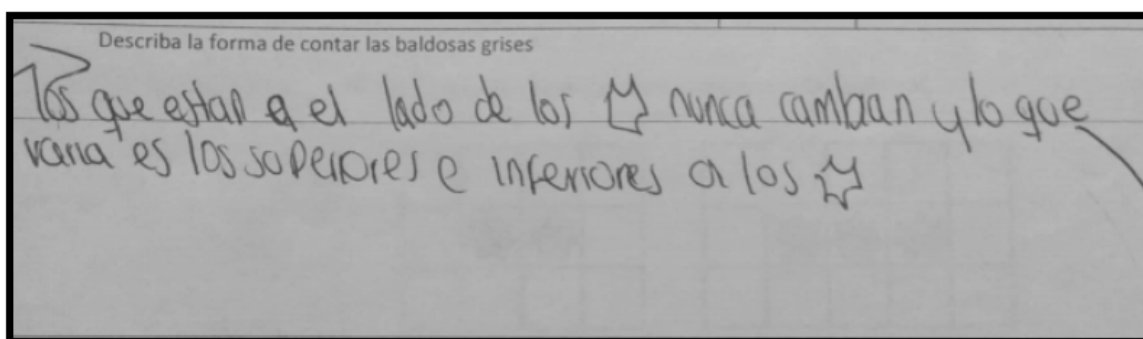
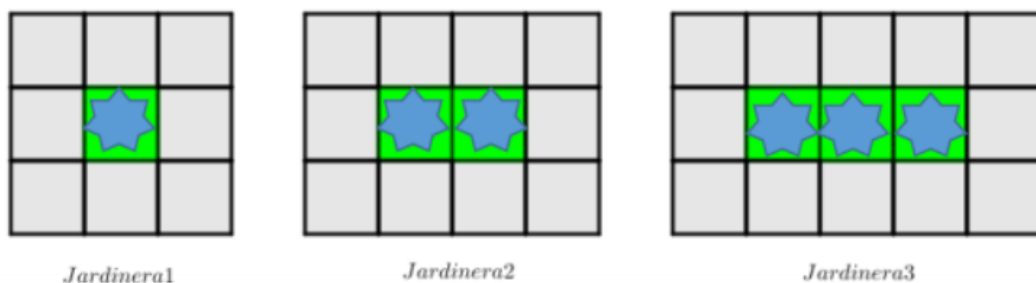
ejemplo, en el audio se escucha decir a los estudiantes respecto a lo que permanece igual lo siguiente: “en esta actividad las cosas que no cambian son los cuadrados y la base” y a lo que se refieren con la base es a los cinco cuadrados de la subtask 1A. Ellos ya empiezan a descomponer cada figura en sus partes, para este caso lo que varía y lo que no varía según el número de la secuencia. Esto se puede evidenciar en las respuestas dadas por los estudiantes en las subtasks 1A, 1B como se muestra en la *Ilustración 18*.



*Ilustración 18. Nivel II. Etapa Ver.*

**Nivel III:** Establecer relaciones entre las partes de la imagen:

*Establecer relaciones necesarias – ERN y Establecer relaciones suficientes – ERS;* se puede evidenciar que los estudiantes logran alcanzar este nivel porque relacionan el número de la figura con lo que varía en la secuencia geométrica, cabe aclarar que ellos logran resaltar algunas relaciones que son necesarias pero no suficientes, y en otras ocasiones resaltan relaciones suficientes pero que no son necesarias, por lo tanto se les dificulta poder pasar al nivel IV, y como se evidencia en la respuesta que dan en la *Ilustración 19*, no logran llegar a dicho nivel.



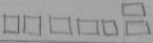
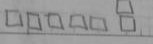
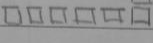
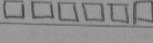
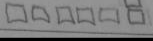
*Ilustración 19. Nivel III. Etapa Ver.*

#### **4.1.2. ANÁLISIS DECIR**

Se realizará un recorrido por las subtareas centrándose en aquello que después de mirarlo lo trataron de decir plasmándolo de forma gráfica, verbal o audio.

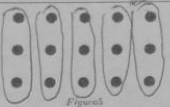





**Nivel I:** *Describir características de la imagen como un todo – DIT.* En este nivel se identifican de manera muy concreta los estudiantes ya que describen la forma de contar en cada subtarea identificando el patrón de conteo que se les hace ver, esto hace que logren pasar al nivel II.

**Nivel II:** *Describir las propiedades comunes entre los casos particulares – DPC.* Al identificar el patrón de conteo los estudiantes empiezan a describir de manera gráfica el cómo representar la figura que se les está solicitando, esto lo hacen a partir de lo que vieron y lo que pudieron decir de las primeras 4 figuras que vendrían a ser los casos particulares. Esto se puede evidenciar en la *Ilustración 20*.

8		(Cada cuadro vale 4)	$2 + 8 = 10$
10		(Cada cuadro vale 5)	$2 + 10 = 12$
20		(Cada cuadro vale 5)	$5 + 20 = 25$
100		(Cada cuadro vale 50)	$5 + 100 = 105$
537		(Cada cuadro vale 179)	$5 + 537 = 542$

*Ilustración 20. Nivel II. Etapa Decir.*

**Nivel III:** Describir la forma que se relacionan las partes – *DRP*. En esta etapa de decir los estudiantes describen como encontrar el número de: cuadrados, puntos, hexágono o jardineras de números de figuras muy grandes relacionando el número de la figura, la parte que varía y lo que permanece constate y que en su mayoría son de forma acertada, como se evidencia en la *Ilustración 21*. Pero se quedan solo en este nivel ya que no logran describir una conjetura del patrón de conteo que se esté considerando.

5			$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$
9			$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ $3 + 3 + 3 = 27$
13		(Cada punto vale 13)	$3 \times 13 = 39$
21		(Cada punto vale 21)	$3 \times 21 = 63$
111		(Cada punto vale 37)	$3 \times 111 = 333$
541		(Cada punto vale 541)	$3 \times 541 = 1623$

*Ilustración 21. Nivel III. Etapa Decir.*

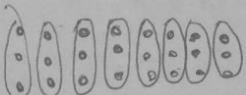




### 4.1.3. ANÁLISIS REGISTRAR

Se realizará un análisis de las respuestas y registros que realizaron en las subtareas, tomando como registro la parte gráfica, numérica o simbólica y la verbal.

#### Nivel I

**Gráfico:** Los estudiantes realizan un registro gráfico de las figuras, pero se puede evidenciar que en dicho registro se encuentran en un nivel superior como se puede observar en la *Ilustración 22*.

**Numérico o simbólico:** Escribir las propiedades comunes entre los casos. Los estudiantes logran, *escribir con palabras las características de la imagen – EPCP*, apoyando los registros gráficos de cada subtarea según halla correspondido. También logran, *escribir con palabras y símbolos las características de la imagen - EPCM*, en la parte donde escriben de forma numérica ese patrón de conteo que se les muestra o que encontraron para la última subtarea como se muestra en la *Ilustración 22*.

9		$3+3+3$ $3+3+3=27$
13		(Cada punto vale 13) $3 \times 13 = 39$
21		(Cada punto vale 21) $3 \times 21 = 63$
111		(Cada punto vale 37) $3 \times 111 = 333$
541		(Cada punto vale 541) $3 \times 541 = 1623$

*Ilustración 22. Nivel I. Etapa Registrar Gráfica y Numérica o Simbólica.*

**Verbal:** Los estudiantes realizan registros de forma verbal a partir de los registros gráficos que han hecho sin llegar a escribir el patrón de conteo, como se evidencia en la *Ilustración 23*.

Durante la clase de matemáticas, tres grupos describieron la anterior forma de contar de las siguientes formas:

El primer grupo describió de la siguiente forma:

“Se suma el número 4 tantas veces como lo indica el número de la figura, es decir se multiplica 4 por el número de la figura. A este resultado se suma el dos”

El segundo grupo describió de la siguiente forma:

“4 multiplicado por el número de figura más 2”

El tercer grupo describió de la siguiente forma:

“ $4 \cdot Y + 2$ , siendo  $Y$  el número de la figura”

¿Las descripciones de cada grupo hacen referencia a lo mismo? Argumente su respuesta.

Si pero a la vez son diferentes porque se describen de otras formas

¿Son correctas las descripciones que realiza cada grupo de la forma de contar? Argumente su respuesta y corrija si es necesario.

Si, además siempre va a dar la misma descripción

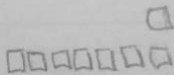
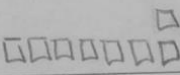
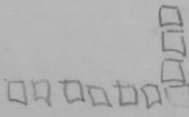
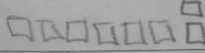
*Ilustración 23. Nivel I. Etapa Registrar Verbal.*

## Nivel II

**Gráfico:** Los participantes en sus registros gráficos se evidencian que ya el todo lo empiezan a partir en sus partes, en este caso la parte fija y la parte que varía.

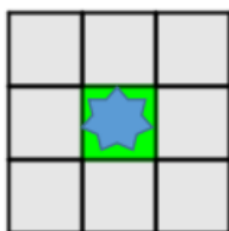
**Numérico o simbólico:** Los estudiantes *escriben con palabras las propiedades comunes entre los casos particulares – ECPP*, *escriben con palabras y símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares – ECPM* como se presenta en la Ilustración 24.



9		(cada cuadro vale 4) $6 + 8 = 14$
13		(cada cuadro vale 6) $6 + 12 = 18$
21		(cada cuadro vale 5) $6 + 20 = 26$
111		(cada cuadro vale 55) $6 + 110 = 116$

*Ilustración 24. Nivel II. Etapa Registrar Numérico o Simbólico.*

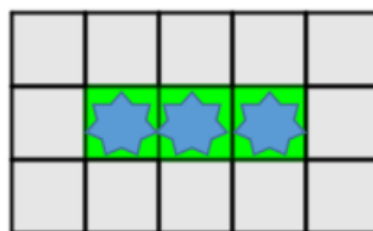
**Verbal:** Los estudiantes relacionan las partes que varían con lo que no varía y logran registrarlas al finalizar la última subtarea como se evidencia en la *Ilustración 25*.



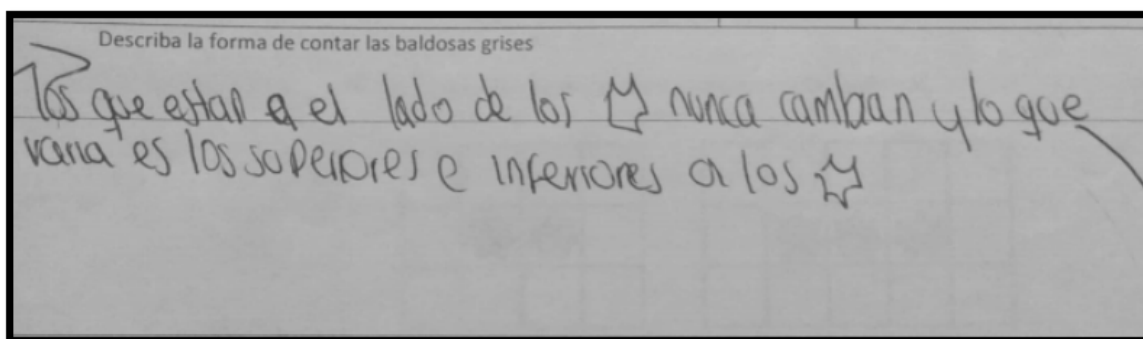
*Jardinera1*



*Jardinera2*




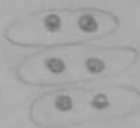

*Jardinera3*



*Ilustración 25. Nivel II. Etapa Registrar Verbal*

### Nivel III

**Gráfico:** Los estudiantes se ubican en este nivel en su registro gráfico ya que pueden relacionar las partes de las figuras en aquellas que no son dibujables y de esta manera poder realizar una representación gráfica apoyada con palabras, como se evidencia en la *Ilustración 26*.

20		(cada puntito vale 10)
100		(cada puntito vale 50)
537		(cada puntito vale 179)

*Ilustración 26. Nivel III. Etapa Registrar Gráfica.*

**Numérico o simbólico:** Los estudiantes logran *escribir con palabras y símbolos la forma en que se relacionan las partes en cada figura - EFRM*.

**Verbal:** Los estudiantes no logran llegar a establecer una conjetura de los patrones de conteo que se trabajó en cada una de las tareas.

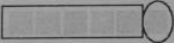
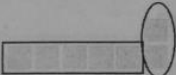
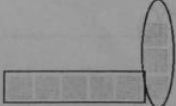
#### 4.2. ANÁLISIS SEGUNDO GRUPO

Para analizar el avance del grupo dos en cada una de las etapas del proceso de generalizar, se identificará el nivel que alcanzaron en cada etapa según García (2011) y la matriz de análisis del grupo 2.

##### 4.2.1 ANÁLISIS VER

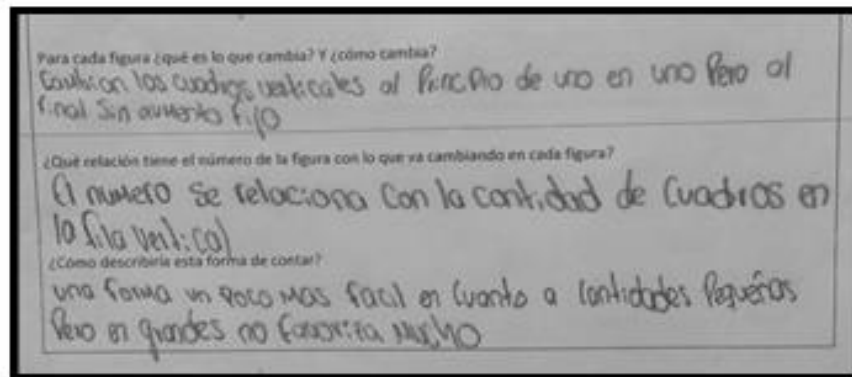
Se identificará el nivel de construcción de la generalización que alcanzaron los estudiantes en la etapa de ver, realizando un recorrido por las diferentes tareas propuestas en el instrumento.

**Nivel I: (OI)** Observar la imagen como un todo: Los estudiantes observan la imagen como un todo en el momento que identifican el error de digitación que tiene la tarea, puesto que dicen “No entiendo por qué la cantidad de cuadrados es 3 si hay 6 en la figura” y además corrigen la operación como se muestra en la *Ilustración 27*. Realizan un conteo e inmediatamente pasan al segundo nivel.

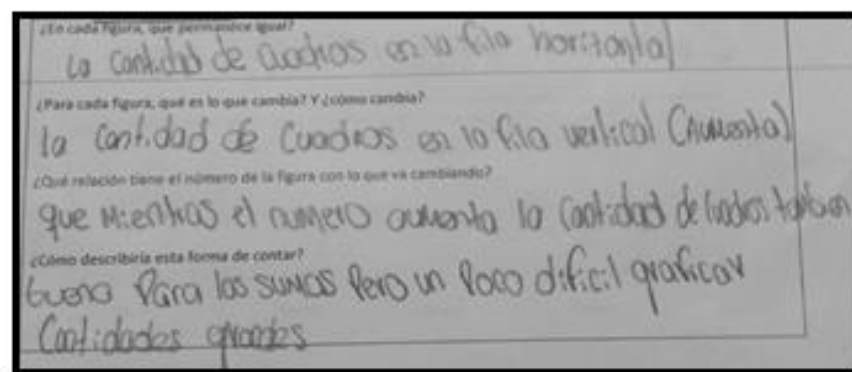
FIGURA	REPRESENTACIÓN	NÚMERO DE CUADRADOS VERDES
1	 Figura 1	$2+2=4$ $5+1=6$
2	 Figura 2	$2+2=4$ $5+2=7$
3	 Figura 3	$2+2=4$ $5+3=8$

*Ilustración 27. Nivel I. Etapa Ver.*

**Nivel II: (AI)** Analizar la imagen (Descomponer el todo): La actividad le presenta a los estudiantes diferentes formas de contar, en la mayoría se proponen aquellas en las que se puede identificar una parte que permanece constante y otra que está variando. Teniendo en cuenta la respuesta de los estudiantes a las preguntas en relación a estos dos componentes, que se muestra en la *Ilustración 26*; podemos observar que tanto en las sub-tareas 1A, 1B y 2A se analiza la imagen y se descompone en sus partes, pero no se establece una relación entre ellas.



1A



1B

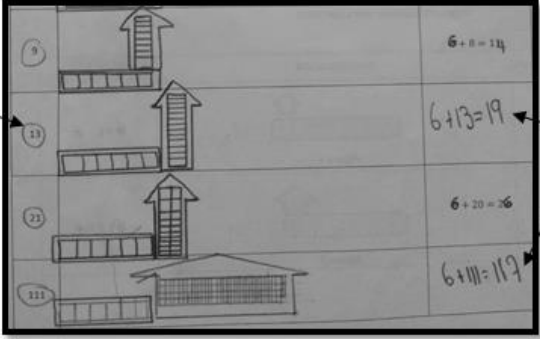
Ilustración 28. Nivel II. Etapa Ver.

**Nivel III:** Establecer relaciones entre las partes de la imagen:

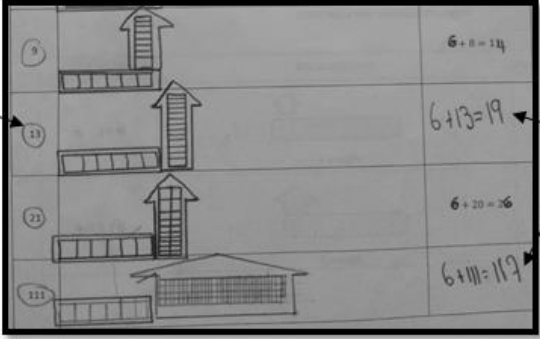
*Establecer relaciones necesarias – ERN y Establecer relaciones suficientes – ERS;* los estudiantes logran establecer relaciones, en algunos casos necesarias pero no suficientes y en otros casos no establecen las necesarias para poder dar el paso a la conjetura, es decir al IV nivel. Por ejemplo, se puede observar que en las sub-tareas 1B y 3B no logran establecer la relación necesaria que es restarle uno a la figura, tal como se muestra en la *Ilustración 29*.

Aunque intentan establecer una relación con el número de la figura, teniendo en cuenta las marcaciones que hacen, no lo hacen correctamente.

No identifica que debe restarle uno al número de la figura.  
Po ejemplo, no es  $6+13$ , sino  $6+12$ . De igual forma no es  $6+111$ , sino  $6+110$ .



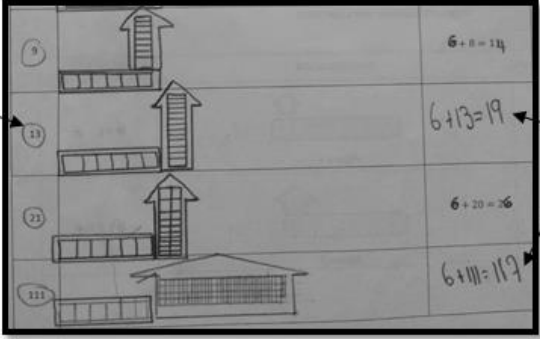
1B



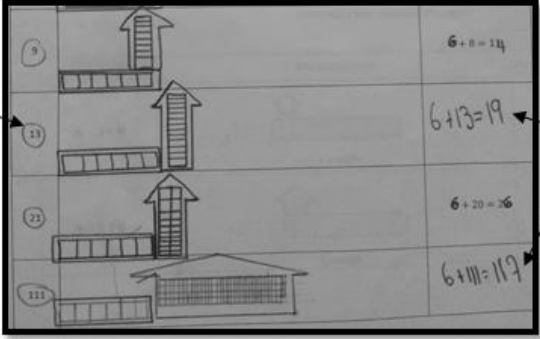
1B

Efectúan correctamente la operación.

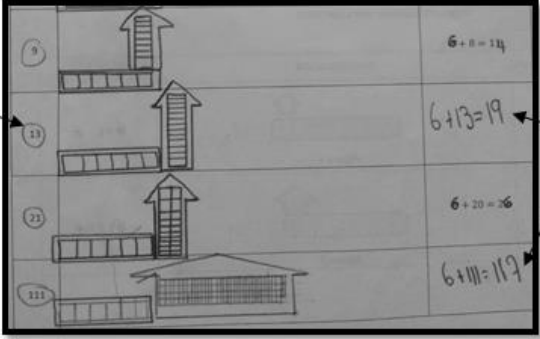
No identifican que deben restarle uno al número de la figura. Las operaciones correspondientes son  $6+4*99$  y  $6+4*533$



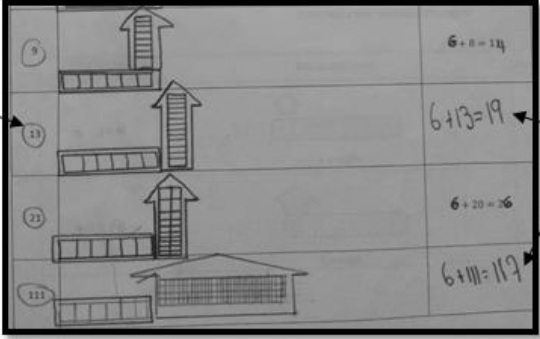
1B



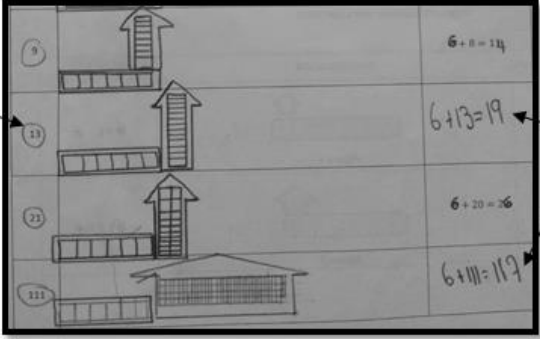
1B



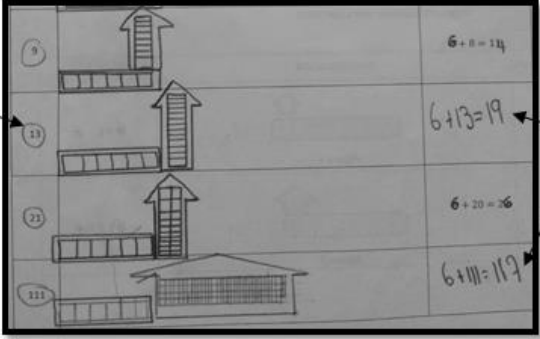
1B



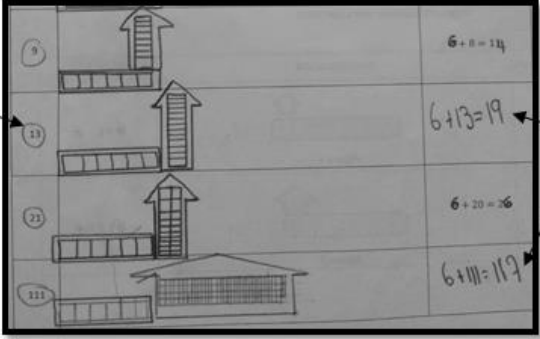
1B



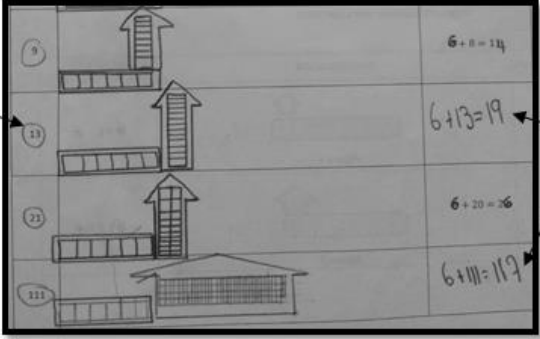
1B



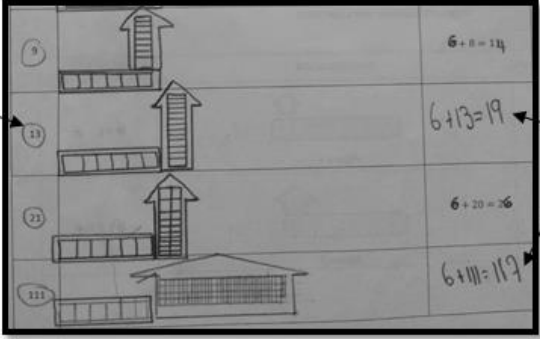
1B



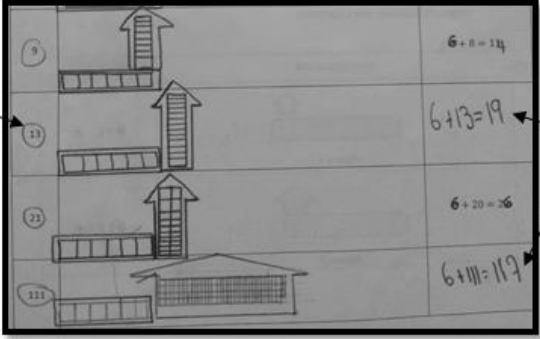
1B



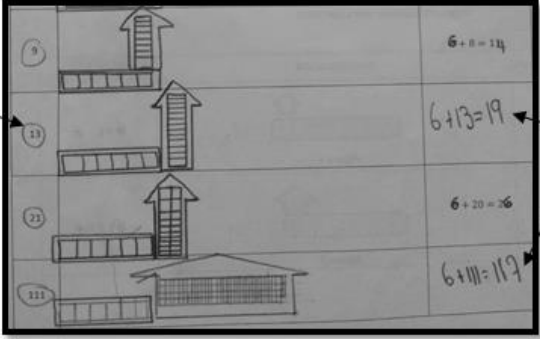
1B



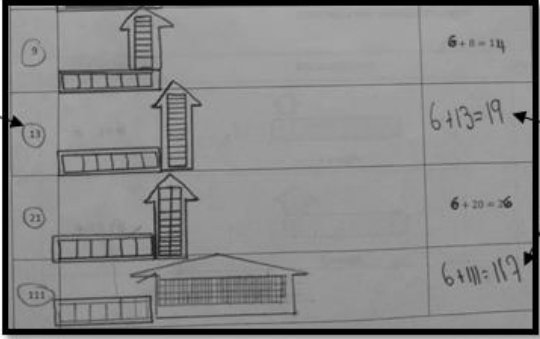
1B



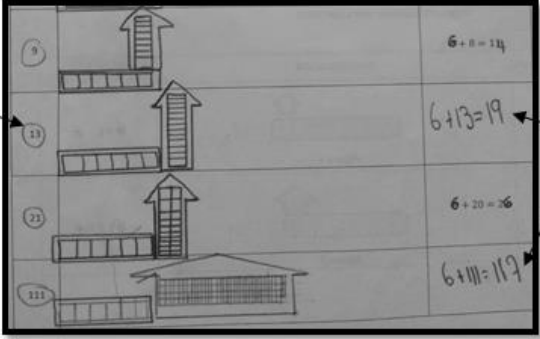
1B



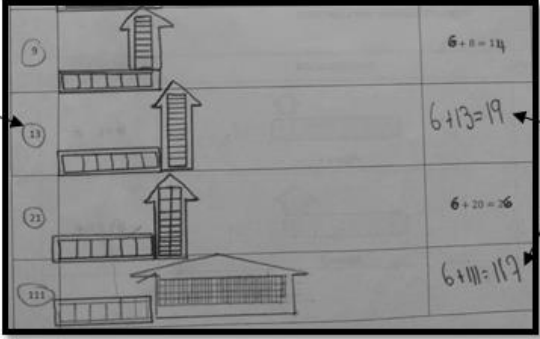
1B



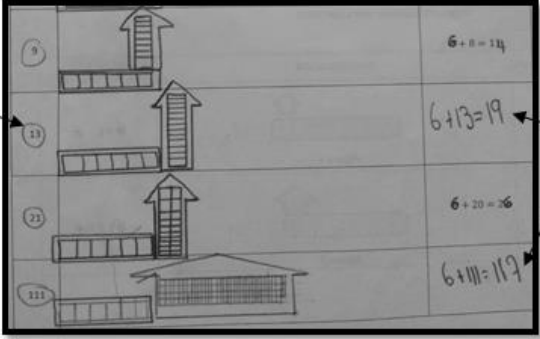
1B



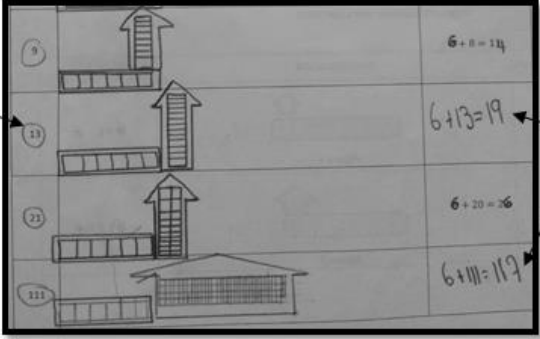
1B



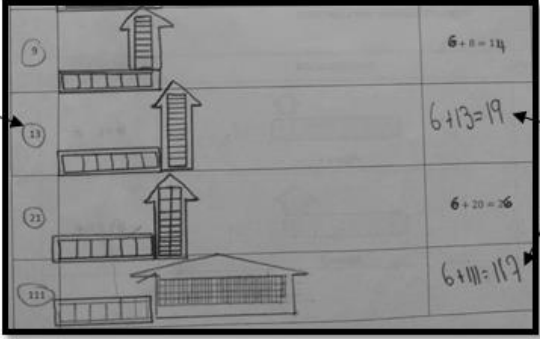
1B



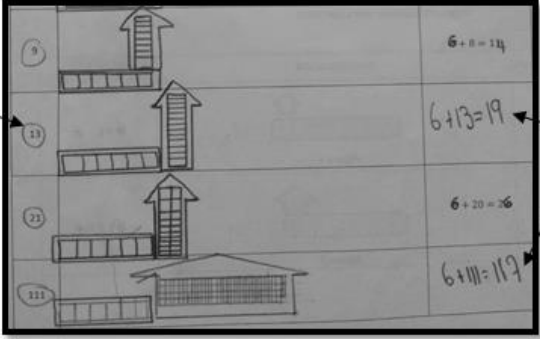
1B



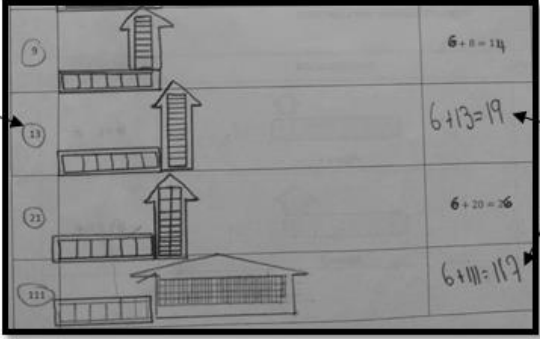
1B



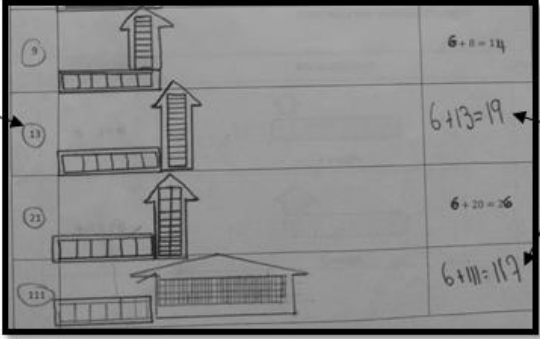
1B



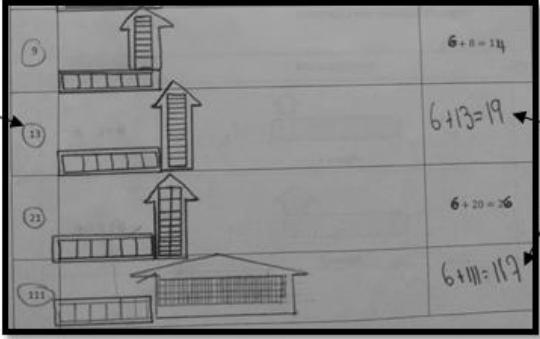
1B



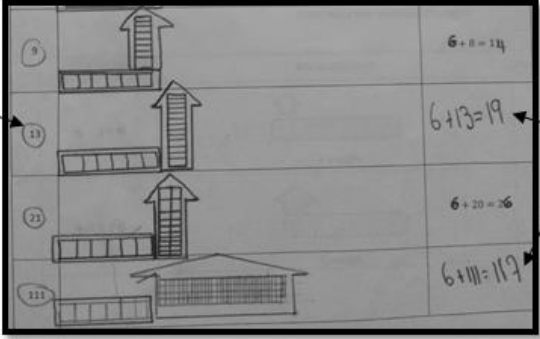
1B



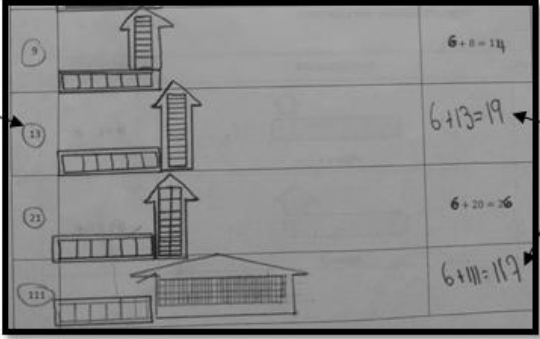
1B



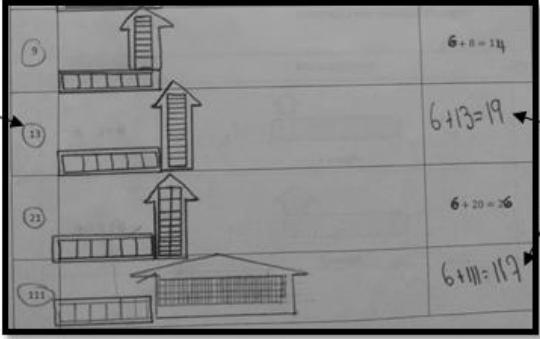
1B



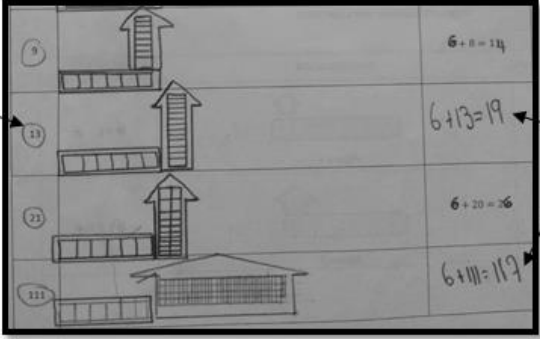
1B



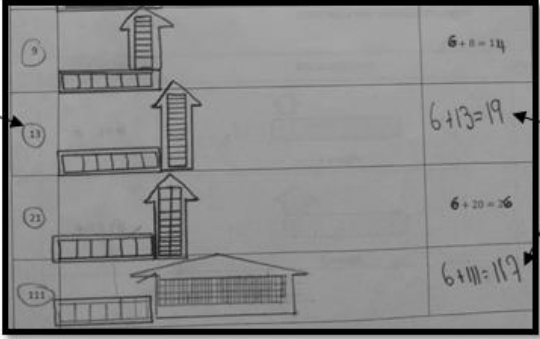
1B



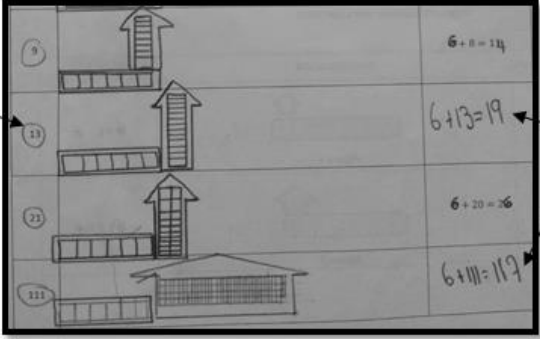
1B



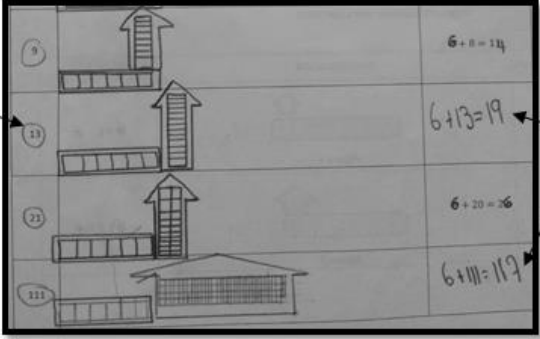
1B



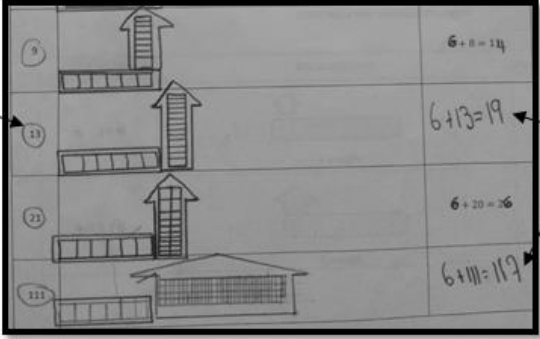
1B



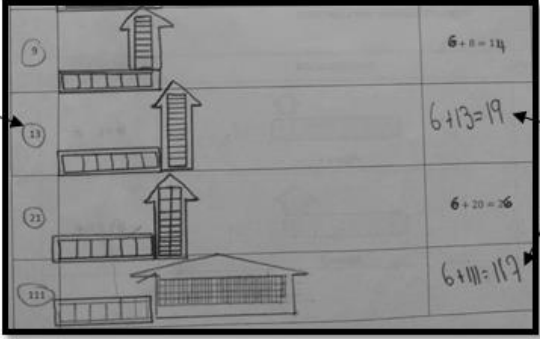
1B



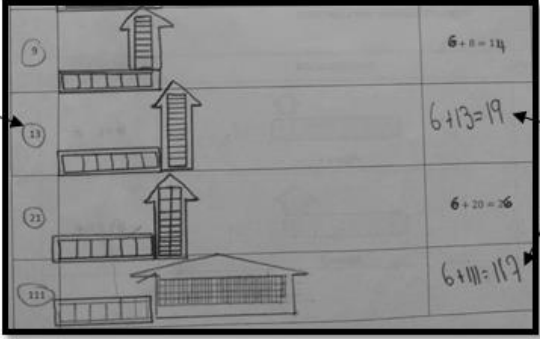
1B



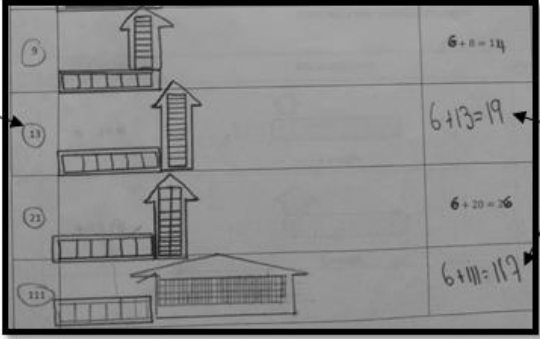
1B



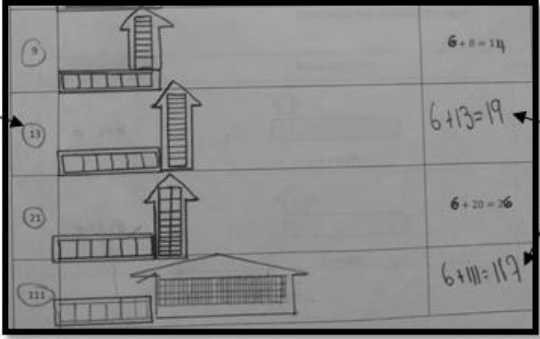
1B



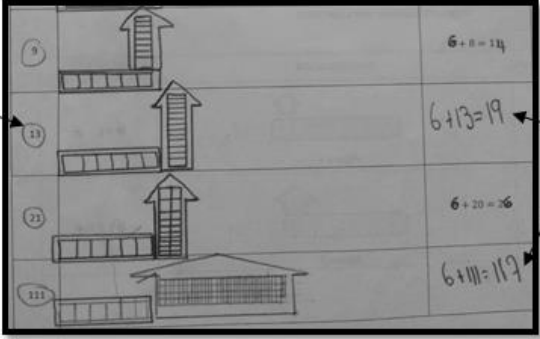
1B



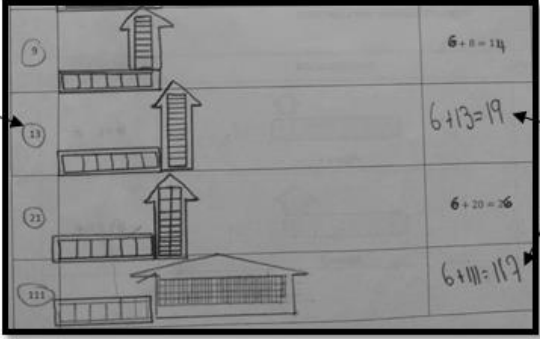
1B



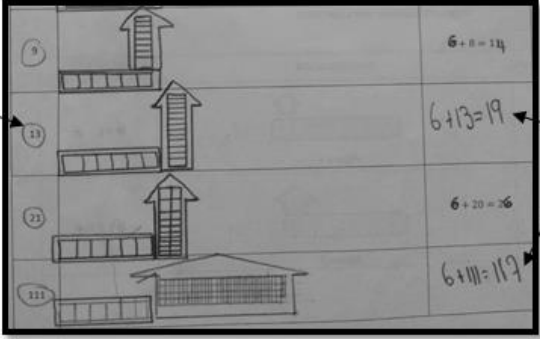
1B



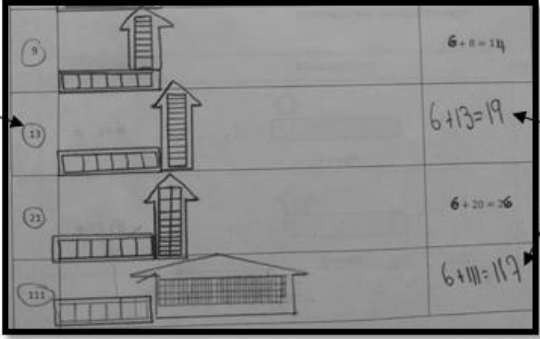
1B



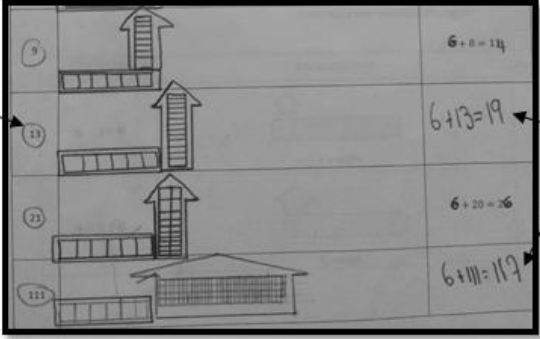
1B



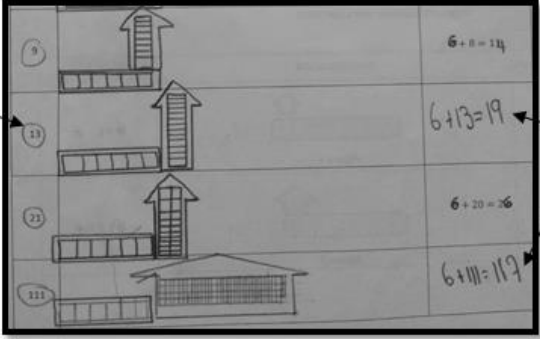
1B



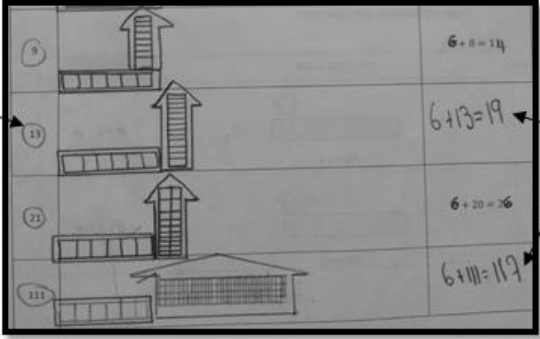
1B



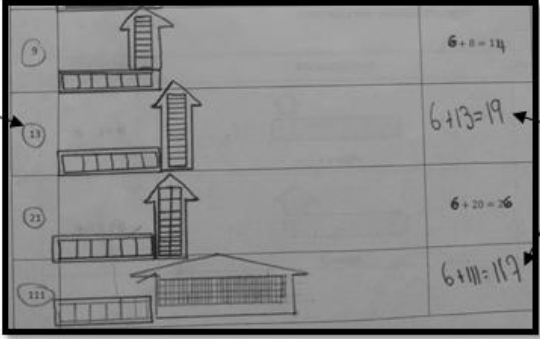
1B



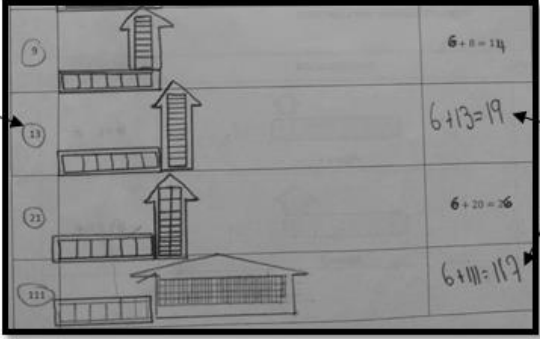
1B



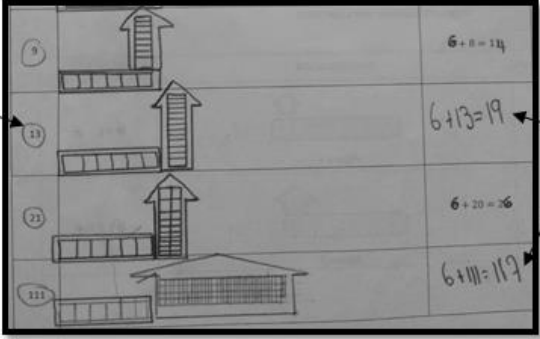
1B



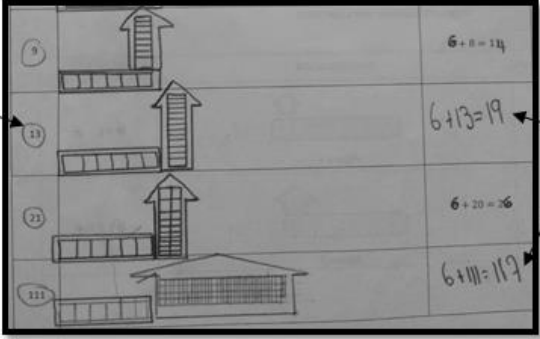
1B



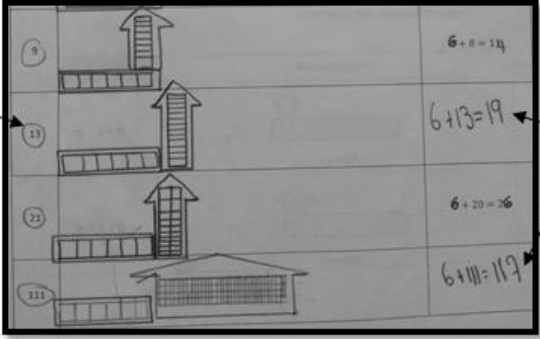
1B



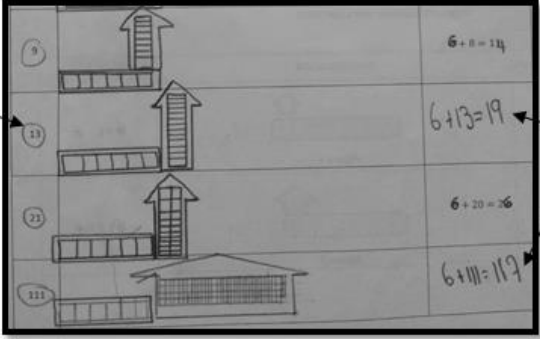
1B



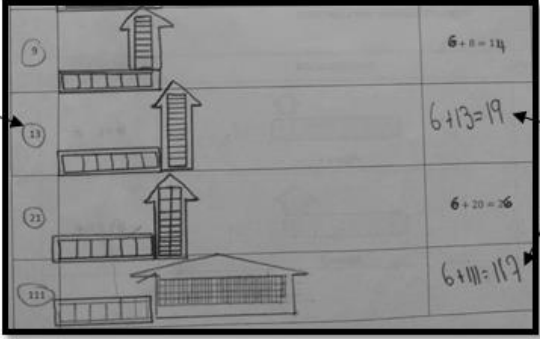
1B



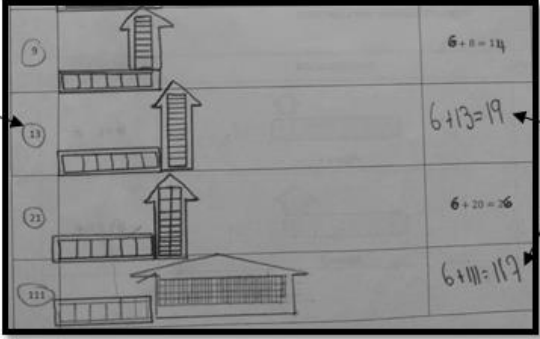
1B



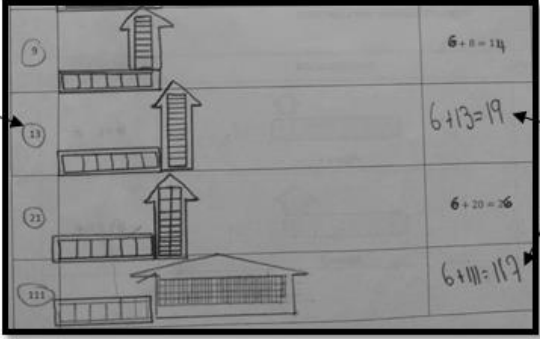
1B



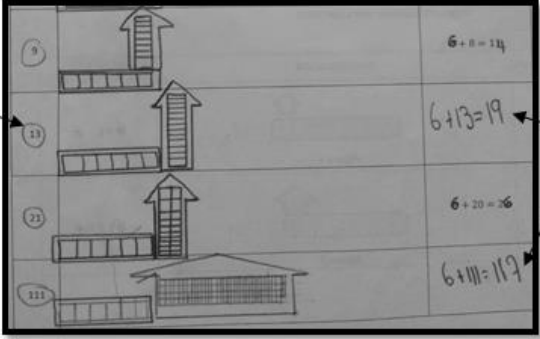
1B



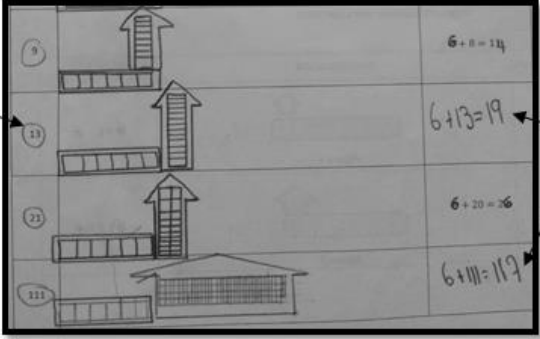
1B



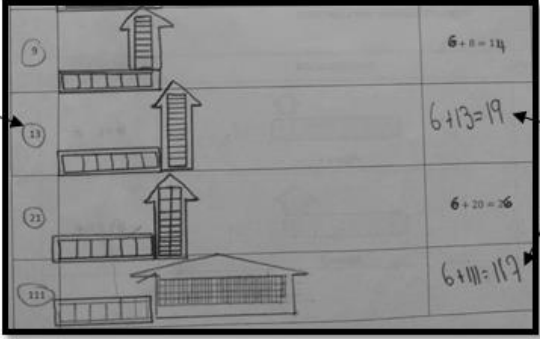
1B



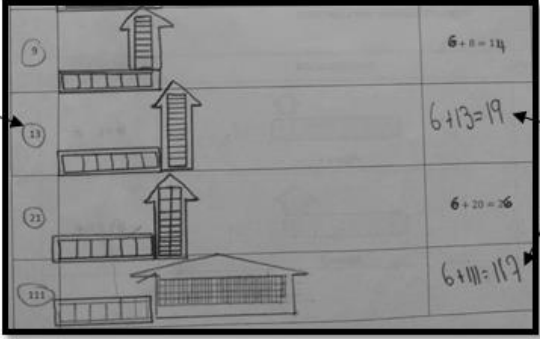
1B



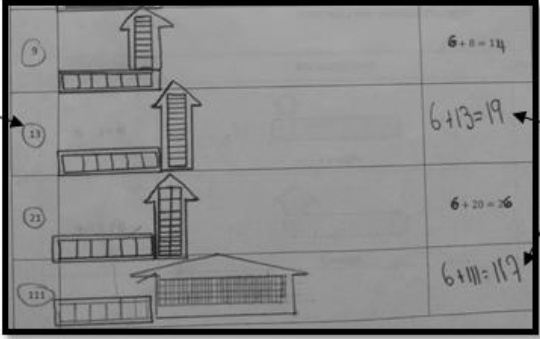
1B



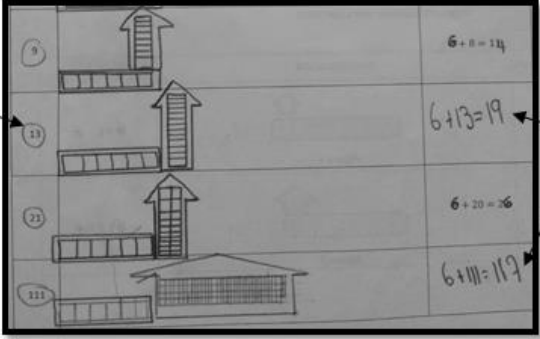
1B



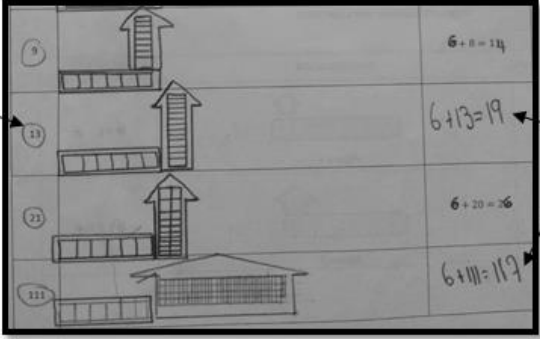
1B



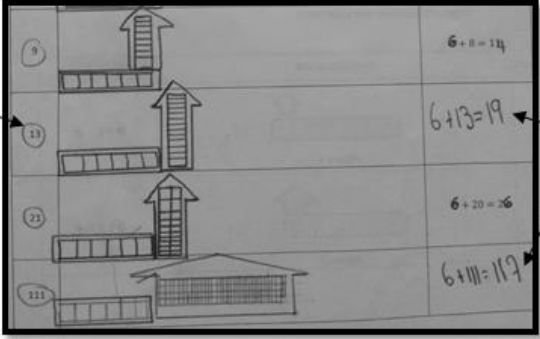
1B



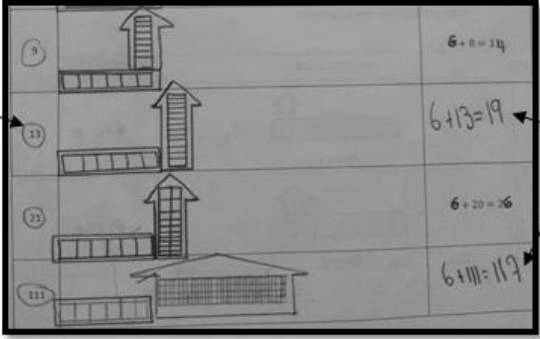
1B



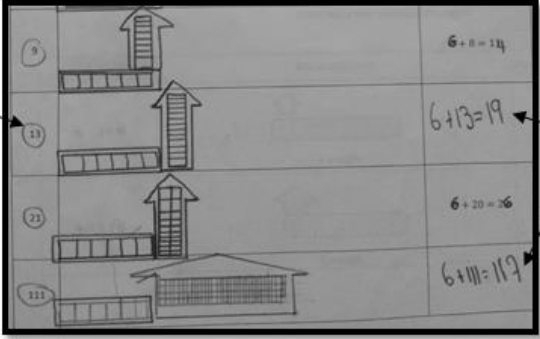
1B



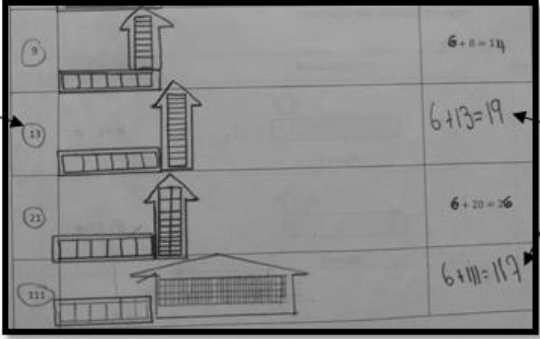
1B



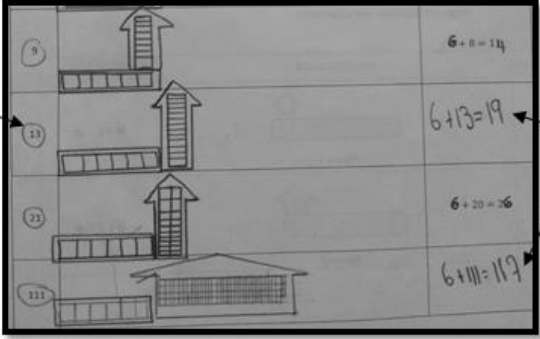
1B



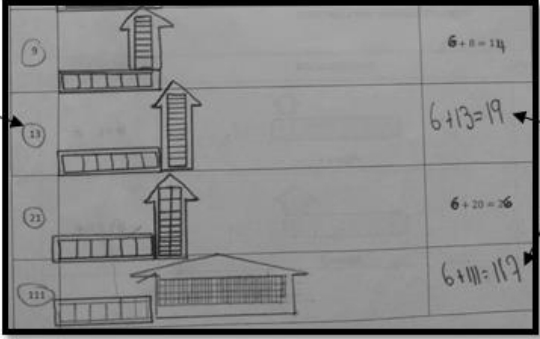
1B



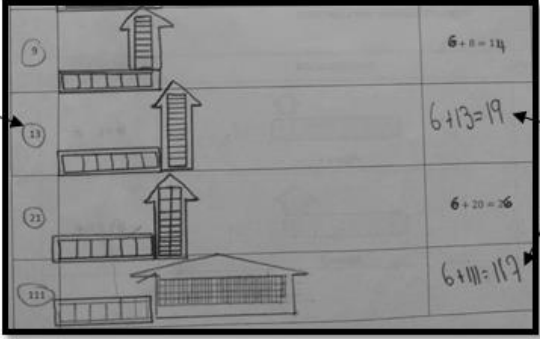
1B



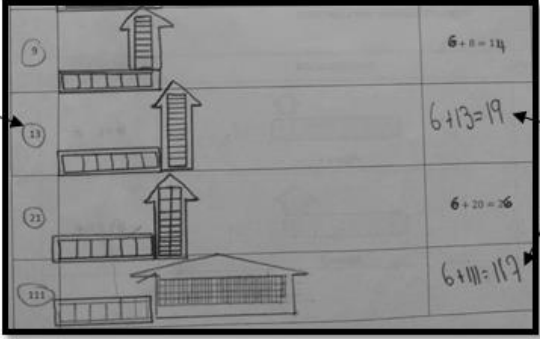
1B



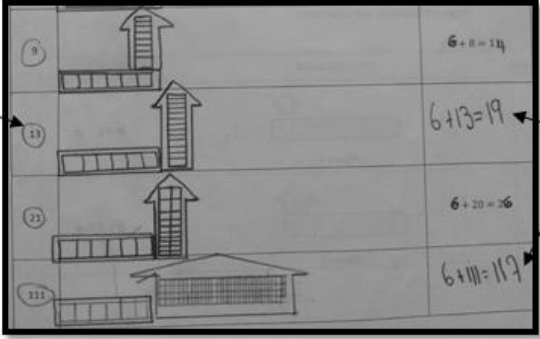
1B



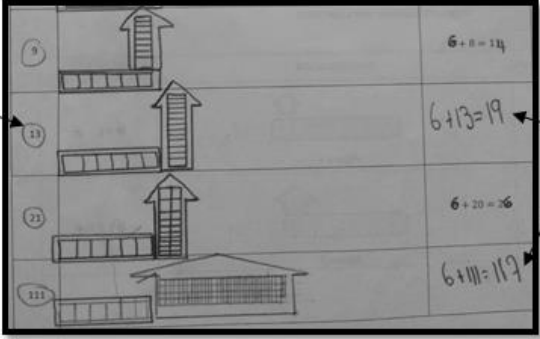
1B



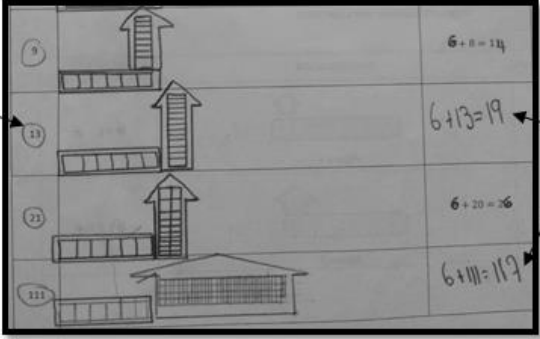
1B



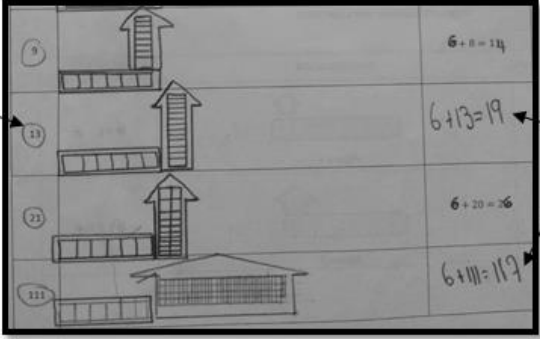
1B



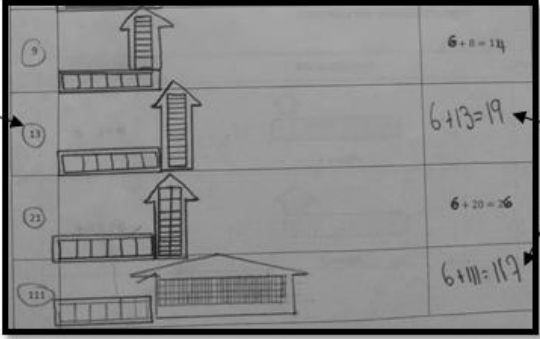
1B



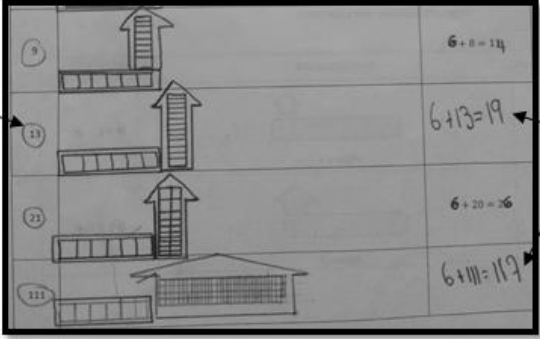
1B



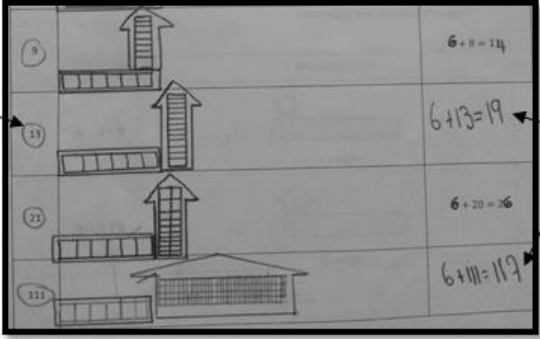
1B



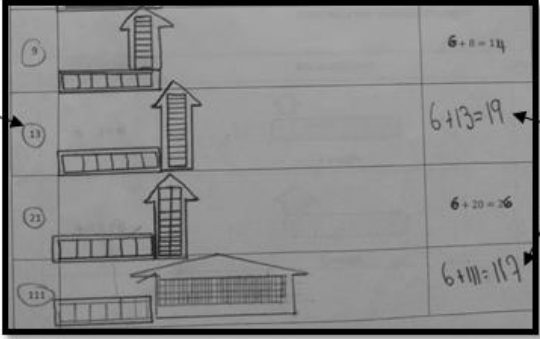
1B



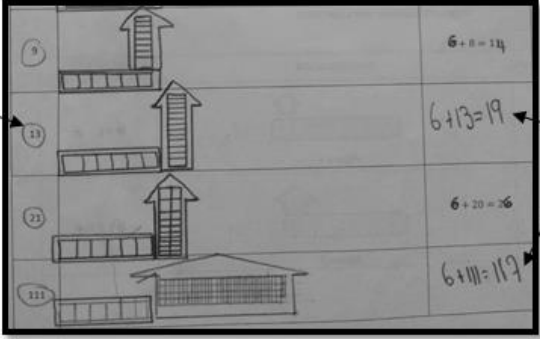
1B



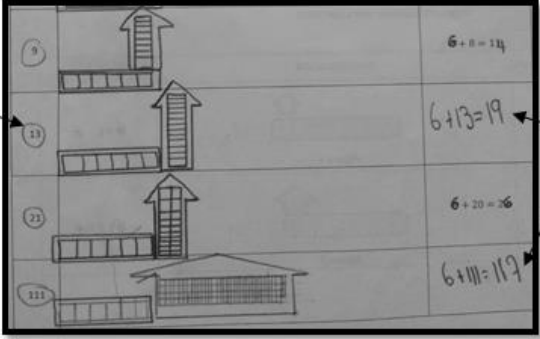
1B



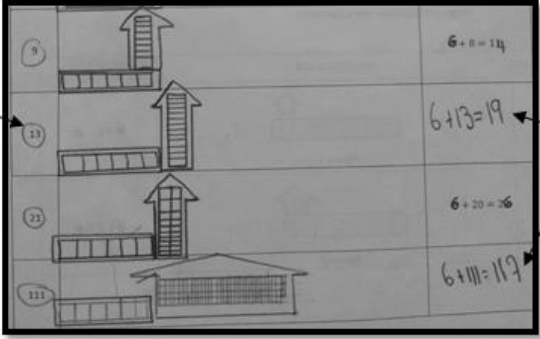
1B



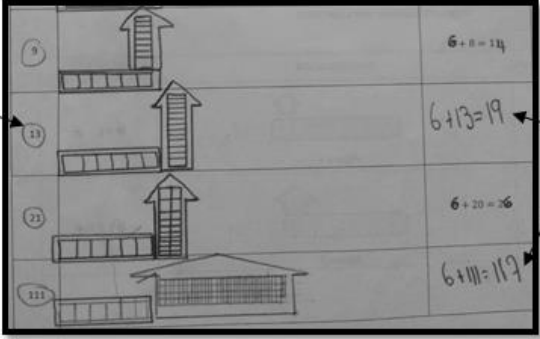
1B



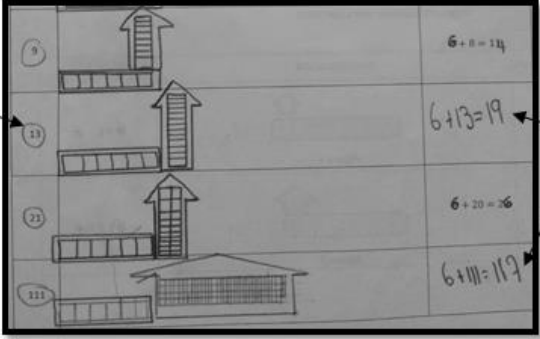
1B



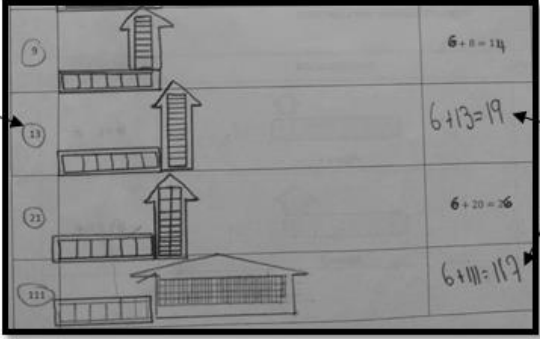
1B



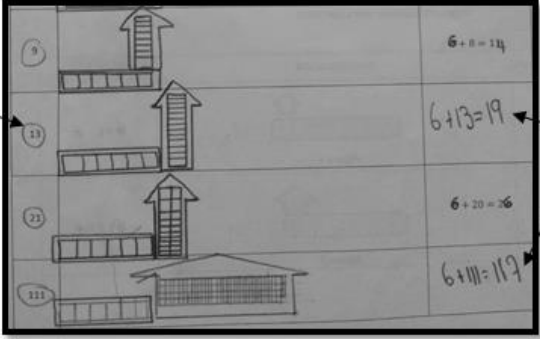
1B



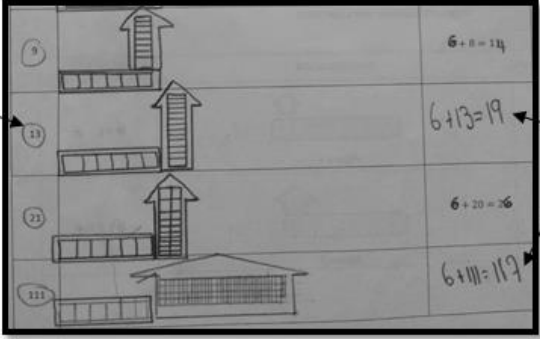
1B



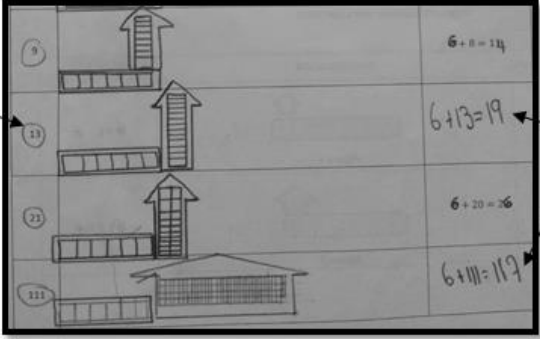
1B



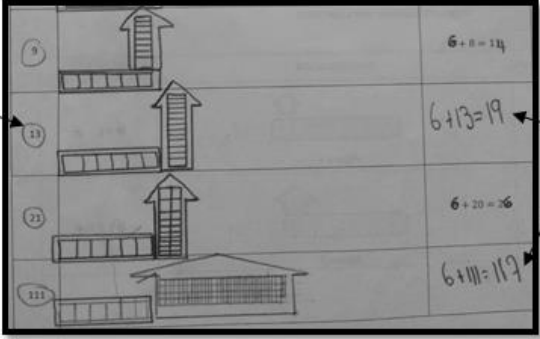
1B



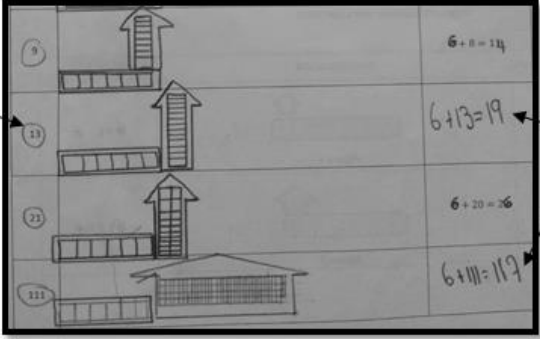
1B



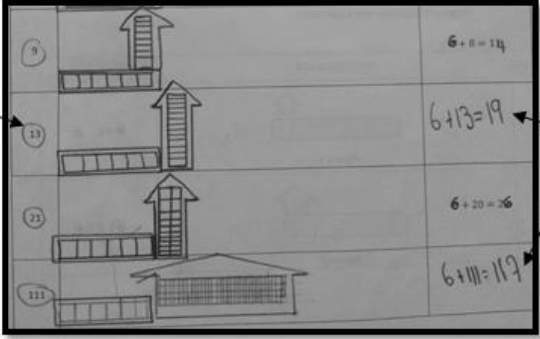
1B



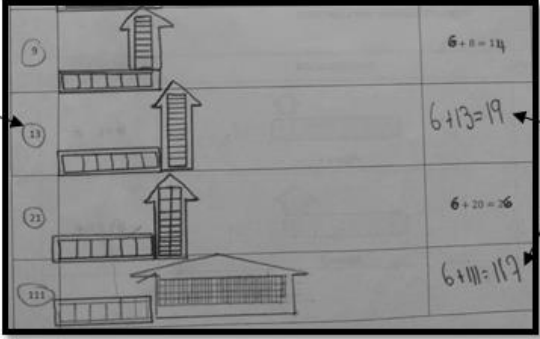
1B



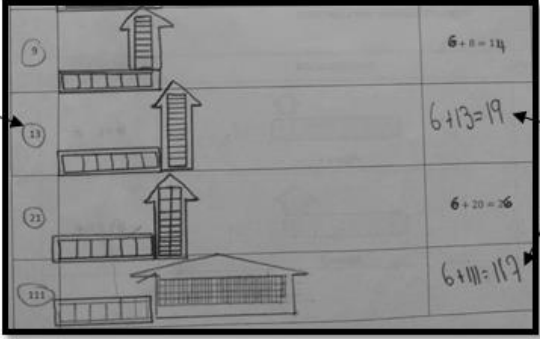
1B



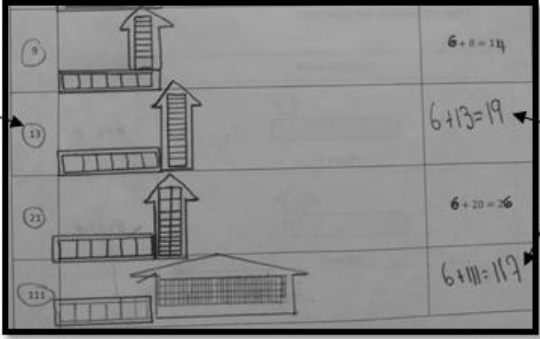
1B



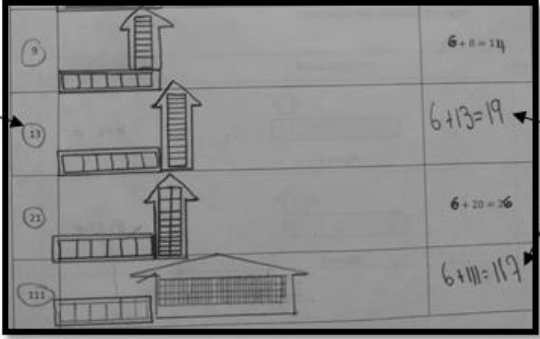
1B



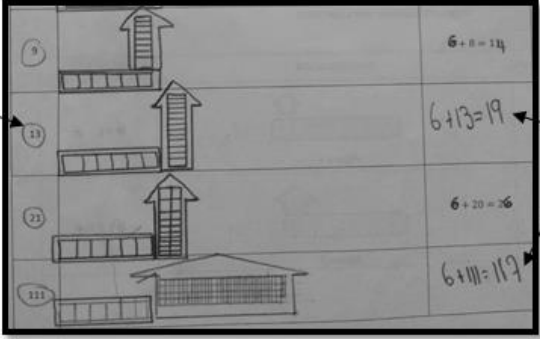
1B



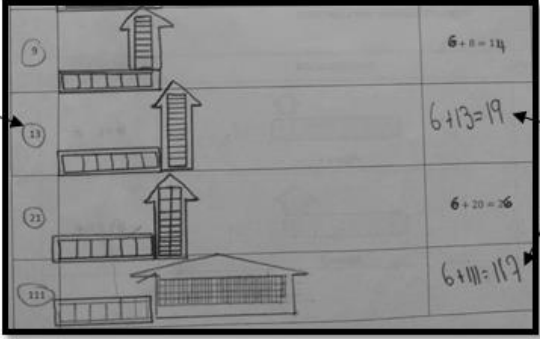
1B



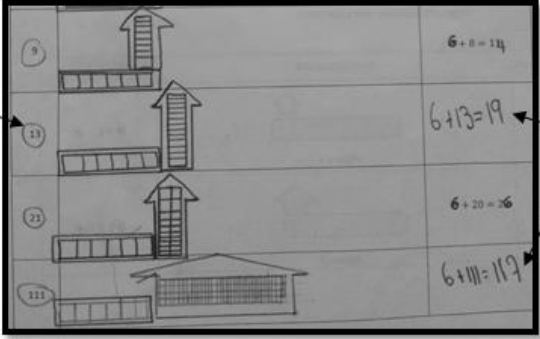
1B



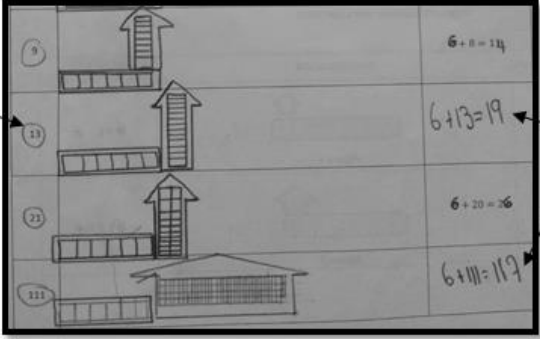
1B



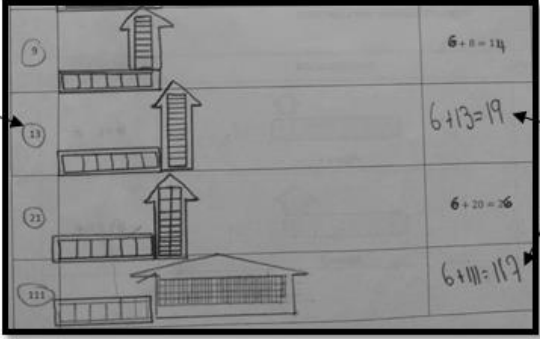
1B



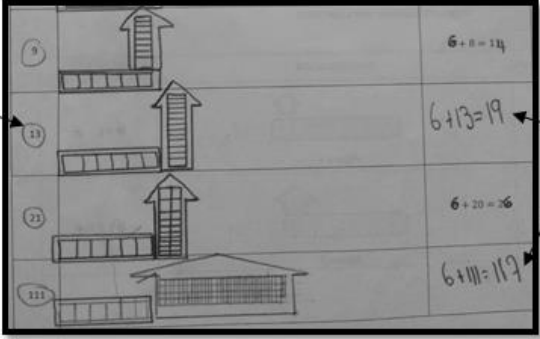
1B



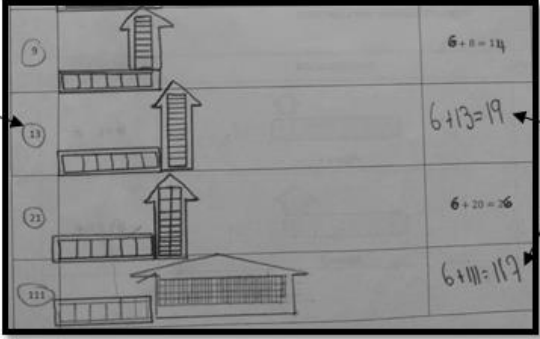
1B



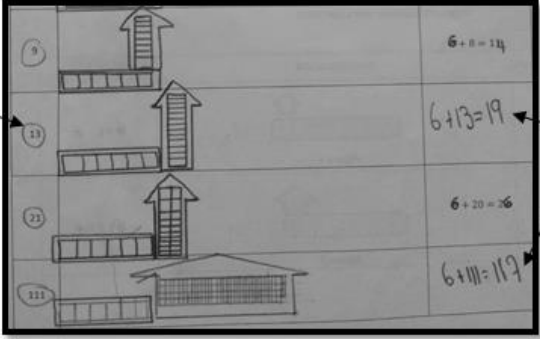
1B



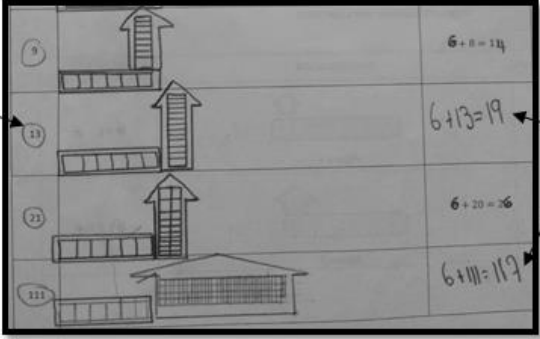
1B



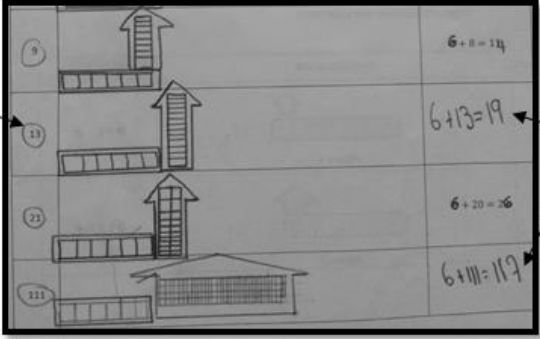
1B



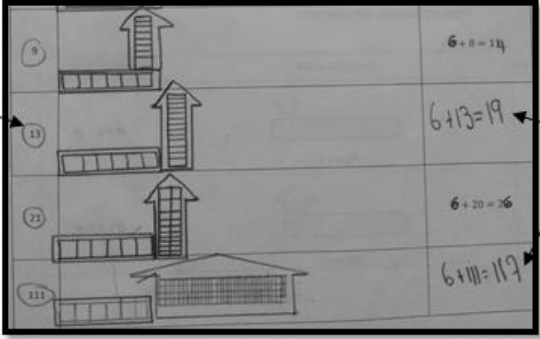
1B



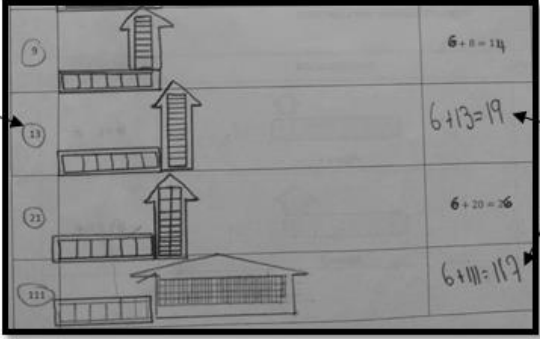
1B



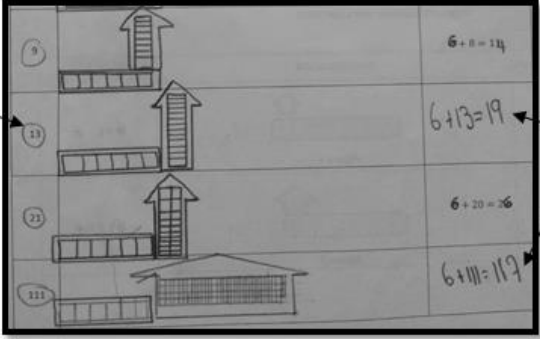
1B



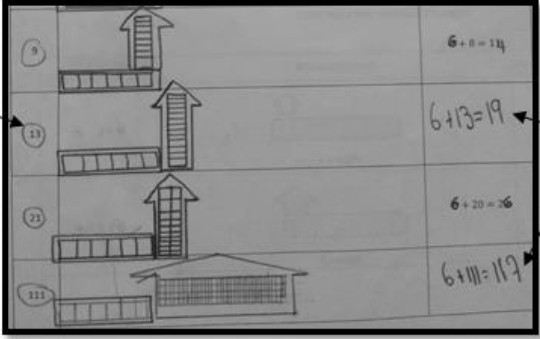
1B



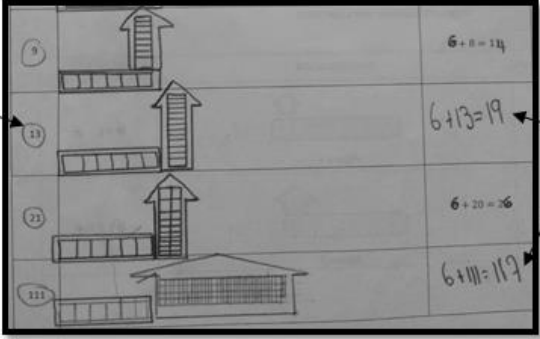
1B



1B



1B



1B

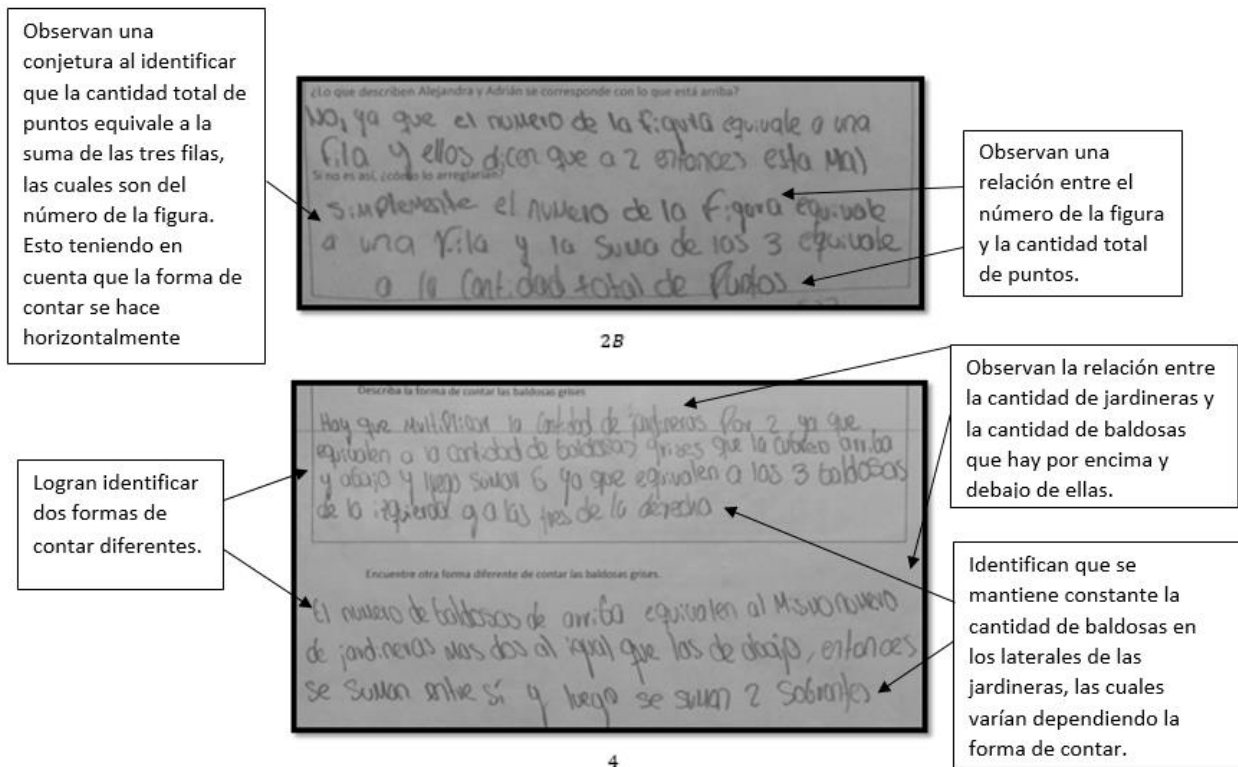


Ilustración 30. Nivel IV. Etapa Ver.

Se observa que los estudiantes logran llegar al nivel IV en la construcción de la generalidad. Sin embargo, a lo largo de las tareas, presentaron altos y bajos dependiendo de la forma de contar que se les presentaba; por ejemplo, aquellas formas de contar en las que se le debía restar uno al número de la figura para encontrar la correcta cantidad de cuadros, vasos o pasillos, los estudiantes no lo lograban visualizar.

#### 4.2.2. ANÁLISIS DECIR

Se identificará el nivel de construcción de la generalización que alcanzaron los estudiantes en la etapa de decir, realizando un recorrido por las diferentes tareas propuestas en el instrumento.

**Nivel I: (DIT):** Describir características de la imagen como un todo: Los estudiantes trascienden rápidamente de este nivel al segundo, debido a que el diseño del instrumento los orienta a trabajar a partir de la descomposición de la imagen.

**Nivel II: (DPC):** Describir las propiedades comunes entre los casos particulares: Describen por medio de lenguaje natural, acompañado de gestos para indicar las características comunes de los casos particulares.

**Video:** VID-171019-A0001

**MF:** vamos a socializar las últimas preguntas, en cada figura ¿Qué permanece igual?

**Estudiantes:** los cinco cuadrados horizontales (realizando la indicación, acompañado de movimientos horizontales con las manos)

**MF:** Ahora para cada figura ¿Qué es lo que cambia? y ¿Cómo cambia?

**Estudiantes:** cambian los cuadrados verticales. (EL estudiante lo expresa realizando un movimiento con las manos de ir poniendo una sobre la otra y va subiendo)

**Nivel III (DRP):** Describir la forma en la que se relacionan las partes. Debido a que la etapa de decir depende del proceso que se llevó a cabo en la etapa previa; teniendo en cuenta que en algunos casos no se establecieron relaciones necesarias, de igual forma en algunos casos no se logra describir la forma en que se relacionan las partes; sin embargo, existen actividades en las cuales se logra describir una relación.

**Nivel IV: (DCR)** Describir la conjetura observada de relaciones entre las partes: En la última actividad los estudiantes describen la forma de contar, explicando cómo se construye o se descompone la figura de tal forma que pueda dar la respuesta acertada.

**Audio: AUD281019-10.45**

**MF:** ¿Identificaron una forma de contar?

**Estudiantes:** Si profe.

**MF:** Explícame por favor como es tu forma de contar

**Estudiantes:** Estos tres son los que permanecen constantes (señala con un ovalo las tres baldosas ubicadas en la parte izquierda y lo que va a ir cambiando es esta parte (señala las baldosas restantes que cubren la jardinera)

**MF:** Y cómo puedes encontrar la cantidad de baldosas que hay en esta parte (señalando la parte que varía)

**Estudiantes:** Contando

**MF:** Pero por ejemplo en la figura 534 ¿Cómo vas a contar los puntos?

**Estudiantes:** mm no se

**MF:** Debes buscar una forma de encontrar la cantidad de puntos que hay en esa parte que está cambiando.

**Estudiantes:...** Profe pues aquí se multiplica por dos porque hay la misma cantidad de baldosas arriba y abajo que las flores y más estos tres (señalando las tres baldosas que se encuentran en la parte derecha)

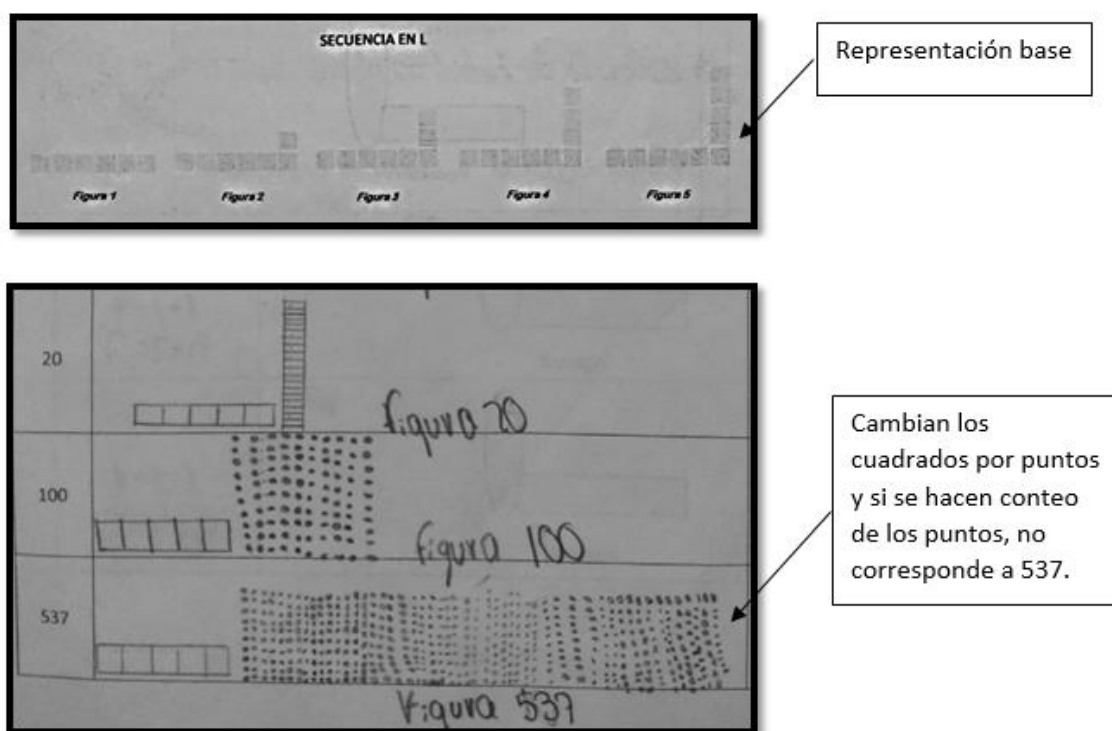
**MF:** ¡Muy bien!, correcto.

### 4.2.3. ANALISIS REGISTRAR

Se identificará el nivel de construcción de la generalización que alcanzaron los estudiantes en la etapa de registrar desde sus componentes, realizando un recorrido por las diferentes tareas propuestas en el instrumento.

#### Nivel I:

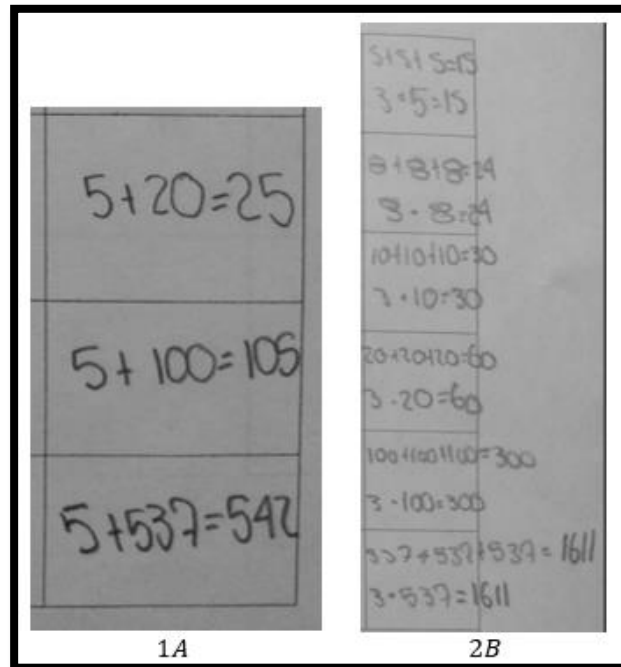
**Gráfica:** Aunque en los niveles de construcción de la generalización, no se contempla en la etapa de registrar la representación gráfica, en el presente documento nombraremos una serie de niveles que logramos identificar en el grupo de estudiantes. En el primer nivel, los estudiantes no generalizan la representación, sino que intentan repetir la representación base; sin embargo, para números muy grandes intentan realizar puntos, cuadrados, hexágonos, círculos, entre otros al azar, que finalmente no corresponden con el número de la figura. Como se muestra en la *Ilustración 31*.



*Ilustración 31. Nivel 1. Etapa Registrar - Gráfica.*

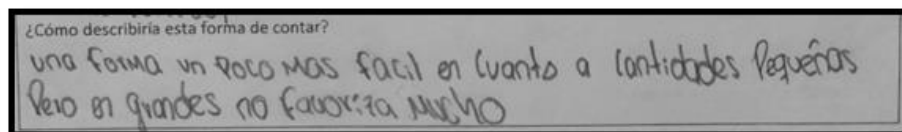
**Numérica o simbólica:** *Escribir con símbolos las características de la imagen – EPCS.* Sin embargo, en este primer nivel la forma de registrar de los estudiantes es verbal, a excepción de las operaciones que llevan a cabo en la tercera columna, en las cuales podríamos deducir, por ejemplo, que siempre registran en la izquierda el número que permanece constante y en la derecha el que varía. Como se muestra en la *Ilustración 32*.



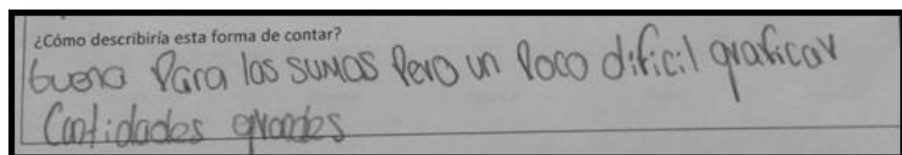


*Ilustración 32. Nivel 1. Etapa Registrar Numérica o Simbólica.*

**Verbal:** Escribir con palabras y símbolos las características de la imagen - EPCM. Escribir con palabras las características de la imagen – EPCP: No necesariamente describen características de la imagen, sino que registran la experiencia que surgió al realizar la tarea, como se muestra en la *Ilustración 33* respecto a las subtareas 1A y 1B.



1A



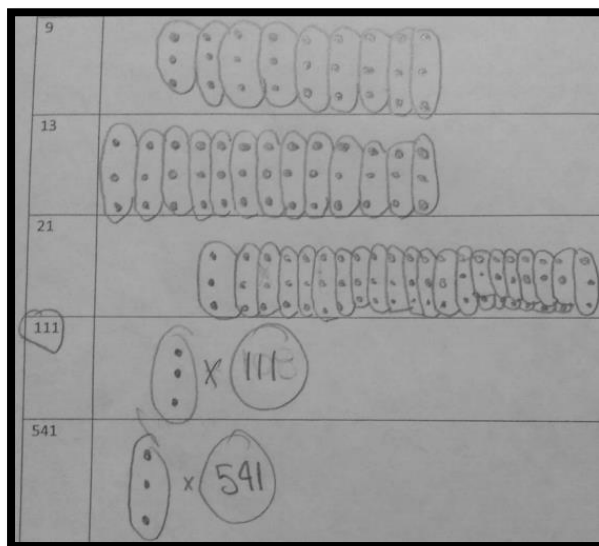
1B

*Ilustración 33. Nivel 1. Etapa Registrar Verbal.*

## Nivel II:

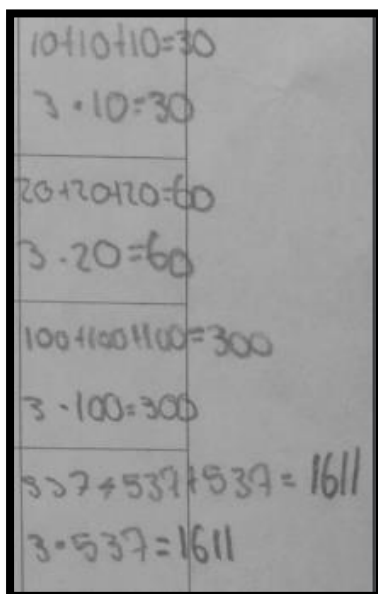
**Gráfica:** En un segundo nivel los estudiantes no presentan una generalización para aquellas figuras que son dibujables como la figura número 9, 13 o 21 como su muestra

en la *Ilustración 34*; Sin embargo, para aquellas figuras que no son dibujables como 111 y 541, establecen una representación gráfica que generaliza las propiedades comunes de los casos particulares, apoyados en operaciones o expresiones verbales.



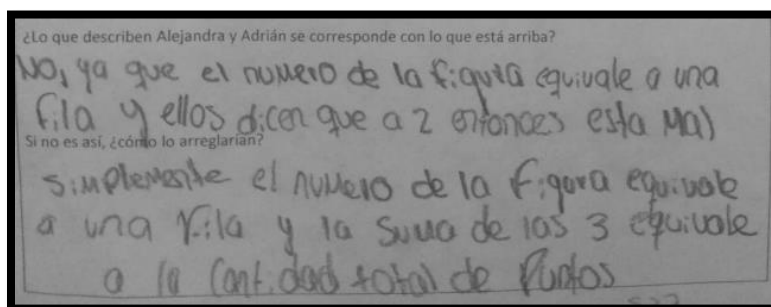
*Ilustración 34. Nivel II. Etapa Registrar Gráfica.*

**Numérica o simbólica:** Los estudiantes registran las operaciones correspondientes en la columna de la cantidad de baldosas, puntos o hexágonos y comienzan a expresarlo como una suma y como una multiplicación, como se muestra en la *Ilustración 35*.



*Ilustración 35. Nivel II. Etapa Registrar Numérica o simbólica.*

**Verbal:** *Escribir con palabras las propiedades comunes entre los casos particulares – ECPP.* La mayoría de características que escriben los estudiantes en las diferentes subtareas, lo hacen con un lenguaje natural, es decir, solo palabras. Como se muestra en la *Ilustración 36*.



*Ilustración 36. Nivel II. Etapa Registrar Verbal.*

### Nivel III:

**Gráfica:** Acompañan la representación con operaciones, además reducen cada vez más la imagen, es decir, al principio generalizaban la expresión para los números muy grandes como 100 o 541; sin embargo, en este nivel logran generalizar en números pequeños como 10 y 20 que aunque son dibujables, también pueden ser representables, como se evidencia en la *Ilustración 37*.

<p>Figura 5</p>			5	$2 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 22$ $2 + 4 \cdot 5 = 22$
= 1          = 20          = 20			20	$2 + 4 \cdot 20 = 82$ $2 + 4 \cdot 20 = 82$
= 1          = 100          = 100			100	$2 + 4 \cdot 100 = 402$ $2 + 4 \cdot 100 = 402$

*Ilustración 37. Nivel III. Etapa Registrar Gráfica.*

**Numérica o simbólica:** *Escribir con símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares – ECPS.* Los registros que realizan los estudiantes comienzan a incluir algunos números, además trascienden de la suma a la multiplicación, entendiendo esta última como la operación que sintetiza la suma; sin embargo, no expresan las relaciones de las partes con un lenguaje numérico o simbólico, como se presenta en la *Ilustración 38*.

5	$6+4+4+4+4=22$ $6+4 \cdot 4=22$
20	$6+4 \cdot 19=82$ $6+4 \cdot 19=82$
100	$6+4 \cdot 100=406$ $6+4 \cdot 100=406$
534	$6+4 \cdot 534=2136$ $6+4 \cdot 534=2136$

Para la figura número 5, expresan la cantidad de baldosas como una suma y multiplicación como se hacía en el nivel II; sin embargo, Para las siguientes las expresa como una multiplicación.

*Ilustración 38. Nivel III. Etapa Registrar Numérica o Simbólica.*

**Verbal:** *Escribir con palabras y símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares – ECPM. Escribir con palabras las propiedades comunes entre los casos particulares – ECPP.* Se establecen relaciones por medio del uso de palabras claves como la suma, la multiplicación, etc., como se muestra en la *Ilustración 39*.

conclusión la cantidad de puntos es el número de la figura multiplicado por 3.  
 Si, ya que así se aplica el procedimiento para cantidades pequeñas  
 y para cantidades grandes se multi.lica aquella cantidad por 3  
 en este caso

No expresa la relación con el número de la figura; sin embargo, relaciona cantidades grandes y pequeñas, en lo que se puede intuir que hace referencia al número de la figura.

*Ilustración 39. Nivel III. Etapa Registrar Verbal.*

#### Nivel IV:

**Gráfica:** En este nivel la representación gráfica no es un factor relevante para poder tomar decisiones respecto a la forma de contar; sin embargo, al representarla debe continuar siendo lo más sencilla posible como se evidencia en la *Ilustración 40*, pero dar claridad sin perder ninguna de las propiedades necesarias y suficientes del patrón.

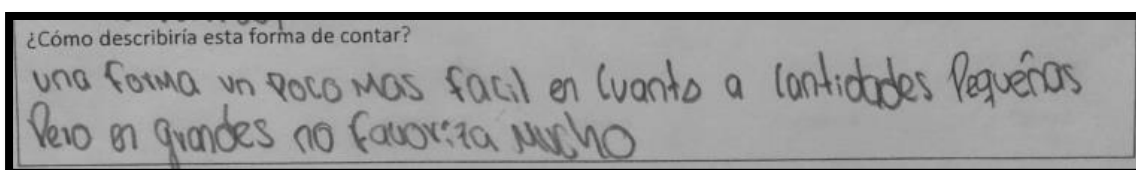


*Ilustración 40. Nivel IV. Etapa Registrar Gráfica.*

**Numérica o simbólica:** *Escribir con símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes – ECOS:* Los estudiantes realizan conjeturas, de hecho refutan argumentos o conjeturas realizadas por otros grupos de forma acertada, pero no llegan a una escritura simbólica, quizás numérica en relación a las operaciones que efectúa.

**Verbal:** *Escribir con palabras y símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes – ECOM. Escribir con palabras la conjetura observada de las relaciones entre las partes - ECOP:* Los estudiantes construyen una expresión en la cual registran con palabras y números la conjetura de las relaciones que han observado, refutan acertadamente otras conjeturas y propone más de dos registros. Registra un enunciado solventando de esta forma la dificultad número 6. Como se muestra en la *Ilustración 42*.

En la etapa de registrar se logra evidenciar un avance significativo respecto a la primera y segunda tarea en la cual se les pedía a los estudiantes describir la forma de contar y la respuesta no presentaba ningún dato relevante respecto a la forma de contar como se muestra en la *Ilustración 41*; sin embargo, al hacer el tránsito por las diferentes tareas, se observa cómo se va formalizando la escritura, la representación gráfica e incluso la forma de registrar las operaciones, para finalizar en la tarea 4 con un registro como el que se muestra en la *Ilustración 42*.



*Ilustración 41. Nivel I. Etapa Registrar.*

Describe la forma de contar las baldosas grises.
Hay que multiplicar la cantidad de jand:neras por 2 ya que equivalen a la cantidad de baldosas grises que la cubren arriba y abajo y luego suman 6 ya que equivalen a los 3 baldosas de la izquierda y a los tres de la derecha
Encuentre otra forma diferente de contar las baldosas grises.
El numero de baldosas de arriba equivalen al mismo numero de jand:neras mas dos al igual que las de abajo, entonces se suman entre si y luego se suman 2 sobrantes

*Ilustración 42. Nivel IV. Etapa Registrar*

## **5. CONCLUSIONES, REFLEXIONES Y PROYECCIONES**

### **5.1. CONCLUSIONES**

El objetivo del presente trabajo es caracterizar el proceso de generalización en estudiantes de grado séptimo del Colegio Gimnasio el Lago y teniendo en cuenta que en dicho proceso se identifican tres etapas; ver, describir y registrar según Mason et al. (1999) se empezará a caracterizar el desarrollo que presentaron los estudiantes en dichas etapas y como el diseño de las tareas contribuyó en este proceso.

Respecto a la etapa de ver se puede concluir lo siguiente:

El diseño de las tareas contribuyó a que el estudiante iniciara su proceso de generalización en un nivel más avanzado respecto a la etapa de ver, según el análisis que se llevó a cabo con los dos grupos seleccionados debido a que la teoría nos presenta que el primer nivel en la etapa de ver es observar la imagen como un todo; sin embargo, los dos grupos de estudiantes observaron la figura en dos; una parte constante y otra que variaba, ya que la forma como se diseñaron las tareas apuntaban a llevar al estudiantes a este nivel. Esto lo podemos evidenciar ya que en la tarea cuatro los estudiantes descompusieron la figura en esas mismas partes.

Ahora bien, se logró evidenciar que la etapa de ver, es la más importante de todas, ya que si los estudiantes logran identificar correctamente el patrón, tienen mayor probabilidad de expresarlo correctamente, ya sea por medio de palabras o de forma escrita; sin embargo cuando no identifican correctamente el patrón o la forma de contar, genera producciones erradas o incompletas como se pudo observar. Por ejemplo, con el segundo grupo, que en la cuarta tarea identificaron una forma de contar la cual no contribuyo a encontrar la respuesta correcta respecto a la cantidad de baldosas que se necesitaban para cercar una cantidad de jardineras mayor; sin embargo, los estudiantes registran correctamente dos conjeturas, basadas en dos formas de contar completamente distintas a la que habían planteado en un principio.

Las tareas se diseñaron de tal forma que cada subtarea implicaba un grado mayor de dificultad respecto al ver el patrón, teniendo en cuenta que como se define desde la teoría el proceso es generalizar en cada una de sus etapas conlleva tiempo y es de forma progresiva.

Respecto a la etapa de decir se puede concluir lo siguiente:

El diseño de las tareas no contribuyó significativamente para poder evidenciar el tránsito de los estudiantes por los diferentes niveles, ya que no proponía preguntas de discusión o debate entre los integrantes de cada grupo y los diferentes grupos. Se pueden deducir algunas cosas teniendo en cuenta las producciones escritas y los audios en los cuales describían las formas de contar; sin embargo, una de las formas para dar cuenta de esta etapa es la formulación de preguntas de indagación sobre cómo van desarrollando las tareas, propiciar discusiones entre los estudiantes, entre otras.

En la aplicación se pudo identificar que muchas veces los estudiantes identificaban el patrón y para poder expresarlo se valían de medios como las palabras, gestos e indicaciones, actividades propias de esta etapa.

Respecto a la etapa de registrar se puede concluir lo siguiente:

El diseño de las tareas contribuyó a que los estudiantes presentaran una evolución o avance respecto a la forma en como registraban el patrón, ya que en una primera instancia cuando los estudiantes debían describir la forma de contar guiados por una serie de preguntas, presentaban registros con información poco relevante; sin embargo en las siguientes subtarear se le proponía a los estudiantes observar una forma de registrar, en la cual debían argumentar si era correcta o incorrecta y en este caso proponer una correcta forma de describir, ya que es difícil lograr presentar un registro de una actividad que hasta el momento no habían desarrollado y teniendo en cuenta que los niños e incluso los adultos tienden a observar para poder repetir, se pudo observar que esta actividad fue fundamental para que los estudiantes identificaran la información relevante al momento de registrar un patrón.

Durante el estudio del marco teórico y el análisis, se contemplaron tres formas distintas de registrar un patrón, la primera una representación gráfica, la cual se propuso obligatoriamente en el diseño de las tareas, la segunda numérica o simbólica, refiriendo a la numérica como las operaciones que la tarea proponía para expresar la cantidad total ya sea de cuadrados, puntos o baldosas y por ultimo un registro verbal el cual se propuso al solicitar la descripción de la forma de contar, al pedir que argumentaran una descripción ya registrada por un grupo de estudiantes o al presentar formas de escribir el patrón haciendo un tránsito desde el lenguaje natural al algebraico o simbólico. Durante este proceso logramos evidenciar algunas características de la etapa de registrar en cada una de las formas de registro, por ejemplo:

En el registro gráfico, se pudo evidenciar y establecer durante el análisis en uno de los grupos, una serie de niveles. Por ejemplo, en una primera instancia los estudiantes no generalizan la representación, sino que intentan repetir la representación base; en un segundo nivel los estudiantes no presentan una generalización para aquellas figuras que son dibujables pero al mismo tiempo representables, sino para aquellas que no son dibujables como por ejemplo la 111 o 541; en un tercer nivel los estudiantes ya realizan una representación que generaliza las propiedades comunes de los casos particulares para figuras dibujables y representables, además puede estar acompañada de operaciones o expresiones verbales y por último una representación sencilla, sin perder ninguna de las propiedades necesarias y suficientes del patrón.

En el registro numérico o simbólico, se pudo evidenciar que los estudiantes no alcanzaron a usar símbolos para expresar la generalidad; sin embargo, por el diseño de las tareas propuestas, siempre registraron una operación, la cual daba cuenta de igual forma de la parte constante y la que varía en la forma de contar.



Y por último en el registro verbal, el primer grupo de estudiantes no alcanzo a llegar al nivel IV de lograr establecer una conjetura, sino que establecieron relaciones entre las partes de la imagen; sin embargo, los estudiantes del grupo dos, establecieron y registraron dos formas distintas de contar con uso del lenguaje natural y algunos números.

A lo largo del tránsito de los estudiantes por la etapa de registrar podemos concluir que el diseño de las tareas fue esencial para llegar a un nivel III o IV en la construcción de la generalización respecto a la etapa de registrar, debido a que los primeros registros de los estudiantes no daban cuenta de los aspectos relevantes y finalizan estableciendo conjeturas con un lenguaje correcto, que aunque no fue simbólico, es significativo para tan poco tiempo de aplicación.

Respecto al aporte que se esperaba realizar en la institución, se observó que en un principio como mencionaba la docente de matemáticas a la que se entrevistó, los estudiantes eran muy mecánicos. Por ejemplo, cuando debían realizar las representaciones gráficas, la mayoría de estudiantes intentaban realizar toda la representación o no sabían cómo debían continuar para encontrar, ya sea la cantidad de baldosas, puntos o cuadrados. Se podría decir que el diseño de las tareas es una alternativa que contribuye a que los estudiantes realicen ejercicios de argumentación, relacionen la información y razonen respecto a las tareas que desarrollan.

La actitud de los estudiantes respecto a las tareas que se les presentaron fue positiva, algunos mencionaban que era llamativo y aunque no todos llegaron a un nivel IV de generalización o no llegaron a la generalización simbólica, sí se puede afirmar que los estudiantes tuvieron un acercamiento significativo a tareas de generalización. Por tal motivo podemos inferir que este tipo de tareas sí se pueden desarrollar en el aula de clase, guiando al estudiante en cada una de las fases de la generalización como se desarrolló con los estudiantes del Gimnasio el Lago.

## **5.2. REFLEXIONES**

A nivel profesional en la formación como docentes, este trabajo de grado nos brindó la oportunidad de tener un acercamiento a la elaboración y diseño de tareas de generalización, teniendo en cuenta el estudio y reflexión de referentes teóricos que sustentan el trabajo; lo cual contribuye a mejorar la redacción y preparación de las tareas que se proponen en el aula de clase, siendo estas de forma clara y específica con el fin de lograr una mayor comprensión.

Respecto al análisis de los resultados, nos brindó una perspectiva diferente del cómo razonan los estudiantes, lograr identificar el porqué de cada una de sus producciones y caracterizar el nivel en el cual se encuentran cada uno de ellos. Llevar a cabo cada una de estas reflexiones permite detectar posibles errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, con el fin de reestructurar las tareas propuestas en el aula de clase.

En conclusión, el presente trabajo amplió el conocimiento de los autores respecto al quehacer en el aula de clase y además la importancia del proceso de generalizar en las actividades matemáticas de los estudiantes de grado séptimo.

### **5.3. PROYECCIONES**

En un principio se había proyectado proponer una serie de tareas que propiciaran el paso al álgebra en estudiantes de grado séptimo; sin embargo, no se alcanzó a abarcar este proceso, debido a que era necesario en primera instancia caracterizar el proceso de generalizar que llevaban a cabo los estudiantes. Para posteriores investigaciones se plantea proponer tareas que permitan dar cuenta de cómo los estudiantes dan el paso al álgebra a partir de procesos de razonamiento como generalizar, teniendo en cuenta que la teoría establece que la generalización constituye el puente principal para dar el paso de la aritmética al álgebra.

### **BIBLIOGRAFÍA**

- Alonso, J. (1993). Motivación y estrategias de aprendizaje: determinantes contextuales e influjo recíproco. En C. Monerero (Comp.). Las estrategias de aprendizaje: procesos, contenidos e interacción. Barcelona: Edicions Dornenech.
- Cañadas, C., Castro, E. Y Castro, E. (2012) Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones. Revista la Gaceta Vol 15, Num 3, p (561- 563).
- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo. Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación, Monografía IV, 13-24.
- De Educación, L. G. (1994). Ley 115 de 1994. Constitución Política de Colombia.
- Diccionario Filosófico Marxista (1946). Ediciones Pueblos Unidos. Montevideo. En: <http://www.filosofia.org/urss/img/1946dfm.pdf>
- Esquinas Sancho, Ana María (2009) Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente. [Tesis]
- García, S. (2011). Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizadas por estudiantes de 13 años. Tesis de Maestría. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1999). Rutas y raíces hacia el Álgebra. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Merani, A. L. Diccionario de Pedagogía. España, Editorial Grijalbo, 1983.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia. En: [http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021\\_recurso\\_1.pdf](http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf)
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). Serie Lineamientos Curriculares. Bogotá, Colombia. En: [https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869\\_archivo\\_pdf9.pdf](https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf)
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas. Bogotá, Colombia. Disponible en: [https://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446\\_genera\\_dba.pdf](https://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf)
- Mora, L. (2012). Álgebra en Primaria. Documento no publicado, elaborado en el marco del Programa Todos a Aprender del Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia.

- Orozco S, Peñaranda F, Restrepo D, Mejía L, Arias S. Generalización e inferencia: un acercamiento a su comprensión desde tres enfoques. *Rev. Fac. Nac. Salud Pública* 2014;32(2): 115-122
- Pérez, J. (2005). La generalización como proceso de pensamiento matemático: una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje del álgebra elemental. Tesis de Maestría. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (XIX Reimp. 1995). México: Trillas.
- Radford, L. (2015). Introduction: The phenomenological, epistemological, and semiotic components of generalization. *PNA*, 9(3), 129-141.
- Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la lengua española* [Dictionary of the Spanish Language] (22nd ed.). Madrid, Spain: Author.
- Restrepo, L. (2001). *Lecciones del área de Matemáticas número uno*. Centro de estudios e investigaciones docentes. Medellín.
- Rojas P & Vergel, R. (2013) *Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico*. *Revista Científica* 1 (1) ,760-766. Bogotá D.C.: Colombia.
- Valenzuela, J y Gutiérrez, V. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. *Educación Matemática*, vol. 30, núm. 2
- Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados en Educación Básica Primaria (9-10 años)*.

## ANEXOS

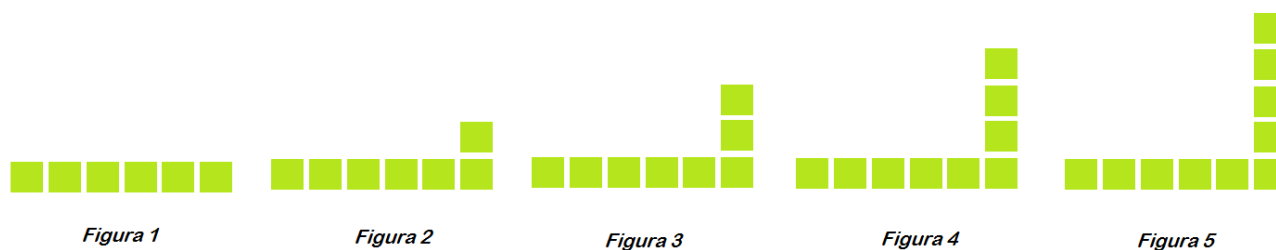
### Anexo 1. Tarea 1. Secuencia en L

 <b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <i>Educadora de educadores</i>	<b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <b>FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA</b> <b>DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS</b> <b>2019</b>	
Nombre:		Curso:



#### Actividad 1

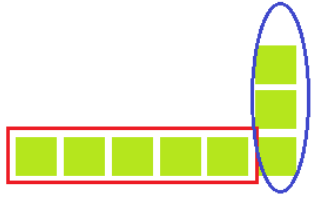
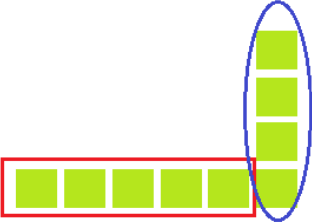
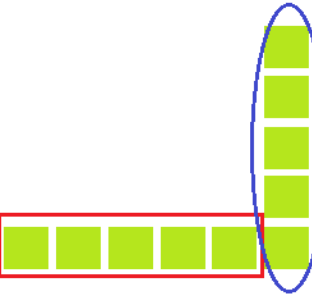
En la siguiente secuencia se presentan diferentes formas para contar la cantidad de cuadrados verdes: describa cada forma y complete los datos faltantes.

#### SECUENCIA EN L



#### FORMA DE CONTAR: CINCO CONSTANTE

FIGURA	REPRESENTACIÓN	NÚMERO DE CUADRADOS VERDES
1	 <p style="text-align: center;">Figura 1</p>	$2 + 1 = 6$
2	 <p style="text-align: center;">Figura 2</p>	$2 + 2 = 7$

3	 <p><i>Figura 3</i></p>	$2 + 3 = 8$
4	 <p><i>Figura 4</i></p>	$2 + 4 = 9$
5	 <p><i>Figura 5</i></p>	
8		$2 + 8 = 13$
10		$2 + 10 = 15$
20		

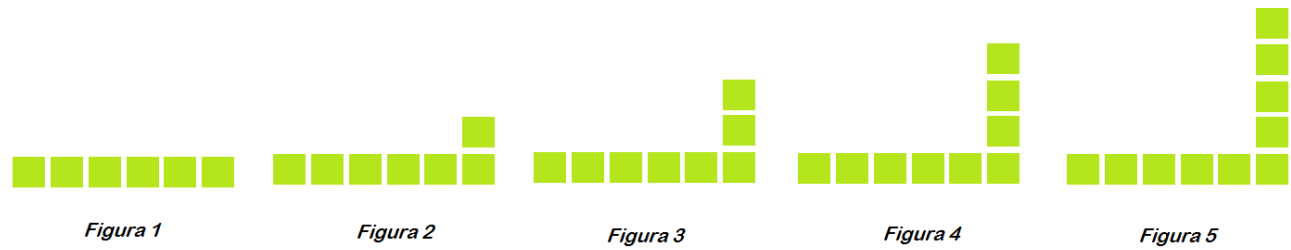
100		
537		
<p>En cada figura ¿qué permanece igual?</p> <p>Para cada figura ¿qué es lo que cambia? Y ¿cómo cambia?</p> <p>¿Qué relación tiene el número de la figura con lo que va cambiando en cada figura?</p> <p>¿Cómo describiría esta forma de contar?</p>		

 <b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <i>Educadora de educadores</i>	<b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <b>FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA</b> <b>DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS</b> <b>2019</b>	
Nombre:	Curso:	



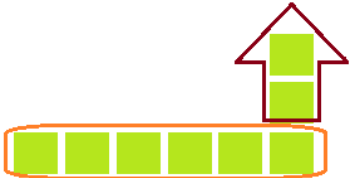
Actividad 1

En la siguiente secuencia se presentan diferentes formas para contar la cantidad de cuadrados verdes: describa cada forma y complete los datos faltantes.


SECUENCIA EN L



FORMA DE CONTAR: SEIS CONSTANTE

FIGURA	REPRESENTACIÓN	NÚMERO DE CUADRADOS VERDES
1	 <i>Figura 1</i>	$3 + 0 = 6$
2	 <i>Figura 2</i>	$3 + 1 = 7$
3	 <i>Figura 3</i>	$3 + 2 = 8$



4	 <p><i>Figura 4</i></p>	$3 + 3 = 9$
5		$3 + 4 = 10$
9		$3 + 8 = 14$
13		
21		$3 + 20 = 26$
111		
541		

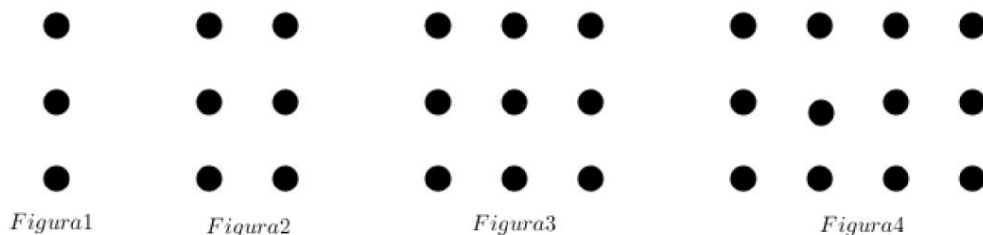
<p>¿En cada figura, que permanece igual?</p> <p>¿Para cada figura, qué es lo que cambia? Y ¿cómo cambia?</p> <p>¿Qué relación tiene el número de la figura con lo que va cambiando?</p> <p>¿Cómo describiría esta forma de contar?</p>		

*Anexo 2. Tarea 2. Secuencia de puntos.*

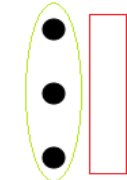
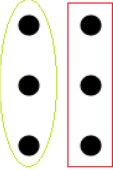
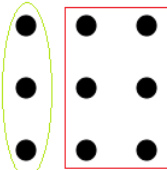
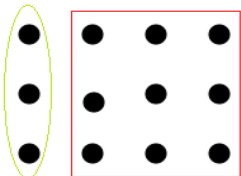

 <p><b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> Educadora de educadores</p>	<p><b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <b>FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA</b> <b>DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS</b> <b>2019</b></p>	
Nombre:		Curso:

Actividad 2

En la siguiente secuencia se presentan diferentes formas para contar la cantidad de puntos: describa cada forma y complete los datos faltantes.



FORMA DE CONTAR: TRES CONSTANTE

FIGURA	REPRESENTACIÓN	NÚMERO DE PUNTOS
1	 <i>Figura1</i>	$3 + 0 = 3$
2	 <i>Figura2</i>	$3 + 3 = 6$
3	 <i>Figura3</i>	$3 + 6 = 9$
4	 <i>Figura4</i>	
5	 <i>Figura5</i>	
7	<i>Figura 7</i>	
12		
17		

98		
539		

En clase Claudia y Jorge describieron de la siguiente manera la forma de contar estos puntos:

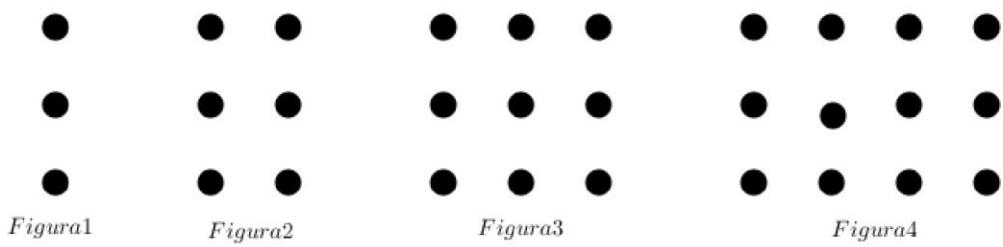
“Primero contamos tres puntos del lado izquierdo, para el resto contamos los que están arriba, los que están en medio y los que están abajo que son el mismo número de puntos. Los que están arriba son justamente el número de la figura menos uno. Para obtener el número total de puntos sumo los puntos de arriba más los del medio más los de abajo, que son la misma cantidad, y por último sumamos los puntos del lado izquierdo, este es el total de puntos.”

¿Lo que describen Claudia y Jorge se corresponde con lo que está arriba?


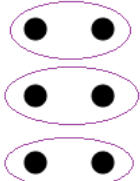
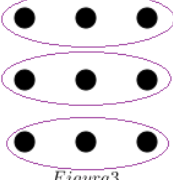
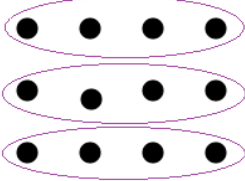

Si no es así, ¿cómo lo arreglarían?

	 <b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <i>Educadora de educadores</i>	<b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <b>FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA</b> <b>DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS 2019</b>	
	Nombre:		Curso:

En la siguiente secuencia se presentan diferentes formas para contar la cantidad de puntos: describa cada forma y complete los datos faltantes.



**FORMA DE CONTAR: ARRIBA, MEDIO Y ABAJO**

FIGURA	REPRESENTACIÓN	NÚMERO DE PUNTOS
1	 <p><i>Figura1</i></p>	$1 + 1 + 1$ $= 3$ $3 * 1 = 3$
2	 <p><i>Figura2</i></p>	$2 + 2 + 2$ $= 6$ $3 * 2 = 6$
3	 <p><i>Figura3</i></p>	$3 + 3 + 3$ $= 9$ $3 * 3 = 9$
4	 <p><i>Figura4</i></p>	
5	 <p><i>Figura5</i></p>	
8		

10		
20		
100		
537		

Alejandra y Adrián en clase describieron la siguiente forma de contar los puntos.

“Primero contamos los puntos de arriba y luego contamos los puntos de abajo que son exactamente el mismo número de la figura, estos resultados los sumamos y esto sería el total de puntos”

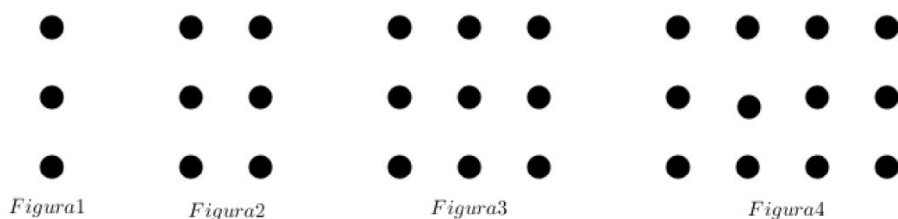
¿Lo que describen Alejandra y Adrián se corresponde con lo que está arriba?

Si no es así, ¿cómo lo arreglarían?


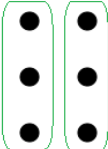
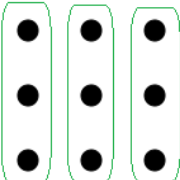
	 <b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <i>Educadora de educadores</i>	<b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <b>FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA</b> <b>DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS 2019</b>	
	Nombre:		Curso:

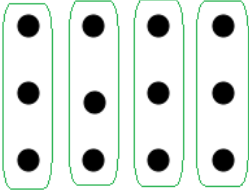
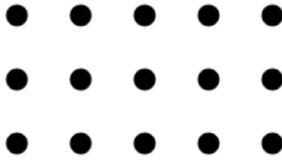
## Actividad 2

En la siguiente secuencia se presentan diferentes formas para contar la cantidad de puntos: describa cada forma y complete los datos faltantes.



## FORMA DE CONTAR: CONTEO VERTICAL

FIGURA	REPRESENTACIÓN	NÚMERO DE PUNTOS
1	 <i>Figura1</i>	3
2	 <i>Figura2</i>	$3 + 3 = 6$
3	 <i>Figura3</i>	$3 + 3 + 3 = 9$

4	 <p><i>Figura4</i></p>	
5	 <p><i>Figura5</i></p>	
9		
13		
21		
111		
541		



Andrés y Paula encontraron la siguiente forma de contar los puntos de las figuras

“Para la primera figura hay solo 3 puntos, para la figura 2 hay 3 más 3 puntos; es decir 6 puntos, para la figura 4 hay 3 más 3 más 3 puntos; es decir 9 puntos, se puede ver que el número de veces que se repiten los 3 puntos es exactamente el número de la figura, ya que en la figura 5 sucede lo mismo.



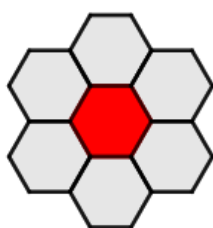
Pensamos que para una figura muy grande como 1000, el número de veces que se repite los tres puntos va a ser 1000. En conclusión la cantidad de puntos es el número de la figura multiplicado por 3.

*Anexo 3. Tarea 4. Secuencia hexagonal.*

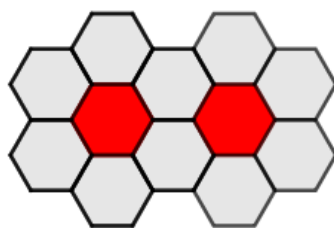
 <p><b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <i>Educadora de educadores</i></p>	<p><b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <b>FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA</b> <b>DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS</b> <b>2019</b></p>	
Nombre:		Curso:

Actividad 3<sup>2</sup>

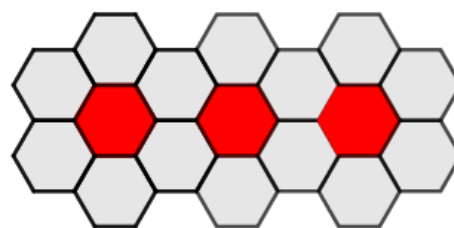
Cada una de las figuras está constituida por baldosas grises que cubren a las baldosas rojas.



*Figura1*



*Figura2*



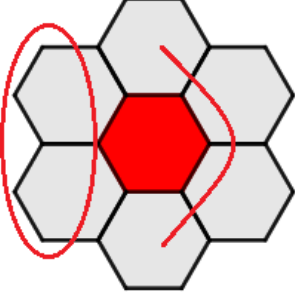
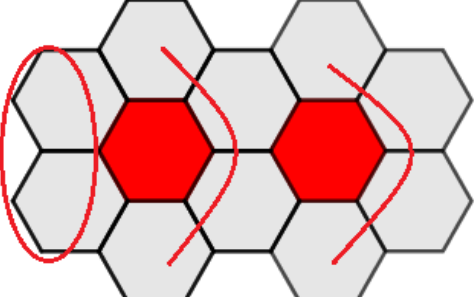
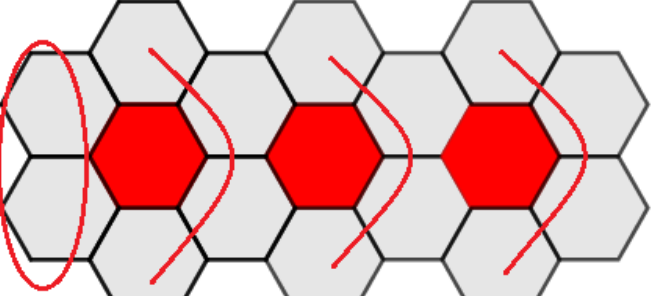
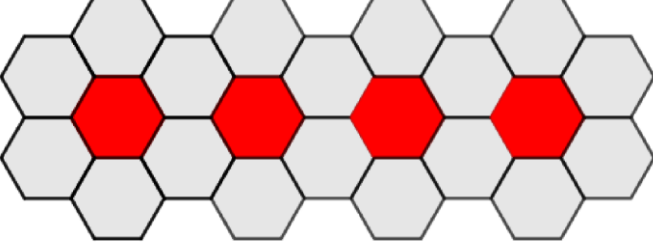
*Figura3*

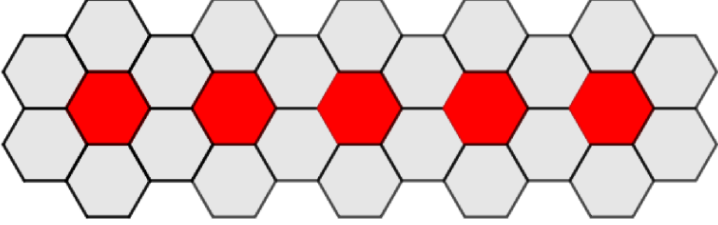
A continuación, se presenta diferentes formas para contar las baldosas grises: describa cada forma y complete los datos faltantes.

**FORMA DE CONTAR: DOS CONSTANTE**



FIGURA	NÚMERO DE BALDOSAS ROJAS	NÚMERO DE BALDOSAS GRISES
--------	--------------------------	---------------------------

<sup>2</sup> Esta actividad es una adaptación de la secuencia de la jardinera propuesta por Mason, J (1999).

 <p>Figura1</p>	1	$2 + 4 = 6$
 <p>Figura2</p>	2	$2 + 4 + 4 = 10$
 <p>Figura3</p>	3	$2 + 4 + 4 + 4 = 14$ $2 + 4 * 3 = 14$
 <p>Figura4</p>		

 <p style="text-align: center;"><i>Figura 5</i></p>		
	20	
	100	
	534	
<p>Durante la clase de matemáticas, tres grupos describieron la anterior forma de contar de las siguientes formas:</p> <p>El primer grupo describió de la siguiente forma:</p> <p>“Se suma el número 4 tantas veces como lo indica el número de la figura, es decir se multiplica 4 por el número de la figura. A este resultado se suma el dos”</p> <p>El segundo grupo describió de la siguiente forma:</p> <p>“4 multiplicado por el número de figura más 2”</p> <p>El tercer grupo describió de la siguiente forma:</p> <p>“<math>4 \cdot Y + 2</math>, siendo <math>Y</math> el número de la figura”</p> <p>¿Las descripciones de cada grupo hacen referencia a lo mismo? Argumente su respuesta.</p>		

¿Son correctas las descripciones que realiza cada grupo de la forma de contar? Argumente su respuesta y corrija si es necesario.

 <p><b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <i>Educadora de educadores</i></p>	<p><b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <b>FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA</b> <b>DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS</b> <b>2019</b></p>	
Nombre:		Curso:

Actividad 3<sup>3</sup>

Cada una de las figuras está constituida por baldosas grises que cubren a las baldosas rojas.

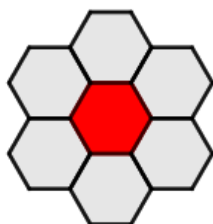


Figura1

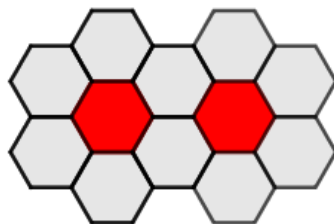


Figura2

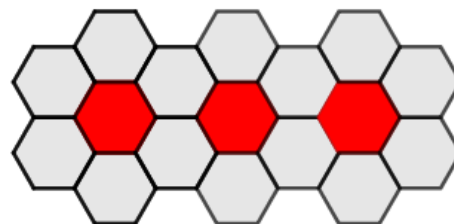
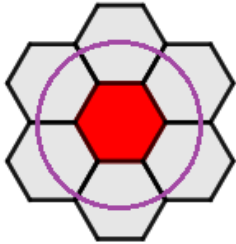
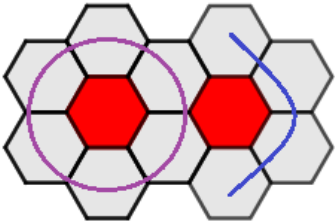
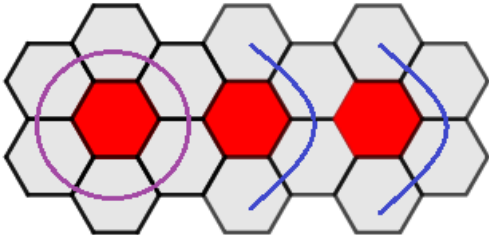
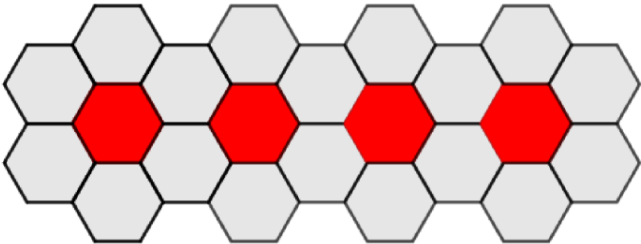
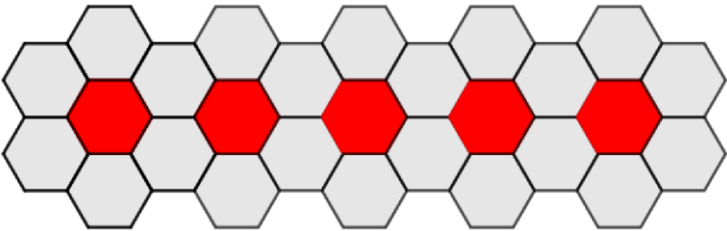


Figura3

### FORMA DE CONATR: SEIS CONSTANTE

FIGURA	NÚMERO DE BALDOSAS ROJAS	NÚMERO DE BALDOSAS GRISES
--------	--------------------------	---------------------------

<sup>3</sup> Esta actividad es una adaptación de la secuencia de la jardinera propuesta por Mason, J (1999).

 <p><i>Figura1</i></p>	1	$6 + 0 = 6$
 <p><i>Figura2</i></p>	2	$6 + 4 = 10$
 <p><i>Figura3</i></p>	3	$6 + 4 + 4 = 14$ $6 + 4 * 2 = 14$
 <p><i>Figura4</i></p>		
 <p><i>Figura5</i></p>		

	20	
	100	
	534	

Durante la clase de matemáticas, tres grupos describieron la anterior forma de contar de las siguientes formas:

El primer grupo describió de la siguiente forma:

“Se resta 1 al número de la figura. Este es el número de veces que se suma 6, luego a este resultado se suma 4”

El segundo grupo describió de la siguiente forma:

“4 más (número de figura menos 1) por 6”

El tercer grupo describió de la siguiente forma:



“  $4 \cdot (Y - 1) + 6$  ”

¿Las descripciones de cada grupo hacen referencia a lo mismo? Argumente su respuesta.

¿Son correctas las descripciones que realiza cada grupo de la forma de contar? Argumente su respuesta y corrija si es necesario.

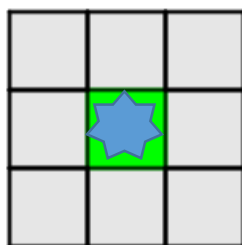
¿Por qué piensan que las dos formas de contar presentadas anteriormente, a pesar de ser diferentes, llegan al mismo resultado?

*Anexo 4. Tarea 4. Secuencia jardineras.*

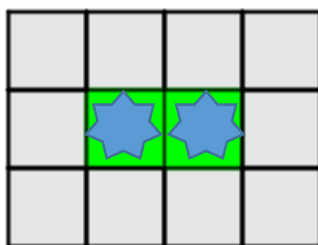
 <b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <i>Educadora de educadores</i>	<b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <b>FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA</b> <b>DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS</b> <b>2019</b>	
Nombre:	Curso:	

Actividad 4<sup>4</sup>

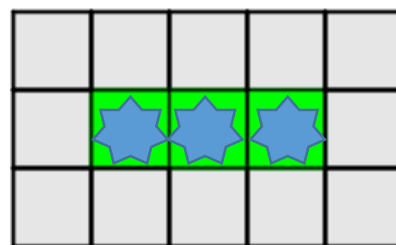
Cada una de las figuras está constituida por baldosas grises que cubren a las jardineras.



*Jardinera1*

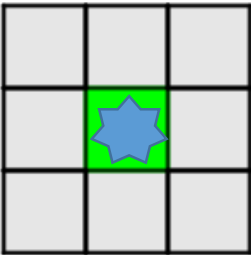


*Jardinera2*

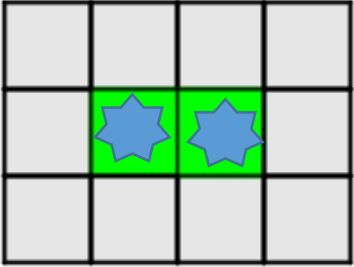
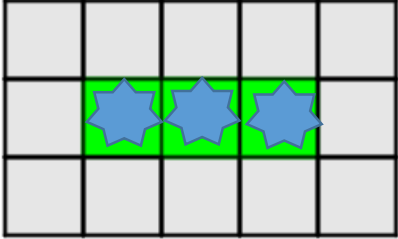


*Jardinera3*

Complete la siguiente tabla buscando una forma de contar los cuadrados grises.

FIGURA	NÚMERO DE JARDINERAS	NÚMERO DE BALDOSAS GRISES
 <i>Jardinera1</i>		

<sup>4</sup> Tomado de Mason, J. (1999).

<div data-bbox="152 222 503 487"></div> <div data-bbox="267 510 401 541"><i>Jardinera2</i></div>		
<div data-bbox="142 651 537 888"></div> <div data-bbox="280 911 402 942"><i>Jardinera3</i></div>		
	4	
	5	
	8	
	10	



	20	
	100	
	534	
Describa la forma de contar las baldosas grises		

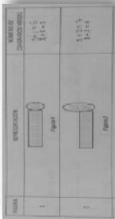
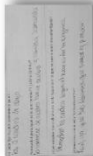
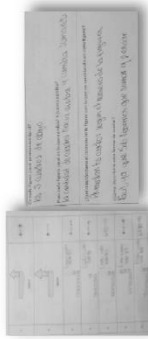








Encuentre otra forma diferente de contar las baldosas grises.




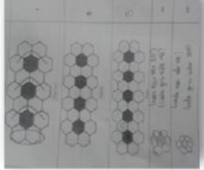
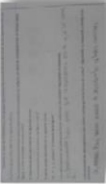
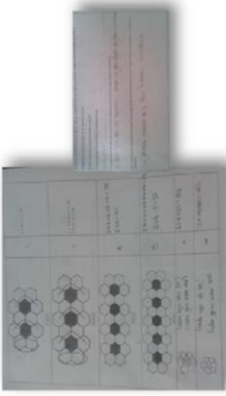
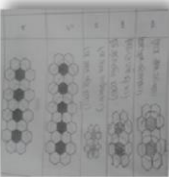
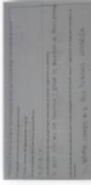

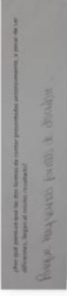
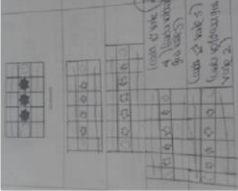
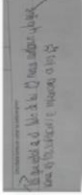

Anexo 5. Matriz de análisis de las tareas diseñadas.

MATRIZ DE ANÁLISIS							
DESCRIPCIÓN TAREA							
Se le presenta al estudiante una secuencia y diferentes formas de contar la cantidad de cuadritos verdes, consignada en una tabla que relaciona el número de la figura, la representación y la cantidad expresada por medio de una operación. Se le pide al estudiante que describa la forma de contar y complete la tabla con los datos faltantes.							
SUB-TAREAS	NÚMERO DE LAS TAREAS	TIPO DE GENERALIZACIÓN	JUSTIFICACIÓN	ESTRATEGIAS	JUSTIFICACIÓN	ÉTAPA	ERRORES Y DIFICULTADES
							PERCEPCIONES DE LOS AUTORES
1A 1B 2A 2B 2C 3A 3B	<b>Numeral 1.1</b> En la primera parte de esta tarea que se le asigna al estudiante, se le presentan las cuatro primeras figuras completas y luego en la quinta figura se le pide que complete la cantidad de cuadros que hay.	<b>Empírica</b>	Debido a que a los estudiantes se les proponen diversos ejemplos, de tal forma que logren detectar una regularidad.	<b>Conteo</b>	Los estudiantes están explorando una forma de contar la cantidad de cuadros verdes.	<b>Ver</b>	<p>Con el fin de mediar las dificultades que se pueden presentar al enfrentarse el estudiante con las tareas de generalización de secuencias geométricas, se diseñó la actividad de tal manera que el estudiante no tenga un acercamiento tan brusco hacia el proceso de generalizar proponiendo tareas en las cuales se ejercite la capacidad de ver e identificar las características relevantes en las configuraciones geométricas.</p> <p><b>Dificultad 1:</b> Se puede presentar ya que es la primera vez que los estudiantes se van a enfrentar a una actividad de secuencias y puede que no se familiaricen o identifiquen la variación.</p> <p><b>Dificultad 2:</b> Al ser una secuencia geométrica, puede pasar que los estudiantes encuentren una gran variedad de características que no sean fáciles de clasificar a tal punto que no se tengan en cuenta las que son más relevantes.</p>
1A 1B 2A 2B 2C 3A 3B	<b>Numeral 1.2.</b> A continuación se le presenta a los estudiantes las figuras 8 y 10 en las cuales deben hacer la representación y en las figuras 20, 100 y 537 adicional a la representación deben escribir la cantidad de cuadros verdes que hay en cada figura.	<b>Empírica Gráfica</b>	<b>Empírica:</b> Debido a que el estudiante continúa detectando regularidades a medida que avanza en la actividad. <b>Gráfica:</b> Debido a que al aumentar el número de la figura, va a ser difícil seguir representando la figura como esta propuesta en la primera parte de la tarea y por tal motivo el estudiante deberá construir una expresión gráfica que generalice las propiedades comunes que había observado.	<b>Conteo Explícita</b>	<b>Conteo:</b> El estudiante continúa estudiando una forma de contar, identificando la diferencia constante que hay en cada uno de ellos. <b>Explícita:</b> Se espera que el estudiante comience a relacionar los componentes; es decir, lo que varía y lo que permanece constante y apartir de ellos encuentre como expresar la generalidad.	<b>Ver Decir Registrar</b>	<p>La mayoría de dificultades descritas a la luz de la teoría están enfocadas a aquellas tareas en las cuales se le presenta una secuencia al estudiante y se le pide encontrar la generalización. Dado que las tareas que se diseñaron no pretenden hacer que el estudiante genere, sino llevar paulatinamente en el proceso de generalizar, observamos que una de las dificultades que puede presentar el estudiante es que no generalice la representación gráfica y se estanque en esa tarea.</p> <p>Es importante que el estudiante allá logrado identificar la regla, si no es así se puede presentar la dificultad 5 en la que no se tiene clara la regla y por lo tanto es difícil representar o que describir la secuencia.</p> <p><b>Dificultad 5.</b></p>
1A 1B	<b>Numeral 1.3.</b> En esta parte de la actividad se relizan una serie de preguntas que indagán respecto a cómo desarrolló la segunda parte de la actividad y cómo puede expresar la regla que encontró para poder describir la manera de contar.	<b>Verbal</b>	En la cual a partir de un lenguaje natural los estudiantes expresa la generalidad que ha percibido durante el desarrollo de las tareas.	<b>Explícita</b>	Va que en esta parte de la actividad no se está preguntando por una figura específica, sino por la forma en la que se está contando, es decir, el patrón.	<b>Decir Registrar</b>	<p>El estudiante debe poder expresar la regularidad, a partir de un enunciado, una operación o un procedimiento. Sin embargo si no es clara la regularidad va a presentar dificultad para registrar la generalización.</p> <p><b>Dificultad 6.</b></p>

2A 2B 2C	<p><b>Numeral 1.3</b> Se le presenta al estudiante la descripción que realizan un grupo de estudiantes y se le pide que argumente, si es correcta la descripción que hacen los estudiantes respecto a la forma de contar y en dado caso de no ser correcta, se le pide que la corrija.</p>	<p><b>Verbal</b></p> <p>Se le presenta a los estudiantes una descripción de la forma de contar, con lleva a una generalización verbal, con el fin de guiar a los estudiantes en el proceso de describir, decir o registrar el patrón que se ha observado.</p>	<p><b>Explícita</b></p> <p>Ya que en esta parte de la actividad los estudiantes deben tener claridad de la relación que existe entre el número de la figura y la cantidad de puntos que hay en la forma de contar, para poder refutar, argumentar, completar, etc., cada una de las descripciones que se les presentan.</p>	<p><b>Registrar</b></p> <p>Se le presenta a los estudiantes formas de como registrar el patrón de lenguaje natural y haciendo un pequeño paso al simbólico.</p>	<p><b>Dificultad 5.</b></p> <p>Los estudiantes no están acostumbrados a ejercicios de describir una generalidad. Por tal motivo en esta parte de la actividad se le presentan descripciones de la forma de contar, para guiarlos en el proceso de descripción, de generalización verbal, de identificar las características necesarias, importantes y relevantes en una secuencia.</p>
3A 3B	<p><b>Numeral 1.3</b> Se le presenta a los estudiantes las descripciones que realizaron tres grupos respecto a la forma de contar y se les pide identificar si las descripciones son correctas o no, además si hacen referencia a los mismo o son completamente diferentes.</p>	<p><b>Verbal Simbólico</b></p> <p>Se les presenta a los estudiantes tres descripciones, las cuales se registran por medio de palabras en un lenguaje natural, palabras combinadas con símbolos y una descripción completamente simbólico; para poder expresar el patrón en cada una de las formas de contar.</p>	<p><b>Explícita</b></p> <p>Ya que en esta parte de la actividad los estudiantes deben tener claridad de la relación que existe entre el número de la figura y la cantidad de puntos que hay en la forma de contar, para poder refutar, argumentar, completar, etc., cada una de las descripciones que se les presentan.</p>	<p><b>Registrar</b></p> <p>Se le presenta a los estudiantes formas de como registrar el patrón de lenguaje natural y simbólico.</p>	<p><b>Dificultad 5:</b> Para que el estudiante logre argumentar si es correcta, completa e incompleta una descripción de la forma de contar, es necesario que el perciba o identifique claramente el patrón relevante en la secuencia.</p> <p><b>Dificultad 7:</b> Los estudiantes deben argumentar si es correcta la descripción; sin embargo, en aquella que es completamente simbólica puede que tengan claro el patrón y lo digan correctamente, pero al hacer la traducción del lenguaje natural al simbólico no puedan expresarlo correctamente.</p> <p>Uno de los procesos que subyacen al proceso de generalizar, y que a nuestro modo de ver es uno de los más difíciles, es lograr realizar un registro simbólico de la generalidad. Sin embargo por medio de esta actividad se busca que los estudiantes observen, identifiquen las distintas formas de registrar el patrón y proceso que conlleva llegar al registro simbólico.</p>
3C	<p><b>Numeral 1.4</b> Se le realiza a los estudiantes la siguiente pregunta: ¿Por qué piensan que estas dos formas de contar llegan al mismo resultado?</p>	<p>En esta parte de la actividad se busca que los estudiantes reconozcan que pueden obtener expresiones diferentes, dependiendo la forma de contar que identifiquen; sin embargo siempre se llegará al mismo resultado.</p>			
4	<p><b>Numeral 1.5</b> Se le presenta a los estudiantes una secuencia, en la cual deben volver a registrar los datos de la tabla; sin embargo, en esta oportunidad deben ser ellos quienes identifiquen dos formas distintas de contar y a partir del proceso que realizaron con las actividades previas, logren describir la forma de contar que propusieron.</p>	<p><b>Empírica Gráfica Verbal Simbólica</b></p> <p><b>Empírica</b> Debido a que es la primera vez que van a identificar un patrón, visualizar una regularidad.</p> <p><b>Gráfica</b> Debido a que la actividad propone continuar registrando la representación de la secuencia, al aumentar el número de la figura, necesitaran encontrar una representación que generalice las propiedades comunes del elemento.</p> <p><b>Verbal y Simbólico</b> Debido a que los estudiantes deben describir la manera de contar ya sea de forma verbal o simbólica teniendo en cuenta las actividades previas.</p>	<p>Los estudiantes pueden hacer uso de cada una de estas estrategias:</p> <p><b>Conteo</b> Dado a que van a identificar una forma de contar.</p> <p><b>Recursividad</b> Puede que obtengan el término a partir del anterior.</p> <p><b>Explícita</b> Ya que pueden encontrar la relación entre dos variables, lo que permanece constante y lo que varía.</p>	<p>El proceso de generalizar se subdivide en tres grandes grupos: Ver, Decir y Registrar. Los estudiantes pasaran por estos tres procesos. Ver el patrón, identificarlo regularidades por medio de las determinaciones sensibiles; Decir el patrón, extrapolando las regularidades obtenidas y planteando conjeturas y por ultimo Registrar el patrón, ya sea verbal con lenguaje natural, gráfico o simbólico</p>	<p>En esta parte de la actividad los estudiantes pueden presentar las diversas dificultades nombradas anteriormente como no lograr identificar características relevantes no poder ver el patrón no hacer diferentes dificultades que surgen al realizar actividades de generalización; al lenguaje simbólico y entre otras, debido a que anteriormente realizaron el proceso de forma guiada y esta vez deben hacerlo ellos mismo</p> <p>Los estudiantes van a realizar todo el proceso de generalizar comenzando por ver y registrar el patrón. Sin embargo cuando están haciendo este proceso pueden presentarse las diferentes dificultades que surgen al realizar actividades de generalización; sin embargo, se espera que los estudiantes no presenten este tipo de dificultades ya que se ha realizado con ellos un proceso que los ayuda a solventar cada una de ellas.</p>



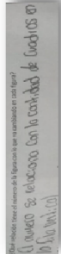
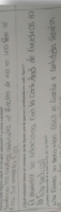

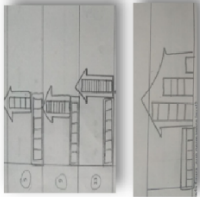
Anexo 6. Matriz de análisis primer grupo.

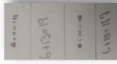
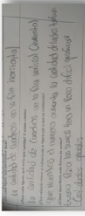
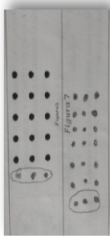
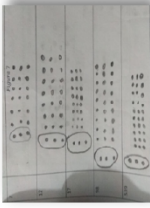
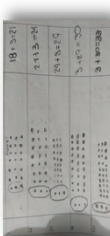
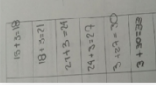
MATRIZ DE ANÁLISIS GRUPO 1							
Danna Niño y Gabriela Zambrano							
Grupo 1	Subareas	VER	EVIDENCIAS	DECIR	EVIDENCIAS	REGISTRAR	EVIDENCIAS
1A, 1B		Debido a un error de digitación, la operación y el resultado de la primer forma de contar no correspondió con la representación gráfica, sin embargo, las estudiantes haciendo uso de las determinaciones sensibles como la atención, corrigieron la operación y resultado según su representación. Las estudiantes están trabajando con casos particulares, organizando, explorando y comprendiendo la forma de contar que se les ha presentado.		Logran decir la variación que hay en la secuencias y la relación del número de cada figura con lo que va cambiando		1. Gráfica: Los estudiantes logran registrar el patrón ya que se valen de dibujos apoyados con palabras para ilustrar las figuras donde los números son muy grandes.  2. Numérica o simbólica: Los estudiantes realizan un registro numérico bien hecho ya que identifican el patrón y lo registran.  3. Verbal: Los estudiantes realizan un registro donde identifican lo que permanece constante y lo que va variando, adicional logran relacionar el número de la figura con lo que varia, pero los estudiantes no llegan a registrar la conjetura que han podido visualizar.	
	1A, 1B	Identificaron la regularidad, es decir aquello que permanece constante y lo que varia en la forma de contar.  Audio: AUD 17:019:5.06 MF: vamos a socializar las últimas preguntas, en cada figura ¿qué permanece igual? Estudiantes: en esta actividad las cosas que no cambian son los cuadrados y la base. MF: ...¿A qué te refieres con la base? Estudiantes: ... La figura siempre tenía de base los cinco. MF: Ahora para cada figura ¿Qué es lo que cambia? y ¿Cómo cambia? Estudiantes: La cantidad de cuadros que van hacia arriba.		Dicen y le asignan un valor a los cuadrados para poder dibujar las figuras en las secuencias según la forma de contar mostrada.			
2A, 2B		Relacionan la variación con el número de la figura, haciendo uso de la estrategia explícita en actividades de generalización, presentada por Valenzuela & Gutiérrez (2018) que consiste en relacionar dos variables.		Como se observa en la evidencia de la etapa "Ver" los estudiantes logran decir el patrón que se sigue para poder representar la figura en números muy grandes.		1. Gráfica: Logran generalizar el patrón de una forma correcta al ilustrar cada dibujo según el número de la figura que se les esta presentando apoyándolo con palabras.  2. Numérica o simbólica: Los estudiantes registran el patrón de forma numérica donde expresan la suma sucesiva como una multiplicación relacionando esa parte constante con la parte que varia.  3. Verbal: Al apoyar la forma gráfica con palabras ya están realizando un registro verbal, adicional al responder que la manera como describen otras personas el patrón de conteo, es correcto para los estudiantes, aún siendo incorrecto, no logran asociar lo que han visto y dicho para identificar un registro incompleto.	
	2A, 2B	Los estudiantes ven el patrón en las secuencias geométricas, identificando estructuras mentales basándose en la intuición e interacción con los casos particulares, es decir las primeras cuatro figuras.		Al presentarlos la manera como describen la forma de contar, ellos responden que lo que se les esta diciendo es correcto, pero no perciben ni logran relacionar el "ver" con el "decir".			

2C	Los estudiantes logran ver el patrón, pero en el proceso de llevar el patrón a números mas grandes lo hacen de una forma incorrecta.	 <p>Los estudiantes dicen la forma como ven el patrón, como se evidencia en la forma que describen cuanto vale cada punto para formar las siguientes figuras de la secuencia geométrica. En esta etapa de decir el patrón de conteo que se esta mostrando lo afirman como se muestra en la siguiente evidencia.</p>	 <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Gráfica: Los estudiantes ilustran el patrón de forma correcta en los dibujos.</li> <li>2. Numérica o simbólica: Los estudiantes realizan un registro numérico pero no logran trascender el patrón de conteo de forma correcta.</li> <li>3. Verbal: Al apoyar cada ilustración grafica con palabras los estudiantes lo hacen de forma incorrecta donde no logran trascender de lo que han visto al registro verbal.</li> </ol>	
3A	Identifican el patrón de conteo y logran relacionar el número de la figura con la cantidad de hexágonos rojos en la secuencia geométrica.	 <p>Logran entender lo que otros estudiantes dicen del patrón de conteo; los estudiantes identifican que así lo digan en palabras diferentes se esta describiendo el mismo patrón de conteo.</p>	 <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Gráfica: Logran realizar ilustraciones para tratar de hacer una generalización grafica pero al apoyarlos con palabras no se logra registrar lo que quieren decir.</li> <li>2. Numérica o simbólica: Se les facilita mas el registro numérico ya que logran registrar de manera correcta el patrón de conteo y expresan la suma sucesiva con la multiplicación relacionando la parte constante y la parte que varía.</li> <li>3. Verbal: El apoyo verbal que le dan a las ilustraciones graficas no son muy claras a lo que se podría inferir que no logran registrar aquello que han visto y dicho. Adicional al presentarlo maneras diferentes como describen el patrón de conteo otras personas los estudiantes logran identificar que todas son correctas pero dichas o expresadas en diferentes formas.</li> </ol>	
3B	Relaciona el números de figura con la cantidad de hexágonos rojos, logra ver el patrón de conteo que se le presenta.			
3C	Los estudiantes no logran identificar características relevantes para realizar un registro apoyado en las maneras que se le describe la forma de contar el patrón en la secuencia.			
4	Logran identificar e implementar un patrón de conteo para poder dibujar las siguientes figuras, relacionando el número de las jardineras con el número de la figura.		 <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Gráfica: Los estudiantes logran dibujar y generalizar apoyándose con palabras algunas de las figuras que se solicitaba.</li> <li>2. Numérica o simbólica: Los estudiantes logran encontrar un patrón de conteo y lo registran de manera correcta.</li> <li>3. Verbal: Se evidencia que los estudiantes además de apoyar las ilustraciones graficas con palabras también registran de forma verbal el patrón de conteo que consideraron para esta secuencia.</li> </ol>	





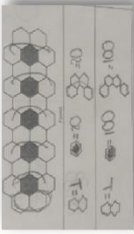
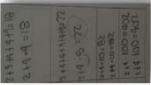

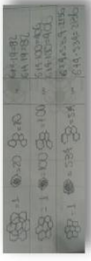
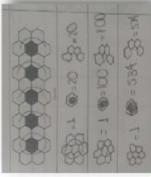
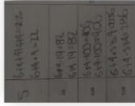

## Anexo 7. Matriz de análisis segundo grupo.


GRUPO 2 SUBTAREAS	Santiago García - Miguel Torres			
	VER	EVIDENCIAS	DECIR	EVIDENCIAS
1A	Los estudiantes corrigen la operación, visualizando la representación de la forma de contar, analizándola a partir de las partes que la componen; es decir, la que está encerrada en el rectángulo y la otra que está encerrada en el óvalo.			
	Identificaron una relación entre las partes que componen la imagen. Una de ellas permanece constante "la parte horizontal" y la otra varía "la parte vertical"	<b>AUDIO: AUD171019-9.06</b> <b>MF:</b> vamos a socializar las últimas preguntas, en cada figura ¿Qué permanece igual? <b>Estudiantes:</b> los cinco cuadrados horizontales. <b>MF:</b> Ahora para cada figura ¿Qué es lo que cambia? y ¿Cómo cambia? <b>Estudiantes:</b> cambian los cuadrados verticales.	Los estudiantes se expresan a partir de gestos e indicaciones, buscan describir la forma de contar por medio de un lenguaje verbal, natural	<b>VIDEO: VID-171019-A0001</b> <b>MF:</b> vamos a socializar las últimas preguntas, en cada figura ¿Qué permanece igual? <b>Estudiantes:</b> los cinco cuadrados horizontales (realizando la indicación, acompañado de movimientos horizontales con las manos) <b>MF:</b> Ahora para cada figura ¿Qué es lo que cambia? y ¿Cómo cambia? <b>Estudiantes:</b> cambian los cuadrados verticales. (EL estudiante lo expresa realizando un movimiento con las manos de ir poniendo una sobre la otra y va subiendo)
	Comienzan a establecer una relación entre el número de la figura y la cantidad de cuadros en "la fila vertical"			
	Los estudiantes observan la imagen a través de las partes que la componen, los cuadrados encerrados por el rectángulo y los cuadrados encerrados por la flecha; debido a que continúan realizando la descomposición de la figura con la misma marcación. Además es interesante observar que encerraron en un círculo el número de la figura, identificando una relación, la cual no es precisamente correcta.		Por medio de preguntas los estudiantes describen el patrón, a partir de las propiedades que cada una de sus partes posee y como se construye.	

18	<p>Identificaron una relación entre las partes que componen la imagen lo que permanece constante y lo que varía, este segundo no lo visualizan de forma completa, dado que dicen que aumenta, pero no como lo hace.</p>	<p><b>AUDIO: AUD171019-9.06</b> <b>MF:</b> Nuevamente socialicemos las últimas preguntas, en cada figura ¿Qué permanece igual? <b>Estudiantes:</b> la cantidad de cuadrados en la fila horizontal. <b>MF:</b> Ahora para cada figura ¿Qué es lo que cambia? Y ¿Cómo cambia? <b>Estudiantes:</b> la cantidad de cuadros en la fila vertical aumenta</p>	<p>Describen la conjetura en un lenguaje natural sin usar sintaxis algebraico o simbólico. Mencionando características globales de la imagen.</p>	<p><b>AUDIO: AUD171019-9.06</b> <b>MF:</b> ... y ¿Cómo aumenta la cantidad de cuadrados ubicados verticalmente? <b>Estudiantes:</b> Va aumentando hacia arriba</p>	<p>2. Numérico o simbólico: Registran las operaciones incorrecta, debido a que expresan correctamente en el lado izquierdo la parte constante; sin embargo, en la derecha no logran identificar como esta variando, es decir, el número de la figura menos uno, sino que exactamente escriben el número de la figura. No expresan una generalidad y menos acompañada de números o símbolos.</p>	
	<p>Identifican una relación, pero sin contemplar todos los elementos necesarios.</p>	<p><b>AUDIO: AUD171019-9.06</b> <b>MF:</b> ¿Qué relación tiene el número de la figura con lo que va cambiando? <b>Estudiantes:</b> Que mientras el número aumenta la cantidad de cuadros también.</p>			<p>3. Verbal: Escriben la apreciación que tienen respecto a la forma de contar, en cuanto a la experiencia que surgió al realizar la tarea. No logran escribir una conjetura; sin embargo sí registran las relaciones que observaron de la parte constante y la que varía.</p>	
	<p>En la tarea 2A la figura cinco esta constituida por 5 columnas de tres puntos cada una, se le presenta la imagen sin marcar a forma de contar, de tal manera que los estudiantes realicen este ejercicio; sin embargo, los estudiantes agregan otra columna a la izquierda de tres puntos y la marcan con un ovalo representando la parte que permanece constante, tal como se muestra en los casos particulares observados previamente. En la figura siete al realizar la representación, si llevan a cabo la correcta descomposición. De lo anterior podemos deducir que los estudiantes relacionan los tres puntos como constantes, si están demarcados con el ovalo; es decir, relacionan las partes que componen la figura pero no de manera acertada.</p>		<p>Los estudiantes describen la forma de construir el patrón, sin embargo no pueden describir como encontrar la cantidad de puntos de la parte que varía.</p>	<p><b>AUDIO: AUD251019-8.30</b> <b>MF:</b> En esta actividad nos pedían contar con un patrón ya establecido ¿Cuál era ese patrón? <b>Estudiantes:</b> tres puntos a la izquierda horizontales ... perdon verticales y por ejemplo en la figura 7 se hacían tres filas de siete puntos.</p>	<p>1. Grafica: No logran establecer una representación que generalice las características comunes, de hecho evaden la tarea de graficar o representar cantidades más grandes. Si observamos en la figura 539 representan realmente la figura 11</p>	
2A	<p>Los estudiantes no emplean las suficientes relaciones para dar paso a la conjetura, sino que permanecen en la representación que le permita hacer un conteo, teniendo claro que los tres puntos de la izquierda permanecen constantes, que aunque es una relación necesaria, no es suficiente para encontrar la cantidad de puntos para figuras más grandes. En este caso se evidencia la dificultad cinco, ya que es difícil establecer una regla porque no se percibe o identifica completamente el patrón.</p>				<p>2. Numérico o simbólico: Realiza correctamente las operaciones, en esta oportunidad en algunas figuras escribe en la parte izquierda la parte constante, pero en otras en la parte derecha. No se identifica generalización numérica o simbólica, debido a que sus registros permanecen completamente verbales.</p> <p>3. Verbal: Se aprecia una escritura un poco más formal, usando palabras claves como suma, cantidad y puntos de la izquierda que hacen referencia a la parte constante. Sin embargo, describe características de la imagen como un todo y no establece relaciones entre sus partes.</p>	

<div data-bbox="235 121 451 331" data-label="Image"> </div>	<div data-bbox="284 373 365 703" data-label="Text"> <p>1. Gráfica: Los estudiantes construyen una expresión gráfica que sin perder su representación base, agrupa las características necesarias y suficientes para poder expresar cantidades muy grandes sin mayor esfuerzo.</p> </div>	<div data-bbox="454 808 470 892" data-label="Caption"> <p>Evidencia 2B</p> </div> <div data-bbox="535 751 617 991" data-label="Image"> </div>	<div data-bbox="649 1003 812 1222" data-label="Text"> <p>En estas dos formas de contar los estudiantes pueden describir más fácilmente la forma de contar e incluso argumentar porque razon la descripción que hace Alejandra y Adrián de la tarea 2B es incorrecta y proponen una descripción acertada de la forma de contar. En la tarea 2C respecto a la descripción que realizan Andrés y Paula de la forma de contar, ellos argumentan que es correcto y en sus propias palabras describen el procedimiento.</p> </div>	<div data-bbox="446 1327 462 1411" data-label="Caption"> <p>Evidencia 2B</p> </div> <div data-bbox="511 1234 592 1507" data-label="Image"> </div>	<div data-bbox="755 1522 820 1864" data-label="Text"> <p>Los estudiantes establecen relaciones necesarias y suficientes, identifican el patrón y como cambia, tienen claridad de las partes que componen la imagen.</p> </div>
<div data-bbox="479 163 657 304" data-label="Image"> </div> <div data-bbox="673 109 787 346" data-label="Image"> </div>	<div data-bbox="868 373 950 703" data-label="Text"> <p>2. Numérica o simbólica: El estudiante generaliza numéricamente a partir de las relaciones que observa a través de los casos particulares, debido a que registra la cantidad total de puntos por operaciones de suma y multiplicación. Además al argumentar si era correcta o no la manera de describir la forma de contar de Alejandra y Adrián, los estudiantes añaden números a su argumento; sin embargo aún no registran ningún símbolo.</p> </div> <div data-bbox="868 373 950 703" data-label="Text"> <p>Verbal: Los estudiantes argumentan correctamente escribiendo las propiedades comunes de cada caso particular, identifican que está incorrecto e incompleto la descripción que realizan los dos estudiantes y propone acompañado de palabras y números una descripción correcta de la forma de contar.</p> </div>	<div data-bbox="828 808 844 892" data-label="Caption"> <p>Evidencia 2C</p> </div> <div data-bbox="1015 760 1096 982" data-label="Image"> </div>	<div data-bbox="868 1003 950 1222" data-label="Text"> <p>1. Gráfica: Los estudiantes construyen una expresión gráfica que sin perder su representación base, agrupa las características necesarias y suficientes para poder expresar cantidades muy grandes sin mayor esfuerzo.</p> </div>	<div data-bbox="828 1327 844 1411" data-label="Caption"> <p>Evidencia 2C</p> </div> <div data-bbox="966 1249 1047 1495" data-label="Image"> </div>	<div data-bbox="1079 1900 1096 1921" data-label="Text"> <p>2C</p> </div>
<div data-bbox="1047 193 1193 268" data-label="Image"> </div> <div data-bbox="1209 121 1291 331" data-label="Image"> </div>	<div data-bbox="1063 373 1144 703" data-label="Text"> <p>2. Numérica o simbólica: El estudiante generaliza numéricamente a partir de las relaciones que observa a través de los casos particulares, debido a que pasa de la suma a una multiplicación. Además al argumentar si era correcta o no la manera de describir la forma de contar de Andrés y Paula, los estudiantes añaden números a su argumento; sin embargo aún no registran ningún símbolo.</p> </div> <div data-bbox="1063 373 1144 703" data-label="Text"> <p>Verbal: Los estudiantes dicen que si es correcta la descripción de los dos estudiantes respecto a la forma de contar, pero además proponen una descripción del procedimiento desde su perspectiva, en un lenguaje natural.</p> </div>	<div data-bbox="1063 760 1144 982" data-label="Image"> </div>	<div data-bbox="1063 1003 1144 1222" data-label="Text"> <p>1. Gráfica: Los estudiantes construyen una expresión gráfica que sin perder su representación base, agrupa las características necesarias y suficientes para poder expresar cantidades muy grandes sin mayor esfuerzo.</p> </div>	<div data-bbox="1063 1327 1144 1411" data-label="Caption"> <p>Evidencia 2C</p> </div> <div data-bbox="1209 1234 1291 1507" data-label="Image"> </div>	<div data-bbox="1079 1900 1096 1921" data-label="Text"> <p>2C</p> </div>



34	<p>En esta tarea los estudiantes descomponen la imagen en sus partes y establecen relaciones necesarias y suficientes acertadas al comprender la forma de contar</p>		<p>Los estudiantes describen las propiedades comunes de los casos particulares y descomponen la figura para lograr describir como cambia o si se mantiene cada una de las partes, pero además identifican con claridad la cantidad que permanece constante y como esta variando la otra parte. Podemos decir que los estudiantes se encuentran en una generalización verbal, dado que a partir de un lenguaje natural de forma verbal se generaliza las características comunes de los casos particulares, pero además las relacionan.</p>	<p>Los estudiantes realizan la siguiente actividad:</p>  <p><b>Maestra en formación y estudiantes socializan la actividad propuesta:</b></p> <p><b>Audior: AUD251019-8-30</b></p> <p><b>Estudiantes:</b> Profe así está bien?</p> <p><b>MF:</b> Explíqueme por qué lo hicieron así.</p> <p><b>Estudiantes:</b> Profe es que estos dos se repiten solo una vez (señalando los dos hexágonos que están encerrados por el óvalo) y los otros dos se repiten igual que el número de la figura, por eso aquí (señalan el ejercicio de la figura número 100) pusimos igual a 100.</p> <p><b>MF:</b> ¡Muy bien!, entonces ¿cuántos hexágonos cubren las baldosas de la figura 100?</p> <p><b>Estudiantes:</b> 402 profe</p>	<p>1. Grafica: Debido a que los estudiantes descomponen la figura en la etapa de ver, al registrar la representación grafica que generalice las características comunes, de igual forma descomponen la imagen y por medio de los números establece relaciones entre las partes.</p> <p>2. Numérica o simbólica: Los estudiantes dejan a un lado la suma y se concentran en realizar multiplicaciones, entendiendo la multiplicación como la operación que sintetiza la suma. En esta actividad se le presenta a los estudiantes tres descripciones realizada por diferentes grupos, en las cuales se escribe con solo palabras acompañadas de números, palabras y símbolos o solo símbolos la conjetura que se ha observado.</p> <p>3. Verbal: Observa una manera de registrar la forma de contar usando palabras claves como se suma tantas veces o se multiplica.</p>	  
38	<p>En esta tarea los estudiantes descomponen la imagen en sus partes y establecen relaciones; sin embargo al no comprender la forma de contar e identificar como varia se vuelve a presentar la dificultad cinco.</p>		<p>En esta tarea los estudiantes no logran describir correctamente el patrón, en su argumento respecto a las descripciones que realizan tres grupos de estudiantes, manifiestan que son incorrectas, ya que no se le debe restar uno, lo cual concuerda con la representación que realizaron. Se puede decir que describen correctamente su procedimiento; sin embargo, no describen acertadamente la forma de contar debido a que presentaron inconvenientes en la etapa de visualizar.</p>	<p>1. Grafica: Debido a que los estudiantes descomponen la figura en la etapa de ver, al registrar la representación grafica que generalice las características comunes, de igual forma descomponen la imagen y por medio de los números establece relaciones entre las partes. Sin embargo al descomponer la figura no determinan relaciones necesarias y suficientes desde la etapa de ver, lo cual causa que la representación grafica generalice pero no de forma correcta.</p> <p>2. Numérica o simbólica: Realiza operaciones de acuerdo con la representación y observa tres descripciones realizadas por diferentes grupos, en la cual una es incorrecta y las demás aparecen correctamente. En estas descripciones observan como registrar la forma de contar con símbolos y palabras.</p> <p>3. Verbal: Observan registros verbales respecto a la forma de contar, sin embargo como en la etapa de ver no fue claro el patrón, registra afirmaciones incorrectas.</p>	<p>1. Grafica: Debido a que los estudiantes descomponen la figura en la etapa de ver, al registrar la representación grafica que generalice las características comunes, de igual forma descomponen la imagen y por medio de los números establece relaciones entre las partes. Sin embargo al descomponer la figura no determinan relaciones necesarias y suficientes desde la etapa de ver, lo cual causa que la representación grafica generalice pero no de forma correcta.</p> <p>2. Numérica o simbólica: Realiza operaciones de acuerdo con la representación y observa tres descripciones realizadas por diferentes grupos, en la cual una es incorrecta y las demás aparecen correctamente. En estas descripciones observan como registrar la forma de contar con símbolos y palabras.</p> <p>3. Verbal: Observan registros verbales respecto a la forma de contar, sin embargo como en la etapa de ver no fue claro el patrón, registra afirmaciones incorrectas.</p>	  

3C	Debido a que se visualizaron características poco relevantes, los estudiantes de igual forma hacen una descripción poco relevante, respecto a la pregunta.				
4	A partir de las tareas desarrolladas previamente, los estudiantes no observan la figura como un todo, sino que recurren a descomponer la figura para lograr relacionar una parte constante y otra que varía, es decir, se encuentran en el segundo nivel en las fases de construcción de la generalización, aun presentan dificultad para establecer relaciones necesarias y suficientes gráficamente.	 <p>Los estudiantes describen la forma en que se relacionan las partes y además describen la conjetura que han observado previamente, omitiendo algunas características importantes, pero con la dirección de la maestra en formación lograron describir la conjetura.</p>	<p><b>Audio: AUD281019-10.45</b>  <b>MF:</b> ¿Identificaron una forma de contar?  <b>Estudiantes:</b> Sí profe.  <b>MF:</b> Explícame por favor como es tu forma de contar <b>Estudiantes:</b> Estos tres son los que permanecen constantes (señala con un ovalo las tres baldosas ubicadas en la parte izquierda y lo que va a ir cambiando es esta parte (señala las baldosas restantes que cubren la jardinerá)  <b>MF:</b> Y como puedes encontrar la cantidad de baldosas que hay en esta parte (señalando la parte que varía)  <b>Estudiantes:</b> Contando  <b>MF:</b> Pero por ejemplo en la figura 534 ¿Cómo vas a contar los puntos?  <b>Estudiantes:</b> mm no se  <b>MF:</b> Debes buscar una forma de encontrar la cantidad de puntos que hay en esa parte que esto cambiando.  <b>Estudiantes:</b>... Profe pues aquí se multiplica por dos porque hay la misma cantidad de baldosas arriba y abajo que las flores y más estos tres (señalando las tres baldosas que se encuentran en la parte derecha)  <b>MF:</b> ¡Muy bien!, correcto.</p>	<p>1. Gráficas: La representación gráfica no es clara y puede entenderse de forma equivocada, generaliza la expresión por medio de la multiplicación. Sin embargo se entiende que son dos figuras o 10 figuras iguales a las que dibujo, en lo cual existiría un error.</p> <p>2. Numérica o simbólica: Debido a que la representación no es clara y aunque en la etapa de decir describió con claridad la forma de contar y de encontrar la cantidad de baldosas que esta variando, las operaciones que registra cuando el número de jardinerías aumenta no es correcto.</p> <p>3. Verbal: Escriben con palabras y símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes. No precisamente las partes que identifico en la etapa de ver y que represento gráficamente. Además presenta dos registros correctos, identificando dos formas de contar.</p>	