

**EL PROCESO DE GENERALIZAR EN LA ESCUELA. UN ANÁLISIS DE
TEXTOS.**

MARIELA CEDEÑO GRANDAS

CRISTIAN FERNEY RAIGOSO SABOGAL

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.2017

**EL PROCESO DE GENERALIZAR EN LA ESCUELA. UN ANÁLISIS DE
TEXTOS.**

Trabajo de grado asociado al estudio de un asunto de interés profesional de los estudiantes

Trabajo de grado como requisito parcial para optar por el título de Licenciado en
Matemáticas

Mariela Cedeño Grandas

Código: 2012240021

c.c 52811747

Cristian Ferney Raigoso Sabogal

Código: 2012240057

c.c 1071630766

Asesora

Johana Andrea Torres Díaz

Magister en Docencia de las Matemáticas

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C. 2017

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios en primer lugar por la oportunidad de permitirme cumplir uno de mis grandes sueños, a mi esposo, por haber sostenido mis brazos en momento en que sentí no podía más, mis hijos por ser el motor de mi vida y por no cuestionar los momentos robados, mi madre, siempre presente e incondicional, Cristian, que buen compañero de trabajo y de algunas historias que sin duda quedaran en mi memoria, Johana Torres, por sus continuas sugerencias, a veces alentadoras otras no tanto, pero siempre precisas, mis hermanas y demás familia que de alguna u otra forma aportaron un granito de arena en este proceso. Guardo en mi corazón cada uno de los momentos que hoy hacen realidad uno de mis grandes logros y que se convierte en punto de partida para otros nuevos... Gracias

Dios

Mariela Cedeño

Dedicada a mis padres Otilia y Hernando por ser el mayor apoyo en mi formación, por estar presente en cada uno de mis alegrías y tristezas, por cada uno de los esfuerzos necesarios por brindarme lo mejor a pesar de estar distanciados; a mi novia Tatiana por brindarme todo su cariño y comprender mis angustias, estrés y rebeldías, y brindarme su apoyo incondicional para cumplir esta meta.

Agradezco infinitamente Dios por cada bendición, por permitir luchar por mis sueños, tener a mi lado a la mejor madre, un hogar lleno de felicidad y protegerme de los peligros de la vida.

Un Agradecimiento muy especial a nuestra Asesora Johana Torres por su dedicación y dirección a este trabajo; a mi compañera Mariela por el compromiso de este reto que se vino proponiendo desde los primeros semestres de trabajar ambos.

A la Universidad Pedagógica Nacional por haberme brindado la oportunidad de formarme como docente.

A mis compañeros Wilder, Alejandra, Krups, Juan, John, Carolina, Laura y Miguel, por el tiempo compartido y recuerdos de amistad.

A todas las personas que estuvieron conmigo cuando necesite ayuda, por los consejos, regaños, palabras de aliento y apoyo; en especial a la Familia Cuéllar Cuéllar.

Cristian Raigoso

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Educación de calidad para...</small>	FORMATO
RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 5 de 153

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	El proceso de generalizar en la escuela. Un análisis de textos.
Autor(es)	Cedeño Grandas, Mariela; Raigoso Sabogal, Cristian Ferney
Director	Torres Díaz, Johana Andrea
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017. 153 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	PROCESO DE GENERALIZAR; TEXTOS ESCOLARES; ANÁLISIS A PRIORI; REFERENTES DE CALIDAD

2. Descripción	
<p>Este trabajo de grado presenta un análisis a priori de una serie de textos escolares de matemáticas para la Educación Básica, en relación con el proceso de generalizar patrones en secuencias. Se considera que los textos escolares son una de las principales herramientas en el proceso de enseñanza y que representan, de alguna manera, una propuesta curricular; asimismo, se valora la relevancia del proceso de generalizar como aspecto esencial en el desarrollo del pensamiento variacional y la introducción al trabajo algebraico.</p> <p>Desde esta óptica, en el trabajo se desarrollan los cuatro aspectos definidos por Van Dormolen (1986): consistencia, claridad, autenticidad y trascendencia, para el análisis a priori, y se establecen observaciones y conclusiones en relación con los tipos de secuencias,</p>	

representaciones y etapas del proceso de generalizar que se evidencian en los contenidos y actividades propuestas en los textos, valorando, entre otras cuestiones, la complejidad creciente a lo largo de la escolaridad y su correspondencia con los referentes de calidad.

3. Fuentes

- Álzate, M. (2000). El texto escolar como instrumento pedagógico: Partidarios y detractores. *Revista de Ciencias Humanas*, 21
- Ávila, M. López, C. y González, J. (2010) La generalización de patrones cuadráticos: un estudio con alumnos de licenciatura en matemáticas. *Culcyt* 7(40), 34–40.
- Azarquiel, Grupo. (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. Madrid: Síntesis.
- Bruno, A. & Cabrera, N. (2006) La recta numérica en los libros de texto en España. *Educación matemática. Volumen* (18) 125-149.
- Butto, C., Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. México: Grupo Santillana México. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/405/40516105.pdf>
- Esquinas, A. (2009) *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente*. (Tesis doctoral), Madrid, España.
- García, A. (sf) El uso del libro de texto de matemáticas en el aula. Universidad de Granada. Recuperado de: <http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/36188/1/GARCIAMARTINANTONIO.pdf>
- Godino, J. & Font, V. (2000). Razonamiento Algebraico y su Didáctica para maestros. Universidad de Granada. Recuperado de: <http://ddm.ugr.es/personal/jdgodino/manual/ralgebraico.pdf>.
- Godino, J. & Font, V. (2000). Razonamiento Algebraico y su Didáctica para maestros. Universidad de Granada. Recuperado de: <http://ddm.ugr.es/personal/jdgodino/manual/ralgebraico.pdf>.

- Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-7-0. Recuperado de, <http://www.ugr.es/local/jgodino/>
- Joya, A., Manzano, L. y Gamboa, J. (2017) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 3*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana.
- Joya, A., Manzano, L., Sabogal, Y., Ortiz, L., Gamboa, J., Castaño, J. y Acosta M. (2017) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 4*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana.
- Joya, A., Manzano, L., Sabogal, Y., Ortiz, L., Gamboa, J., Castaño, J. y Acosta M. (2017) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 5*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana.
- Joya, A., Otero, M. y Acosta, M. (2017) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 1*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana
- Joya, A., Patiño, O., Buitrago, L., Sabogal, Y., Ortiz, L., Ramírez, M. y Sánchez, C. (2016) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 7*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana.
- Joya, A., Patiño, O., Buitrago, L., Sabogal, Y., Ortiz, L., Ramírez, M. y Sánchez, C. (2016) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 8*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana.
- Joya, A., Sánchez, C., Manzano, L., Sabogal, Y., Ortiz, L., y Castaño, J. (2017) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 2*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana
- Joya, A., Sánchez, C., Ortiz, L., Ramírez, M., Dueñas, M. y Sabogal, Y. (2016) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 6*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana.
- Luque, C. (2010) Descripción de textos escolares en torno al concepto de función a trozos. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis*. 28(20-40).
- Maldonado M., Rodríguez M. T. y Tuyub J. C. (2007) El discurso en los libros de texto de Matemáticas y su relación con la práctica escolar". Universidad Autónoma de Yucatán. Tesis.

- Mason, J., Graham, A., Pimm, D., Gowar, N (2014) Rutas hacia el álgebra, raíces del álgebra. (Cecilia Agudelo Valderrama, trad.) (2.^a ed.). Colombia. Universidad del Tolima. (Obra original publicada en 1985).
- MEN (1994) Ley 115 de febrero 8 de 1994, Artículo 42. Bogotá. Ministerio de Educación Nacional.
- MEN (1998). Lineamientos Curriculares Matemáticas. Bogotá. Ministerio de Educación Nacional.
- MEN (2006) Estándares básicos de competencias matemáticas. Bogotá. Ministerio de Educación Nacional.
- MEN (2016). Derechos básicos de aprendizaje. Bogotá. Ministerio de Educación Nacional.
- Monterrubio, M.C., Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander: SEIEM.
- Mora, L. (2012). Álgebra en primaria. Documento construido en el marco del Programa de Transformación de la Calidad Educativa del MEN en convenio con la Universidad Pedagógica Nacional.
- National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Autor.
- Ospina, B. y C. Mejía (2008). El impacto del libro de texto escolar en los resultados escolares. *El Educador, 1.* Recuperado de <http://goo.gl/hcbAu2>
- Pérez, J. (2005) *La generalización como proceso de pensamiento matemático: una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje del álgebra elemental.* (Tesis de maestría) Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- POLYA, G. (1954) Cómo resolverlo. Ed. Tecnos, Madrid. Pág. 16, 97

- Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1–21(March 1987), 2–21
- Real Academia Española. (2001). Diccionario de la lengua española [Dictionary of the Spanish Language] (22nd ed.). Madrid, Spain: Author
- Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet enviroment. En N. Bernarz et al (eds) Approaches to Algebra. pp. 137-145. Kluwer Academic Pub. Netherlands.
- Rojas, P., & Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Educación Científica Y Tecnológica*. 760-766
- Sánchez, C., Sabogal, Y., Buitrago, L., Fuentes, J., Patiño, O., Joya, A. y Rincón, M. (2016) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 9*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana
- Sánchez, N. & Bolívar, R. (2015) Contenidos de enseñanza en los textos escolares de 1984 al 2010 en Colombia. *Revista de Facultad de educación* (42)61-70. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá Colombia.
- Santos, J. (2016) Modelo de texto escolar digital en el contexto colombiano. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. Tesis
- Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires, Argentina: libros del Zorzal.
- Socas, M. (2011). *La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación*. En Rev. Números. Vol.77. pp.5-34 (Versión electrónica)
- TERCE (2014). Comparación de resultados del segundo y tercer estudio regional comparativo y explicativo 2006 – 2013
- Trujillo, P. (2008) Proceso de generalización que realizan futuros maestros. (Tesis de maestría). Universidad de Granada. España

- Van Dormolen, J. (1986), ‘Textual analysis’, in B. Christianson, A. G. Howson, and M. Otte (eds.), *Perspectives on Mathematics Education*, D. Reidel, Dordrecht, pp. 141-171.
- Vargas, J. (2003). La construcción de los irracionales de dedekind como instrumento en un análisis de textos de octavo grado. *TEA (Revista de la facultad de Ciencia y Tecnología). Volumen* (14) 8-26
- Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9(3), 193-215.

4. Contenidos

Este documento está conformado por 5 capítulos que sustentan el análisis que se realizó acerca del proceso de generalizar en los textos escolares de la Editorial Santillana.

En el primer capítulo se exponen los argumentos que sustentan y definen el trabajo realizado, y se plantean los objetivos que orientan al desarrollo de la propuesta. El capítulo dos, reporta el marco de referencia; contempla las propuestas de investigaciones que se han realizado sobre análisis de textos escolares, en particular la propuesta de Van Dormolen (1986) y, en una segunda parte, el proceso de generalizar en la escuela, desde el punto de vista del conocimiento didáctico (Mora (2012), Mason (1996), entre otros) y del conocimiento curricular, en relación con las directrices de los referentes de calidad de Colombia sobre el proceso de generalizar.

En el tercer capítulo se plantea la Metodología usada para la realización de este trabajo, allí se establecen las categorías de análisis de los textos escolares, la selección de los textos y una breve descripción de su estructura y propuesta pedagógica. En el capítulo cuatro se presenta el análisis realizado sobre el proceso de generalizar, con base en los contenidos y las tareas propuestas en los textos escolares *Proyecto Saber, Ser y Hacer*; este análisis presenta tres niveles de acercamiento, desde las tablas de contenido, las unidades propuestas para trabajar con secuencias y un vistazo a otras unidades donde se evidencien tareas de generalizar con secuencias; a partir de lo cual se presenta el análisis a priori. Finalmente, se presentan las conclusiones basadas en los hallazgos y en los aportes a la formación como docentes.

5. Metodología

Este trabajo se desarrolla en torno al análisis a priori de textos escolares, en relación con el proceso de generalizar, esto significa que el instrumento de análisis es el texto mismo, y no depende de otros factores relacionados con su uso o efectos. Para la selección de los textos a analizar se adelantaron encuestas que permitieron establecer la serie de textos de matemáticas más utilizada en el último año en Bogotá; posteriormente, se establecieron categorías de análisis con base en los aspectos sugeridos por Van Dormolen, para el análisis a priori: consistencia, claridad, autenticidad y trascendencia, los cuales se valoraron dese la observación de los tipos de secuencias, representaciones y fases del proceso de generalizar evidentes en los contenidos y tareas propuestas en los textos.

6. Conclusiones

El interés al desarrollar este trabajo fue precisar cómo se presenta el proceso de generalizar en la escuela, a partir de la mirada a uno de los recursos educativos más usados, que además determina en buena medida el currículo que se desarrolla en las instituciones educativas, los textos escolares.

Es evidente en este estudio que el proceso de generalizar tiene una presencia aún tímida en los textos escolares. Si bien, los autores consultados y los referentes de calidad colombianos insisten en la pertinencia y viabilidad de este proceso para desarrollar el pensamiento variacional e iniciar el trabajo algebraico, los textos se muestran limitados frente al abordaje de este proceso, la variedad de tareas propuestas para promover su desarrollo y la presentación secuencial, continua e intencionada para propiciar el tránsito del pensamiento numérico al algebraico.

Aunque el proceso de generalizar es trabajado en Básica Primaria en forma más permanente y, en términos generales apropiada en relación con los tipos de secuencias y representaciones sugeridos por Mora (2012), no se puede observar que esto sea aprovechado en el momento en que se aborda el álgebra en octavo grado. Existe una ruptura en este sentido, ya que es posible evidenciar que no se aprovecha el proceso de generalizar para introducir el lenguaje algebraico,

este lenguaje es introducido a través de la traducción del lenguaje verbal, como ha sido usual en los y en las prácticas de enseñanza de los docentes de matemáticas.

Elaborado por:	Mariela Cedeño Grandas; Cristian Raigoso Sabogal
Revisado por:	Johana Andrea Torres Díaz

Fecha de elaboración del Resumen:	30	10	2017
--	----	----	------

TABLA DE CONTENIDO

Introducción.....	22
Justificación	24
Objetivos.....	27
Objetivo general	27
Objetivos específicos.....	27
Marco de referencia	28
Textos escolares.....	28
Análisis de textos escolares de matemáticas	32
Generalización.....	35
El Proceso de generalizar.	37
El proceso de generalizar en los referentes de calidad	43
El proceso de generalizar en los Lineamientos Curriculares.....	45
El proceso de generalizar en los Estándares Básicos de competencias Matemáticas ..	48
El proceso de generalizar en los Derechos Básicos de aprendizaje	49
Metodología.....	55
Elección de textos escolares.	56
Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas – Editorial Santillana	59
Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas	60
Análisis de los textos escolares	66
Proyecto Saber, Ser y Hacer - Básica Primaria	66
Ciclo primero a tercero	68
Resultado del análisis. Primer ciclo.....	78

Ciclo cuarto a quinto	82
Resultado del análisis. Segundo ciclo.....	88
Proyecto Saber, Ser y Hacer – Básica secundaria	91
Ciclo Sexto a Séptimo	93
Resultado de análisis, ciclo sexto-séptimo	100
Ciclo Octavo y Noveno	102
Análisis de ciclo octavo-noveno.....	111
Análisis A Priori Proyecto Saber, Ser y Hacer.....	114
Educación Básica Primaria.....	114
Educación Básica secundaria.....	122
Conclusiones.....	127
Referencias	131
Anexos	135

TABLAS

Tabla 1: Descripción tipos de representación.....	41
Tabla 2: Etapas del proceso de generalizar.	42
Tabla 3: Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006).....	49
Tabla 4: Aspectos a considerar en el análisis A priori	56
Tabla 5: Hallazgos de sucesiones en tablas de contenido de textos básica primaria.....	67
Tabla 6: Tipos de secuencias, ciclo primero a tercero.....	78
Tabla 7: Tipos de representación, ciclo primero a tercero	79
Tabla 8: Etapas del proceso de generalizar patrones, primer ciclo.	80
Tabla 9: Tipos de secuencias, ciclo cuarto a quinto	89
Tabla 10: Tipos de representación. Ciclo cuarto a quinto	89
Tabla 11: Etapas del proceso de generalizar patrones, segundo ciclo.....	91
Tabla 12: Hallazgos de sucesiones en tablas de contenido de textos básica secundaria	93
Tabla 13: Tipos de secuencias, ciclo Sexto a séptimo.....	100
Tabla 14: Tipos de representación, ciclo Sexto a séptimo	101
Tabla 15: Etapas del proceso de generalizar, ciclo octavo a noveno	102
Tabla 16: Tipos de secuencia, ciclo octavo y noveno.	112
Tabla 17: Tipos de representaciones, ciclo octavo y noveno.	112
Tabla 18: Etapas del proceso de generalizar, ciclo octavo a noveno	112

IMÁGENES

Imagen 1: Las secuencias a lo largo de la educación primaria (Tomada de Mora, 2012, p. 15)	39
Imagen 2: Registros posibles para secuencias. Tomado de Mora (2012, p. 8)	41
Imagen 3: ¿Qué sigue y cuál es la regla? LC (1998, p. 55).....	46
Imagen 4: valor numérico de cada uno de los símbolos. LC (1998, p. 57).....	46
Imagen 5: Letras iguales representan dígitos iguales y letras diferentes, dígitos diferentes. LC (1998, P. 59)	46
Imagen 6: Construir un cuadrado. LC (1998, P. 62)	47
Imagen 7: proceso de generalizar de los números impares. LC (1998, P. 70)	47
Imagen 8: DBA (2016, p. 8)	50
Imagen 9: DBA (2016, p. 20)	50
Imagen 10: DBA (2016, p. 27)	51
Imagen 11: DBA (2016, p. 35)	52
Imagen 12: DBA (2016, p. 41)	52
Imagen 13: DBA (2016, p. 49)	53
Imagen 14: DBA (2016, p. 56)	53
Imagen 15: DBA (2016, p. 63)	54
Imagen 16: DBA (2016, p. 71)	54
Imagen 17: Encuesta Google Drive.....	57
Imagen 18: Ejemplo de Tabla de contenido Proyecto Saber es Ser y Hacer- básica primaria	61
Imagen 19: Ejemplo de Tabla de contenido Proyecto Saber es Ser y Hacer- básica secundaria	61
Imagen 20: ejemplo de Apertura del módulo, Proyecto Saber es Ser y Hacer- básica primaria	62
Imagen 21: ejemplo de Páginas de contenido y actividades, Proyecto Saber es Ser y Hacer	63
Imagen 22: Ejemplo de Situación de aprendizaje, Proyecto Saber es Ser y Hacer	63
Imagen 23: Ejemplo de Actividades, Proyecto Saber es Ser y Hacer	64

Imagen 24: Ejemplo de Desarrollo de contenidos, Proyecto Saber es Ser y Hacer	65
Imagen 25: Ejemplo de secuencia, grado primero, Módulo 1, sección 6 (p. 54)	68
Imagen 26: Recuerda que, grado primero, Módulo 1, sección 6 (p. 54)	68
Imagen 27: Punto 4, grado primero, Módulo 1, sección 6 (p. 55).....	69
Imagen 28: Punto 4, grado primero, Módulo 2, sección 2 (p. 97).....	70
Imagen 29: Prueba saber, grado primero, Módulo 2, sección 2 (p. 97)	70
Imagen 30: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado primero (p. 28).....	71
Imagen 31: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado primero (p. 31).....	71
Imagen 32: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado primero (p. 57).....	71
Imagen 33: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado primero (p. 124).....	72
Imagen 34: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado primero (p. 128).....	72
Imagen 35: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado primero (p. 184).....	72
Imagen 36: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado primero (p. 185).....	72
Imagen 37: Recuerda que. Grado segundo primaria. p. 48	73
Imagen 38: Ejemplo de secuencias, grado segundo, Módulo 1, Sección (p. 48)	73
Imagen 39: Ejemplo de secuencias, grado segundo, Módulo 4, Sección 3 (p. 210)	74
Imagen 40: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado segundo (p. 21)	75
Imagen 41: Ejemplo de secuencias, grado tercero, Módulo 2, Sección 2 (p. 94)	76
Imagen 42: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado tercero (p. 20)	77
Imagen 43: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado tercero (p. 70)	78
Imagen 44: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado tercero (p. 78)	78
Imagen 45: Etapa de Ver. Grado primero, p. 55.....	80
Imagen 46: Etapa de Decir. Grado segundo, p. 49	80
Imagen 47: Tareas de secuencias, otras secciones, grado segundo (p. 81)	81
Imagen 48: Tareas de secuencias, otras secciones, grado segundo (p. 143)	81
Imagen 49: Ejemplo de secuencias, grado cuarto, Módulo 2, Sección 5 (p. 118).....	83
Imagen 50: Ejemplo de secuencias, grado cuarto, Módulo 3, Sección 3 (p. 156).....	84
Imagen 51: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado cuarto (p. 18)	84
Imagen 52: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado cuarto (p. 179)	85
Imagen 53: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado cuarto (p. 183)	85

Imagen 54: Ejemplo de secuencias, grado quinto, Módulo 2, Sección 3 (p. 102)	86
Imagen 55: Ejemplo de secuencias, grado quinto, Módulo 3, Sección 3 (p. 156)	87
Imagen 56: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado quinto (p. 25)	87
Imagen 57: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado quinto (p. 121)	88
Imagen 58: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado quinto (p. 205)	88
Imagen 59: Ejemplo de la etapa Ver, grado quinto (p. 121)	89
Imagen 60: Etapa de Decir. Grado cuarto, p.157	90
Imagen 61: Ejemplo donde se observa las etapas de Ver, Decir y Registrar. Grado cuarto, p. 119	90
Imagen 62 Tareas de secuencias, otras secciones, grado quinto (p. 32).....	91
Imagen 63: Ejemplo 2 de estructura de sección en ciclo sexto a séptimo.....	92
Imagen 64: Ejemplo de secuencias, grado sexto, Unidad 1, Propiedades de la potenciación (p. 29)	94
Imagen 65: Ejemplo de secuencias, grado sexto, Unidad 1, Propiedades de la logaritmación (p. 36)	94
Imagen 66: Ejemplo de secuencias, grado sexto, Unidad 1, solución de problemas (p. 46)	95
Imagen 67: Ejemplo de secuencias, grado sexto, Unidad 2, método abreviado para hallar el m.c.m. (p. 75)	95
Imagen 68: Ejemplo de secuencias, grado sexto, Unidad 3, radicación de fracciones (p. 112)	96
Imagen 69: Ejemplo de secuencias, grado sexto, Unidad 3, Los decimales y los porcentajes (p.121)	96
Imagen 70: Ejemplo de secuencias, grado sexto, Unidad 6, Prueba saber (p. 279)	97
Imagen 71: Ejemplo de secuencias, grado séptimo, Unidad 3, Proporcionalidad directa (p. 115).....	97
Imagen 72: Ejemplo de secuencias, grado séptimo, Unidad 3, Proporcionalidad directa (p. 116).....	98
Imagen 73: Ejemplo de secuencias, grado séptimo, Unidad 3, Proporcionalidad directa (p. 118).....	98

Imagen 74: Ejemplo de secuencias, grado séptimo, Unidad 3, Proporcionalidad directa (p. 118).....	99
Imagen 75: Ejemplo de generalización., grado séptimo, Unidad 2, Potenciación de números racionales (p. 83)	100
Imagen 76: Ejemplo 2 de tarea de etapas de Ver, Decir y Registrar (p.185)	101
Imagen 77: Ejemplo de secuencias, grado octavo, Unidad 6, función (p. 206)	103
Imagen 78: Tabla de contenido Proyecto Saber, Ser y Hacer Noveno.....	104
Imagen 79: Situación de aprendizaje, sucesiones (p. 178).....	104
Imagen 80: Ejemplo de sucesiones recursivas (p.179).....	105
Imagen 81: Tareas de sucesiones recursivas (p. 180).....	106
Imagen 82: Situación de aprendizaje, sucesiones aritméticas (p. 181)	107
Imagen 83: Ejemplo de sucesiones aritméticas (p.182)	107
Imagen 84: Tareas de sucesiones aritméticas (p. 184)	108
Imagen 85: Situación de aprendizaje, sucesiones geométricas (p. 186).....	108
Imagen 86: Ejemplo de sucesiones geométricas (p.187).....	109
Imagen 87: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado noveno (p. 193).....	110
Imagen 88: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado noveno (p. 194).....	110
Imagen 89: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado noveno (p. 195).....	111
Imagen 90: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado noveno (p. 199).....	111
Imagen 91: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado noveno, Parte 1 (p. 204)	111
Imagen 92: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado noveno. Parte 2 (p. 204)	111
Imagen 93: Ejemplo 1 de tarea de etapas de Ver, Decir y Registrar (p.185)	113
Imagen 94: Ejemplo 2 de tarea de etapas de Ver, Decir y Registrar (p.185)	113
Imagen 95: Ejemplo de secuencias numéricas. Grado quinto	115
Imagen 96: Ejemplo de secuencias tabulares. Grado cuarto	115
Imagen 97: Ejemplo de secuencias grafico-numéricas. Grado tercero	115
Imagen 98: Ejemplo de secuencias gráficas. Grado primero	115
Imagen 99: Ejemplo de secuencias corporales. Grado primero	115

Imagen 100: Evidencias del proceso de las secuencias en la básica primaria.....	115
Imagen 101: Ejemplo 1 de consistencia. Grado segundo, p. 211	116
Imagen 102: Ejemplo 2 de consistencia. Grado cuarto, p.157	116
Imagen 103: Ejemplo 3 de consistencia. Grado tercero, (p.95)	117
Imagen 104: Análisis A priori. Recuerda que. Grado primero, p. 55.....	117
Imagen 105: Análisis A priori. Ejemplo de secuencia, grado tercero p. 178	118
Imagen 106: Ejemplo 1 de claridad. Grado Primero. p. 55	118
Imagen 107 Ejemplo 2 de claridad. Grado segundo, p. 102.....	119
Imagen 108: Ejemplo 3 de claridad. Grado cuarto, p.156.....	119
Imagen 109: Segundo p.103	119
Imagen 110: Evidencia de trascendencia, grado tercero (p.179).....	120
Imagen 111: Evidencia de trascendencia, grado quinto (p.157).....	121
Imagen 112: Ejemplo de ejercitación, grado Primero (p.97)	121
Imagen 113: Ejemplo de ejercitación, grado tercero (p.43)	122
Imagen 114: Ejemplo de ejercitación, grado quinto (p.103)	122
Imagen 115: Ejemplo 1 de claridad. Grado Noveno. p. 180	123
Imagen 116: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado noveno (p. 195)....	124
Imagen 117: Ejemplo de autenticidad, grado noveno, p.193	124
Imagen 118: Evidencia de trascendencia, grado noveno (p. 185)	126

GRÁFICAS

Gráfica 1: Resultados de encuesta Google Drive	58
Gráfica 2: Resultados encuestas locales San Victorino.....	58

INTRODUCCIÓN

Este documento presenta un análisis a priori de textos escolares, en una serie editorial de primero a Noveno, en relación con el proceso de generalización de patrones. Se reconoce que el aprendizaje de las matemáticas y, en particular, del álgebra es un punto neurálgico y que, en este contexto, la generalización surge como una posibilidad interesante y valiosa para desarrollar el pensamiento algebraico, incluso desde edades tempranas y no solamente en el grado octavo, en el cual tradicionalmente se inicia el estudio algebraico.

Asimismo, se reconoce que los textos escolares son una evidencia importante de las propuestas curriculares para el área de matemáticas y, en últimas, permite establecer el lugar de un objeto o proceso matemático en la escuela colombiana; para el interés de este trabajo, el proceso de generalizar.

Este acercamiento a los textos escolares, se evidenciará desde dos enfoques compuestos por cuatro niveles propuestos por Van Dormolen (1986), a saber: Consistencia, Claridad, Autenticidad y Trascendencia, desde los cuales, en concordancia con los referentes de calidad vigentes en Colombia, se realizará un análisis de la forma en que los textos escolares proponen la enseñanza del proceso de generalizar patrones, específicamente en una de las series editoriales para el área con mayor receptividad por la comunidad de docentes de Bogotá. Los elementos antes señalados, se desarrollan en el marco de referencia que hace parte de este documento.

En el cuerpo del trabajo, se presenta una descripción grado a grado de los textos escolares desde primero hasta noveno de las definiciones, ejemplos y actividades que se relacionan con el proceso de generalizar, posteriormente dentro del nivel denominado trascendencia se hace un paralelo de lo propuesto en los referentes de calidad y lo abordado por la Editorial seleccionada.

También podrán encontrar, tablas que reportan porcentajes comparativos entre lo que los textos proponen del pensamiento variacional frente a otros pensamientos, el uso de tipos de

secuencias, tipos de representaciones utilizadas entre otros. Esto con el propósito de evidenciar el nivel de importancia o de intensidad del tema que se presenta.

La intención de este trabajo, no radica en generar nuevas propuestas curriculares, ni sentar una posición con relación a la pertinencia o no del uso de textos escolares; más bien, está encaminada en generar conciencia acerca de la importancia de las decisiones curriculares que toman los maestros de matemáticas al elegir un texto escolar y, en consecuencia, la responsabilidad de tomar tales decisiones de manera documentada, con un sentido crítico, participativo y reflexivo.

JUSTIFICACIÓN

Diversos estudios sobre la enseñanza del álgebra (Mason (1985), Rojano (1996), Font (2000), Sessa (2005), Radford (2006), Trujillo (2008), Socas (2011), Rojas y Vergel (2013)) señalan la pertinencia y necesidad de iniciar el trabajo algebraico desde edades tempranas. Según Sessa (2005. p. 11) los estudiantes consideran el álgebra como “una fuente inagotable de perdida de sentido y de dificultades operatorias muy difíciles de superar” donde pocos son los que logran destrezas en el trabajo algebraico, debido en gran medida a la manera tradicional como se presenta el álgebra, como un lenguaje desprovisto de significado para los estudiantes, y al momento tardío que inicia su estudio en la escuela.

Según Trujillo (2008, p.15), “los docentes de todos los niveles educativos deben promover el pensamiento algebraico a partir de situaciones aritméticas con el objetivo de facilitar el aprendizaje del álgebra”. Se deben proponer diferentes actividades que impulsen al estudiante a la observación de patrones, que les permita la exploración, la modelación, el planteamiento de conjeturas, la discusión, la argumentación y la comprobación de ideas, de tal manera que el trabajo algebraico y, en particular el uso del lenguaje algebraico, se presente de manera auténtica y significativa para el estudiante

Así mismo, en la última edición de los Estándares del NCTM (2000), se recomienda que el desarrollo de pensamiento algebraico sea abordado desde los primeros años de escolarización:

viendo el álgebra como una constante en el currículo desde la educación infantil en adelante, los docentes pueden ayudar a los estudiantes a construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior (p. 37).

En este contexto, los autores antes referidos consideran que a partir del proceso de generalización es posible hacer realidad el trabajo algebraico temprano, y lo ilustran mediante estudios concretos con estudiantes. Esta tendencia es coherente, además con las directrices

curriculares de los referentes de calidad en Colombia; en particular, los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006), presentan el desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos desde los primeros años escolares a partir del

Estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición), se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. (...) Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición del mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula (MEN, 2006, p.66);

Esto significa que es necesario promover tareas diversas que correspondan el proceso de generalización a lo largo de toda la escolaridad de los estudiantes, de manera que se fortalezcan sus habilidades en tal proceso y, con ello, se avance en el desarrollo de su pensamiento algebraico y aparezca la necesidad del lenguaje algebraico de una manera más significativa, aunque sea en un contexto matemático.

Ahora bien, un libro de texto es un instrumento que materializa las propuestas curriculares del Ministerio de Educación y ayuda al docente en la organización, optimización de tiempos, ya que presenta una estructura pedagógica basadas en actividades y ejercicios (Vargas, 2003, p.12). Adicionalmente se considera “que un libro de texto bien realizado puede contribuir a facilitar y hacer más eficiente el trabajo del profesor y los estudiantes en mejorar la calidad de la educación” (Peña, B. citado por Vargas 2003).

Es evidente, entonces que el libro de texto, el instrumento mayoritariamente usado por los docentes según el Tercer Estudio Internacional de Ciencias y Matemáticas (TERCE, 2014), tiene una gran influencia sobre las propuestas didácticas para la enseñanza de las matemáticas a partir de lo que determina como temáticas de enseñanza, ejercicios y problemas a

solucionar, en particular en lo referido a pensamiento algebraico. Esto tiene aún más trascendencia en Colombia, dada la descentralización del currículo, por lo que se considera relevante indagar y analizar las propuestas curriculares que presentan los textos escolares, desde los primeros años de la vida escolar; para este caso, en relación al proceso de generalizar, reconociendo las potencialidades de este proceso para el desarrollo del pensamiento algebraico.

OBJETIVOS

Objetivo general

Analizar los planteamientos propuestos por una serie de matemáticas de un grupo editorial específico, para abordar los procesos de generalización a lo largo de la etapa escolar.

Objetivos específicos

- Identificar las actividades, contenidos y estrategias didácticas diseñadas por un grupo editorial para desarrollar el proceso de generalización a nivel escolar.
- Establecer un paralelo entre lo propuesto por el MEN en los referentes de calidad, y lo desarrollado como propuesta por el grupo editorial para abordar el proceso de generalización.
- Reconocer la consistencia, claridad, autenticidad y trascendencia de la serie de matemáticas analizada, en relación con el proceso de generalizar.

MARCO DE REFERENCIA

Para el desarrollo de este trabajo se tuvieron en cuenta dos aspectos como marco de referencia; por una parte, el texto escolar como recurso educativo y como objeto de estudio en el campo de la Educación Matemática. El otro aspecto está referido al proceso de generalizar, desde lo enunciado en los referentes de calidad colombianos y algunos elementos teorizados en el campo de la Educación Matemática.

Textos escolares.

El texto escolar ha sido un recurso educativo muy importante a través del tiempo en diferentes países, su uso en las aulas de clase, aun en la actualidad con el auge de las tecnologías de la información y comunicación, hace que sea considerado un material educativo universal. El Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE, 2014), muestra que, en los sistemas educativos de los 15 países de Latinoamérica estudiados, el uso de texto escolar tiene una influencia positiva en un mejor desempeño de los estudiantes, frente a los que no lo usan; es evidente, entonces, que los textos escolares cumplen un papel fundamental en el proceso educativo.

Tradicionalmente el texto escolar se reconoce como un recurso didáctico impreso y encuadrado, que contiene un conjunto de imágenes y escritos que presentan información verbal y gráfica estructurada pedagógicamente, cuyo uso, por profesores y estudiantes, responde a un acto educativo intencionado¹. Se colige, entonces, que el texto escolar es un material de apoyo para estudiantes y profesores, en tanto es un mediador del aprendizaje para los primeros y, un material que selecciona y representa el universo científico y cultural que se pretende enseñar, según el currículo donde se enmarque la acción del profesor.

Álzate (2000), señala que el texto escolar, es una herramienta pedagógica que los docentes, alumnos e instituciones pueden utilizar, como material complementario o como guía de ejercicios para consultar o indagar. Por otra parte, Vargas (2003, p.12) considera que “los

¹ Para autores como Antolínez & Galindo (2013, p. 11), esta misma definición aplica cuando se hace referencia a libros de texto, así, para efectos de este trabajo el significado de libro de texto y texto escolar será el mismo

libros de texto escolar son un valioso instrumento educativo que materializa los programas curriculares”; entonces, se reconoce que a través del texto se concretan temas, actividades, ejemplos, estrategias de evaluación, es decir, los libros de textos son una propuesta curricular.

Desde estas perspectivas, es posible reconocer diferentes utilidades del texto escolar (Santos, 2016, p.2), sin querer decir que sean excluyentes entre sí:

Informativo: presenta una selección de datos organizados.

Organizativo: brinda estructura y secuencia a los procesos, actividades, elementos o dispositivos.

Motivador: busca ser atrayente, relevante, pertinente al educando.

Comunicativo: comparte información de forma escrita o gráfica. Si se traduce de otro idioma se convierte en medio de transferencia de conocimiento.

Científico: adapta al estudiante el corpus de conocimiento de una disciplina o asignatura específica.

Pedagógico: porque responde directamente a un modelo Pedagógico, un paradigma de aprendizaje y enseñanza.

Ideológico: transmite y fomenta valores de manera explícita o implícita.

Orientador: brinda instrucciones, relaciones entre el mismo texto y otros dispositivos didácticos, o con el entorno del educando.

Integrador: vincula el saber teórico y el práctico.

Docente: porque al ser elegido por él, lleva algo de su forma de enseñar, y orienta actividades de aprendizaje cuando está ausente.

Según Santos (2016, p. 1), se pueden establecer tres tipos de texto escolar así: (i) *Tipo manual*, instruccional, “secuenciado, ilustrado, detallado de tal forma que permita que el lector realice una tarea siguiendo las instrucciones”, (ii) *Tipo texto escolar*, que presenta la organización por temas o áreas de un currículo, de manera tal que potencia la competencia lectora, la capacidad de inferencia y construcción de nuevas ideas a partir de lo leído, y (iii)

Tipo texto de lectura, que compila un conjunto de documentos que sirven para usar como material de consulta o exemplificación.

Otra clasificación de los libros de texto es la presentada por Van Dormolen (citado por Monterrubio y Ortega, 2009), quien los clasifica según su contenido en: (i) sólo ejercicios y problemas, (ii) teoría, por un lado, y problemas y ejercicios de aplicación después, y (iii) teoría, ejercicios y problemas en forma simultánea, clasificación que determina de cierta manera un estilo de enseñanza de las matemáticas y posibles usos del texto por parte de los estudiantes y docentes.

Ahora, en relación con el uso de los textos en el aula, Guëmes (2001, citado por Maldonado, Rodríguez y Tuyub, 2007), destaca dos vertientes diferentes respecto al uso de los textos escolares.

La primera hace referencia a las prácticas que se tienen del uso de los mismos:

- Utilizar el libro de texto como currículo (Autoridad máxima que informa qué y cómo se desarrolla el currículo).
- Combinación de libro de texto con otros materiales. (el profesor determina el tiempo que se debe emplear y la función que debe realizar el Libro de Texto).
- Sustitución del Texto Escolar por otros medios o materiales (El profesor elabora su propia planificación de la enseñanza).

La segunda hace referencia al estilo de enseñanza que el profesor tiene a partir de los libros de texto, así los tipos de uso de los libros de texto son:

- Un tipo metódico, donde se cubre todo el tiempo de la clase con el libro de texto.
- Otro tipo basado en las actividades
- Un tipo centrado en la discusión y/o reflexión.

Escudero (1983, citado por Monterrubio, 2009), considera que los libros de texto tienen tres dimensiones las cuales pueden ser categorías en un análisis de texto:

- i) La dimensión semántica se entiende como las relaciones entre los enunciados y los intérpretes de los signos en un contexto particular, esto implica que las situaciones planteadas toman un sentido específico desde el contexto matemático. Un ejemplo

que atiende a esta dimensión es la interpretación que en diferentes contextos toma la expresión “encuentre el patrón”; desde un sentido común, esta expresión hace referencia a encontrar o ubicar al jefe, pero en el contexto matemático, se entiende como encontrar la regularidad que define una secuencia.

- ii) La sintáctica, como el conjunto de reglas que organizan las relaciones entre los signos, significado del lenguaje gráfico, estructuras, etc. Se evidencia en el uso correcto del lenguaje para lograr un mensaje que transmita claramente la intención. Por ejemplo, en el problema clásico de la duplicación del cubo, construir, mediante el uso de regla y compás, un cubo tal que su volumen sea el doble del volumen de otro cubo dado, la expresión “el doble” puede sugerir al estudiante construir el nuevo cubo duplicando las medidas de los lados del cubo inicial, que evidentemente no es la solución del problema.
- iii) La pragmática, presenta una relación con el uso de símbolos, lenguaje verbal y las actividades planteadas desde la didáctica; es decir, si se pretende enseñar “secuencias figúrales de patrones”, el propósito, las tablas, los ejercicios y las imágenes deben corresponder con el mismo concepto.

Los planteamientos anteriores evidencian que, desde el punto de vista educativo, el texto escolar ha sido objeto de estudio y teorización, con diferentes posturas, usos, y alcances; en Colombia estos estudios no han sido la excepción, autores como Álzate, Lanza & Gómez (2007), a través del grupo de investigación pedagógica y educativa de la Universidad Tecnológica de Pereira, han analizado los “usos de los libros de texto escolar: actividades, funciones y dispositivos didácticos”.

Los orígenes del uso de los textos escolares en Colombia, como herramienta para orientar, delimitar y organizar el aprendizaje de ciertos saberes, datan del siglo XVII, cuando se formalizó el proceso educativo de forma simultánea, secuenciada y por parte de múltiples personas. Desde entonces, los textos escolares han servido como un material de apoyo fundamental para docentes, estudiantes y padres de familia, en tanto permiten organizar los contenidos, temas y aprendizajes esperados, y garantizar la equidad en el saber, esto es que todos los estudiantes accedan al mismo conocimiento, de la misma manera y valorado en igualdad de condiciones.

Así, teniendo en cuenta que en Colombia el currículo no es centralizado, el texto escolar se constituye en una propuesta curricular que pretende responder a los lineamientos establecidos en los referentes de calidad, convirtiéndose en las gafas del profesor para leer e interpretar tales referentes: Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencias y Derechos Básicos de Aprendizaje.

Análisis de textos escolares de matemáticas

Los textos escolares de matemáticas son considerados como uno de los recursos más importantes para la enseñanza, como guía para la instrucción y el aprendizaje de las matemáticas y como banco de problemas y situaciones para desarrollar (Fan, Zhu y Miao, 2013, citado por García, sf). Esto lo convierte en un material universal, en el sentido de que es popular y de uso común de profesores y estudiantes, por lo que resulta natural que su análisis sea un objeto de estudio e investigación en Educación Matemática. Múltiples estudios evidencian diferentes propuestas de análisis de textos escolares de matemáticas; algunos son análisis de textos completos, otros por secciones u objetos matemáticos específicos en el texto y, en gran parte, análisis comparativos de varios textos alrededor de cuestiones particulares algunos ejemplos son: Sánchez & Bolívar (2015), Luque (2010), Santos (2016) y García (s.f.) entre otros.

Ramírez (2002, citado por Luque, 2010) afirma, con respecto al texto escolar de matemáticas, que se puede indagar sobre “sus contenidos (y sus vacíos), la manera como éstos se organizan y enfatizan, los valores, estereotipos, prejuicios que trasmite y deja de transmitir”; la organización misma de los contenidos en el texto es la evidencia de una postura curricular para la enseñanza de las matemáticas. Según Luque (2010), la relación entre la manera como se organizan los contenidos en el texto escolar y la correspondencia de esta organización con los programas curriculares, es uno de los ejes problematizadores que hacen del texto escolar un objeto de investigación

Bruno y Cabrera (Citando a Van Dormolen 1986), en su trabajo titulado “la recta numérica en los libros de texto en España” señalan que hay tres tipos de análisis de textos: el análisis *a priori*, *a posteriori* y *a tempo*. Define como análisis *a priori* de los textos, el estudio del texto en sí mismo como posible medio de instrucción, el análisis *a tempo*, como el que estudia

la manera en que los estudiantes y profesores usan el texto durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, y el análisis *a posteriori*, como el que permite reconocer los efectos del uso del texto en relación con los resultados del aprendizaje

Evidentemente, los análisis *a posteriori* y *a tempo* dependen de los profesores y los estudiantes y se remiten a efectos posteriores del uso de los textos escolares. Para el caso del análisis *a priori*, la mirada se basa en el contenido mismo del texto desde dos posibles enfoques, el primero de ellos centrado en tres aspectos relevantes:

1. *Consistencia.* En un buen texto escolar de matemáticas, no debe haber errores, ya sea de cálculo o de lógica, los planteamientos (las pruebas) pueden ser incompletos, pero no falsos, y se debe verificar el uso adecuado de los convenios adoptados en la matemática.
2. *Claridad.* El contenido debe ser claro, el texto debe sugerir una estructura definida que le permita al lector establecer correspondencia con el contexto propuesto por el autor.
3. *Autenticidad,* en la relación entre las matemáticas genuinas y las situaciones problemáticas para los temas planteados. Van Dormolen (1986, p. 152, traducción libre realizada por Cedeño, M. y Raigoso, C.) propone el siguiente ejemplo para explicar este aspecto:

$2a + 3a$ es igual a $5a$, porque dos manzanas y tres manzanas son cinco manzanas". No hay problema: ¿por qué deberíamos escribir algo más en lugar de $2a + 3a$? El aspecto algorítmico parece estar bien, al menos a corto plazo (pero ¿qué haremos con $2a + 3b$ o con $2ab + 3ab$?). El aspecto teórico, sin embargo, ha sido totalmente borroso. El hecho de que a es una variable sobre un conjunto de números y que $2a$ signifique 2 veces cualquier número de ese conjunto el cual puede ser sustituido por la letra a es completamente perdido. Por lo tanto, no llamaríamos a esta matemática genuina. Esto no significa que no aboguemos por el uso de material concreto, sino que debe elegirse de tal forma que se pueda generalizar en forma abstracta sin que se lo obligue a decir que, de hecho, lo que se ha enseñado es falso.

El segundo enfoque se centra en reconocer la pertinencia del texto en la planificación a largo plazo, en el sentido de establecer si los contenidos presentados en el libro de texto se corresponden y ayudan a desarrollar habilidades que los estudiantes tendrán que utilizar en el futuro. Por tal motivo se hará una mirada sobre los referentes de calidad porque son el modelo colombiano para el desarrollo de pensamiento matemático, si los textos los siguen garantizamos que se desarrolla este otro nivel de concepto. Así, el segundo enfoque para efectos del presente trabajo se denominará *trascendencia*.

Van Dormolen (citado por Bruno y Cabrera, 1986, p.127) propone algunas preguntas que pueden dar pistas respecto a la elaboración de un análisis a priori, las dos primeras dan cuenta del texto consistente, la tercera hace referencia a la claridad, la cuarta a la autenticidad y la última, se relaciona con el segundo enfoque presentado, estas preguntas se relacionan a continuación:

- ¿Hay algo erróneo que el profesor debería corregir?
- ¿Hay alguna carencia? Si la hay, ¿debería el profesor tener cuidado y dar la información suplementaria en el aula?
- ¿Es “claro” el texto desde el punto de vista matemático?
- ¿Es genuina la matemática?
- ¿Es el texto tan exhaustivo que no provoca ninguna actividad mental en los estudiantes? Si ése es el caso, ¿debería el profesor mantener esa parte del texto fuera del alcance de los estudiantes?

Tales preguntas permitirán caracterizar el tratamiento del proceso de generalizar en los textos escolares y si hay representaciones inadecuadas o carencias en los textos que los profesores deberían conocer para mejorar o completar el proceso de enseñanza-aprendizaje desde su gestión de aula.

Generalización

La Real Academia Española (RAE), define generalización como la “acción de abstraer de lo que es común y esencial a muchas cosas, para formar un concepto general que las comprenda todas”; de esto se colige que la generalización se da en todas las actividades de los individuos y en las diferentes ramas del saber. Radford (1996, citado por Pérez 2005, p. 36) confirma estos planteamientos cuando afirma: “Seguramente la generalización no es específica a las matemáticas: desde un cierto punto de vista es, quizás, una de las más profundas características de todo conocimiento cotidiano no científico...”, incluso en edades muy tempranas como lo ilustra Mason (1985), en su libro “Rutas hacia el álgebra, raíces del álgebra”, a partir de tres ejemplos específicos, a saber:

- a. Carolina (de seis meses) introduce el dedo pulgar a su boca cuando se le carga para llevarla a su cama.
- b. Alicia (de dos años) dice, “papi” cuando oye las puertas de un carro, al ser cerradas a cierta hora del día.
- c. Para David (de seis años), “los hombres son más grandes que las mujeres.

Así, “la generalización es una actividad continua en la actividad intelectual y se da en todos los niveles. Hay secuencias, regularidades que se dan en la naturaleza y en la vida diaria que pueden ayudar a tomar conciencia de generalidades...” (Grupo Azarquiel 1993, p. 36), pero especialmente en las matemáticas.

La generalización es la esencia de las matemáticas y de las ciencias: no se contenta con los casos particulares, se trata de expresar un conjunto de situaciones o experiencias con un modelo, permite pasar del análisis de hechos, datos u objetos particulares, al establecimiento de leyes, que se cumplen bajo ciertas condiciones, para un conjunto de elementos dados. “Generalizar consiste en pasar (...) del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado” (Polya, 1954), o en términos de Mason (1989), “generalizar significa descubrir una ley general que nos indique: qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece que es cierto (una justificación); donde parece que es cierto, esto es, un planteamiento más general al problema” (citado por Esquinas, 2009, p. 94), actividad que, sin lugar a dudas, es fundamental dentro del desarrollo del pensamiento matemático.

La generalización es la consolidación de características comunes de elementos de un conjunto (números, reglas, gráficas, etc.) expresadas de manera condensada, las cuales se pueden evidenciar desde diferentes contextos, según Pérez (2005) existen algunos contextos en los cuales se pueden apreciar situaciones de generalización son:

i) En la vida cotidiana

Por ejemplo “cuando un niño se pincha un dedo con una aguja, piensa “Todas las agujas pinchán”; es más, sus conjeturas pueden ir mucho más allá, y hacer la generalización: “Todos los objetos puntiagudos pinchán”

ii) En identificación de invariantes

Otro contexto de generalización es la identificación de invariantes en una serie de situaciones que llevan a la formulación general de la serie; en este caso, se trata de distinguir las relaciones que hay entre cada elemento de una secuencia.

iii) En la concepción de álgebra como generalización de la aritmética

“Las reglas del álgebra constituyen expresiones que expresan generalidades, los patrones que se observan aparecen en las mismas colecciones de números, y en las operaciones comunes que se hacen con estos números” (Mason J. 1988, 91 citado por Pérez, 2005).

Por ejemplo:

- $(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$ Propiedad Asociativa de la adición
 $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $3(4 + 5) = (3 \times 4) + (2 \times 5)$ Propiedad distributiva de la multiplicación
 $a(b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ respecto a la adición

iv) En la experimentación física

En los resultados de un determinado experimento, por ejemplo, el que se hace para obtener el valor de la gravedad (g) en un lugar determinado: después de un número dado de casos el promedio de ellos llevará a generalizar que en ese lugar todos los objetos caen con la misma aceleración hallada.

v) **En las definiciones matemáticas**

Una definición matemática es la generalización de una(s) característica(s) que cumplen algunos elementos matemáticos.

Por ejemplo, la definición de progresión aritmética se refiere a todas las sucesiones que cumplen una característica especial, la razón se obtiene restando dos términos sucesivos de la sucesión.

vi) **En teoremas y corolarios**

Al igual que las definiciones, los teoremas y corolarios expresan generalizaciones para algún grupo de entes matemáticos que cumplen ciertas características; por ejemplo, la suma de dos números enteros pares es par.

vii) **En la estadística**

Cuando se analiza un conjunto de datos tomados de una población determinada y se hace una inferencia sobre estos, se está generalizando para toda la población en estudio

El Proceso de generalizar.

Como se ha visto anteriormente, la actividad de generalizar involucra una serie de aspectos que permiten abstraer datos e información, para formar un concepto general. En particular, en el contexto de identificación de invariantes, el trabajo con patrones abre la puerta para el desarrollo del pensamiento algebraico, según Zazkis y Liljedahl (2002 citado por Ávila, López y González, 2010) esto se debe a que “cuando los estudiantes exploran patrones, se dedican a detectar similitudes y diferencias, clasificar, etiquetar, buscar algoritmos, conjeturar, argumentar, establecer relaciones numéricas entre componentes o bien, a generalizar los datos y relaciones matemática”.

Desde esta perspectiva, se hace necesario precisar que “la generalización no es un concepto, es un procedimiento que propicia la generación de nuevos resultados”. Para autores como Mora (2012, p.3),

el proceso de generalizar consiste en: i) identificar aspectos en común de casos particulares, ii) buscar una propiedad común en casos particulares, abstraer los

invariantes esenciales; a estas propiedades comunes son a las que se les llama, regularidades y iii) Conectar varias situaciones a partir de características en común que permiten incluirlas dentro de una determinada clase.

El proceso de generalizar está relacionado con otros procesos matemáticos como inducir, visualizar, abstraer y simbolizar entre otros, que conllevan a aumentar el nivel de razonamiento, autores como Zazkis y Liljedahl, (2002 citado por Ávila, López y González, 2010) indican que la generalización de patrones matemáticos son el alma y corazón de las matemáticas.

En este mismo sentido, diversos autores (Goodson-Espy (1998), Hazzan (1999), Mason (1996), Lee (1996), Lee and Wheeler (1989) y Radford (1996), citados por Esquinas, 2009, p. 94) destacan la importancia del proceso de generalización en matemáticas, referido no solo a reconocer la generalidad, sino también expresarla de tal forma que se pueda operar con ella; así, el proceso de generalizar surge en situaciones que involucran la identificación y expresión del patrón que define una secuencia. Las secuencias son un conjunto de signos (orales, gestuales, físicos, comportamentales, gráficos, numéricos, etc.) ordenados, llamados términos, que se constituyen a partir de una regla de repetición o de recurrencia. Tal regla es lo que se denomina patrón.

Algunos tipos de secuencias son:

- Corporales: Son secuencias donde se utilizan movimientos corporales, ritmos o sonidos.
- Manipulativas: Son secuencias en las cuales se utilizan materiales manipulativos como tapas, fichas de colores, fichas de formas, palillos, dominós, etc.
- Figurativas o icónicas: Son secuencias en las cuales se utilizan figuras, pueden constituir la representación gráfica de las secuencias manipulativas previamente presentadas o simplemente imágenes.
- Gráfico-numéricas: Son secuencias que se presentan en gráficos y que se pueden representar con números
- Numéricas: Son secuencias cuyos términos son números.
- Tabulares: Son secuencias que se presentan en tablas.

- Por recurrencia: Son secuencias cuyos términos se pueden hallar con base en el anterior.

Un tipo especial de secuencias son las sucesiones (Mora, 2012, p.4), entendidas como funciones que asignan a cada número natural un número; por ejemplo,

\mathbb{N}	\rightarrow	\mathbb{R}
1	\rightarrow	1
2	\rightarrow	3
3	\rightarrow	5
4	\rightarrow	7
5	\rightarrow	9
:		:
n	\rightarrow	$2n-1$

Mora (2012, p.15) sugiere que el desarrollo del proceso de generalizar patrones se desarrolle de acuerdo a la Imagen 1; esto es, los estudiantes deben tener un primer acercamiento con el proceso de generalizar utilizando secuencias corporales, material manipulativo, pasando luego a las figúrales y, finalmente, a las numéricas que permiten avanzar a procesos de simbolización, numérica y luego algebraica, para el tratamiento de las sucesiones.

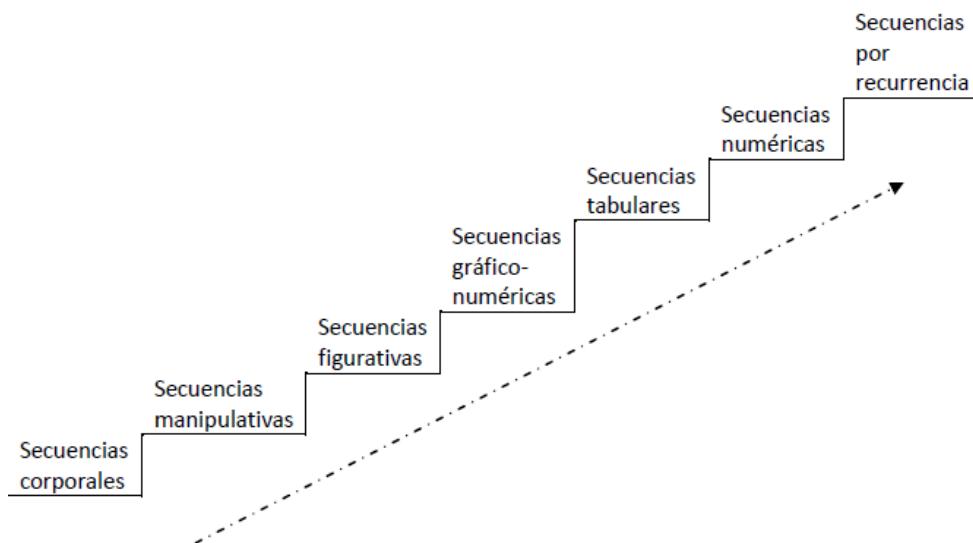


Imagen 1: Las secuencias a lo largo de la educación primaria (Tomada de Mora, 2012, p. 15)

Es importante precisar que una sucesión admite un único patrón, aunque este puede ser expresado de diferentes maneras, de acuerdo con las características que se pueden observar. Por ejemplo², en la siguiente secuencia gráfico numérica:

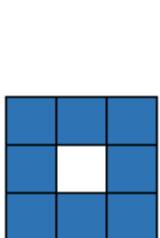


Figura 1

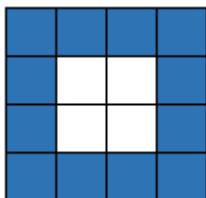


Figura 2

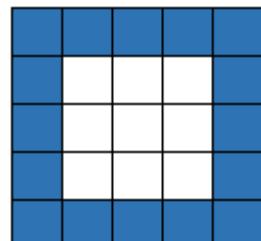


Figura 3



Figura 4 ...



Figura 37

Para determinar el número de cuadrados del borde de la figura, se pueden obtener distintas expresiones, como consecuencia de la manera como se cuentan los cuadrados y de la visualización de la figura por partes o como una totalidad (por ejemplo, al reconocer que al área cuadrada mayor se resta el área cuadrada menor). Sessa (2005, p.80), presenta una lista de las posibles fórmulas presentadas por los estudiantes:

- $2n + 2(n - 2)$
- $4(n - 1)$
- $4n - 4$
- $n^2 - (n - 2)^2$ (esta escritura requiere posiblemente ayuda del docente)
- $n + 2(n - 2) + n$

Se obtienen distintas fórmulas y todas son correctas porque calculan lo mismo para cada valor de la variable, se logra tener diversas formas de hallar y expresar el patrón de una secuencia, las cuales resultan equivalentes, ya que expresan la misma regularidad. Precisamente, esta posibilidad permite reconocer expresiones algebraicas equivalentes y dar sentido a procedimientos como la factorización de tales.

El uso de representaciones externas como símbolos o expresiones en la generalización matemática, son importantes porque crean un ambiente favorable para introducir al estudiante hacia una estructura matemática más formal; según Mora (2012), Bruner propuso en la década de los 60's, tres formas básicas en las cuales los seres humanos realizan

² Ejemplo tomado de Sessa, C. (2005, p.76)

representaciones en cuanto a la enseñanza de los conceptos, como se explica en el siguiente esquema:

Tipos de representación	La representación enactiva Está asociada con la fase sensoriomotora propuesta por Piaget, “este tipo de representación permite representar eventos mediante una respuesta motriz adecuada” (Godino Font, 2003, p. 13), esta representación se da principalmente en los primeros años de las personas.
La representación icónica	Se refiere a la representación de una situación mediante imágenes, esquemas, dibujos, iconos que modelen aquello que se quiere representar.
La representación simbólica	Es la fase más abstracta, respecto a las dos anteriores, se elige un símbolo arbitrario (ya no una imagen), que usualmente no tiene relación directa con el objeto representado y a partir de éste se comunica la situación o el objeto que se quiere representar. (Mora, 2012, p. 8)

Tabla 1: Descripción tipos de representación.

Atendiendo a este tipo de representaciones, Mora (2012) propone el siguiente esquema que ilustra los diferentes registros posibles para presentar secuencias:

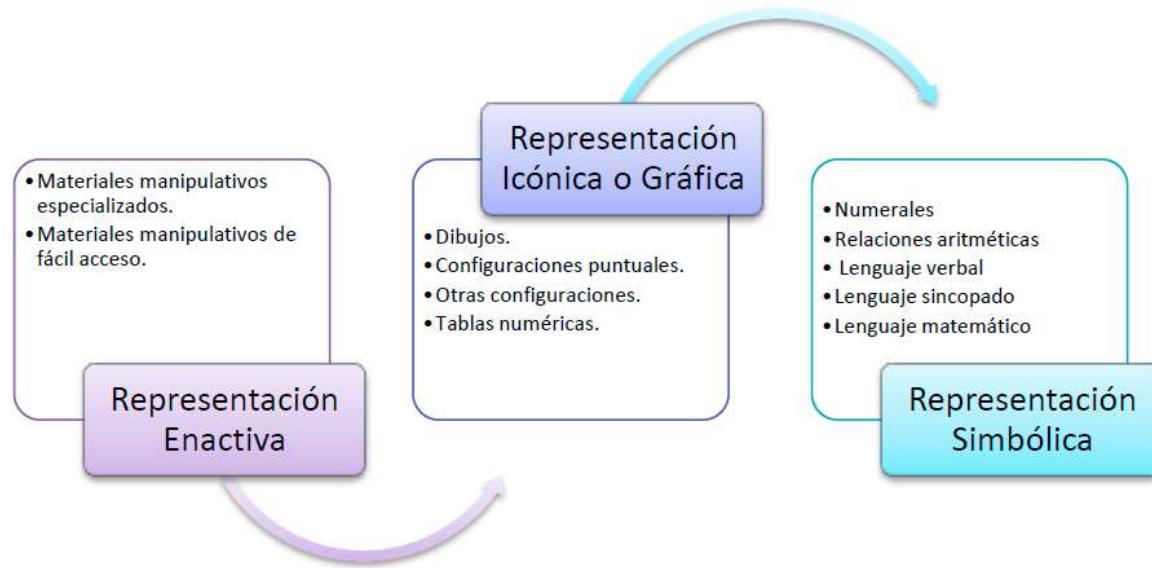


Imagen 2: Registros posibles para secuencias. Tomado de Mora (2012, p. 8)

Ahora bien, en tanto proceso, la generalización se desarrolla a través de unas etapas que diferentes autores han estudiado; no obstante, se pueden reconocer dos tendencias:

Mason (1985)	Grupo Azarquiel (1993)
“Ver” un patrón es la identificación de un patrón o de una relación.	Ver un patrón: Ver es un proceso mental que implica identificar no solamente las regularidades, sino que también permite establecer relaciones y diferencias, es decir, situaciones que varían o que se mantienen en cada situación.
“Decir” cuál es el patrón “Los alumnos con frecuencia encuentran muy difícil el moverse del 'ver' al 'decir', y su esfuerzo para decir lo que ellos ven necesita apoyo en cuanto al tiempo y a la aceptación de sus esfuerzos incompletos” referencia. (Masson, 1985)	Decir o describir un patrón: implica en primera instancia manifestar en lenguaje natural o cotidiano lo que se logra ver, relatar el patrón encontrado sin utilizar necesariamente un lenguaje formal o algebraico
“registrar” un patrón: en esta etapa se esclarecen las ideas ya que se colocan por escrito, esto permite determinar con exactitud lo expresado en la etapa anterior, para registrar existen diversas formas de hacerlo: mediante dibujos, dibujos apoyados con palabras, la mayor parte palabras y algunos símbolos o la mayor parte símbolos con algunas palabras (Mason et al., 1985, p. 21).	Registrar o escribir un patrón el escribir, es la fase final y más avanzada del proceso de generalización, no necesariamente de forma simbólica.
Prueba de validez de las fórmulas: consiste en tener la seguridad de que la regla es correcta, para ello es necesario poder dar cuenta del porqué funciona.	

Tabla 2: Etapas del proceso de generalizar.

Como se puede observar, la diferencia esencial entre estas dos tendencias está en la exigencia de argumentar o no la validez de la regla encontrada. Para efectos de este trabajo, se reconoce que la verificación de una conjetura o fórmula es un aspecto esencial del proceso de generalización pues, en términos de Mason (et al. p. 23), “para poder decir porqué la regla es correcta se necesita tener una noción de lo general, y esto involucra la idea importante de cómo un ejemplo particular puede mostrar lo general, a pesar de que éste sea específico. Y poder mostrar lo general requiere de la estructuración del ejemplo particular para así poder señalar las características generales”.

El proceso de generalizar en los referentes de calidad

En el año 1994 se promulgó la Ley General de Educación (Ley 115), la cual estructuró el sistema educativo colombiano y definió las expectativas de educación para el país. Uno de los aspectos esenciales y novedosos que define esta norma, respecto a la organización curricular de diferentes países, es la autonomía escolar, en el cual declara que:

Las instituciones de educación formal gozan de autonomía para organizar las áreas fundamentales de conocimientos definidas para cada nivel, introducir asignaturas optativas dentro de las áreas establecidas en la ley, adaptar algunas áreas a las necesidades y características regionales, adoptar métodos de enseñanza y organizar actividades formativas, culturales y deportivas, dentro de los lineamientos que establezca el Ministerio de Educación Nacional (Art. 77).

Esto significa que, si bien no hay un currículo único y centralizado para todo el país, en tanto las instituciones pueden definir su currículo y plan de estudios (Arts. 78 y 79), aunque de conformidad con los lineamientos que defina el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

En efecto, el MEN ha dispuesto de referentes que orientan el desarrollo curricular en las instituciones educativas, para las diferentes áreas fundamentales y obligatorias, los temas de enseñanza obligatoria (Art. 14) y otras cuestiones que influyen en el currículo de una institución, como la Educación Financiera, la Educación Vial, etc. Para el caso de las matemáticas, el MEN definió los Lineamientos Curriculares (1998) – LC –, los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006) – EBCM – y, recientemente, los Derechos Básicos de Aprendizaje (2016) – DBC –, orientaciones que han sido producto del trabajo entre el MEN y la comunidad académica del país.

Los LC son las orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares que fundamentan las matemáticas y las decisiones curriculares para las instituciones educativas (MEN, 1998).

Los LC proponen tres aspectos desde los cuales se organiza el currículo de matemáticas: (i) Procesos generales de la actividad matemática (Razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, comunicación, modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos), (ii) Conocimientos básicos, estructurados desde cinco pensamientos y sistemas (pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas

geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos) y (iii) Contextos de situaciones problemáticas (en relación con la matemática misma, desde la vida diaria y desde las otras ciencias).

Por su parte, los EBCM son un conjunto de criterios claros y públicos que permiten juzgar si un estudiante, una Institución o el sistema educativo en conjunto, cumplen con unas expectativas comunes de calidad, es decir, expresan lo que se espera que todos los estudiantes aprendan en matemáticas a través de su proceso escolar.

Los EBCM promueven el aprendizaje por competencias entendidas como un “conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí” (MEN, 2006, p.49). Esto implica, la necesidad de propiciar ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencias más y más complejas (MEN, 2006 p 49). Los EBCM están divididos por grupos de grados: primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a once, relacionados con los cinco tipos de pensamiento que se plantearon en los LC y en correspondencia con los procesos generales de la actividad matemática, también antes propuestos. De la misma manera, los estándares se presentan con una coherencia tanto vertical que relaciona un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados, como horizontal, dada por la relación que tiene un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos.

Finalmente, están los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (MEN, 2016), que establecen un conjunto de saberes y habilidades fundamentales que deben aprender los estudiantes a lo largo de la educación básica primaria, secundaria y media, ejemplificados con tareas puntuales año a año, que guardan coherencia con lo LC y EBCM. El propósito fundamental es definir, para docentes y para la sociedad en general, con un lenguaje sencillo y ejemplos, los aprendizajes básicos y fundamentales a los cuales tienen derechos los niños y jóvenes colombianos, grado a grado, en coherencia con los LC y los EBCM.

El MEN en el año 2015 publicó la primera versión de los DBA en las áreas de matemáticas y lenguaje, los cuales proponían tareas puntuales básicas que orientaban a los profesores y

padres sobre lo que aprenderían los estudiantes en cada uno de los grados; la estructura presentada en esta versión, reportaba un enunciado y un ejemplo. Un año más tarde, el MEN realizó la publicación de una segunda versión, que recoge las fortalezas de la primera, pero con las correcciones de las observaciones realizadas en diferentes escenarios de discusión; en esta versión se reporta una nueva estructura, la cual está compuesta por tres elementos:

- El enunciado referencia el aprendizaje estructurante para el área.
- Las evidencias expresan indicios claves que muestran a los maestros si se está alcanzando el aprendizaje expresado en el enunciado.
- El ejemplo concreta y complementa las evidencias de aprendizaje

Así, se obtienen tres niveles de concreción: LC, EBCM y DBA, que permiten fortalecer las prácticas escolares para la enseñanza de las matemáticas y la definición de currículos pertinentes y coherentes.

El proceso de generalizar en los Lineamientos Curriculares

El proceso de generalizar se menciona de manera explícita en los procesos generales de la actividad matemática, así:

- i) En la resolución de problemas, se hace referencia a la generalización como “descubrir una ley y reflexionar sistemáticamente sobre ella” (MEN, 1998, p 53),
- ii) en el razonamiento, se observa el proceso de generalizar como el acto de encontrar patrones y expresarlos matemáticamente, y
- iii) en el proceso de modelación, se indica que la generalización es el nivel más alto de la modelación.

A continuación, se reportan algunos ejemplos de tareas, publicadas en los LC, en las cuales se evidencia el proceso de generalizar, en el marco del proceso de razonar:

Educación Pre escolar

Situación 2: ¿QUÉ SIGUE Y CUÁL ES LA REGLA?

Para este problema, los niños deben sacar sus palillos y organizarlos como se indica en la figura.

El niño debe observar la secuencia que se presenta, descubrir cuál es el siguiente término de la secuencia y formular una regla de formación.

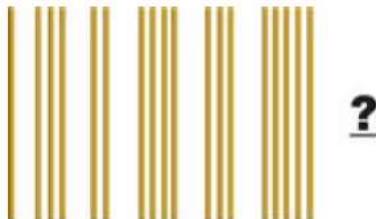


Imagen 3: ¿Qué sigue y cuál es la regla? LC (1998, p. 55)

Grados primero, segundo y tercero

Hallar el valor numérico de cada uno de los símbolos.

$$\begin{array}{rcl} \blacksquare + 8 = \lozenge & \blacksquare = ? \\ \lozenge \div 5 = \circleddash & \lozenge = ? \\ \circleddash \cdot 7 = \star & \circleddash = ? \\ \star - 10 = 11 & \star = ? \end{array}$$

Imagen 4: valor numérico de cada uno de los símbolos. LC (1998, p. 57)

Grados cuarto, quinto, y sexto.

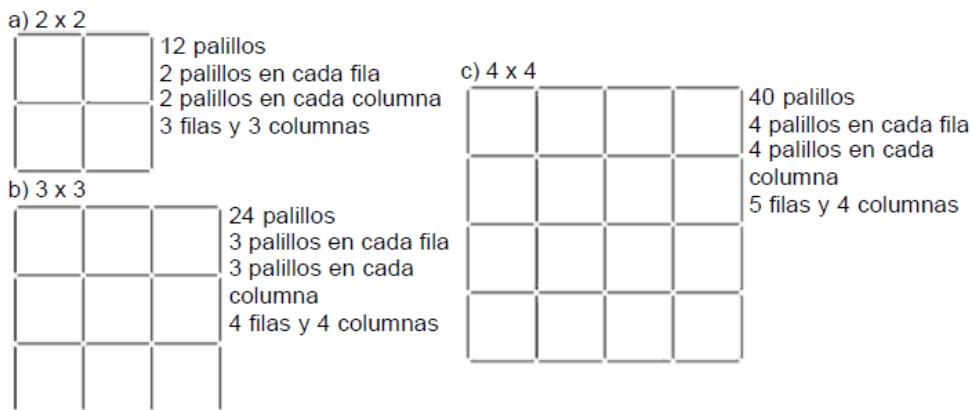
Las siguientes tres adiciones se cumplen al mismo tiempo. Conocemos las tres sumas, pero no conocemos los sumandos. Letras iguales representan dígitos iguales y letras diferentes, dígitos diferentes.

$$\begin{array}{rcl} \begin{array}{r} A \\ + A \\ \hline B \\ 7 \end{array} & \begin{array}{r} C \\ + B \\ \hline C \\ 11 \end{array} & \begin{array}{r} B \\ + C \\ \hline A \\ 9 \end{array} \\ A=? & B=? & C=? \end{array}$$

Imagen 5: Letras iguales representan dígitos iguales y letras diferentes, dígitos diferentes. LC (1998, P. 59)

Grados séptimo, octavo y noveno

Para construir un cuadrado 2×2 con palillos de la misma longitud hacen falta 12 palillos. ¿Es cierto que para construir un cuadrado 8×8 se necesita un número cuadrado de palillos?



Si se sigue este patrón, se encuentra que para un cuadrado 8×8 hay:

- 8 palillos en cada fila y 9 filas, luego hay 72 palillos en las filas.
- 8 palillos en cada columna y 9 columnas, luego hay 72 palillos en las columnas.
- En total hay 144 palillos y como $144=12^2$, se necesita un número cuadrado de palillos.

Como la tendencia de los estudiantes es a construir el cuadrado de 8×8 , vale la pena mostrarles que se puede llegar también a la solución mediante otra estrategia.

Imagen 6: Construir un cuadrado. LC (1998, P. 62)

Grados décimo y undécimo

En el caso de que la generalización no sea válida se debe mostrar un contraejemplo.

Los que faltan son:



Construya los que faltan. ¿Cuál es la regla?



La regla es: el siguiente se consigue agregando dos palillos para formar un nuevo triángulo.

Si n es la n -ésima figura y $f(n)$ es el número de palillos, entonces $f(n) = ?$

Imagen 7: proceso de generalizar de los números impares. LC (1998, P. 70)

El proceso de generalizar en los Estándares Básicos de competencias Matemáticas

El proceso de generalización se evidencia de manera explícita como un aspecto relevante en el marco del Pensamiento Variacional y los Sistemas Algebraicos y Analíticos; precisamente, “el desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente” (MEN, 2006, p.66). Es en este pensamiento que se mencionan las sucesiones o secuencias como un medio para desarrollar la capacidad de identificar las regularidades y reconocer los patrones que la generan y que se propician situaciones de aprendizaje que “dan múltiples oportunidades para la formulación de conjeturas, la puesta a prueba de las mismas, su generalización y la argumentación para sustentar o refutar una conjetura o una propuesta de generalización” (MEN, 2006, p.68).

El desarrollo de este pensamiento durante la Educación Básica Primaria es de suma importancia y, para ello, se propone que el docente presente actividades como:

analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras, al hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia, procurar expresar ese término y los siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas (MEN,2006, p.67).

De la misma manera, en la Educación Básica Secundaria se resalta la importancia de dar continuidad al proceso de generalización, desde los sistemas algebraicos, utilizando representaciones gestuales, de lenguaje ordinario o técnico, numéricas, graficas e icónicas, las cuales “actúan como intermediarias en la construcción general de los procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen el patrón y las respectivas reglas que permiten reproducirlo” (MEN, 2006, p.67).

A continuación, se presenta una tabla donde se indica el grado y el estándar que hace referencia al proceso de generalizar, por lo cual se remiten exclusivamente al Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos³:

Grado		Estándar
Primero	a	1. Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros). 4. Construyo secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas
Cuarto	a	2. Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica. 3. Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
Octavo	a	2. Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
Noveno		3. Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. 4. Modela situaciones de variación con funciones polinómicas

Tabla 3: Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006)

El proceso de generalizar en los Derechos Básicos de aprendizaje

En los DBA no se evidencia el proceso de generalizar en forma explícita; sin embargo, al realizar una lectura detallada de las evidencias de aprendizaje y de los ejemplos concretos de algunos ítems, es posible reconocer este proceso. A continuación, se detallan los ítems de los DBA que evidencian tareas relacionadas con el proceso de generalizar, que obedecen a la segunda edición publicada en el año 2016:

3 Sin embargo, vale la pena anotar que la generalización, no como proceso, también tiene lugar en algunos aspectos referidos al Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos, sobre todo en relación con el reconocimiento de propiedades de los números y sus operaciones; es decir, en el contexto de generalización de la aritmética.

Grado primero.

2 Utiliza diferentes estrategias para contar, realizar operaciones (suma y resta) y resolver problemas aditivos.

Evidencias de aprendizaje

- Realiza conteos (de uno en uno, de dos en dos, etc.) iniciando en cualquier número.
- Determina la cantidad de elementos de una colección agrupándolos de 1 en 1, de 2 en 2, de 5 en 5.
- Describe y resuelve situaciones variadas con las operaciones de suma y resta en problemas cuya estructura puede ser $a + b = ?$, $a + ? = c$, o $? + b = c$.
- Establece y argumenta conjeturas de los posibles resultados en una secuencia numérica.
- Utiliza las características del sistema decimal de numeración para crear estrategias de cálculo y estimación de sumas y restas

Ejemplo

Emplea una calculadora simple (o alguna aplicación que la simule) y explora el efecto que tiene el signo = (igual) a medida que se presiona varias veces después de digitar una suma o una resta.



- Si se presiona $5 + 2 = = = =$ ¿Cuál sería el resultado?
- ¿Cuál sería el resultado si en la calculadora se presiona $4 + 3 = = = = =$?
- Describe las acciones que hace la calculadora. Si se digita el número 3 y luego se digita + 5 y se presiona la tecla igual diez veces, ¿cuáles números aparecerán en la calculadora cada vez que se digita un "igual"?

Imagen 8: DBA (2016, p. 8)

Grado segundo

9 Opera sobre secuencias numéricas para encontrar números u operaciones faltantes y utiliza las propiedades de las operaciones en contextos escolares o extraescolares.

Evidencias de aprendizaje

- Utiliza las propiedades de las operaciones para encontrar números desconocidos en igualdades numéricas.
- Utiliza las propiedades de las operaciones para encontrar operaciones faltantes en un proceso de cálculo numérico.
- Reconoce que un número puede escribirse de varias maneras equivalentes.
- Utiliza ensayo y error para encontrar valores u operaciones desconocidas.

Ejemplo

Encuentra todas las parejas de números cuya suma es 12 y todos los resultados que se obtienen al multiplicar los números de cada pareja. Propone una tabla para presentar y relacionar los resultados. Realiza lo mismo con otros números (10, 11, etc.) y compara las parejas obtenidas. Establece procedimientos para encontrar las parejas y construye reglas para saber cuántas parejas se pueden formar según el resultado de la suma. Propone ideas sobre cuál es la pareja en la que el resultado es mayor.



Imagen 9: DBA (2016, p. 20)

Grado tercero.

8. Describe y representa los aspectos que cambian y permanecen constantes en secuencias y en otras situaciones de variación.

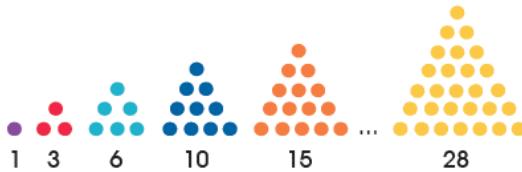
Evidencias de aprendizaje

- Describe de manera cualitativa situaciones de cambio y variación utilizando lenguaje natural, gestos, dibujos y gráficas.
- Construye secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.
- Encuentra y representa generalidades y valida sus hallazgos de acuerdo al contexto.

Ejemplo

El gráfico muestra arreglos triangulares de puntos. En la primera posición se tiene 1 punto, en la segunda 3 puntos, en la tercera 6 puntos, en la cuarta 10 puntos.

Registra (en su orden) el número de puntos en cada posición:



Posición	Número de puntos	Descripción del proceso para obtener el siguiente arreglo puntual
Primera	1	Se dibuja un punto
Segunda	3	Al punto anterior se le agregan dos puntos.
Tercera	6	
Cuarta		
Quinta		
Octava		
Novena		

Explica cómo encontrar el número de puntos en una posición cualquiera. Justifica si existe un arreglo triangular que tenga 35 puntos o 38 puntos.

Imagen 10: DBA (2016, p. 27)

Grado cuarto.

9 Identifica patrones en secuencias (aditivas o multiplicativas) y los utiliza para establecer generalizaciones aritméticas o algebraicas.

Evidencias de aprendizaje

- Comunica en forma verbal y pictórica las regularidades observadas en una secuencia.
- Establece diferentes estrategias para calcular los siguientes elementos en una secuencia.
- Conjetura y argumenta un valor futuro en una secuencia aritmética o geométrica (por ejemplo, en una secuencia de figuras predecir la posición 10, 20 o 100)

Ejemplo

Explora el efecto que tiene el signo “=” (igual) sobre el resultado a medida que se presiona varias veces.



- a. Describe y compara el efecto que la acción descrita tiene, si se presiona varias veces el signo igual después de digitar el símbolo de la multiplicación o el símbolo de la división.
- b. Describe las operaciones y resultados que muestra la calculadora, cuando se presiona $4 \times 2 = = = =$.
- c. Se digita la operación 3×4 y luego se presiona la tecla igual diez veces ¿será posible obtener un número menor que 1.000? Estima un número aproximado de veces que deberías presionar el “igual” para obtener el resultado más cercano a 1.000. Utiliza la calculadora para realizar las operaciones y verificar el resultado.
- d. Determina el mínimo número de veces que se debe presionar el signo igual después de hacer

la operación $2048 \div 2$ para obtener un número no natural.

Imagen 11: DBA (2016, p. 35)

Grado quinto

8 Describe e interpreta variaciones de dependencia entre cantidades y las representa por medio de gráficas.

Evidencias de aprendizaje

- Propone patrones de comportamiento numéricos y patrones de comportamiento gráficos.
- Realiza cálculos numéricos, organiza la información en tablas, elabora representaciones gráficas y las interpreta.
- Trabaja sobre números desconocidos para dar respuestas a los problemas.

Ejemplo



Un recipiente cilíndrico recto, se llena con una llave que vierte 4 litros de agua cada 2 minutos. El cilindro tiene capacidad de 28 litros.

Determina cuánto tiempo tarda el recipiente cilíndrico en llenarse.

Determina cuántos litros hay en el recipiente a los cinco minutos después de abrir la llave.

Determina qué ocurre con el nivel del agua a los 16 minutos.

Imagen 12: DBA (2016, p. 41)

Grado sexto

8. Identifica y analiza propiedades de covariación directa e inversa entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).

Evidencias de aprendizaje

- Propone patrones de comportamiento numéricos y expresa verbalmente o por escrito los procedimientos matemáticos.
- Realiza cálculos numéricos, organiza la información en tablas, elabora representaciones gráficas y las interpreta.
- Trabaja sobre números desconocidos y con esos números para dar respuestas a los problemas.

Imagen 13: DBA (2016, p. 49)

Grado séptimo

7. Plantea y resuelve ecuaciones, las describe verbalmente y representa situaciones de variación de manera numérica, simbólica o gráfica.

Evidencias de aprendizaje

- Plantea modelos algebraicos, gráficos o numéricos en los que identifica variables y rangos de variación de las variables.
- Toma decisiones informadas en exploraciones numéricas, algebraicas o gráficas de los modelos matemáticos usados.
- Utiliza métodos informales exploratorios para resolver ecuaciones.

Ejemplo

Con base en la información gráfica encuentra el peso de cada una de las gallinas (Los pesos están expresados en libras).

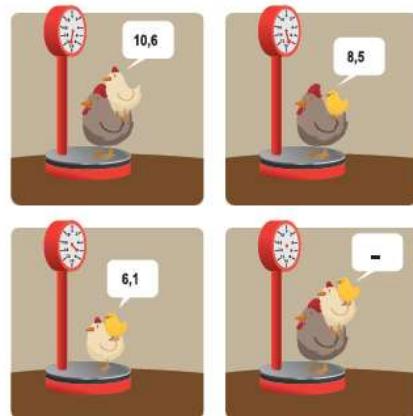


Imagen 14: DBA (2016, p. 56)

Grado octavo

- 9.** Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

Evidencias de aprendizaje

- Opera con formas simbólicas que representan números y encuentra valores desconocidos en ecuaciones numéricas.
- Reconoce patrones numéricos y los describe verbalmente.
- Representa relaciones numéricas mediante expresiones algebraicas y opera con y sobre variables.
- Describe diferentes usos del signo igual (equivalencia, igualdad condicionada) en las expresiones algebraicas.
- Utiliza las propiedades de los conjuntos numéricos para resolver ecuaciones.

Ejemplo

Encuentra valores para b, c, d, e, etc., que satisfagan las ecuaciones propuestas y argumenta cómo cambian las respuestas obtenidas si se cambia el valor de a por 6 o por 8.

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ a + 2b &= 10 \\ a + 2b + 3c &= 28 \\ a + 2b + 3c + 4d &= 68 \\ a + 2b + 3c + 4d + 5e &= 93 \\ a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f &= 123 \\ a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f + 7g &= 200 \end{aligned}$$

Describe los procedimientos para obtener valores numéricos que satisfagan las ecuaciones segunda y tercera, si se desconoce el valor de a.

Imagen 15: DBA (2016, p. 63)

Grado noveno

- 9.** Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.

Evidencias de aprendizaje

- Efectúa exploraciones, organiza los resultados de las mismas y propone patrones de comportamiento.
- Propone conjeturas sobre configuraciones geométricas o numéricas y las expresa verbal o simbólicamente.
- Valida las conjeturas y explica sus conclusiones.
- Interpreta expresiones numéricas y toma decisiones con base en su interpretación.

Ejemplo²

Encuentra de manera sistemática el número total de rectángulos que se pueden formar en un tablero de 8x8 como el de la figura, considerando que los cuadrados son casos particulares de rectángulos. Tomar como referencia la tabla de rectángulos en una tabla de 3x3. Registra la información en una tabla, encuentra la expresión general para hallar el número de rectángulos en un cuadrado de n x n.



Rectángulos en una tabla de 3x3

Número de rectángulos	Número de rectángulos verticales	Número de rectángulos horizontales	Total	Patrón observado
3x3	1	0	1	$1^2=1$
2x3	$2 \times 1 = 2$	$2 \times 1 = 2$	4	$2^2=8$
2x2	4	0	4	
1x3	$3 \times 1 = 3$	$3 \times 1 = 3$	6	
1x2	$3 \times 2 = 6$	$3 \times 2 = 6$	12	$3^2=27$
1x1	9	0	9	
total	25	11	36	36

Imagen 16: DBA (2016, p. 71)

METODOLOGÍA

Desde lo descrito en el marco de referencia, se destaca la relevancia del proceso de generalizar en la escuela para promover el pensamiento variacional y de los textos escolares como evidencia sobre el currículo que se desarrolla en las instituciones educativas y, en particular, en el área de matemáticas. En consecuencia, en la elaboración del presente trabajo de grado, se plantea un análisis del proceso de generalizar en la escuela, a través de los textos escolares, partiendo de la premisa de que los textos escolares en primaria y secundaria son parte fundamental en la enseñanza de las matemáticas. Tal análisis, en coherencia con lo planteado anteriormente sobre el proceso de generalizar, incluye tres aspectos: el tipo de secuencias que se utilizan, las representaciones que se privilegian y la posibilidad de transitar por las diferentes etapas del proceso de generalizar, a partir de las consignas y tareas que se proponen. Asimismo, se valora la correspondencia con las directrices emanadas de los referentes de calidad sobre el proceso de generalizar.

Ahora bien, teniendo en cuenta los planteamientos de Van Dormolen (1986) sobre los análisis de textos, para efectos de este trabajo se realiza un Análisis *A priori* de textos escolares en relación con el proceso de generalizar, esto significa que el instrumento de análisis es el texto, y no depende de otros factores relacionados con su uso o efectos, e implica que el análisis de los textos escolares abarca los dos enfoques sugeridos por Van Dormolen, que se resumen en 4 aspectos: consistencia, claridad, autenticidad y trascendencia.

La siguiente tabla resume los aspectos que se consideraron para el análisis, objeto de este trabajo:

ASPECTO	DESCRIPTOR
CONSISTENTE	<ul style="list-style-type: none">• ¿Hay errores matemáticos o de lenguaje en relación con el proceso de generalizar?• Los ejemplos, tareas y contenidos que se presentan en el texto, ¿promueven el proceso de generalizar?• ¿Se reconocen carencias en los aspectos referidos al proceso de generalizar: tipos de secuencias, representaciones, etapas?

	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Es evidente la complejidad o profundidad creciente en relación con los aspectos referidos al proceso de generalizar: tipos de secuencias, representaciones, etapas?
CLARO	<ul style="list-style-type: none"> • En enunciados, tareas y definiciones, ¿hay claridad en el lenguaje? • ¿Es coherente el lenguaje utilizado con las representaciones dadas?
AUTENTICO	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Se presentan escenarios artificiales en los enunciados y tareas referidos a procesos de generalización? • Las tareas que se proponen, ¿surgen de una pregunta genuina? • Las tareas que se proponen, ¿propician el planteamiento y desarrollo de preguntas auténticas?
TRASCENDENTE	<ul style="list-style-type: none"> • Las tareas y enunciados propuestos ¿son coherentes con los referentes de calidad?, ¿desarrollan habilidades de pensamiento variacional? • Las tareas propuestas, ¿promueven la actividad matemática espontánea por parte del estudiante?

Tabla 4: Aspectos a considerar en el análisis A priori

La mirada realizada a los textos escolares, consta de tres niveles de acercamiento: el primero, desde la tabla de contenido, para identificar las secciones que por su denominación incluyen el proceso de generalización; el segundo, consiste en observar al interior de cada una de estas secciones, los contenidos, propuestas y tareas; y en el tercer nivel, se reconocen tareas y enunciados asociadas al proceso de generalizar, en otras secciones del texto, como situaciones aisladas. De esta manera, el análisis reconoce el lugar que ocupa en el texto y la frecuencia de aparición del proceso de generalización, luego la manera como se aborda y finalmente, el proceso en relación con otros pensamientos y sistemas.

Elección de textos escolares.

Con el propósito de hacer un análisis de textos que refleje ampliamente la realidad escolar sobre el proceso de generalización, se decidió determinar los textos escolares del área de matemáticas más usados o más reconocidos en 2017 en la ciudad de Bogotá.

En primera instancia, se solicitó formalmente a Panamericana Librería y Papelería S.A., por ser una empresa de gran reconocimiento en ventas de libros, útiles y textos escolares, información relacionada con los textos escolares de matemáticas más vendidos en lo corrido

del año 2017; por políticas internas de manejo de información de la Librería, la información no fue suministrada.

Como segunda opción, se realizó una encuesta a estudiantes y egresados de la Licenciatura en Matemáticas (LM) Universidad Pedagógica Nacional (UPN), mediante el uso de formularios de Google Drive, con el fin de precisar información sobre los textos escolares usados en las instituciones de práctica, las instituciones donde laboran o en las instituciones donde estudian familiares cercanos. La encuesta se presenta en la siguiente imagen.

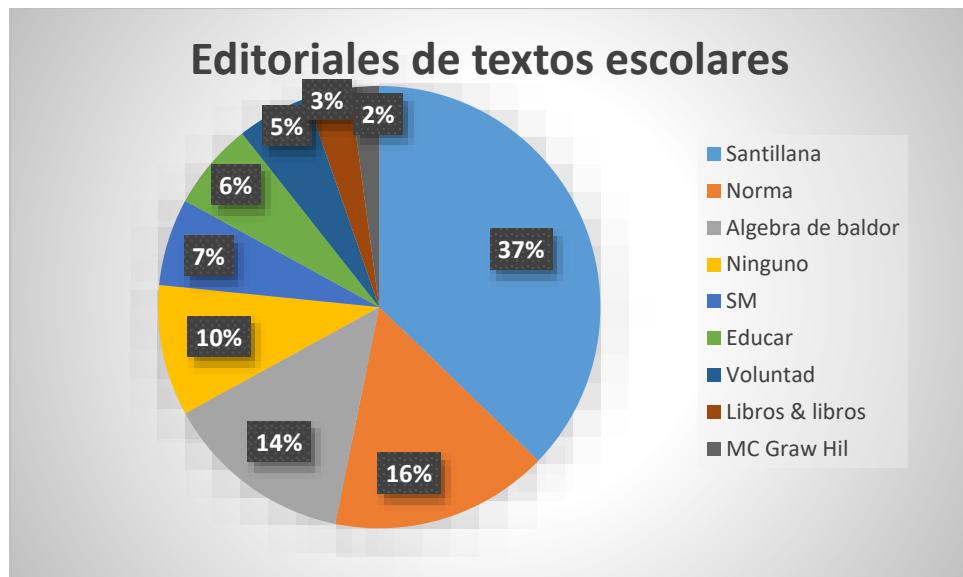
The screenshot shows a Google Form titled "El proceso de generalizar en la escuela. Un Análisis de textos." at the top. Below the title is a descriptive text about the survey's purpose. The form contains three questions:

- Nombre del Colegio donde trabaja o tiene algún familiar estudiando.***
This question has two input fields: "Nombre completo de la institución" and "Texto de respuesta corta".
- Texto de matemáticas utilizado en el colegio ***
This question has one input field: "Texto de respuesta corta".
- Editorial ***
This question has one input field: "Editorial".

On the right side of the form, there is a vertical toolbar with icons for adding questions, tables, images, videos, and more.

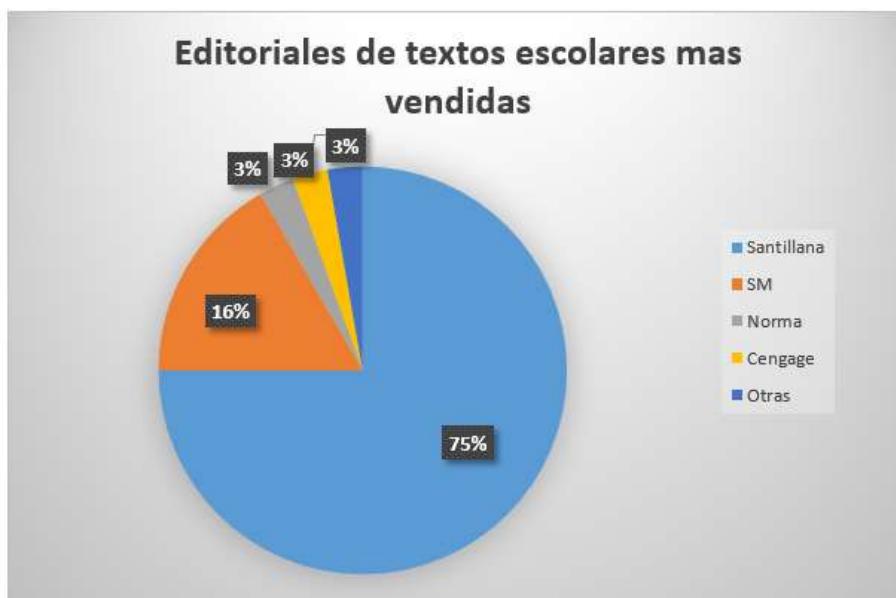
Imagen 17: Encuesta Google Drive

La sistematización de la encuesta arrojó como resultado que los textos escolares de la Editorial Santillana son los más usados (Ver grafica 1). Sin embargo, la respuesta no fue la esperada en cuanto al número de encuestas recibidas (94), lo cual no se consideró como un resultado significativo.



Gráfica 1: Resultados de encuesta Google Drive

Por lo anterior, se realizó una encuesta directa a comerciantes de libros en la ciudad, del sector llamado San Victorino, reconocido por ser un sector comercial especializado en la distribución de textos escolares. La entrevista fue realizada directamente por los autores de este trabajo de grado a los administradores de 33 establecimientos. En este caso, se considera que los resultados son significativos, en tanto que a esta zona acuden personas de diferentes partes de la ciudad e instituciones educativas para adquirir textos escolares. La siguiente gráfica, ilustra los resultados de esta encuesta:



Gráfica 2: Resultados encuestas locales San Victorino

Teniendo en cuenta que las dos encuestas realizadas muestran que la Editorial Santillana es la más usada en Bogotá, se decide realizar el análisis de la serie de matemáticas “*Proyecto Saber es Ser y Hacer*”, edición 2016 -2017, de esta editorial.

Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas – Editorial Santillana⁴

La Editorial Santillana tiene una trayectoria de 30 años en el país en la edición y distribución de textos escolares para los diferentes niveles educativos y las áreas que señala la Ley 115 de 1994. La Editorial se reconoce como una entidad en continuo desarrollo de estrategias didácticas que incluyen los últimos conocimientos y actualizaciones educativas, técnicas de comunicación y nuevas tecnologías, así como materiales didácticos de apoyo y herramientas de gestión que facilitan el trabajo a estudiantes y profesores, que la han posicionado como uno de los grupos educativos más importantes en España y Latinoamérica, desde su fundación en 1960.

Desde 1988 tienen presencia en Colombia, con el compromiso de contribuir a la calidad de la educación y al desarrollo de los ciudadanos y la sociedad, creando contenidos y gestionando servicios y herramientas tecnológicas que ayudan, acompañan y asesoran a gran parte de la comunidad escolar colombiana a alcanzar los retos planteados.

En relación con la serie de textos escolares “Proyecto SABER es SER y HACER”, se constituyen en la línea propuesta por la Editorial para trabajar en las aulas de clase desde el año 2016, en las áreas de sociales, lenguaje, ciencias y matemáticas, con ediciones para el docente, para el estudiante, pagina web para estudiantes y docentes, y libro media para el docente.

La apuesta pedagógica de la serie es que los docentes y estudiantes enriquezcan sus experiencias de enseñanza y aprendizaje por medio de:

- Contenidos actualizados y una gran variedad de actividades que favorecen el desarrollo de competencias.

⁴ Información tomada de la página en Internet de la Editorial Santillana, ubicada en la dirección www.santillana.com.co, el día 25 de septiembre del 2017

- Proyectos transversales que atienden a los requerimientos de la Ley General de Educación y al documento del Ministerio de Educación Nacional “Sentidos y retos de la transversalidad”.
- Programa de evaluación que garantiza el monitoreo permanente de los procesos de aprendizaje. Adicionalmente, cuenta con más de 2.500 ítems tipo Icfes y modelos de Prueba Saber con énfasis en el análisis crítico y la solución de problemas a lo largo del libro.
- Constructor de evaluaciones para facilitarle al docente su quehacer pedagógico.
- Libromedia 2.0 con recursos digitales y multimedia que apoyan los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Página web exclusiva para los estudiantes y docentes usuarios del proyecto de Santillana. www.santillanaplus.com.co, donde se encuentran los solucionarios de todas las actividades que se proponen en cada libro.
- Proyecto para la implementación de la Cátedra de la Paz.
- Edición docente digital que facilita la planeación y la práctica diaria en el aula. Entre las herramientas que brinda están: calendario, Apps educativas, matrices de desempeño, sugerencias didácticas y clases modelo.
- Consultoría académica y de acompañamiento continuo a las instituciones educativas.

Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas

Este proyecto presenta dos versiones diferentes, para Educación Básica Primaria y para Educación Básica Secundaria y Media. Los textos que componen la serie de básica primaria, cuya edición es del año 2017, se estructuran en cuatro módulos, cada uno de los cuales incluye los cinco pensamientos que se plantean en los referentes de calidad. Por su parte, en los textos escolares en secundaria, que corresponden a la edición del año 2016, la estructura temática desde la tabla de contenido se desarrolla en uno o dos pensamientos por cada módulo, como se observa en la imagen.

Imagen 18: Ejemplo de Tabla de contenido Proyecto Saber es Ser y Hacer- básica primaria

CONTENIDOS	
Unidad 1 Los números naturales	Estándares: pensamientos numérico y variacional
Sistemas de numeración	Operaciones entre números naturales
Sistema de numeración romano	Adición de números naturales
Sistema de numeración binario	Propiedades de la adición
Conversión de sistema decimal a otro	Sustracción de números naturales
Conversión de sistema decimal a binario	Multiplicación de números naturales
Conversión de binario a sistema decimal	División de números naturales
Operaciones con números binarios	Multiplicaciones abreviadas
Sistema de numeración decimal	División de números naturales
Conjunto de los números naturales	Propiedades de la multiplicación
Representación de los números naturales	Reducción de los números naturales
Orden en los números naturales	Propiedades de la radicación
	Lógica matemática en los números naturales
	Propiedades de la legalización
	Orden en los números naturales
	Propiedades de la legalización
Unidad 2 La teoría de los números	Estándares: pensamientos numérico y variacional
Todos los números	Los números compuestos
Todos los números de un número	Descomposición en factores
Propiedades de los números primos	El mínimo común divisor
Todos los divisores	Métodos para hallar el mínimo común divisor
Todos los divisores de un número	Métodos para hallar el mínimo común divisor
Criterios de divisibilidad	Común divisor y resto
Todos los números primos y los números compuestos	Método abreviado para hallar el mcd
Todos los números primos	El mínimo común múltiplo
	Métodos generales para hallar el mínimo común múltiplo
Unidad 3 Fracciones y decimales	Estándares: pensamientos numérico y variacional
Las fracciones	Multiplicación de fracciones
Elementos de una fracción	Inverso multiplicativo de una fracción
Interpretaciones del concepto de fracción	División de fracciones
	Polinomios irreductibles con exponentes negativos
Clases de fracciones	Multiplicación de números irracionales
Suma y resta de fracciones	Multiplicación de números irracionales
Operaciones con racionales a números mixtos	Propiedades de la potenciación
Conversiones de racionales a números mixtos	Radicalización de fracciones
Conversion de número mixto a fracciónmixta	Números decimales
Representación en la recta	Operaciones entre números decimales
Fracciones y decimales	Adición de números decimales
Conversiones entre fracciones y decimales	Sustracción de números decimales
Operaciones entre fracciones	Multiplicación de números decimales
Adición y sustracción de fracciones	División de números decimales
Adición y sustracción de fracciones operaciones combinadas	Operaciones entre números decimales
	Solución de problemas
	Leer, escribir y comprende en matemáticas
	Taller
	En Síntesis
	Proyecto Educación económica y financiera
Unidad 4 Números enteros	Estándares: pensamientos numérico y variacional
Los números enteros	Operaciones entre números enteros
Concepto de número entero	Adición de números enteros
Los números enteros en la recta numérica	Restación de números enteros
	Multiplicación de números enteros
Los números opuestos	Solución de problemas
Los números enteros en el planaje cartesiano	Leer, escribir y comprender en matemáticas
	Multiplicación de números enteros
	División exacta de números enteros
	Taller
	En Síntesis
	Polinomios armónicos y aplicaciones
Unidad 5 Geometría	Estándares: pensamientos espacial e métrico
Conceptos básicos de geometría	Construcción de triángulos
Rectas paralelas y perpendiculars	caídas y paralelas
Construcción de rectas paralelas y perpendiculars con regla y compás	Construcción de cuadriláteros
Ángulos	Ángulo y circunferencia
Medición de ángulos	Construcción de circunferencias: transformaciones en el plano cartesiano
Clasificación de los ángulos	Transformación en el plano cartesiano
concentricas y homólogas	Tradición
Polygones	Ángulo
Elementos de un polígono	Ángulo y homología
Clasificación de polígonos	Lengüid
Triángulos	Unidades de longitud
Clasificación de los triángulos	Otras unidades de medida de longitud
Unidad 6 Estadística y probabilidad	Estándar: pensamiento aleatorio
Conceptos básicos de estadística	Diagrama de frecuencias
La población, la muestra y la variable	La tabla
Muestra aleatoria	Diagrama de tales y muejas
Caracterización de variables cualitativas	Los conjuntos
La distribución de frecuencias	Definiciones preliminares
Los tipos estadísticos	Las operaciones entre conjuntos
La muestra	La unión
La media	La intersección entre conjuntos
La diferencia entre conjuntos	La diferencia entre conjuntos
La complemento	La diferencia entre conjuntos
Caracterización de variables cuantitativas para datos agrupados	Los experimentos aleatorios
La tabla de distribución de frecuencias	Espacio muestral
La media	Eventos
Los deciles y los porcentajes	Las técnicas de conteo
Operaciones combinadas	El principio de multiplicación

Imagen 19: Ejemplo de Tabla de contenido Proyecto Saber es Ser y Hacer- básica secundaria

Cada unidad de la serie de matemáticas se desarrolla de la siguiente manera:

Apertura de unidad o módulo

Una doble página en la que se muestra una imagen relacionada con los contenidos. Asimismo, presenta los saberes esenciales que el estudiante va a aprehender a lo largo de cada unidad. *Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?* Introduce al estudiante en la temática de la unidad y le informa sobre una aplicación práctica del tema en otras áreas o en la vida cotidiana.



Imagen 20: ejemplo de Apertura del módulo, Proyecto Saber es Ser y Hacer- básica primaria

Páginas de contenido y actividades.

Sugiere un método de aprendizaje activo y significativo en el cual, a partir de un contexto o situación de aprendizaje, se desarrollan las temáticas con ejemplos resueltos y, posteriormente, se proponen las actividades correspondientes que le permitirán al estudiante desarrollar sus habilidades matemáticas y sus competencias básicas.

Situación de aprendizaje

Te introduce en el tema a partir de una aplicación práctica relacionada con la vida cotidiana.

Las temáticas se presentan de manera clara y sencilla, y con ejemplos resueltos paso a paso.

También encuentras: **Gimnasia matemática, Cálculo mental, Para convivir en paz y Enlázate con...**

Actividades

Te permite adquirir habilidades para interpretar argumentar y proponer, también para ejercitarse, razonar, modelar o solucionar problemas.

Imagen 21: ejemplo de Páginas de contenido y actividades, Proyecto Saber es Ser y Hacer

Situación de aprendizaje

Introduce al estudiante en el tema a partir de una aplicación práctica, relacionada con la vida cotidiana, la naturaleza o diversos temas transversales.

1. Conjuntos

Situación de aprendizaje

Observa y responde.

...para Convivir en paz TRABAJO EN EQUIPO ¿Cuándo se trabaja en equipo? ¿Qué resultados se obtiene del trabajo en equipo?

1. Conjuntos

Representación de conjuntos

Un **conjunto** está formado por elementos que tienen una o varias **características comunes**. Los elementos de un conjunto pueden ser animales, personas, juguetes, alimentos, herramientas, entre otros. Los elementos de un conjunto se **agrupan** dentro de una línea cerrada.

EJEMPLO

Observa cómo se agrupan los elementos de cada conjunto. Luego, se nombran.

B Conjunto de botellas

F Conjunto de flores

ACTIVIDADES

1. Dibuja los elementos de cada conjunto. Luego, nómbralos.

Conjunto de dulces

Conjunto de helados

Imagen 22: Ejemplo de Situación de aprendizaje, Proyecto Saber es Ser y Hacer

Actividades

Presenta una serie de tareas para desarrollar por parte del estudiante a manera de aplicación o profundización de los temas vistos. Cada tarea planteada en esta sección de Actividades está relacionada con unos procesos nombrados como: **Razona**, **Ejercita**, **Comunica**, **Solucioná**, **Interpreta**, **Argumenta** y **Propone**, los cuales en cada numeral de la tarea están diferenciados por un color⁵.

Imagen 23: Ejemplo de Actividades, Proyecto Saber es Ser y Hacer

⁵ Para secundaria los procesos están representados del color: **Interpretar**, **Argumentar**, **Proponer**, **Ejercitar**, **Razonar**, **Solucionar problemas**, **Modelar**, **Comunicar**.

Desarrollo de contenidos

Presenta definiciones y ejemplos resueltos, paso a paso.

El conjunto de los **números enteros negativos** se simboliza \mathbb{Z}^- y se determina por extensión, así:

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$$

El conjunto de los **números enteros positivos** se simboliza \mathbb{Z}^+ y se determina por extensión, así:

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

El conjunto de **los números enteros** se simboliza \mathbb{Z} y es la unión del conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros negativos. Al determinar por extensión el conjunto \mathbb{Z} se tiene que:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Ejemplo

① Escribir un número entero que represente cada situación.

- En Bogotá se registró una temperatura de 8 grados centígrados bajo cero.
Las temperaturas bajo cero se pueden representar con números enteros negativos. Así, la temperatura que se registró en Bogotá se representa con el número -8 .
- Daniela ahorró durante un mes \$60.000.
El ahorro se puede representar con números enteros positivos. Así, el ahorro de Daniela se representa con el número 60.000 .

Imagen 24: Ejemplo de Desarrollo de contenidos, Proyecto Saber es Ser y Hacer

Teoría literaria

Sección en donde se presenta un estudio histórico de la literatura que comprende: el contexto, los hechos políticos y sociales, las manifestaciones artísticas, los autores y las obras.

ANÁLISIS DE LOS TEXTOS ESCOLARES

Debido a que los textos escolares de primaria y secundaria de la serie Proyecto Saber, Ser y Hacer de Santillana, no presentan la misma estructura, el análisis se realizó de manera separada en estos dos niveles educativos.

Proyecto Saber, Ser y Hacer - Básica Primaria

Dado que el proceso de generalizar se incluye en las cuestiones que atañen al pensamiento variacional (EBCM, 2006), el primer nivel de observación y análisis de los textos escolares se centró en las secciones que explícitamente corresponden a este pensamiento. Así, en las tablas de contenido de los textos escolares analizados se ubicaron las secciones acuñadas bajo la denominación “Pensamiento variacional” y se identificaron los temas que se pueden asociar al proceso de generalización de patrones a partir de secuencias.

La siguiente tabla presenta un resumen de estos hallazgos:

GRADO	MÓDULO O UNIDAD	No. Págs.	SECCIÓN	NOMBRE DEL TEMA	No. Págs.
PRIMERO	1	50	6	Secuencias con dibujos o figuras	2
	2	52	2	Secuencias aditivas	2
SEGUNDO	1	54	3	Secuencias con patrones simples	2
	2	56	2	Secuencias con figuras geométricas	2
	4	63	3	Secuencias con figuras que son fracciones	2
TERCERO	1	56	3	Secuencias con patrones de suma	2
	2	54	2	Secuencias con patrón de multiplicación	2
	3	56	5	Secuencias de figuras geométricas	2

CUARTO	2	56	5	Secuencias con patrones geométricos	2
	3	58	3	Secuencias con figuras geométricas	2
QUINTO	2	54	3	Secuencias con fracciones	2
	3	56	2	Secuencias con números decimales	2

Tabla 5: Hallazgos de sucesiones en tablas de contenido de textos básica primaria

Como se observa, en todos los textos escolares de básica primaria aparecen secciones y temas dedicados al proceso de generalización de patrones en secuencias, de donde es posible señalar que el proceso de generalizar se incluye en las cuestiones a desarrollar en la escuela; sin embargo, llama la atención que el número de páginas dedicadas al pensamiento variacional y, en particular a este proceso, es limitado en comparación con los pensamientos numérico, espacial y métrico, mostrando una presencia aún tímida de estas cuestiones en la Educación Básica Primaria. Cabe anotar, que dentro del pensamiento variacional, no solo se trabaja generalización de patrones, también se proponen temas como: equivalencia entre expresiones, noción de ecuación, situaciones de variación en el tiempo y proporcionalidad, entre otros.

Asimismo, se puede observar que los títulos reportados en la tabla de contenido a lo largo de la Básica Primaria sugieren un trato progresivo en la complejidad del proceso de generalizar patrones, tanto en el tipo de secuencias y representaciones usadas, como en los patrones que las determinan. En el primer, segundo y tercer grado, se observa que la aproximación al proceso de generalizar patrones, se hace desde secuencias de tipo figúrales y numéricas, para el grado cuarto la propuesta se realiza desde secuencias figúrales y geométricas y para el grado quinto, las secuencias que se utilizan son de tipo numérico. Esta secuencia progresiva es coherente, además, con los planteamientos de los EBCM, como se ilustra más adelante.

A continuación, se presenta el análisis de las secciones y temas señalados en la tabla anterior, para cada grado.

Ciclo primero a tercero

Grado Primero

En este primer grado el proceso de generalizar patrones a partir de secuencias se trabaja en dos de los cuatro módulos del texto escolar:

Módulo 1, sección 6, secuencias con dibujos o figuras:

La sección comienza con una definición de secuencia: “conjunto de elementos o números que se relacionan entre sí, y se ordenan según un patrón que se repite constantemente” (p. 54), definición que se exemplifica con una secuencia corporal:



Imagen 25: Ejemplo de secuencia, grado primero, Módulo 1, sección 6 (p. 54)

Adicionalmente, se incluye un recuadro que señala la posibilidad de que algunas secuencias tengan más de un patrón:



Imagen 26: Recuerda que, grado primero, Módulo 1, sección 6 (p. 54)

Posteriormente se incluye un espacio denominado Actividades⁶, compuesto por cuatro puntos, el primero (**Ejercita**) invita a encontrar la imagen que sigue en cada secuencia, el segundo (**Razona**), consiste en descubrir la figura que no corresponde a la secuencia, el siguiente punto (**Razona**) consiste en dibujar las figuras que faltan para completar la secuencia y el último punto (**Solucionar**) propone extraer datos de un dibujo para responder algunas preguntas planteadas como se muestra en Imagen 27.

4.Extraer datos de un dibujo. Observa. Luego, responde.

» ¿Cuántas veces aplaude el niño antes de zapatear? _____

» ¿Cuántas veces zapattea antes de volver a aplaudir? _____

» Siguiendo el orden anterior, ¿qué debería hacer el niño después del último aplauso de la imagen? Encierra tu respuesta.

Aplaudir Zapatear

Imagen 27: Punto 4, grado primero, Módulo 1, sección 6 (p. 55)

Módulo 2, sección 2, secuencias:

En esta sección se define una secuencia aditiva como “un conjunto de números ordenados, relacionados entre sí por un patrón que se repite constantemente” (p. 96). Posteriormente, presenta un ejemplo de una secuencia aditiva e indica el patrón que la genera.

La sección continua con el planteamiento de las Actividades, compuesta por cuatro ítems, en el primero (**Ejercita**) se propone una secuencia con representación gráfico numérica que invita a remplazar la imagen por el número que le correspondería y a escribir el patrón de la secuencia, el segundo ítem (**Razona**) pide al estudiante escribir el patrón y continuar con la secuencia; el tercer punto (**Razona**), propone identificar un número que no corresponde a la

⁶Ver Anexo 1. Secuencias con dibujos o figuras, Modulo 1, sección 6. (p.54-55)

secuencia; por último, el cuarto punto (**Solucionar**) invita a solucionar un problema utilizando secuencias numéricas⁷.

4. Comprender el enunciado. Resuelve el problema utilizando secuencias numéricas.

Mariana lee un cuento. Si se ha propuesto leer 3 páginas cada día, ¿cuántas páginas leerá en 7 días?

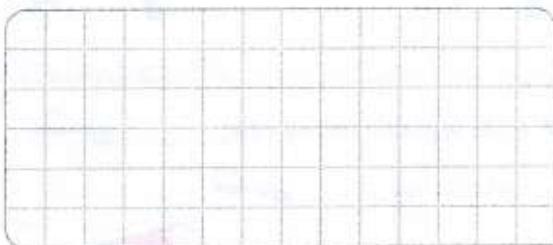
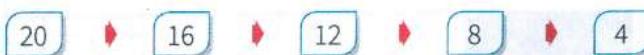


Imagen 28: Punto 4, grado primero, Módulo 2, sección 2 (p. 97)

Adicionalmente se incluye un punto Prueba Saber, en el cual el estudiante debe observar una secuencia y ubicar el patrón correcto entre cuatro opciones planteadas.

✓ Prueba Saber. Lee, luego encierra la opción correcta. Observa la secuencia.



» ¿Qué patrón forma la secuencia?

- A. Sumar 4 B. Sumar 5 C. Restar 2 D. Restar 4

» ¿Qué número continúa la secuencia?

- B. 30 C. 22 D. 2 E. 0

Imagen 29: Prueba saber, grado primero, Módulo 2, sección 2 (p. 97)

Adicionalmente en otras secciones del texto de primero se reconocen algunas tareas o ejemplos que involucran el proceso de generalizar:

En el primer módulo del texto escolar, en la sección de pensamiento numérico, se trabaja el tema “*Las decenas completas*” y se propone una actividad que involucra trabajo con secuencias y patrones.

⁷ Ver anexo 2. Secuencias aditivas, Modulo 2, sección 2, (p. 94-95)



Imagen 30: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado primero (p. 28)

En diversas actividades de pensamiento numérico se evidencia trabajo con secuencias, en las cuales se propone completar secuencias de tipo numérico e icónico, con patrones aditivos y multiplicativos, como se observa en las siguientes imágenes:

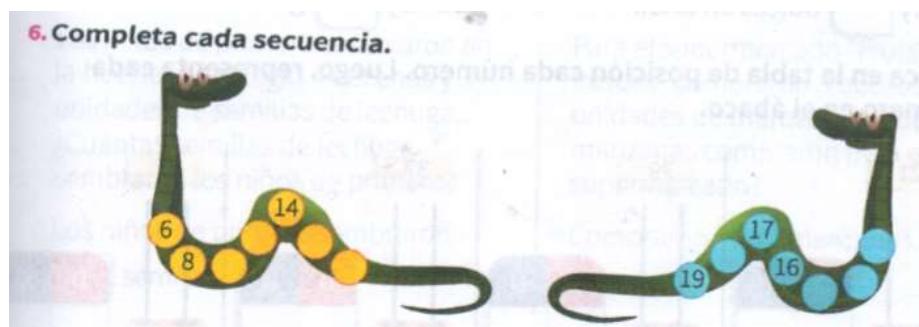


Imagen 31: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado primero (p. 31)

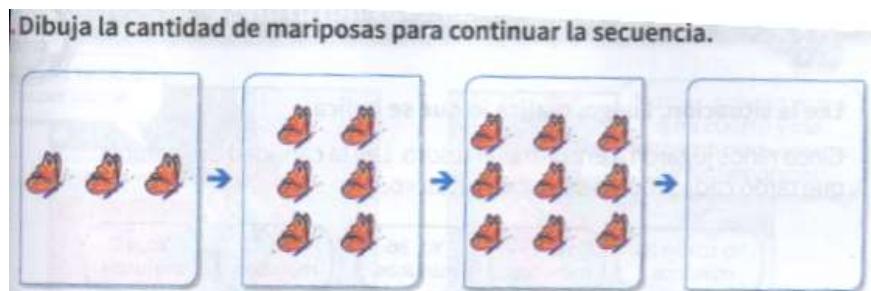
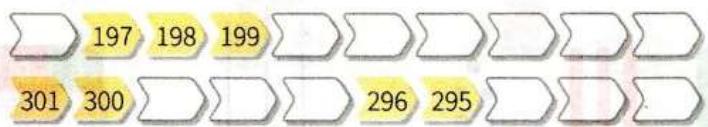


Imagen 32: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado primero (p. 57)

4. Lee y observa. Luego, responde.

- » ¿Qué números faltan en las siguientes secuencias?



Luego de completarlas,
lee los números.

Imagen 33: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado primero (p. 124)

4. Escribe los números que faltan en la secuencia. Luego, resuelve.



- » Escribe tres números de la secuencia que sean mayores que 350.

- » Escribe tres números de la secuencia que sean menores que 350.

Imagen 34: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado primero (p. 128)

- » Para saber cuántos cuadrados o unidades hay en total en todos los cartones de la mesa, los niños decidieron contar de 100 en 100.

Completa la secuencia.

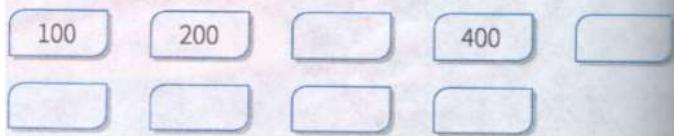


Imagen 35: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado primero (p. 184)

ACTIVIDADES

1. Completa la secuencia.



Imagen 36: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado primero (p. 185)

Grado Segundo

Módulo 1, Sección 3, secuencias con patrones simples:

Inicia con una nueva definición de secuencia: “es aquella conformada por números que aumentan o disminuyen. A la misma cantidad que aumenta o disminuye se le conoce con el nombre de patrón” (p. 48). En la parte llamada Recuerda, hace alusión al uso del patrón en los siguientes términos:

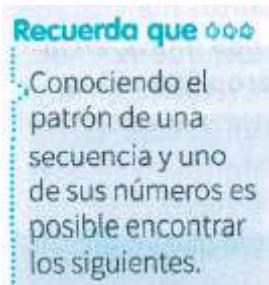


Imagen 37: Recuerda que. Grado segundo primaria. p. 48

En correspondencia con esto, el ejemplo planteado relaciona un problema que se resuelve con una secuencia a partir de un patrón definido:

EJEMPLO

El lunes, Flor preparó 20 postres. Si cada día elaborará tres postres más que el día anterior, ¿cuántas postres hará el sábado?

Como Flor inició el lunes con 20 postres, se tiene que el valor inicial de la secuencia es 20 y el patrón de esta secuencia es sumar 3, pues hace tres postres más cada día.

La secuencia que representa la preparación de los postres es:

Día	Postres
Lunes	20
Martes	23
Miércoles	26
Jueves	29
Viernes	32
Sábado	35

Imagen 38: Ejemplo de secuencias, grado segundo, Módulo 1, Sección (p. 48)

El primer punto de Actividades (**Ejercita**) indica al estudiante un patrón numérico que consiste en sumar o restar una cantidad a un número inicial dado, el estudiante debe completar la secuencia; el segundo punto (**Comunica**), el estudiante debe descubrir el patrón de una secuencia y escribirlo, el tercer punto (**Solucionara**) propone crear una secuencia a partir

de un dato inicial y por último (**Soluciona**), plantea un problema para que se resuelva utilizando secuencias⁸.

Módulo 2, sección 2, secuencias con figuras geométricas:

La definición que el texto escolar reporta para secuencia de patrones indica que “es un grupo de figuras que cumplen con alguna regla de construcción” (p. 102). El ejemplo propuesto presenta figuras geométricas intercaladas entre cuadrados y circunferencias.

En esta sección se proponen Actividades, que promueven los procesos de ejercitarse (**Ejercita**), razonar (**Razona**) y comunicar (**Comunica**), las actividades reportan secuencias de tipo figurativo usando figuras geométricas, en las que invitan al estudiante a ver las imágenes que no corresponden a la secuencia o a reportar la figura que continua en la secuencia dada⁹.

Módulo 4, sección 3, secuencias con figuras que son fracciones:

La definición presentada para el título de esta sección plantea que “las secuencias con figuras que son fracciones que muestran figuras que siguen un patrón a partir de las partes en que se dividen o en las partes que se toman de una unidad” (p. 210).

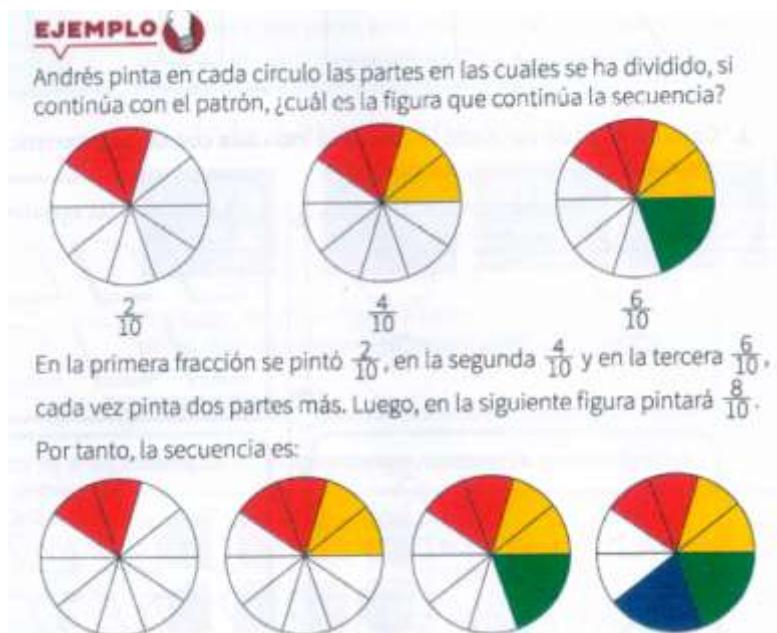


Imagen 39: Ejemplo de secuencias, grado segundo, Módulo 4, Sección 3 (p. 210)

⁸ Ver anexo 3. Secuencias con patrones simples, Modulo 1, sección 3, (p.48-49)

⁹ Ver anexo 4. Secuencias con figuras geométricas, Modulo 2, sección 2, (p.102-103)

En Actividades se desarrollan tres puntos, el primero (**Argumenta**) invita a ver la secuencia y a dibujar la figura que sigue luego el estudiante debe justificar por qué esa sería la figura siguiente, el segundo punto (**Solucionar**) se debe establecer la figura que falta dentro de la secuencia, el tercero (**Interpreta**) invita a completar la secuencia. Posteriormente se realiza un ejercicio de selección múltiple como preparación para las Pruebas Saber que consiste en completar la secuencia propuesta¹⁰.

En otras secciones también se observan algunas tareas que promueven el proceso de generalizar. Las tareas que invitan a generalizar patrones corresponden a secuencias de tipo numérico, en su mayoría, como una propuesta para introducir la adición o multiplicación por un número definido, como se ilustra en las siguientes imágenes:

8. Lee la información. Luego, resuelve.

Al siguiente tablero le faltan algunas de las fichas que están sobre la mesa.



Imagen 40: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado segundo (p. 21)

Grado Tercero

Módulo 1, sección 3, secuencias con patrones de suma o de resta:

La definición correspondiente indica que “una secuencia con patrón de suma es aquella conformada por números que aumentan de tal forma que al restar dos números consecutivos se obtiene la misma diferencia” (p. 42), por otro lado también plantea la definición de secuencia con patrón de resta, la cual la define como “la secuencia conformada por números que disminuyen de tal forma que al restar dos números consecutivos se obtiene la misma

¹⁰ Ver anexo 5. Secuencias con figuras que son fracciones, Modulo 4, sección 3, (p.210-211)

diferencia” (p.42), en el ejemplo propuesto se plantea una situación donde se pregunta si la secuencia indicada tiene un patrón de suma o de resta.

El texto escolar para esta sección plantea en Actividades, secuencias de tipo numérico; en el primer punto (**Ejercita**), el estudiante debe completar una secuencia a partir de un patrón de suma o resta y un número dado; el segundo punto (**Razona**) presenta una secuencia, en ella se debe ver el patrón y escribirlo, por último, el tercer punto (**Razona**) propone escribir unas secuencias dadas ciertas condiciones¹¹.

Módulo 2, sección 2, secuencias con patrón de multiplicación:

En esta sección también se plantea una definición de secuencias con patrón de multiplicación, en los mismos términos que se usaron para las secuencias con patrones de suma y resta.

EJEMPLO

Carolina está pensando en una secuencia de números. ¿Qué números continúan la secuencia?

Paso 1. Se verifica por cuál número se multiplica cada término. Por tanto, se tiene que: $3 \times 5 = 15$; $15 \times 5 = 75$; $75 \times 5 = 375$. Cada término se multiplicó por 5.

Paso 2. Se multiplica por 5 para encontrar los dos números que siguen en la secuencia numérica.

$$375 \times 5 = 1.875 \quad 1.875 \times 5 = 9.375$$

Entonces, los números que continúan la secuencia que está pensando Carolina son 1.875 y 9.375.

Imagen 41: Ejemplo de secuencias, grado tercero, Módulo 2, Sección 2 (p. 94)

En Actividades se proponen tareas que invitan a completar las secuencias (**Ejercita**), escoger entre algunas opciones el patrón correspondiente (**Razona**), descartar números que no pertenecen a la secuencia planteada (**Solucionar**) y, una última propuesta, completar una tabla

¹¹ Ver anexo 6. Secuencias con patrones de suma, Modulo 1, sección 3, (p.42-43)

con un ejercicio donde se indica el patrón y el estudiante debe completar la secuencia (**Razona**)¹².

Módulo 3, sección 5, secuencias con figuras geométricas:

Como definición se presenta que “una secuencia con figuras geométricas es un grupo de figuras que cumplen con alguna regla de construcción a la que se denomina patrón” (p. 178). Como ejemplo se plantea una secuencia de cuadrados en los cuales se debe determinar el color de la figura que sigue.

En Actividades se plantean 5 puntos: en el primer punto (**Propone**) se solicita colorear las figuras de tal forma que se proponga una secuencia, desde el segundo punto se atiende al proceso de razonar (**Razona**), invita a observar y dibujar los elementos que siguen en la secuencia, en el tercer punto es observar la secuencia y seleccionar la opción que continua en cada una, el punto cuatro propone una secuencia y se invita a describir el patrón, por último, se relacionan unas figuras geométricas y se deben utilizar para diseñar dos secuencias¹³.

Las anteriores descripciones corresponden a la propuesta que realiza el texto escolar sobre secuencias y el proceso de generalizar patrones dentro del pensamiento variacional; sin embargo, se considera necesario realizar un acercamiento a las otras secciones con el fin de encontrar si desde los pensamientos restantes se proponen actividades en las que se evidencie el proceso de generalizar patrones.

Las siguientes imágenes corresponden a tareas propuestas en otras secciones en las que se invita a completar secuencias, lo cual requiere la identificación del patrón que las define:

1. Completa las series.

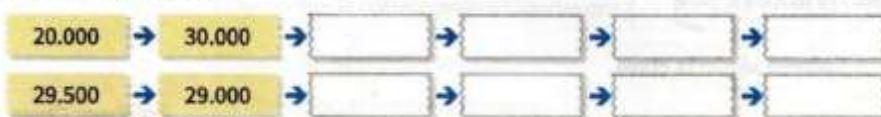


Imagen 42: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado tercero (p. 20)

¹² Ver anexo 7. Secuencias con patrones de multiplicación. Módulo 2, sección 2, (p.94-95)

¹³ Ver anexo 8. Secuencias de figuras geométricas, Modulo 3, sección 5, (p.178-179)

» ¿Cuántos estudiantes hay en total? Sigue el conteo y responde.



Imagen 43: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado tercero (p. 70)

4. Completa las siguientes secuencias de números.



Imagen 44: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado tercero (p. 78)

Resultado del análisis. Primer ciclo

Desde la revisión de los textos antes descrita se reconoce el planteamiento y desarrollo de tareas asociadas al proceso de generalizar, a partir de la identificación de patrones con secuencias de diferentes tipos. La siguiente tabla ilustra el número de tareas, incluidas en las Actividades para desarrollar por parte del estudiante, que se relacionan con la identificación del patrón en una secuencia, así como los diferentes tipos de secuencias que se presentan grado a grado en este ciclo:

Grado	Nº de tareas	Secuencia corporal	Secuencia Manipulativa	Secuencias figurativas	Secuencia gráfico-numérica	Secuencia Tabulares	Secuencias numéricas	Secuencia por recurrencia
Primero	19	10%		21%	27%		42%	
Segundo	18			28%	28%	5%	39%	
Tercero	16			32%		6%	62%	

Tabla 6: Tipos de secuencias, ciclo primero a tercero

Llama la atención que las secuencias corporales y manipulativas que se consideran básicas para los primeros grados son muy limitadas en estos textos; de hecho, solo hay un ejemplo y una tarea en el primer grado que incluye una secuencia corporal, pero su enunciado no es claro, como se explicará más adelante.

Por otro lado, las secuencias de tipo figurativo tienen gran presencia en el primer ciclo, al igual que las gráfico-numéricas, las secuencias de tipo numérico son las que más se usan en este ciclo en contraste con las secuencias por recurrencia, de las cuales no se logra evidenciar alguna tarea, lo cual no es tan grave pues es el tipo de secuencia más avanzado.

Sobre los tipos de representación, se evidencia que el único que no se encuentra en los libros de texto en este ciclo, corresponde a la representación enactiva, esto se debe a la ausencia de secuencias de tipo manipulativo las cuales son asociadas a esta representación.

	# de tareas	Representación Enactiva	Representación icónica o gráfica	Representación simbólica
Primero	19	10%	50%	40%
Segundo	18	0%	56%	44%
Tercero	15	0%	37%	63%

Tabla 7: Tipos de representación, ciclo primero a tercero

Ahora, en relación con las etapas del proceso de generalizar (Masson, 1985), a partir de las consignas o instrucciones de las tareas que se proponen a los estudiantes en las actividades y los ejemplos que se exponen a lo largo del contenido del texto, se puede inferir que se promueve en los estudiantes el tránsito por las dos primeras etapas: El estudiante debe analizar la secuencia, descubrir (ver) un patrón y luego indicar dentro de la secuencia cual es la figura o el número que continua, y el *Decir* se evidencia en el momento en que solicitan que se describa el patrón de la secuencia.

La siguiente imagen muestra una tarea en la cual el estudiante debe “Ver”, para seleccionar la opción correcta:

✓ **Prueba Saber.** Lee, luego encierra la opción correcta. Observa la secuencia.

20 → 16 → 12 → 8 → 4

1. ¿Qué patrón forma la secuencia?

- A. Sumar 4 B. Sumar 5 C. Restar 2 D. Restar 4

2. ¿Qué número continúa la secuencia?

- B. 30 C. 22 D. 0

Imagen 45: Etapa de Ver. Grado primero, p. 55

Así mismo con en la etapa de *Decir* se puede evidenciar en la siguiente imagen donde se solicita descubrir el patrón de la secuencia.

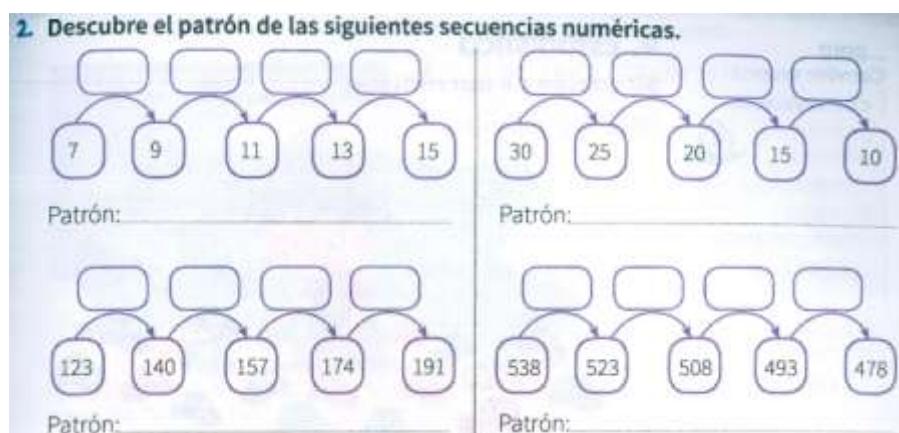


Imagen 46: Etapa de Decir. Grado segundo, p. 49

La siguiente tabla resume las etapas del proceso de generalizar que se promueven en los estudiantes en este primer ciclo, a partir de los ejemplos que expone como contenido y las tareas que se les propone desarrollar a los estudiantes:

		Ver	Decir	Registrar	Validar
Primero	Módulo 1	X			
	Módulo 2	X	X		
Segundo	Módulo 1	X	X		
	Módulo 2	X			
	Módulo 4	X	X		
Tercero	Módulo 1	X	X		
	Módulo 2	X	X		
	Módulo 3	X	X	X	

Tabla 8: Etapas del proceso de generalizar patrones, primer ciclo.

Como se observa en la tabla el *Ver* está presente durante todo el ciclo, sin embargo, el *Decir* se observa de forma permanente en el tercer grado, cabe anotar, que el *Registrar* solo es posible verlo en el módulo tres del mismo grado. Esto de alguna manera se corresponde con la complejidad o profundidad misma del proceso, grado a grado.

Sin embargo, se debe aclarar que existen muchas tareas con secuencias que el texto propone, pero que no corresponden al proceso de generalizar. En estos casos, no se trata de encontrar el patrón sino de construir la secuencia dado el patrón, como se muestra a continuación:

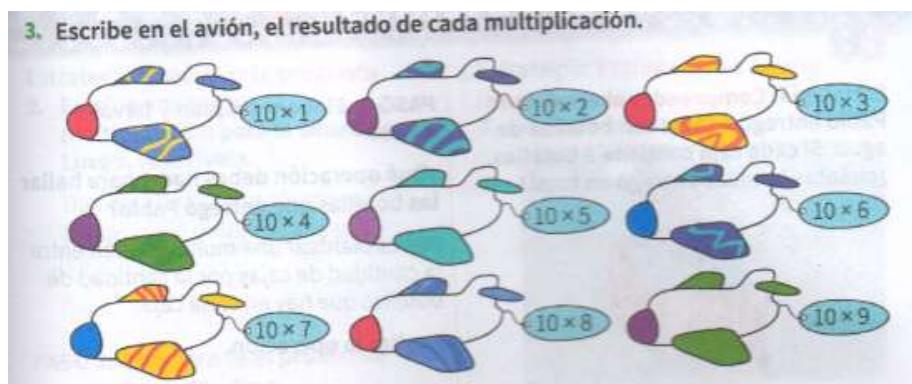


Imagen 47: Tareas de secuencias, otras secciones, grado segundo (p. 81)

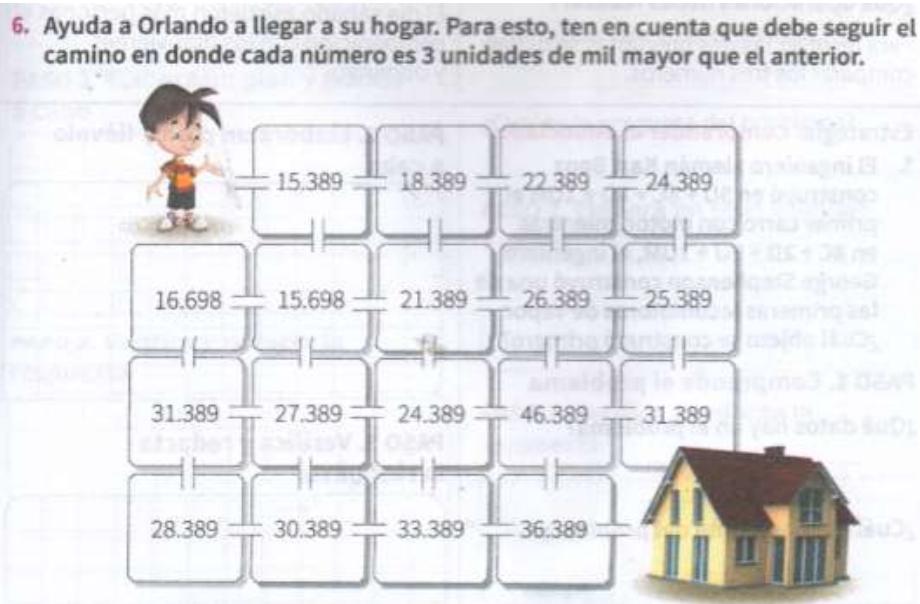


Imagen 48: Tareas de secuencias, otras secciones, grado segundo (p. 143)

Finalmente, en contraste con lo sugerido en los referentes de calidad para este ciclo, se puede evidenciar en el texto que se promueve el reconocimiento y construcción de secuencias con números y figuras geométricas, la realización de conteos como una forma de abordar las

secuencias y el establecimiento de conjeturas como expresión de una secuencia, tareas acordes con lo señalado en los EBCM y en los DBA. Sin embargo, no se logra encontrar propuestas para construir secuencias a partir de propiedades geométricas (Estándar 4) y la argumentación o validación de las conjeturas planteadas, sugerida para el tercer grado, no se propone en estos textos escolares.

Ciclo cuarto a quinto

Grado cuarto

En el grado cuarto de Básica primaria, se desarrollan dos secciones referidas al tema de secuencias, en dos módulos de los cuatro propuestos; a continuación, se realiza una descripción de cada una de las secciones de secuencias que presenten generalización de patrones.

Módulo 2, sección 5, secuencias con patrones geométricos:

La sección inicia con la definición de secuencias con patrones geométricos como “un conjunto ordenado de figuras en el que se destaca un primer elemento y cada una de las figuras que siguen se construye según un patrón de formación determinado” (p.118). Posteriormente se presenta un ejemplo de generalización de patrones, en este caso la secuencia está formada a partir de triángulos, la pregunta que se plantea es decir cuántos triángulos debe haber en la siguiente posición, como se observa en la imagen 51.

En este ejemplo se pueden hacer algunas observaciones como: La cantidad de triángulos que representa cada figura son los números cuadrados, esto es:

$$\text{Figura 1: } 1 \times 1 = 1,$$

$$\text{Figura 2: } 2 \times 2 = 4,$$

$$\text{Figura 3: } 3 \times 3 = 9,$$

Los cuales, además, corresponden a la suma de los primeros números impares naturales iniciando en 1; esto es:

$$\text{Figura 1: } 1 = 1$$

$$\text{Figura 2: } 1 + 3 = 4$$

$$\text{Figura 3: } 1 + 3 + 5 = 9$$

EJEMPLO

La siguiente secuencia está formada a partir de triángulos. ¿Cuántos triángulos debe haber en la figura 4?



Figura 1

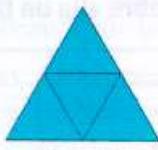


Figura 2

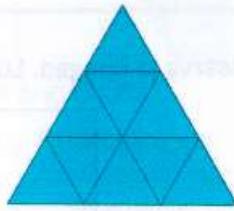


Figura 3

Paso 1

Se realiza una tabla en la cual se relacione el número de triángulos de cada figura.

Figura	1	2	3	4
Número de triángulos	1	4	9	?

Paso 2

Se busca una relación entre los valores de la tabla. Al observar detenidamente la secuencia se verifica que de la figura 1 a la figura 2 aumentaron 3 triángulos y, de la figura 2 a la figura 3 aumentaron 5 triángulos. De esta manera, se puede establecer que la secuencia de figuras se obtiene sumando un número impar de triángulos. A partir de esta regla, de la figura 3 a la figura 4 se determina que el aumento será de 7 triángulos que, sumados a los 9 anteriores, darán un total de 16 triángulos.

Recuerda que

El término sucesión también se usa para referirse a una secuencia.

Imagen 49: Ejemplo de secuencias, grado cuarto, Módulo 2, Sección 5 (p. 118)

Al finalizar el ejemplo, se plantean en Actividades tres puntos. En el primer punto (**Razona**) se pide observar dos secuencias gráficas y completar la secuencia con las que faltan. En el segundo punto (**Ejercita**) se propone completar una tabla observando las figuras, escribir un patrón o regla que permita determinar la cantidad de cuadrados verdes y, por último, escribir la cantidad para dos figuras posteriores. Y en el tercer punto (**Propone**) se invita a que se invente una secuencia de figuras geométricas y posteriormente a escribir una regla de formación o un patrón¹⁴.

Módulo 3, sección 3, secuencias con figuras geométricas:

En esta sección se define “la secuencia de figuras geométricas como un grupo ordenado de figuras que cumplen con una regla de construcción” (p. 156). En el ejemplo se plantea una

¹⁴ Ver anexo 9. Secuencias con patrones geométricos, Modulo 2, sección 5, (p.118-119)

secuencia gráfica y el objetivo es determinar la figura que sigue, como se muestra en la siguiente imagen:

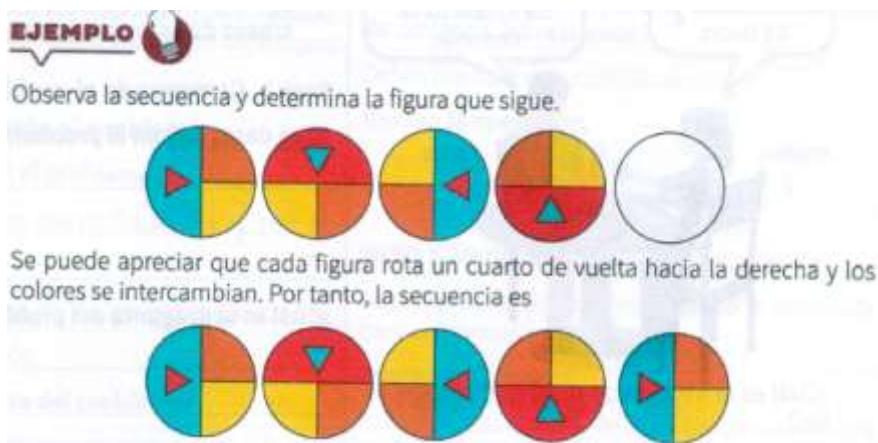


Imagen 50: Ejemplo de secuencias, grado cuarto, Módulo 3, Sección 3 (p. 156)

Se presenta Actividades con cuatro puntos. El primer punto (**Razona**), consiste en observar la secuencia y descubrir el patrón geométrico para dibujar la figura que continua, el segundo punto (**Razona**) es de selección múltiple, se debe seleccionar la opción que continua en la secuencia, para el tercer punto (**Argumenta**) se observa la secuencia y se describe el patrón utilizado, finalmente en el cuarto punto (**Propone**) se debe diseñar una secuencia utilizando figuras geométricas dadas¹⁵.

Desde otras secciones es posible identificar actividades que se relacionan con el proceso de generalizar patrones, específicamente desde el pensamiento numérico y geométrico, también desde algunos talleres finales de cada módulo se identifican ítems dedicados a las secuencias.

A manera de ejemplo, las siguientes imágenes:

1. Completa las siguientes secuencias de números.

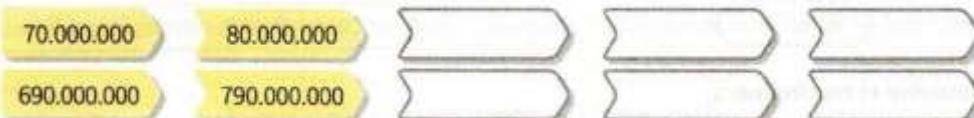
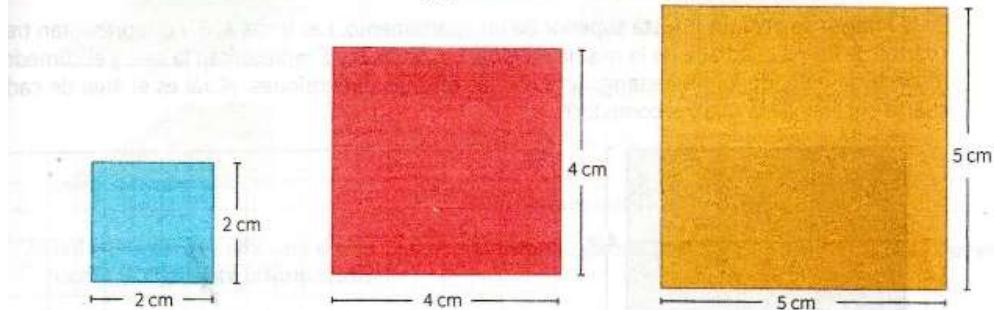


Imagen 51: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado cuarto (p. 18)

¹⁵ Ver anexo 10. Secuencias con figuras geométricas, Modulo 3, sección 3, (p.156-157)

1. Calcula el área de cada cuadrado. Luego, resuelve.



$$\text{Área} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$$

$$\text{Área} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$$

$$\text{Área} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$$

2. Completa la tabla con los datos de algunos cuadrados.

Lado	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm	6 cm	7 cm	8 cm	9 cm	10 cm
Área										

3. ¿Qué expresión permite encontrar el área de un cuadrado de 50 cm de lado?

Imagen 52: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado cuarto (p. 179)

6. Completa con los cuatro primeros términos de cada secuencia de acuerdo con el patrón.

Patrón	Secuencia
Agregar 3 	
Quitar 1 	

Imagen 53: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado cuarto (p. 183)

Grado quinto

Módulo 2, sección 3, secuencias con fracciones:

En la sección se trabaja con las fracciones y las operaciones básicas. Definen secuencias de fracciones como “un grupo ordenado de fracciones que tienen un patrón o ley de formación” (p. 102). Como ejemplo, se muestra una secuencia numérica donde el patrón de formación es sumar un medio al número anterior:

EJEMPLO

En la siguiente secuencia numérica el patrón de formación es sumar **un medio** al número anterior.

1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
$1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$					
$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$	$3 + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$					
$2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$	$\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$					

Recuerda que

Una secuencia con fracciones puede tener patrón de suma, resta, multiplicación o división.

Imagen 54: Ejemplo de secuencias, grado quinto, Módulo 2, Sección 3 (p. 102)

El primer punto de Actividades (**Ejercita**) consiste en seguir un patrón dado para completar la secuencia a partir de un numero inicial, mientras en el segundo punto (**Razona**) se debe encontrar el patrón de una secuencia numérica dada, el tercer punto (**Ejercita**) consiste en construir una secuencia teniendo el patrón y el primer término, en el cuarto punto (**Comunica**) solicitan responder falso o verdadero justificando la respuesta, el último punto (**Solucionar**) plantea un problema que se debe solucionar construyendo una secuencia¹⁶.

Módulo 3, sección 2, secuencias de números decimales:

La definición de secuencia para esta sección es: “un conjunto ordenado de números, en el que se destaca un primer elemento y los que siguen se obtienen a partir de una regla de formación” (p. 156). En el ejemplo se propone encontrar el patrón de una secuencia con expresiones decimales y continuar con ella, explicando paso a paso de cómo se obtiene el resultado:

¹⁶ Ver anexo 11. Secuencias con fracciones, Modulo 2, sección 3, (p.102-103)

EJEMPLO

En la secuencia 2,5; 4,2; 5,9; 7,6;... se tiene:

■ 2,5 es el primer elemento de la secuencia.

■ Cada elemento de la secuencia se obtiene **sumando 1,7** al elemento anterior, así:

$$4,2 = 2,5 + 1,7 \quad 5,9 = 4,2 + 1,7$$

■ El siguiente elemento de la secuencia se obtiene así: $7,6 + 1,7 = 9,3$.

■ En la secuencia 0,258; 2,58; 25,8; 258;...

■ 0,258 es el primer elemento de la secuencia.

■ Cada elemento de la secuencia se obtiene **multiplicando el elemento anterior por 10**, así:

$$2,58 = 0,258 \times 10 \quad 25,8 = 2,58 \times 10$$

■ El siguiente elemento de la secuencia se obtiene así: $258 \times 10 = 2.580$.

Imagen 55: Ejemplo de secuencias, grado quinto, Módulo 3, Sección 3 (p. 156)

En Actividades se proponen cinco puntos más uno de Prueba Saber. En el primer punto (**Ejercita**) se debe escribir los cinco primeros términos de la secuencia teniendo el primer elemento y el patrón, el segundo punto (**Razona**) consiste en seleccionar el patrón de la secuencia, para el tercer punto (**Solucionar**) se debe completar la tabla, completado las secuencias de números en cada fila, de tal manera que las fracciones, los decimales y los porcentajes sean equivalentes, en el cuarto (**Solucionar**) se extrae información de una imagen, describiendo el patrón y la secuencia, en el quinto punto (**Solucionar**) y el ejercicio de prueba saber es solucionar un problema utilizando secuencias con patrones decimales¹⁷.

En otras secciones se encontraron las siguientes tareas donde se involucran el proceso de generalizar:

4. Escribe el número correspondiente a cada conjunto de múltiplos.

■ $M_{\square} = \{..., 15, 20, 25, 30, 35, ...\}$

■ $M_{\square} = \{..., 49, 56, 63, 70, 77, ...\}$

■ $M_{\square} = \{..., 54, 63, 72, 90, 99, ...\}$

■ $M_{\square} = \{..., 65, 78, 91, 104, ...\}$

■ $M_{\square} = \{..., 121, 132, 143, ...\}$

■ $M_{\square} = \{..., 204, 221, 238, ...\}$

Imagen 56: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado quinto (p. 25)

¹⁷ Ver anexo 12. Secuencias con números decimales, Modulo 3, sección 2, (p.156-157)

5. Observa la siguiente secuencia. Luego, indica cuál es su patrón o ley de formación. Y el término que sigue.

21	68	73	26	83	?
5	15	15	5	15	

El patrón es _____.

Imagen 57: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado quinto (p. 121)

3. Lee la siguiente situación y resuelve. Luego, compara las respuestas con tus compañeros.



Valentina desea celebrar su cumpleaños con sus amigos. Para ello, compró una pizza para repartirla entre ellos. Sin embargo, no sabe cómo dividirla ya que desconoce la cantidad de amigos que asistirán. Es decir, por ejemplo, si asistiera un amigo se divide la pizza en dos partes una para ella y otra para su amigo.

» Completa la siguiente tabla.

Cantidad de amigos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Porción de pizza que le corresponde a cada uno	$\frac{1}{2}$								

» ¿Qué sucede con la porción de pizza que le corresponde a cada uno a medida que aumenta la cantidad de amigos?

Imagen 58: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado quinto (p. 205)

Resultado del análisis. Segundo ciclo

Como se hizo con el ciclo uno, en esta sección también se presenta un análisis en relación con los ejemplos y Actividades que el texto escolar sugiere para el trabajo con secuencias, los tipos de secuencias y sus representaciones, como se pueden asociar estas actividades con las etapas del proceso de generalizar patrones y su relación con los referentes de calidad.

Sobre los tipos de secuencias, en este segundo ciclo no se evidenciaron propuestas de actividades donde se trabajen secuencias corporales ni manipulativas, las secuencias que más se utilizaron corresponden a figurativas y numéricas, al igual que en el ciclo anterior; sin embargo, también se observan secuencias de tipo gráfico-numéricas y tabulares, tampoco se evidencian puntos donde trabajen o propongan secuencias por recurrencia. La siguiente tabla resume lo antes descrito:

Grado	Nº de tareas	Secuencia corporal	Secuencia Manipulativa	Secuencias figurativas	Secuencia gráfico-numérica	Secuencia Tabulares	Secuencias numéricas	Secuencia por recurrencia
Cuarto	11			55%	18%	18%	9%	
Quinto	16				12%	19%	69%	

Tabla 9: Tipos de secuencias, ciclo cuarto a quinto

Como se observa en la Tabla 6 y en la Tabla 7, en el primer ciclo se hace mayor énfasis en los primeros tipos de secuencias mientras que para el segundo ciclo el énfasis predominan las secuencias de tipo gráfico-numéricas, tabulares y numéricas, esto evidencia que existe un trabajo secuencial en correspondencia con lo propuesto por Mora (2012).

Al igual que en el ciclo uno, no se evidencia el tipo de representación enactiva. Las representaciones de secuencias más trabajadas corresponden a las numéricas, como se evidencia en la siguiente tabla:

	# de tareas	Representación Enactiva	Representación icónica o gráfica	Representación simbólica
Primero	11	0%	81%	19%
Segundo	16	0%	31%	69%

Tabla 10: Tipos de representación. Ciclo cuarto a quinto

Desde el proceso de generalizar, es posible evidenciar que se hace un avance frente a las etapas del proceso (Tabla ¿?); el *Ver* se hace evidente cuando se le pide al estudiante que observe la secuencia y logre descubrir el patrón:

5. Observa la siguiente secuencia. Luego, indica cuál es su patrón o ley de formación. Y el término que sigue.



El patrón es _____.

Imagen 59: Ejemplo de la etapa Ver, grado quinto (p. 121)

Dentro del proceso se continúa con el *Decir*, presente en las diferentes actividades propuestas durante todo el ciclo, en la imagen se invita al estudiante a deducir el patrón que forma la secuencia:

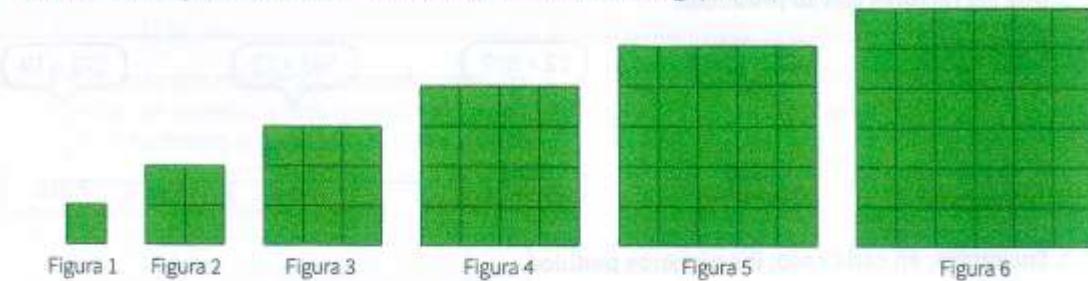
3. Usa los cuadros para plantear una secuencia. Luego, describe el patrón utilizado.



Imagen 60: Etapa de Decir. Grado cuarto, p.157

El *Registrar* aparece de manera clara en este ciclo de la Básica primaria, en contraste con el ciclo anterior donde esta etapa no tuvo presencia, en las actividades, se invita a que el estudiante encuentre una regla de formación que le permita construir las figuras que siguen en la secuencia. En este ciclo tampoco se logra evidenciar tareas que promuevan la etapa de validar.

2. Observa los primeros seis términos de la secuencia. Luego, resuelve.



Completa la siguiente tabla.

Figura	1	2	3	4	5	6
Número de cuadrados						

1. ¿Cuál es la regla de formación que determina la cantidad de cuadrados verdes?

2. ¿Cuántos cuadrados tendrán las figuras 7 y 8?

Imagen 61: Ejemplo donde se observa las etapas de Ver, Decir y Registrar. Grado cuarto, p. 119

		Ver	Decir	Registrar	Validar
Cuarto	Módulo 2	X	X	X	
	Módulo 3	X	X	X	
Quinto	Módulo 2	X	X	X	
	Módulo 3	X	X	X	

Tabla 11: Etapas del proceso de generalizar patrones, segundo ciclo.

Al igual que en el ciclo anterior, se encuentran diversas tareas sobre secuencias que no promueven el proceso de generalizar. El siguiente ejemplo, muestra la construcción de una secuencia a partir de un patrón establecido.

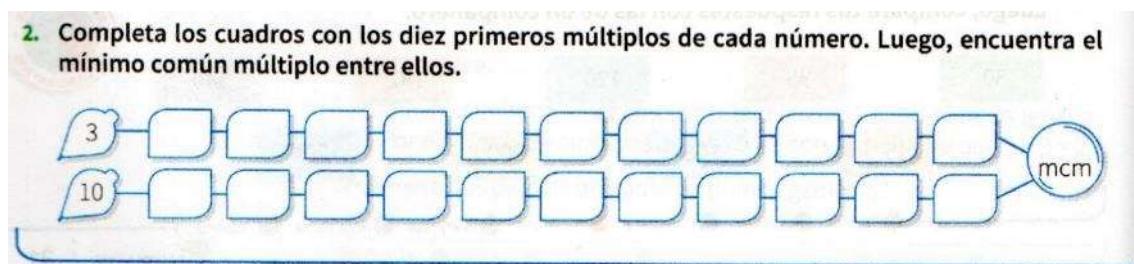


Imagen 62 Tareas de secuencias, otras secciones, grado quinto (p. 32)

Para este segundo, ciclo los EBCM proponen predecir patrones de variación en una secuencia numérica y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales, asuntos que no se pueden evidenciar desde las tablas de contenido, pero si desde los diferentes acercamientos del análisis realizado. En los textos escolares para este ciclo, las actividades propuestas son en su mayoría con patrones numéricos, en algunos casos se trabaja con secuencias tabulares, permitiendo ver, que de alguna manera el texto pretende responder a lo solicitado desde los EBCM.

Proyecto Saber, Ser y Hacer – Básica secundaria

Para el caso de los textos escolares de secundaria, cada unidad corresponde a uno o dos pensamientos, sin que se delimiten los temas o secciones que competen a cada uno. Para la cuestión que interesa en este trabajo, la generalización de patrones en secuencias, no se observa de manera explícita en las tablas de contenido en alguno de los textos, por tal razón, no es posible realizar el primer acercamiento a los libros de texto de secundaria desde las tablas de contenido.

Los textos escolares correspondiente a Secundaria, presentan una estructura diferente a los textos de Básica Primaria, en cada unidad se abordan diferentes temas en el marco de un pensamiento, en el planteamiento de cada tema se propone una situación de aprendizaje, ejemplos, definiciones y, si es el caso, se describen propiedades específicas al tema; por último, plantea actividades relacionadas con la temática.

Los divisores

Los divisores de un número

Situación de aprendizaje

Manuel tiene 12 fichas cuadradas y debe hacer todos los arreglos rectangulares posibles con diferente forma.

Todos los posibles arreglos rectangulares de diferente forma que Manuel puede encontrar, son:

GIMNASIA matemática

Encuentra los factores que tengan como producto:

- 16
- 45
- 120

Los arreglos que puede obtener Manuel son de 12×1 , 6×2 y 4×3 .

Los factores 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son divisores de 12 puesto que $12 \times 1 = 12$, $6 \times 2 = 12$, $4 \times 3 = 12$; por tanto, 1, 2, 3, 4, 6 y 12 dividen exactamente a 12.

Los divisores de un número natural son todos los números que lo dividen en forma exacta. El conjunto de divisores de un número natural se nombra D_n .

Imagen 63: Ejemplo 2 de estructura de sección en ciclo sexto a séptimo

Solamente en el texto de grado noveno, se reconoce desde la tabla de contenido, una unidad aislada referente a sucesiones y, posiblemente, sobre el proceso de generalizar; se considera aislada en tanto que no presenta una propuesta secuencial a lo largo de los dos ciclos, como se observa en la siguiente tabla:

GRADO	MÓDULO O UNIDAD	No. Págs.	SECCIÓN	NOMBRE DEL TEMA	No. Págs.
SEXTO	-	-	-	-	-
SEPTIMO	-	-	-	-	-
OCTAVO	-	-	-	-	-

NOVENO	5	27	1	Sucesiones recursivas	3
			2	Sucesiones aritméticas	5
			3	Sucesiones geométricas	4

Tabla 12: Hallazgos de sucesiones en tablas de contenido de textos básica secundaria

Es necesario aclarar que, dado que no fue posible realizar un análisis desde la tabla de contenido de los grados sexto a octavo, ni desde unidades o secciones específicas donde se evidencie el trabajo con secuencias y, eventualmente, el proceso de generalizar, fue necesario buscar en los contenidos de cada uno de estos textos, con el propósito de encontrar definiciones, ejemplos y/o tareas que promuevan el trabajo o aplicación del proceso de generalizar patrones.

A continuación, se presenta un análisis de las tareas encontradas en el texto de cada grado, por los ciclos definidos en los EBCM:

Ciclo Sexto a Séptimo

Grado Sexto

En el texto se encuentran diversas tareas en las que se evidencia el proceso de generalización de patrones, incluidas en las unidades categorizadas como de Pensamiento Numérico y Variacional, como se ilustra a continuación:

En esta primer tarea se puede evidenciar el proceso de identificar un patrón en una situación numérica, asociada a la potenciación. La actividad es planteada desde el proceso de **Razonar**.

Leer y resolver.

Un instructor de acondicionamiento físico evalúa la condición de las integrantes del equipo nacional de voleibol femenino de la siguiente manera: la primera semana, cada jugadora inicia su preparación con 2 vueltas a la pista; quienes pasen esa prueba correrán la segunda semana el doble del número de vueltas que la semana anterior. Las que superen la segunda prueba continuarán su acondicionamiento, progresivamente, por 4 semanas más. ¿Cuántas vueltas dará una jugadora en la sexta semana?

Primero, para calcular el número de vueltas de cada semana se realiza el siguiente esquema.

1.^a semana: 2

2.^a semana: $2 \times 2 = 4$

3.^a semana: $2 \times 2 \times 2 = 8$

4.^a semana: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

5.^a semana: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

6.^a semana: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

Luego, la cantidad de vueltas que debe dar una jugadora en la sexta semana se puede expresar como una potencia de 2, así: $2^6 = 64$.

Finalmente, una jugadora realiza 64 vueltas en su acondicionamiento físico.

Imagen 64: Ejemplo de secuencias, grado sexto, Unidad 1, Propiedades de la potenciación (p. 29)

Las siguientes actividades de **Ejercitarse**, plantean una secuencia que promueve en el estudiante el proceso de generalizar: *Ver, Decir, Escribir*, y hace un intento de validación, esto se evidencia cuando el texto solicita que indique en qué figura la secuencia tendrá 1.024 puntos o cuantos cubitos se requieren para armar la figura 77, así, el estudiante debe construir una fórmula que le permita encontrar las respuestas solicitadas:

► Observa la secuencia. Luego, responde.1.^a figura2.^a figura

19. ¿Cuántos puntos tendrá la tercera figura de la secuencia?

20. ¿Qué número de figura de la secuencia tendrá 1.024 puntos?

21. ¿Cómo se halla el número de la figura si se conoce la cantidad de puntos que la forma?

Imagen 65: Ejemplo de secuencias, grado sexto, Unidad 1, Propiedades de la logaritmación (p. 36)

Resuelve los siguientes problemas

1. Si se continúa la secuencia, ¿cuántos cubitos se requerirán para armar la figura 7? Expresa la operación utilizada para hallar el número de cubitos en forma de logaritmo.

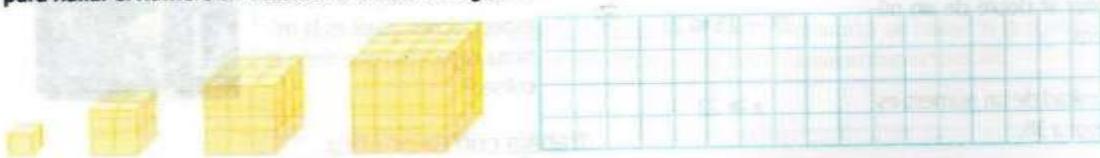


Imagen 66: Ejemplo de secuencias, grado sexto, Unidad 1, solución de problemas (p. 46)

La siguiente tarea invita al estudiante a realizar un análisis para cada caso e identificar el patrón que le permita encontrar en qué columnas coinciden algunos símbolos. La actividad se encuentra planteada desde el proceso de **Razonar**:

► Resuelve:

En una tabla de 32 columnas se organizaron algunos símbolos que se repiten en forma periódica. A continuación se muestra una parte de la tabla.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	*			*				*
.	
		△					△	

12. ¿En qué columnas coinciden Δ y *?
13. ¿En qué columnas coinciden * y .?
14. ¿En qué columnas coinciden *, . y Δ ?
15. ¿Cuál símbolo se repite menor cantidad de veces? ¿por qué?

Imagen 67: Ejemplo de secuencias, grado sexto, Unidad 2, método abreviado para hallar el m.c.m. (p. 75)

En la siguiente tarea no se hace una propuesta que invite al proceso de generalizar patrones, sin embargo, se considera que es una situación rica para aprovechar en el proceso, ya que si se continua la secuencia de la figura geométrica es posible establecer el patrón que la genera.

► Calcula las áreas sombreadas de cada figura. Considera que el área del triángulo de la figura inicial es 1 metro cuadrado.

15.

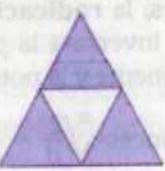


Figura 0

16.

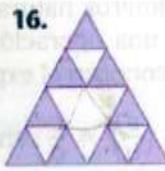


Figura 1

17.

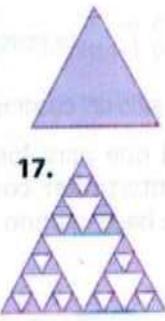


Figura 2

Imagen 68: Ejemplo de secuencias, grado sexto, Unidad 3, radicación de fracciones (p. 112)

En la siguiente actividad, se invita a ver un patrón y completar una secuencia.

► Completa las series.

11. 4,012

4,016

4,020

[] []

12. []

1

1,3

[] []

Imagen 69: Ejemplo de secuencias, grado sexto, Unidad 3, Los decimales y los porcentajes (p.121)

En la siguiente actividad se hace una aproximación a la etapa de *Validar*, ya que el estudiante debe escoger una opción entre las fórmulas planteadas; para ello, debe realizar algún tipo de análisis que lo lleve a descartar opciones y, de alguna manera, debe validar que la propuesta escogida funcione:

En las siguientes figuras se forma un patrón de cuadrados verdes.

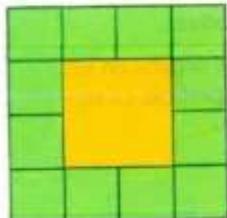


Figura 2

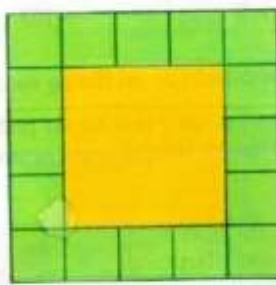


Figura 3

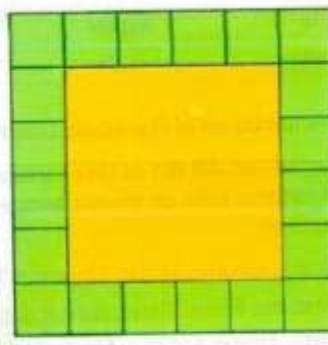


Figura 4

4. El área formada por los cuadrados verdes de la figura 4 se puede expresar como:

- A. $(6 \times 6) - (4 \times 5)$
 - B. $(6 \times 5) - (4 \times 5)$
 - C. $(6 \times 6) - (4 \times 4)$
 - D. $(6 \times 6) - (5 \times 5)$
5. La cantidad de cuadrados verdes que tiene la figura 4 es:
- A. 20.
 - B. 24.
 - C. 25.
 - D. 28.

Imagen 70: Ejemplo de secuencias, grado sexto, Unidad 6, Prueba saber (p. 279)

Grado Séptimo

En este texto escolar se reducen las actividades que muestran el trabajo de generalización. Las siguientes actividades, propuestas desde el pensamiento numérico, permiten evidenciar que el patrón es la misma razón.

Proporcionalidad directa

Situación de aprendizaje

Miguel fija una tabla para establecer el precio que debe pagar un cliente de su papelería por las fotocopias que saca.

Número de fotocopias	1	10	20	30
Precio en pesos	100	950	1.900	2.800

¿Cuál es la relación entre la cantidad de fotocopias y el precio en pesos que se debe pagar por ellas?

La relación que se establece entre las magnitudes descritas en la tabla es que al aumentar el número de fotocopias, el precio que se debe pagar por ellas también aumenta.

Imagen 71: Ejemplo de secuencias, grado séptimo, Unidad 3, Proporcionalidad directa (p. 115)

Ejemplos

- 1 Luis recoge tréboles como los que se muestran en la imagen y los registra en una tabla. Determinar si las magnitudes son directamente proporcionales.

Cantidad de tréboles	1	2	3	4
Número de hojas	3	6	9	12

Primeramente, las magnitudes se encuentran directamente correlacionadas.

Luego, se verifica que la razón entre los datos correspondientes sea constante.

$$\frac{3}{1} = 3 \quad \frac{6}{2} = 3 \quad \frac{9}{3} = 3 \quad \frac{12}{4} = 3$$

Por tanto, las magnitudes x y y son directamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es $k = 3$.

Además, los puntos $(1, 3)$, $(2, 6)$, $(3, 9)$ y $(4, 12)$ pertenecen a una misma recta como se muestra en la gráfica.

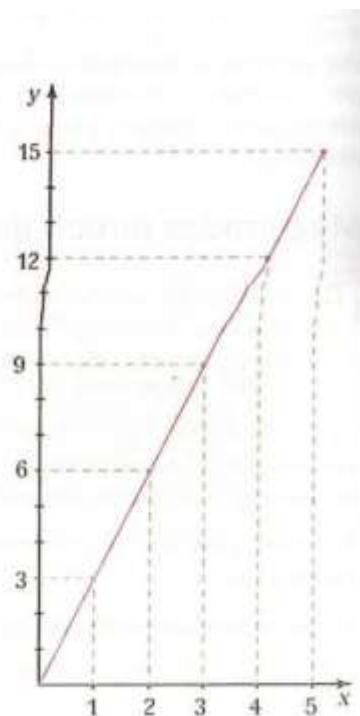


Imagen 72: Ejemplo de secuencias, grado séptimo, Unidad 3, Proporcionalidad directa (p. 116)

2. En una fábrica por cada máquina hay 3 obreros.

Número de máquinas	2	4	6	8
Número de obreros				

3. Para elaborar un postre se debe agregar dos cucharadas de azúcar por cada tres cucharadas de harina.

Cucharadas de harina	3	6	9	12
Cucharadas de azúcar				

Imagen 73: Ejemplo de secuencias, grado séptimo, Unidad 3, Proporcionalidad directa (p. 118)

► Observa la gráfica. Luego, realiza lo que se indica.



5. Halla la constante de proporcionalidad.
6. Halla la ecuación que relaciona las magnitudes número de vueltas y tiempo.
7. Realiza una tabla de datos que relacione las magnitudes.

Unidad 3

Imagen 74: Ejemplo de secuencias, grado séptimo, Unidad 3, Proporcionalidad directa (p. 118)

Para este grado en general, no se evidencian situaciones asociadas a la generalización de patrones, ni siquiera trabajo con secuencias numéricas; sin embargo, es común encontrar expresiones de aritmética generalizada, como en los siguientes ejemplos:

Potenciación de números racionales

Contexto de aprendizaje

¿Cuál es el volumen del cubo verde de la figura que se encuentra al lado derecho?

La figura muestra un cubo verde cuya arista mide $\frac{1}{4}$ dm, para encontrar el volumen del cubo se realiza la siguiente multiplicación:

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

Por tanto, el volumen del cubo es $\frac{1}{64}$ dm³.

La potenciación es la operación que permite escribir y calcular el producto de una multiplicación con factores iguales, esto es:

$$\underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \dots \times \frac{a}{b}}_{n \text{ factores}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \text{ donde } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+$$

En la expresión $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, $\frac{a}{b}$ se llama base, n exponente y $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ es la n -ésima potencia de $\frac{a}{b}$.

En general, para calcular la potencia de un número racional se eleva el numerador y el denominador al exponente n de la potencia dada, así:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Imagen 75: Ejemplo de generalización., grado séptimo, Unidad 2, Potenciación de números racionales (p. 83)

Resultado de análisis, ciclo sexto-séptimo

En los textos escolares de este primer ciclo de secundaria se encuentran algunas tareas con secuencias asociadas al proceso de generalizar patrones. La siguiente tabla, reporta los hallazgos encontrados en los ejemplos y tareas sobre los tipos de secuencias propuestos:

Grado	Nº de tareas	Secuencia corporal	Secuencia Manipulativa	Secuencias figurativas	Secuencia gráfico-numérica	Secuencia Tabulares	Secuencias numéricas	Secuencia por recurrencia
Sexto	7				56%	15%	29%	
Séptimo	4				25%	75%		

Tabla 13: Tipos de secuencias, ciclo Sexto a séptimo

Para este ciclo, se evidencia el peso que tienen las secuencias de tipo gráfico-numéricas, tabulares y numéricas; en este sentido, se guarda correspondencia con los referentes, debido a que las secuencias tabulares y numéricas son la antesala al álgebra.

En cuanto a los tipos de representación, se puede evidenciar que la representación enactiva no hace parte de las propuestas de los textos escolares, asunto que también se evidenció en Básica Primaria. En este ciclo, las representaciones icónicas tienen el mayor peso en las tareas propuestas:

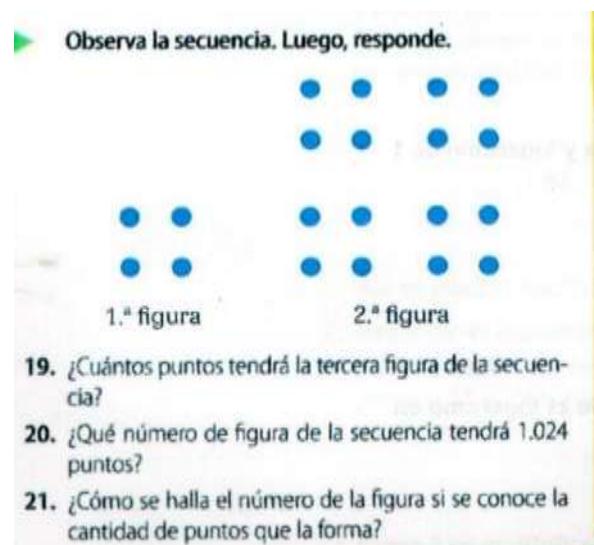
	# de tareas	Representación Enactiva	Representación icónica o gráfica	Representación simbólica
Sexto	7	0%	85%	15%
Séptimo	4	0%	75%	25%

Tabla 14: Tipos de representación, ciclo Sexto a séptimo

En relación con las etapas del proceso de generalizar, las tareas propuestas invitan al estudiante a transitar por las tres primeras etapas, la cuarta no es evidente. No obstante, es importante mencionar que el número de tareas en relación con el proceso de generalizar, propuestas para este ciclo, disminuye considerablemente frente a las tareas de cualquier otro ciclo en primaria.

La siguiente tarea ejemplifica lo observado sobre las etapas del proceso de generalizar:

► Observa la secuencia. Luego, responde.



1.ª figura 2.ª figura

19. ¿Cuántos puntos tendrá la tercera figura de la secuencia?

20. ¿Qué número de figura de la secuencia tendrá 1.024 puntos?

21. ¿Cómo se halla el número de la figura si se conoce la cantidad de puntos que la forma?

Imagen 76: Ejemplo 2 de tarea de etapas de Ver, Decir y Registrar (p.185)

		Ver	Dicir	Registrar	Validar
Sexto	Tareas encontradas	X	X	X	
Séptimo	Tareas encontradas	X	X	X	

Tabla 15: Etapas del proceso de generalizar, ciclo octavo a noveno

En relación con las directrices de los referentes de calidad para este ciclo, se puede observar que la ausencia de tareas asociadas al proceso de generalizar en los textos escolares podría estar relacionado con que en los EBCM no se encuentra ítems relacionados a este proceso, aunque en los DBA sí aparecen evidencias de aprendizaje que proponen trabajar patrones de comportamiento numérico.

Ciclo Octavo y Noveno

Grado Octavo

Al realizar una revisión detallada de este grado, se encuentra una sola situación de aprendizaje en el tema funciones, en la que se puede reconocer un acercamiento al proceso de generalización de patrones, este asunto, se constituye en una gran dificultad dentro de la forma secuenciada que el texto ha propuesto la generalización de patrones en tanto que, siendo grado octavo no se aprovecha el trabajo previo en generalización para introducir el lenguaje algebraico.

Función

El concepto de función en la historia de las matemáticas



El matemático alemán **Gottfried Leibniz** (1646-1716) fue el primero en hacer alusión al concepto de función. Tiempo después, Leonard Euler (1707-1783) introdujo la notación $f(x)$ para expresar una relación funcional. Sin embargo, es al matemático alemán Gustav Dirichlet (1805-1859), a quien se le atribuye la definición formal moderna de función.

Situación de aprendizaje

Se forma un cuadrado con palillos de 1 cm de longitud, como se muestra en la figura. ¿Cuántos palillos de los mismos se requieren para formar un cuadrado de 25 cm de lado que esté dividido en cuadrados de 1 cm de lado?



En la siguiente tabla se relaciona la longitud del lado de cada cuadrado, con la cantidad de palillos necesaria para formarlo.

Cuadrado	Longitud del lado en centímetros	Cantidad de palillos
	1	4
	2	12
	3	24

Luego, se puede establecer la siguiente relación entre la longitud de cada cuadrado y la cantidad de palillos.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \times 4 & 2 & \times 6 & 3 & \times 8 \\ 4 & & 12 & & 24 & \\ & & & & & \dots \\ & & & & & n \times 2n + 2 \end{array}$$

Finalmente, si $n = 25$, entonces, $2(25) \cdot (25 + 1) = 1.300$. Por tanto, para formar un cuadrado de 25 cm de lado se requiere de 1.300 palillos.

Imagen 77: Ejemplo de secuencias, grado octavo, Unidad 6, función (p. 206)

Grado Noveno

Para el grado noveno, desde la tabla de contenido se evidencia el título de Sucesiones y series como propuesta para trabajar en la unidad 5. Teniendo en cuenta que las sucesiones son un tipo especial de secuencias, se decide realizar una mirada al interior de esta unidad para determinar qué del proceso de generalización de patrones se evidencia en esta unidad.

CONTENIDOS																																																																											
Estándares: pensamientos numérico y variacional																																																																											
Unidad 1 Números reales y números complejos	8																																																																										
El conjunto de los números reales Números irracionales Números enteros Números racionales Números iracionales Números reales Potenciación de números reales Propiedades de la potenciación La raíz cuadrada Raíz de un número Raíz de números reales Propiedades de la radicación	10 11 11 11 12 12 14 14 15 23 23	Simplificación de expresiones con radicales Operaciones con radicales Adición y sustracción de radicales Multiplicación de radicales División de radicales Raíz cuadrada Raíz de números Raíz de fracciones con denominadores monomios Raíz de fracciones con denominadores binomios Raíz de fracciones con denominadores trinomios	25 29 29 31 35 37 37 37 39	números complejos números imaginarios El conjunto de los números complejos Operaciones con números complejos Raíz cuadrada de un número complejo Resolución de problemas Leo, escribo y comprendo en matemáticas Taller En síntesis Proyecto Educación económica y financiera	42 42 42 47 56 58 60 62 63 64	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 2 Sistemas de ecuaciones lineales	68	Funciones Concepto de función Elementos de una función Representación de funciones Funciones de variable real Función lineal y función afín Línea recta Pendiente de la recta Ecuación explícita de la recta	70 71 71 71 74 77 79 80	Ecuación general de la recta. Rectas paralelas y perpendiculares Sistemas de ecuaciones lineales Solución de sistemas de ecuaciones Inversas Método de sustución de sistemas de ecuaciones 2 × 2 Métodos de solución de sistemas de ecuaciones 3 × 3	83 84 88 89 105 110 111 112	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Educación económica y financiera	105 106 110 111 112	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 3 Función y ecuación cuadrática	116	La función cuadrática Gráfico de una función cuadrática Vozes de gráficas de una función cuadrática Ceros o raíces de una función cuadrática La ecuación cuadrática Solución de ecuaciones cuadráticas	118 118 119 124 126 126	Solución de ecuaciones cuadráticas Complejas Raíz de los radicales de la ecuación cuadrática Fuciones redudables a ecuaciones cuadráticas Ecuaciones de índices dos Ecuaciones biquadráticas	129 129 134 138 138 140	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis	142 144 146 148 149	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 4 Función exponencial y función logarítmica	150	Potencia exponencial Representación de la función exponencial Función logarítmica Representación gráfica de la función logarítmica Propiedades de los logaritmos	152 152 153 155 158	Funciones exponenciales y logarítmicas Ecuaciones exponenciales Sistemas de ecuaciones logarítmicas Ecuaciones exponenciales + Solución de problemas	160 160 161 162 166	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Educación económica y financiera	168 170 171 172	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 5 Sucesiones y series	176	Sucesiones Succesiones recursivas Succesiones aritméticas Succesiones geométricas	178 179 181 185	Series Sumatoria Serie aritmética Serie geométrica	190 190 193 196	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	202 204 205	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 6 Razonamiento	206	Proposiciones lógicas Concepto Proposiciones simples y proposiciones compuestas Consecuencias del teorema de Tales Cuantificadores Dimensión espacial Método directo Método indirecto El contrapositivo Razones y proporciones Razón	208 208 208 209 210 212 213 214 216 216	Proporción Relación entre dos segmentos Teorema de Tales Consecuencias del teorema de Tales Propiedades de los segmentos Segregación de triángulos Circunferencia Elementos de la circunferencia Longitud de la circunferencia Propiedades de los cuadrados	216 217 220 221 224 226 234 234 234 236	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	237 239 241 244 248	Estándares: pensamientos espacial, métrico y variacional		Unidad 7 Cuerpos geométricos	254	Cuerpos redondos El cilindro El cono La esfera Poliedros El prisma	256 256 258 260 263 264	Un prisma Características de los cuerpos geométricos El tronco de cono El tronco de pirámide + Solución de problemas	266 266 268 271 274	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura	276 278 279 280	Estándar: pensamiento aleatorio		Unidad 8 Estadística y probabilidad	282	Caracterización de variables cualitativas Tabla cruzada o de contingencia Tabla marginal Caracterización de variables cuantitativas Diagrama de tallas y edades Tabla de distribución de frecuencias Gráficos Medidas numéricas para la caracterización de variables Medidas de localización	284 284 287 290 290 291 293 295	Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336
Simplificación de expresiones con radicales Operaciones con radicales Adición y sustracción de radicales Multiplicación de radicales División de radicales Raíz cuadrada Raíz de números Raíz de fracciones con denominadores monomios Raíz de fracciones con denominadores binomios Raíz de fracciones con denominadores trinomios	25 29 29 31 35 37 37 37 39	números complejos números imaginarios El conjunto de los números complejos Operaciones con números complejos Raíz cuadrada de un número complejo Resolución de problemas Leo, escribo y comprendo en matemáticas Taller En síntesis Proyecto Educación económica y financiera	42 42 42 47 56 58 60 62 63 64	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 2 Sistemas de ecuaciones lineales	68	Funciones Concepto de función Elementos de una función Representación de funciones Funciones de variable real Función lineal y función afín Línea recta Pendiente de la recta Ecuación explícita de la recta	70 71 71 71 74 77 79 80	Ecuación general de la recta. Rectas paralelas y perpendiculares Sistemas de ecuaciones lineales Solución de sistemas de ecuaciones Inversas Método de sustución de sistemas de ecuaciones 2 × 2 Métodos de solución de sistemas de ecuaciones 3 × 3	83 84 88 89 105 110 111 112	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Educación económica y financiera	105 106 110 111 112	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 3 Función y ecuación cuadrática	116	La función cuadrática Gráfico de una función cuadrática Vozes de gráficas de una función cuadrática Ceros o raíces de una función cuadrática La ecuación cuadrática Solución de ecuaciones cuadráticas	118 118 119 124 126 126	Solución de ecuaciones cuadráticas Complejas Raíz de los radicales de la ecuación cuadrática Fuciones redudables a ecuaciones cuadráticas Ecuaciones de índices dos Ecuaciones biquadráticas	129 129 134 138 138 140	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis	142 144 146 148 149	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 4 Función exponencial y función logarítmica	150	Potencia exponencial Representación de la función exponencial Función logarítmica Representación gráfica de la función logarítmica Propiedades de los logaritmos	152 152 153 155 158	Funciones exponenciales y logarítmicas Ecuaciones exponenciales Sistemas de ecuaciones logarítmicas Ecuaciones exponenciales + Solución de problemas	160 160 161 162 166	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Educación económica y financiera	168 170 171 172	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 5 Sucesiones y series	176	Sucesiones Succesiones recursivas Succesiones aritméticas Succesiones geométricas	178 179 181 185	Series Sumatoria Serie aritmética Serie geométrica	190 190 193 196	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	202 204 205	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 6 Razonamiento	206	Proposiciones lógicas Concepto Proposiciones simples y proposiciones compuestas Consecuencias del teorema de Tales Cuantificadores Dimensión espacial Método directo Método indirecto El contrapositivo Razones y proporciones Razón	208 208 208 209 210 212 213 214 216 216	Proporción Relación entre dos segmentos Teorema de Tales Consecuencias del teorema de Tales Propiedades de los segmentos Segregación de triángulos Circunferencia Elementos de la circunferencia Longitud de la circunferencia Propiedades de los cuadrados	216 217 220 221 224 226 234 234 234 236	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	237 239 241 244 248	Estándares: pensamientos espacial, métrico y variacional		Unidad 7 Cuerpos geométricos	254	Cuerpos redondos El cilindro El cono La esfera Poliedros El prisma	256 256 258 260 263 264	Un prisma Características de los cuerpos geométricos El tronco de cono El tronco de pirámide + Solución de problemas	266 266 268 271 274	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura	276 278 279 280	Estándar: pensamiento aleatorio		Unidad 8 Estadística y probabilidad	282	Caracterización de variables cualitativas Tabla cruzada o de contingencia Tabla marginal Caracterización de variables cuantitativas Diagrama de tallas y edades Tabla de distribución de frecuencias Gráficos Medidas numéricas para la caracterización de variables Medidas de localización	284 284 287 290 290 291 293 295	Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336		
números complejos números imaginarios El conjunto de los números complejos Operaciones con números complejos Raíz cuadrada de un número complejo Resolución de problemas Leo, escribo y comprendo en matemáticas Taller En síntesis Proyecto Educación económica y financiera	42 42 42 47 56 58 60 62 63 64																																																																										
Estándares: pensamientos numérico y variacional																																																																											
Unidad 2 Sistemas de ecuaciones lineales	68																																																																										
Funciones Concepto de función Elementos de una función Representación de funciones Funciones de variable real Función lineal y función afín Línea recta Pendiente de la recta Ecuación explícita de la recta	70 71 71 71 74 77 79 80	Ecuación general de la recta. Rectas paralelas y perpendiculares Sistemas de ecuaciones lineales Solución de sistemas de ecuaciones Inversas Método de sustución de sistemas de ecuaciones 2 × 2 Métodos de solución de sistemas de ecuaciones 3 × 3	83 84 88 89 105 110 111 112	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Educación económica y financiera	105 106 110 111 112	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 3 Función y ecuación cuadrática	116	La función cuadrática Gráfico de una función cuadrática Vozes de gráficas de una función cuadrática Ceros o raíces de una función cuadrática La ecuación cuadrática Solución de ecuaciones cuadráticas	118 118 119 124 126 126	Solución de ecuaciones cuadráticas Complejas Raíz de los radicales de la ecuación cuadrática Fuciones redudables a ecuaciones cuadráticas Ecuaciones de índices dos Ecuaciones biquadráticas	129 129 134 138 138 140	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis	142 144 146 148 149	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 4 Función exponencial y función logarítmica	150	Potencia exponencial Representación de la función exponencial Función logarítmica Representación gráfica de la función logarítmica Propiedades de los logaritmos	152 152 153 155 158	Funciones exponenciales y logarítmicas Ecuaciones exponenciales Sistemas de ecuaciones logarítmicas Ecuaciones exponenciales + Solución de problemas	160 160 161 162 166	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Educación económica y financiera	168 170 171 172	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 5 Sucesiones y series	176	Sucesiones Succesiones recursivas Succesiones aritméticas Succesiones geométricas	178 179 181 185	Series Sumatoria Serie aritmética Serie geométrica	190 190 193 196	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	202 204 205	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 6 Razonamiento	206	Proposiciones lógicas Concepto Proposiciones simples y proposiciones compuestas Consecuencias del teorema de Tales Cuantificadores Dimensión espacial Método directo Método indirecto El contrapositivo Razones y proporciones Razón	208 208 208 209 210 212 213 214 216 216	Proporción Relación entre dos segmentos Teorema de Tales Consecuencias del teorema de Tales Propiedades de los segmentos Segregación de triángulos Circunferencia Elementos de la circunferencia Longitud de la circunferencia Propiedades de los cuadrados	216 217 220 221 224 226 234 234 234 236	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	237 239 241 244 248	Estándares: pensamientos espacial, métrico y variacional		Unidad 7 Cuerpos geométricos	254	Cuerpos redondos El cilindro El cono La esfera Poliedros El prisma	256 256 258 260 263 264	Un prisma Características de los cuerpos geométricos El tronco de cono El tronco de pirámide + Solución de problemas	266 266 268 271 274	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura	276 278 279 280	Estándar: pensamiento aleatorio		Unidad 8 Estadística y probabilidad	282	Caracterización de variables cualitativas Tabla cruzada o de contingencia Tabla marginal Caracterización de variables cuantitativas Diagrama de tallas y edades Tabla de distribución de frecuencias Gráficos Medidas numéricas para la caracterización de variables Medidas de localización	284 284 287 290 290 291 293 295	Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336										
Ecuación general de la recta. Rectas paralelas y perpendiculares Sistemas de ecuaciones lineales Solución de sistemas de ecuaciones Inversas Método de sustución de sistemas de ecuaciones 2 × 2 Métodos de solución de sistemas de ecuaciones 3 × 3	83 84 88 89 105 110 111 112	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Educación económica y financiera	105 106 110 111 112	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 3 Función y ecuación cuadrática	116	La función cuadrática Gráfico de una función cuadrática Vozes de gráficas de una función cuadrática Ceros o raíces de una función cuadrática La ecuación cuadrática Solución de ecuaciones cuadráticas	118 118 119 124 126 126	Solución de ecuaciones cuadráticas Complejas Raíz de los radicales de la ecuación cuadrática Fuciones redudables a ecuaciones cuadráticas Ecuaciones de índices dos Ecuaciones biquadráticas	129 129 134 138 138 140	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis	142 144 146 148 149	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 4 Función exponencial y función logarítmica	150	Potencia exponencial Representación de la función exponencial Función logarítmica Representación gráfica de la función logarítmica Propiedades de los logaritmos	152 152 153 155 158	Funciones exponenciales y logarítmicas Ecuaciones exponenciales Sistemas de ecuaciones logarítmicas Ecuaciones exponenciales + Solución de problemas	160 160 161 162 166	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Educación económica y financiera	168 170 171 172	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 5 Sucesiones y series	176	Sucesiones Succesiones recursivas Succesiones aritméticas Succesiones geométricas	178 179 181 185	Series Sumatoria Serie aritmética Serie geométrica	190 190 193 196	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	202 204 205	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 6 Razonamiento	206	Proposiciones lógicas Concepto Proposiciones simples y proposiciones compuestas Consecuencias del teorema de Tales Cuantificadores Dimensión espacial Método directo Método indirecto El contrapositivo Razones y proporciones Razón	208 208 208 209 210 212 213 214 216 216	Proporción Relación entre dos segmentos Teorema de Tales Consecuencias del teorema de Tales Propiedades de los segmentos Segregación de triángulos Circunferencia Elementos de la circunferencia Longitud de la circunferencia Propiedades de los cuadrados	216 217 220 221 224 226 234 234 234 236	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	237 239 241 244 248	Estándares: pensamientos espacial, métrico y variacional		Unidad 7 Cuerpos geométricos	254	Cuerpos redondos El cilindro El cono La esfera Poliedros El prisma	256 256 258 260 263 264	Un prisma Características de los cuerpos geométricos El tronco de cono El tronco de pirámide + Solución de problemas	266 266 268 271 274	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura	276 278 279 280	Estándar: pensamiento aleatorio		Unidad 8 Estadística y probabilidad	282	Caracterización de variables cualitativas Tabla cruzada o de contingencia Tabla marginal Caracterización de variables cuantitativas Diagrama de tallas y edades Tabla de distribución de frecuencias Gráficos Medidas numéricas para la caracterización de variables Medidas de localización	284 284 287 290 290 291 293 295	Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336												
+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Educación económica y financiera	105 106 110 111 112																																																																										
Estándares: pensamientos numérico y variacional																																																																											
Unidad 3 Función y ecuación cuadrática	116																																																																										
La función cuadrática Gráfico de una función cuadrática Vozes de gráficas de una función cuadrática Ceros o raíces de una función cuadrática La ecuación cuadrática Solución de ecuaciones cuadráticas	118 118 119 124 126 126	Solución de ecuaciones cuadráticas Complejas Raíz de los radicales de la ecuación cuadrática Fuciones redudables a ecuaciones cuadráticas Ecuaciones de índices dos Ecuaciones biquadráticas	129 129 134 138 138 140	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis	142 144 146 148 149	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 4 Función exponencial y función logarítmica	150	Potencia exponencial Representación de la función exponencial Función logarítmica Representación gráfica de la función logarítmica Propiedades de los logaritmos	152 152 153 155 158	Funciones exponenciales y logarítmicas Ecuaciones exponenciales Sistemas de ecuaciones logarítmicas Ecuaciones exponenciales + Solución de problemas	160 160 161 162 166	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Educación económica y financiera	168 170 171 172	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 5 Sucesiones y series	176	Sucesiones Succesiones recursivas Succesiones aritméticas Succesiones geométricas	178 179 181 185	Series Sumatoria Serie aritmética Serie geométrica	190 190 193 196	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	202 204 205	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 6 Razonamiento	206	Proposiciones lógicas Concepto Proposiciones simples y proposiciones compuestas Consecuencias del teorema de Tales Cuantificadores Dimensión espacial Método directo Método indirecto El contrapositivo Razones y proporciones Razón	208 208 208 209 210 212 213 214 216 216	Proporción Relación entre dos segmentos Teorema de Tales Consecuencias del teorema de Tales Propiedades de los segmentos Segregación de triángulos Circunferencia Elementos de la circunferencia Longitud de la circunferencia Propiedades de los cuadrados	216 217 220 221 224 226 234 234 234 236	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	237 239 241 244 248	Estándares: pensamientos espacial, métrico y variacional		Unidad 7 Cuerpos geométricos	254	Cuerpos redondos El cilindro El cono La esfera Poliedros El prisma	256 256 258 260 263 264	Un prisma Características de los cuerpos geométricos El tronco de cono El tronco de pirámide + Solución de problemas	266 266 268 271 274	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura	276 278 279 280	Estándar: pensamiento aleatorio		Unidad 8 Estadística y probabilidad	282	Caracterización de variables cualitativas Tabla cruzada o de contingencia Tabla marginal Caracterización de variables cuantitativas Diagrama de tallas y edades Tabla de distribución de frecuencias Gráficos Medidas numéricas para la caracterización de variables Medidas de localización	284 284 287 290 290 291 293 295	Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336																				
Solución de ecuaciones cuadráticas Complejas Raíz de los radicales de la ecuación cuadrática Fuciones redudables a ecuaciones cuadráticas Ecuaciones de índices dos Ecuaciones biquadráticas	129 129 134 138 138 140	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis	142 144 146 148 149	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 4 Función exponencial y función logarítmica	150	Potencia exponencial Representación de la función exponencial Función logarítmica Representación gráfica de la función logarítmica Propiedades de los logaritmos	152 152 153 155 158	Funciones exponenciales y logarítmicas Ecuaciones exponenciales Sistemas de ecuaciones logarítmicas Ecuaciones exponenciales + Solución de problemas	160 160 161 162 166	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Educación económica y financiera	168 170 171 172	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 5 Sucesiones y series	176	Sucesiones Succesiones recursivas Succesiones aritméticas Succesiones geométricas	178 179 181 185	Series Sumatoria Serie aritmética Serie geométrica	190 190 193 196	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	202 204 205	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 6 Razonamiento	206	Proposiciones lógicas Concepto Proposiciones simples y proposiciones compuestas Consecuencias del teorema de Tales Cuantificadores Dimensión espacial Método directo Método indirecto El contrapositivo Razones y proporciones Razón	208 208 208 209 210 212 213 214 216 216	Proporción Relación entre dos segmentos Teorema de Tales Consecuencias del teorema de Tales Propiedades de los segmentos Segregación de triángulos Circunferencia Elementos de la circunferencia Longitud de la circunferencia Propiedades de los cuadrados	216 217 220 221 224 226 234 234 234 236	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	237 239 241 244 248	Estándares: pensamientos espacial, métrico y variacional		Unidad 7 Cuerpos geométricos	254	Cuerpos redondos El cilindro El cono La esfera Poliedros El prisma	256 256 258 260 263 264	Un prisma Características de los cuerpos geométricos El tronco de cono El tronco de pirámide + Solución de problemas	266 266 268 271 274	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura	276 278 279 280	Estándar: pensamiento aleatorio		Unidad 8 Estadística y probabilidad	282	Caracterización de variables cualitativas Tabla cruzada o de contingencia Tabla marginal Caracterización de variables cuantitativas Diagrama de tallas y edades Tabla de distribución de frecuencias Gráficos Medidas numéricas para la caracterización de variables Medidas de localización	284 284 287 290 290 291 293 295	Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336																						
+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis	142 144 146 148 149																																																																										
Estándares: pensamientos numérico y variacional																																																																											
Unidad 4 Función exponencial y función logarítmica	150																																																																										
Potencia exponencial Representación de la función exponencial Función logarítmica Representación gráfica de la función logarítmica Propiedades de los logaritmos	152 152 153 155 158	Funciones exponenciales y logarítmicas Ecuaciones exponenciales Sistemas de ecuaciones logarítmicas Ecuaciones exponenciales + Solución de problemas	160 160 161 162 166	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Educación económica y financiera	168 170 171 172	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 5 Sucesiones y series	176	Sucesiones Succesiones recursivas Succesiones aritméticas Succesiones geométricas	178 179 181 185	Series Sumatoria Serie aritmética Serie geométrica	190 190 193 196	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	202 204 205	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 6 Razonamiento	206	Proposiciones lógicas Concepto Proposiciones simples y proposiciones compuestas Consecuencias del teorema de Tales Cuantificadores Dimensión espacial Método directo Método indirecto El contrapositivo Razones y proporciones Razón	208 208 208 209 210 212 213 214 216 216	Proporción Relación entre dos segmentos Teorema de Tales Consecuencias del teorema de Tales Propiedades de los segmentos Segregación de triángulos Circunferencia Elementos de la circunferencia Longitud de la circunferencia Propiedades de los cuadrados	216 217 220 221 224 226 234 234 234 236	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	237 239 241 244 248	Estándares: pensamientos espacial, métrico y variacional		Unidad 7 Cuerpos geométricos	254	Cuerpos redondos El cilindro El cono La esfera Poliedros El prisma	256 256 258 260 263 264	Un prisma Características de los cuerpos geométricos El tronco de cono El tronco de pirámide + Solución de problemas	266 266 268 271 274	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura	276 278 279 280	Estándar: pensamiento aleatorio		Unidad 8 Estadística y probabilidad	282	Caracterización de variables cualitativas Tabla cruzada o de contingencia Tabla marginal Caracterización de variables cuantitativas Diagrama de tallas y edades Tabla de distribución de frecuencias Gráficos Medidas numéricas para la caracterización de variables Medidas de localización	284 284 287 290 290 291 293 295	Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336																														
Funciones exponenciales y logarítmicas Ecuaciones exponenciales Sistemas de ecuaciones logarítmicas Ecuaciones exponenciales + Solución de problemas	160 160 161 162 166	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Educación económica y financiera	168 170 171 172	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 5 Sucesiones y series	176	Sucesiones Succesiones recursivas Succesiones aritméticas Succesiones geométricas	178 179 181 185	Series Sumatoria Serie aritmética Serie geométrica	190 190 193 196	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	202 204 205	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 6 Razonamiento	206	Proposiciones lógicas Concepto Proposiciones simples y proposiciones compuestas Consecuencias del teorema de Tales Cuantificadores Dimensión espacial Método directo Método indirecto El contrapositivo Razones y proporciones Razón	208 208 208 209 210 212 213 214 216 216	Proporción Relación entre dos segmentos Teorema de Tales Consecuencias del teorema de Tales Propiedades de los segmentos Segregación de triángulos Circunferencia Elementos de la circunferencia Longitud de la circunferencia Propiedades de los cuadrados	216 217 220 221 224 226 234 234 234 236	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	237 239 241 244 248	Estándares: pensamientos espacial, métrico y variacional		Unidad 7 Cuerpos geométricos	254	Cuerpos redondos El cilindro El cono La esfera Poliedros El prisma	256 256 258 260 263 264	Un prisma Características de los cuerpos geométricos El tronco de cono El tronco de pirámide + Solución de problemas	266 266 268 271 274	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura	276 278 279 280	Estándar: pensamiento aleatorio		Unidad 8 Estadística y probabilidad	282	Caracterización de variables cualitativas Tabla cruzada o de contingencia Tabla marginal Caracterización de variables cuantitativas Diagrama de tallas y edades Tabla de distribución de frecuencias Gráficos Medidas numéricas para la caracterización de variables Medidas de localización	284 284 287 290 290 291 293 295	Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336																																
+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Educación económica y financiera	168 170 171 172																																																																										
Estándares: pensamientos numérico y variacional																																																																											
Unidad 5 Sucesiones y series	176																																																																										
Sucesiones Succesiones recursivas Succesiones aritméticas Succesiones geométricas	178 179 181 185	Series Sumatoria Serie aritmética Serie geométrica	190 190 193 196	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	202 204 205	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 6 Razonamiento	206	Proposiciones lógicas Concepto Proposiciones simples y proposiciones compuestas Consecuencias del teorema de Tales Cuantificadores Dimensión espacial Método directo Método indirecto El contrapositivo Razones y proporciones Razón	208 208 208 209 210 212 213 214 216 216	Proporción Relación entre dos segmentos Teorema de Tales Consecuencias del teorema de Tales Propiedades de los segmentos Segregación de triángulos Circunferencia Elementos de la circunferencia Longitud de la circunferencia Propiedades de los cuadrados	216 217 220 221 224 226 234 234 234 236	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	237 239 241 244 248	Estándares: pensamientos espacial, métrico y variacional		Unidad 7 Cuerpos geométricos	254	Cuerpos redondos El cilindro El cono La esfera Poliedros El prisma	256 256 258 260 263 264	Un prisma Características de los cuerpos geométricos El tronco de cono El tronco de pirámide + Solución de problemas	266 266 268 271 274	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura	276 278 279 280	Estándar: pensamiento aleatorio		Unidad 8 Estadística y probabilidad	282	Caracterización de variables cualitativas Tabla cruzada o de contingencia Tabla marginal Caracterización de variables cuantitativas Diagrama de tallas y edades Tabla de distribución de frecuencias Gráficos Medidas numéricas para la caracterización de variables Medidas de localización	284 284 287 290 290 291 293 295	Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336																																								
Series Sumatoria Serie aritmética Serie geométrica	190 190 193 196	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	202 204 205	Estándares: pensamientos numérico y variacional		Unidad 6 Razonamiento	206	Proposiciones lógicas Concepto Proposiciones simples y proposiciones compuestas Consecuencias del teorema de Tales Cuantificadores Dimensión espacial Método directo Método indirecto El contrapositivo Razones y proporciones Razón	208 208 208 209 210 212 213 214 216 216	Proporción Relación entre dos segmentos Teorema de Tales Consecuencias del teorema de Tales Propiedades de los segmentos Segregación de triángulos Circunferencia Elementos de la circunferencia Longitud de la circunferencia Propiedades de los cuadrados	216 217 220 221 224 226 234 234 234 236	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	237 239 241 244 248	Estándares: pensamientos espacial, métrico y variacional		Unidad 7 Cuerpos geométricos	254	Cuerpos redondos El cilindro El cono La esfera Poliedros El prisma	256 256 258 260 263 264	Un prisma Características de los cuerpos geométricos El tronco de cono El tronco de pirámide + Solución de problemas	266 266 268 271 274	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura	276 278 279 280	Estándar: pensamiento aleatorio		Unidad 8 Estadística y probabilidad	282	Caracterización de variables cualitativas Tabla cruzada o de contingencia Tabla marginal Caracterización de variables cuantitativas Diagrama de tallas y edades Tabla de distribución de frecuencias Gráficos Medidas numéricas para la caracterización de variables Medidas de localización	284 284 287 290 290 291 293 295	Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336																																										
+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	202 204 205																																																																										
Estándares: pensamientos numérico y variacional																																																																											
Unidad 6 Razonamiento	206																																																																										
Proposiciones lógicas Concepto Proposiciones simples y proposiciones compuestas Consecuencias del teorema de Tales Cuantificadores Dimensión espacial Método directo Método indirecto El contrapositivo Razones y proporciones Razón	208 208 208 209 210 212 213 214 216 216	Proporción Relación entre dos segmentos Teorema de Tales Consecuencias del teorema de Tales Propiedades de los segmentos Segregación de triángulos Circunferencia Elementos de la circunferencia Longitud de la circunferencia Propiedades de los cuadrados	216 217 220 221 224 226 234 234 234 236	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	237 239 241 244 248	Estándares: pensamientos espacial, métrico y variacional		Unidad 7 Cuerpos geométricos	254	Cuerpos redondos El cilindro El cono La esfera Poliedros El prisma	256 256 258 260 263 264	Un prisma Características de los cuerpos geométricos El tronco de cono El tronco de pirámide + Solución de problemas	266 266 268 271 274	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura	276 278 279 280	Estándar: pensamiento aleatorio		Unidad 8 Estadística y probabilidad	282	Caracterización de variables cualitativas Tabla cruzada o de contingencia Tabla marginal Caracterización de variables cuantitativas Diagrama de tallas y edades Tabla de distribución de frecuencias Gráficos Medidas numéricas para la caracterización de variables Medidas de localización	284 284 287 290 290 291 293 295	Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336																																																		
Proporción Relación entre dos segmentos Teorema de Tales Consecuencias del teorema de Tales Propiedades de los segmentos Segregación de triángulos Circunferencia Elementos de la circunferencia Longitud de la circunferencia Propiedades de los cuadrados	216 217 220 221 224 226 234 234 234 236	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	237 239 241 244 248	Estándares: pensamientos espacial, métrico y variacional		Unidad 7 Cuerpos geométricos	254	Cuerpos redondos El cilindro El cono La esfera Poliedros El prisma	256 256 258 260 263 264	Un prisma Características de los cuerpos geométricos El tronco de cono El tronco de pirámide + Solución de problemas	266 266 268 271 274	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura	276 278 279 280	Estándar: pensamiento aleatorio		Unidad 8 Estadística y probabilidad	282	Caracterización de variables cualitativas Tabla cruzada o de contingencia Tabla marginal Caracterización de variables cuantitativas Diagrama de tallas y edades Tabla de distribución de frecuencias Gráficos Medidas numéricas para la caracterización de variables Medidas de localización	284 284 287 290 290 291 293 295	Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336																																																				
+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Solución de problemas	237 239 241 244 248																																																																										
Estándares: pensamientos espacial, métrico y variacional																																																																											
Unidad 7 Cuerpos geométricos	254																																																																										
Cuerpos redondos El cilindro El cono La esfera Poliedros El prisma	256 256 258 260 263 264	Un prisma Características de los cuerpos geométricos El tronco de cono El tronco de pirámide + Solución de problemas	266 266 268 271 274	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura	276 278 279 280	Estándar: pensamiento aleatorio		Unidad 8 Estadística y probabilidad	282	Caracterización de variables cualitativas Tabla cruzada o de contingencia Tabla marginal Caracterización de variables cuantitativas Diagrama de tallas y edades Tabla de distribución de frecuencias Gráficos Medidas numéricas para la caracterización de variables Medidas de localización	284 284 287 290 290 291 293 295	Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336																																																												
Un prisma Características de los cuerpos geométricos El tronco de cono El tronco de pirámide + Solución de problemas	266 266 268 271 274	+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura	276 278 279 280	Estándar: pensamiento aleatorio		Unidad 8 Estadística y probabilidad	282	Caracterización de variables cualitativas Tabla cruzada o de contingencia Tabla marginal Caracterización de variables cuantitativas Diagrama de tallas y edades Tabla de distribución de frecuencias Gráficos Medidas numéricas para la caracterización de variables Medidas de localización	284 284 287 290 290 291 293 295	Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336																																																														
+ Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura	276 278 279 280																																																																										
Estándar: pensamiento aleatorio																																																																											
Unidad 8 Estadística y probabilidad	282																																																																										
Caracterización de variables cualitativas Tabla cruzada o de contingencia Tabla marginal Caracterización de variables cuantitativas Diagrama de tallas y edades Tabla de distribución de frecuencias Gráficos Medidas numéricas para la caracterización de variables Medidas de localización	284 284 287 290 290 291 293 295	Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336																																																																						
Medidas de variabilidad Tipologías de datos Clases de muestra Principio de multiplicación Permutaciones Combinatorias Probabilidad y conteo Probabilidad de ocurrencia de un evento Cálculo de la probabilidad mediante técnicas de conteo	299 302 302 304 306 309 312 312 315	+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336																																																																								
+ Solución de problemas + Resolución de problemas + Leo, escribo y comprendo en matemáticas + Taller + En síntesis + Proyecto Movilidad segura + Prueba Saber Glosario Bibliografía	318 320 322 323 326 334 336																																																																										

Imagen 78: Tabla de contenido Proyecto Saber, Ser y Hacer Noveno

Unidad 5- Sucesiones

La unidad comienza planteando una situación de aprendizaje, relacionada con fractales como se muestra en la siguiente imagen:

Sucesiones

EXPRESIÓN 2

Situación de aprendizaje

Observa la formación del *árbol fractal terciario*, teniendo el tallo como estructura inicial. De este surgen 3 ramas y el proceso se repite en cada iteración.



Iteración 0 1 2 3 ... n

¿Cuál es la cantidad de ramas que tendrá el árbol fractal terciario en la iteración 5?

Como en cada iteración se forman tres ramas nuevas en cada rama, entonces se puede construir una tabla para conocer la cantidad de ramas en cada iteración, como sigue:

Iteración	1	2	3	4	5
Cantidad de ramas por cada iteración	3	$3 \times 3 = 9$	$9 \times 3 = 27$	$27 \times 3 = 81$	$81 \times 3 = 243$

Por tanto, en la quinta iteración hay 243 ramas.

Imagen 79: Situación de aprendizaje, sucesiones (p. 178)

Posteriormente define: “Toda función cuyo dominio sea el conjunto de los números enteros positivos es llamada una sucesión” (p. 178), adicionalmente en esta misma página se indica en un recuadro de ayuda matemática, que “un fractal es un objeto geométrico, cuya estructura se repite a diferentes escalas”, seguidamente se relacionan ejemplos para cada tipo de sucesión descrita.

Dentro de la unidad cinco se encuentran secciones correspondientes a sucesiones, así: sucesiones recursivas, sucesiones aritméticas y sucesiones geométricas, cabe mencionar que cada sección presenta una situación de aprendizaje asociada.

Sucesiones recursivas

Ejemplos

- ① La sucesión de Fibonacci se utiliza para explicar crecimientos de objetos de la naturaleza.



Además, es una sucesión recursiva, que se define como: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, y cada término, a partir del tercero, corresponde a la suma de los dos términos anteriores. ¿Cuáles son los siete primeros términos de la sucesión y cómo se define el término general?

Primero, los primeros siete términos son:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 & a_2 &= 1 \\ a_3 &= a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2 & & \\ a_4 &= a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3 & & \\ a_5 &= a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5 & & \\ a_6 &= a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8 & & \\ a_7 &= a_5 + a_6 = 5 + 8 = 13 & & \end{aligned}$$

Luego, como cada término a partir del tercero es igual a la suma de los dos términos anteriores, entonces, se tiene:

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \text{ donde } n \geq 3$$

Por tanto, los siete primeros términos de la sucesión de Fibonacci son 1, 1, 2, 3, 5, 8 y 13 y el término general de la sucesión es $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, $n \geq 3$.

Imagen 80: Ejemplo de sucesiones recursivas (p.179)

Seguidamente se propone una actividad compuesta por 34 numerales agrupados por tipos de proceso así: del punto 1 al 4 y 11 al 13 invitan al proceso de **Interpretar**, proponiendo contestar preguntas referentes a los ejemplos planteados y determinar la regularidad en una

sucesión, del 5 al 10 el proceso asociado es **Ejercitar**, para estos puntos se debe hallar los primeros términos de unas sucesiones a partir de una fórmula dada, del 14 al 21, 26 al 29 y 34 el proceso es **Razonar**, aquí, se debe encontrar el término indicado en cada sucesión, los términos faltantes y hallar la fórmula recursiva para cada sucesión, del 22 al 25 están asociados a **Proponer**, se debe continuar con los siguientes términos de cada sucesión, y del 30 al 33 el proceso es **Solucionar Problemas**, en estos puntos se debe resolver una situación dada¹⁸.

A continuación, se relacionan dos tareas de los procesos de ejercitar y proponer, respectivamente:

<p>► Halla los seis primeros términos de las siguientes sucesiones.</p> <p>5. $a_n = n^2 + 1$</p> <p>6. $a_n = (-1)(2n)$</p> <p>7. $a_n = (-1)^{n-1}(2n+1)$</p>	<p>► Continúa las siguientes sucesiones escribiendo al menos cuatro términos.</p> <p>8. $a_n = \frac{n^2 + 1}{2n}$</p> <p>9. $a_n = \frac{1}{n^2 + 1}$</p> <p>10. $a_n = (-1)(n^4)$</p>	<p>22. 3, 4, 6, 9, 13, ...</p> <p>23. 5, 1, -3, -7, ...</p> <p>24. 8, 16, 32, 64, ...</p> <p>25. 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$</p>
--	--	---

Imagen 81: Tareas de sucesiones recursivas (p. 180)

Sucesiones Aritméticas

Esta sección también plantea una situación de aprendizaje y define sucesión aritmética como, “aquella en la cual cada término, excepto el primero, se obtiene de sumar al término anterior un número fijo d llamado diferencia de la sucesión” (p. 181).

¹⁸ Ver Anexo 13. Sucesiones recursivas. Unidad 5, Sección 1. (p. 178-180)

Sucesiones aritméticas

APRENDE

Situación de aprendizaje

Un grupo de abejas construye la base de su panal, a partir de la secuencia de líneas que se muestran en cada figura. ¿Cuál es la cantidad de líneas que tiene la décima figura?



Para responder la pregunta, se completa la siguiente tabla, teniendo en cuenta que cada par de hexágonos sólo comparten una línea.

Como cada figura se obtiene al agregar 5 líneas de la figura anterior, entonces se tiene:

Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad de líneas	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51

Imagen 82: Situación de aprendizaje, sucesiones aritméticas (p. 181)

Ejemplos

- ① Observar la cantidad de triángulos que forma cada una de las siguientes figuras.

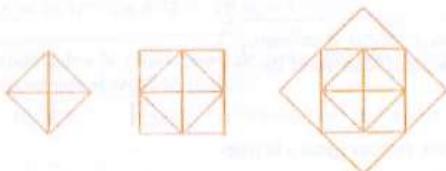


Figura 1

Figura 2

Figura 3

- a. Hallar los seis primeros términos de la sucesión que forman la cantidad de triángulos de las figuras.

Como cada figura se forma agregando cuatro triángulos a la figura anterior, se tiene:

Figura	1	2	3	4	5	6
Cantidad de triángulos	4	8	12	16	20	24

Luego, los seis primeros términos de la sucesión son 4, 8, 12, 16, 20 y 24.

Imagen 83: Ejemplo de sucesiones aritméticas (p.182)

En esta sección se plantea una actividad conformada por 61 puntos, distribuidos por procesos de la siguiente manera:

- **Interpretar**, ejercicios de 1 al 4 y 54 al 59, se debe responder preguntas relacionadas con los ejemplos anteriores, también se deben resolver algunos planteamientos,

- **Razonar**, del 5 al 9, del 11 al 13, del 39 al 44, del 49 al 53 y del 60 al 61, para estos puntos se propone encontrar los términos faltantes en sucesiones aritméticas y se debe a partir de un enunciado responder preguntas,
- **Ejercitarse**, el 10 y del 31 al 38, se debe completar tablas,
- **Modelar**, de la 45 a la 48, aquí se debe completar tablas relacionadas con polígonos regulares de n lados con su número de diagonales y responder preguntas,
- **Argumentar**, del 14 al 19 y del 27 al 30, para este proceso se deben resolver los puntos contestando falso y verdadero,
- **Proponer**, del 20 al 26, se debe construir sucesiones aritméticas, de acuerdo a condiciones dadas, y
- **Solucionar problemas** del 54 al 59¹⁹.

► Completa cada sucesión aritmética.

11. $-4, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow 16, 20, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}$

12. $\underline{\hspace{1cm}}, 7, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow 19, 22, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}$

13. $\frac{8}{3}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \frac{38}{3}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}$

Imagen 84: Tareas de sucesiones aritméticas (p. 184)

Sucesiones Geométricas

Esta sección se inicia con una situación de aprendizaje y se hace una definición de sucesión geométrica como la “sucesión en la cual cada término, excepto el primero se obtiene de multiplicar el término anterior un número fijo r llamado razón de sucesión” (p.186).

Sucesiones geométricas

Situación de aprendizaje
Una población de bacterias se duplica cada 30 minutos. Considerando que el proceso se inicia con una sola bacteria, ¿cuántas bacterias hay después de 4 horas y media?

Para responder la pregunta, se realiza el siguiente diagrama:

Tempo	30	30	30	30	30	30	30	30		
Bacterias	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Por tanto, al cabo de 4 horas y media hay 512 bacterias.



Imagen 85: Situación de aprendizaje, sucesiones geométricas (p. 186)

¹⁹ Ver Anexo 14. Sucesiones Aritméticas. Unidad 5, Sección 2. (p. 181-185)

Ejemplos

- 1 La Carpeta de Sierpinski es un fractal que se forma a partir de la división de un cuadrado en 9 cuadrados cuyos lados son la tercera parte del cuadrado inicial, observa las primeras tres iteraciones en la construcción del fractal.



- a. ¿Cuál es la cantidad de cuadrados sombreados que tienen las cinco primeras iteraciones?

Como en cada nueva iteración, se obtienen 8 cuadrados nuevos por cada cuadrado, se tiene:

Iteración	1	2	3	4	5
Cantidad de triángulos sombreados	8	64	512	4.096	32.768

Por tanto, en las cinco primeras iteraciones se tienen la siguiente cantidad de cuadrados sombreados.

8, 64, 512, 4.096, 32.768

Imagen 86: Ejemplo de sucesiones geométricas (p.187)

Las Actividades del **Interpretar**, ejercicios de 1 al 3, para ello se debe responder preguntas y resolver situaciones problemas, del **Razonar**, del 13 al 16 y del 24 al 25, se debe leer y determinar los términos solicitados, de **Ejercitar**, del 4 al 8, y del 17 al 21, en este proceso se debe decir cuáles de las secuencias dadas son geométricas y determinar el término general, del **Argumentar**, del 9 al 12, responder falso o verdadero justificando las respuestas, y **Solucionar problemas**, del 22 al 23²⁰.

Adicionalmente hay otras secciones en las cuales también se pueden evidenciar tareas que promueven el proceso de generalizar patrones. En la sección denominada *Series*, se reportan las siguientes actividades:

²⁰ Ver Anexo 13. Sucesiones geométricas. Unidad 5, Sección 1. (p. 186-189)

Situación de aprendizaje

Juan construye figuras triangulares a partir de puntos, como se muestra en la figura 1. ¿Cuántos puntos necesita Juan para formar la vigésima gráfica?

Para responder la pregunta, Juan forma rectángulos con las primeras gráficas para encontrar alguna regularidad.



Luego, la cantidad de puntos en cada figura se obtiene como sigue:

$$\text{Gráfica 1: } 1 \quad \text{Gráfica 2: } \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \quad \text{Gráfica 3: } \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \quad \text{Gráfica 4: } \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

Por último, al continuar con la regularidad se tiene que:

$$\text{Gráfica 20: } \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$$

Por tanto, la vigésima gráfica triangular tiene 210 puntos.

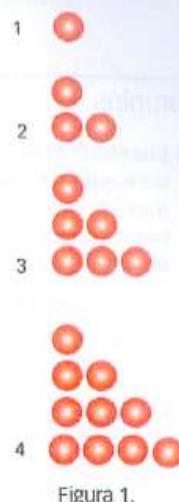


Figura 1.

Imagen 87: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado noveno (p. 193)

- ② Determinar la cantidad de palillos que conforman la decimoquinta figura como se muestra su construcción.

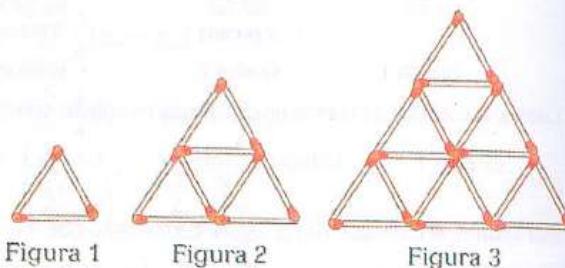
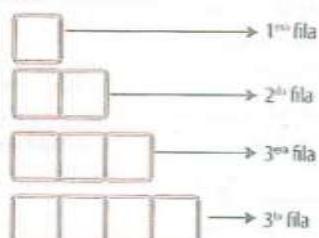


Imagen 88: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado noveno (p. 194)

► Observa la siguiente sucesión de cuadrados construidos con fósforos.



13. Escribe los seis primeros términos de la sucesión formada por el número de fósforos de cada fila de cuadrados.
14. Determina si la sucesión es una progresión aritmética.
15. Encuentra la cantidad de fósforos necesarios para construir diez filas de cuadrados.

Imagen 89: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado noveno (p. 195)

► Lee, observa y resuelve.

Sobre los puntos medios de un cuadrado de 4 cm de lado se construye otro cuadrado.

El proceso se repite indefinidamente como se muestra en la figura.



13. Determina una sucesión que indique el área de cada cuadrado construido.
14. ¿La progresión anterior es aritmética o geométrica? Justifica tu respuesta.
15. Determina el área del cuadrado número 8 con sus respectivos lados.
16. ¿Es posible obtener un cuadrado cuyo lado mida $\frac{1}{16}$ cm?

Imagen 90: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado noveno (p. 199)

► Escribe los cinco primeros términos de cada sucesión.

$$1. \ a_n = \frac{3n+2}{n} \quad 2. \ a_n = n^2 + 2n - 1$$

► Encuentra el término general para cada una de las siguientes sucesiones.

- | | |
|---|-----------------------|
| 3. 22, 24, 26, 28, ... | 6. 1, 3, 5, 7, 9, ... |
| 4. 1, 8, 27, 64, ... | 7. 2, 5, 10, 17, ... |
| 5. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots$ | |

Imagen 91: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado noveno, Parte 1 (p. 204)

► Lee y resuelve.

12. Encuentra el término n -ésimo de la sucesión

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{9}{16}, \frac{27}{32}, \dots$$

13. Determina la suma de los quince primeros términos de la sucesión de los reciprocos de los números naturales.

14. El primer término de una sucesión geométrica es $\frac{3}{5}$, el último término es $\frac{8}{45}$ y la suma de la sucesión es $\frac{13}{9}$, halla la razón de la sucesión.

15. La suma de los ocho primeros términos de una sucesión aritmética es -164 , si el octavo término es -31 , determina el primer término de la sucesión.

16. Determina la suma de los diez primeros términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = -\frac{1}{2}n - 2$.

Imagen 92: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado noveno, Parte 2 (p. 204)

Análisis de ciclo octavo-noveno

La siguiente tabla reporta de manera consolidada para el segundo ciclo de Secundaria el tipo de secuencias que se evidencian a partir de las actividades que se considera promueven el proceso de generalizar.

Grado	Nº de tareas	Secuencia corporal	Secuencia Manipulativa	Secuencias figurativas	Secuencia grafico-numérica	Secuencia Tabulares	Secuencias numéricas	Secuencia por recurrencia
Octavo	1				100%			
Noveno	116			2%	21%	3%	46%	28%

Tabla 16: Tipos de secuencia, ciclo octavo y noveno.

De acuerdo con lo anterior, se puede evidenciar que para este último ciclo aparece por primera vez el trabajo con secuencias por recurrencia, con un porcentaje alto de aparición; adicionalmente, el trabajo con secuencias más marcado corresponde a las secuencias de tipo numérico, considerándose esto coherente con el proceso expuesto por Mora (2012), debido a que se propone un trabajo secuenciado en relación con el tipo de secuencias.

También se muestran los tipos de representación en la siguiente tabla. Se hace evidente que los más usados son representación icónica y gráfica y representación simbólica, siendo esta última la de mayor peso; cabe anotar que en este ciclo ya se está abordando el trabajo algebraico, en particular con el manejo del lenguaje, que permite acceder y manipular estas representaciones simbólicas:

	# de tareas	Representación Enactiva	Representación icónica o gráfica	Representación simbólica
Octavo	1		100%	
Noveno	116		26%	74%

Tabla 17: Tipos de representaciones, ciclo octavo y noveno.

Desde las etapas del proceso de generalizar, se puede evidenciar que para este ciclo se proponen actividades que invitan al *Ver*, *Dicir*, *Registrar*, sin embargo, no se hacen evidentes tareas o consignas que promuevan el *Validar*, como se observa en la siguiente tabla:

		Ver	Dicir	Registrar	Validar
Octavo	Tareas encontradas	X	X		
Noveno	Sucesiones recursivas	X	X	X	
	Sucesiones aritméticas	X	X	X	
	Sucesiones geométricas	X	X	X	

Tabla 18: Etapas del proceso de generalizar, ciclo octavo a noveno

Por ejemplo, en las siguientes tareas se evidencia las tres primeras etapas, el *Ver* ya que invita a observar las imágenes ver la regularidad presentada, el *Decir*, se evidencia cuando propone continuar la secuencia, el *Registrar* cuando solicita al estudiante obtener una fórmula que permita relacionar el número de lados de un polígono con la cantidad de diagonales:

- Completa la tabla que relaciona un polígono regular de n lados con su número de diagonales.



45.

Polígono regular de n lados	3	4	5	6	7	8	9
Diagonales de un polígono	0	2	5				

46. Halla el número de diagonales que tiene un polígono regular de 18 lados.
 47. Obtén una fórmula que relacione el número de lados de un polígono con su número de diagonales.
 48. Determina si la sucesión anterior es una progresión aritmética.

Imagen 93: Ejemplo 1 de tarea de etapas de Ver, Decir y Registrar (p.185)

- Una persona compra un computador portátil por 2 millones de pesos, y se determina que su depreciación anual es de 300 mil pesos.
54. ¿Cuál es el valor del computador portátil en dos años y en 6 años?
55. Describe el comportamiento de la depreciación anual de la computadora portátil.
- En un edificio el primer piso tiene una altura al suelo de 2,5 m.
56. Si la altura total del edificio es de 30 m, ¿qué cantidad de pisos tiene el edificio?
57. Escribe los medios aritméticos de la sucesión de las alturas de los pisos del edificio.
58. ¿Qué altura del suelo tiene el piso séptimo?
59. Escribe el término general de la sucesión aritmética de las alturas de los pisos del edificio.

Imagen 94: Ejemplo 2 de tarea de etapas de Ver, Decir y Registrar (p.185)

Para este ciclo, los referentes de calidad desde los EBCM proponen los ítems 2, 3 y 4 los cuales indican que el estudiante debe construir expresiones algebraicas, proponer y poner a prueba conjeturas y modelar situaciones de variación, de los cuales se puede intuir el trabajo con el proceso de generalización de patrones, desde los DBA también se hacen propuestas de tareas para reconocer patrones numéricos y describirlos verbalmente y de proponer conjeturas, desde esta perspectiva, es posible evidenciar que los textos escolares proponen tareas en esta dirección, sin embargo, el trabajo en gran parte se presenta de manera descontextualizada en el grado noveno, en el grado anterior estas tareas son bastante limitadas, sobre todo si se tiene en cuenta que es en octavo grado donde generalmente se introduce el lenguaje algebraico.

Análisis A Priori Proyecto Saber, Ser y Hacer

En esta sección se realiza un análisis según las categorías establecidas del análisis *A Priori*; para ello, se tienen en cuenta las descripciones y análisis anteriores sobre el proceso de generalizar:

Educación Básica Primaria

Consistencia

Se evidencian niveles de complejidad en las secuencias que se utilizan, pero no se observan todos los tipos de secuencias que propone Mora (2012), lo cual se considera una carencia, en tanto es relevante que el estudiante reconozca, de manera secuencial, todas las secuencias. En particular, en los primeros grados las secuencias corporales y manipulativas, aparecen tímidamente en el texto, siendo necesarias si se tienen en cuenta las edades de los niños. Adicionalmente, este tipo de secuencias son el primer acercamiento que tienen con el proceso de generalizar, por tanto, se debe hacer una introducción adecuada trabajando más ejemplos y actividades con estas secuencias.

También se observa una complejidad creciente en el tipo de secuencias como lo propone Mora (2012), dado que se van incluyendo operaciones aritméticas que permiten construir patrones numéricos que involucran varias operaciones y números. Esto se ilustra en la siguiente Imagen.

2. Marca con un el patrón de la secuencia.

1. $2,3 \rightarrow 4,6 \rightarrow 6,2 \rightarrow 10,4 \rightarrow 15,8$
- Sumar 0,5
 - Dividir entre 0,5
 - Multiplicar por 0,5
 - Restar 0,5

Imagen 95: Ejemplo de secuencias numéricas. Grado quinto

1. Observa los primeros seis términos de la secuencia. Luego, resuelve.

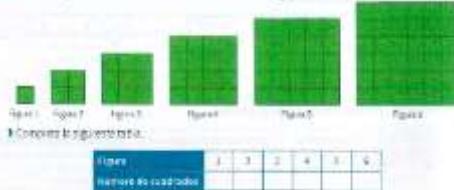


Imagen 96: Ejemplo de secuencias tabulares. Grado cuarto

ACTIVIDADES

1. Encierra el número que corresponde a cada imagen.

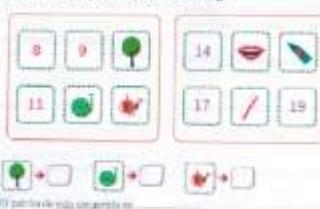


Imagen 97: Ejemplo de secuencias grafico-numéricas. Grado tercero

1. Encierra la imagen que sigue en cada secuencia.



Imagen 98: Ejemplo de secuencias gráficas. Grado primero

Observa la secuencia que forman los estudiantes respecto a la posición de los brazos.



La posición de los brazos varía así: brazos arriba, brazos abajo y luego continúa el mismo patrón manos arriba, manos abajo.

Imagen 99: Ejemplo de secuencias corporales. Grado primero

Imagen 100: Evidencias del proceso de las secuencias en la básica primaria

Sin embargo, es importante tener en cuenta que a pesar que se logra evidenciar el orden asecendente dentro de las secuencias este no es secuencial, el trabajo con cada tipo no es equilibrado, en tanto que algunos tipos de secuencias tienen una presencia muy limitada tal como se detalla en la Tabla 6 y la Tabla 9.

Un aspecto que resulta importante para que el estudiante se relacione con las secuencias y patrones y, en sí mismo, con el proceso de generalizar, radica en que las tareas propuestas se correspondan con el nivel y edad de los estudiantes; la siguiente actividad presenta un nivel de complejidad mayor para niños de cuarto de primaria, en tanto solicita la identificación de un patrón que requiere la observación de diferentes características invariantes, de manera aislada y conjunta:

3. Observa las fracciones y completa la secuencia.

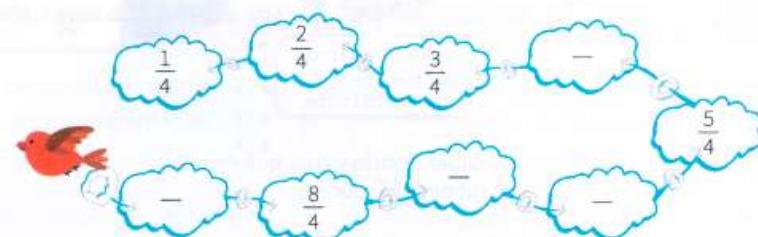


Imagen 101: Ejemplo 1 de consistencia. Grado segundo, p. 211

2. Observa cada secuencia. Luego, selecciona la opción que continúa en cada una.

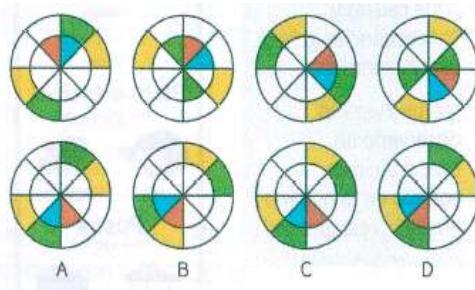


Imagen 102: Ejemplo 2 de consistencia. Grado cuarto, p.157

Un posible error matemático es reportado en la siguiente tarea, debido a que el día en el que se agregó la sustancia a las bacterias corresponde al día cero; en el día uno, según el patrón indicado, debe haber 6 bacterias y así sucesivamente:

- Una bacterióloga agregó una sustancia a dos bacterias y observó que estas se triplicaban cada día. Completa la siguiente tabla.

Números de días	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cantidad de bacterias	2								

- Responde, ¿en cuántos días habrá 1.458 bacterias?

Imagen 103: Ejemplo 3 de consistencia. Grado tercero, (p.95)

En la siguiente imagen, se puede ver como se involucra términos que no han sido contextualizados ni tratados anteriormente, la cual presenta un error en el lenguaje, ya que se da a entender que la misma secuencia pueden tener dos patrones diferentes, como se mencionó en el marco teórico, existen diversas formas de expresar el patrón y todos ellos son equivalentes.



Imagen 104: Análisis A priori. Recuerda que. Grado primero, p. 55

Un ejemplo de esta situación, se puede ver a continuacion, donde se solicita al estudiante que observe las figuras y continúe con la secuencia, aquí, se puede ver que el patron que caracteriza esta secuencia está dado en términos de las figuras y del color, esto no significa que existan dos patrones, más bien representan características de un mismo patrón.

2. Observa las secuencias de figuras y dibuja los elementos que faltan.

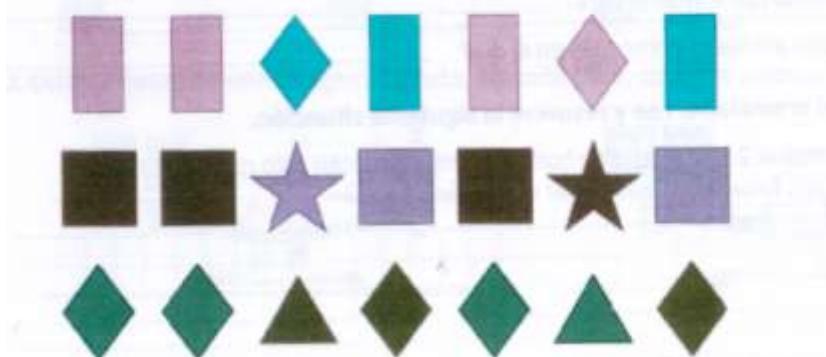


Imagen 105: Análisis A priori. Ejemplo de secuencia, grado tercero p. 178

Claridad

Dentro del análisis realizado a la coherencia de las tareas y las relaciones que existen entre el lenguaje y las imágenes que están asociadas, se encuentran algunas tareas en las cuales las imágenes no son apropiadas para dar respuesta a los enunciados solicitados:

4. Extraer datos de un dibujo. Observa. Luego, responde.



1) ¿Cuántas veces aplaude el niño antes de zapatear? _____

2) ¿Cuántas veces zapatea antes de volver a aplaudir? _____ *

3) Siguiendo el orden anterior, ¿qué debería hacer el niño después del último aplauso de la imagen? Encierra tu respuesta.



Imagen 106: Ejemplo 1 de claridad. Grado Primero. p. 55

En esta imagen, es evidente que el dibujo no orienta al estudiante para dar una respuesta a las preguntas planteadas, provocando una posible dificultad en el sentido de lograr aproximar al niño a una definición de patrones.

Adicionalmente, se evidencian tareas en las cuales se reportan imágenes que no permiten identificar un patrón, es decir no hay claridad en la figura que sigue.

2. Marca con una X la figura que no cumple con el patrón.

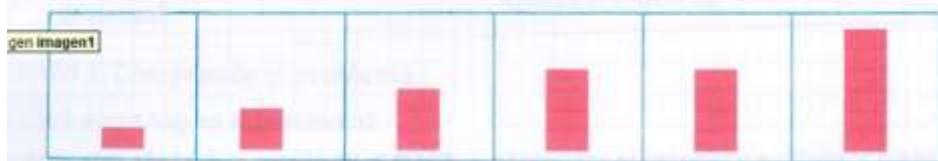


Imagen 107 Ejemplo 2 de claridad. Grado segundo, p. 102

1. Observa las secuencias. Luego, descubre el patrón y dibuja la figura que continua.



Imagen 108: Ejemplo 3 de claridad. Grado cuarto, p.156

En la siguiente imagen se pueden presentar dificultades, pues la representación no es clara en relación con la existencia de tres secuencias distintas:

4. Descubre el patrón y colorea la secuencia.

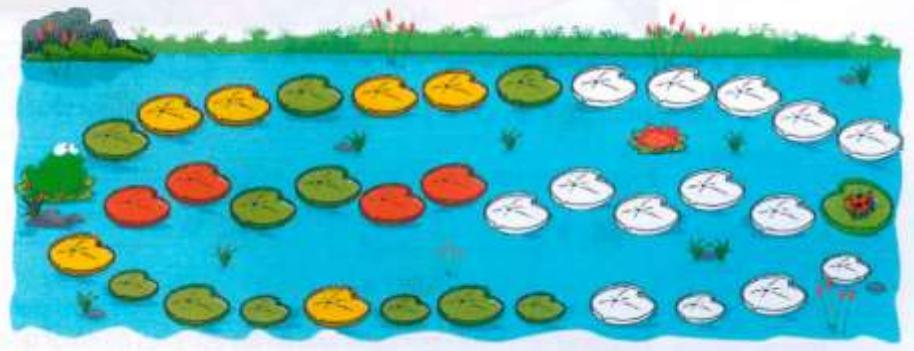


Imagen 109: Segundo p.103

Autenticidad

La “*situación de aprendizaje*”, como contexto que introduce la necesidad o relevancia de las temáticas a bordar en una sección, no se incluye en las secciones de pensamiento variacional; por el contrario, en estas secciones se introduce el tema a partir de definiciones y ejemplos. Llama la atención que, entonces, para el caso de la generalización de patrones en secuencias, los autores no reconocen alguna situación contextualizada “real” que pueda asociarse a esto. Esta condición se considera una carencia del texto ya que sí es posible pensar en secuencias bajo contextos reales, por ejemplo, de tipo corporal, secuencias de la naturaleza y por supuesto, en contextos matemáticos que según los LC deben incluirse.

En el primer grado, el texto introduce el tema de secuencias con la definición: “conjunto de elementos o números que se relacionan entre sí, y se ordenan según un patrón que se repite constantemente”, antes de cualquier ejemplo o actividad; evidentemente, términos como patrón no tienen significado para los estudiantes en este contexto, haciendo que este primer acercamiento no genere un aprendizaje real.

Como se ha mencionado anteriormente, el primer acercamiento que tienen los estudiantes con el proceso de generalizar patrones se hace en los primeros grados de Básica Primaria; sin embargo, es evidente que algunas definiciones que se presentan no generan situaciones auténticas de aprendizaje.

Trascendencia

Con relación al proceso de generalizar patrones, es posible observar un trabajo secuenciado para el desarrollo del pensamiento variacional, debido a que en el bloque que corresponde a la Básica primaria se pueden ver tareas propuestas relacionadas con los referentes de calidad (ver tabla 3) así:

- Estándar 4 ciclo 1

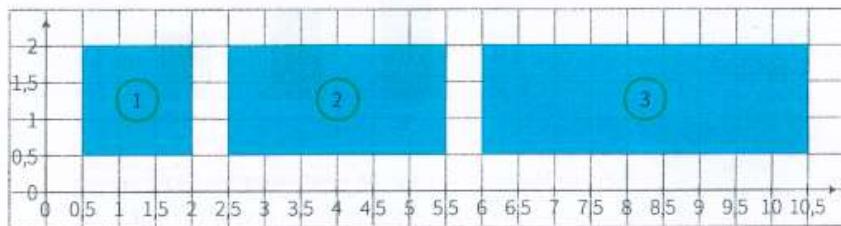


Imagen 110: Evidencia de trascendencia, grado tercero (p.179)

También desde los DBA se pueden encontrar tareas propuestas en los libros de texto.

- Grado 1 enunciado 2

4. **Extraer datos de una imagen.** Observa cómo varía la longitud de la base de los rectángulos en la secuencia. Luego, determina el área de cada rectángulo y resuelve.



■ Escribe los cinco primeros elementos de la secuencia formada por las áreas de los rectángulos.

■ Describe la regla de formación:

Imagen 111: Evidencia de trascendencia, grado quinto (p.157)

Los niveles de complejidad de los patrones en las secuencias aumentan de acuerdo con el grado en el que se encuentran, asunto que también concuerda con los referentes de calidad.

Otro aspecto que se debe tener en cuenta es que, en general, las tareas propuestas para básica primaria, no dan lugar a una actividad matemática diferente por parte del estudiante; la mayor parte de las tareas consiste en completar secuencias, es decir, el texto se presenta de forma más instruccional, lo que no deja ver explícitamente si el estudiante puede usar diferentes estrategias, proponer, argumentar o socializar. Al parecer, el texto en sí mismo no promueve la actividad matemática en diversos escenarios y posibilidades, el maestro es en últimas quien puede motivar un ambiente de aprendizaje para ello, con el uso de las tareas del texto, pero vinculando otras consignas adicionales.

Adicionalmente, se considera que las tareas propuestas son rutinarias, en el sentido que se repiten los mismos planteamientos: muchos son ejercicios iguales y pocas veces se proponen secuencias contextualizadas; es decir, se trabaja desde la ejercitación:

2. Escribe el patrón y continúa cada secuencia numérica.

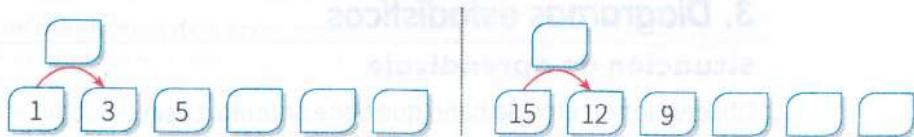


Imagen 112: Ejemplo de ejercitación, grado Primero (p.97)

2. Completa con el patrón numérico que genera cada secuencia.

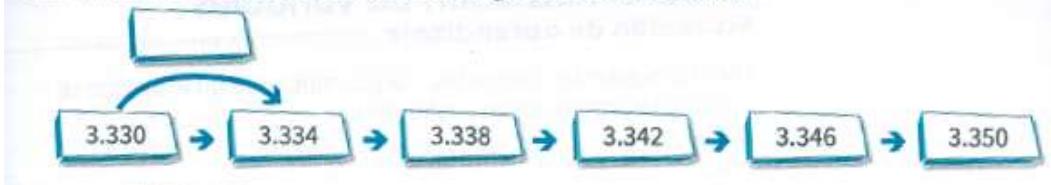


Imagen 113: Ejemplo de ejercitación, grado tercero (p.43)

2. Completa con el patrón numérico que genera cada secuencia.



Imagen 114: Ejemplo de ejercitación, grado quinto (p.103)

Educación Básica secundaria

Consistencia

Una de las principales carencias que se evidencian dentro de los textos escolares de Secundaria corresponden al poco trabajo que se propone del proceso de generalizar; aquí, se presentan tareas o situaciones aisladas que obedecen a temas específicos, pero no al proceso en sí mismo. Esto además contribuye a la falta de un trabajo secuenciado, que pueda favorecer el desarrollo del pensamiento variacional y la introducción al trabajo algebraico y, en particular, su lenguaje.

Para los grados de sexto a octavo, en las actividades planteadas que promueven el proceso de generalizar se logra ver un trabajo más marcado sobre las últimas etapas, como son las de *Registrar* y *Validar*. En diversas tareas se invita al estudiante a encontrar términos muy distantes en las secuencias, lo que implica que se debe dar paso a escribir una regla, y aunque la validación no es explícita, sí se puede deducir un trabajo en esta dirección.

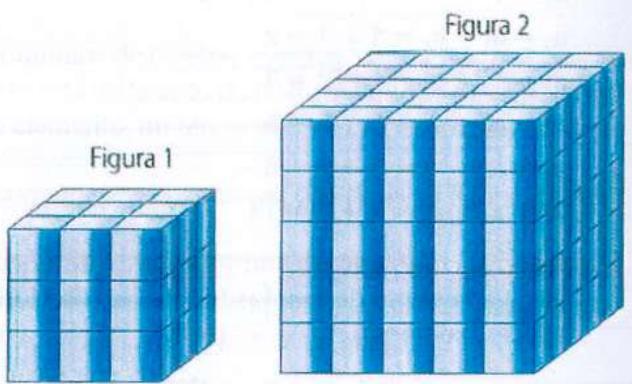
Se recurre a la generalización para introducir la noción de función, lo cual es evidente en grado octavo y noveno, pero no para introducir lenguaje algebraico en el grado octavo, desaprovechando el trabajo realizado previamente con secuencias.

En el grado noveno, siendo el grado en el que más se evidencian tareas dirigidas al proceso de generalizar, no se reportan tareas que den cuenta de la última etapa del proceso, considerándose esto una carencia del texto.

Claridad

En la siguiente imagen, se considera no hay claridad del lenguaje utilizado: si las caras son consecutivas quedarán cubos pequeños pintados por dos caras, en este caso, ¿se consideran como cubos diferentes?, la respuesta cambia cuando las caras del cubo grande no son consecutivas:

► Observa las siguientes figuras. Luego, responde.

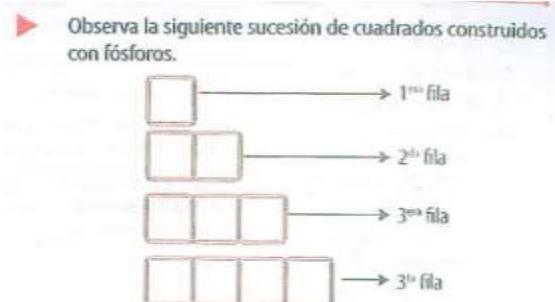


Al pintar los cubos de color rojo de las figuras 1 y 2 sin ser separados, ¿cuántos cubos quedarán pintados de rojo?

- | | |
|---------------|----------------------|
| 30. Una cara | 32. Tres caras |
| 31. Dos caras | 33. Caras sin pintar |

Imagen 115: Ejemplo 1 de claridad. Grado Noveno. p. 180

Adicionalmente se encuentran algunos errores “de digitación” en tanto que en la secuencia existe dos lugares para la fila tres, pero con diferentes valores que pueden inducir a dificultades para comprender los enunciados, es posible que, en el momento de dar cuenta al requerimiento de “escribe los seis primeros términos de la sucesión formada por el número de fósforos de cada fila de cuadrados”, el estudiante no observe el error y presente dificultades para encontrar el patrón que genera la secuencia.



13. Escribe los seis primeros términos de la sucesión formada por el número de fósforos de cada fila de cuadrados.
14. Determina si la sucesión es una progresión aritmética.
15. Encuentra la cantidad de fósforos necesarios para construir diez filas de cuadrados.

Imagen 116: Proceso de generalizar patrones, otras secciones, grado noveno (p. 195)

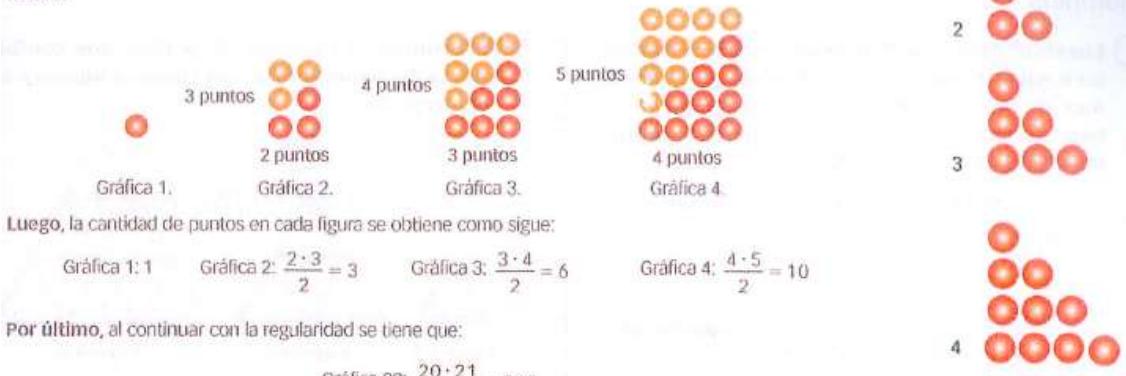
Autenticidad

La generalización de patrones aparece como escenario para introducir la noción de función, lo cual dota de sentido a este objeto matemático desde un contexto, también matemático, genuino. Asimismo, un aspecto positivo que se reconoce en el texto de grado noveno, es la presentación de situaciones de aprendizaje para introducir el trabajo con secuencias. La siguiente situación de aprendizaje es un ejemplo de esto:

Situación de aprendizaje

Juan construye figuras triangulares a partir de puntos, como se muestra en la figura 1. ¿Cuántos puntos necesita Juan para formar la vigésima gráfica?

Para responder la pregunta, Juan forma rectángulos con las primeras gráficas para encontrar alguna regularidad.



Luego, la cantidad de puntos en cada figura se obtiene como sigue:

$$\text{Gráfica 1: } 1 \quad \text{Gráfica 2: } \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \quad \text{Gráfica 3: } \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \quad \text{Gráfica 4: } \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

Por último, al continuar con la regularidad se tiene que:

$$\text{Gráfica 20: } \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$$

Por tanto, la vigésima gráfica triangular tiene 210 puntos.

Imagen 117: Ejemplo de autenticidad, grado noveno, p.193

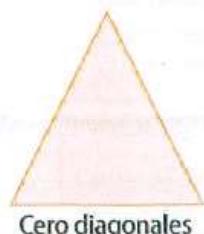
Trascendencia

Desde los EBCM, para el ciclo de sexto a séptimo, no es posible evidenciar propuestas en dirección del proceso de generalización de patrones; sin embargo, desde los DBA, sí se evidencian propuestas de actividades en esta dirección, en este sentido el texto intenta no abandonar por completo el trabajo de generalización de patrones involucrándolo desde el pensamiento numérico.

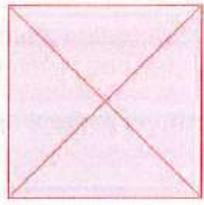
No obstante, en relación con el desarrollo del pensamiento variacional, y de manera específica la transición del pensamiento aritmético al algebraico, no se observa un trabajo secuencial con el proceso de generalizar que permita dar este tránsito, pese a que diversos autores documentan ampliamente esta vía como una de las mejores alternativas para el aprendizaje del álgebra en la escuela. Esto, sumado con el desarrollo del tema de funciones en grado octavo y sucesiones en el grado noveno, de manera aislada, es una evidencia de esta carencia y la poca trascendencia del texto en el desarrollo de este pensamiento de manera secuencial y articulada.

Al igual que en Básica Primaria, los ejercicios se presentan de forma instruccional, no son variados y, en sí mismos, no motivan la actividad matemática sin la intervención intencionada del profesor. No obstante, en algunos pocos casos se logra ver la articulación con otros tipos de pensamiento como el numérico y geométrico, u otros procesos como la modelación, como se observa en la siguiente imagen:

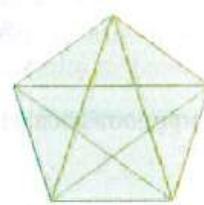
- Completa la tabla que relaciona un polígono regular de n lados con su número de diagonales.



Cero diagonales



Dos diagonales



Cinco diagonales

45.

Polígono regular de n lados	3	4	5	6	7	8	9
Diagonales de un polígono	0	2	5				

46. Halla el número de diagonales que tiene un polígono regular de 18 lados.
 47. Obtén una fórmula que relacione el número de lados de un polígono con su número de diagonales.
 48. Determina si la sucesión anterior es una progresión aritmética.

Imagen 118: Evidencia de trascendencia, grado noveno (p. 185)

CONCLUSIONES

El interés al desarrollar este trabajo fue precisar cómo se presenta el proceso de generalizar en la escuela, a partir de la mirada a uno de los recursos educativos más usados, que además determina en buena medida el currículo que se desarrolla en las instituciones educativas, los textos escolares. En este sentido, se presentan las conclusiones en tres aspectos:

Sobre el Proceso de Generalizar en los Textos Escolares.

Es evidente en este estudio que el proceso de generalizar tiene una presencia aún tímida en los textos escolares, por lo menos en la serie analizada. Si bien, los autores consultados y los referentes de calidad colombianos insisten en la pertinencia y viabilidad de este proceso para desarrollar el pensamiento variacional e iniciar el trabajo algebraico; los textos se muestran limitados frente al abordaje de este proceso, la variedad de tareas propuestas para promover su desarrollo y la presentación secuencial, continua e intencionada para propiciar el tránsito del pensamiento numérico al algebraico no es significativa en estos textos.

Aunque el proceso de generalizar es trabajado en Básica Primaria en forma más permanente y, en términos generales, apropiada en relación con los tipos de secuencias y representaciones sugeridos por Mora (2012), no se puede observar que esto sea aprovechado en el momento en que se aborda el álgebra en octavo grado. Existe una ruptura en este sentido, ya que es posible evidenciar que no se aprovecha el proceso de generalizar para introducir el lenguaje algebraico; este lenguaje es introducido a través de la traducción del lenguaje verbal, como ha sido usual en los textos y en las prácticas de enseñanza de los docentes de matemáticas.

Tanto en los textos analizados de primaria como de secundaria, es posible evidenciar múltiples propuestas de tareas con secuencias; sin embargo, el que haya secuencias no implica el proceso de generalizar, de hecho, son bastante comunes las tareas en las cuales se da el patrón para construir la secuencia. Esto se convierte en un ejercicio rutinario de realización de cálculos, que no corresponde con el proceso de generalizar o alguna de sus etapas.

En relación con lo propuesto por los referentes de calidad, respecto al proceso de generalizar, se logra evidenciar que la serie *Proyecto Saber es Ser y Hacer* es coherente con estos

planteamientos. Es importante resaltar que desde los mismos EBCM, si bien en la introducción sobre el pensamiento variacional se hace hincapié en la relevancia del proceso de generalizar, no hay una propuesta continuada de tal proceso para el desarrollo del pensamiento variacional que se evidencie en los enunciados de los estándares, razón por la cual es comprensible que en secundaria la serie haya disminuido notablemente el trabajo alrededor del proceso de generalizar.

En relación con los procesos que establece la serie para clasificar las actividades, no aparece el proceso de generalizar; no obstante, si se considera lo sugerido en los LC: “en el razonamiento se observa el proceso de generalizar como el acto de encontrar patrones y expresarlos matemáticamente”, se puede intuir que el proceso de generalizar, se incluye en el proceso de razonar. Esto es evidente en la serie en tanto buena parte de las tareas que remiten a encontrar el patrón de una secuencia, es decir generalizar, se categorizan como **Razonar** en las actividades.

Sobre el análisis a priori de los textos, se puede afirmar que esta serie, en general, es clara y trascendente. Con relación a la *Claridad* de los textos escolares, en pocos casos aislados se reconoce incoherencia entre representaciones gráficas y los enunciados que las acompañan. Sobre la trascendencia, dada su coherencia con los referentes de calidad, que promueven en su discurso el desarrollo del pensamiento variacional, se puede inferir que la serie responde a esta demanda en los términos descritos en los EBCM y DBA; no obstante, las tareas propuestas *per sé* no promueven la actividad matemática, el rol del docente resulta esencial para promover ambientes de aprendizaje que inviten a la actividad matemática con el desarrollo de estas tareas.

Sobre la *consistencia* se observa que existen algunos errores de tipo matemático con relación al proceso; pero la dificultad más marcada, se evidencia en el hecho de que, en general, la serie no promueve el proceso de generalizar, en tanto las tareas invitan más a la ejercitación; adicionalmente, a la luz de la propuesta de tipos de secuencias hecha por Mora (2012), se observa que no es relevante el acercamiento al proceso mediante secuencias corporales y manipulativas en los textos de los primeros grados.

Finalmente, teniendo en cuenta la autenticidad del texto, se puede observar que, para los textos escolares para Básica Primaria, no se logra evidenciar propuestas contextualizadas de

situaciones de aprendizaje “naturales” que inviten al estudiante a reconocer el proceso de generalizar como parte de la cotidianidad, en este sentido, los textos esquivan para las secuencias cualquier situación de aprendizaje.

De manera general la línea de textos de Santillana de nombre *Saber es Ser y Hacer*, no presenta una propuesta que desarrolle el proceso de generalizar; si bien es cierto, se pueden evidenciar algunas tareas en las cuales se induce al desarrollo de las etapas del proceso, diversos tipos de secuencias y diversas representaciones, los planteamientos, tareas y ejemplos en general se proponen desde la ejercitación y no desde el desarrollo del pensamiento variacional, en tanto no hay propuestas contextualizadas, que vinculen otros pensamientos y otros procesos como modelar, razonar, entre otros. Adicionalmente, no existe un trabajo secuencial del proceso de generalizar patrones que conduzca a la simbolización y, en menor medida a la validación.

Sobre el Análisis de Textos Escolares de Matemáticas.

Se valora la pertinencia y relevancia de un análisis a priori de un texto escolar, aislado de otros actores o factores que inciden en las decisiones curriculares y de enseñanza que determinan los ambientes de aprendizaje. Poder acercarse al texto, encontrar sus carencias, errores, evaluar los tipos de tareas que se proponen, establecer en qué situaciones no hay claridad, reconocer las representaciones que usa y los procesos de pensamiento matemático que promueven, permite definir de una manera más documentada el lugar del texto para los estudiantes y el profesor.

Los aspectos que señala Van Dormolen para este tipo de estudios se consideran pertinentes, en tanto permite acercarse al texto desde diferentes perspectivas, logrando una imagen global válida en un análisis de textos. Este trabajo exemplifica una manera de desarrollar el análisis a priori de una serie de textos que puede ser aplicado a otros análisis, bien sea de un texto o de otro objeto o proceso específico de las matemáticas escolares.

Se considera que las categorías definidas para los aspectos de Claridad, Autenticidad, Consistencia y Trascendencia, son apropiadas para este tipo de estudios y replicables a otros escenarios de análisis a priori. Asimismo, los elementos considerados para valorar el proceso de generalizar patrones reconocen los atributos más relevantes del proceso, según diversos

autores y, en consecuencia, proporcionan una mirada completa y amplia sobre el asunto a nivel escolar.

Reflexiones Finales y Cuestiones Abiertas.

Este trabajo ha generado un alto nivel de conciencia por parte de los autores sobre la importancia de tomar decisiones curriculares y didácticas de manera más reflexiva. Aunque se reconoce la importancia que tienen los textos escolares en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es claro que el docente juega un papel fundamental desde la selección misma de los textos más pertinentes para apoyar su gestión en el aula, hasta el uso mismo que se da a este material y como desde su gestión puede superar las carencias que el texto presente; por tanto, es un “deber profesional” generar una actitud crítica, de estudio y análisis frente a las propuestas curriculares que promueven los textos escolares. En este sentido, se reconoce la pertinencia de elaborar un análisis a priori de textos escolares: de la misma serie, pero de otros procesos matemáticos, o de otras series editoriales; incluso pueden realizarse estudios comparados que permitan reconocer fortalezas y falencias de las diferentes propuestas de las editoriales para la toma de decisiones por parte de los maestros.

Un planteamiento que resulta de este análisis, es ¿cómo se puede promover el proceso de generalizar en la escuela? Si los textos escolares no son suficientes, el proceso no es desarrollado ampliamente, le compete, entonces, al profesor pensar sobre esto y, explorar y gestionar alternativas, estrategias o tareas para aportar al desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes, a partir de lo específico que abarca el pensamiento variacional, según lo definido en los referentes de calidad. Es claro también que, en particular, sobre el proceso de generalizar, conviene reflexionar sobre los ambientes de aprendizaje que pueden aportar a su desarrollo, mediado por las apuestas de los textos analizados en este trabajo u otros, y las alternativas para promover una transición del pensamiento aritmético al algebraico, desde los primeros años de escolaridad, que atienda a una complejidad gradual y a la aparición del trabajo y el lenguaje algebraico de una manera más significativa.

En consecuencia, una propuesta que resulta de este trabajo, consiste en hacer un análisis *a posteriori* o *a tempo* de estos libros de texto, dado que se ha señalado que el papel de profesor puede ser contundente para motivar la actividad matemática y el proceso de generalizar.

REFERENCIAS

- Álzate, M. (2000). El texto escolar como instrumento pedagógico: Partidarios y detractores. *Revista de Ciencias Humanas*, 21
- Ávila, M. López, C. y González, J. (2010) La generalización de patrones cuadráticos: un estudio con alumnos de licenciatura en matemáticas. *Culcyt* 7(40), 34–40.
- Azarquiel, Grupo. (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. Madrid: Síntesis.
- Bruno, A. & Cabrera, N. (2006) La recta numérica en los libros de texto en España. *Educación matemática. Volumen* (18) 125-149.
- Butto, C., Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. México: Grupo Santillana México. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/405/40516105.pdf>
- Esquinas, A. (2009) *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente*. (Tesis doctoral), Madrid, España.
- García, A. (sf) El uso del libro de texto de matemáticas en el aula. Universidad de Granada. Recuperado de: <http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/36188/1/GARCIAMARTINANTONIO.pdf>
- Godino, J. & Font, V. (2000). Razonamiento Algebraico y su Didáctica para maestros. Universidad de Granada. Recuperado de: <http://ddm.ugr.es/personal/jdgodino/manual/ralgebraico.pdf>.
- Godino, J. & Font, V. (2000). Razonamiento Algebraico y su Didáctica para maestros. Universidad de Granada. Recuperado de: <http://ddm.ugr.es/personal/jdgodino/manual/ralgebraico.pdf>.
- Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-7-0. Recuperado de, <http://www.ugr.es/local/jgodino/>

Joya, A., Manzano, L. y Gamboa, J. (2017) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 3*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana.

Joya, A., Manzano, L., Sabogal, Y., Ortiz, L., Gamboa, J., Castaño, J. y Acosta M. (2017) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 4*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana.

Joya, A., Manzano, L., Sabogal, Y., Ortiz, L., Gamboa, J., Castaño, J. y Acosta M. (2017) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 5*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana.

Joya, A., Otero, M. y Acosta, M. (2017) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 1*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana

Joya, A., Patiño, O., Buitrago, L., Sabogal, Y., Ortiz, L., Ramírez, M. y Sánchez, C. (2016) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 7*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana.

Joya, A., Patiño, O., Buitrago, L., Sabogal, Y., Ortiz, L., Ramírez, M. y Sánchez, C. (2016) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 8*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana.

Joya, A., Sánchez, C., Manzano, L., Sabogal, Y., Ortiz, L., y Castaño, J. (2017) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 2*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana

Joya, A., Sánchez, C., Ortiz, L., Ramírez, M., Dueñas, M. y Sabogal, Y. (2016) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 6*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana.

Luque, C. (2010) Descripción de textos escolares en torno al concepto de función a trozos. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis*. 28(20-40).

Maldonado M., Rodríguez M. T. y Tuyub J. C. (2007) El discurso en los libros de texto de Matemáticas y su relación con la práctica escolar". Universidad Autónoma de Yucatán. Tesis.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., Gowar, N (2014) Rutas hacia el álgebra, raíces del álgebra. (Cecilia Agudelo Valderrama, trad.) (2.^a ed.). Colombia. Universidad del Tolima. (Obra original publicada en 1985).

MEN (1994) Ley 115 de febrero 8 de 1994, Artículo 42. Bogotá. Ministerio de Educación Nacional.

MEN (1998). Lineamientos Curriculares Matemáticas. Bogotá. Ministerio de Educación Nacional.

MEN (2006) Estándares básicos de competencias matemáticas. Bogotá. Ministerio de Educación Nacional.

MEN (2016). Derechos básicos de aprendizaje. Bogotá. Ministerio de Educación Nacional.

Monterrubio, M.C., Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander: SEIEM.

Mora, L. (2012). Álgebra en primaria. Documento construido en el marco del Programa de Transformación de la Calidad Educativa del MEN en convenio con la Universidad Pedagógica Nacional.

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Autor.

Ospina, B. y C. Mejía (2008). El impacto del libro de texto escolar en los resultados escolares. *El Educador, 1*. Recuperado de <http://goo.gl/hcbAu2>

Pérez, J. (2005) *La generalización como proceso de pensamiento matemático: una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje del álgebra elemental.* (Tesis de maestría) Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

POLYA, G. (1954) Cómo resolverlo. Ed. Tecnos, Madrid. Pág. 16, 97

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1–21(March 1987), 2–21

Real Academia Española. (2001). Diccionario de la lengua española [Dictionary of the Spanish Language] (22nd ed.). Madrid, Spain: Author

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet enviroment. En N. Bernarz et al (eds) *Approaches to Algebra*. pp. 137-145. Kluwer Academic Pub. Netherlands.

- Rojas, P., & Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Educación Científica Y Tecnológica*. 760-766
- Sánchez, C., Sabogal, Y., Buitrago, L., Fuentes, J., Patiño, O., Joya, A. y Rincón, M. (2016) *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 9*. Bogotá, Colombia: Ed. Santillana
- Sánchez, N. & Bolívar, R. (2015) Contenidos de enseñanza en los textos escolares de 1984 al 2010 en Colombia. *Revista de Facultad de educación* (42)61-70. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá Colombia.
- Santos, J. (2016) Modelo de texto escolar digital en el contexto colombiano. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. Tesis
- Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires, Argentina: libros del Zorzal.
- Socas, M. (2011). *La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación*. En Rev. Números. Vol.77. pp.5-34 (Versión electrónica)
- TERCE (2014). Comparación de resultados del segundo y tercer estudio regional comparativo y explicativo 2006 – 2013
- Trujillo, P. (2008) Proceso de generalización que realizan futuros maestros. (Tesis de maestría). Universidad de Granada. España
- Van Dormolen, J. (1986), ‘Textual analysis’, in B. Christianson, A. G. Howson, and M. Otte (eds.), *Perspectives on Mathematics Education*, D. Reidel, Dordrecht, pp. 141-171.
- Vargas, J. (2003). La construcción de los irracionales de dedekind como instrumento en un análisis de textos de octavo grado. *TEA (Revista de la facultad de Ciencia y Tecnología)*. Volumen (14) 8-26
- Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9(3), 193-215.

ANEXOS

Anexo 1. Secuencias con dibujos o figuras, Modulo 1, sección 6. (p.54-55)

6. Secuencias

Secuencias con dibujos o figuras

Recuerda que

- Algunas secuencias pueden tener dos o más patrones.

EJEMPLO

Observa la secuencia que forman los estudiantes respecto a la posición de los brazos.

La posición de los brazos varía así: brazos arriba, brazos abajo y luego continúa el mismo patrón manos arriba, manos abajo.

ACTIVIDADES

- Encierra la imagen que sigue en cada secuencia.

						...
--	--	--	--	--	--	-----

						...
--	--	--	--	--	--	-----

							...
--	--	--	--	--	--	--	-----

54 | SANTILLANA

2. Descubre la figura que no corresponde a la secuencia.



3. Dibuja las figuras que faltan para completar las secuencias.



4. Extraer datos de un dibujo. Observa. Luego, responde.



1) ¿Cuántas veces aplaude el niño antes de zapatear?

2) ¿Cuántas veces zapatea antes de volver a aplaudir?

3) Siguiendo el orden anterior, ¿qué debería hacer el niño después del último aplauso de la imagen? Encierra tu respuesta.



SANTILLANA 55

Anexo 2. Secuencias aditivas, Modulo 2, sección 2, (p. 94-95)

2. Secuencias

Una **secuencia** aditiva es un conjunto de números ordenados, relacionados entre sí por un patrón que se repite constantemente.

EJEMPLO

Observa la siguiente secuencia.

ACTIVIDADES

1. Escribe el número que corresponde a cada imagen.

8	9	
11		

14		
17		19

El patrón de esta secuencia es _____.

	→	_____
	→	_____
	→	_____

El patrón de esta secuencia es _____.

	→	_____
	→	_____
	→	_____

El patrón de esta secuencia es _____.

96 | SANTILLANA

2. Escribe el patrón y continúa cada secuencia numérica.

1	3	5	_____	_____
---	---	---	-------	-------

15	12	9	_____	_____
----	----	---	-------	-------

3. Colorea el número equivocado en cada secuencia. Luego, comenta con tus compañeros cuál es el número correcto.

23	26	29	33	35	38	41
----	----	----	----	----	----	----

59	57	55	53	50	49	47
----	----	----	----	----	----	----

4. Comprender el enunciado. Resuelve el problema utilizando secuencias numéricas.

Mariana lee un cuento. Si se ha propuesto leer 3 páginas cada día, ¿cuántas páginas leerá en 7 días?

✓ Prueba Saber. Lee, luego encierra la opción correcta. Observa la secuencia.

20	→	16	→	12	→	8	→	4
----	---	----	---	----	---	---	---	---

1) ¿Qué patrón forma la secuencia?

A. Sumar 4 B. Sumar 5 C. Restar 2 D. Restar 4

2) ¿Qué número continúa la secuencia?

B. 30 B. 22 C. 2 D. 0

97 | SANTILLANA

Anexo 3. Secuencias con patrones simples, Modulo 1, sección 3, (p.48-49)

3. Secuencias

Secuencias con patrones simples

Recuerda que

Conociendo el patrón de una secuencia y uno de sus números es posible encontrar los siguientes.

Una **secuencia** es aquella conformada por números que aumentan o disminuyen. A la misma cantidad que aumenta o disminuye se le conoce con el nombre de patrón.

EJEMPLO

El lunes, Flor preparó 20 postres. Si cada día elaborará tres postres más que el día anterior, ¿cuántas postres hará el sábado?

Como Flor inició el lunes con 20 postres, se tiene que el valor inicial de la secuencia es 20 y el patrón de esta secuencia es sumar 3, pues hace tres postres más cada día.

La secuencia que representa la preparación de los postres es:

Lunes Martes Miércoles Jueves Viernes Sábado

Flor hará 35 postres el día sábado.

ACTIVIDADES

- Continúa cada secuencia numérica a partir del patrón dado.

Patrón: sumar 11	24	○	○	○
Patrón: restar 9	85	○	○	○
Patrón: sumar 5	37	○	○	○
Patrón: restar 10	92	○	○	○
Patrón: sumar 13	15	○	○	○
Patrón: restar 10	98	○	○	○

2. Descubre el patrón de las siguientes secuencias numéricas.

 Patrón:	 Patrón:
 Patrón:	 Patrón:

3. Crea una secuencia numérica que cumpla la condición dada en cada caso.

► Patrón sumar un número mayor de 13 y número de partida mayor a 300.

Patrón: _____ Número de partida: ➔

► Patrón restar un número menor a 31 y número de partida mayor a 752.

Patrón: _____ Número de partida: ➔

4. Comprender el enunciado. Lee y resuelve.

Lorena se ha propuesto correr 30 metros más cada día. Si el lunes recorrió 43 metros, responde:

¿Cuántos metros corrió el viernes?

¿Cuántos metros corrió en total?

● Razona ● Ejecuta ● Comunica ● Soluciona ● Interpreta ● Argumenta ● Propone

Anexo 4. Secuencias con figuras geométricas, Modulo 2, sección 2, (p.102-103)

...para Convivir en paz COOPERACIÓN
¿Cuáles acciones te permiten identificar la cooperación?
¿Tú cooperas en tu aula de clase?

2. Secuencias

Secuencias con figuras geométricas

Una **secuencia con figuras geométricas** es un grupo de figuras que cumplen con alguna regla de construcción.

EJEMPLO
Observa cómo se determina la figura que sigue.

Se puede apreciar que cada figura cambia de cuadrado a círculo y de círculo a cuadrado, por tanto, sigue un círculo y la secuencia es:

ACTIVIDADES

- Encierra la figura que no corresponde a la secuencia.

- Marca con una X la figura que no cumple con el patrón.

-	-	-	-	-	-

102 SANTILLANA

Estandar: pensamiento variacional

- Dibuja la figura que sigue en cada secuencia.

- Describe el patrón y colorea la secuencia.

- Completa cada secuencia según la condición dada.

Cambiar color	
Cambiar forma	

■ Paseo ■ Génesis ■ Comunica ■ Detidencia ■ Interactiva ■ Ajustamiento ■ Propósito

SANTILLANA 103

Anexo 5. Secuencias con figuras que son fracciones, Modulo 4, sección 3, (p.210-211)

3. Secuencias

Secuencias con figuras que son fracciones

En las secuencias con figuras que son fracciones se muestran figuras que siguen un patrón a partir de las partes en que se dividen o en las partes que se toman de la unidad.

EJEMPLO

Andrés pinta en cada círculo las partes en las cuales se ha dividido, si continúa con el patrón, ¿cuál es la figura que continua la secuencia?

En la primera fracción se pintó $\frac{2}{10}$, en la segunda $\frac{4}{10}$ y en la tercera $\frac{6}{10}$, cada vez pinta dos partes más. Luego, en la siguiente figura pintará $\frac{8}{10}$. Por tanto, la secuencia es:

ACTIVIDADES

1. Observa la secuencia de figuras y completa la que continúa. Luego, responde.

¿Cuántos cuadritos azules tendrá la figura cuatro? _____ ¿Por qué? _____

2. Extraer datos de una imagen. Lee, observa y resuelve.

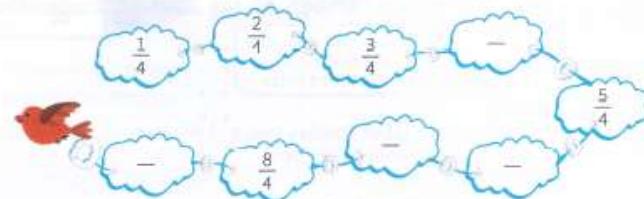
Mateo preparó unas tortas y las dividió como se muestra a continuación.



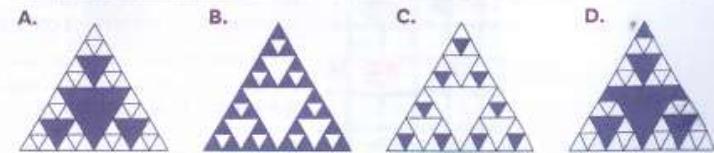
Si Mateo continua con el patrón para dividir las tortas, ¿en cuántas partes debe dividir la torta que falta? _____

¿En cuántas partes debe dividir la siguiente torta? _____

3. Observa las fracciones y completa la secuencia.



✓ **Prueba Saber.** Observa y elige la figura que sigue en la secuencia.



Anexo 6. Secuencias con patrones de suma, Modulo 1, sección 3, (p.42-43)

Cálculo mental

Menciona los cinco números que continúan en cada caso, contando, según se indica.

De 5 en 5 a partir de 70
De 20 en 20 a partir de 80.
De 100 en 100 a partir de 895.
De 200 en 200 a partir de 1.560.
De 1.000 en 1.000 a partir de 600.

3. Secuencias

Secuencias con patrón de suma o de resta

Una **secuencia con patrón de suma** es aquella conformada por números que **aumentan** de tal forma que al restar dos números consecutivos se obtiene la misma diferencia.

Una **secuencia con patrón de resta** es aquella conformada por números que **disminuyen** de tal forma que al restar dos números consecutivos se obtiene la misma diferencia.

A la diferencia en una secuencia se le denomina **patrón**.

EJEMPLO

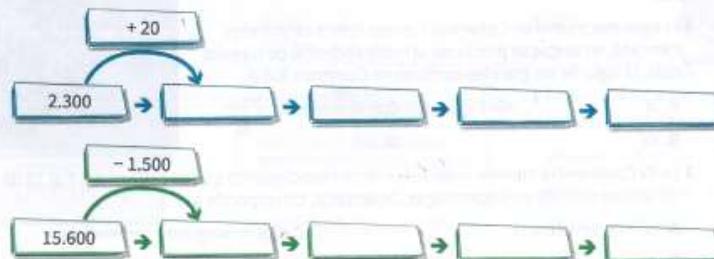
Observa lo que dice el niño. ¿La secuencia tiene patrón de suma o de resta?

El patrón numérico de formación de esta secuencia es sumar 50.

La secuencia es ascendente, es decir, los números van aumentando, por tanto, su patrón es de suma.

ACTIVIDADES

1. Sigue el patrón numérico y completa cada secuencia.



2. Completa con el patrón numérico que genera cada secuencia.

3.330 → 3.334 → 3.338 → [] → 3.342 → 3.346 → 3.350

15.845 → 15.745 → 15.645 → [] → 15.545 → 15.445 → 15.345

24.301 → 24.311 → 24.321 → [] → 24.331 → 24.341 → 24.351

3. Escribe una secuencia para cada caso e indica el patrón.

Cinco términos, patrón de suma, todos los términos tienen como cifra de las unidades a 5.

Cinco términos, patrón de resta, todos los términos tienen como cifra de las unidades a 0.

Cuatro términos, patrón de suma mayor que 100, está formada con números de cuatro cifras.

Seis términos, patrón de resta mayor que 100, está formada con números de cinco cifras.

Objetivos: Razona, Ejemplifica, Comunica, Infiere, Interpreta, Argumenta, Propone.

Anexo 7. Secuencias con patrones de multiplicación. Módulo 2, sección 2, (p.94-95)

2. Secuencias

Secuencias con patrón de multiplicación

En una **secuencia con patrón de multiplicación** los números se obtienen al multiplicar cada vez por la misma cantidad. La cantidad por la que se multiplica cada número es **el patrón** de la secuencia.

EJEMPLO

Carolina está pensando en una secuencia de números. ¿Qué números continúan la secuencia?

Paso 1. Se verifica por cuál número se multiplica cada término. Por tanto, se tiene que: $3 \times 5 = 15$; $15 \times 5 = 75$; $75 \times 5 = 375$. Cada término se multiplicó por 5.

Paso 2. Se multiplica por 5 para encontrar los dos números que siguen en la secuencia numérica.

$$375 \times 5 = 1.875 \quad 1.875 \times 5 = 9.375$$

Entonces, los números que continúan la secuencia que está pensando Carolina son 1.875 y 9.375.

ACTIVIDADES

1. Completa la secuencia según el patrón que se indica en cada caso.

5×2	\square	$\times 2$	\square	$\times 2$	\square	$\times 2$	\square
7×3	\square	$\times 3$	\square	$\times 3$	\square	$\times 3$	\square
4×7	\square	$\times 7$	\square	$\times 7$	\square	$\times 7$	\square
8×10	\square	$\times 10$	\square	$\times 10$	\square	$\times 10$	\square

Estandar: pensamiento variacional

2. Colorea en cada caso el patrón de multiplicación de cada secuencia.

$2, 10, 50, 250, 1.250, 6.250$	$\times 2$	$\times 3$	$\times 4$	$\times 5$	$\times 6$
$1, 2, 4, 8, 16, 32$	$\times 2$	$\times 3$	$\times 4$	$\times 5$	$\times 6$
$6, 24, 96, 384, 1.536, 6.144$	$\times 2$	$\times 3$	$\times 4$	$\times 5$	$\times 6$

3. Encierra el número intruso en cada caso.

1	7	49	121	343
8	16	32	64	120
1	5	50	500	5.000

El intruso no cumple el patrón de multiplicación.

4. Completar la tabla. Lee y resuelve.

Una bacterióloga agregó una sustancia a dos bacterias y observó que estas se triplicaban cada día. Completa la siguiente tabla.

Números de días	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cantidad de bacterias	2								

Responde, ¿en cuántos días habrá 1.458 bacterias?

94 SANTILLANA

Anexo 8. Secuencias de figuras geométricas, Modulo 3, sección 5, (p.178-179)

5. Secuencias

Secuencias con figuras geométricas

Una **secuencia** con figuras geométricas es un grupo de figuras que cumplen con alguna regla de construcción a la que se denomina **patrón**.

EJEMPLO

Observa la secuencia y determina la figura que sigue.

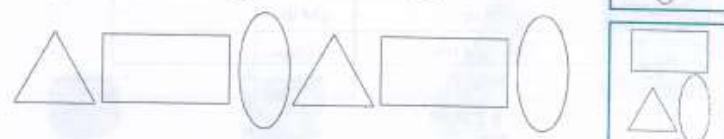
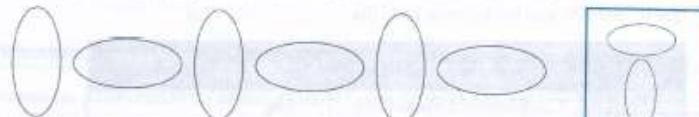


Se puede ver que cada par de figuras cambia el color. Por tanto, la secuencia es:



ACTIVIDADES

- Colorea la figura que sigue en cada serie.



- Observa las secuencias de figuras y dibuja los elementos que faltan.



- Observa la secuencia y selecciona la opción que continúa en cada una.



- Observa e indica qué figuras no pertenecen a la secuencia. Describe el patrón.



El patrón es _____



El patrón es _____

- Utiliza las figuras y diseña dos secuencias.



■ Paroja ■ Tijera ■ Comuca ■ Silacosa ■ Interpreta ■ Argumenta ■ Mopane

SANTILLANA

179

Anexo 9. Secuencias con patrones geométricos, Modulo 2, sección 5, (p.118-119)

5. Secuencias

Secuencias con patrones geométricos

Una **secuencia con figuras geométricas** es un conjunto ordenado de figuras en el que se destaca un primer elemento y cada una de las figuras que siguen se construye según un patrón de formación determinado.

EJEMPLO

La siguiente secuencia está formada a partir de triángulos. ¿Cuántos triángulos debe haber en la figura 4?

Figura 1

Figura 2

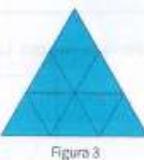


Figura 3

Paso 1

Se realiza una tabla en la cual se relacione el número de triángulos de cada figura.

Figura	1	2	3	4
Número de triángulos	1	4	9	?

Paso 2

Se busca una relación entre los valores de la tabla. Al observar detenidamente la secuencia se verifica que de la figura 1 a la figura 2 aumentaron 3 triángulos y, de la figura 2 a la figura 3 aumentaron 5 triángulos. De esta manera, se puede establecer que la secuencia de figuras se obtiene sumando un número impar de triángulos. A partir de esta regla, de la figura 3 a la figura 4 se determina que el aumento será de 7 triángulos que, sumados a los 9 anteriores, darán un total de 16 triángulos.

Recuerda que

El término sucesión también se usa para referirse a una secuencia.

ACTIVIDADES

1. Observa las siguientes secuencias. Luego, dibuja las figuras que completan cada secuencia.

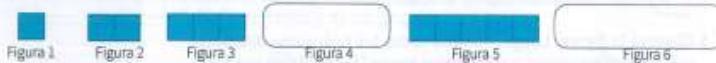
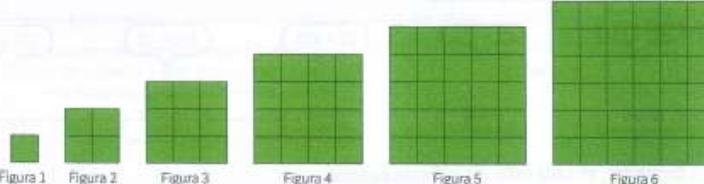


Figura 1
Figura 2
Figura 3
Figura 4
Figura 5
Figura 6

Figura 1
Figura 2
Figura 3
Figura 4
Figura 5
Figura 6

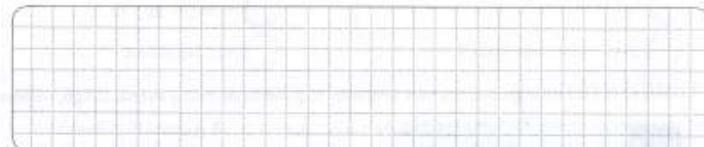
2. Observa los primeros seis términos de la secuencia. Luego, resuelve.



» Completa la siguiente tabla:

Figura	1	2	3	4	5	6
Número de cuadrados						

» ¿Cuál es la regla de formación que determina la cantidad de cuadrados verdes?



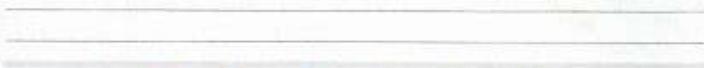
» ¿Cuántos cuadrados tendrán las figuras 7 y 8?



» Inventa una secuencia de figuras geométricas. Luego, escribe la regla de formación que empleaste.



Regla de formación:



Anexo 10. Secuencias con figuras geométricas, Modulo 3, sección 3, (p.156-157)

3. Secuencias

Secuencias con figuras geométricas

Una secuencia con figuras geométricas es un grupo ordenado de figuras que cumplen con alguna regla de construcción.

EJEMPLO

Observa la secuencia y determina la figura que sigue.

Se puede apreciar que cada figura rota un cuarto de vuelta hacia la derecha y los colores se intercambian. Por tanto, la secuencia es

ACTIVIDADES

1. Observa las secuencias. Luego, descubre el patrón y dibuja la figura que continúa.

2. Observa cada secuencia. Luego, selecciona la opción que continúa en cada una.

3. Usa los cuadros para plantear una secuencia. Luego, describe el patrón utilizado.

Patrón utilizado: _____

Patrón utilizado: _____

4. Utiliza las figuras para diseñar dos secuencias.

SANTILLANA 157

Anexo 11. Secuencias con fracciones, Modulo 2, sección 3, (p.102-103)

Cálculo mental

Para sumar 1 con cualquier fracción, escribe el 1 como una fracción cuyo numerador y denominador son el denominador de la fracción:

$$1 + \frac{1}{7} = \frac{7}{7} + \frac{1}{7} = \frac{8}{7}$$

Realiza las siguientes sumas utilizando la estrategia.

$1 + \frac{1}{9} =$	$\boxed{}$
$1 + \frac{2}{3} =$	$\boxed{}$
$1 + \frac{5}{4} =$	$\boxed{}$
$1 + \frac{7}{8} =$	$\boxed{}$
$1 + \frac{1}{6} =$	$\boxed{}$
$1 + \frac{2}{5} =$	$\boxed{}$
$1 + \frac{3}{11} =$	$\boxed{}$
$1 + \frac{5}{13} =$	$\boxed{}$
$1 + \frac{9}{100} =$	$\boxed{}$

3. Secuencias

Secuencias con fracciones

Una secuencia con fracciones es un grupo ordenado de fracciones que tienen un **patrón o ley de formación**.

EJEMPLO

En la siguiente secuencia numérica el patrón de formación es sumar un medio al número anterior.

1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
---	---------------	---	---------------	---	---------------	---

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$3 + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Recuerda que

Una secuencia con fracciones puede tener patrón de suma, resta, multiplicación o división.

ACTIVIDADES

- Sigue el patrón numérico y completa cada secuencia.

$+ \frac{1}{6}$	$+ \frac{1}{6}$	$+ \frac{1}{2}$	$+ \frac{1}{2}$	$+ \frac{1}{6}$	$+ \frac{1}{6}$
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

2	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$
---	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------

$- \frac{1}{3}$					
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

7	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$
---	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------

$+ \frac{1}{5}$					
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

1	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$
---	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------	------------------------

2. Completa con el patrón numérico que genera cada secuencia.

The diagram shows two sequences of numbers arranged in rows. Each row has a box at the top with an arrow pointing down to the first number. The top sequence starts with 7, followed by $\frac{23}{3}$, $\frac{25}{3}$, 9, $\frac{29}{3}$, and $\frac{31}{3}$. The bottom sequence starts with $\frac{5}{4}$, followed by $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$, 2, $\frac{9}{4}$, and $\frac{10}{4}$.

3. Construye cada secuencia teniendo en cuenta la ley de formación y el primer término.

Ley de formación: multiplicar por 2. Primer término: $\frac{7}{2}$

Ley de formación: restar 3. Primer término: $\frac{57}{4}$

4. Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

En la secuencia $\frac{3}{4}, \frac{6}{4}, \frac{9}{4}$ el término que sigue es 3.

El patrón de la secuencia $1, \frac{8}{7}, \frac{15}{7}, \frac{9}{7}$ es sumar $\frac{1}{7}$.

En la secuencia $\frac{3}{5}, \frac{12}{5}, \frac{48}{5}$ la ley de formación es multiplicar por 4.

El término que sigue en la secuencia $10, \frac{95}{10}, 9, \frac{85}{10}$ es $\frac{75}{10}$.

5. Comprender el enunciado. Lee y resuelve.

Cuando Santiago camina, avanza $\frac{2}{3}$ de metro

cada vez que da un paso. Si parte en un punto al cual se le puede asignar el número 0. Escribe las distancias, desde su punto de partida, en las cuales recorrerá los próximos 5 pasos.

Rutinas Ejercicio Comunica Soluciona Interpreta Argumenta Propone

SANTILLANA

103

Anexo 12. Secuencias con números decimales, Modulo 3, sección 2, (p.156-157)

2. Secuencias

Secuencias de números decimales

Una secuencia es un conjunto ordenado de números, en el que se destaca un primer elemento y los que siguen se obtienen a partir de una regla de formación.

EJEMPLO

En la secuencia 2,5; 4,2; 5,9; 7,6; ... se tiene:

- 2,5 es el primer elemento de la secuencia.
- Cada elemento de la secuencia se obtiene sumando 1,7 al elemento anterior, así:
 $4,2 = 2,5 + 1,7 \quad 5,9 = 4,2 + 1,7$
- El siguiente elemento de la secuencia se obtiene así: $7,6 + 1,7 = 9,3$.

En la secuencia 0,258; 2,58; 25,8; 258; ...

- 0,258 es el primer elemento de la secuencia.
- Cada elemento de la secuencia se obtiene multiplicando el elemento anterior por 10, así:
 $2,58 = 0,258 \times 10 \quad 25,8 = 2,58 \times 10$
- El siguiente elemento de la secuencia se obtiene así: $258 \times 10 = 2.580$.

ACTIVIDADES

- Escribe los cinco primeros términos de cada secuencia de acuerdo con la información dada.

Primer elemento: 1,2 Regla de formación: sumar 0,9	Primer elemento: 10 Patrón: sumar 2,5
<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>

Primer elemento: 0,42 Regla de formación: dividir entre 0,1	Primer elemento: 458,2 Regla de formación: multiplicar por 0,1
<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>

- Marca con un ✓ el patrón de la secuencia.

2,3 → 4,6 → 9,2 → 18,4 → 36,8...

Sumar 0,5 Dividir entre 0,5 Multiplicar por 0,5 Restar 0,5

Gimnasia matemática

Encuentra los tres elementos siguientes en la secuencia:
 1,2; 3,5; 8; ...

156 : GANTILLANA

3. Completar la tabla. Completa las secuencias de números en cada fila, de tal manera que las fracciones, los decimales y los porcentajes sean equivalentes.

Fracción	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$		
Decimal						
Porcentaje						

4. Extraer datos de una imagen. Observa cómo varía la longitud de la base de los rectángulos en la secuencia. Luego, determina el área de cada rectángulo y resuelve.

Escribe los cinco primeros elementos de la secuencia formada por las áreas de los rectángulos.

Describe la regla de formación:

5. Comprender el enunciado. Lee y luego, resuelve.

El consumo total mensual en kilovatio·hora de una empresa disminuye aproximadamente, cinco centésimas partes por mes.

Si se sabe que el mes anterior el consumo fue 1.520 kilovatios·hora y en la actualidad es 1.444 kilovatios·hora, ¿cuál será el consumo en los próximos dos meses?

✓ Prueba Saber. Lee la siguiente situación. Luego, elige la opción correcta.

Un árbol crece un 20% en el transcurso de un año. Si al finalizar el primer año su altura era de 75 cm, ¿cuál es la altura que alcanzará el árbol al finalizar el quinto año?

A. 129,6 cm
 B. 155,52 cm
 C. 160,8 cm

Rápida Ejecuta Comunica Secuencia Interpreta Argumenta Propone

SANTILLANA : 157

Anexo 13. Sucesiones recursivas. Unidad 5, Sección 1. (p. 178-180)

Sucesiones

Situación de aprendizaje
Observa la formación del árbol fractal Fibonacci, teniendo en cuenta como estructura inicial de este sucesión y el proceso de crecimiento de los mismos.

Resuelve:

¿Cuál es la cantidad de ramas que tiene el árbol fractal dibujado en la actividad 5?

Como en cada iteración se forman tres ramas nuevas, en cada rama, entonces se puede construir una tabla para conocer la cantidad de ramas en cada iteración, según sigue:

Iteración	1	2	3	4	5
Cantidad de ramas por cada iteración	3	$3 + 3 = 6$	$6 + 6 = 12$	$12 + 12 = 24$	$24 + 24 = 48$

Resposta: En la 5ª iteración hay 48 ramas.

El estudio de las sucesiones se aplica en el análisis de patrones, por ejemplo en las curvas sucede un fenómeno en el que la irregularidad producida por el ferriero, en combinación con la gravedad, genera patrones durante la caída del agua. También, el crecimiento natural de las hojas de los jardines.

En algunas situaciones se presentan conjuntos de objetos, cuyos tamaños varían en forma de sucesión. Esto significa que el conjunto está ordenado de tal forma que es posible identificar un primer elemento, un segundo elemento, un tercer elemento y, así sucesivamente.

Rode función: cada dominio son el conjunto de los enteros positivos es llamada una sucesión.

Para designar una sucesión se usa la expresión $\{a_n\}$ y se emplean subíndices para especificar sus términos. Por ejemplo, en la sucesión $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots\}$, se tiene que:

Los subíndices señalan el lugar que ocupa cada número o término de la sucesión, así, el primer término es $a_1 = 1^{\text{er}} = 1$, el segundo término es $a_2 = 2^{\text{do}} = 1$, y así sucesivamente. El n^{er} término es a_n , al que se denomina término general de la sucesión.

Por tanto, la sucesión definida por $a_n = 2^n$, corresponde a:

Primer término: $a_1 = 1$
Segundo término: $a_2 = 2$
Séptimo término: $a_7 = 128$

Para encontrar un término específico de la sucesión, se remplaza el valor de n en la fórmula del término general, a_n .

El octavo término de a_n corresponde a remplazar $n = 8$ en $a_n = 2^n$.

Por tanto, $a_8 = 2^8 = 256$.

GIMNASTA matemática

Responde:
(Es posible encontrar una sucesión finita?)

AYUDA matemática

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura se repite a diferentes escalas.

Sucesiones recursivas

Una sucesión es recursiva o recurrente cuando cada término se puede expresar utilizando alguno o todos los términos que lo anteceden, por tanto, para definir una sucesión recursiva es necesario dar a conocer uno o más de los primeros términos.

En una sucesión el término anterior al término general a_n es a_{n-1} y el siguiente es a_{n+1} .

Ejemplos

① La sucesión de Fibonacci se utiliza para explicar crecimientos de objetos de la naturaleza.

② Observar la siguiente sucesión. Luego, resolver:

a) Completar la siguiente tabla.

Figura	1	2	3	4	5	6	7
Punto	3	5	7	9	11	13	15

b) ¿Cuál es el término general de la sucesión que relaciona cada figura con la cantidad de puntos que la componen?

Cuando se analiza cómo varía la cantidad de puntos de cada figura, se tiene que el término general de la sucesión es:

$$a_n = 2n + 1$$

Donde a_n representa la cantidad de puntos que conforman la enésima figura.

③ Determinar el término general de la sucesión $\{b_n\} = \{1, 3, 5, 11, 23, 47, \dots\}$ definida de forma recursiva.

En este caso, el término general se expresa de forma recursiva a partir del segundo término, porque cada uno de los siguientes depende del término anterior, así:

$$b_1 = 2$$

$$b_2 = 2 + 2 + 1 = 2 \cdot b_1 + 1$$

$$b_3 = 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 = 2 \cdot b_2 + 1$$

$$b_4 = 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 = 2 \cdot b_3 + 1$$

Así, el término general de la sucesión para $n > 2$, es:

$$b_n = 2 \cdot b_{n-1} + 1$$

147

ACTIVIDADES

► Responde.

1. ¿Cómo se halla el término de una sucesión a partir de su término general?
2. ¿Cuántos términos se deben conocer en una sucesión para determinar su término general?
3. ¿Cómo se define la sucesión de Fibonacci?
4. ¿Cuál es el término general de la sucesión que se trabajó en la situación de aprendizaje de la página 94?

► Halla los seis primeros términos de las siguientes sucesiones.

$$\begin{array}{ll} 5. \quad a_n = n^2 + 1 & 8. \quad a_n = \frac{n^2 + 1}{2n} \\ 6. \quad a_n = (-1)^n(2n) & 9. \quad a_n = \frac{1}{n^2 + 1} \\ 7. \quad a_n = (-1)^{n-1}(2n+1) & 10. \quad a_n = (-1)^n(n^2) \end{array}$$

► Determina la regularidad de cada sucesión. Luego, construye el séptimo término.

11. Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

12. Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

13. Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

► Encuentra el término indicado en cada sucesión.

$$\begin{array}{ll} 14. \quad a_n \text{ si } a_1 = 2; a_n = 4 + a_{n-1} & \\ 15. \quad b_n \text{ si } b_1 = 1; b_n = \frac{1}{2} b_{n-1} & \\ 16. \quad c_n \text{ si } c_1 = \frac{2}{3}; c_n = n \cdot c_{n-1} & \end{array}$$

$$17. \quad d_n \text{ si } d_1 = -3; d_n = \frac{3d_{n-1}}{n}$$

$$18. \quad a_n \text{ si } a_1 = 5; a_n = 5 + 2a_{n-1}$$

► Encuentra los números que faltan en cada caso.

19.	12	24		
	3	18		



► Continúa las siguientes sucesiones escribiendo al menos cuatro términos.

$$22. \quad 3; 4; 6; 9; 13; \dots$$

$$23. \quad 5; 1; -3; -7; \dots$$

$$24. \quad 6; 16; 32; 64; \dots$$

$$25. \quad 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$$

► Halla una fórmula recursiva para cada sucesión.

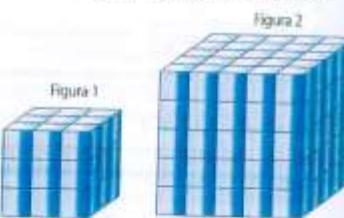
$$26. \quad 1; 4; 16; 64; 256; \dots$$

$$27. \quad 1; 9; 25; 49; \dots$$

$$28. \quad 81; 27; 9; 3; \dots$$

$$29. \quad 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$$

► Observa las siguientes figuras. Luego, responde.



Al pintar los cubos de color rojo de las figuras 1 y 2 sin separarlos, ¿cuántos cubos quedarán pintados de rojo?

30. Una cara

32. Tres caras

31. Dos caras

33. Caras sin pintar

Prueba Saber

► Lee y escoge la opción correcta.

34. En relación con la secuencia de figuras que se forman al pintar los cubos del punto anterior, se puede afirmar que en la figura 10, la cantidad de cubos que tienen dos caras pintadas es

- A. 108
B. 120
C. 180
D. 220

Anexo 14. Sucesiones Aritméticas. Unidad 5, Sección 2. (p. 181-185)

Sucesiones aritméticas

Situación de aprendizaje

Un grupo de abejas construyen la base de su panal, lo que forma una sucesión de líneas que se incrementan en cada figura y así es la cantidad de líneas que forman la sucesión.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Para responder la pregunta, se completa la siguiente tabla, teniendo en cuenta que cada pieza tiene 6 lados y solo comparten una línea.

Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad de líneas	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51

Por tanto, la diferencia entre 6 y 11 es 5. Análogamente, entre 11 y 16, entre 16 y 21, entre 21 y 26, entre 26 y 31, entre 31 y 36, entre 36 y 41, entre 41 y 46, entre 46 y 51.

Una sucesión aritmética es aquella en la cual cada término, excepto el primero, se obtiene de sumar al término anterior un número fijo d llamado **diferencia de la sucesión**.

La cantidad constante que se suma recibe el nombre de diferencia, por ser igual a la diferencia entre un término cualquiera de la sucesión y su antecesor.

Por ejemplo, la sucesión que forma la cantidad de líneas de las figuras de la situación de aprendizaje: 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, ... es una sucesión aritmética porque

Es decir: $11 - 6 = 5$; $16 - 11 = 5$; $21 - 16 = 5$; $26 - 21 = 5$, y así sucesivamente.

Como cada término de una sucesión se obtiene a partir de sumar el número fijo d al término anterior, por tanto la expresión recursiva para el término general de una sucesión aritmética es

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Término general de una sucesión aritmética

En general, dada una progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ según la diferencia, cada término se puede escribir como:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Si a_1, a_2, a_3, \dots es una sucesión aritmética, entonces, el término general o término n -ésimo está dado por la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$.

AYUDA matemática

Las sucesiones aritméticas son conocidas también como progresiones aritméticas.

GIMNASIA matemática

Dibujar la形成 de cada figura a partir de palitos. Luego, determinar si la secuencia de figuras es una sucesión aritmética.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

© Pearson 181

Uso de la fórmula general de una sucesión aritmética

A partir de la fórmula general se pueden deducir las siguientes fórmulas:

Primer término. Si se conoce la diferencia y cualquier otro término, se tiene que

$$a_1 = a_n - (n - 1)d$$

Diferencia común. Si se conoce el primer término y un término cualquiera, se tiene que

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

Número de términos. Si se conoce el primer término, el n -ésimo término y la diferencia entonces

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

Ejemplos

- ① Observar la cantidad de triángulos que forma cada una de las siguientes figuras.



Figura 1



Figura 2



Figura 3

- a) Hallar los seis primeros términos de la sucesión que forman la cantidad de triángulos de las figuras.

Como cada figura se forma agregando cuatro triángulos a la figura anterior, se tiene:

Figura	1	2	3	4	5	6
Cantidad de triángulos	4	9	16	25	36	49

Luego, los seis primeros términos de la sucesión son 4, 9, 16, 25, 36 y 49.

- b) ¿Cuál es el término general de la sucesión?

Primero, se determina la diferencia entre cada par de términos consecutivos:

$$a_2 - a_1 = 5 \quad \text{Se calcula la diferencia.}$$

$$d = a_2 - a_1 \quad \text{Se aplica la fórmula } d = a_n - a_1.$$

Luego, se determina el término general:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{Fórmula del término general.}$$

$$a_n = 4 + (n - 1)5 \quad \text{Se reemplazan los valores de } a_1 \text{ y } d.$$

$$a_n = 4n \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

Por tanto, el término general de la sucesión es $a_n = 4n$.

Por tanto, el término general de la sucesión formada por la cantidad de triángulos de las figuras es $a_n = 4n$.

- ② Determinar el duodécimo término de la sucesión aritmética si $a_1 = 5$ y $a_{11} = 165$.

Primero, se calcula el valor de d :

$$d = \frac{a_2 - a_1}{n - 1} \quad \text{Fórmula de la diferencia.}$$

$$d = \frac{165 - 5}{11 - 1} \quad \text{Se reemplaza el valor de } n \text{ y } a_1.$$

$$d = \frac{160}{10} = 16 \quad \text{Se multiplican los valores de } n \text{ y } a_1.$$

Luego, se halla el término general con $a_1 = 5$ y $d = 16$:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{Fórmula del término general.}$$

$$a_n = 5 + (n - 1)16 \quad \text{Se reemplazan los valores de } a_1 \text{ y } d.$$

$$a_n = 16n - 11 \quad \text{Se multiplican los operaciones.}$$

Por último, con $a_n = 16n - 11$, se calcula a_{12} :

$$a_{12} = 16(12) - 11 \quad \text{Se aplica la fórmula.}$$

$$a_{12} = 181(12) - 11 \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$a_{12} = 181 \quad \text{Se multiplican los números.}$$

Por tanto, el duodécimo término de la sucesión es 181.

- ③ Calcular la diferencia d de la sucesión aritmética, si $a_6 = -1$ y $a_2 = 14$.

$$a_6 = a_2 + (n - 1)d \quad \text{Fórmula del término general.}$$

$$-1 = 14 + (6 - 1)d \quad \text{Se reemplaza el valor de } n.$$

$$-1 = 14 + 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-1 - 14 = -1 - 5d \quad \text{Se igualan los términos de } a_6 \text{ y } a_2.$$

$$-15 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifican los términos de } a_6 \text{ y } a_2.$$

$$-15 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-14 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-14 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-13 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-13 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-12 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-12 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-11 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-11 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-10 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-10 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-9 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-9 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-8 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-8 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-7 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-7 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-6 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-6 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-5 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-5 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-4 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-4 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-3 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-3 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-2 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-2 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$-1 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$0 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$0 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$1 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$2 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$2 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$3 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$3 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$4 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$4 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$5 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$5 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$6 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$6 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$7 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$7 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$8 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$8 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$9 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$9 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$10 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$10 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$11 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$11 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$12 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$12 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$13 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$13 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$14 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$14 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$15 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$15 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$16 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$16 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$17 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$17 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$18 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$18 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$19 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$19 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$20 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$20 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$21 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$21 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$22 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$22 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$23 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$23 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$24 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$24 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$25 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$25 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$26 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$26 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$27 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$27 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$28 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$28 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$29 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$29 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$30 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$30 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$31 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$31 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$32 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$32 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$33 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$33 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$34 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$34 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$35 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$35 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$36 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$36 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$37 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$37 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$38 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$38 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$39 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$39 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$40 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$40 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$41 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$41 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$42 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$42 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$43 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$43 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$44 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$44 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$45 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$45 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$46 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$46 + 1 = -1 - 5d \quad \text{Se simplifica la operación.}$$

$$47 = -1 - 5d \quad \text{Se$$

ACTIVIDADES

Responde.

- ¿Cómo se determina el término general de una sucesión aritmética? Analiza todos los posibles casos.
 - ¿Cuál es la información necesaria para calcular la diferencia común de una sucesión aritmética?
 - ¿Qué significa interpolar medios aritméticos?
 - ¿Cuál es la expresión que permite relacionar dos términos de una sucesión aritmética?
- ▶ Encuentra el término faltante en cada una de las siguientes sucesiones aritméticas.
- El duodécimo término, si el primer término es 9 y el segundo término es -8.
 - La posición del término cuyo valor es 104 de la sucesión aritmética 4, 8, 12, 16, ...
 - El decimocuarto término de una sucesión, cuyo quinto término es $\frac{7}{3}$ y cuya diferencia común es $\frac{1}{3}$.
 - El primer término, si el término sexto es -13 y cuya diferencia común es -5.
 - Los diez primeros términos, si el término centésimo es 301 y la diferencia común es 3.

▶ Completa la siguiente tabla.

Progresión aritmética	Diferencia d	Término n -ésimo
-1, -2, -4, ...	$d =$	$a_n =$
1, 5, 9, ...	$d =$	$a_n =$
$\frac{7}{3}, \frac{11}{3}, \frac{15}{3}, \dots$	$d =$	$a_n =$
8, 13, 18, ...	$d =$	$a_n =$
$\frac{2}{5}, \frac{12}{5}, \frac{22}{5}, \dots$	$d =$	$a_n =$
$\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \dots$	$d =$	$a_n =$
$-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \dots$	$d =$	$a_n =$
-25, -32, -39, ...	$d =$	$a_n =$

▶ Completa cada sucesión aritmética.

- 4, _____, 16, 20, _____
- _____, 7, _____, 19, 22, _____
- $\frac{8}{3}, \dots, \frac{28}{3}, \dots$

▶ Determina el valor de verdad, F (falso) o V (verdadero), de las siguientes proposiciones y argumenta tu respuesta.

- La sucesión 6, 19, 30, 41, 52, ... es una sucesión aritmética.
- El término a_{10} de la sucesión aritmética con una diferencia $d = -5$ y $a_1 = 3$, es $a_{10} = -35$.
- El término general de la sucesión $\frac{1}{4}, \frac{13}{4}, \frac{25}{4}, \frac{37}{4}, \dots$ es $a_n = \frac{3n+1}{4}$.
- Si el tercer término de la sucesión aritmética es $a_3 = 6$ y la diferencia $d = -2$, los primeros ocho términos de la sucesión son 10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4.
- Toda sucesión aritmética es una sucesión cuya diferencia entre sus términos siempre es un número entero.
- Una sucesión aritmética puede ser finita o infinita.

▶ Construye una sucesión aritmética para cada condición, escribe los diez primeros términos y el término general de cada una.

20. El primer término: $a_1 = \frac{1}{3}$

21. La diferencia de la sucesión es $d = \sqrt{3}$

22. El quinto término de la sucesión es $a_5 = 12$

23. La expresión del término general debe tener el número 5.

24. La diferencia de la sucesión debe ser un número racional negativo y su primer término es $a_1 = 4$.

25. El primer término es 25 y $a_5 = a_{n-1} = -\frac{3}{5}$

26. El octavo término es 40 y la diferencia común es negativa.

▶ Resuelve de acuerdo con la siguiente información.

27. $k \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = (a_1 + k) + (a_2 + k) + (a_3 + k) + \dots + (a_n + k)$

$(c_1 + k) + (c_2 + k) = c_1 + k + c_2 + k, \dots, c_n + k$

Si $(a_1) = 1, 2, 4, 6, 8, \dots$ y $(b_1) = 1, 2, 3, 5, 8, 11, \dots$, ¿cuáles son los cinco primeros términos de las sucesiones que se forman en cada caso?

$3 \cdot (a_1) + (b_1) = (a_1 + b_1) \cdot 3$

28. Es posible afirmar que al multiplicar un número real por una sucesión aritmética, se obtiene una sucesión aritmética.

29. ¿Por qué la suma de dos sucesiones aritméticas es una sucesión aritmética?

30. Es posible afirmar que el producto de dos sucesiones aritméticas es una sucesión aritmética?

▶ Interpola.

31. Tres medios aritméticos entre 1 y 3.

32. Cuatros medios aritméticos entre 15 y 43.

33. Cinco medios aritméticos entre 5 y 12.

34. Nueve medios aritméticos entre -8 y 11.

35. Seis medios aritméticos entre -15 y -68.

36. Seis medios aritméticos entre -2 y -5.

37. Cinco medios aritméticos entre -80 y -8.

38. Ocho medios aritméticos entre $\frac{1}{2}$ y $-\frac{7}{10}$.

▶ Lee y responde.

Una biblioteca quiere comprar una colección de libros de arte que está compuesta por 385 libros. Si en el primer mes compró 7 libros y cada mes compra esta misma cantidad,

39. ¿Cuántos libros tendrá en el quinto mes?

40. ¿En qué mes la biblioteca tendrá la colección completa?

▶ Resuelve.

41. Calcula el número de múltiplos de 3 comprendidos entre 100 y 200.

42. Determina cuántos múltiplos de 33 hay entre 2.000 y 3.000.

43. Halla el número de múltiplos de 20 que tienen tres cifras.

44. Determina cuántos múltiplos de 3.000 tienen cuatro cifras.

▶ Completa la tabla que relaciona un polígono regular de n lados con su número de diagonales.

Cero diagonales	0
Uno diagonal	0
Dos diagonales	1
Tres diagonales	3
Cinco diagonales	10

45.

Polígono regular de n lados	3	4	5	6	7	8	9
Diagonales de un polígono	0	2	5	9	14	20	27

46. Halla el número de diagonales que tiene un polígono regular de 18 lados.

47. Obtén una fórmula que relacione el número de lados de un polígono con su número de diagonales.

48. Determina si la sucesión aritmética es una progresión aritmética.

▶ Escribe los primeros cinco términos de cada una de las siguientes sucesiones que se definen de manera recursiva. Luego, indica si la sucesión es aritmética.

49. $a_1 = 2; a_{n+1} = 3 + a_n$

50. $a_1 = 3; a_{n+1} = 4 - a_n$

51. $a_1 = 5; a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$

52. $a_1 = 2; a_{n+1} = -a_n$

53. $a_1 = 4; a_{n+1} = 2a_n$

▶ Una persona compra un computador portátil por 2 millones de pesos, y se determina que su depreciación anual es de 300 mil pesos.

54. ¿Cuál es el valor del computador portátil en dos años y en 6 años?

55. Describe el comportamiento de la depreciación anual de la computadora portátil.

▶ En un edificio el primer piso tiene una altura al suelo de 2,5 m.

56. Si la altura total del edificio es de 30 m, ¿qué cantidad de pisos tiene el edificio?

57. Escribe los medios aritméticos de la sucesión de las alturas de los pisos del edificio.

58. ¿Qué altura del suelo tiene el piso séptimo?

59. Escribe el término general de la sucesión aritmética de las alturas de los pisos del edificio.

▶ Resuelve.

60. Los ahorros mensuales de Adolfo se pueden escribir como una progresión aritmética. Si el primer mes ahorra \$500.000 y al cabo de cuatro meses tiene ahorros \$4.400.000, ¿cuál es la cantidad ahorrada durante cada mes?

Prueba salón

▶ Lee y observa. Luego, escoge la opción correcta.

61. Las siguientes figuras se forman con puntos.



Si se continua con la secuencia, ¿cuántos puntos tiene la duodécima figura?

- A. 30
B. 45
C. 48
D. 56

Anexo 13. Sucesiones geométricas. Unidad 5, Sección 1. (p. 186-189)

Sucesiones geométricas

Situación de aprendizaje

Una población de bacterias se dobla cada 30 minutos. Considerando que el proceso se hace con una sola bacteria, ¿cuántas bacterias hay después de 4 horas y media?

Para responder la pregunta, se realiza el siguiente diagrama:

Tiempo	0	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
Bacterias	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

Por tanto, al cabo de 4 horas y media hay 2048 bacterias.

AYUDA matemática
Las sucesiones geométricas son conocidas también como progresiones geométricas.

Una sucesión geométrica es una sucesión en la cual cada término, excepto el primero, se obtiene de multiplicar al término anterior un número fijo llamado razón de la sucesión.

El número constante que se multiplica recibe el nombre de razón, por ser igual a la razón entre un término cualquiera de la sucesión y su término inmediatamente anterior.

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...
$\times 2$										

Como cada término de la sucesión geométrica se obtiene a partir de multiplicar el número fijo r al término anterior, entonces, la expresión recursiva para el término general de una sucesión geométrica es

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Término general de una sucesión geométrica

Dada una progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ según la definición de cada término se puede escribir:

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = (a_1 \cdot r) \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = (a_1 \cdot r^2) \cdot r = a_1 \cdot r^3$$

Si $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ es una sucesión geométrica, el término general o término n -ésimo está dado por la fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$.

Ejemplo

- Identificar cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas. En caso afirmativo determinar la razón r .

a. 2, 4, 6, 8, 10, ...

La sucesión no es una progresión geométrica porque la razón entre dos términos consecutivos no es la misma. Es decir,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{6}{4} = 1.5$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{8}{6} = 1.3$$

b. $-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \dots$

La sucesión es una progresión geométrica porque:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{1}{3}}{-1} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{-\frac{1}{9}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{-\frac{1}{27}}{-\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{a_5}{a_4} = \frac{-\frac{1}{81}}{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$$

Luego, la razón r de la sucesión es $-\frac{1}{3}$.

[186]

Uso de la fórmula general de una progresión geométrica

A partir de la fórmula general se pueden deducir las siguientes fórmulas:

Primer término: si se conoce la razón y cualquier otro término, se tiene que:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

Básico: si se conoce el primer término y otro término cualquiera de la progresión geométrica se tiene que:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Número de términos: si se conoce la razón, el primer término y el último término de la progresión se tiene que:

$$n = \frac{\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\log r} + 1$$

Ejemplos

- 1) La Carpeta de Sierpinski es un fractal que se forma a partir de la división de un cuadrado en 9 cuadrados cuyos lados son la tercera parte del cuadrado inicial, observa las primeras tres iteraciones en la construcción del fractal.



- a. ¿Cuál es la cantidad de cuadrados sombreados que tienen las cinco primeras iteraciones?

Como en cada nueva iteración se obtienen 8 cuadrados nuevos por cada cuadrado, se tiene:

Iteración	1	2	3	4	5
Cantidad de triángulos sombreados	8	64	512	4.096	32.768

Por tanto, en las cinco primeras iteraciones se tienen la siguiente cantidad de cuadrados sombreados:

$$8, 64, 512, 4.096, 32.768$$

- b. ¿Cuál es el término general de la sucesión que forma la cantidad de cuadrados sombreados en cada iteración?

Primero, la sucesión que se forma es geométrica, porque en cada iteración hay el octuple de cuadrados sombreados respecto a la iteración anterior. Es decir;

$$a_1 = 8 \cdot a_1 = 8 \cdot 8 = 64$$

$$a_2 = 8 \cdot a_1 = 8 \cdot 64 = 512$$

$$a_3 = 8 \cdot a_2 = 8 \cdot 512 = 4.096$$

$$a_4 = 8 \cdot a_3 = 8 \cdot 4.096 = 32.768$$

Luego, la razón r de la sucesión es 8.

Por último, el término general de la sucesión geométrica es

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Fórmula del término general

$$a_n = 8 \cdot 8^{n-1} = 8^n$$

Se reemplaza los valores de a_1 , r :

Por tanto, el término general de la sucesión es $a_n = 8^n$.

- 2) Hallar el primer término y el término general de una sucesión geométrica dados los términos $a_2 = 112$ y $a_4 = 7.168$.

Primero, se calcula el valor de la razón r , a partir de $a_2 = 112$ y $a_4 = 640$, como sigue:

$$a_3 = \frac{a_2}{r^{n-1}}$$

Fórmula del primer término

$$a_3 = \frac{a_2}{r^2} = \frac{112}{r^2}$$

Se reemplaza a_2 , r y n :

$$a_3 = \frac{a_2}{r^2-1} = \frac{7.168}{r^2-1}$$

Se remplaza a_2 , r y n :

$$\frac{112}{r^2-1} = \frac{7.168}{r^2}$$

Se igualan las expresiones que determinan r :

$$\frac{r^3}{r^2-1} = \frac{7.168}{112}$$

Se multiplican por r^2-1 y se divide entre 112:

$$r^3 = 64$$

Se simplifica:

$$r = 4$$

Se reemplaza en a_1 :

$$a_1 = \frac{112}{r^2}$$

Luego, se halla el primer término.

$$a_1 = \frac{112}{4^2}$$

Se reemplaza el valor de r :

$$a_1 = \frac{112}{16} = 7$$

Finalmente, como $a_1 = 7$ y $r = 4$, entonces, el término general de la sucesión es $a_n = 7 \cdot 4^{n-1}$.

GIMNASIA MATEMÁTICA

Problema del trigo y el tablero de ajedrez
Si se coloca sobre un tablero de ajedrez un grano de trigo en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera casilla, y así sucesivamente llenando todas las casillas del tablero triplicando la cantidad de granos de la casilla anterior, ¿cuántos granos de trigo habrá en el tablero de ajedrez al final?

Ejemplos

- ① **Interpolar cuatro medios geométricos entre 125 y $\frac{1}{25}$.**

Primero, se identifican los datos conocidos.

Cantidad de términos: $n = 4 + 2 = 6$

Primer término: $a_1 = 125$

Último término: $a_6 = \frac{1}{25}$

Luego, se hace la razón de la sucesión geométrica, así:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} \quad \text{Razón de la sucesión}$$

$$r = \sqrt[6-1]{\frac{1}{25}} \quad \text{se reemplaza}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{125}} \quad \text{Multiplicar } r \text{ y } a_1$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5} \quad \text{Se resuelven las operaciones.}$$

Finalmente, los cuatro medios geométricos entre 125 y $\frac{1}{25}$ son:

$$a_2 = a_1 \cdot r = 125 \cdot \frac{1}{5} = 25$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = 25 \cdot \frac{1}{5} = 5$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$$

$$a_5 = a_4 \cdot r = 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

Por tanto, la sucesión geométrica es $125, 25, 5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}$.

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS GEOMÉTRICOS

Los intervalos que se encuentran entre dos términos de una sucesión geométrica reciben el nombre de medios geométricos.

Por ejemplo, en la sucesión geométrica $2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{16}{3}, \frac{32}{3}, \dots$ los términos $-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{16}{3}$ son cuatro medios geométricos entre 2 y $-\frac{64}{3}$. En general,

p medios geométricos

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_p, a_{p+1}$$

p = 2 términos

- Conociendo el primer y último término de una sucesión geométrica, interpolar medios geométricos consiste en hallar los términos entre estos dos.
- En una progresión geométrica, un término a_n se relaciona con otro término a_p con $p < n$ mediante la expresión $a_n = a_p \cdot r^{n-p}$.

ACTIVIDADES

Responde.

- ¿Cuáles son las diferencias entre las sucesiones aritméticas y las sucesiones geométricas?
- ¿Cómo se encuentran los medios geométricos de una sucesión geométrica?
- ¿Cómo se puede determinar el término general de una sucesión geométrica?

► Identifica cuáles de las siguientes secuencias son sucesiones geométricas; si lo son, determine el término general.

$$4, -1, -2, -4, -8, -16, -32, -64, \dots$$

$$1, 3, 1, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$$

$$\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}, -\frac{32}{3}, \dots\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{13}, -\frac{2}{13}, \frac{27}{13}, \frac{81}{13}, \frac{243}{13}, \dots\right\}$$

$$\left\{6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \dots\right\}$$

► Determina el valor de verdad, F (Falso) o V (Verdadero), de las siguientes proposiciones. Justifica tu respuesta.

- La sucesión $6, -18, 54, -162, 486, \dots$ es una sucesión geométrica.

- El término a_{10} de la sucesión geométrica con una razón $r = \frac{1}{2}$ y $a_1 = 1.024$ es $a_{10} = \frac{1}{2}$.

- El término general de la sucesión geométrica $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 8\sqrt{2}, \dots$ es $a_n = n\sqrt{2}$.

- Si el quinto término de la sucesión geométrica es $a_5 = \frac{1}{9}$ y la razón $r = \frac{1}{3}$, los primeros seis términos de la sucesión son $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$.

Lee y resuelve.

- De una sucesión geométrica se conocen $a_1 = 24$ y $a_6 = 3$. Halla a_4 , a_5 y a_7 .

- Determine el número de términos de la sucesión geométrica $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, 2.187$.

- Halla la razón r de una sucesión geométrica si $a_1 = 4.374$ y $a_5 = 6$.

- Determina la razón positiva de una sucesión geométrica de cuatro términos, si se sabe que $a_1 + a_2 = 15$ y $a_3 + a_4 = 240$.

► Halla el término que se indica en cada caso, si la sucesión es geométrica.

$$17. \quad a_5 \cdot a_7 = 4 \text{ y } a_5 = 6$$

$$18. \quad a_3 \cdot a_6 = 2 \text{ y } a_3 = -\sqrt{2}$$

$$19. \quad a_{10} \cdot a_6 = 4 \text{ y } a_6 = 12$$

$$20. \quad a_4 \cdot a_6 = 3 \text{ y } a_5 = -192$$

► Completa la siguiente tabla con las primeras seis términos de las sucesiones geométricas, su razón y término n-ésimo.

21. Sucesión geométrica	Razón r	Término n -ésimo
5, 5, 5, ...		
1, 1, 1, 1, 1, 1, ...		
$\sqrt{7}, 2\sqrt{7}, 4\sqrt{7}, \dots$		
-108, 360, -1.200, ...		
90, 15, $\frac{5}{2}, \dots$		
$\frac{1}{144}, \frac{1}{12}, \frac{1}{2}, \dots$		
1, 7, 49, ...		
5, 1, $\frac{1}{5}, \dots$		

► Un cultivo tiene inicialmente 10.000 bacterias y aumenta 20% cada hora.

22. Deduce la fórmula para determinar el número de bacterias luego de t horas.

23. ¿Cuántas bacterias hay en el cultivo luego de 4 horas?

Prueba

► Lee y elige la opción correcta en cada caso.

- Cuál es el número que sigue en la siguiente secuencia?
A. 4, 12, 40, 120, 3700, ...

- 41.530 C. 41.580

- 45.280 D. 45.580

- Cuál es el valor de x de modo que $x + 7, x - 3$ y $x - 8$ forman una sucesión geométrica?
A. 5 C. 13
B. 10 D. 17