EL ESTUDIO DE ALGUNOS OPERADORES COMO MÉTODO DE SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE PELL-FERMAT.

WILLIAM CAMILO LOPEZ VEGA.

CRISTIAN CAMILO MONTENEGRO ORJUELA.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2015

EL ESTUDIO DE ALGUNOS OPERADORES COMO MÉTODO DE SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE PELL-FERMAT.

WILLIAM CAMILO LOPEZ VEGA.
2010240080

CRISTIAN CAMILO MONTENEGRO ORJUELA.
2010240042

Trabajo de grado como requisito para obtener el título de

Licenciatura en Matemáticas

Asesor
WILLIAM ALFREDO JIMÉNEZ GÓMEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2015

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	**FORMATO**
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información general.	
Tipo de trabajo	Trabajo de grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Título del documento	El estudio de algunos operadores como método de solución de las ecuaciones de Pell-Fermat.
Autores	Lopez Vega, William Camilo; Montenegro Orjuela, Cristian Camilo.
Director	Jiménez Gómez William Alfredo.
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 103 p.
Unidad patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras claves	ECUACIÓN DE PELL-FERMAT, FRACCIONES CONTINUAS, SUCESIÓN RECURRENTE, TRANSFORMADA Z, TÉRMINO ANALÍTICO, APLICACIÓN Y UNIDADES.

2. Descripción
Por medio del estudio de algunos operadores como la transformada Z, se exploró el termino analítico de algunas sucesiones recurrentes, en particular las de grado uno, grado dos, progresiones geométricas y progresiones aritméticas. Se caracterizaron las soluciones positivas de la ecuación de Pell como una sucesión recurrente a la cual se le puede hallar

su término analítico. Para finalizar se describe el diseño y el modo de uso de la aplicación *SUP.UPN*, la cual se encuentra de manera gratuita en la tienda virtual Google Play.

3. Referencias.

Apostol, T. M. (1979**).** *Calculus*, vol. II. Ed Reverté.

Apostol, T. M. (1967). *Calculus*, volume I. John Wiley y Sons.

Glyn, J. Burley, D. Dyke, P. Searl, J. Steele, N. Wright, J. (1996**).** *Matemáticas avanzadas para ingeniería***.** Editorial Pearson educación, USA.

Hendrik, W. (2008). *Solving the Pell equation*. MSRI Publications, vol. 44, p. 1.

Martínez, A. (2006).*Sobre el surgimiento del concepto de Valor Propio: una historia selecta sobre los orígenes de la Teoría Espectral*. Miselanea matemática. México

Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L. (1976). *An introduction to the theory of numbers.* John Wiley y Sons.

Pérez, S.A. (2004). *Fracciones continuas, ecuación de Pell y unidades en el anillo de enteros de los cuerpos cuadráticos (tesis de pregrado).*Universidad Nacional de San Marcos. Lima, Perú.

Rondón, N. (2005). *La transformada Z y algunas aplicaciones*. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

4. Contenido.
El objetivo del presente trabajo de grado era realizar el estudio de las soluciones de Pell-Fermat y poderlas caracterizar con ayuda de algunos operadores, para este fin se realizaron cuatro capítulos que describiremos a continuación. En el capítulo 1 encontramos el marco teórico, allí encontremos una descripción de la ecuación de Pell-Fermat y su solución por medio de las fracciones continúas. También encontramos una introducción a la teoría de los operadores matemáticos y haremos énfasis en el operador Transformada Z, estudiaremos su definición y principales propiedades, por último encontramos algunos resultados de la teoría de autovalores y autovectores de una matriz lo cual se utilizará para hallar el término analítico de sucesiones recurrentes de orden dos. El Capítulo 2 titulado *Término analítico de algunas soluciones*, como su nombre lo describe, estudiamos los métodos que nos permiten hallar dicho término. En este capítulo encontramos el término analítico para cualquier sucesión recurrentes de grado 1, grado dos, progresiones aritméticas y geométricas, además se plantea el término analítico para una solución de grado *n* bajo unas condiciones dadas. El Capítulo 3 En este capítulo titulado *Término analítico de las soluciones de Pell-Fermat y su aplicación a las unidades* , encontraremos tres secciones, la primera habla de las sucesiones descritas por las soluciones de la ecuación de Pell- Fermat, se muestra su regla general de generación y se utiliza los resultados del capítulo 2 para encontrar su término analítico. La segunda parte habla de la génesis del problema central que llevó al desarrollo de este trabajo. *El estudio de las unidades en los números de la forma a+bk (Con* $a, b \in \mathbb{Z}$ y k^2 un número no cuadrado perfecto), donde se muestra cómo los resultados de este trabajo nos permite determinar la unidades y su término analítico. Por último se habla del diseño y uso de la aplicación *SUP.UPN*, para dispositivos android que recopila gran parte del trabajo realizado, esperando sea de gran utilidad para la comunidad académica del departamento.

En el Capítulo 4 titulado *Conclusiones*, se presenta un resumen de los resultados más destacados del trabajo y de cada uno de los conceptos estudiados, es decir, el término analítico de algunas sucesiones recurrentes, el término general de las soluciones de la ecuación de Pell-Fermat, algunas cuestiones que quedan abiertas para futuros Trabajos y los beneficios de la aplicación *SUP.UPN*.

5. Metodología

Se estudiaron primero las ecuaciones de Pell-Fermat, de donde se pudieron caracterizar el comportamiento de sus soluciones positivas, posteriormente se estudiaron algunos operadores y métodos para poder deducir los términos analíticos de estas.

6. Conclusiones

En el estudio teórico realizado, notamos la constante relación que existe entre las ecuaciones de Pell-Fermat y las fracciones continuas, por ejemplo, Lagrange en 1771 encontró que cualquier solución a esta es una convergente del desarrollo fraccionario continuo de un número irracional asociado a la ecuación. Posteriormente, logramos caracterizar las soluciones de estas ecuaciones de la siguiente manera: Son los x_n y y_n para $n = 1,2,\ldots$ donde x_n y y_n son los enteros definidos por la relación

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n$$

Donde x_1 y y_1 es la menor solución positiva de la ecuación, de esta forma, se genera la necesidad de hallar esa solución fundamental; para lo cual aplicamos el desarrollo fraccionario continuo asociado a la ecuación como única opción. Por consiguiente, las soluciones a la ecuación de Pell-Fermat no se pueden despender de su fracción continua asociada, por ende nuestra caracterización de las soluciones de la ecuación dependen de la fracción continua.

En el capítulo 2, en la búsqueda para determinar el término analítico de algunas sucesiones definidas por recurrencia, uno de los resultados más relevantes fue la determinación del término analítico de una sucesión definida por recurrencia de orden *p*, cuya regla de creación está dada por

$$\begin{cases} a_0 = a_0 \\ \ldots \\ a_{p-1} = a_{p-1} \\ a_{n+p} = r_1 a_{n+p-1} + r_2 a_{n+p-2} \ldots + r_{p-1} a_{n+1} + r_p a_n \end{cases}$$

Tal que $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_p$ son las p soluciones de $z^p - r_1 z^{p-1} - \ldots - r_{p-1} z - r_p = 0$. Está dado por

$$a_n = A_1(\alpha_1)^n + A_2(\alpha_2)^n + \ldots + A_p(\alpha_p)^n$$

Donde

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^{p} a_{i-1}((a_n)^{p-i} - \sum_{k=1}^{p-i} r_k (\alpha_n)^{p-i-k})}{(\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_2)(\alpha_n - \alpha_3)\ldots(\alpha_n - \alpha_p)}1.$$

Se considera que el resultado tiene bastante relevancia dado que permite hallar el término analítico de cualquier sucesión definida por recurrencia de orden arbitrario *p* bajo sus condiciones establecidas. Uno de los objetivos del trabajo de grado era hallar una expresión general para el caso *p=2,* como se puede evidenciar (comprobación para el lector), esta expresión permite hallar el término analítico de cualquier sucesión.

En el capítulo 3, en el estudio de las soluciones de Pell-Fermat se llegó a que las soluciones positivas tanto para *x* como para *y* de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = \pm 1$ están descritas por una sucesión recurrente de grado dos y por los resultados del capítulo 2 pudimos generalizar su término analítico sin desprenderlo de la fracción continua, con todo esto los términos analíticos de la ecuación de Pell-Fermat están dados por

$$x(n) = \frac{1}{2}\left(\left(p_r + \sqrt{p_r{}^2 - (-1)^r}\right)^n + \left(p_r - \sqrt{p_r^2 - (-1)^r}\right)^n\right)$$

$$y(n) = \frac{q_r}{2\sqrt{p_r^2 - (-1)^r}}\left(\left(p_r + \sqrt{p_r{}^2 - (-1)^r}\right)^n - \left(p_r - \sqrt{p_r^2 - (-1)^r}\right)^n\right)$$

Donde $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_r}]$ y $C_r = \frac{p_r}{q_r}$.

Se considera que el resultado obtenido es importante porque con esta generalización es posible construir las sucesiones para los términos analíticos de las soluciones positivas de las ecuaciones de Pell-Fermat, tanto para *x* como para *y*.

Elaborado por:	Lopez Vega, William Camilo; Montenegro Orjuela, Cristian Camilo.
Revisado por:	Jiménez Gómez William Alfredo.

Fecha de elaboración del resumen:	04	11	2015

Índice general

Índice de cuadros

Introducción

La construcción de conceptos en matemáticas es un trabajo que trae consigo una gran cantidad de dificultades y problemas. En los intentos por resolver estos problemas se han encontrado métodos bastante útiles, que a su vez se han podido aplicar en conceptos posteriores. El presente documento es un intento de seguir estos pasos, empleando herramientas particulares de diferentes ramas matemáticas como la teoría de números y la teoría algebraica de números, para el estudio de estructuras de la forma:

$$\beta = \left\{(a+bk)|a,b \quad y \quad m \in \mathbb{Z} \wedge k^2 = m\right\}$$

Sobre las cuales se define las siguientes operaciones:

$$(a+bk) \oplus (c+dk) = (a+c) + (b+d)k$$

$$(a+bk) \otimes (c+dk) = (ac+mad) + (ad+bc)k$$

En esta estructura se tiene que las unidades cumplen la siguiente propiedad[1]

$$x = \frac{a}{a^2 - mb^2} \qquad y = -\frac{b}{a^2 - mb^2}$$

Lo cual se reduce a que las unidades vienen dadas por las soluciones de la siguiente ecuación

$$a^2 - mb^2 = \pm 1$$

Estas ecuaciones se han denominado de Pell-Fermat, las cuales han sido de gran interés para algunos de los grandes matemáticos de toda la historia, entre los más destacados se encuentran Brahmagupta (598-665), Bhaskara (1114-1185), Lagrange (1736-1813), Fermat (1601-1665) y Euler (1707-1783). Gracias a la contribución de los mismos, se desarrollaron varios e ingeniosos métodos para encontrar sus soluciones, entre estos se destacan la aplicación de modulares, las fracciones continuas, la aplicación de cuadrados y la aplicación de cuerpos cuadráticos(Alanya, 2004).

El método de las fracciones continuas permite caracterizar cualquiera de las soluciones de la ecuación de Pell-Fermat. En el presente trabajo se evidenciará

[1] Esté echo se demostrara en el capitulo tres.

que el conjunto de soluciones de la ecuación muestra un comportamiento en forma de una sucesión recurrente, la cual depende de la primera solución dada por el método de fracciones continuas, que se mostrará posteriormente, en el capitulo tres. Al encontrar la ecuación recurrente que define la sucesión, buscamos métodos para determinar su término analítico, resultando tres métodos para este fin. Entre ellos destacamos los operadores transformada Z y exponencial interno, con los cuales logramos caracterizar los términos analíticos de las soluciones de las ecuaciones de Pell-Fermat.

Para este propósito, se hizo necesario realizar una consulta cuyos resultados (en relación a métodos para determinar el término analítico de sucesiones recurrentes y las fracciones continuas) se consignan en el marco teórico. A continuación describiremos brevemente lo que se encontrará en el presente documento:

1. **Capítulo 1:** En este capítulo se encontrará el marco teórico, allí habrá una descripción de la ecuación de Pell-Fermat y su solución por medio de las fracciones continuas. También se encontrará una introducción a la teoría de los operadores matemáticos, en la cuál se hace énfasis en el operador Transformada Z, se estudiará su definición y principales propiedades. Por último se encontrará el marco teórico relacionado con autovalores y autovectores de una matriz.

2. **Capítulo 2:** Este capitulo titulado *Término analítico de algunas sucesiones recurrentes*, como su nombre lo describe, se estudian los métodos que nos permiten hallar dicho término. En este capitulo se encontrará el término analítico para cualquier sucesión recurrente de grado 1 y grado dos, además se plantea el término analítico para una solución de grado n bajo ciertas condiciones establecidas.

3. **Capítulo 3:** Este capitulo titulado *Término analítico de las soluciones de la ecuación de Pell-Fermat y algunas aplicaciones*, se encuentra dividido en tres secciones, la primera habla de las sucesiones generadas por las soluciones de la ecuación de Pell- Fermat, se muestra su regla general de creación y se utilizan los resultados del capitulo dos para encontrar su término analítico. La segunda parte trata de la génesis del problema central que llevó al desarrollo de este trabajo, *El estudio de las unidades en los números de la forma* $a + bk$.[2] donde se muestra cómo se abordó este problema en el seminario y se muestra cómo los resultados de este trabajo permite determinar la unidades y su término enésimo. Por último el diseño de la aplicación para dispositivos android que recopila gran parte de este trabajo, esperando sea de gran utilidad para la comunidad académica del departamento.

[2] Con $a, b, k^2 \in \mathbb{Z}$ e k^2 un número no cuadrado perfecto.

4. **Capítulo 4:** En este capítulo titulado *Conclusiones*, se presenta un resumen de los resultados más destacados del trabajo realizado y de cada uno de los conceptos estudiados, es decir, el término analítico de algunas sucesiones recurrentes, el término general de las soluciones de la ecuación de Pell-Fermat, algunas cuestiones que quedan abiertas para futuros trabajos y los beneficios de la aplicación *SUP.UPN.*

Justificación

El presente trabajo de grado se enmarca en uno de los problemas surgido en el seminario de álgebra de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Se pretende estudiar este problema, con el objetivo de contribuir al desarrollo del grupo de álgebra de la universidad, específicamente en la rama de la teoría de números, aportando insumos para futuros trabajos de grado y para el grupo de investigación del departamento. Sumado a esto, se plantea la posibilidad de implementarse en algunas de las asignaturas del ciclo de fundamentación matemática tales como Sistemas Numéricos, Teoría de Números y Sucesiones y Series.

La teoría algebraica de números es una rama importante de la teoría de números que estudia las estructuras algebraicas relacionadas con enteros algebraicos. Esto se logra generalmente mediante la consideración de un anillo de enteros algebraicos y el estudio de sus propiedades algebraicas, la factorización, el comportamiento de los ideales y extensiones de campo.

En el semestre 2014-2 en el seminario se estudió el conjunto numérico definido de la siguiente manera:

Sea

$$\gamma = \{(a + bk)|a, b \in \mathbb{Z} \wedge k^2 = 2\}$$

definido con las operaciones:

$$(a + bk) + (c + dk) = (a + c) + (c + d)k$$

$$(a + bk) * (c + dk) = (ac + 2ad) + (ad + bc)k$$

Este conjunto con estas operaciones tiene estructura de anillo conmutativo con modulo multiplicativo que resulta ser $(1 + 0k)$.

Un asunto que interesó a los estudiantes del seminario fue el estudio de las unidades, es decir elementos $a + bk$ que cumplan:

$$(a + bk)|(1 + 0k)$$

Ahora si $(a + bk)|(1 + 0k)$ existe $(x + yk)$ tal que

$$(a + bk) * (x + yk) = (1 + 0k)$$

Que al igualar componente a componente se encontraron que:

$$x = \frac{a}{a^2 - 2b^2} \wedge y = \frac{-b}{a^2 - 2b^2}$$

Teniendo en cuenta que tanto x como y deben ser enteros se deduce que

$$\left(\frac{a}{a^2-2b^2}\right)^2 \wedge \left(\frac{-b}{a^2-2b^2}\right)^2 \in \mathbb{Z}$$

Entonces

$$\left(\frac{a}{a^2-2b^2}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{a^2-2b^2}\right)^2 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto

$$a^2 - 2b^2 = \pm 1$$

Que corresponde a una ecuación de Pell-Fermat, de la cual presentamos algunas soluciones:

- Cuando $a = 1$ y $b = 1$.
- Cuando $a = 3$ y $b = 2$.
- Cuando $a = 7$ y $b = 5$.

Agrupando estas soluciones en parejas ordenadas $(1, 1), (3, 2), (7, 5)...$ se concluyó que corresponden a reductas de la fracción continua de $\sqrt{2}$ de la cual se determinó que las primeras y segundas componentes forman de manera independiente sucesiones recurrentes, por ejemplo las segundas componentes de las soluciones halladas Son $1, 2, 5, 12...a_n...$ que atienden a la ecuación

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$$

Definida por recurrencia.

Por lo tanto, se planteó la necesidad de determinar un método que permitiera hallar el término analítico de la sucesión, el cuál es uno de los objetivos principales del presente trabajo.

La elaboración de esta tipo de temáticas permite desarrollar y reforzar las diversas competencias y aprendizajes adquiridos durante nuestro proceso de formación en la universidad, desde varios puntos de vista; inicialmente la posibilidad de abordar un problema matemático, de carácter algebraico, paso seguido consultar y estudiar posibles métodos para solucionarlo, así como el contenido teórico relacionado con los métodos encontrados; para posteriormente abordar el desarrollo del problema, conjeturar, identificar patrones, abstraer, generalizar y todos las demás actividades propias del quehacer matemático.

Objetivos.

Objetivo general.

Realizar el estudio de algunos operadores y métodos para la solución de ecuaciones de Pell-Fermat.

Objetivos específicos.

- Consulta del material bibliográfico, como base para la construcción de un marco teórico que soporte las acciones realizadas durante el transcurso del trabajo.

- Diseñar y construir una herramienta tecnológica para realizar la exploración de sucesiones definidas por recurrencia de orden 1 y 2, solucionar ecuaciones de Pell-Fermat, hallar fracciones continuas, generalizar sucesiones y calcular el conjunto de unidades de algunas estructuras algebraicas[3] que sirvan de guía para el estudio de estos conceptos mencionados.

- Generalización del término analítico de algunas sucesiones definidas por recurrencia.

- Aportar un documento escrito y una aplicación móvil de carácter matemáticos como insumos para estudiar los tópicos allí consignados en el grupo de álgebra de la universidad y como posible implementación en asignaturas afines al álgebra.

[3]Unidades de la forma $a + bk$

Capítulo 1

Marco Teórico

A continuación, se encontrarán los referentes teóricos que usaremos a lo largo de este trabajo de grado, el cuál contiene cuatro secciones: la primera hace referencia a las ecuaciones de Pell o Pell-Fermat , la segunda habla de los operadores, la tercera de la Transformada Z y por ultimo, la cuarta sección desarrolla los conceptos de autovalores y autovectores de una matriz. Estas dos ultimas secciones corresponden a dos herramientas que emplearemos en el capitulo dos para hallar el termino analítico de sucesiones recurrentes.
Al apartado correspondiente a la ecuación de Pell-Fermat se presentará con un mayor detalle, esto porque con los resultados de esta consulta se pudo caracterizar las soluciones de estas ecuaciones y darnos que estas siempre dependerán de su fracción continua asociada.

1.1. Ecuaciones de Pell-Fermat.

Los teoremas y definiciones mencionadas en esta apartado son tomadas o modificadas de (Niven et al., 1976)

1.1.1. Historia

El matemático John Pell (1611-1685) es una importante figura intelectual de la historia del siglo XVII en Inglaterra, por su actividad matemática y sus contribuciones en diferentes ramas de esta ciencia. Particularmente, se le atribuye el estudio de las ecuaciones de la forma $x^2 = ny^2 + 1$, denominadas, en su honor, ecuaciones de Pell, un caso particular de las ecuaciones Diofánticas. Leonard Euler (1707-1783), dio nombre a estas ecuaciones, atribuyéndole erróneamente su descubrimiento a Pell, cuyo único aporte fue publicar algunos resultados parciales de los estudios realizados por Wallis (1643-1689) y Brouncker (1620-1684) (Hendrik, 2008). Posteriormente, matemáticos como Fermat (1601-1665) y Lagrange (1736-1813) se ocuparon de encontrar la forma de solucionar estas ecuaciones completamente.

Históricamente, los primeros registros de las ecuaciones de Pell, fueron realizados por Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.), quien dejó enunciada la ecuación $x^2 = 4729494y^2 + 1$, en su libro de los lemas, en el denominado *problema del ganado* (Hendrik, 2008).

Posteriormente, Brahmagupta (598 d.C.-670 d.C.), desarrolla un mecanismo para solucionar las ecuaciones, denominado *samasa*, conocido actualmente como método de descomposición, realizado por Brouncker; que entre otras cosas, resultaron ser métodos equivalentes (Hendrik, 2008).

Años más tarde, como se mencionó al inicio, el problema de las ecuaciones, sería abordado por matemáticos como Brouncker, Fermat y Lagrange, entre los más destacados, quienes aportaron insumos para hallar una solución general y realizar nuevas conjeturas y sus correspondientes pruebas, específicamente Lagrange fue quien más aportes realizó.

Finalmente, en el año 1799, Friedrich Gauss (1777-1855) publica en su obra Disquisitiones Arithmeticae, una nueva representación general de las ecuaciones $x^2 - Dy^2 = \pm 1$, que permite hallar una forma general de solucionar las ecuaciones por medio del teorema fundamental del álgebra, empleando la factorización única de complejos y sus conjugados.

1.1.2. Definición y caracterización.

Una ecuación de Pell-Fermat es una ecuación de la forma $x^2 - dy^2 = \pm 1$, con d un entero no cuadrado perfecto y las incógnitas $x, y \in \mathbb{Z}$. Si d es negativo, tenemos que $d = -|d|$, por lo tanto la ecuación se reescribe de la siguiente manera $x^2 + |d|y^2 = 1$ que claramente tiene como únicas soluciones $x = \pm 1$ y $y = 0$.
Si d es un cuadrado perfecto ($d = a^2$), la ecuación se reduce a $(x-ay)(x+ay) = \pm 1$ y nuevamente existe sólo un número finito de soluciones. El caso de mayor interés se obtiene cuando d es un entero positivo que no es cuadrado perfecto (Niven et al., 1976).

Existen diferentes métodos para hallar sus soluciones propuestos desde épocas antiguas, hasta unas más modernas, como la solución por modulares, las fracciones continuas, completando cuadrados y aplicando cuerpos cuadráticos, entre otros. A continuación se presentará únicamente la consulta realizada del método de fracciones continuas. Cabe resaltar que este método habla de solo las soluciones positivas de la ecuación, puesto que las demás soluciones son solo una combinación de signos de las soluciones positivas.

1.1.3. Solución por fracciones continuas.

Definición: Una *fracción continua (f.c)* es una expresión de la forma

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{\ddots}{a_n \cfrac{b_n}{a_{n+1}}}}}};$$

Donde los a_i y b_i son números complejos. Sin embargo si cada b_i es igual a 1, a_0 es un entero y cada a_i es un entero mayor que cero para $i \geq 1$; entonces la fracción continua se llama *fracción continua simple (f.c.s)* y se pueden escribir como $[a_0, a_1, ...a_n]$. Los a_i de la fracción continua simple se llaman términos de la fracción continua. Si el número de términos de una fracción continua es finita, entonces se dice que la fracción continua es una fracción continua simple finita. si el número de términos es infinito la fracción continua es una fracción continua simple infinita .

Teorema 1: Todo número racional puede ser expresado como una fracción continua simple finita y viceversa.

Demostración:

- Sea $\frac{p}{q}$ un numero racional, supongamos que $q > 0$, entonces por la propiedad de la división existen a_0 y $r_0 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}} \quad donde \quad a_0 \leq \frac{p}{q} \quad y \quad 0 \leq r_0 \leq q$$

De nuevo aplicando la propiedad de la división existen a_1 y $r_1 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}} \quad donde \quad a_1 \leq \frac{r_1}{r_0} \quad y \quad 0 \leq r_1 \leq r_0$$

De nuevo aplicando la propiedad de la división existen a_2 y $r_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} \quad donde \quad a_2 \leq \frac{r_2}{r_1} \quad y \quad 0 \leq r_2 \leq r_1$$

$$...$$

$$\frac{r_{n-4}}{r_{n-3}} = a_{n-2} + \frac{r_{n-2}}{q_{n-3}} = a_{n-2} + \frac{1}{\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}}} \quad donde \quad a_{n-2} \leq \frac{r_{n-4}}{r_{n-3}} \quad y \quad 0 \leq r_{n-3} \leq r_{n-2}$$

Dado que $0 < r_{n-1} < r_{n-2} < ...r_0$ es una sucesión decreciente de enteros positivos. Por el principio del buen orden este proceso debe terminar, por tanto sólo existe un número finito de enteros positivos que satisfacen las ecuaciones.

- Para esta parte se razonara por inducción sobre el número de términos, es claro que esto se cumple cuando la fracción tiene un termino. Ahora supongamos se cumple cuando la cantidad de términos es k por lo tanto

$$[a_0, ..., a_k] \in \mathbb{Q}$$

Para cuando el periodo es $k + 1$ tenemos que

$$[a_0, ..., a_k, a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{[a_0, ..., a_k]}$$

Por definición de fracción continua $a_0 \in \mathbb{Q}$ y por hipótesis de inducción $\frac{1}{[a_0,...,a_k]} \in \mathbb{Q}$, entonces

$$[a_0, ..., a_k, a_{k+1}]\mathbb{Q}$$

$\boxtimes$

Teorema 2: Todo número irracional puede ser expresado como una fracción continua simple infinita.
Demostración: Sea x_0 un numero irracional , x_0 puede ser expresado como:

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}$$

Donde $\quad a_0 = \|x_0\|^1$ y.

$$0 < \frac{1}{x_1} < 1; \quad x_0 = \|x_0\| + (x_0 - \|x_0\|) \quad y \quad \frac{1}{x_1} = x_0 - \|x_0\|$$

Si $x_1 \in \mathbb{Q}$ entonces por teorema 1 entonces x_0 puede ser expresado como una fracción continua simple finita, por lo tanto es un número racional y contradice el teorema 1, luego x_1 no pertenece a $\mathbb{Q}$. Ademas $x_1 > 1$, lo cuál podemos escribir como

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2} \quad donde \quad x_2 > 1 \quad es \quad irracional$$

$$...$$

$$x_i = a_1 + \frac{1}{x_{i+1}} \quad donde \quad x_{i+1} > 1 \quad es \quad irracional$$

en consecuencia, este proceso se repite infinitamente y $x_0 = [a_0, a_1, a_2...]$

$\boxtimes$

Definición: Los *convergentes* de la fracción continua simple $[a_0, a1, a2...]$ son las fracciones continuas simples finitas:

$$C_1 = [a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1}$$

[1]Donde $\|x_0\|$ representa la función parte entera.

$$C_2 = [a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0a_1 + 1}{a_1}$$

$$C_3 = [a_0, a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_0a_1a_2 + a_0 + a_1}{a_1a_2 + 1}$$

$$\vdots$$

Teorema 3: Sea $C_n = \frac{p_n}{q_n}$ la n-ésima convergente de la fracción continua simple $[a_0, a_1, ...]$, entonces

$$p_0 = 1 \quad y \quad q_0 = 0$$

$$p_1 = a_0 \quad y \quad q_1 = 1$$

$$p_k = a_{k-1}p_{k-1} + p_{k-2} \quad y \quad q_k = a_{k-1}q_{k-1} + q_{k-2}; \quad k \geq 2$$

Demostración: Razonando por inducción, miremos que cuando $k = 2$ se cumple:

$$p_2 = a_1p_1 + p_0 = a_1a_0 + 1$$

$$q_2 = a_1q_1 + q_0 = a_1$$

Suponemos que se cumple para $k > 2$, entonces

$$C_k = [a_0, a_1, ..., a_k] = \frac{p_k}{q_k}$$

Donde

$$p_k = a_{k-1}p_{k-1} + p_{k-2}$$

$$q_k = a_{k-1}q_{k-1} + q_{k-2}$$

Ahora miramos para $k + 1$:

$$C_{k+1} = [a_0, a_1, ..., a_{k+1}]$$

Por definición de fracción continua simple, está la podemos reescribir como:

$$C_{k+1} = [a_0, a_1, ..., a_k + \frac{1}{a_{k+1}}]$$

Por lo tanto:

$$C_{k+1} = \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}}$$

entonces:

$$\frac{a_kp_k + p_{k-1}}{a_kq_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = C_{k+1}$$

Por lo tanto

$$p_k = a_{k-1}p_{k-1} + p_{k-2}; \quad k \geq 2$$

$$q_k = a_{k-1}q_{k-1} + q_{k-2}; \quad k \geq 2$$

$\boxtimes$

Teorema 4: Sea $C_n = \frac{p_n}{q_n}$ el n-enésimo convergente de una fracción continua simple, entonces:

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n.$$

Demostración: Razonando por inducción tenemos que si $n = 1$

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = a_0 * 0 - 1 * 1 = -1 = (-1)^1$$

Suponemos que se cumple para $n = k$, entonces

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^k$$

Probaremos que se cumple para $n = k + 1$, tenemos

$$p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} = (a_k p_k + p_{k-1}) q_k - p_k (a_k q_k + q_{k-1})$$

$$-(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k) = -(-1)^k$$
$$= (-1)^{k+1}$$

Por lo tanto

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n.$$

$\boxtimes$

Corolario 1: Sea $C_n = \frac{p_n}{q_n}$ el n-enésimo convergente de una fracción continua simple, entonces:

$$C_{n+1} - C_n = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}}$$

Demostración: Por el teorema 4 tenemos:

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación por $q_n q_{n+1}$

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}}$$

$$C_{n+1} - C_n = \frac{(-1+1)^n}{q_n q_{n+1}}$$

$\boxtimes$

Teorema 5: sea $C_n = \frac{p_n}{q_n}$ la enésima convergente de la fracción continua simple $[a_0, a1, ...]$, entonces

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$$

Demostración: Utilizando el teorema 3 y 4 entonces

$$\begin{aligned} p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) \\ &= (-1)^n a_n \end{aligned}$$

$\boxtimes$

Teorema 6: Cada convergente de una fracción continua simple es un número racional expresado de forma irreducible, esto quiere decir que si $C_n = \frac{p_n}{q_n}$, entonces $(p_n, q_n) = 1$, o sea son primos relativos.
Demostración: Usando el Teorema 4 podemos expresar 1 como combinación lineal homogénea de p_n y q_n, por lo tanto $(p_n, q_n) = 1$

$\boxtimes$

Teorema 7: Las convergentes impares de una fracción continua simple donde todos sus términos son positivos forman una sucesión decreciente y las convergentes pares forman una sucesión creciente, también toda convergente impar es mayor que toda par.

Demostración:

- Primero miraremos las convergentes impares, por lo cual necesitamos demostrar que $C_{2k+1} < C_{2k-1}$. Se tiene por el teorema 6 que

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$$

entonces,

$$C_n - C_{n-2} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}$$

si n es impar entonces

$$n = 2k + 1 \quad k = 0, 1, 2, 3...$$

y

$$\begin{aligned} C_n - C_{n-2} &< 0 \\ C_n &< C_{n-2} \\ C_{2k+1} &< C_{2k-1} \end{aligned}$$

- Ahora para las convergentes pares se razona de la misma manera

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$$

si n es impar entonces

$$n = 2k \quad k = 1, 2, 3...$$

y

$$C_n - C_{n-2} > 0$$
$$C_n > C_{n-2}$$
$$C_{2k} > C_{2k-2}$$
$$C_{2k} > C_{2(k-1)}$$

- Para la ultima parte consideremos r y s enteros positivos cualesquiera, entonces puede suceder que
  Si $r > s$, entonces como e las convergentes impares forman una sucesión decreciente
  $$C_{2r-1} < C_{2s-1}$$
  Así si en corolario 1 n es par se deduce que:
  $$C_{2r} < c_{2r-1}$$
  Entonces
  $$C_{2r} < C_{2s-1}$$
  Si $s = r$, entonces
  $$C_{2r} < C_{2s-1}$$
  Por el corolario 1 tenemos:
  $$C_{2k-1} > C_{2k}$$
  Si $r < s$, entonces
  $$C_{2r} < C_{2s}$$
  Así si en corolario 1 n es impar se deduce que:
  $$C_{2s-1} > c_{2s}$$
  Entonces
  $$C_{2r} < C_{2s-1}$$
  Por lo tanto toda convergente par es menor que toda convergente impar.

$$\boxtimes$$

Lema 1: Los convergentes $\frac{p_n}{q_n}$ son sucesivamente mas próximos a x, esto es

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| < |x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}|$$

Una prueba de este lema se puede encontrar en (Niven et al., 1976)

Teorema 8: Si $C_n = \frac{p_n}{q_n}$, donde C_n es el enésimo convergente de la fracción continua simple cuyo valor es x, entonces:

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$$

Demostración: Por el corolario 1 , se tiene:

$$C_{n+1} - C_n = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n+1}}$$

$$|C_{n+1} - C_n| = \frac{1}{q_{n+1} q_n}$$

Se tiene que x esta entre C_n y C_{n+1}, también por el lema anterior x esta mas cerca de C_{n+1} , por lo tanto

$$|x - c_n| < \frac{1}{q_{n+1} q_n}$$

Por el teorema 3 se tiene que:

$$q_{n+1} \geq q_n \Rightarrow q_n q_{n+1} \geq q_n q_n = {q_n}^2$$

entonces

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}$$

Por lo tanto

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$$

$\boxtimes$

Teorema 9: Si $\frac{a}{b}$ es un número racional con denominador positivo tal que $|\alpha - \frac{a}{b}| < |\alpha - \frac{p_n}{q_n}|$ para algún $n \geq 1$, entonces $b > q_n$. De hecho, si $|b\alpha - a| < |q_n\alpha - p_n|$ para algún $n \geq 0$, entonces $b \geq q_{n+1}$.

Demostración: Primero se demostrará que la segunda parte del teorema implica la primera. Supóngase que la primera parte del teorema es falsa de modo que hay un $\frac{a}{b}$ tal que

$$|\alpha - \frac{a}{b}| < |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \quad y \quad b \leq q_n$$

El producto de estas desigualdades es $|b\alpha - a| < |q_n\alpha - p_n|$. Pero la segunda parte del teorema dice que esto implica $b \geq q_{n+1}$, de modo que se tiene una contradicción, dado que $q_n < q_{n+1}$ para $n \geq 1$.

Para probar la segunda del teorema también se procede por un argumento indirecto, suponiendo que $|b\alpha - a| < |q_n\alpha - p_n|$ y $b < q_{n+1}$. Considérese las ecuaciones lineales en x y y

$$xq_n - yq_{n+1} = b$$

$$xp_n - yp_{n+1} = a$$

Por el teorema 4, el determinante de los coeficientes es y, en consecuencia, estas ecuaciones tiene soluciones enteras x, y. Es más, ni x ni y son ceros, porque si $x = 0$ entonces $b = yq_{n+1}$, lo cual implica que $y \neq 0$ de hecho que $y > 0$ y $b \geq q_{n+1}$, en contradicción a $b < q_{n-1}$. Si $y = 0$ entonces $a = p_n x$, $b = q_n x$ y

$$|\alpha b - a| = |\alpha x q_n - x p_n| = |x||\alpha q_n - p_n| \geq |\alpha q_n - p_n|$$

Dado que $|x| \geq 1$, y una vez más se tiene una contradicción.
A continuación demostraremos que x y y tienen signos opuestos, primero si $y < 0$, entonces $xq_n = b - yq_{n+1}$ muestra que $x > 0$. Segundo, si $y > 0$, entonces $b < q_{n+1}$ implica que $b < yq_{n+1}$ y por lo tanto xq_n es negativo, de donde $x < 0$. Ahora por el teorema 7 se deduce que $\alpha q_n - p_n$ y $\alpha q_{n+1} - p_{n+1}$ tienen signos opuestos y de aquí que $x(\alpha q_n - p_n)$ y $y(\alpha q_{n+1} - p_{n+1})$ tiene el mismo signo.A partir de las ecuaciones que define a x yy se obtiene $\alpha b - a = x(\alpha q_n - p_n) + y(\alpha q_{n+1} - p_{n+1})$. Dado que los términos de la derecha tienen el mismo signo, el valor absoluto de todo es igual a la suma de los valores absolutos separados, así

$$|\alpha b - a| = |x(\alpha q_n - p_n) + y(\alpha q_{n+1} - p_{n+1})|$$

$$= |x(\alpha q_n - p_n)| + |y(\alpha q_{n+1} - p_{n+1})|$$

$$> |x(\alpha q_n - p_n)| = |x||\alpha q_n - p_n|$$

Lo que es una contradicción.

$\boxtimes$

Teorema 10: Sea α cualquier irracional . Si existe un número racional $\frac{a}{b}$ con $b \geq 1$ tal que

$$|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{2b^2}$$

Entonces $\frac{a}{b}$ es uno de los convergentes de desarrollo fraccionario continuo de α.

Demostración: Sea $\frac{p_i}{q_i}$ las convergentes del desarrollo fraccionario continuo de α y supóngase que $\frac{a}{b}$ no es una convergente. Las desigualdades $q_n \leq b \leq q_{n+1}$ determinan un entero n. Debido al teorema 9 la desigualdad $|\alpha b - a| < |\alpha q_n - p_n|$ es imposible para este n.Por lo tanto se tiene

$$|\alpha q_n - p_n| \leq |\alpha b - a| < \frac{1}{2b}$$

$$|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{2bq_n}$$

Dado que $\frac{a}{b} \neq \frac{p_n}{q_n}$ y $bp_n - aq_n$ es un entero no nulo , se encuentra que

$$\frac{1}{bq_n} = \frac{|bp_n - aq_n|}{bq_n} = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{a}{b}\right| \leq \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2bq_n} + \frac{1}{2b^2}$$

Esto implica $b < q_n$ lo cual es una contradicción.

$\boxtimes$

Teorema 11: Sea d un entero positivo que no sea cuadrado perfecto y sea $\frac{p_n}{q_n}$ las convergentes para el desarrollo fraccionario continuo de $\sqrt{d}$. Entonces cualquier solución positiva de $x^2 - dy^2 = \pm 1$ con[2] $(x, y) = 1$ es $x = p_n$ y $y = q_n$ para algún entero positivo n.

Demostración:

Sean x y y números positivos tales que $(x, y) = 1$ y $x^2 - py^2 = 1$, donde $\sqrt{p}$ es irracional y $0 < 1 < \sqrt{p}$. De la ecuación $x^2 - py^2 = 1$ se tiene que:

$$(x - \sqrt{p}y)(x + \sqrt{p}y) = 1$$

Dividiendo por y entonces tenemos:

$$\frac{(x - \sqrt{p}y)}{y} = \frac{1}{y(x + \sqrt{p}y)}$$

$$\frac{x}{y} - \sqrt{p} = \frac{1}{y(x - \sqrt{p}y)}$$

Por lo tanto se tiene:

$$0 < \frac{x}{y} - \sqrt{p} = \frac{1}{y(x - \sqrt{p}y)} < \frac{\sqrt{p}}{y(x - \sqrt{p}y)}$$

Entonces

$$0 < \frac{x}{y} - \sqrt{p} < \frac{\sqrt{p}}{y(x - \sqrt{p}y)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}}}{y\left(\frac{x+\sqrt{p}y}{\sqrt{p}}\right)} < \frac{1}{\frac{xy}{\sqrt{p}} + y^2}$$

$$\frac{1}{\frac{yx}{\sqrt{p}} + y^2} = \frac{1}{y^2\left(1 + \frac{x}{y\sqrt{p}}\right)}$$

Como $\frac{x}{y} - \sqrt{p} > 0$ implica que $\frac{x}{y\sqrt{p}} > 1$, por lo tanto

$$|\frac{x}{y} - \sqrt{p}| < \frac{1}{2y^2}$$

[2]Donde (x, y) representa el mínimo común múltiplo de x y y.

Por el teorema 10. $\frac{x}{y}$ es una convergente del desarrollo de la fracción $\sqrt{p}$.

$\boxtimes$

Teorema 12: Todas las soluciones positivas de $x^2 - dy^2 = \pm 1$ se encuentran entre $x = p_n$ y $y = q_n$, donde $\frac{p_n}{q_n}$ son las convergentes del desarrollo de $\sqrt{d}$. Si r es el periodo del desarrollo fraccionario continuo de $\sqrt{d}$, entonces:

- Si r es par entonces $x^2 - dy^2 = -1$ no tiene soluciones y todas las soluciones positivas de $x^2 + dy^2 = 1$ están dadas por $x = p_{n(r-1)}$ y $y = q_{n(r-1)}$ para $n = 1, 2, 3, ...$
- Si r es impar entonces $x^2 - dy^2 = -1$ todas las soluciones positivas están dadas por $x = p_{n(r-1)}$ y $y = q_{n(r-1)}$ para $n = 1, 3, 5, ...$ y todas las soluciones positivas de $x^2 + dy^2 = 1$ están dadas por $x = p_{n(r-1)}$ y $y = q_{n(r-1)}$ para $n = 2, 4, 6, ...$

La demostración de este teorema necesita de varios desarrollos teóricos previos no estipulados en este apartado, una demostración del teorema puede ser consultada en (Niven et al., 1976).

Teorema 13: Si d es un entero positivo que no es un cuadrado perfecto, entonces la fracción continua que representa $\sqrt{d}$ es una fracción continua periódica cuyo periodo comienza después del primer término, específicamente:

$$\sqrt{d} = [a_1, \overline{a_2, ..., a_n, 2a_1}]$$

La demostración de este teorema necesita de varios desarrollos teóricos previos no estipulados en este apartado, una demostración del teorema puede ser consultada en (Alanya, 2004).

1.2. Operadores.

Durante el trascurso del trabajo de grado el concepto de operador jugará un papel importante, dado que emplearemos algunos de ellos como herramienta para hallar el término general de algunas sucesiones por recurrencia, que definiremos en el siguiente capítulo. Por ende es necesario hacer una consulta donde se respondan ¿ Qué es un operador? y ¿ Cómo se clasifican?

La definiciones mencionadas en este apartado son tomadas o modificadas de (Apostol, 1969)

Definición: Un operador es una función cuyo dominio y rango son subconjuntos de un espacio vectorial o lineal.

Ejemplo 1: Sea V y W dos espacios lineales cualesquiera. Entonces el operador que aplica a cualquier vector de V en el elemento neutro de W, se denomina *operador nulo.*

Ejemplo 2: Sea V el espacio lineal de todas las funciones reales derivables y que cumplen la propiedad de contorno en un intervalo (a, b). La función que aplica a cada función $f \in V$ en su derivada f' se llama *operador derivada* y se designa por $D : V \to V$, donde $D(f) = f'$ para cada $f \in V$.

ejemplo3: Sea V el espacio lineal de todas las funciones reales derivables en un intervalo (a, b). La función T_n que aplica a cada función $f \in V$ en:

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k\,(c)}{k!}(x-c)^k, \quad si \quad c \in (a,b);$$

Se conoce como el *operador de Taylor* de orden n (Apostol, 1979) .

1.2.1. Clasificación de los operadores.

La clasificación más natural de los operadores se establece si este cumple o no las condiciones de linealidad. Como se ilustra en el siguiente mapa conceptual, tras una breve definición de operador lineal, clasificamos los operadores en lineales y no lineales; de los cuales ejemplificamos los lineales, por encontrarse más estudiados que los no lineales:

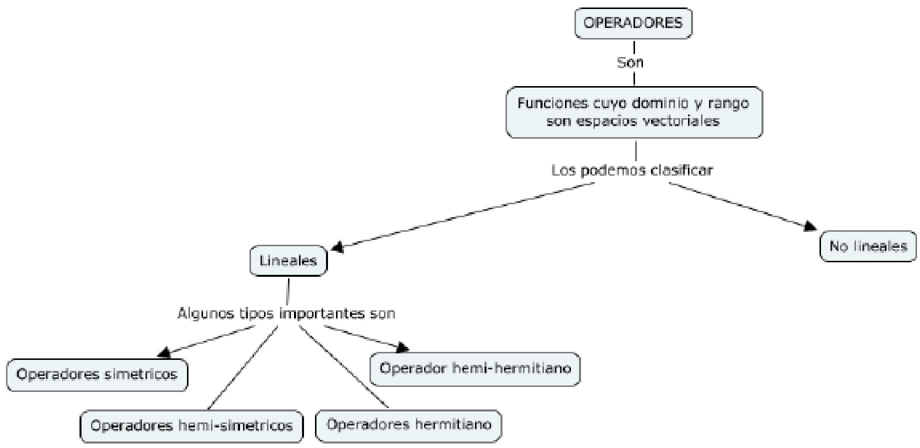


Figura 1.1: Clasificación de los operadores

1.2.1.1. Operadores lineales.

Los operadores lineales son de suma importancia en la matemática y la física, por el potencial que tienen para definir operaciones según la necesidad o aplicación que se quiera dar, por tanto, en este trabajo se emplearán operadores de este tipo.

Definición: Si V y W son dos espacios lineales, una función $T : V \to W$ se llama *operador lineal* de V en W, si cumple las siguientes condiciones:

1. $T(x + y) = T(x) + T(y)$, para todo x y y que pertenecen a V.
2. . $T(cx) = cT(x)$, para todo x que pertenece a V y c un escalar cualesquiera.

Ejemplo 1: Los operadores nulo, derivación y de Taylor; descritos anteriormente son ejemplos de operadores lineales.

Ejemplo 2: Sea V el espacio lineal de todas las funciones reales continuas en un intervalo $[a, b]$.Si $f \in V$, definimos $I(f) = g(x)$ como la función dada por:

$$I(f) = g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad si \quad a \leq x \leq b$$

Este se conoce como *operador integración* y es otro ejemplo de un operador lineal. Esto se comprueba fácilmente con la definición de integral.

1.2.1.1.1. Algunos tipos de operadores lineales.

- **Operador simétrico:** Sea E un espacio euclidiano real y V un subespacio de E. Un operador lineal $T : V \to E$ se llama simétrico en V si:

  $$(T(x), y) = (x, T(y)), (\forall x, y \in V);$$

  Donde (x, y) representa el producto interior definido en E.
  Ejemplo: Sea V el espacio lineal de todas las funciones reales continuas en un intervalo $[a, b]$,y sea p una función fija de este espacio, entonces definimos $T(f) = pf$, producto de p yf. Éste operador se denomina *multiplicación por función fija.* Ahora si se define en V el siguiente producto interno:

  $$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt;$$

  Se obtiene un operador simétrico.
  La comprobación es inmediata por la definición del operador y el producto interno,

  $$\begin{aligned}(T(f), g) &= (pf, g)\\ &= \int_a^b (pf)(t)g(t)dt\end{aligned}$$

$$= \int_a^b f(t)(pg)(t)dt$$
$$= (f, pg)$$
$$= (f, T(g))$$

- **Operador hemi-simétrico:** Sea E un espacio euclidiano real y V un subespacio de E. Un operador lineal $T : V \to E$ se llama hemi-simétrico en V si:
$$(T(x), y) = -(x, T(y)), (\forall x, y \in V);$$
Donde (x, y) representa el producto interior definido en E.
Ejemplo: Sea el operador derivada definido sobre $C(a, b)$ el espacio de todas las funciones reales con derivada continua en el intervalo cerrado (a, b) y que cumple la condición de contorno $f(a) = f(b)$. En el se define el producto interno real
$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt;$$
por lo tanto la condición para ser hemi- se reduce a
$$\int_a^b T(f)(g))dt = (f, g) = -\int_a^b (f)T(g))dt;$$
$$\int_a^b (T(f)(g) + (f)T(g))dt = 0$$
La comprobación de que es un operador hemi-simétrico es inmediata por la definición del operador y el producto interno.
$$\int_a^b D(f(t)g(t))dt = \int_a^b (D(f(t))g(t) + f(t)D(g(t)))dt;$$
$$= f(b)g(b) - f(a)g(a)$$
$$= 0$$
Con lo que se demuestra que es un operador hemi-simétrico.

- **Operador hermitiano:** Sea E un espacio euclidiano complejo y V un subespacio de E. Un operador lineal $T : V \to E$ se llama hermitiano en V si:
$$(T(x), y) = (x, T(y)), (\forall x, y \in V);$$
Donde (x, y) representa el producto interior definido en E.

- **Operador hemi-hermitiano:** Sea E un espacio euclidiano complejo y V un subespacio de E. Un operador lineal $T : V \to E$ se llama hemi-hermitiano en V si:

  $$(T(x), y) = -(x, T(y)), (\forall x, y \in V);$$

  Donde (x, y) representa el producto interior definido en E.

- **Operador exponencial interno:** $\sigma : A \longrightarrow A$ es un *operador exponencial interno* si $(\forall a \in A)$ $(\exists n \in A)$ tal que cumple $\sigma(a) = n * a$, donde * es el producto escalar de A.

  Dada esta definición se tiene que

  $$\sigma(x) + \sigma(y) = n * x + n * y$$
  $$= n * (x + y)$$
  $$= \sigma(x + y)$$

  Además

  $$\sigma(ma) = n * (ma)$$
  $$= m * (na)$$
  $$= m\sigma(a)$$

  Lo que demuestra que todo operador exponencial interno es lineal.

  Una propiedad adicional de este tipo de operadores que simplifica la tarea al momento de realizar los cálculos es:

  $$\underbrace{\sigma(\sigma(...\sigma(a)))}_{m-veces} = n^{^m} * a$$

  Ejemplos:

  - La multiplicación escalar en cualquier espacio vectorial es un operador exponencial interno.
  - Dado el conjunto de puntos en el plano elucido la rotación por cualquier punto con un Angulo divisor de 360 es un operador interno.

1.2.1.2. Operadores no lineales.

Un operador no lineal, es un operador que no cumple con alguna de las dos condiciones de linealidad. Estos operadores no han sido estudiados de manera amplia con respecto al estudio de los lineales.

Ejemplo: Sea P el espacio lineal de todas las funciones polinómicas de variable real. La función que aplica a cada función $f \in P$ en su cuadrado f^2 se llama *operador función al cuadrado* y se designa por $C : P \to P$, donde

$C(f) = f^2$ para cada $f \in V$.

$$C(f+g) = (f+g)^2$$
$$C(f) + C(g) = f^2 + g^2$$

Tenemos que para cualquier función no siempre se cumple que

$$(f+g)^2 = f^2 + g^2$$

Por lo tanto este operador no cumple la primera condición de linealidad, entonces C es un operador no lineal.

En el cuadro 1.1. presentamos el resumen de este apartado:

1.3. Transformada Z.

La transformada Z es una generalización de la transformada de Fourier, importante dentro de la representación y análisis de señales y sistemas discretos (Glyn, 2002).
A continuación se estudiará un operador que jugará un papel muy importante en el trabajo de grado: operador transformada Z. Se estudia su definición, propiedades, su inversa y se presentan algunos ejemplos.

Historia: La transformada Z surge a partir de la imposibilidad de convergencia de la transformada de Fourier para todas las secuencias, lo que hizo necesario plantearse una gama más amplia de señales. En 1974 fue introducida por W. Herewicz como una nueva forma de resolver ecuaciones lineales de constantes de coeficientes diferenciales.
La ecuación de Herewicz está expresada como una función de secuencia de datos muestrados f en lugar de la variable compleja z.

Los teoremas y definiciones mencionadas en este apartado son tomadas y modificadas de (Glyn, 2002).
Defínción: Dado el espacio lineal de las sucesiones complejas. La transformada Z de una sucesión $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$ perteneciente a este espacio, está definida, en general, como:

$$T_Z\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} = \mathcal{L}\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{z^k};$$

Siempre que exista la sumatoria y donde z es una variable compleja indefinida.

De manera alternativa, para los casos en que $x_k = 0$ para $0 < k$ (sucesión causal) definimos la transformada Z unilateral como:

$$T_Z\{x_k\}_0^\infty = \mathcal{L}\{x_k\}_0^\infty = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k};$$

Siempre que exista la sumatoria y donde z es una variable compleja indefinida.

Dado que la transformada Z es una función del conjunto las sucesiones reales en el conjunto de las funciones de variable compleja y ambos conjuntos son espacios lineales, entonces se deduce que la transformada Z es un operador.

Ejemplo 1: $\left\{2^k\right\}$, para $k \geq 0$
Aplicando la definición de la transformada Z unilateral obtenemos:

$$\mathcal{L}\{2^k\}_0^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{z^k}$$

Aplicando propiedad de los exponentes obtenemos:

$$\mathcal{L}\{2^k\}_0^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k$$

Lo cuál es una serie geométrica que converge cuando [3] $|z| > 2$, llegando a:

$$\mathcal{L}\{2^k\}_0^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{2}{z}}$$

$$\mathcal{L}\{2^k\}_0^\infty = \frac{1}{1 - \frac{2}{z}}$$

$$\mathcal{L}\{2^k\}_0^\infty = \frac{z}{z-2}, (|z| > 2)$$

Ejemplo 2: $\left\{a^k\right\}$, para $k \geq 0$ y $a \in \mathbb{R}$
Aplicando la definición de la transformada Z unilateral obtenemos:

$$\mathcal{L}\{a^k\}_0^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k}$$

Aplicando propiedad de los exponentes obtenemos:

$$\mathcal{L}\{a^k\}_0^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k$$

[3] $|z|$ representa la norma usual definida en los complejos.

Lo cuál es una serie geométrica que converge cuando $|z| > a$, llegando a:

$$\mathcal{L}\{a^k\}_0^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{a}{z}}$$

$$\mathcal{L}\{a^k\}_0^\infty = \frac{1}{1-\frac{a}{z}}$$

.

$$\mathcal{L}\{a^k\}_0^\infty = \frac{z}{z-a}, (|z| > a)$$

Ejemplo 3: $\{k\}$, para $k \geq 0$

Tenemos que:

$$\mathcal{L}\{a^k\}_0^\infty = \frac{z}{z-a} \tag{1.1}$$

Derivando (1.1) con respecto a a en ambos lados obtenemos:

$$\frac{d}{da}(\mathcal{L}\{a^k\}_0^\infty) = \frac{d}{da}\left(\frac{z}{z-a}\right)$$

$$\mathcal{L}\{ka^{k-1}\}_0^\infty = \frac{z}{(z-a)^2}$$

si $a = 1$, entonces:

$$\mathcal{L}\{k\}_0^\infty = \frac{z}{(z-1)^2}$$

1.3.1. Propiedades de la transformada Z.

En este apartado introducimos y demostramos algunas de las propiedades más importantes de la transformada Z.

1. **linealidad.**

   Si $\{x_k\}$ y $\{y_k\}$ son dos succiones complejas que tiene transformada Z y a una constante real cualesquiera, entonces:
   1. $\mathcal{L}(x_k + y_k) = \mathcal{L}(x_k) + \mathcal{L}(y_k)$
   2. $\mathcal{L}(a(x_k)) = a\mathcal{L}(x_k)$

   Demostración.

   Utilizando la definición de la transformada Z obtenemos: 1.

$$\mathcal{L}\{x_k + y_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k + y_k}{z^k};$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_k}{z^k} + \frac{y_k}{z^k}\right);$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_k}{z^k}\right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{y_k}{z^k}\right)$$

$$= \mathcal{L}\{x_k\} + \mathcal{L}\{y_k\}$$

Con lo que concluimos que:

2.

$$\mathcal{L}\{ax_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{ax_k}{z^k}$$

$$= a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{z^k}$$

$$\mathcal{L}(a(x_k)) = a\mathcal{L}(x_k)$$

$$\boxtimes$$

Por tanto, se concluye que la transformada Z es un operador lineal.

Ejemplo $\{cos(ak)\}$, para $k \geq 0$ y a una contaste diferente de cero. Antes de utilizar la definición de la transformada Z vamos a escribir a $cos(ak)$ en su forma exponencial compleja, obteniendo:

$$cos(ak) = \frac{e^{iak} + e^{-iak}}{2};$$

Donde i es la constante imaginaria. Ahora aplicamos transformada Z a ambos lados:

$$\mathcal{L}\{cos(ak)\}_0^\infty = \mathcal{L}\{\frac{e^{iak}}{2} + \frac{e^{-iak}}{2}\}_0^\infty$$

Aplicando la propiedad de linealidad de la transformada obtenemos:

$$\mathcal{L}\{\frac{e^{iak}}{2} + \frac{e^{-iak}}{2}\}_0^\infty = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{iak}\}_0^\infty + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-iak}\}_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\frac{z}{z - e^{ia}} + \frac{1}{2}\frac{z}{z - e^{-ia}}$$

$$= \frac{z}{2}\frac{(z - e^{-ia}) + (z - e^{-ia})}{(z - e^{ia})(z - e^{-ia})}$$

$$= \frac{z}{2}\frac{2z-(e^{ia}+e^{-ia})}{z^2-ze^{ia}-ze^{-ia}+e^{ia}e^{-ia}}$$
$$= \frac{z}{2}\frac{2z-(e^{ia}+e^{-ia})}{z^2-z(e^{ia}+e^{-ia})+1}$$
$$= \frac{z}{2}\frac{2z-2cos(a)}{z^2-2zcos(a)+1}$$
$$= \frac{z^2-zcos(a)}{z^2-2zcos(a)+1}$$

Con lo que tenemos:

$$\mathcal{L}\{cos(ak)\}_0^\infty = \frac{z^2-zcos(a)}{z^2-2zcos(a)+1}, \quad |z|>1$$

.

2. **Retraso.**
Si $\{x_k\}$ es una sucesión causal con transformada Z, sea $\{y_k\}$ una sucesión definida como:

$$y_k = x_{k-k_0}$$

Donde $k_0 \in \mathbb{N}$ y representa el número de saltos que retrocede la sucesión, entonces:

$$\mathcal{L}\{y_k\} = \frac{1}{z^{k_0}}\mathcal{L}\{x_k\}$$

O lo que es igual:

$$\mathcal{L}\{x_{k-k_0}\} = \frac{1}{z^{k_0}}\mathcal{L}\{x_k\}$$

.

Demostración.
Utilizando la definición de transformada Z, obtenemos:

$$\mathcal{L}\{x_{k-k_0}\}_0^\infty = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_{k-k_0}}{z^k}$$

Haciendo el siguiente cambio de variable $p = k - k_0$, obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_{k-k_0}}{z^k} = \sum_{p=-k_0}^{\infty}\frac{x_p}{z^{p+k_0}}$$

Dado que $\{x_n\}$ es una sucesión causal, entonces tenemos que:

$$\sum_{p=-k_0}^{\infty}\frac{x_p}{z^{p+k_0}} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{x_p}{z^{p+k_0}}$$

$$= \frac{1}{z^{k_0}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^p}$$

$$= \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{L}\{x_k\}$$

concluyendo tenemos:

$$\mathcal{L}\{x_{k-k0}\} = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{L}\{x_k\}$$

$$\boxtimes$$

Ejemplo: $\left\{e^{k-5}\right\}$, para $k \geq 0$.

$$\mathcal{L}\{e^{k-5}\} = \frac{1}{z^5}\{e^k\}$$

$$= \frac{1}{z^5} \frac{z}{z-e}$$

$$= \frac{1}{z^4(z-e)}$$

.

3. **Avance.**
Si $\{x_k\}$ es una sucesión causal con transformada Z, sea $\{y_k\}$ una sucesión definida como:

$$y_k = x_{k+k_0}$$

Donde $k_0 \in \mathbb{N}$ y representa el número de saltos que avanza la sucesión, entonces:

$$\mathcal{L}\{y_k\} = z^{k_0} \mathcal{L}\{x_k\} - \sum_{n=0}^{k_0-n} x_n z^{k_0-n}$$

O lo que es igual:

$$\mathcal{L}\{x_{k+k_0}\} = z^{k_0} \mathcal{L}\{x_k\} - \sum_{n=0}^{k_0-n} x_n z^{k_0-n}$$

Demostración:
Utilizando la definición de transformada Z, obtenemos:

$$\mathcal{L}\{x_{k+k_0}\}_0^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k+k_0}}{z^k}$$

Haciendo el siguiente cambio de variable $p = k + k_0$, obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k+k_0}}{z^k} = \sum_{p=k_0}^{\infty} \frac{x_p}{z^{p-k_0}}$$

Esta sucesión se puede rescribir de la siguiente manera:

$$\sum_{p=k_0}^{\infty} \frac{x_p}{z^{p-k_0}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^{p-k_0}} - \sum_{n=0}^{k_0-n} \frac{x_n}{z^{n-k_0}}$$

$$= z^{k_0} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^{p-}} - \sum_{n=0}^{k_0-n} x_n z^{k_0-n}$$

$$= z^{k_0} \mathcal{L}\{x_k\} - \sum_{n=0}^{k_0-n} x_n z^{k_0-n}$$

Concluyendo tenemos:

$$\mathcal{L}\{x_{k+k0}\} = z^{k_0} \mathcal{L}\{x_k\} - \sum_{n=0}^{k_0-n} x_n z^{k_0-n}$$

$\boxtimes$

Ejemplo: $\{k + 3\}$ para $k \geq 0$

$$\mathcal{L}\{k+3\} = z^3 \mathcal{L}\{k\} - \sum_{n=0}^{3-n} x_n z^{3-n}$$

$$= z^3 \frac{z}{(z-1)^2} - x_0 z^3 - x_1 z^2 - x_2 z$$

$$= z^3 \frac{z}{(z-1)^2} - 3z^3 - 4z^2 - 5z$$

4. **Multiplicación por a^k.**
   Si $\{x_k\}$ es una sucesión causal con transformada Z, sea $\{y_k\}$ una sucesión definida como:

$$y_k = a^k x_k$$

Donde a es una constante real diferente de cero, entonces:

$$\mathcal{L}\{y_k\} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

O lo que es igual:

$$\mathcal{L}\{a^k x_k\} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Demostración.
Utilizando la definición de transformada Z, obtenemos:

$$\mathcal{L}\{a^k x_k\}_0^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x_k}{z^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{a^{-k} z^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{(a^{-1}z)^k}$$

$$= X(a^{-1}z)$$

$$= X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Concluyendo tenemos:

$$\mathcal{L}\{a^k x_k\} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$\boxtimes$$

Ejemplo: $\left\{e^k cos(ak)\right\}$, para $k \geq 0$

$$\mathcal{L}\{e^k cos(ak)\} = \frac{\left(\frac{z}{e}\right)^2 - \frac{z}{e}cos(a)}{\left(\frac{z}{e}\right)^2 - \frac{2z}{e}cos(a) + 1}$$

5. **Convolución.**
Dadas $\{x_k\}$ y $\{y_k\}$ dos sucesiones reales, entonces la Convolución (*) entre ellas dos se define como:

$$\{x_k\} * \{y_k\} = \sum_{m=0}^{n} x_m y_{n-m}$$

Si las dos sucesiones tienen transformada Z, entonces:

$$\mathcal{L}\{\{x_k\} * \{y_k\}\} = \mathcal{L}\{x_k\}\mathcal{L}\{y_k\}$$

.

La demostración de esta propiedad se puede consultar en (Glyn, 2002)

ejemplo: $\left\{e^k\right\}$ y $\{k\}$, para $k \geq 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\{e^k\} * \{k\}\} &= \mathcal{L}\{e^k\}\mathcal{L}\{k\} \\ &= \frac{z}{z-e}\frac{z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{z^2}{(z-e)(z-1)^2}\end{aligned}$$

.

1.3.2. Transformada Z inversa.

La transformada Z inversa es una operador cuyo dominio es el espacio lineal de todas las funciones de variable compleja que son transformada Z de alguna sucesión real, y cuyo codominio son las sucesiones reales. Formalmente se representa con el símbolo $\mathcal{L}^{-1}[X(z)]$ lo cual indica una sucesión $\{x_k\}$ cuya transformada Z es X(z); esto es,

$$\text{Si } \mathcal{L}\{x_k\} = X(z) \text{ entonces } \mathcal{L}^{-1}[X(z)] = \{x_k\}.$$

Por la forma en que se define la transformada Z, se obtiene que su inversa hereda directamente la propiedad de linealidad y por ende podemos concluir que es un *operador lineal.*

1.3.2.1. Ejemplo de transformada Z para algunas funciones elementales.

- $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z}{z-a}\right)$, con a una constante real distinta de cero.
  Como ya mostramos $\mathcal{L}\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z}{z-a}\right) = \{a^k\}_0^\infty$.
- $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^b}\frac{z}{z-a}\right)$, con a una constante real distinta de cero y b una constante natural.
  De la propiedad de retraso tenemos que $\mathcal{L}\{x_{k-k_0}\} = \frac{1}{z^{k_0}}X(z)$, entonces tenemos que $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{zk_0}X(z)] = \{x_{k-k_0}\}$. Aplicando esto obtenemos que

  $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^b}\frac{z}{z-a}\right) = \{a^{k-k_0}\}_{k_0}^\infty.$$

- $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right)$.
  Para hallar esta transformada inversa primero reescribimos la función de la siguiente manera:

  $$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = z\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

Ahora reescribimos la función por medio de fracciones parciales y obtenemos:

$$z\frac{1}{(z-1)(z-2)} = z(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1})$$
$$= \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$$

Ahora aplicando la propiedad de linealidad tenemos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right]$$
$$= \{2^k\} - \{(1)^k\}$$
$$= \{2^k - (1)^k\}_0^\infty$$

Por lo tanto obtenemos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right) = \{2^k - 1\}.$$

- $\mathcal{L}^{-1}(\frac{bz}{z-a})$, con a y b una constante real distinta de cero.
  Aplicando la propiedad de linealidad tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{bz}{z-a}\right) = b\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z}{z-a}\right)$$
$$= b\{a^k\}$$
$$= \{ba^k\}$$

  Por lo tanto obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{bz}{z-a}\right) = \{ba^k\}_0^\infty.$$

- $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2z+1}{(z+1)(z-3)}\right)$.
  Para hallar esta transformada inversa primero reescribimos la función de la siguiente manera

$$\frac{2z+1}{(z+1)(z-3)} = \frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{7}{4}\frac{1}{z+3}$$

  Reescribimos estas fracciones de la siguiente manera para poder utilizar resultados ya obtenidos

$$\frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{7}{4}\frac{1}{z+3} = \frac{1}{4z}\frac{z}{z+1} + \frac{7}{4z}\frac{z}{z+3}$$

Utilizando la propiedad de linealidad y retraso obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2z+1}{(z+1)(z-3)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{4z}\frac{z}{z+1}+\frac{7}{4z}\frac{z}{z+3}\right)\\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z}\frac{z}{z+1}\right)+\frac{7}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z}\frac{z}{z-3}\right)\\ &= \frac{1}{4}\{(-1)^{k-1}\}+\frac{7}{4}\{3^{k-1}\}\\ &= \{\frac{1}{4}(-1)^{k-1}+\frac{7}{4}3^{k-1}\}\end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2z+1}{(z+1)(z-3)}\right) = \{\frac{1}{4}(-1)^{k-1}+\frac{7}{4}3^{k-1}\}_1^{\infty}.$$

1.4. Autovalores y autovectores propios.

1.4.1. Historia

El problema de la determinación algebraica de valores propios surgió en el siglo XVIII a partir del estudio de sistemas mecánicos discretos . Su origen se remonta al estudio de la teoría espectral (Martínez, 2006), rama de la matemática que se ocupa principalmente del análisis funcional.

La aparición de los autovalores no fue de gran sorpresa por los avances que se habían obtenido a través del estudio de las formas cuadráticas, existentes desde la segunda mitad del siglo XVII. Leibniz (1646-1716) había desarrollado trabajos relacionados con sistemas de ecuaciones y sistemas de formas cuadráticas, que eventualmente originarían la teoría de matrices. Posteriormente, sería más evidente el surgimiento de esta teoría en los trabajos realizados por D´Alembert (1717-1783) y Lagrange (1736-1813), quienes se dedicaron a la solución del problema de la cuerda vibrante, por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias. Seguido de esto, a mediados del siglo XVIII, Lagrange y Laplace (1749-1827) se verían en la necesidad de desarrollar a profundidad el estudio de los autovalores, motivados por la teoría física.

Estos trabajos tendrían una gran influencia sobre los trabajos de Cauchy (1789-1857) y por lo tanto, del rumbo que tendría la teoría espectral (Martínez, 2006). A principios del siglo XIX la teoría espectral estaría divida en dos grandes áreas, la primera dedicada a la caracterización de las matrices, como simétricas, ortogonales, unitarias, etc., y al estudio de los valores propios de cada una de estas matrices; la segunda rama se dedicaba al concepto de valor propio por medio de los sistemas de ecuaciones diferenciales, como las propiedades que pueden tener sus soluciones, lo que daría como resultado el estudio de las funciones propias o eigenfunciones.

1.4.2. Definición

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$, un valor propio o eigenvalor de A es un vector x diferente del vector cero, tal que $x \in R^n$, o bien $x \in C^n$ en el caso de estudiarse en el conjunto de los números complejos, tal que para algún escalar λ, se tiene que:

$$Ax = \lambda x$$

El escalar λ es llamado eigenvalor de la matriz A, y podemos definir el vector x como el eigenvector o vector propio que pertenece al eigenvalor λ. A la pareja x, λ la denominamos eigenpar de la matriz A.
Los eigenvalores y los eigenvectores, también son conocidos como valores característicos y vectores característicos, puesto que la palabra eigen de origen alemán, significa característica traducido al español (Thomas, 2006).

Para solucionar la ecuación mencionada, se define la ecuación característica de una matriz cuadrada A, como el $det(A - I\lambda) = 0$ y el polinomio característico de $n - esimo$ grado, como $p(\lambda) = det(A - I\lambda)$, para hallar los valores de λ que satisfacen la ecuación.

Dado un eigenvalor λ de una matriz A, el eigen espacio correspondiente a λ es el subespacio $\mathcal{N}(\lambda I - A)$ de R^n (o C^n), denotado como $\varepsilon_\lambda(A) = \mathcal{N}(\lambda I - A)$.

Definimos eigensistema al conjunto de todos los eigenvalores λ de A y sus correspondientes subespacios generados.

Ejemplo

Para ejemplificar las definiciones dadas, hallaremos los eigenvalores y eigenvectores de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Solucionamos la ecuación característica:

$$\begin{aligned} 0 = det(I\lambda - A) &= det \begin{pmatrix} \lambda - 7 & -4 \\ -3 & \lambda - 6 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 7)(\lambda - 6) - (-3)(-4) \\ &= \lambda^2 - 13\lambda + 42 - 12 \end{aligned}$$

$$= \lambda^2 - 13\lambda + 30$$
$$= (\lambda - 3)(\lambda - 10).$$

De la cuál obtenemos que $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 10$. Ahora, para cada eigenvalor hallaremos su correspondiente eigenespacio:

$$\text{Para } \lambda = 3 : \text{tenemos } (A - 3I) = \begin{pmatrix} 7-3 & 4 \\ 3 & 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Por medio de la reducción Gauss-Jordan, obtenemos: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde podemos concluir que $x_1 = -x_2$, por lo tanto:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Por lo tanto, una base de $\varepsilon_3(A)$ es $\{(-1, 1)\}$

Ahora, para el segundo caso tenemos:

$$\text{Para } \lambda = 10 : \text{tenemos } (A - 10I) = \begin{pmatrix} 7-10 & 4 \\ 3 & 6-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Por medio de la reducción Gauss-Jordan, obtenemos: $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde podemos concluir que $x_1 = \frac{4}{3}x_2$, por lo tanto:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ Por lo tanto, una base de $\varepsilon_{10}(A)$ es $\{(\frac{4}{3}, 1)\}$

$\square$

Ahora bien, sea λ una raíz solución, obtenida de la ecuación característica $det(A - I\lambda) = 0$. Definimos la multiplicidad algebraica de λ como la multiplicidad que puede tener con otra raíz λ_2 de la ecuación característica.Y definimos multiplicidad geométrica de λ, como la dimensión del espacio $\varepsilon_\lambda(A) = \mathcal{N}(\lambda I - A)$.

Con base en la siguiente definición, podemos categorizar los eigenvalores como simples o repetidos:
El eigenvalor λ es llamado simple si su multiplicidad algebraica es 1. Esto es, el número de veces que se repite una raíz producto de la ecuación característica es 1. En caso contrario, se le llamará eigenvalor repetido.

Finalmente, definimos una matriz defectuosa si uno de sus eigenvalores tiene multiplicidad geométrica menor a su multiplicidad algebraica.

1.5. Autovalores y autovectores propios.

1.5.1. Historia

El problema de la determinación algebraica de valores propios surgió en el siglo XVIII a partir del estudio de sistemas mecánicos discretos . Su origen se remonta al estudio de la teoría espectral (Martínez, 2006), rama de la matemática que se ocupa principalmente del análisis funcional.

La aparición de los autovalores no fue de gran sorpresa por los avances que se habían obtenido a través del estudio de las formas cuadráticas, existentes desde la segunda mitad del siglo XVII. Leibniz (1646-1716) había desarrollado trabajos relacionados con sistemas de ecuaciones y sistemas de formas cuadráticas, que eventualmente originarían la teoría de matrices. Posteriormente, sería más evidente el surgimiento de esta teoría en los trabajos realizados por D´Alembert (1717-1783) y Lagrange (1736-1813), quienes se dedicaron a la solución del problema de la cuerda vibrante, por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias. Seguido de esto, a mediados del siglo XVIII, Lagrange y Laplace (1749-1827) se verían en la necesidad de desarrollar a profundidad el estudio de los autovalores, motivados por la teoría física.

Estos trabajos tendrían una gran influencia sobre los trabajos de Cauchy (1789-1857) y por lo tanto, del rumbo que tendría la teoría espectral (Martínez, 2006). A principios del siglo XIX la teoría espectral estaría divida en dos grandes áreas, la primera dedicada a la caracterización de las matrices, como simétricas, ortogonales, unitarias, etc., y al estudio de los valores propios de cada una de estas matrices; la segunda rama se dedicaba al concepto de valor propio por medio de los sistemas de ecuaciones diferenciales, como las propiedades que pueden tener sus soluciones, lo que daría como resultado el estudio de las funciones propias o eigenfunciones.

1.5.2. Definición

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$, un valor propio o eigenvalor de A es un vector x diferente del vector cero, tal que $x \in R^n$, o bien $x \in C^n$ en el caso de estudiarse en el conjunto de los números complejos, tal que para algún escalar λ, se tiene que:

$$Ax = \lambda x$$

El escalar λ es llamado eigenvalor de la matriz A, y podemos definir el vector x como el eigenvector o vector propio que pertenece al eigenvalor λ. A la pareja x, λ la denominamos eigenpar de la matriz A.
Los eigenvalores y los eigenvectores, también son conocidos como valores característicos y vectores característicos, puesto que la palabra eigen de origen alemán, significa característica traducido al español (Thomas, 2006).

Teorema 1: Sea A una matriz cuadrada de tamaño nxn, entonces:

- Los eigenvalores de A son todos los escalares λ, tales que solucionan el polinomio de grado n:

$$det(A - I\lambda) = 0$$

- Para un eigenvalor λ dado, los eigenvectores de la matriz A que pertenecen al eigenvalor dado son elementos no nulos de $\mathcal{N}(A - I\lambda)$.

Definición 2: Dada una matriz cuadrada A de tamaño nxn, la ecuación $det(A - I\lambda) = 0$ se denomina ecuación característica de A y el polinomio de grado n, $p(\lambda) = det(A - I\lambda)$ es denominado polinomio característico de A.

Definición 3: Dado un eigenvalor λ de una matriz A, el eigen espacio correspondiente a λ es el subespacio $\mathcal{N}(\lambda I - A)$ de R^n (o C^n), denotado como $\varepsilon_\lambda(A) = \mathcal{N}(\lambda I - A)$.

Defnción 4: Definimos eigensistema al conjunto de todos los eigenvalores λ de A y sus correspondientes subespacios generados.

Ejemplo

Para ejemplificar las definiciones dadas, hallaremos los eigenvalores y eigenvectores de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Solucionamos la ecuación característica:

$$\begin{aligned} 0 = det(I\lambda - A) = det \begin{pmatrix} \lambda - 7 & -4 \\ -3 & \lambda - 6 \end{pmatrix} \\ = (\lambda - 7)(\lambda - 6) - (-3)(-4) \\ = \lambda^2 - 13\lambda + 42 - 12 \\ = \lambda^2 - 13\lambda + 30 \\ = (\lambda - 3)(\lambda - 10). \end{aligned}$$

De la cuál obtenemos que $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 10$. Ahora, para cada eigenvalor hallaremos su correspondiente eigenespacio:

$$\text{Para } \lambda = 3 : \text{tenemos } (A - 3I) = \begin{pmatrix} 7 - 3 & 4 \\ 3 & 6 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Por medio de la reducción Gauss-Jordan, obtenemos: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde podemos concluir que $x_1 = -x_2$, por lo tanto:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Por lo tanto, una base de $\varepsilon_3(A)$ es $\{(-1,1)\}$

Ahora, para el segundo caso tenemos:

$$\text{Para } \lambda = 10 : \text{tenemos } (A - 10I) = \begin{pmatrix} 7-10 & 4 \\ 3 & 6-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Por medio de la reducción Gauss-Jordan, obtenemos: $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde podemos concluir que $x_1 = \frac{4}{3}x_2$, por lo tanto:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ Por lo tanto, una base de $\varepsilon_{10}(A)$ es $\{(\frac{4}{3},1)\}$

$\square$

Ahora bien, sea λ una raíz solución, obtenida de la ecuación característica $det(A - I\lambda) = 0$. Definimos la multiplicidad algebraica de λ como la multiplicidad que puede tener con otra raíz λ_2 de la ecuación característica y definimos multiplicidad geométrica de λ, como la dimensión del espacio $\varepsilon_\lambda(A) = \mathcal{N}(\lambda I - A)$.

Con base en la siguiente definición, podemos categorizar los eigenvalores como simples o repetidos:

El eigenvalor λ es llamado simple si su multiplicidad algebraica es 1. Esto es, el número de veces que se repite una raíz producto de la ecuación característica es 1. En caso contrario, se le llamará eigenvalor repetido.

Finalmente, definimos una matriz defectuosa si uno de sus eigenvalores tiene multiplicidad geométrica menor a su multiplicidad algebraica.

1.6. Semejanza y Diagonalización

Una matriz A es semejante con una matriz B (A y B cuadradas de tamaño nxn)si existe una matriz invertible P tal que:

$$B = P^{-1}AP$$

La matriz P es llamada matriz transformación semejante y será cuadrada del mismo tamaño que las matrices A y B.

Es fácil verificar que si A es semejante a B, entonces B es semejante a A. Para ello suponemos que $P^{-1}AP = B$, ahora multiplicamos P a izquierda y

P^{-1} a derecha, obteniendo $A = PP^{-1}APP^{-1} = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$.

Ahora bien, una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal, esto es, existe una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$. En ese caso decimos que P es la diagonalización de A o que P diagonaliza a A.

Una matriz es diagonalizable si y solo si el conjunto de sus eigenvectores es linealmente independiente y la multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica de sus eigenvectores debe ser la misma.

Para concluir el marco teórico relacionado con los autovalores y autovectores propios introduciremos tres teoremas de suma importancia para el presente trabajo de grado.

Teorema 2: Si $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$, entonces $D^k = diag\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_n^k\}$, para todo entero positivo k.

Corolario 1: Si $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ y $f(x)$ es un polinomio, entonces $f(D) = diag\{f(\lambda_1), f(\lambda_2), ..., f(\lambda_n)\}$

La prueba consiste en observar que si $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, entonces $f(D) = a_0I + a_1D + ... + a_nD^n$, aplicando el teorema anterior se obtiene que la suma de cada término resulta en $f(D)$.

Teorema 3: Suponiendo que A y B son matrices semejantes, es decir $P^{-1}AP = B$, entonces:

- Para todo polinomio $q(x)$,

$$q(B) = P^{-1}q(A)P.$$

- Las matrices A y B tienen el mismo polinomio característico, por tanto los mismo eigenvalores.

Para probar el teorema aplicamos una k potencia a la expresión $B = P^{-1}AP$, obteniendo:

$$B^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)...(P^{-1}AP)$$

Donde los términos sucesivos PP^{-1} se cancelan, concluyendo la primera parte de la demostración:

$$B^k = P^{-1}A^kP$$

Para la segunda parte, distribuyendo el determinante sobre sus productos, obtenemos:

$$\begin{aligned}
det(\lambda I - B) &= det(\lambda P^{-1} I P - P^{-1} A P) \\
&= det(P^{-1}(\lambda I - A)P) \\
&= det(P^{-1}) det(\lambda I - A) det(P) \\
&= det(\lambda I - A) det(P^{-1} P) \\
&= det(\lambda I - A)
\end{aligned}$$

Quedando demostrado.

Capítulo 2

Termino analítico de algunas sucesiones.

Las soluciones positivas tanto para x como para y de una ecuación de Pell-Fermat (o sea ecuaciones de la forma $x^2 - dy^2 = \pm 1$ con x, y y d números y y un número no cuadrado perfecto) generan una sucesión definida de manera recurrente. Por ejemplo para la ecuación de Pell $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ tenemos que:

x	1	1	3	7	17	41	99	239	...
y	0	1	2	5	12	29	70	169	...

Cuadro 2.1: Soluciones de la ecuación .

Se puede ver que las soluciones para x están generadas por la siguiente regla

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$$

También se tiene que para las soluciones en y la regla es

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$$

Con el fin de hallar el termino analítico de estas sucesiones resultantes de las soluciones de la ecuación de Pell, emplearemos los tres métodos descritos en el capítulo anterior: la transformada z, los eigenvalores y eigenvectores de una matriz y por último emplearemos el concepto de operador exponencial interna que nos permitirán llegar a la generalización algebraica esperada.
A continuación planteamos como primer teorema la expresión general del

término analítico de sucesiones recurrentes de segundo grado.

Teorema 1[1]: Sea una sucesión definida por recurrencia de orden 2 y cuya regla de creación esta dada por:

$$a_0 = a_0,$$

$$a_1 = a_1,$$

$$a_{n+2} = ra_{n+1} + sa_n \quad (n \geq 2);$$

Con $a_0, a_1, r\ ,\ s \in \mathbb{R}$ y $r^2 + 4s \neq 0$. Entonces el termino analítico de esta sucesión esta dado por:

$$\begin{aligned} a(n) = & \frac{a_0(r^2+4s) + (2a_1 - ra_0)\sqrt{r^2+4s}}{2(r^2+4s)} \left(\frac{r + \sqrt{r^2+4s}}{2} \right)^n \\ & + \frac{a_0(r^2+4s) - (2a_1 - ra_0)\sqrt{r^2+4s}}{2(r^2+4s)} \left(\frac{r - \sqrt{r^2+4s}}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

Demostración (Transformada Z).

Supongamos que

$$\mathcal{L}\{a_n\} = A(z)$$

Tenemos que

$$a_{n+2} = ra_{n+1} + sa_n$$

Dado que lo que tenemos es una suma de sucesiones entonces Aplicando la transformada Z en ambos lados de la ecuación

$$\mathcal{L}\{a_{n+2}\} = \mathcal{L}\{ra_{n+1} + sa_n\}$$

$$\mathcal{L}\{a_{n+2}\} = \mathcal{L}\{ra_{n+1}\} + \mathcal{L}\{sa_n\}$$

$$\mathcal{L}\{a_{n+2}\} = r\mathcal{L}\{a_{n+1}\} + s\mathcal{L}\{a_n\}$$

$$A(z)z^2 - a_0z^2 - a_1z = r(A(z)z - a_0z) + sA(z)$$

$$A(z)z^2 - a_0z^2 - a_1z = rA(z)z - a_0rz + sA(z)$$

$$A(z)z^2 - rA(z) - sA(z) = a_0z^2 + a_1z - a_0rz$$

$$A(z)(z^2 - rz - s) = a_0z^2 + (a_1 - a_0r)z$$

$$A(z)\left(z - \frac{r + \sqrt{r^2+4s}}{2}\right)\left(z - \frac{r - \sqrt{r^2+4s}}{2}\right) = z(a_0z + (a_1 - a_0r))$$

$$A(z) = \frac{z(a_0z + (a_1 - a_0r))}{\left(z - \frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2}\right)\left(z - \frac{r-\sqrt{r^2+4s}}{2}\right)}$$

[1]Al iniciar cada capitulo se reiniciara la numeración de los teoremas.

Reescribiendo por medio de fracciones parciales obtenemos

$$A(z) = \frac{a_0(r^2+4s) + (2a_1 - ra_0)\sqrt{r^2+4s}}{2(r^2+4s)} \left(\frac{z}{z - \frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2}} \right)$$
$$+ \frac{a_0(r^2+4s) - (2a_1 - ra_0)\sqrt{r^2+4s}}{2(r^2+4s)} \left(\frac{z}{z - \frac{r-\sqrt{r^2+4s}}{2}} \right)$$

Aplicando la transformada Z inversa en ambos lados de la ecuación obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1}(A(z)) = \frac{a_0(r^2+4s) + (2a_1 - ra_0)\sqrt{r^2+4s}}{2(r^2+4s)} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{z}{z - \frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2}} \right)$$

$$+ \frac{a_0(r^2+4s) - (2a_1 - ra_0)\sqrt{r^2+4s}}{2(r^2+4s)} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{z}{z - \frac{r-\sqrt{r^2+4s}}{2}} \right)$$

$$a(n) = \frac{a_0(r^2+4s) + (2a_1 - ra_0)\sqrt{r^2+4s}}{2(r^2+4s)} \left(\frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2} \right)^n$$
$$+ \frac{a_0(r^2+4s) - (2a_1 - ra_0)\sqrt{r^2+4s}}{2(r^2+4s)} \left(\frac{r-\sqrt{r^2+4s}}{2} \right)^n.$$

$\boxtimes$

Demostración (Operador).
Tenemos que

$$a_{n+2} = ra_{n+1} + sa_n$$

Supongamos que existe un operador exponencial interno $\Im$, Reescribiremos esta ecuación con ayuda del operador.

$$\Im^2 a_n = r\Im a_n + sa_n$$

$$\Im^2 a_n - r\Im a_n - sa_n = 0$$
$$a_n(\Im^2 - r\Im - s) = 0$$

Como $a_n \neq 0$ para todos los n, entonces

$$\Im^2 - r\Im - s = 0$$

$$\Im = \frac{r \pm \sqrt{r^2+4s}}{2}$$

Por lo tanto

$$a(n) = \Im_{\pm}^{n} = \left(\frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \right)^n$$

La cual podemos plantear como una combinación lineal

$$a(n) = A \left(\frac{r + \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \right)^n + B \left(\frac{r - \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \right)^n$$

Para $n = 0$ y $n = 1$ tenemos que

$$a_0 = A \left(\frac{r + \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \right)^0 + B \left(\frac{r - \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \right)^0$$

$$a_1 = A \left(\frac{r + \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \right)^1 + B \left(\frac{r - \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \right)^1$$

El cual es un sistema 2×2 que tiene como soluciones a

$$A = \frac{a_0(r^2 + 4s) + (2a_1 - ra_0)\sqrt{r^2 + 4s}}{2(r^2 + 4s)}$$

$$B = \frac{a_0(r^2 + 4s) - (2a_1 - ra_0)\sqrt{r^2 + 4s}}{2(r^2 + 4s)}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} a(n) = & \frac{a_0(r^2 + 4s) + (2a_1 - ra_0)\sqrt{r^2 + 4s}}{2(r^2 + 4s)} \left(\frac{r + \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \right)^n \\ & + \frac{a_0(r^2 + 4s) - (2a_1 - ra_0)\sqrt{r^2 + 4s}}{2(r^2 + 4s)} \left(\frac{r - \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \right)^n . \end{aligned}$$

$\boxtimes$

Demostración (autovalores).

Dada la sucesión definida por recurrencia, definimos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= ra_{n+1} + sa_n, \\ a_{n+1} &= a_{n+1} \end{aligned}$$

Representamos el sistema de dos ecuaciones de forma matricial, mediante la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{n+1} + sa_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} (1)$$

Nos permite hallar la generalización, empleando la diagonalización de la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Calculamos los eigenvalores asociados a la matriz A:

$$\begin{aligned} 0 = det(A - I\lambda) &= det \begin{pmatrix} r-\lambda & s \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} (2) \\ &= (r-\lambda)(-\lambda) - s \\ &= \lambda^2 - r\lambda - s \end{aligned}$$

Luego,

$$\lambda_1 = \frac{r + \sqrt{r^2+4s}}{2} \text{ y } \lambda_2 = \frac{r - \sqrt{r^2+4s}}{2}$$

Una vez calculados, hallamos los eigenvectores asociados a los eigenvalores, para λ_1 tenemos:

$$\begin{pmatrix} r - \dfrac{r + \sqrt{r^2+4s}}{2} & s \\ 1 & -\dfrac{r + \sqrt{r^2+4s}}{2} \end{pmatrix} (3)$$

reduciendo la matriz por el método Gauss-Jordan, se tiene que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{r - \sqrt{r^2+4s}}{2} & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dfrac{r - \sqrt{r^2+4s}}{2} x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-r + \sqrt{r^2+4s}}{2s} \end{pmatrix} (4)$$

Obtenemos el primer eigenvector: $\varepsilon_{\lambda_1}(A) = \{(1, \dfrac{-r + \sqrt{r^2+4s}}{2s})\}$.

Análogamente, para el caso λ_2 se obtiene que $\varepsilon_{\lambda_2}(A) = \{(1, \dfrac{-r - \sqrt{r^2+4s}}{2s})\}$.

Ahora, podemos expresar la matriz A en la forma $A = PDP^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{-r + \sqrt{r^2+4s}}{2s} & \dfrac{-r - \sqrt{r^2+4s}}{2s} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{r + \sqrt{r^2+4s}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{r - \sqrt{r^2+4s}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{r + \sqrt{r^2+4s}}{2\sqrt{r^2+4s}} & \dfrac{s}{\sqrt{r^2+4s}} \\ \dfrac{-r + \sqrt{r^2+4s}}{2\sqrt{r^2+4s}} & \dfrac{-s}{\sqrt{r^2+4s}} \end{pmatrix} (5)$$

La diagonalización de la matriz A permite ser expresada como potencias entre matrices, manteniendo la igual en la expresión $A^n = PD^nP^{-1}$, por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{-r+\sqrt{r^2+4s}}{2s} & \dfrac{-r-\sqrt{r^2+4s}}{2s} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{r-\sqrt{r^2+4s}}{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \dfrac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2\sqrt{r^2+4s}} & \dfrac{s}{\sqrt{r^2+4s}} \\ \dfrac{-r+\sqrt{r^2+4s}}{2\sqrt{r^2+4s}} & \dfrac{-s}{\sqrt{r^2+4s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} (6)$$

Así,

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{-r+\sqrt{r^2+4s}}{2s} & \dfrac{-r-\sqrt{r^2+4s}}{2s} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (\dfrac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2})^n & 0 \\ 0 & (\dfrac{r-\sqrt{r^2+4s}}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2\sqrt{r^2+4s}} & \dfrac{s}{\sqrt{r^2+4s}} \\ \dfrac{-r+\sqrt{r^2+4s}}{2\sqrt{r^2+4s}} & \dfrac{-s}{\sqrt{r^2+4s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} (7)$$

Ahora, realizando el producto de las matrices y usando (1)

$$\begin{aligned} a(n) = {} & \frac{a_0(r^2+4s)+(2a_1-ra_0)\sqrt{r^2+4s}}{2(r^2+4s)} \left(\frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2}\right)^n \\ & + \frac{a_0(r^2+4s)-(2a_1-ra_0)\sqrt{r^2+4s}}{2(r^2+4s)} \left(\frac{r-\sqrt{r^2+4s}}{2}\right)^n . \end{aligned}$$

$\boxtimes$

Ejemplo: La sucesión de *Fibonacci* se define por recurrencia por medio de la siguiente regla

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \geq 2);$$

Utilizando el teorema 1 siendo $a_0 = a_1 = r = s = 1$, tenemos que el termino analítico de la sucesión de Fibonacci es

$$a(n) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12
a_n	1	1	2	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Cuadro 2.2: Primeros términos de la sucesión de Fibonnacci.

Ejemplo : Se define la siguiente sucesión por recurrencia por medio de la siguiente regla

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 1,$$
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \quad (n \geq 2);$$

Utilizando el teorema 1 siendo $a_0 = a_1 = s = 1$ y $r = 2$, tenemos que el termino analítico de la sucesión de es

$$a(n) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12
a_n	1	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	8119

Cuadro 2.3: Primeros términos de la sucesión.

Ejemplo: Se define la siguiente sucesión por recurrencia por medio de la siguiente regla

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 5,$$
$$a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n \quad (n \geq 2);$$

Utilizando el teorema 1 siendo $a_0 = 1$,$a_1 = 5$,$s = -1$ y $r = 10$, tenemos que el termino analítico de la sucesión de es

$$a(n) = \frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{6}\right)^n + \frac{1}{2}\left(5-2\sqrt{6}\right)^n$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	9
a_n	1	5	49	485	4801	47525	4656965	46099201	456335045

Cuadro 2.4: Primeros términos de la sucesión.

Las demás demostraciones que realizaremos en este capitulo las realizaremos con el uso de la transformada Z, esto por que consideramos que esta nos permite realizar las demostraciones mas sencillas y cortas.

Teorema 1.2: Sea una sucesión definida por recurrencia de orden 2 y cuya regla de creación esta dada por:

$$a_0 = a_0,$$

$$a_1 = a_1,$$

$$a_{n+2} = ra_{n+1} + sa_n \quad (n \geq 2);$$

Con $a_0, a_1, r\ ,\ s \in \mathbb{R}$ y $r^2 + 4s = 0$. Entonces el termino analítico de esta sucesión esta dado por:

$$a_n = \left(\frac{r}{2}\right)^n \left(a_0 + \left(\frac{2a_1}{r} - a_0\right) n\right).$$

Demostración.

Supongamos que

$$\mathcal{L}\{a_n\} = A(z)$$

Tenemos que

$$a_{n+2} = ra_{n+1} + sa_n$$

Aplicando la transformada Z en ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{a_{n+2}\} &= \mathcal{L}\{ra_{n+1}\} + \mathcal{L}\{sa_n\} \\
\mathcal{L}\{a_{n+2}\} &= r\mathcal{L}\{a_{n+1}\} + s\mathcal{L}\{a_n\} \\
A(z)z^2 - a_0z^2 - a_1z &= r(A(z)z - a_0z) + sA(z) \\
A(z)(z^2 - rz - s) &= a_0z^2 + (a_1 - a_0r)z \\
A(z)\left(z - \frac{r}{2}\right)^2 &= a_0z^2 + (a_1 - a_0r)z \\
A(z) &= z\left(\frac{a_0z + (a_1 - a_0r)}{\left(z - \frac{r}{2}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

Reescribiendo por medio de fracciones parciales obtenemos

$$A(z) = a_0\left(\frac{z}{\left(z - \frac{z}{2}\right)}\right) + \frac{2a_1 - ra_0}{2}\left(\frac{z}{\left(z - \frac{z}{2}\right)^2}\right)$$

Aplicando la transformada Z inversa a ambos lados de la ecuación

$$\mathcal{L}^{-1}\left(A(z)\right) = a_0\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z}{\left(z - \frac{z}{2}\right)}\right) + \frac{2a_1 - ra_0}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z}{\left(z - \frac{z}{2}\right)^2}\right)$$

$$a_n = a_0\left(\frac{r}{2}\right)^n + \frac{2a_1 - ra_0}{2}\left(n\left(\frac{r}{2}\right)^{n-1}\right)$$
$$a_n = \left(\frac{r}{2}\right)^n\left(a_0 + \left(\frac{2a_1}{r} - a_0\right)n\right).$$

$\boxtimes$

Ejemplo : Se define la siguiente sucesión por recurrencia por medio de la siguiente regla

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 1,$$
$$a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n \quad (n \geq 2);$$

Utilizando el teorema 1.2 siendo $a_0 = 1$,$a_1 = 1$,$s = -1$ y $r = -2$, tenemos que el termino analítico de la sucesión de es

$$a_n = (-1)^n(1 - 2n)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	9
a_n	1	1	-3	5	-7	9	-11	13	-15

Cuadro 2.5: Primeros términos de la sucesión.

Ejemplo : Se define la siguiente sucesión por recurrencia por medio de la siguiente regla

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 2,$$
$$a_{n+2} = -4a_{n+1} - 4a_n \quad (n \geq 2);$$

Utilizando el teorema 1.2 siendo $a_0 = 1$,$a_1 = 2$,$s = -4$ y $r = -4$, tenemos que el termino analítico de la sucesión de es

$$a_n = (-2)^n(1 - 2n)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	9
a_n	1	2	-12	40	-112	288	-704	1664	-3840

Cuadro 2.6: Primeros términos de la sucesión.

Teorema 2: Sea una sucesión definida por recurrencia de orden uno, cuya regla de creación esta dada por:

$$a_0 = a_0,$$

$$a_{n+1} = ra_n + s \quad (n \geq 1);$$

Entonces el termino analítico de la sucesión esta dado por

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{1-r}\left(s + (a_0 - a_0 r - s) r^n\right) & \text{si } r \neq 1 \\ sn + a_0 & \text{si } r = 1 \end{cases}.$$

Demostración.

Si $r \neq 1$ Supongamos que

$$\mathcal{L}\{a_n\} = A(z)$$

Tenemos que

$$a_{n+1} = ra_n + s$$

Reescribiendo esta ecuación de la siguiente manera

$$a_{n+1} = ra_n + s\{1^n\}$$

Aplicando transformada Z a ambos lados de la ecuación

$$\mathcal{L}(a_{n+1}) = r\mathcal{L}(a_n) + s\mathcal{L}(\{1^n\})$$

$$A(z)z - a_0 z = rA(z) + s\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$A(z)(z-r) = z\left(a_0 + \frac{s}{z-1}\right)$$

$$A(z) = z\left(\frac{a_0}{z-r} + \frac{s}{(z-r)(z-1)}\right)$$

Reescribiendo por fracciones parciales obtenemos

$$A(z) = \frac{s}{1-r}\frac{z}{z-1} - \frac{s}{1-r}\frac{z}{z-r} + \frac{a_0 z}{z-r}$$

Aplicando transformada inversa en ambos lados de la ecuación

$$\mathcal{L}^{-1}\left(A(z)\right) = \frac{s}{1-r}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) - \frac{s}{1-r}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z}{z-r}\right) + a_0\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z}{z-r}\right)$$

$$a_n = \frac{s}{1-r}1^n - \frac{s}{1-r}r^n + a_0 r^n$$

$$a_n = \frac{1}{1-r}\left(s + (a_0 - a_0 r - s)\, r^n\right)$$

Si $r = 1$ Supongamos que

$$\mathcal{L}\{a_n\} = A(z)$$

Tenemos que

$$a_{n+1} = ra_n + s$$

Reescribiendo esta ecuación de la siguiente manera

$$a_{n+1} = a_n + s\{1^n\}$$

Aplicando transformada Z a ambos lados de la ecuación

$$\mathcal{L}(a_{n+1}) = \mathcal{L}(a_n) + s\mathcal{L}(\{1^n\})$$

$$A(z)z - a_0 z = A(z) + s\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$A(z)(z-1) = z\left(a_0 + \frac{s}{z-1}\right)$$

$$A(z) = a_0\left(\frac{z}{z-1}\right) + s\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)$$

Aplicando transformada inversa en ambos lados de la ecuación

$$\mathcal{L}^{-1}A(z) = a_0\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) + s\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)$$

$$a_n = sn + a_0 1^n$$

$$a_n = sn + a_0$$

$$\boxtimes$$

Ejemplo: Se define la siguiente sucesión por recurrencia por medio de la siguiente regla

$$a_0 = 2,$$

$$a_{n+1} = 3a_n + 5 \quad (n \geq 1);$$

Utilizando el teorema 2 siendo $a_0 = 2$,$s = 5$ y $r = 3$, tenemos que el termino analítico de la sucesión de es

$$a_n = -\frac{1}{2}\left(5 - 9(3)^n\right)$$

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{2} - \frac{5}{2}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	9
a_n	2	11	38	119	362	1091	3278	9839	29522

Cuadro 2.7: Primeros términos de la sucesión.

Ejemplo: Se define la siguiente sucesión por recurrencia por medio de la siguiente regla

$$a_0 = 3,$$

$$a_{n+1} = a_n - 2 \quad (n \geq 1);$$

Utilizando el teorema 2 siendo $a_0 = 3$,$s = -2$ y $r = 1$, tenemos que el termino analítico de la sucesión de es

$$a_n = -2n + 3$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	9
a_n	3	1	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13

Cuadro 2.8: Primeros términos de la sucesión.

2.1. Progresiones aritméticas y geométricas.

Una *progresión aritmética* es una sucesión de números tales que la diferencia de dos términos sucesivos cualesquiera de la secuencia es una constante, llamada diferencia de la progresión, diferencia o incluso distancia.
Por lo tanto podemos escribir una progresión aritmética de la siguiente manera

$$a_0$$

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Donde a_0 es el primer termino de la progresión, esto lo podemos reescribir así

$$a_0$$

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Corolario 1: El termino analítico de una progresión aritmética cuyo primer termino es a_0 y la diferencia de la progresión es d esta dado por

$$a_n = a_0 + nd \quad para \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Demostración: Aplicando el teorema 2 con $r = 1$ y $s = d$ tenemos que el termino analítico de una programación aritmética es

$$a_n = a_0 + nd \quad para \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Ejemplo: $\{1, 4, 7, 10, ...\}$ es una progresión aritmética cuyo primer termino es 1 y diferencia es 3, entonces el termino analítico de esta progresión aritmética es

$$a_n = 1 + 3n \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Una *progresión geométrica* es una sucesión en la que el elemento se obtiene multiplicando el elemento anterior por una constante denominada razón o factor de la progresión.
Por lo tanto tenemos que la progresión se puede escribir de la siguiente manera

$$a_0$$

$$a_{n+1} = ra_n$$

Corolario 2: El termino analítico de una progresión geométrica cuyo primer termino es a_0 y la razón de la progresión es r esta dado por

$$a_n = a_0 r^n \quad para \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Demostración: Aplicando el teorema 2 con $r \neq 1$ y $s = 0$ tenemos que el termino general de una programación aritmética es

$$a_n = a_0 r^n \quad para \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Ejemplo: $\{1, 2, 4, 8, 16, ...\}$ es una progresión aritmética cuyo primer termino es 1 y razón 2, entonces el termino analítico de esta progresión geométrica es

$$a_n = 2^n \quad n = 0, 1, 2, ...$$

2.2. Generalización del término analítico.

A continuación miraremos un resultado interesante correspondiente a sucesiones de orden superior:

- Para sucesiones de orden dos definidas de la siguiente manera $a_{n+2} = ra_{n+1} + sa_n$ tenemos que si $x^2 - rx - s = 0$ tiene dos soluciones diferentes, entonces el término analítico de la succión esta dada por

$$a(n) = \frac{a_0(r^2+4s) + (2a_1 - ra_0)\sqrt{r^2+4s}}{2(r^2+4s)} \left(\frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2}\right)^n + \frac{a_0(r^2+4s) - (2a_1 - ra_0)\sqrt{r^2+4s}}{2(r^2+4s)} \left(\frac{r-\sqrt{r^2+4s}}{2}\right)^n.$$

  que lo podemos escribir de la siguiente manera

$$a(n) = \left(\frac{a_0(\alpha_1 - r) + a_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\right)(\alpha_1^n) + \left(\frac{a_0(\alpha_2 - r) + a_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)(\alpha_2^n)$$

  Donde α_1 y α_2 son las raíces de $x^2 - rx - s = 0$.

- Para sucesiones de orden tres definidas de la siguiente manera $a_{n+3} = ra_{n+2} + sa_{n+1} + ma_n$ tenemos que si $x^3 - rx^2 - sx - m = 0$ tiene dos soluciones diferentes, entonces el termino analítico de la succión esta dada por(esto es fácil de comprobar)

$$a(n) = \left(\frac{a_0(\alpha_1^2 - r\alpha_1 - s) + a_1(\alpha_1 - r) + a_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}\right)(\alpha_1^n)$$
$$+ \left(\frac{a_0(\alpha_2^2 - r\alpha_2 - s) + a_1(\alpha_2 - r) + a_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}\right)(\alpha_2^n)$$
$$+ \left(\frac{a_0(\alpha_3^2 - r\alpha_3 - s) + a_1(\alpha_3 - r) + a_2}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}\right)(\alpha_3^n)$$

  Donde α_1, α_2 y α_3 son las raíces de $x^3 - rx^2 - sx - m = 0$.

- Para sucesiones de orden cuatro definidas de la siguiente manera $a_{n+4} = ra_{n+3} + sa_{n+2} + ma_{n+1} + la_n$ tenemos que si $x^4 - rx^3 - sx^2 - mx - l = 0$ tiene dos soluciones diferentes, entonces el termino analítico de la sucesión esta dada por

$$a(n) = \left(\frac{a_0(\alpha_1^3 - r\alpha_1^2 - s\alpha_1 - m) + a_1(\alpha_1^2 - r\alpha_1 - s) + a_2(\alpha_1 - r) + a_3}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}\right)(\alpha_1^n)$$
$$+ \left(\frac{a_0(\alpha_2^3 - r\alpha_2^2 - s\alpha_2 - m) + a_1(\alpha_2^2 - r\alpha_2 - s) + a_2(\alpha_2 - r) + a_3}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}\right)(\alpha_2^n)$$
$$+ \left(\frac{a_0(\alpha_3^3 - r\alpha_3^2 - s\alpha_3 - m) + a_1(\alpha_3^2 - r\alpha_3 - s) + a_2(\alpha_2 - r) + a_3}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)}\right)(\alpha_3^n)$$
$$+ \left(\frac{a_0(\alpha_4^3 - r\alpha_4^2 - s\alpha_4 - m) + a_1(\alpha_4^2 - r\alpha_4 - s) + a_2(\alpha_4 - r) + a_3}{(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3)}\right)(\alpha_4^n)$$

  Donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 son las raíces de $x^4 - rx^3 - sx^2 - mx - l = 0$.

Como se observa, para las sucesiones de orden dos, tres y cuatro con cierta condición, los términos analíticos tienen un comportamiento común y predecible. A continuación plantearemos un resultado para este tipo de sucesiones de cualquier orden mayor a uno.

Conjetura: Sea una sucesión definida por recurrencia de orden p y cuya regla de creación esta dada por

$$\begin{cases} a_0 = a_0 \\ \cdots \\ a_{p-1} = a_{p-1} \\ a_{n+p} = r_1 a_{n+p-1} + r_2 a_{n+p-2} \cdots + r_{p-1} a_{n+1} + r_p a_n \end{cases}$$

Tal que $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq ... \neq \alpha_p$ son las p soluciones de $z^p - r_1 z^{p-1} - ... - r_{p-1}z - r_p = 0$. Entonces el termino analítico de esta sucesión esta dado por

$$a_n = A_1(\alpha_1)^n + A_2(\alpha_2)^n + ... + A_p(\alpha_p)^n$$

Donde

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^{p} a_{i-1}((a_n)^{p-i} - \sum_{k=1}^{p-i} r_k(\alpha_n)^{p-i-k})}{(\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_2)(\alpha_n - \alpha_3)...(\alpha_n - \alpha_p)}{}^{2}.$$

No desarrollaremos la demostración de la anterior conjetura, porque consideramos que no es de relevancia para nuestro trabajo, de esta forma, consideramos el estudio de la trasformada Z y el término analítico de una sucesión definida por recurrencia, como un tema de gran interés para seguir desarrollándolo en futuros trabajos.
Para finalizar este capitulo realizaremos ejemplos que ilustren la conjetura anteriormente planteada.

Ejemplo: Sea la siguiente sucesión de orden 3 cuya regla de creación es

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_{n+3} = -2a_{n+2} + a_{n+1} + 2a_n$$

Tenemos que $z^3 + 2z^2 - z - 2 = 0$ tiene tres raíces diferentes que son $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$ y $\alpha_3 = -2$, por lo tanto podemos aplicar el teorema anterior con $r_1 = -2, r_2 = 1$ y $r_3 = 2$, entonces el termino analítico de esta sucesión es

$$a_n = A_1(1)^n + A_2(-1)^n + A_3(-2)^n$$

Donde

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^{3} a_{i-1}(1 - \sum_{k=1}^{3-i}(r_k))}{(1-(-1))(1-(-2))} = \frac{5}{6}$$

$$A_2 = \frac{\sum_{i=1}^{3} a_{i-1}((-1)^{3-i} - \sum_{k=1}^{3-i}(r_k(-1)^{3-i-k}))}{(-1-(1))(-1-(-2))} = -\frac{3}{2}$$

$$A_3 = \frac{\sum_{i=1}^{3} a_{i-1}((-2)^{3-i} - \sum_{k=1}^{3-i}(r_k(-2)^{3-i-k}))}{(-2-(1))(-2-(-1))} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto el termino analítico de esta sucesión es

$$a_n = \frac{5}{6} - \frac{3}{2}(-1)^n + \frac{2}{3}(-2)^n$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	9
a_n	0	1	2	-3	10	-19	42	-83	179

Cuadro 2.9: Primeros términos de la sucesión.

Ejemplo: Sea la siguiente sucesión de orden 4 cuya regla de creación es

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2 \quad y \quad a_3 = 3$$

$$a_{n+4} = 10a_{n+3} - 35a_{n+2} + 50a_{n+1} - 24a_n$$

Tenemos que $z^4 - 10z^3 + 35z^2 - 50z + 24 = 0$ tiene cuatro raíces diferentes que son $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3$ y $\alpha_4 = 4$, por lo tanto podemos aplicar el teorema anterior con $r_1 = 10, r_2 = -35, r_3 = 50$ y $r_4 = -24$, entonces el termino analítico de esta sucesión es

$$a_n = A_1(1)^n + A_2(2)^n + A_3(3)^n + A_4(4)^n$$

Donde

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^{4} a_{i-1}(1 - \sum_{k=1}^{4-i}(r_k))}{(1-(2))(1-(3))(1-(4))} = -\frac{11}{6}$$

$$A_2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} a_{i-1}((2)^{4-i} - \sum_{k=1}^{4-i}(r_k(2)^{4-i-k}))}{(2-(1))(2-(3))(2-(4))} = 3$$

$$A_3 = \frac{\sum_{i=1}^{4} a_{i-1}((3)^{4-i} - \sum_{k=1}^{4-i}(r_k(3)^{4-i-k}))}{(3-(1))(3i-(2))(3-(4)} = -\frac{3}{2}$$

$$A_4 = \frac{\sum_{i=1}^{4} a_{i-1}((4)^{4-i} - \sum_{k=1}^{4-i}(r_k(4)^{4-i-k}))}{(4-(1))(4-(2))(4-(3)i))} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto el termino analítico de la sucesión es

$$a_n = -\frac{11}{6} + 3(2)^n - \frac{3}{2}(3)^n + \frac{1}{3}(4)^n$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	9
a_n	0	1	2	3	10	71	462	2563	12770

Cuadro 2.10: Primeros términos de la sucesión.

[2]Tener encuenta por ejemplo que si $n = 3$,entonces el factor $(\alpha_3 - \alpha_3)$ no se debe tener en cuenta.

Ejemplo: Sea la siguiente sucesión de orden 2 cuya regla de creación es

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+4} = 2a_{n+1} + 2a_n$$

Tenemos que $z^2 - 2z - 2 = 0$ tiene dos raíces diferentes que son $\alpha_1 = 1 + \sqrt{3}$ y $\alpha_2 = 1 - \sqrt{3}$, por lo tanto podemos aplicar el teorema anterior con $r_1 = 2$ y $r_2 = 2$, entonces el termino analítico de esta sucesión es

$$a_n = A_1(1 + \sqrt{3})^n + A_2(1 - \sqrt{3})^n$$

Donde

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^{2}((1+\sqrt{3})^{2-i} - \sum_{k=1}^{2-i}(r_k(1+\sqrt{3})^n)}{(1+\sqrt{3}-(1-\sqrt{3}))} = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \frac{\sum_{i=1}^{2}((1-\sqrt{3})^{2-i} - \sum_{k=1}^{2-i}(r_k(1-\sqrt{3})^n)}{(1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3}))} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto el termino analítico de la sucesión es

$$a_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})^n \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})^n$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n\right)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	9
a_n	1	1	4	10	28	84	208	568	1552

Cuadro 2.11: Primeros términos de la sucesión.

Capítulo 3

Termino analítico de las soluciones a las ecuaciones de Pell- Fermat y su aplicación a las unidades.

Como se mencionó antes, durante toda la historia las ecuaciones de Pell-Fermat han suscitado un gran interés en los matemáticos, de tal forma que personajes de la talla de Arquímedes (287-212 a.C.) , Diofanto de Alejandría (sobre 250 d.C.), Brahmagupta (598-665), Pierre de Fermat (1601-1665), Leonhard Euler (1707-1783) , Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), entre otros las estudiaron parcialmente. Fue Lagrange, quien utilizando las ideas de todos estos matemáticos y con ayuda de las fracciones continuas, dio uno de los métodos que se aplica en la actualidad para hallar sus soluciones.

Ejemplo 1: $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, las soluciones de esta ecuación están dadas por las convergentes de la fracción continua correspondiente al número $\sqrt{2}$ como veremos a continuación:
Dado que $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$ tenemos que

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
p_n	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	...
q_n	1	2	5	12	29	70	169	408	985	...
$p_n^2 - 2q_n^2 = \pm 1$	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...

Cuadro 3.1: Soluciones de la ecuación $x^2 - 2y^2 = \pm 1$

Donde p_n es el numerador y q_n el denominador de la enésima convergente de la fracción continua correspondiente a $\sqrt{2}$. También tenemos que $(1, 0)$ es solución *(conocida como la solución trivial)* por lo tanto

$$x_n = \{1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, ...\}$$

$$y_n = \{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, ...\}$$

Como se puede ver los x_n describen una la siguiente sucesión recurrente de orden 2

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$$

Utilizando el teorema 1 del capitulo anterior, esto para hallar el termino analítico de esta sucesión obtenemos

$$x_n = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

De igual manera los q_n describen una la siguiente sucesión recurrente de orden 2

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = 1$$

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_n$$

Utilizando el teorema 1 del capitulo anterior, esto para hallar el termino analítico de esta sucesión obtenemos

$$y_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

Por lo tanto las parejas de soluciones de la ecuación $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ están descritas por:

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n \\ y_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^n \end{cases}$$

Para $n = 0, 1, 2, ...$

A continuación comprobaremos que tanto x_n como y_n satisfacen la ecuación de Pell; si remplazamos obtenemos

$$\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} + 2\left(1+\sqrt{2}\right)^n\left(1-\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} - 2\left(1+\sqrt{2}\right)^n\left(1-\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}\right)$$

$$= \left(1+\sqrt{2}\right)^n\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

$$= (-1)^n$$

Ejemplo 2: $x^2 - 3y^2 = \pm 1$, las soluciones de esta ecuación están dadas por las convergentes pares de la fracción continua correspondiente al número $\sqrt{3}$ como veremos a continuación:
Dado que $\sqrt{3} = [1; \overline{12}]$ tenemos que

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
p_n	1	2	5	7	19	26	71	97	265	...
q_n	1	1	3	4	11	15	41	56	153	...
$p_n^2 - 3q_n^2 = \pm 1$	-2	1	-2	1	-2	1	-2	1	-2	...

Cuadro 3.2: Soluciones de la ecuación $x^2 - 3y^2 = \pm 1$

Donde p_n es el numerador y q_n el denominador de la enésima convergente de la fracción continua correspondiente a $\sqrt{3}$. También tenemos que $(1, 0)$ es solución *(conocida como la solución trivial)* por lo tanto

$$x_n = \{1, 2, 7, 26, 97, 362, 1351, 5042, 18817, 70226, ...\}$$

$$y_n = \{0, 1, 4, 15, 56, 209, 780, 2911, 10864, 40545, ...\}$$

Como se puede ver los p_n describen una la siguiente sucesión recurrente de orden 2

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 2$$

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$$

Utilizando el teorema 1 del capitulo anterior, esto para hallar el termino analítico de esta sucesión obtenemos

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right)$$

De igual manera los q_n describen una la siguiente sucesión recurrente de orden 2

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = 1$$

$$y_{n+2} = 4y_{n+1} + y_n$$

Utilizando el teorema 1 del capitulo anterior, esto para hallar el termino analítico de esta sucesión obtenemos

$$y_n = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\left(2 + \sqrt{3}\right)^n - \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right)$$

Por lo tanto las parejas de soluciones de la ecuación $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ están descritas por:

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right) \\ y_n = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right) \end{cases}$$

Para $n = 0, 1, 2, ...$

A continuación comprobaremos que tanto x_n como y_n satisfacen la ecuación de Pell; si remplazamos obtenemos

$$\left(\frac{1}{2}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)\right)^2 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n} + 2\left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2n}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n} - 2\left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2n}\right)$$

$$= \left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n$$

$$= (1)^n$$

$$= 1$$

Como se vio en el marco teórico todas las soluciones positivas de la ecuación de Pell-Fermat vienen dadas por las convergentes C_{rn} donde r es el periodo de la fracción continua asociada, por ende como al momento de plantear la sucesión se estan caracterizando estas convergentes, entonces los términos analíticos descritos anteriormente generalizan todas las soluciones positivas de estas ecuaciones.

Ejemplo 3: $x^2 - 61y^2 = \pm 1$, sabemos que $\sqrt{61} = [7; \overline{1,4,3,1,2,2,1,3,4,1,14}]$ cuyo periodo es 11, por lo tanto las soluciones de la ecuación están dadas por las convergentes c_{11n} con $n > 0$, entonces las soluciones de la ecuación tanto para x como para y están dadas por:

$$x_n = \{1, 29718, 1766319049, 104982939026082, ...\}$$

$$y_n = \{0, 3805, 226153980, 13441687959085, ...\}$$

Ambas sucesiones están descritas por la misma regla de recurrencia pero con distintos valores iniciales:

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 29718$$

$$x_{n+2} = 59436x_{n+1} + x_n$$

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = 3805$$

$$y_{n+2} = 59436y_{n+1} + y_n$$

Aplicando en teorema 1 para hallar el termino analítico de estas dos sucesiones obtenemos:

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2}\left(\left(29718 + 3805\sqrt{61}\right)^n + \left(29718 - 3805\sqrt{3}\right)^n\right) \\ y_n = \frac{\sqrt{61}}{122}\left(\left(29718 + 3805\sqrt{61}\right)^n + \left(29718 - 3805\sqrt{3}\right)^n\right) \end{cases}$$

Para $n = 0, 1, 2, ...$

Comprobaremos que tanto x_n como y_n satisfacen la ecuación de Pell; si remplazamos obtenemos

$$\left(\frac{1}{2}\left(\left(29718 + 3805\sqrt{61}\right)^n + \left(29718 - 3805\sqrt{3}\right)^n\right)\right)^2$$

$$-61\left(\frac{\sqrt{61}}{122}\left(\left(29718 + 3805\sqrt{61}\right)^n + \left(29718 - 3805\sqrt{3}\right)^n\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(\left(29718 + 3805\sqrt{61}\right)^{2n} + 2\left(29718 + 3805\sqrt{61}\right)^n\left(29718 - 3805\sqrt{61}\right)^n$$

$$+\left(29718 - 3805\sqrt{61}\right)^{2n}) - \frac{1}{4}(\left(29718 + 3805\sqrt{61}\right)^{2n}$$

$$-2\left(29718 + 3805\sqrt{61}\right)^n\left(29718 - 3805\sqrt{61}\right)^n + \left(29718 - 3805\sqrt{61}\right)^{2n})$$

$$= \left(29718 + 3805\sqrt{61}\right)^n\left(29718 - 3805\sqrt{61}\right)^n$$

$$= (-1)^n$$

A continuación se presenta una tabla en la que se muestran las reglas de recurrencia por las cuales se definen las soluciones de algunas ecuaciones de Pell-Fermat

Ecuación	**Fracción c.**	**Soluciones x**	**Soluciones y**	**regla**
$x^2-2y^2=\pm1$	$\sqrt{2}=[1,\overline{2}]$	$\{1,1,3,7,17...\}$	$\{0,1,2,5,12,...\}$	$a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$
$x^2-3y^2=\pm1$	$\sqrt{3}=[1,\overline{1,2}]$	$\{1,2,7,26...\}$	$\{0,1,4,5,15,...\}$	$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$
$x^2-5y^2=\pm1$	$\sqrt{5}=[2,\overline{4}]$	$\{1,2,9,38...\}$	$\{0,1,4,17,...\}$	$a_{n+2}=4a_{n+1}+a_n$
$x^2-6y^2=\pm1$	$\sqrt{6}=[2,\overline{2,4}]$	$\{1,5,49,485...\}$	$\{0,2,20,198,...\}$	$a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$
$x^2-7y^2=\pm1$	$\sqrt{7}=[2,\overline{1,1,1,4}]$	$\{1,8,127,2024...\}$	$\{0,3,48,765...\}$	$a_{n+2}=16a_{n+1}-a_n$
$x^2-8y^2=\pm1$	$\sqrt{8}=[2,\overline{1,4}]$	$\{1,3,17,99...\}$	$\{0,1,6,35...\}$	$a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$
$x^2-10y^2=\pm1$	$\sqrt{10}=[3,\overline{6}]$	$\{1,3,19,117...\}$	$\{0,1,6,37...\}$	$a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n$
$x^2-11y^2=\pm1$	$\sqrt{11}=[3,\overline{3,6}]$	$\{1,10,199,3970...\}$	$\{0,3,60,1197...\}$	$a_{n+2}=20a_{n+1}-a_n$
$x^2-12y^2=\pm1$	$\sqrt{12}=[3,\overline{2,6}]$	$\{1,7,97,1351...\}$	$\{0,2,28,390...\}$	$a_{n+2}=14a_{n+1}-a_n$
$x^2-13y^2=\pm1$	$\sqrt{13}=[3,\overline{1,1,1,1,6}]$	$\{1,18,649,23382...\}$	$\{0,5,180,6485...\}$	$a_{n+2}=32a_{n+1}+a_n$
$x^2-14y^2=\pm1$	$\sqrt{14}=[3,\overline{1,2,1,6}]$	$\{1,15,499,13445...\}$	$\{0,4,120,3596...\}$	$a_{n+2}=30a_{n+1}-a_n$
$x^2-15y^2=\pm1$	$\sqrt{15}=[3,\overline{1,6}]$	$\{1,4,31,244...\}$	$\{0,1,8,63...\}$	$a_{n+2}=8a_{n+1}-a_n$
$x^2-17y^2=\pm1$	$\sqrt{17}=[4,\overline{8}]$	$\{1,4,33,268...\}$	$\{0,1,8,65...\}$	$a_{n+2}=8a_{n+1}+a_n$
$x^2-18y^2=\pm1$	$\sqrt{18}=[4,\overline{4,8}]$	$\{1,17,577,19601...\}$	$\{0,4,136,4620...\}$	$a_{n+2}=34a_{n+1}-a_n$
$x^2-19y^2=\pm1$	$\sqrt{19}=[4,\overline{2,1,3,1,2,8}]$	$\{1,170,57799...\}$	$\{0,39,13260...\}$	$a_{n+2}=340a_{n+1}-a_n$
$x^2-20y^2=\pm1$	$\sqrt{20}=[4,\overline{2,8}]$	$\{1,9,161,2889...\}$	$\{0,2,36,646...\}$	$a_{n+2}=18a_{n+1}-a_n$
$x^2-21y^2=\pm1$	$\sqrt{21}=[4,\overline{1,1,2,1,1,8}]$	$\{1,55,6049...\}$	$\{0,12,1320...\}$	$a_{n+2}=110a_{n+1}-a_n$
$x^2-22y^2=\pm1$	$\sqrt{22}=[4,\overline{1,2,4,2,1,8}]$	$\{1,197,77617...\}$	$\{0,42,16548...\}$	$a_{n+2}=394a_{n+1}-a_n$

Cuadro 3.3: Sucesiones de soluciones de la ecuación $x^2-dy^2=\pm1$

Como se puede evidenciar en la tabla anterior, las sucesiones de la soluciones de la ecuación de Pell- Fermat se pueden describir por medio de un sucesión recurrente de orden dos de la forma:

1. Si el periodo de la fracción continua es r y este es par, entonces las sucesiones que describen las parejas de soluciones de la ecuación son:

$$x_n=\begin{cases} 1 \quad si \quad n=0 \\ p_r \quad si \quad n=1 \\ 2p_rx_{n-1}-x_{n-2} \quad si \quad n\geq 2 \end{cases}$$

$$y_n=\begin{cases} 0 \quad si \quad n=0 \\ q_r \quad si \quad n=1 \\ 2p_ry_{n-1}-y_{n-2} \quad si \quad n\geq 2 \end{cases}$$

Donde p_r y q_r son el numerador y el denominador de la convergente r de la fracción continua asociada a la ecuación respectivamente.

2. Si el periodo de la fracción continua es r y este es impar, entonces las sucesiones que describen las parejas de soluciones de la ecuación son:

$$x_n=\begin{cases} 1 \quad si \quad n=0 \\ p_r \quad si \quad n=1 \\ 2p_rx_{n-1}+x_{n-2} \quad si \quad n\geq 2 \end{cases}$$

$$y_n=\begin{cases} 0 \quad si \quad n=0 \\ q_r \quad si \quad n=1 \\ 2p_ry_{n-1}+y_{n-2} \quad si \quad n\geq 2 \end{cases}$$

Donde p_r y q_r son el numerado y el denominador de la convergente r de la fracción continua asociada a la ecuación respectivamente.
Teorema 1: Dada la ecuación de Pell-Fermat $x^2 - dy^2 = \pm 1$, si $\sqrt{d} = [a_1, \overline{a_0}]$, entonces las soluciones de esta ecuación están dadas por

$$x_n = \begin{cases} 1 \quad si \quad n = 0 \\ a_1 \quad si \quad n = 1 \\ 2a_1 x_{n-1} + x_{n-2} \quad si \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} 0 \quad si \quad n = 0 \\ 1 \quad si \quad n = 1 \\ 2a_1 y_{n-1} + y_{n-2} \quad si \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Demostración: Como $\sqrt{d}$ es un número irracional y el periodo de su desarrollo fraccionario continuo es uno, entonces

$$\sqrt{d} = [a_1, \overline{2a_1}]$$

Y las soluciones positivas de la ecuación de Pell- Fermat $x^2 - dy^2 = \pm 1$ están dadas por todas las convergentes de la fracción continua.
Como tenemos que las convergentes de una fracción continua simple esta dada por

$$\begin{array}{cc} p_0 = 1 & q_0 = 0 \\ p_1 = a_1 & q_1 = 1 \\ p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} & q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad para \quad n \geq 2 \end{array}$$

Como $a_n = 2a_1$ para todo $n \geq 2$ entonces

$$p_n = 2a_1 p_{n-1} + p_{n-2} \qquad q_n = a_1 q_{n-1} + q_{n-2} \quad para \quad n \geq 2$$

Por lo tanto las soluciones positivas a la enunciación de Pell-Fermat cuya fracción continua asociada tiene periodo uno esta dada por

$$x_n = \begin{cases} 1 \quad si \quad n = 0 \\ a_1 \quad si \quad n = 1 \\ 2a_1 x_{n-1} + x_{n-2} \quad si \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} 0 \quad si \quad n = 0 \\ 1 \quad si \quad n = 1 \\ 2a_1 y_{n-1} + y_{n-2} \quad si \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$\boxtimes$

Teorema 1.2: Dada la ecuación de Pell-Fermat $x^2 - dy^2 = \pm 1$, si $\sqrt{d} = [a_1, \overline{a_2, a_3}]$, entonces las soluciones de esta ecuación están dadas por

$$x_n = \begin{cases} 1 & si \quad n = 0 \\ a_1 a_2 + 1 & si \quad n = 1 \\ 2(a_1 a_2 + 1)x_{n-1} - x_{n-2} & si \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} 0 & si \quad n = 0 \\ a_2 & si \quad n = 1 \\ 2(a_1 a_2 + 1)y_{n-1} - y_{n-2} & si \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Demostración: Como $\sqrt{d}$ es un número irracional y el periodo de su desarrollo fraccionario continuo es dos, entonces

$$\sqrt{d} = [a_1, \overline{a_2, 2a_1}]$$

Y las soluciones positivas de la ecuación de Pell- Fermat $x^2 - dy^2 = \pm 1$ están dadas por todas las convergentes pares de la fracción continua.
Como tenemos que las convergentes de una fracción continua simple esta dada por

$$p_0 = 1 \qquad q_0 = 0$$
$$p_1 = a_0 \qquad q_1 = 1$$
$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad para \quad n \geq 2$$

Si $n = 2$ entonces $p(2) = a_1 a_2 + 1$ y $q_2 = a_1$. Ahora si n es par entonces $a_n = a_2$ y

$$p_n = a_2 p_{n-1} + p_{n-2}$$

Como n es par $n - 1$ es impar por lo tanto $a_{n-1} = 2a_1$, entonces

$$p_n = a_2(2a_1 p_{n-2} + p_{n-3}) + p_{n-2}$$

$$p_n = 2a_1 a_2 p_{n-2} + a_2 p_{n-3} + 2p_{n-2} - p_{n-2}$$
$$p_n = 2(a_1 a_2 + 1)p_{n-2} + a_2 p_{n-3} - p_{n-2}$$

Como $n - 2$ es par, entonces

$$p_n = 2(a_1 a_2 + 1)p_{n-2} + a_2 p_{n-3} - (a_2 p_{n-3} + p_{n-4})$$

$$p_n = 2(a_1 a_2 + 1)p_{n-2} - p_{n-4})$$

Lo que demuestra que los numeradores de las convergentes pares del desarrollo continuo definen la sucesión recurrente, de manera análoga se llega al mismo resultado para los denominares de las convergentes pares del desarrollo continuo. Por lo tanto las soluciones positivas a la enunciación de Pell-Fermat cuya fracción continua asociada tiene periodo dos esta dada por

$$x_n = \begin{cases} 1 \quad si \quad n=0 \\ a_1a_2+1 \quad si \quad n=1 \\ 2(a_1a_2+1)x_{n-1}-x_{n-2} \quad si \quad n\geq 2 \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} 0 \quad si \quad n=0 \\ a_2 \quad si \quad n=1 \\ 2(a_1a_2+1)y_{n-1}-y_{n-2} \quad si \quad n\geq 2 \end{cases}$$

$\boxtimes$

Del cuadro 3.3 y de los teoremas 1.1. y 1.2 de este capitulo, planteamos el siguiente resultado .

Teorema 2.: Dada la ecuación de Pell-Fermat $x^2-dy^2=\pm 1$, si $\sqrt{d}=[a_1,\overline{a_2,a_3,...,a_r,2a_1}]$, entonces las soluciones de esta ecuación están dadas por

$$x_n = \begin{cases} 1 \quad si \quad n=0 \\ p_r \quad si \quad n=1 \\ 2p_rx_{n-1}+(-1)^{r+1}x_{n-2} \quad si \quad n\geq 2 \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} 0 \quad si \quad n=0 \\ q_r \quad si \quad n=1 \\ 2p_ry_{n-1}+(-1)^{r+1}y_{n-2} \quad si \quad n\geq 2 \end{cases}$$

Donde p_r y q_r son el numerador y el denominador de la convergente r de la fracción continua asociada a la ecuación respectivamente.

Teorema 2:

- Si r es par, entonces puedo calcular el termino analítico de las sucesiones descritas, así obteniendo:

$$x(n)=\frac{1}{2}\left(\left(p_r+\sqrt{{p_r}^2-1}\right)^n+\left(p_r-\sqrt{p_r^2-1}\right)^n\right)$$

$$y(n)=\frac{q_r}{2\sqrt{p_r^2-1}}\left(\left(p_r+\sqrt{{p_r}^2-1}\right)^n-\left(p_r-\sqrt{p_r^2-1}\right)^n\right)$$

Como p_r y q_r son soluciones de la ecuación, entonces

$$p_r^2-dq_r^2=1$$

$$p_r^2 - 1 = d_q r$$

Por lo tanto puedo reescribir $X(n)$ y $Y(n)$ de la siguiente manera

$$p_{rn} = X(n) = \frac{1}{2}\left((p_r + \sqrt{d}q_r)^n + (p_r - \sqrt{d}q_r)^n\right)$$

$$q_{rn} = Y(n) = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left((p_r + \sqrt{d}q_r)^n - (p_r - \sqrt{d}q_r)^n\right)$$

Si remplazamos $X(n)$ y $Y(n)$ en la ecuación de Pell-Fermat, entonces

$$X_n^2 - dY_n^2$$

$$= \frac{1}{4}\left((p_r + \sqrt{d}q_r)^{2n} + 2(p_r + \sqrt{d}q_r)^n(p_r - \sqrt{d}q_r)^n + (p_r - \sqrt{d}q_r)^{2n}\right)$$

$$-d\left(\frac{1}{4d}\left((p_r + \sqrt{d}q_r)^{2n} - 2(p_r + \sqrt{d}q_r)^n(p_r - \sqrt{d}q_r)^n + (p_r - \sqrt{d}q_r)^{2n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(4(p_r + \sqrt{d}q_r)^n(p_r - \sqrt{d}q_r)^n\right)$$

$$= \left(p_r^2 - dq_r\right)^n$$

$$= 1^n$$

$$= 1$$

Por lo tanto $X(n)$y $Y(n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ son soluciones de la ecuación de Pell-Fermat y por ende son convergentes de la fracción continua de $\sqrt{d}$.

- Si r es impar,, entonces puedo calcular el termino analítico de las sucesiones descritas, así obteniendo:

$$x(n) = \frac{1}{2}\left(\left(p_r + \sqrt{{p_r}^2 + 1}\right)^n + \left(p_r - \sqrt{p_r^2 + 1}\right)^n\right)$$

$$y(n) = \frac{q_r}{2\sqrt{p_r^2 + 1}}\left(\left(p_r + \sqrt{{p_r}^2 + 1}\right)^n - \left(p_r - \sqrt{p_r^2 + 1}\right)^n\right)$$

Como p_r y q_r son soluciones de la ecuación, entonces

$$p_r^2 - dq_r^2 = -1$$

$$p_r^2 + 1 = d_q r$$

Por lo tanto puedo reescribir $X(n)$ y $Y(n)$ de la siguiente manera

$$p_{rn} = X(n) = \frac{1}{2}\left((p_r + \sqrt{d}q_r)^n + (p_r - \sqrt{d}q_r)^n\right)$$

$$q_{rn} = Y(n) = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left((p_r + \sqrt{d}q_r)^n - (p_r - \sqrt{d}q_r)^n\right)$$

Si remplazamos $X(n)$ y $Y(n)$ en la ecuación de Pell-Fermat, entonces

$$X_n^2 - dY_n^2$$

$$= \frac{1}{4}\left((p_r + \sqrt{d}q_r)^{2n} + 2(p_r + \sqrt{d}q_r)^n(p_r - \sqrt{d}q_r)^n + (p_r - \sqrt{d}q_r)^{2n}\right)$$

$$-d\left(\frac{1}{4d}\left((p_r + \sqrt{d}q_r)^{2n} - 2(p_r + \sqrt{d}q_r)^n(p_r - \sqrt{d}q_r)^n + (p_r - \sqrt{d}q_r)^{2n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(4(p_r + \sqrt{d}q_r)^n(p_r - \sqrt{d}q_r)^n\right)$$

$$= \left(p_r^2 - dq_r\right)^n$$

$$= (-1)^n$$

Por lo tanto $X(n)$y $Y(n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ son soluciones de la ecuación de Pell-Fermat y por ende son convergentes de la fracción continua de $\sqrt{d}$.

Teorema 3: Dada la ecuación de Pell-Fermat $x^2 - dy^2 = \pm 1$, si $\sqrt{d} = [a_1, \overline{a_2, a_3, ..., a_r, 2a_1}]$ y $C_r = \frac{p_r}{q_r}$, entonces el termino analítico de las soluciones de esta ecuación están dadas por

$$x(n) = \frac{1}{2}\left(\left(p_r + \sqrt{{p_r}^2 - (-1)^r}\right)^n + \left(p_r - \sqrt{p_r^2 - (-1)^r}\right)^n\right)$$

$$y(n) = \frac{q_r}{2\sqrt{p_r^2 - (-1)^r}}\left(\left(p_r + \sqrt{{p_r}^2 - (-1)^r}\right)^n - \left(p_r - \sqrt{p_r^2 - (-1)^r}\right)^n\right)$$

Demostración: Por el teorema anterior tenemos que

$$x_n = \begin{cases} 1 \quad si \quad n = 0 \\ p_r \quad si \quad n = 1 \\ 2p_r x_{n-1} + (-1)^{r+1} x_{n-2} \quad si \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Utilizando el teorema 1 del capitulo dos, obtenemos que

$$x(n) = \frac{1}{2}\left(\left(p_r + \sqrt{{p_r}^2 + (-1)^{r+1}}\right)^n + \left(p_r - \sqrt{{p_r}^2 + (-1)^{r+1}}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(p_r + \sqrt{p_r^2 - (-1)^r}\right)^n + \left(p_r - \sqrt{p_r^2 - (-1)^r}\right)^n\right)$$

De manera análoga se tiene

$$y_n = \begin{cases} 0 \quad si \quad n = 0 \\ q_r \quad si \quad n = 1 \\ 2p_r y_{n-1} + (-1)^{r+1} y_{n-2} \quad si \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Utilizando el teorema 1 del capitulo dos, obtenemos que

$$y(n) = \frac{q_r}{2\sqrt{p_r^2 - (-1)^r}} \left(\left(p_r + \sqrt{{p_r}^2 - (-1)^r} \right)^n - \left(p_r - \sqrt{p_r^2 - (-1)^r} \right)^n \right)$$

$$\boxtimes$$

Ejemplo: Para la ecuación de Pell $x^2 - 11y^2 = \pm 1$ ¿ cuáles son los términos enésimos de las soluciones?
Como $\sqrt{11} = [3, \overline{3, 6}]$, entonces $r = 2$ y $c_2 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$, aplicando el teorema anterior con

$$r = 2$$

$$p_r = 10$$

$$q_r = 3$$

$$x(n) = \frac{1}{2} \left(\left(10 + 3\sqrt{11} \right)^n + \left(10 - 3\sqrt{11} \right)^n \right)$$

$$y(n) = \frac{\sqrt{11}}{22} \left(\left(10 + 3\sqrt{11} \right)^n - \left(10 - 3\sqrt{11} \right)^n \right)$$

Ejemplo: Para la ecuación de Pell $x^2 - 17y^2 = \pm 1$ ¿ cuáles son los términos enésimos de las soluciones?
Como $\sqrt{17} = [4, \overline{8}]$, entonces $r = 1$ y $c_2 = 4$, aplicando el teorema anterior con

$$r = 1$$

$$p_r = 4$$

$$q_r = 1$$

$$x(n) = \frac{1}{2} \left(\left(4 + \sqrt{17} \right)^n + \left(4 - \sqrt{17} \right)^n \right)$$

$$y(n) = \frac{\sqrt{17}}{34} \left(\left(4 + \sqrt{17} \right)^n - \left(4 - \sqrt{17} \right)^n \right)$$

3.1. Unidades en los números de la forma $a + bk$.

Sea el siguiente conjunto $\beta = \{(a + bk) | a \quad y \quad b \in \mathbb{Z} \wedge k^2 = 2\}$, sobre el definimos las siguientes operaciones:

$$(a + bk) \oplus (c + dk) = (a + c) + (b + d)k$$

$$(a + bk) \otimes (c + dk) = (ac + 2ad) + (ad + bc)k$$

Es fácil probar que $(\beta, \oplus, \otimes)$ forman un anillo conmutativo con modulo, que resulta ser $1 + 0k$.

Si suponemos que $a + bk$ es una unidad de esta estructura, entonces debe cumplir que

$$(a + bk)|(1 + 0k)$$

Ahora si $(a + bk)|(1 + 0k)$ existe un $(x + yk)$ tal que

$$(a + bk) \otimes (x + yk) = (1 + 0k)$$

Que al igualar componente a componente se encuentra que:

$$x = \frac{a}{a^2 - 2b^2} \qquad y = -\frac{b}{a^2 - 2b^2}$$

Teniendo en cuenta que tanto x como y deben ser enteros

$$x^2 = \frac{a^2}{(a^2 - 2b^2)^2} \qquad y^2 = \frac{b^2}{(a^2 - 2b^2)^2}$$

también deben ser enteros, entonces

$$x^2 - 2y^2 = \frac{a^2}{(a^2 - 2b^2)^2} - 2\frac{b^2}{(a^2 - 2b^2)^2}$$

también es entero, por lo tanto

$$= \frac{a^2 - 2b^2}{(a^2 - 2b^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2 - 2b^2}$$

debe ser entero y en consecuencia

$$a^2 - 2b^2 = \pm 1$$

Que corresponde a una ecuación de Pell-Fermat, como tenemos que $\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$ por lo tanto aplicando el teorema 2 de esta sección encontramos el termino analítico las soluciones

$$r = 1$$

$$p_r = 2$$

$$q_r = 1$$

$$a(n) = \frac{1}{2}\left(\left(1 + \sqrt{2}\right)^n + \left(1 - \sqrt{2}\right)^n\right)$$

$$b(n) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(1 + \sqrt{2}\right)^n - \left(1 - \sqrt{2}\right)^n\right)$$

Por lo tanto las unidades de $(\beta, \oplus, \otimes)$ están dadas por

$$a(n) + b(n)k \qquad para \quad n = 0, 1, 2, 3, ..$$

Ahora miremos un caso general, sea el siguiente conjunto

$$\beta = \left\{(a+bk)|a, bym \in \mathbb{Z} \wedge k^2 = m\right\}$$

sobre el definimos las siguientes operaciones:

$$(a+bk) \oplus (c+dk) = (a+c) + (b+d)k$$

$$(a+bk) \otimes (c+dk) = (ac+mad) + (ad+bc)k$$

Es fácil probar que $(\beta, \oplus, \otimes)$ forman un anillo conmutativo con modulo, que resulta ser $1+0k$.
Si suponemos que $a+bk$ es una unidad de esta estructura, entonces debe cumplir que

$$(a+bk)|(1+0k)$$

Ahora si $(a+bk)|(1+0k)$ existe un $(x+yk)$ tal que

$$(a+bk) \otimes (x+yk) = (1+0k)$$

Que al igualar componente a componente se encuentra que:

$$x = \frac{a}{a^2-mb^2} \qquad y = -\frac{b}{a^2-mb^2}$$

Teniendo en cuenta que tanto x como y deben ser enteros

$$x^2 = \frac{a^2}{(a^2-mb^2)^2} \qquad y^2 = \frac{b^2}{(a^2-mb^2)^2}$$

también deben ser enteros, entonces

$$x^2 - my^2 = \frac{a^2}{(a^2-mb^2)^2} - m\frac{b^2}{(a^2-mb^2)^2}$$

también es entero, por lo tanto

$$= \frac{a^2-mb^2}{(a^2-mb^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2-mb^2}$$

debe ser entero y en consecuencia

$$a^2 - mb^2 = \pm 1$$

Que corresponde a una ecuación de Pell-Fermat, como tenemos que $\sqrt{m} = [a_0, \overline{a_1, ..., a_n}]$, Si $c_r = \frac{p_r}{q_r}$, entonces el termino analítico de las soluciones de esta ecuación están dadas por

$$x(n) = \frac{1}{2}\left(\left(p_r + \sqrt{{p_r}^2 - (-1)^r}\right)^n + \left(p_r - \sqrt{{p_r}^2 - (-1)^r}\right)^n\right)$$

$$y(n)=\frac{q_r}{2\sqrt{p_r^2-(-1)^r}}\left(\left(p_r+\sqrt{{p_r}^2-(-1)^r}\right)^n-\left(p_r-\sqrt{p_r}^2-(-1)^r\right)^n\right)$$

Por lo tanto las unidades de $(\beta,\oplus,\otimes)$ están dadas por

$$a(n)+b(n)k \qquad para \quad n=0,1,2,3,..$$

Ejemplo: Sea $\beta=\{(a+bk)|a,bym\in\mathbb{Z}\wedge k^2=m\}$, si el periodo del desarrollo de la fracción continua de $\sqrt{m}$ es uno, entonces $\sqrt{m}=[\|\sqrt{m}\|,\overline{2\|\sqrt{m}\|}]$, por lo tanto las unidades de $(\beta,\oplus,\otimes)$ están dadas por

$$a(n)+b(n)k \qquad para \quad n=0,1,2,3,..$$

Donde

$$a(n)=\frac{1}{2}\left(\left(\|\sqrt{m}\|+\sqrt{\|\sqrt{m}\|^2+1}\right)^n+\left(\|\sqrt{m}\|-\sqrt{\|\sqrt{m}\|^2+1}\right)^n\right)$$

$$b(n)=\frac{1}{2\sqrt{\|\sqrt{m}\|+1}}\left(\left(\|\sqrt{m}\|+\sqrt{\|\sqrt{m}\|^2+1}\right)^n-\left(\|\sqrt{m}\|-\sqrt{\|\sqrt{m}\|^2+1}\right)^n\right)$$

Ejemplo: Sea $\beta=\{(a+bk)|a,bym\in\mathbb{Z}\wedge k^2=m\}$, si el periodo del desarrollo de la fracción continua de $\sqrt{m}$ es dos, entonces $\sqrt{m}=[a_0,\overline{a_1,a_2}]$, por lo tanto las unidades de $(\beta,\oplus,\otimes)$ están dadas por

$$a(n)+b(n)k \qquad para \quad n=0,1,2,3,..$$

Donde

$$a(n)=\frac{1}{2}\left(\left((a_0a_1+1)+\sqrt{(a_0a_1+1)^2-1}\right)^n+\left((a_0a_1+1)-\sqrt{(a_0a_1+1)^2-1}\right)^n\right)$$

$$b(n)=\frac{a_1\left(\left((a_0a_1+1)+\sqrt{(a_0a_1+1)^2-1}\right)^n-\left((a_0a_1+1)-\sqrt{(a_0a_1+1)^2-1}\right)^n\right)}{2\sqrt{(a_0a_1+1)^2-1}}$$

La generalización y el desarrollo de los resultados de las dos secciones de este capitulo consisten en si mismo un tema que puede considerarse como opción para elaborar un trabajo de grado, dada la complejidad y riqueza de las teorías que sustentan dichos resultados.

3.2. Aplicación SUP.UPN:

Con el fin de contribuir al desarrollo del grupo de álgebra de la universidad y posible implementación en asignaturas afines, se desarrolló una aplicación para dispositivos móviles de sistema operativo android y un programa para su uso con el computador. La aplicación y el programa recibe el nombre de

SUP.UPN.[1] disponible en la tienda Google Play Store, la aplicación es de carácter educativo y gratuita, por lo cual cualquier persona interesada lo puede descargar.

La aplicación móvil se desarrollo con el uso de app inventor 2, Google App Inventor es una plataforma que funciona por medio una página web de Google, denominada Google Labs, que permite crear aplicaciones para el sistema operativo Android, actualmente usado en el 80 % de los teléfonos inteligentes o smartphone.

A partir de un conjunto de herramientas básicas, el usuario puede construir por medio bloques instrucciones similares a las realizadas en complicados lenguajes de programación como java y python, los más usados en la actualidad, que requieren mayor tiempo de aprendizaje para manejar su escritura y puntuación; trabajo que se recude en el empleo de bloques, sumado a la posibilidad de crear visualmente el entorno de la aplicación, insertando imágenes, sonidos y botones que se relacionan con los bloques de instrucciones, constituyen una herramienta tecnológica de actualidad, amigable con el programador y útil para el usuario.

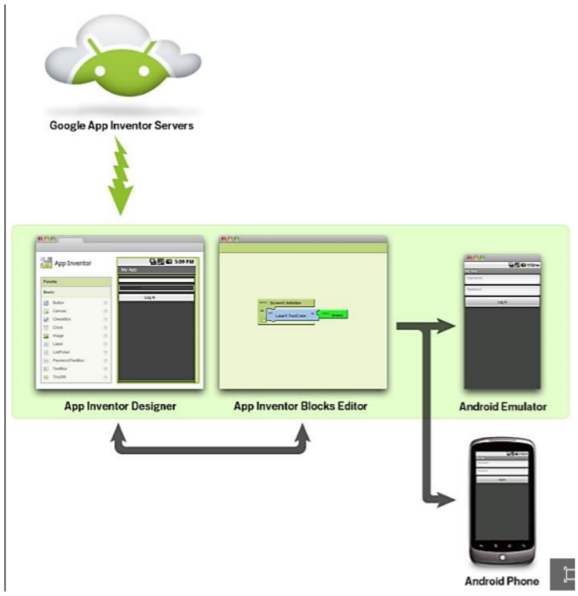


Imagen de http://appinventor.mit.edu/explore/content/what-app-inventor.html

App inventor es una plataforma de acceso libre, disponible para 195 países del mundo, con más de 85mil usuarios que han construido más de cuatro millones de aplicaciones, desde su primera publicación en el año 2010.

[1] Sucesiones recurrentes- Unidades-Ecuación de Pell-Fermat.Universidad Pedagógica Nacional.

Por otro lado el programa[2] par computador se realizo en el lenguaje de programación C++, el cual es un lenguaje de programación diseñado a mediados de los años 1980 por Bjarne Stroustrup. La intención de su creación fue el extender al lenguaje de programación C mecanismos que permiten la manipulación de objetos. En ese sentido, desde el punto de vista de los lenguajes orientados a objetos, el C++ es un lenguaje híbrido.

Se dejan a continuación un link de descarga que contiene el código del programa en formato .cpp.

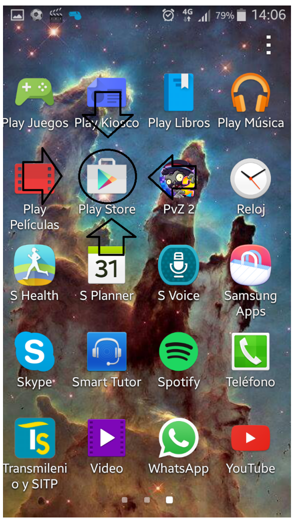
- https://sites.google.com/site/aplicacionsupupn/home

Se presenta como sugerencia descargar un compilador de código C++ para dispositivos móviles, el cuál permitirá que la aplicación SUP.UPN se utilice desde un entorno similar al trabajado para programar, denominado Dev C++ en celulares, que es la tecnología de más acogida en la actualidad. Sumado a esto, también posible descargar el compilador Dev C++ para usar la aplicación SUP.UPN desde computadores de escritorio, portátiles o tablets. Se dejan a continuación los link de descarga, el primero para descargar el compilador móvil y el segundo para descargar el compilador para computadores:

- https://play.google.com/store/apps/details?id=com.aor.droidedit
- http://dev-c.softonic.com/

3.2.1. Manual de la aplicación móvil.

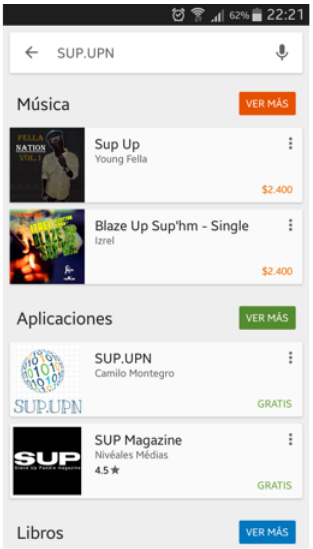
- **Descarga e instalación de la app:** Para descargar la app primero debemos acceder a Google Play Store desde un dispositivo móvil que tenga sistema operativo android.



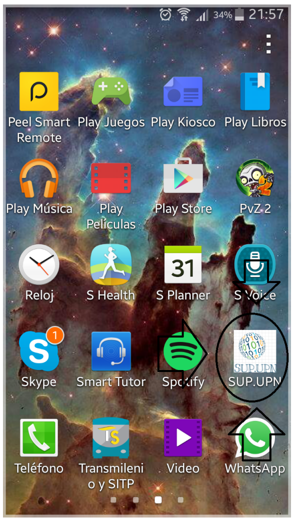
[2] El código el programa se presenta como anexo

Ya en la tienda vamos a buscar y allí escribimos el nombre de la app, *SUP.UPN*

Por ultimo abrimos el icono de la aplicación y le damos instalar.

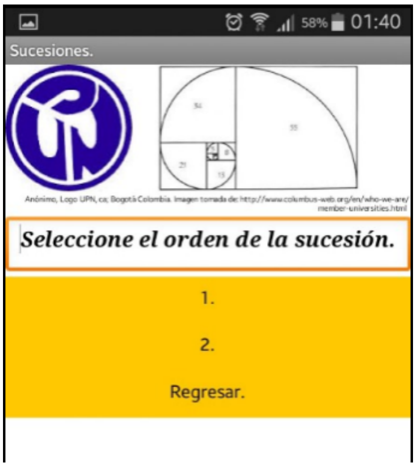


- **Como utilizar la aplicación:** Para acceder a la aplicación después de ser instalada adecuadamente, damos clic en el icono de la aplicación

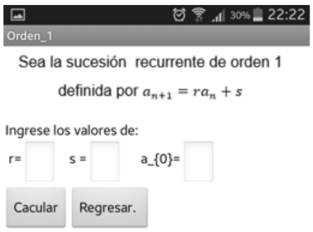


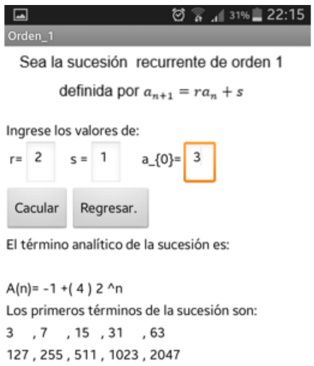
En ella encoraremos un menú con cinco opciones, como el siguiente

Cuando elija la opción 1 llamada *Término analítico de sucesiones.* encontrará un submenú como el siguiente:



En este podrá seleccionar entre sucesiones recurrentes de grado uno o dos, si escoge las de orden uno entrara al siguiente entorno

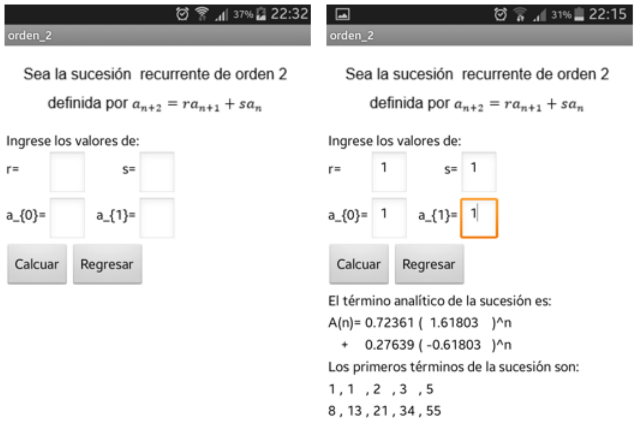




Si escoge la opción orden 1, la aplicación realizará lo siguiente

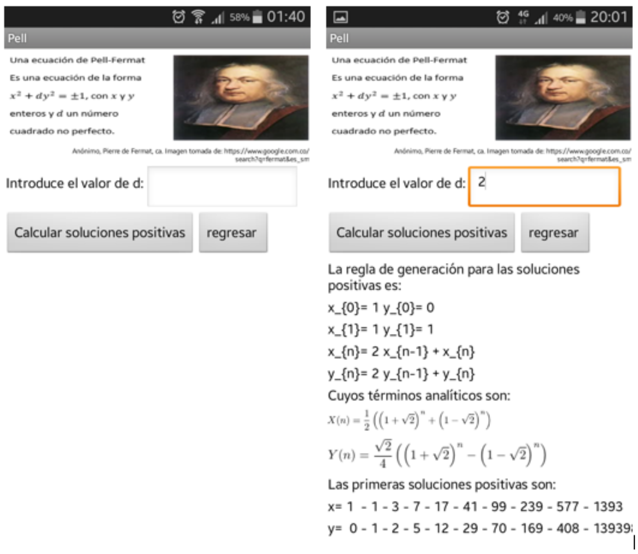
- Solicitará el primer termino de la sucesión y r y s de la siguiente ecuación
$$a_{n+1} = ra_n + s$$
- Mostrará el término analítico de dicha sucesión.
- Mostrará los primeros términos de la sucesión.

Si selecciona la opción orden 2, la aplicación realizará lo siguiente



- Solicitará el primer y segundo término de la sucesión, r y s de la siguiente ecuación
$$a_{n+2} = ra_{n+1} + sa_n$$
- Mostrará el término analítico de dicha sucesión.
- Mostrará los primeros términos de la sucesión.

Cuando seleccione en el menú dos la opción 2 llamada *Ecuaciones de Pell-fermat* encontrará el siguiente entorno:

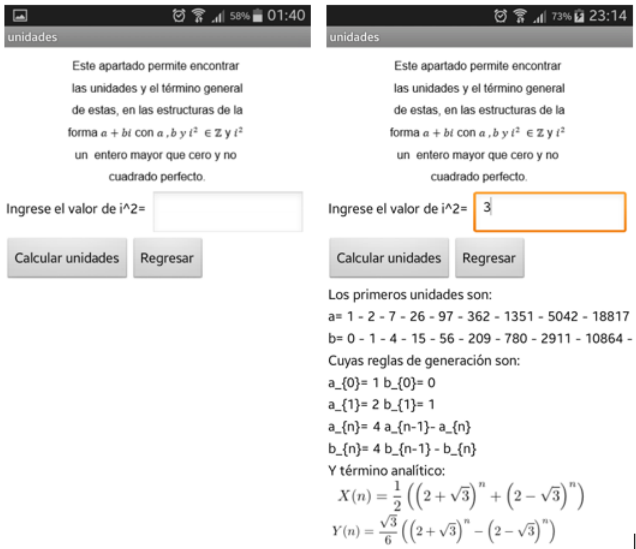


En esta sección la aplicación solicitará al usuario que introduzca el radical asociado a la ecuación que desea resolver, después de esto la aplicación hará

- Le pedirá el valor de d.
- Mostrará la sucesión recurrente que describen las soluciones positivas.

- Mostrará el término analítico de estas soluciones.
- Mostrará las primeras parejas de soluciones positivas.

Cuando seleccione en el menú dos la opción 3 llamada *Unidades* encontrará el siguiente entorno:



En esta parte la aplicación le solicitará al usuario que introduzca el valor de i^2 en la estructura de los números de la forma $a + bi$, después de esto la aplicación realizará:

- Mostrará la sucesión recurrente que describen las unidades.
- Mostrará las primeras parejas de unidades positivas.
- Mostrará el término analítico de estas unidades.

Si en el menú principal escoge la opción créditos, se mostrará la siguiente imagen.

Y por ultimo si en el menú principal se selecciona la opción salir, esté cerrará la aplicación.

Capítulo 4

Conclusiones.

- En el estudio teórico realizado, notamos la constante relación que existe entre las ecuaciones de Pell-Fermat y las fracciones continuas, por ejemplo, Lagrange en 1771 encontró que cualquier solución a esta es una convergente del desarrollo fraccionario continuo de un número irracional asociado a la ecuación.Posteriormente, logramos caracterizar las soluciones de estas ecuaciones de la siguiente manera: Son los x_n y y_n para $n = 1, 2, ...$ donde x_n y y_n son los enteros definidos por la relación

  $$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$$

  Donde x_1 y y_1 es la menor solución positiva de la ecuación, de esta forma, se genera la necesidad de hallar esa solución fundamental; para lo cual aplicamos el desarrollo fraccionario continuo asociado a la ecuación como única opción. Por consiguiente, las soluciones a la ecuación de Pell-Fermat no se pueden despender de su fracción continua asociada, por ende nuestra caracterización de las soluciones de la ecuación dependen de la fracción continua.

- Los conceptos de eigenvalores y eigenvectores aplicados para la generalización del termino analítico de sucesiones definidas por recurrencia de segundo orden, son una herramienta de bastante potencial matemático, dado que contienen diversos elementos teóricos del álgebra lineal, como: determinantes, operaciones aritméticas entre matrices, procesos de reducción, diagonalización y potenciación de matrices, entre otros; adicionalmente posibilita estudiar las estructuras algebraicas subyacentes en las sucesiones definidas por recurrencia por medio de las transformaciones lineales que generan los eigenvectores, así como el análisis de los espacios vectoriales que definen, estudio que no se realizó en el presente trabajo, pero que puede ser una linea para explorar en futuras oportunidades.

  Se debe reconocer que a pesar de ser un proceso extenso, el manejo de los conceptos es bastante rico en términos teóricos, dado que se aplican teoremas y propiedades fundamentales para el álgebra lineal y específicamente en el álgebra de matrices, que permiten extender el campo conceptual a la teoría de números, como se realizó en el presente trabajo de grado.

Así mismo, se considera pertinente ampliar el estudio de la generalización del termino analítico de sucesiones definidas por recurrencia para órdenes mayores a dos, empleando los eigenvalores y eigenvectores, en futuras oportunidades.

- El estudio de las transformadas y el cálculo de variable compleja son de gran interés en las matemáticas, específicamente, la transformada Z es considerada en matemáticas una herramienta de bastante potencial por sus diversas aplicaciones en sistemas de tiempo discreto, ecuaciones diferenciales, sistemas lineales discretos, aplicaciones a la ingeniería y su estrecha relación con transformaciones de Laplace, Fourier, entre otras. En particular el estudio del operador lineal transformada Z en este trabajo fue de gran utilidad; ya que con este se dedujo el término analítico de la sucesiones recurrentes de grado uno y dos, el término analítico de progresiones geométricas y aritméticas, también permitió proponer un resultado para generalizar el término analítico de algunas sucesiones de cualquier orden. Se destaca como una herramienta importante para abordar futuros trabajos relacionados con las aplicaciones mencionadas.

- En el capitulo 2, en la búsqueda para determinar el término analítico de algunas sucesiones definidas por recurrencia, uno de los resultados más relevantes fue la determinación del término analítico de una sucesión definida por recurrencia de orden p, cuya regla de creación está dada por

$$\begin{cases} a_0 = a_0 \\ ... \\ a_{p-1} = a_{p-1} \\ a_{n+p} = r_1 a_{n+p-1} + r_2 a_{n+p-2} ... + r_{p-1} a_{n+1} + r_p a_n \end{cases}$$

Tal que $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq ... \neq \alpha_p$ son las p soluciones de $z^p - r_1 z^{p-1} - ... - r_{p-1} z - r_p = 0$. Está dado por

$$a_n = A_1(\alpha_1)^n + A_2(\alpha_2)^n + ... + A_p(\alpha_p)^n$$

Donde

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^{p} a_{i-1}((a_n)^{p-i} - \sum_{k=1}^{p-i} r_k(\alpha_n)^{p-i-k})}{(\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_2)(\alpha_n - \alpha_3)...(\alpha_n - \alpha_p)}[1].$$

[1] Tener encuenta por ejemplo que si $n = 3$,entonces el factor $(\alpha_3 - \alpha_3)$ no se debe tener en cuenta.

Se considera que el resultado tiene bastante relevancia dado que permite hallar el término analítico de cualquier sucesión definida por recurrencia de orden arbitrario p, bajo sus condiciones establecidas. Uno de los objetivos del trabajo de grado era hallar esta expresión general para el caso $p = 2$, pero como se puede evidenciar (comprobación para el lector), esta expresión permite calcular el término analítico de cualquier sucesión.

- En el capitulo 3, en el estudio de las soluciones de Pell-Fermat se llegó a que las soluciones positivas tanto para x como para y de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = \pm 1$ están descritas por una sucesión recurrente de grado dos y por los resultados del capitulo 2 pudimos generalizar su término analítico sin desprenderlo de la fracción continua, con todo esto los términos analíticos de la ecuación de Pell-Fermat están dados por

$$x(n) = \frac{1}{2}\left(\left(p_r + \sqrt{{p_r}^2 - (-1)^r}\right)^n + \left(p_r - \sqrt{p_r^2 - (-1)^r}\right)^n\right)$$

$$y(n) = \frac{q_r}{2\sqrt{p_r^2 - (-1)^r}}\left(\left(p_r + \sqrt{{p_r}^2 - (-1)^r}\right)^n - \left(p_r - \sqrt{p_r^2 - (-1)^r}\right)^n\right)$$

  Donde $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, ..., a_r}]$ y $C_r = \frac{p_r}{q_r}$.
  Se considera que el resultado obtenido es importante porque con esta generalización es posible construir las sucesiones para los términos analíticos de las soluciones positivas de la ecuación de Pell-Fermat tanto para x como para y.

- El uso de las TIC´S para los educadores matemáticos, es uno de los aspectos que mayor desarrollo teórico ha tenido en los últimos tiempos, como futuros educadores debemos sacar el mayor provecho a estas; con el objetivo de poner a la mano los resultados de este trabajo se desarrolló la primera versión de la aplicación *unidades*, la cual puede ser usada en diferentes espacios académicos, como por ejemplo :

  - El seminario de álgebra de la universidad para hallar las unidades de estructuras de la forma $a + bk$, donde a y $b \in \mathbb{Z}$.
  - El curso de sucesiones y series, dado que la aplicación halla el término analítico de sucesiones recurrentes de orden 1 y 2, además de progresiones aritméticas y geométricas.
  - El curso de teoría de números; pues la aplicación resuelve la ecuación de Pell-Fermat, la cual es una ecuación diofántica de orden 2.

- Mediante la aplicación *SUP.UPN* integramos las TIC´S a los procesos de formación matemática, facilitando la resolución de ecuaciones de Pell-Fermat, hallar el termino analítico de sucesiones recurrentes de orden uno y dos, y hallar las unidades en los números de la forma $a + bk$. Además facilitamos el ejercicio didáctico de los docentes, dinamizando temas como el estudio de las unidades algunas estructuras estructuras especificas.

- Con la puesta en marcha de este trabajo de grado, fomentamos el aprendizaje colaborativo, facilitando la integración de los estudiantes, a partir del uso de la aplicación *SUP.UPN*.

- La elaboración del trabajo de grado nos permitió desarrollar y reforzar las diversas competencias y aprendizajes adquiridos durante nuestro proceso de formación en la universidad, desde varios puntos de vista; inicialmente la posibilidad de abordar un problema matemático, de carácter algebraico, paso seguido consultar y estudiar posibles métodos para solucionarlo, así como el contenido teórico relacionado con los métodos encontrados; para posteriormente abordar el desarrollo del problema, conjeturar, identificar patrones, abstraer, generalizar y todos las demás actividades propias del quehacer matemático; lo que finalmente nos llevó a la elaboración de conclusiones y resultados. Adicionalmente, el diseño, elaboración y publicación del software móvil, nos permitió incursionar en nuevas áreas del conocimiento, para este caso computacional y tecnológico, contribuyendo al desarrollo de uno de los desafíos más importantes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como lo es el uso de las nuevas tecnologías, aportando para la universidad y específicamente para el departamento un trabajo de actualidad y vanguardia.

- A nivel profesional la elaboración del trabajo de grado nos permitió reconocer todas las aptitudes y actitudes, adquiridas durante nuestra formación, implementándolas para desarrollar un proyecto que finaliza esta etapa inicial de estudios, que demuestra las competencias matemáticas y el interés por contribuir al estudio y desarrollo de conceptos, a través de las nuevas tecnologías informáticas.

- A nivel personal el desarrollo del trabajo de grado nos deja una primera impresión de que tenemos las capacidades para abordar y elaborar trabajos de carácter académico, pensados para contribuir y abrir puertas para el desarrollo de conceptos matemáticos superiores, a través de la implementación de las nuevas tecnologías.

Bibliografía

Alanya, S. (2004). *Fracciones continuas, ecuación de Pell y unidades en el anillo de enteros de los cuerpos cuadraticos.* PhD thesis, Tesis de Pegrado.

Apostol, T. M. (1969). Calculus, vol. ii. *Ed Reverté.*

Apostol, T. M. (1979). *Calculus (Vol. 1)*, volume 1. Reverté.

Glyn, J. (2002). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, volume 2. Prentice Hall.

Hendrik, W. (2008). Solving the pell equation. *Algorithmic number theory: lattices, number fields, curves and cryptography*, 44:1–23.

Martínez, C. (2006). Sobre el surgimiento del concepto de valor propio: una historia selecta sobre los orígenes de la teoría espectral. *Miscelnea Matematica*, 43:53–3.

Niven, I., Zuckerman, H. S., and Montgomery, H. L. (1976). *An introduction to the theory of numbers.* John Wiley & Sons.

Thomas, G. (2006). Cálculo. varias variables.

Anexo 1.

Programa SUP.UPN en C++

```
 #include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <math.h>
#include <windows.h>
using namespace std;
void pausa();
void ene();
void submenu();
void orden();
double& periodo(double a);
double& fraccion();
void soluciones(int a, double B[]);
double& unidades();
void solu(int a, double B[]);
void gotoxy(int x, int y);
int main()
{
bool var=false;
char tecla;
do
{
system("cls");
cin.clear();
system("color 72");
gotoxy(25,2);
cout << "Termino n-esimo de sucesiones recurrentes"
<<endl;
gotoxy(25,3);
cout << "------------------------------------------"
<<endl<<endl;
cout << "\t1 .- Calcular el termino n-esimo" << endl;
cout << "\t2 .- Solucionando ecuaciones de Pell" <<
endl;
cout << "\t3 .- Unidades de numeros de la forma a+bk"
<< endl;
cout << "\t4 .- Salir" << endl << endl;
gotoxy(20,10);
cout << "Elije una opcion: ";
cin >> tecla;
switch(tecla)
{
case '1':
system("cls");
submenu();
pausa();
break;
case '2':
system("cls");
gotoxy(25,2);
cout << "Solucionando ecuaciones de Pell\n"<<endl;
cout<<endl;
gotoxy(25,3);
cout << "-----------------------------" << endl << endl;
gotoxy(8,5);
cout<<"En esta seccion podras calcular las reductas de
la fraccion"<<endl;
gotoxy(8,6);
cout<<"y podras calcular las soluciones de la ecuacion
de Pell"<<endl;
cout<<endl;
fraccion();
pausa();
break;
case '3':
system("cls");
gotoxy(25,2);
cout << "Unidades numericas "<<endl;
cout<<endl;
gotoxy(25,3);
cout <<"----------------------" << endl << endl;
gotoxy(8,5);
cout<<"En esta seccion podras calcular las unidades
para numeros"<<endl;
gotoxy(25,6);
cout<<"de la forma a+bk"<<endl;
cout<<endl;
unidades();
pausa();
break;
case '4':
var=true;
break;
default:
cout<<endl;
gotoxy(25,12);
cout << "Selecion no valida\a\n";
pausa();
break;
}
}while(var!=true);
return 0;
}
void pausa()
{
cout<<endl;
cout << "Pulsa una tecla para continuar...";
getwchar();
getwchar();
}
void orden(){
int a, r ,s,m,n;
double x;
cout<<endl;
cout<<"Digita los términos inciales de la
sucesion"<<endl;
cout<<endl;
cout<<"Digite a0 : ";cin>>a;
cout<<endl;
cout<<"Digite r : ";cin>>r;
cout<<endl;
cout<<"Digite s : ";cin>>s;
cout<<endl;
cout<<"Sucesion de recurrencia"<<endl;
```

```
cout<<endl;
cout<<"An+1="<<r<<"An+("<<s<<")"<<endl;
cout<<endl;
cout<<"Digita el intervalo para las soluciones de la
sucesion : "<<endl;
cout<<endl;
cout<<"Intervalo inferior: ";
cin>>m;
cout<<endl;
cout<<"Intervalo superior: ";
cin>>n;
cout<<endl;
cout<<"Soluciones: ";
if (r!=1){
for (int i=m;i<n+1;i++){
x=(s+(a-a*r-s)*pow(r,i))/(1-r);
cout<<" "<<x;}
cout<<endl;
cout<<endl;
cout<<"Forma del termino general"<<endl;
cout<<endl;
cout<<"An= 1/"<<1-r<<"( "<<s<<"+ ("<<a-a*r-s<<"
)"<<r<<"^n )"<<endl;}
else{
for (int i=m;i<n+1;i++){
x=s*i+a;
cout<<" "<<x;}
cout<<endl;
cout<<endl;
cout<<"Forma del termino general"<<endl;
cout<<endl;
cout<<"An="<<s<<"n+"<<a<<endl;}
}
void ene(){
int n, r ,s,m;
double a,b,x,y,z,w,p,q,y1,z1,w1,x1;
cout<<"Digita los terminos inciales de la
sucesion"<<endl;
cout<<endl;
cout<<"Digite a0 : ";cin>>a;
cout<<endl;
cout<<"Digite a1 : ";cin>>b;
cout<<endl;
cout<<"Digite r : ";cin>>r;
cout<<endl;
cout<<"Digite s : ";cin>>s;
cout<<endl;
cout<<"Sucesion de recurrencia"<<endl;
cout<<endl;
cout<<"An+2="<<r<<"An+1+("<<s<<")An"<<endl;
cout<<endl;
cout<<"Digita el intervalo para las soluciones de la
sucesion : "<<endl;
cout<<endl;
cout<<"Intervalo inferior: ";
cin>>m;
cout<<endl;
cout<<"Intervalo superior: ";
cin>>n;
cout<<endl;
cout<<"Terminos: ";
w=pow(r,2)+4*s;
if (w==0){
for (int i=m;i<n+1;i++){
x=(a+(((2*b)/r)-a)*i)*(pow((r/2),i));
cout<<" "<<x;}
cout<<endl;
cout<<endl;
cout<<"Forma del termino general"<<endl;
cout<<endl;
cout<<"An=("<<r<<"/2)^n("<<a<<"+((2*"<<a<<"/"<<
r<<")-"<<a<<")n)"<<endl;
}
else{
for (int i=m;i<n+1;i++){
y=(r+(sqrt(pow(r,2)+4*s)))/(2);
z=pow(y,i);
x=a*(pow(r,2)+4*s)+(2*b-r*a)*(sqrt(pow(r,2)+4*s));
w=2*(pow(r,2)+4*s);
p=z*(x/w);
y1=(r-(sqrt(pow(r,2)+4*s)))/(2);
z1=pow(y1,i);
x1=a*(pow(r,2)+4*s)-(2*b-r*a)*(sqrt(pow(r,2)+4*s));
w1=2*(pow(r,2)+4*s);
q=z1*(x1/w1);
cout<<p+q<<" ";
}
cout<<"Forma del termino general"<<endl;
cout<<endl;
cout<<"An=(("<<a*(pow(r,2)+4*s)<<"+"<<(2*b-
r*a)<<"("<<pow(r,2)+4*s<<")^(1/2))/"<<2*(pow(r,2)+
4*s)<<")(("<<r<<"+"<<"("<<pow(r,2)+4*s<<")^(1/2))/
2)^n+"<<"(("<<a*(pow(r,2)+4*s)<<"-"<<(2*b-
r*a)<<"("<<pow(r,2)+4*s<<")^(1/2))/"<<2*(pow(r,2)+
4*s)<<")(("<<r<<"-
"<<"("<<pow(r,2)+4*s<<")^(1/2))/2)^n"<<endl;
}
}
void submenu(){
bool var=false;
char tecla;
do
{
system("cls");
cin.clear();
gotoxy(25,2);
cout << "Calcular el termino n-esimo" << endl;
gotoxy(25,3);
cout << "----------------------------" << endl << endl;
gotoxy(10,5);
cout<<"En esta seccion podras calcular los terminos
enesimos"<<endl;
gotoxy(10,6);
cout<<"de sucesiones definidas por recurrencia de
orden 1 y 2"<<endl;
cout<<endl;
cout << "\t1 .- Calcular el termino n-esimo del orden 1"
<< endl;
cout << "\t2 .- Calcular el termino n-esimo del orden 2"
<< endl;
cout << "\t3 .- Menu principal" << endl << endl;
gotoxy(20,13);
```

```
cout << "Elije una opcion: ";
cin >> tecla;
switch(tecla)
{
case '1':
system("cls");
gotoxy(15,2);
cout << "Termino n-esimo de sucesiones recurrentes"
<< endl;
orden();
pausa();
break;
case '2':
system("cls");
gotoxy(15,2);
cout << "Termino n-esimo de sucesiones recurrentes"
<< endl;
cout<<endl;
ene();
pausa();
break;
case '3':
var=true;
break;
default:
cout<<endl;
gotoxy(20,15);
cout << "Seleccion no valida";
cout<<endl;
pausa();
break;
}
}while(var!=true);
}
double& periodo(double b){
double c,d;
c=b-(int)b;
d=1/c;return d;
}
double& fraccion(){
double a,d,b,e,f,g,h,i,j,k,l,m,s;
int w;
double B[20];
cout<<"Ingrse radical: ";
cin>>a;
cout<<endl;
b=sqrt(a);
s=b-(int)b;
if (s==0){
cout<<"Ingresa un numero que no sea cuadrado
perfecto"<<endl;
cout<<endl;}
else{
cout<<"Ecuacion de la forma: x^2-"<<a<<"y^2=(+/-
)1"<<endl;
d=periodo(b);
e=periodo(d);
f=periodo(e);
g=periodo(f);
h=periodo(g);
i=periodo(h);
j=periodo(i);
k=periodo(j);
l=periodo(k);
m=periodo(l);
cout<<endl;
B[0]=(int)b;
B[1]=(int)d;
B[2]=(int)e;
B[3]=(int)f;
B[4]=(int)g;
B[5]=(int)h;
B[6]=(int)i;
B[7]=(int)j;
B[8]=(int)k;
B[9]=(int)l;
B[10]=(int)m;
cout<<"Fraccion continua: [";
cout<<(int)b<<"; ";
cout<<(int)d<<", ";
if (b<d){
cout<<"]"<<endl;
w=1;
cout<<endl;
cout<<"Periodo r= "<<w;
cout<<endl;}
else{
cout<<(int)e<<", ";
if (b<e){
cout<<"]"<<endl;
w=2;
cout<<endl;
cout<<"Periodo r= "<<w;
cout<<endl;}
else{
cout<<(int)f<<", ";
if (b<f){
cout<<"]"<<endl;
w=3;
cout<<endl;
cout<<"Periodo r= "<<w;
cout<<endl;}
else{
cout<<(int)g<<", ";
if (b<g){
cout<<"]"<<endl;
w=4;
cout<<endl;
cout<<"Periodo r= "<<w;
cout<<endl;}
else{
```

```
cout<<(int)h<<", ";
if (b<h){
cout<<"]"<<endl;
w=5;
cout<<endl;
cout<<"Periodo r= "<<w;
cout<<endl;}
else{
cout<<(int)i<<", ";
if (b<i){
cout<<"]"<<endl;
w=6;
cout<<endl;
cout<<"Periodo r= "<<w;
cout<<endl;}
else{
cout<<(int)j<<", ";
if (b<j){
cout<<"]"<<endl;
w=7;
cout<<endl;
cout<<"Periodo r= "<<w;
cout<<endl;}
else{
cout<<(int)k<<", ";
if (b<k){
cout<<"]"<<endl;
w=8;
cout<<endl;
cout<<"Periodo r= "<<w;
cout<<endl;}
else{
cout<<(int)l<<", ";
if (b<l){
cout<<"]"<<endl;
w=9;
out<<endl;
cout<<"Periodo r= "<<w;
cout<<endl;}
else{
cout<<(int)m<<" "<<endl;
if (b<m){
cout<<"]"<<endl;
w=10;
cout<<endl;
cout<<"Periodo r= "<<w;
cout<<endl;}
}}}}}}}}
soluciones(w,B);}
cout<<endl;
}
void soluciones(int a, double B[]){
int b,c,d;
double P[20],Q[20],M[20],W[20],H[20],S[20],T[20];
d=a;
Q[0]=1;
P[0]=B[0];
Q[1]=B[1];
P[1]=B[0]*B[1]+1;
for(int i=2;i<12;i++){
P[i]=B[i]*P[i-1]+P[i-2];
}
```

```
for (int i=2;i<12;i++){
Q[i]=B[i]*Q[i-1]+Q[i-2];
}
cout<<endl;
cout<<"Digita el intervalo de valores para las reductas
de la fraccion: "<<endl;
cout<<endl;
cout<<"Intervalo inferior: ";cin>>b;cout<<endl;
cout<<"Intervalo superior: ";cin>>c;cout<<endl;
cout<<"p: ";
for (int i=b;i<c+1;i++)
cout<<P[i-1]<<" ";
cout<<endl;
cout<<"q: ";
for (int i=b;i<c+1;i++)
cout<<Q[i-1]<<" ";
cout<<endl;
cout<<endl;
cout<<"Soluciones de la ecuacion de Pell";
cout<<endl;
cout<<endl;
cout<<"Digita el intervalo de valores para las
soluciones de la ecuacion de pell: "<<endl;
cout<<endl;
cout<<"Intervalo inferior: ";cin>>b;cout<<endl;
cout<<"Intervalo superior: ";cin>>c;cout<<endl;
cout<<"x: ";
for (int i=0;i<20;i++){
M[i]=P[a-1]+sqrt(pow(P[a-1],2)-pow(-1,a));
W[i]=P[a-1]-sqrt(pow(P[a-1],2)-pow(-1,a));
H[i]=(pow(M[i],i)+pow(W[i],i))/2;}
for (int i=b;i<c+1;i++)
cout<<H[i]<<" ";
cout<<endl;
cout<<"y: ";
for (int i=0;i<20;i++){
S[i]=Q[a-1]/(2*(sqrt(pow(P[a-1],2)-pow(-1,a))));
T[i]=S[i]*(pow(M[i],i)-pow(W[i],i));}
for (int i=b;i<c+1;i++)
cout<<T[i]<<" ";
cout<<endl;
cout<<endl;
if (d%2==0)
cout<<"Regla de generacion:
An+2="<<2*H[1]<<"An+1-An"<<endl;
else
cout<<"Regla de generacion:
An+2="<<2*H[1]<<"An+1+An"<<endl;
```

```
}
double& unidades(){
double a,d,b,e,f,g,h,i,j,k,l,m,s;
int w;
double B[20];
cout<<"Ingrse radical: ";
cin>>a;
b=sqrt(a);
b=sqrt(a);
s=b-(int)b;
if (s==0){
cout<<endl;
cout<<"Ingresa un numero que no sea cuadrado perfecto"<<endl;
cout<<endl;
cout<<endl;}
else{
d=periodo(b);
e=periodo(d);
f=periodo(e);
g=periodo(f);
h=periodo(g);
i=periodo(h);
j=periodo(i);
k=periodo(j);
l=periodo(k);
m=periodo(l);
cout<<endl;
B[0]=(int)b;
B[1]=(int)d;
B[2]=(int)e;
B[3]=(int)f;
B[4]=(int)g;
B[5]=(int)h;
B[6]=(int)i;
B[7]=(int)j;
B[8]=(int)k;
B[9]=(int)l;
B[10]=(int)m;
if (b<d){
w=1;}
else{
if (b<e){
w=2;}
else{
if (b<f){
w=3;}
else{
if (b<g){
w=4;}
else{
if (b<h){
w=5;}
else{
if (b<i){
w=6;}
else{
if (b<j){
w=7;}
else{
if (b<k){
w=8;}
else{
if (b<l){
w=9;}
else{
if (b<m){
w=10;
}}}}}}}}}
solu(w,B);}}
}
void solu(int a, double B[]){
int b,c,d;
double P[20],Q[20],M[20],W[20],H[20],S[20],T[20];
d=a;
Q[0]=1;
P[0]=B[0];
Q[1]=B[1];
P[1]=B[0]*B[1]+1;
for(int i=2;i<12;i++){
P[i]=B[i]*P[i-1]+P[i-2];
}
for (int i=2;i<12;i++){
Q[i]=B[i]*Q[i-1]+Q[i-2];
}
cout<<"Digita el intervalo de valores para las unidades"<<endl;
cout<<endl;
cout<<"Intervalo inferior: ";cin>>b;cout<<endl;
cout<<"Intervalo superior: ";cin>>c;cout<<endl;
cout<<endl;
cout<<"x: ";
for (int i=0;i<20;i++){
M[i]=P[a-1]+sqrt(pow(P[a-1],2)-pow(-1,a));
W[i]=P[a-1]-sqrt(pow(P[a-1],2)-pow(-1,a));
H[i]=(pow(M[i],i)+pow(W[i],i))/2;}
for (int i=b;i<c+1;i++)
cout<<H[i]<<" ";
cout<<endl;
cout<<"y: ";
for (int i=0;i<20;i++){
S[i]=Q[a-1]/(2*(sqrt(pow(P[a-1],2)-pow(-1,a))));
T[i]=S[i]*(pow(M[i],i)-pow(W[i],i));}
for (int i=b;i<c+1;i++)
cout<<T[i]<<" ";
cout<<endl;
cout<<endl;
if (d%2==0)
```

```
cout<<"Regla de generacion:
An+2="<<2*H[1]<<"An+1-An"<<endl;
else
cout<<"Regla de generacion:
An+2="<<2*H[1]<<"An+1+An"<<endl;
}
void gotoxy(int x, int y){
HANDLE hcon;
hcon = GetStdHandle(STD_OUTPUT_HANDLE);
COORD dwPos;
dwPos.X = x;
dwPos.Y= y;
SetConsoleCursorPosition(hcon,dwPos);
}
```