EL PROBLEMA DE LOS TRES CILINDROS: UN PRETEXTO PARA DISCUTIR LA VISUALIZACIÓN EN 3D

SERGIO DAVID MELO CASTAÑEDA
GERALDINE GISSEL VARGAS DAZA

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bogotá, D.C.
2019

EL PROBLEMA DE LOS TRES CILINDROS: UN PRETEXTO PARA DISCUTIR LA VISUALIZACIÓN EN 3D

SERGIO DAVID MELO CASTAÑEDA
C.C 1073606636 Cód. 2015140052
GERALDINE GISSEL VARGAS DAZA
C.C 1031170769 Cód. 2014240066

ASESOR: ORLANDO AYA CORREDOR

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2019

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	El problema de los tres cilindros: un pretexto para discutir la visualización en 3D
Autor(es)	Melo Castañeda, Sergio David; Vargas Daza, Geraldine Gissel
Director	Aya Corredor, Orlando
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019, 81 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	INTERSECCIÓN DE SUPERFICIES, VISUALIZACIÓN, SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN, TRIDIMENSIONAL

2. Descripción

El presente trabajo de grado tiene como finalidad estudiar uno de los principales componentes que resulta de gran importancia a la hora de abordar problemas dentro de los cursos de Cálculo en Varias Variables o afines, éste es la visualización de los objetos.

La visualización en contextos tridimensionales resulta ser un factor vital en la interpretación y posteriormente resolución de algunos ejercicios propuestos; es por ello que, a partir de esta mirada, se presenta el problema del volumen encerrado en la intersección de tres cilindros como un pretexto para indagar e identificar cuáles son los posibles sistemas de representaciones que se pueden suministrar a una misma tarea para llegar a su solución correspondiente. Además, se evidencia la importancia del uso de software dinámicos durante el proceso de análisis de una tarea.

3. Fuentes

Se consultaron diversos documentos relacionados con el campo del presente trabajo donde finalmente se sintetizaron en 24 documentos entre los cuales se tienen 19 documentos de investigación, 4 textos de matemáticas y 1 documento curricular. Dentro de las fuentes consultadas sobresalen:

Duarte, P. V. E., Gómez, H. T., & Toro, J. R. (2009). Estrategias de visualización en el cálculo de varias variables. *Revista Educación y Pedagogía*, *18*(45), 119-131.

Godino, J.; Gonzato, M.; Cajaraville, J. & Fernández, T. (2012) Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias: Revista de investigación y experiencia didáctica.*

Miranda, V. C., & Rafael, P. (2011). Métodos y estrategias para calcular volúmenes de ciertas intersecciones de cilindros. *Anais do XIII CIAEM, Recife*.

Stewart, J. (2012). Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas. Séptima edición. Toronto, Canadá: Cengage Learning.

4. Contenidos

Inicialmente se presenta la introducción en la cual se describe los componentes a desarrollar en el documento. Luego, se establece la justificación de la investigación. En este apartado se describe la importancia de trabajar con representaciones tridimensionales para dar solución a problemas que se plantean en el cálculo de varias variables. Además, se resalta el papel de la visualización en el desarrollo de dichas situaciones y el uso de software de geometría dinámica para llevar a cabo las representaciones.

Por otra parte, se describen los objetivos del proyecto y posteriormente los antecedentes, allí se presentan tres investigaciones relacionadas específicamente con el problema de los tres cilindros, y algunas aplicaciones de problemas en el espacio tridimensional los cuales se desarrollaron a través de material tangible y/o softwares de geometría dinámica.

Luego, se presenta el marco teórico, en este se relacionan tres componentes: matemático, didáctico y tecnológico. En el marco matemático, se describe el proceso para hallar el volumen asociado al bicilindro (solido encerrado por la intersección de dos cilindros) y al tricilindro (solido encerrado por la intersección de tres cilindros) haciendo referencia al cálculo multivariado. En el marco didáctico, se establece inicialmente la importancia de la visualización, niveles de visualización y la diversidad de representaciones asociadas a una misma situación. Finalmente, en el marco tecnológico, se presentan los softwares que se usaron para reproducir algunas construcciones que se presentan en el documento.

Posteriormente, se presenta la actividad con la cual se llevó a cabo la intervención. En este apartado se aborda la pertinencia de los ejercicios propuestos a la luz del marco teórico. Luego, se reporta el análisis de dicha actividad con el fin de mostrar los hallazgos en cuanto a la dificultad de realizar representaciones gráficas y todos los aspectos característicos relacionados con la visualización.

Finalmente, se presenta las conclusiones en concordancia con los objetivos planteados.

5. Metodología
La investigación surge al explorar uno de los problemas a los que se denomina *Proyecto de Laboratorio* que se plantean en el libro Cálculo en Varias Variables en Stewart (2012). Para ello, inicialmente se trabaja sobre los componentes teóricos correspondientes al problema del volumen encerrado por la intersección de 3 cilindros, estableciendo los elementos teóricos desde las matemáticas, la tecnología y la didáctica. En este sentido la metodología del trabajo es completamente explorativa - constructiva, según la caracterización de Cazau (2006), ya que una vez identificado un posible contexto de trabajo y los referentes sobre los que se pretende trabajar, posteriormente, y teniendo en cuenta la teoría que enmarca el problema de los tres cilindros, se plantea una actividad de intervención de la cual se lleva a cabo un pilotaje con un grupo específico y se presenta un análisis en el cual se describen los hallazgos a la luz de los tres elementos teóricos de análisis mencionados anteriormente.

6. Conclusiones
A continuación, se destacan las conclusiones más representativas fruto del trabajo diseñado e implementado en su fase de pilotaje: • Las diferentes funciones de los softwares dinámicos, en particular Geogebra ®, posibilitan la verificación de resultados y planteamientos en diferentes sistemas de representación. No obstante, todos los programas de geometría, o afines, para el desarrollo de las matemáticas tienen limitaciones y potencialidades, así que, utilizándolas de forma correcta, pueden ayudan a potencializar ciertos procesos matemáticos. • Las situaciones que involucran cierto tipo de variación requieren y dependen de la capacidad de visualización y, por ende, mayores competencias en el manejo de los diferentes sistemas de representación que ayuden a la comprensión de la situación. • Pertinencia e importancia de abordar un problema desde diversos sistemas de representación (en particular analítico y gráfico), puesto que así se pueden extraer diversas características que permiten dar una solución adecuada ante una situación planteada. • Los procedimientos analíticos desarrollados permiten a su vez mostrar la importancia de que más allá de representar la situación gráficamente, dichos resultados permiten verificar que aquello que se conjetura a partir de un gráfico resulta ser verídico o cuando menos plausible.

Elaborado por:	Melo Castañeda, Sergio David Vargas Daza, Geraldine Gissel
Revisado por:	Aya Corredor, Orlando

Fecha de elaboración del Resumen:	3	11	2019

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: **"El problema de los tres cilindros: un pretexto para discutir la visualización en 3D."**, elaborado por los estudiantes:

Geraldine Gissel Vargas Daza código 2014240066 y cédula 1031170769.
Sergio David Melo Castañeda código 2015140052 y cédula 1073606636.

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **39** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna X Meritoria __ Laureada __

En constancia se firma a los doce (12) días del mes de marzo de 2020.

Director del Trabajo: Profesor Orlando Aya C
ORLANDO AYA CORREDOR

Jurado:
Profesora
NATALIA MORALES ROZO

Contenido

Tabla de figuras

Introducción

En el presente documento se estudia el proceso de visualización como un aspecto esencial de la educación matemática y cómo el tener una adecuada conceptualización del espacio tridimensional, permite que se puedan hacer transformaciones entre los diferentes sistemas de representación de un objeto y que puedan ser usadas a la hora de abordar situaciones relacionadas con objetos del cálculo vectorial y en varias variables. Para ello, se usa como situación referencial, o de pretexto argumentativo, el problema del volumen resultante al intersecar superficies; en particular se toma la intersección de tres cilindros, toda vez que es el problema contextual intramatemático desde el que pretende discutir los problemas relacionados con los procesos de visualización y de representación.

Inicialmente, se presenta la justificación del trabajo, en ella se resaltan aspectos importantes relacionados con los procesos de visualización de objetos tridimensionales y la relevancia que tiene el uso de software matemáticos - didáctico o de diseño - para representar superficies cuádricas y por qué la visualización es un aspecto importante en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, particularmente del cálculo vectorial y del cálculo en varias variables, sin dejar de lado la geometría del espacio y la geometría analítica. Seguido a ello, se presentan los objetivos (general y específicos), los cuales corresponden a los intereses que pretende abordar la discusión objeto de este trabajo.

Posteriormente, se presentan los antecedentes relacionados con investigaciones cuyo interés es a la visualización de objetos tridimensionales en cálculo multivariado y vectorial, buscando determinar los desarrollos en las discusiones y argumentaciones que se relacionan con la presente propuesta. Por su parte, el marco teórico incluye tres componentes: matemático, didáctico y tecnológico; en cada uno de ellos se presentan elementos en relación con el problema contextual de pretexto, la intersección de los tres cilindros, sin dejar de lado las posibilidades que este puede brindar y el análisis que otras situaciones pueden brindar, pero siempre apuntando a resaltar el proceso de visualización como eje central de discusión.

Como parte del proceso de análisis se presenta un apartado con la propuesta de actividad piloteada e implementada en un curso de Cálculo en Varias Variables de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, así como los principales resultados obtenidos y analizados, desde los tres componentes teóricos.

Finalmente, se presentan las principales conclusiones producto del trabajo, en relación con los objetivos específicos propuestos. Una reflexión sobre los aportes a la formación como docentes de los autores y una posible trayectoria para futuros trabajos es considerada.

Justificación

Dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, diversos autores, (Rico, Catro & Romero. (2000), Rojas (2014), entre otros), han indicado que, en los procesos de conceptualización, ya sea de conceptos o de procesos asociados, resulta indispensable el uso de diversos sistemas de representación a la hora de tratar con ellos. Se considera que entre más amplia sea la gama de representaciones empleadas, la forma como ellas se articulan, y las experiencias que se tengan con los objetos, se llegará a tener una mayor comprensión. Igualmente, estos aspectos pueden ser empleados para favorecer la comprensión de un problema y a plantear caminos plausibles hacía su resolución.

Por lo anterior, en el presente trabajo, se pretende abordar situaciones en las cuales se involucran los sistemas de representación visuales, analíticos y verbales en relación con problemas que involucran objetos tridimensionales propios del estudio de un curso usual de Cálculo en Varias Variables o de Cálculo Vectorial, de un programa de formación inicial de profesores de Matemáticas, en particular, de la Universidad Pedagógica Nacional y la importancia que tienen el proceso de visualización en la articulación de los sistemas de representación.

Dentro de los procesos llevados a cabo tanto en la conceptualización de objetos como en el de la resolución de problemas, se ha evidenciado que las personas presentan dificultades en el manejo de las representaciones visuales de las situaciones y de los objetos bidimensionales y tridimensionales, y que paradójicamente estas resultan de gran ayuda a la hora de abordar, tratar y resolver un problema específico. Marmolejo & Vega (2012) por ejemplo, y siguiendo las preocupaciones profesionales de diferentes educadores matemáticos, han abordado la importancia del proceso de visualización tanto de objetos bidimensionales como tridimensionales en el estudio de la geometría, y han logrado establecer una relación directa entre lo que las personas son capaces de representar de los objetos y la comprensión que llegan a tener de los mismos.

Según Rojas, Castrillón & Córdoba (2015), a pesar de que vivimos en un mundo tridimensional la mayor parte de las experiencias matemáticas son bidimensionales, sin embargo el estudio inicial de objetos bidimensionales y tridimensionales en la escuela son habitualmente trabajados en cursos de geometría que por lo general son materia de olvido en la enseñanza de las escuelas o, aún más grave, su importancia ha sido relegada, en el mejor de los casos, a las últimas semanas de las programaciones curriculares las cuales aún adolecen tanto de una integración de ejes temáticos de la misma disciplina como de interacción con otras disciplinas o asignaturas. Así, es usual que no se le brinde la prioridad suficiente que requiere el trabajar representaciones de aquellas figuras u objetos tridimensionales que de hecho, en principio, se supone deberían estar más cercanos a la experiencia de los seres humanos.

La priorización del estudio de los objetos bidimensionales por encima de los tridimensionales es apenas compresible, pues el proceso de visualización tridimensional es más complejo que el bidimensional, esta complejidad proviene del hecho de que los dispositivos de representación visual históricamente fueron bidimensionales. Se trató de representar la realidad sobre superficies planas, lo que ya de entrada es una simplificación o reducción de dimensiones. La solución más importante a esta problemática viene dada por las proyecciones, las cuales transforman objetos tridimensionales en objetos en un plano de proyección bidimensional, (o si se quiere, permite ver objetos tridimensionales sobre un plano). De hecho, el proceso de visualización del ser humano requiere las proyecciones de un objeto tridimensional que posteriormente serán reconstruidas e interpretadas por el cerebro. La historia del arte ofrece la clara situación de lo mencionado anteriormente, sólo hasta el siglo XIV aparece en la pintura las primeras representaciones en perspectiva.

Inicialmente, incluso en el desarrollo de técnicas de dibujo a lo largo de la historia de la humanidad se empleó este método, se pueden usar los bosquejos por medio de los cuales se intenta representar objetos tridimensionales en vistas bidimensionales hechas en papel. No obstante, no se logrará observar en su totalidad las características y propiedades del objeto por simple que este sea. Así se requiere un proceso que permita “ver” los objetos que, o bien están representados o se quieren representar.

Si bien los procesos de visualización resultan de gran ayuda a la hora de representar un objeto tridimensional éste puede ser insuficiente, e incluso inútil, sino se usan los elementos adecuados para llevar a cabo la representación y si no se “aprende” (y enseña) a ver los objetos. Por lo anterior, es importante distinguir algunas otras alternativas que puedan beneficiarlos, como puede ser el uso de software de geometría dinámica, software de construcciones bidimensionales y tridimensionales, las plataformas de realidad virtual y de realidad aumentada; estas dos últimas, según Duarte, Gómez & Toro (2009), permiten visualizar los conceptos de diferentes formas, enriqueciendo la imaginación y fortaleciendo las redes conceptuales de los estudiantes expuestos a procesos de aprendizaje en los que se requiere fortalecer el razonamiento a partir de la visualización.

Para concluir, es de suma importancia que un individuo tenga la capacidad de visualizar correctamente situaciones cotidianas (por supuesto tridimensionales), pues son estos escenarios a los que el individuo se enfrenta diariamente, por eso Zimmermann (1991), citado en Di Domenicantonio, Costa & Vacchino (2011, p.7) menciona que la visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento; visualizar un problema significa entender el problema en términos de un diagrama o de una imagen. La visualización es un proceso para formar imágenes mentales, con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad en el proceso de solución de un problema.

Para el caso del problema pretexto para la discusión, la intersección de tres cilindros, se tiene que su solución desde lo meramente analítico es de una alta complejidad y de allí que se deba hacer uso de representaciones gráficas bidimensionales y tridimensionales ya sea en papel y lápiz o con el uso de software para poder aproximarse a su solución. En los apartados correspondientes a los marcos de referencia, que conforman el marco teórico, e irá explicitando los aportes de los autores al desarrollo del presente trabajo.

1. Objetivos

Para el desarrollo del presente trabajo de grado se plantearon los siguientes objetivos:

Objetivo General

Analizar el proceso de visualización y su relación con la conceptualización de situaciones de intersección de curvas y superficies en un curso de Cálculo en Varias Variables dentro de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas.

Objetivos Específicos

- Estudiar la teoría correspondiente a los problemas de visualización y sistemas de representación de superficies cuádricas y cilíndricas.
- Analizar algunos casos particulares acerca de la intersección de superficies cuádricas y cilíndricas.
- Presentar un proceso de resolución al problema de la intersección de tres cilindros circulares, que poseen el mismo radio, que se cortan en ángulos rectos.
- Aportar algunos elementos que apoyen el desarrollo del seminario de Cálculo en Varias Variables del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

2. Antecedentes

A continuación, se presenta una revisión breve de algunas investigaciones y trabajos que se han realizado con relación a la importancia de la visualización en la resolución de problemas que involucran objetos tridimensionales y que es el interés central del presente trabajo de grado. Se pretende abordar paralelamente tanto la resolución del problema contextual pretexto (intersección de cilindros) como el objeto central de discusión: la importancia que tienen los procesos de visualización para conceptualizar los objetos y aproximarse a la resolución de problemas.

Un primer trabajo corresponde al propuesto por Pilatti, Gabriel & Bavaresco (2016) quienes realizaron la investigación titulada *"**Pesquisa de Desenvolvimento: o problema do sólido gerado pela intersecção de cilindros**"* la cual involucra a estudiantes de un curso de la Licenciatura en Matemáticas del Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología de Rio Grande do Sul, Campus Bento Gonçalves. Dicha investigación tiene como finalidad trabajar sobre el problema de obtener el volumen de sólidos generados por la intersección ortogonal de cilindros de un mismo radio y para ello, establecen un paralelo entre los métodos clásicos de resolución y el uso de recursos tecnológicos.

La propuesta se centra en determinar el volumen de los sólidos generados por la intersección de dos y tres cilindros del mismo radio a través de diversos métodos de resolución, por lo que se contempla la posibilidad de generar representaciones del sólido por medio de las partes resultantes de su descomposición haciendo uso de software gráfico, modelos tridimensionales y confección de sólidos haciendo uso de impresoras 3D.

Para el desarrollo de dicho problema se propone graficar la figura en el software Maple. Inicialmente se establecen las ecuaciones de los tres cilindros en coordenadas cilíndricas puesto que la superficie se construye con un comando que requiere establecer las ecuaciones paramétricas correspondientes a dichos objetos tridimensionales. Posteriormente, se realiza la materialización de la figura, y para ello se lleva a cabo la construcción del modelo tridimensional por medio del software Blender 2.75. Finalmente, se produce el objeto por medio de la impresora 3D Cliever CL1 - Black Edition. Es importante indicar que el software mencionado permite realizar operaciones booleanas tales como: unión, intersección y diferencia; lo cual posibilita construir el tricilindro correspondiente a la superficie de tres cilindros de radio r cuyos ejes se intersecan perpendicularmente entre sí, a partir de su descomposición en seis caras simétricas y un cubo como se puede observar en la *figura 1.*

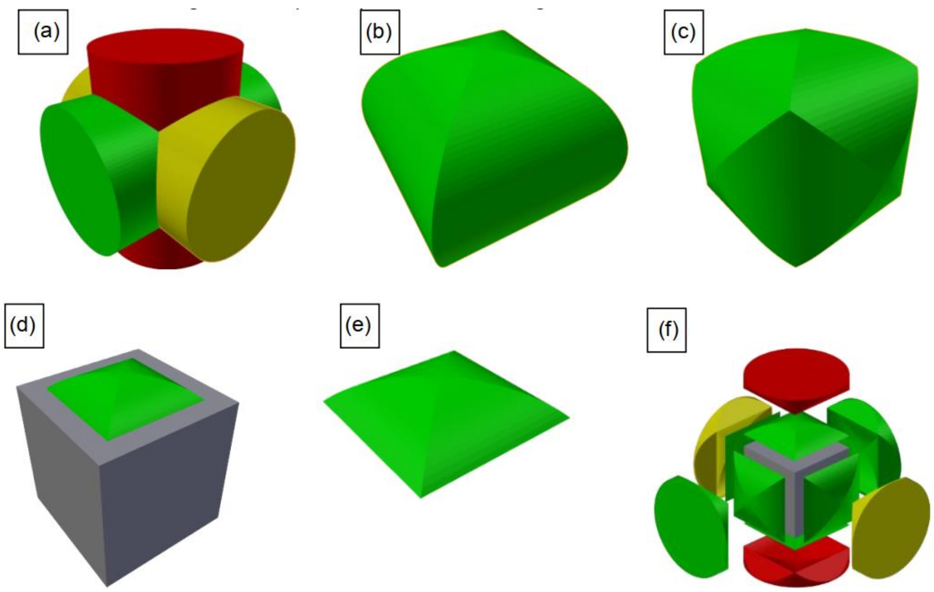


Figura 1. Proceso de modelado tridimensional de sólidos. Pilatti, Gabriel & Bavaresco (2016)

Teniendo en cuenta la descomposición descrita anteriormente, se presenta el procedimiento analítico que se llevó a cabo en la investigación para hallar el volumen del tricilindro a partir de su descomposición en cuerpos congruentes, considerada la simetría del sólido generado. Con base en la figura 2, se observa la existencia de veinticuatro piezas iguales, las cuales pueden ser acopladas a cada una de las caras de un cubo.

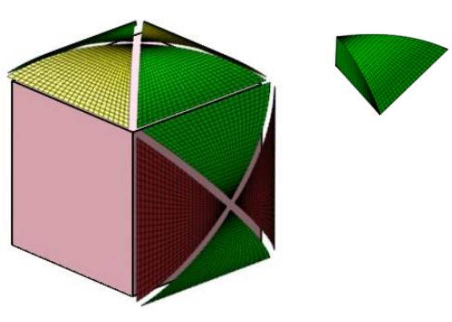


Figura 2. Descomposición parcial del tricilindro. Pilatti, Gabriel & Bavaresco (2016)

Como cada uno de los cilindros que originan el tricilindro tiene radio r, la arista del cubo mide $\sqrt{2}r$, cómo se muestra en la *Figura 3*, con vértices asociados a los puntos con coordenadas $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}r\ ,\pm\frac{\sqrt{2}}{2}r)$, pues al analizar la vista del cilindro con eje z , en el plano $x-y$ y aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene que $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}r$, $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}r$ y análogamente con el cilindro cuyo eje está en y se tiene que $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}r$.

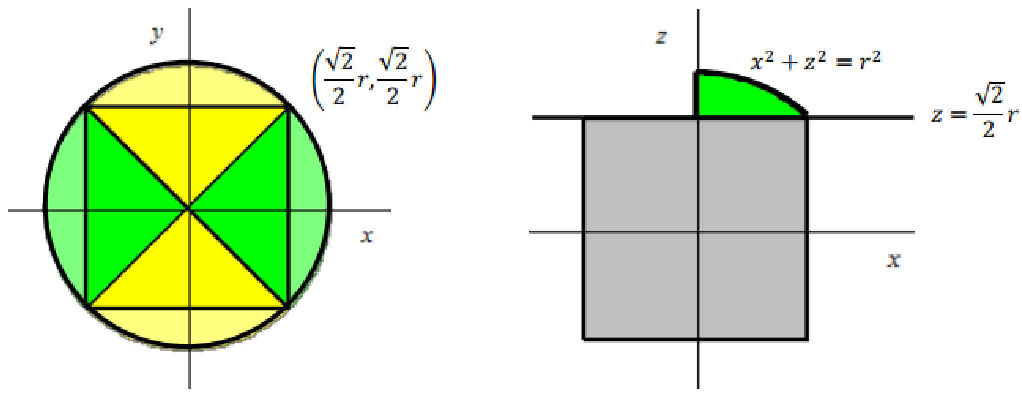


Figura 3. Descomposición del tricilindro desde diferentes vistas. Pilatti, Gabriel & Bavaresco (2016)

Por lo tanto, y utilizando integrales triples, cada una de esas rebanadas tiene un volumen dado por

$$v_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}r}\int_{-x}^{x}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}r}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1\,dz\,dy\,dx = \left(\frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}\right)r^3$$

Multiplicando por 24, y sumando al volumen del cubo $v_{cubo} = (\sqrt{2}r)^3$el volumen total es igual a:

$$v_T = 24v_1 + v_{cubo} = 24\left(\frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}\right)r^3 + (\sqrt{2}r)^3 = 8\big(2-\sqrt{2}\big)\,r^3$$

De este modo, el resultado obtenido anteriormente, representa el valor buscado en la situación contextual propuesta.

Finalmente, la investigación arrojó las siguientes conclusiones: la determinación del volumen de sólidos resultantes de la intersección de dos y tres cilindros ortogonales de un mismo radio, inicialmente, fue considerado un problema complejo, pero que, desde el momento en que se familiariza con las características del sólido observadas por medio de bosquejos, a través del software Maple, se hizo más accesible. Se hace hincapié en la importancia de utilizar los recursos tecnológicos disponibles actualmente como herramientas en la resolución de problemas, pues en ese caso se mostraron elementos esenciales en la visualización y la comprensión del problema.

Por otra parte, para el delineamiento del plan de resolución, se utilizan las técnicas que Polya (1995) citado en Pilatti, Gabriel & Bavaresco, (2016, pp.165) sugiere que "descomponiendo el problema en subproblemas (de las partes en su totalidad) se pueden considerar casos más fáciles de resolver". Las contribuciones de la investigación no se restringen a la comprensión de un problema aislado, sino que se refieren a los conocimientos adquiridos - matemáticos y de resolución de problemas – y que pueden ser útiles en situaciones y estudios futuros de las etapas de ese proceso.

Otro trabajo corresponde a Puga, Castillo, Gómez, Santoyo & Santoyo (2016) quienes realizaron la investigación titulada **"*Un acercamiento al espacio tridimensional a través de la manipulación de objetos físicos y visuales*"** la cual involucra estudiantes de tercer semestre de la carrera de ingeniería electrónica del Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán. La finalidad de dicha investigación fue la evaluación, reestructuración de instrumentos y actividades que promueven la construcción del concepto de vector y espacio tridimensional.

La investigación se enmarca en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas), la cual pretende describir y caracterizar las construcciones que tiene lugar en la mente de un estudiante. El desarrollo de la construcción del concepto comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos para formar *acciones*, las acciones se interiorizan para formar *procesos*, los procesos se encapsulan para formar *objetos*, los objetos se pueden volver a desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas.

La estrategia didáctica consistió en presentar una serie de materiales manipulativos diseñados para los estudiantes que tendrán un acercamiento por primera vez con el concepto de espacio tridimensional. El trabajo se desarrolló en dos etapas: En *la primera etapa* se llevaron a cabo una serie de actividades con material tangible para representar el espacio tridimensional; la finalidad de presentarla era que los estudiantes identificaran los ejes, los planos, los octantes del espacio tridimensional y posteriormente, localizaran puntos en $\mathbb{R}^3$.

A continuación (ver *Figura 4*), se presenta el prototipo construido, en el cual los segmentos azules representan los ejes coordenados y la viga de color amarilla un vector.

Figura 4. Espacio tridimensional con material de Zometool. Puga, Castillo, Gómez, Santoyo & Santoyo (2016)

Luego, se presenta una actividad cuyo propósito era que los estudiantes dedujeran una fórmula para calcular el volumen de un paralelepípedo; el cual está construido utilizando los ejes del espacio tridimensional presentado anteriormente. Se informa a los estudiantes que pueden recurrir a conceptos previos (producto cartesiano, vector unitario, entre otros) que se habían desarrollado hasta ese momento en el desarrollo del curso.

Se permitió que los estudiantes hicieran uso de la estructura para tomar medidas y encontrar las componentes de los vectores que forman la base del paralelepípedo y así usar algunas relaciones trigonométricas para encontrar distancias y los ángulos directores de los vectores. De esta manera, los estudiantes fueron capaces de inferir geométricamente la proyección de un vector sobre otro y la magnitud de este como la longitud de una de las aristas del paralelepípedo y de este modo calcular el área de la base (ver *Figura 5*).

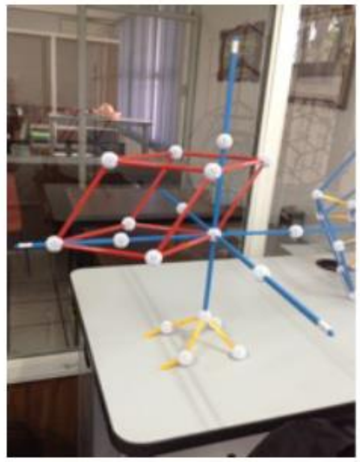


Figura 5. Paralelepípedo costruido con material de Zometool. Puga, Castillo, Gómez, Santoyo & Santoyo (2016)

Los estudiantes usaron además el producto vectorial para encontrar la altura del paralelepípedo y la proyección de vectores. Otro aspecto interesante emergió cuando los estudiantes reprodujeron la construcción del paralelepípedo en su libreta y realizaron un bosquejo con todos los trazos a los que recurrieron para deducir la fórmula del volumen. Se observó que los estudiantes trazaron sin mayor dificultad y con una mayor comprensión sobre los elementos matemáticos que definían el objeto de interés.

La segunda etapa consistía en analizar una serie de construcciones desarrolladas en el ambiente de geometría dinámica Geogebra ®, el cual fue elegido porque permite que el estudiante pueda manipular objetos matemáticos a través de su representación geométrica. El conjunto de construcciones se desarrolló por medio de instrucciones en las cuales se tenían algunos parámetros (tales como la norma de los vectores, los ángulos entre ellos) con el fin de que los estudiantes evidenciaran los efectos que tienen sobre el objeto físico y el objeto de estudio (en este caso el volumen del paralelepípedo) el asignar parámetros; se procuraba ir cambiando uno de ellos a la vez para analizar la dependencia del parámetro específico en el volumen calculado.

Finalmente, como actividad de cierre, los estudiantes debían realizar una construcción en geometría dinámica a manera de applet en la que pudieran mostrar la relación entre la magnitud y dirección de un vector y sus componentes como se muestra en la *Figura 6*. Un aspecto relevante dentro de las utilidades del software fue la posibilidad de realizar un giro de la construcción para tener diferentes perspectivas de la misma y verla desde cada uno de los ejes, lo que facilitó la comprensión de lo que se denomina la proyección de un vector sobre otro o de un objeto sobre otro de manera general.

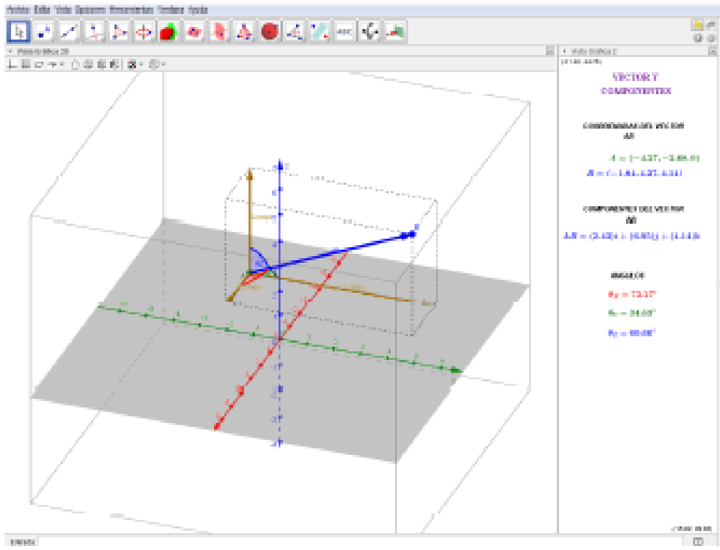


Figura 6. Dinamización de los elementos de un vector con Geogebra ®.
Puga, Castillo, Gómez, Santoyo & Santoyo (2016)

Adicionalmente, se evidenció que la transición del objeto manipulable físicamente al objeto visual elaborado en Geogebra® facilitó la interpretación de la tercera dimensión que mostró la pantalla de la computadora.

La investigación arrojó las siguientes conclusiones: Teniendo en cuenta que la propuesta descrita forma parte de una investigación que aún se encuentra en desarrollo, se puede evidenciar que la manipulación de objetos físicos permite establecer una conexión entre registros de representaciones geométricos y registros algebraicos de los conceptos abordados. A su vez, el estudiante logra representar mediante bosquejos una figura tridimensional y extraer y abstraer los datos necesarios para formular expresiones que le permiten calcular lo que se le pide. Es importante mencionar que la manipulación de objetos físicos y visuales promueve la resignificación de las representaciones algebraicas visualizadas en un modelo tangible.

Por otra parte, Montesino & Andrade (2013) realizaron la investigación titulada **“La visualización espacial como herramienta en el entendimiento de lo tridimensional”** tenían como objetivo identificar las dificultades que presentaban los estudiantes al usar la visualización como una herramienta para resolver problemas cuando no se recurre al uso de fórmulas algebraicas o patrones de solución. La investigación se llevó a cabo con estudiantes de los grados escolares tercero, cuarto, séptimo y octavo. La propuesta se centra en investigar, a partir de los planes y programas propuestos por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), si los textos escolares proporcionados a los docentes y la relación entre los diversos niveles escolares abordan de forma correcta los objetivos, aprendizajes esperados, actividades y contenidos mínimos para proporcionar a los estudiantes los elementos suficientes en el desarrollo de la visualización espacial. Para la implementación se propusieron dos actividades; cada una de ellas era un problema que para su resolución requería tener una visualización espacial de la situación y se buscaba desequilibrar situaciones teniendo en cuenta que los estudiantes tienden a trabajar y pensar en dos dimensiones, es decir, en el plano, y no les es inmediato pensar en tres dimensiones.

La primera actividad presenta el siguiente problema, conocido como el problema de Polya: "Un hombre se encuentra con un oso, para escapar de él corre 10 kilómetros hacia el sur, luego gira en 90° hacia el este y corre 10 kilómetros en esa dirección, luego gira 90° hacia el norte y corre otros 10 kilómetros y finalmente se encuentra con el mismo oso. ¿De qué color es el oso?". Los estudiantes realizan diversas representaciones en las cuales demuestran tener conocimientos asociados a ángulos y figuras geométricas como se muestra en la *Figura 7* y *Figura 8*.

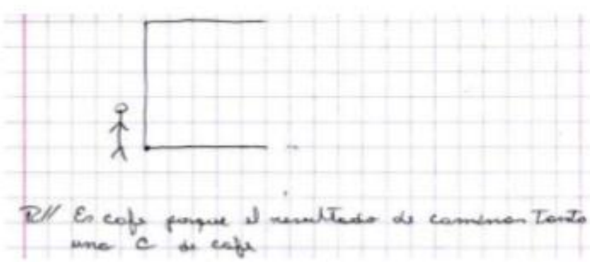


Figura 7. Recorrido del hombre según los ángulos. Montesino & Andrade (2013)

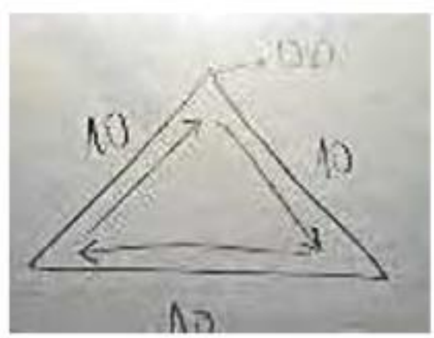


Figura 8. Recorrido del hombre según los tramos recorridos. Montesino & Andrade (2013)

No obstante, es evidente que solo recurren a representar la situación en el plano y aunque observan que no es clara la solución les cuesta dar el salto a lo tridimensional. Muy pocos estudiantes logran llegar a la solución correcta. Solo lo lograron aquellos que propusieron una solución usando una figura geométrica tridimensional como se muestra en la *Figura 9*:

Figura 9. Superficie esférica. Montesino & Andrade (2013)

En general, los estudiantes no logran desligarse de las representaciones bidimensionales y adicionalmente, se evidencia que algunos conceptos generan obstáculos al intentar hacer el paso de lo bidimensional a lo tridimensional. Un ejemplo de ello se identifica al intentar hacer la suma de los ángulos internos de un triángulo en la figura que se presentó anteriormente (ver *Figura 9*).

Por otro lado, la segunda actividad presenta un problema que requiere del uso de material tangible y nuevamente busca que el estudiante piense la situación en un contexto tridimensional. La pregunta propuesta es: “Construir cuatro triángulos congruentes con seis segmentos del mismo largo (la medida de los palitos)”. Nuevamente los estudiantes buscan encontrar una solución a la situación mencionada, haciendo uso de las figuras bidimensionales. En ella, y de manera muy particular, solo uno de los estudiantes logró construir la pirámide de base triangular que era la solución al problema. La principal dificultad nuevamente radica en dar el paso a la representación tridimensional de la situación y desprenderse de las representaciones en el plano.

Los estudios presentados ponen de manifiesto dos aspectos relevantes en el campo de la Educación Matemática; por una parte, la necesidad de familiarizar a los estudiantes con situaciones y representaciones en 3D desde los primeros años de escolaridad y por otra, la importancia que tiene el uso de diferentes entornos que posibiliten la interacción con objetos tridimensionales y su representación, así ellos sean una idealización de los mismos, que permitan resolver y analizar situaciones problema concretas.

3. Marco Teórico

A continuación, se presenta el marco teórico con el cual se estructuró el diseño de la actividad propuesta y su implementación; si bien éste constituye en un todo articulado, para su presentación se divide en tres marcos, a saber: el didáctico, el matemático y el tecnológico.

3.1. Marco Didáctico

Según Duarte, Gómez y Toro (2009), las estructuras geométricas están presentes en todos los objetos de la naturaleza, siendo esta una de las características que ayudan a reconocerlos y a distinguirlos. Ellas permiten realizar clasificaciones de los objetos que parten de la observación y que están asociadas inicialmente con su forma, color y tamaño. Sin embargo, una vez que las estructuras geométricas, se van haciendo más robustas en las estructuras de pensamiento, y partiendo de la capacidad de observación y abstracción, las matemáticas van ayudando a sintetizar y a estructurar de manera formal los fenómenos de la naturaleza.

En la mayoría de los cursos de matemáticas se enfatizan los aspectos numéricos, algebraicos, simbólicos y lógicos; pero, en general, poco se motiva a los estudiantes a razonar a partir de los aspectos gráficos que surgen de los conceptos mismos. Según Duarte, Gómez y Toro (2009), en diversas investigaciones se pudo comprobar que estudiantes que habían aprobado cursos de cálculo en los que se enfatizó la manipulación de fórmulas, no reconocieron los conceptos estudiados cuando se los presentaron a partir de gráficas y de problemas prácticos relacionados con su entorno (Vinner 1991, citado por Duarte, Gómez & Toro, 2009, p. 6).

Es decir, que las experiencias de aprendizaje en las que intervengan representaciones visuales asociadas a los conceptos matemáticos son necesarias para integrarlos con aplicaciones relacionadas con su medio ambiente o entorno y de allí que se deban integrar diversos registros de representación que trasciendan más allá de la algebraica (Duarte, Gómez & Toro, 2009). En ningún momento se desvirtúa la importancia de la representación algebraica, por el contrario, se quiere destacar la necesidad de acompañar a esta de otras que la fortalezcan y coadyuven al proceso de conceptualización y que resalten la importancia de, en algún momento, dar el paso al manejo de la formulación algebraica para dar potencia argumentativa y formal.

Este aspecto pone de relevancia la existencia de diversos sistemas de representación de los objetos matemáticos y la importancia que estos tienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Los sistemas de representación son medios por los cuales se puede analizar un problema propuesto en el ámbito de las matemáticas ya sea de tipo intramatemático o no. Particularmente, en el presente trabajo se estudiará, como un pretexto, problemas relacionados con los sólidos formados por la intersección de superficies cuádricas, específicamente aquellos solidos formados por la intersección de cilindros. Por lo tanto, resulta indispensable, y en aras de ser consistente con lo manifestado al final del párrafo anterior, integrar al presente trabajo, los aspectos que se han considerado desde la didáctica en relación con **la visualización de figuras tridimensionales** y algunos métodos analíticos de resolución. Es decir que los problemas presentados con la intersección de diferentes superficies tridimensionales son un contexto para discutir un aspecto de fondo: la visualización y su uso en la solución de problemas.

Teniendo en cuenta que muchos de los problemas tratados en el cálculo vectorial y en varias variables requiere de diversas facultades y habilidades relacionadas con la visualización, se tomará la definición propuesta por Arcavi (2003) citado en Godino, Gonzato, Cajaraville & Fernández (2012, p.111), donde señala que "la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas"

Godino, Gonzato, Cajaraville & Fernández (2012) mencionan objetos de naturaleza diferente, como ingredientes que constituyen la geometría escolar y el razonamiento espacial; por una parte, están los objetos espaciales que se deben entender como los cuerpos físicos que conforman el entorno o de los cuales el individuo se puede hacer una imagen física o mental ya sea reconstruida o evocada, a través de sus posiciones en el espacio físico. De otra parte, se mencionan las representaciones mentales de tales objetos, relaciones y transformaciones (entidades psicológicas); y finalmente, los sistemas axiomáticos matemáticos (entidades institucionales o culturales) que se han construido para representar los objetos físicos (y los mentales).

De esta manera, la visualización, se puede entender como un doble proceso; uno que va de lo material a lo inmaterial (mental o ideal), que es llamada visualización ascendente; y el inverso que va de lo inmaterial a lo material o visualización descendente. “La visualización ofrece un método de ver lo invisible” (Arcavi, 2003, p. 216); este “*ver*” puede ser puramente mental y entonces involucra objetos no-ostensivos, o puede estar relacionado con una representación física y entonces, pasa a ser un objeto perceptible. De hecho, algunos teóricos afirman que bien podría ser una mezcla de las dos, donde a través de una interfase se pongan en evidencia manipulables mentales.

A continuación (ver *Figura 10*), se presenta en un diagrama las relaciones mencionadas anteriormente:

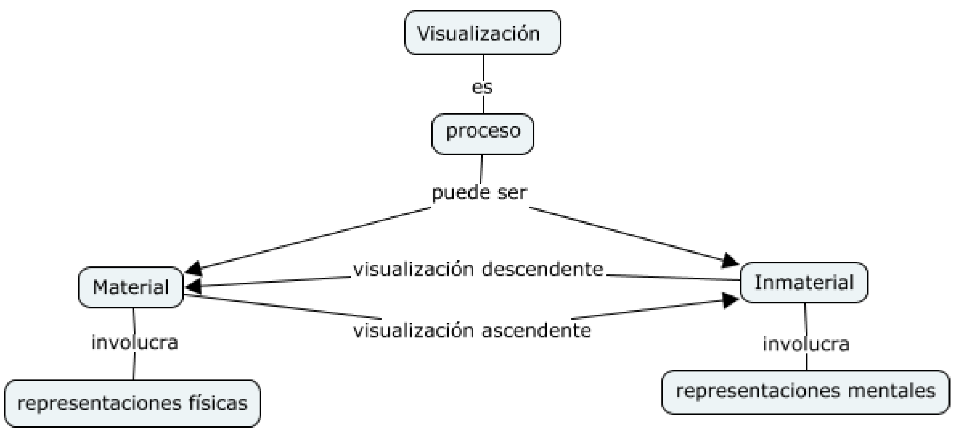


Figura 10 .Diagrama sobre concepto de visualización. Elaboración propia

Con lo anterior, resulta importante considerar los niveles de visualización propuestos por Howard Gardner en su teoría de las inteligencias múltiples y que son sistematizadas por Rojas, Castrillón & Córdoba (2015). A continuación. se presentan dichos niveles y se contextualizan al problema pretexto que se propone en el presente trabajo; es así como una vez descrito el nivel, se da un ejemplo de lo que constituiría un hallazgo del mismo dentro de las propuestas de solución expuestas por los estudiantes.

- *Nivel de familiarización:* Percibir las figuras sin detectar relaciones entre sus formas o sus partes, donde los objetos son clases de figuras reconocidas visualmente. En particular para el ejercicio de la intersección de los tres cilindros, el estudiante reconoce que la figura está compuesta por tres figuras tridimensionales conocidas como cilindros circulares rectos (que eventualmente son los únicos cilindros conocidos por los estudiantes y que podría servir de pretexto para analizar la definición analítica de cilindro y construir con software otros cilindros no prototípicos), pero no reconoce ninguna particularidad de estas.

- *Nivel de conocimiento de los componentes de las figuras y análisis de sus propiedades:* Los componentes y las propiedades básicas de las figuras son comprendidas a través de observaciones efectuadas durante trabajos prácticos como dibujos, mediciones y construcción de modelos, entre otras. Para el ejercicio de la intersección de los tres cilindros de radio r, el estudiante reconoce ciertas características particulares de estos como por ejemplo que cada uno de estos tiene un radio y un diámetro determinado y busca algunas relaciones entre dichas características, como por ejemplo que los radios de dichos cilindros son iguales o evoca que es el eje de un cilindro o la relación métrica entre el diámetro y el radio, o la diferencia entre radio como segmento y como medida.

- *Nivel de ordenamiento o de clasificación:* Clasificar figuras jerárquicamente mediante la ordenación de sus propiedades y argumentan informalmente sobre dichas clasificaciones. Siguiendo el mismo ejemplo de los cilindros, el estudiante además de reconocer ciertas propiedades y relaciones como la igualdad de sus radios y la intersección de estas superficies, imagina, esboza o dibuja la intersección e intenta justificar su forma o características con argumentos informales.

- *Nivel de razonamiento deductivo:* Se comprende el sentido de los axiomas, las definiciones y los teoremas, pero no el significado de las demostraciones. Por ejemplo, el estudiante entiende que utilizando integrales puede hallar el volumen de la intersección de los tres cilindros, sin embargo, no comprende el planteamiento específico con el cual se puede hallar el volumen de dicha intersección. Este nivel podría tener la formulación general de cómo hacer la determinación del volumen de la intersección de los tres cilindros, pero no poder hacer la determinación formal de la misma o eventualmente poder sólo llegar hasta un cierto punto de la verificación (o determinación) pero sin lograr comprender algunos pasos.

- *Nivel de rigor*: El razonamiento se hace rigurosamente deductivo, se requiere del análisis algebraico y analítico. En particular para el ejercicio de la intersección de los tres cilindros, el estudiante analiza, plantea y halla el volumen de la figura resultante haciendo uso del cálculo y podría emplear métodos analíticos o sintéticos (incluso una verificación experimental) o de los elementos teóricos del cálculo en una variable o del multivariado.

Como se mencionaba anteriormente existen diversos sistemas de representación por medio de los cuales se puede analizar un problema, Tall (1997) citado por citado por Duarte et al. (2009, p. 12) profundiza y desarrolla los tres tipos de sistemas de representación propuestos por Bruner (1950) citado por Camargo & Hederich (2010, p.331) y los adapta para el cálculo infinitesimal. Al igual que como se hizo anteriormente, se describirán las diferentes representaciones y sus respectivas contextualizaciones al problema pretexto presentado:

- ***Representaciones enactivas***. Son acciones humanas que dan la sensación de cambio, velocidad o aceleración. Por ejemplo, haciendo referencia al problema de los tres cilindros, esta representación se puede reproducir haciendo uso de softwares dinámicos; en especial, cuando se usa la herramienta de rotación.

- ***Representaciones numéricas y simbólicas***. Son representaciones que pueden ser manipuladas manualmente o con computadora (incluyendo la posibilidad de ser programadas por los estudiantes). Por ejemplo, haciendo referencia al problema de la intersección de los tres cilindros, esta representación se evidencia es aspectos relacionados con las ecuaciones de los cilindros y la manipulación de estas para plantear la integral que permite hallar el volumen, planteamiento de los límites de integración correspondientes a dicha integral, entre otros.

- ***Representaciones visuales***. Son las que pueden ser producidas manualmente de manera aproximada o, más precisamente, con ordenadores dinámicos. Por ejemplo, haciendo referencia al problema de la intersección de los tres cilindros, el estudiante puede realizar un bosquejo a papel y lápiz generando diferentes vistas de dicha figura tridimensional o graficarla por medio de un software matemático que le permita manipular la figura.

- ***Representaciones formales***. Son representaciones que dependen de definiciones y pruebas. Por ejemplo, como se mencionó en el nivel de rigor, para el caso de la intersección de los tres cilindros, dicha representación corresponde al planteamiento y solución de la integral que le permitirá al estudiante hallar el volumen del sólido.

Cada uno de los tipos de representaciones propuestas por Tall (1997) se pueden generar, manualmente o en ambientes virtuales, para obtener diversas formas de visualización, de hecho, los entornos virtuales han puesto en escena diferentes maneras de comprender y manipular aquello que se denomina *"la realidad"*. Una muestra de ello es la tendencia a pensar en entornos de "realidad aumentada" (R.A por sus siglas en español o A.R por sus siglas en inglés).

Gracias a la posibilidad que ofrece el software de manejar dinámicamente los múltiples sistemas de representación de los objetos matemáticos dentro de esquemas interactivos, se abren espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel cuyas representaciones son rígidas o que requerirían un gran número de ellas para determinar ciertas propiedades y bajo ciertas circunstancias requerir un alto grado de precisión en el trazado el cual no necesariamente se da) en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración.

La utilización de una metodología de trabajo adecuada y de estrategias de visualización que se obtiene con *software* comercial o diseñado para situaciones concretas, ayuda a los estudiantes a integrar los conceptos del cálculo y comprenderlos de manera que los puedan relacionar unos con otros y con situaciones reales. En los ambientes virtuales se pueden diseñar experiencias de aprendizaje que ayuden a comprender un concepto desde diferentes puntos de vista y lograr integrar diferentes registros de representación.

Las investigaciones realizadas en este campo, tales como: Sepúlveda, et al. (2013), Puga, K., et al. (2016), Montecino & Andrade (2013), entre otras, dan cuenta de: las dificultades que los estudiantes experimentan al enfrentarse a las definiciones formales, las resistencias a visualizar, las dificultades de pasar de una forma de representación a otra, la resistencia que encuentra el profesor para llevar al aula propuestas novedosas para exponer los conceptos matemáticos y los obstáculos que los tiempos de ejecución curricular, presentan para la generación de verdaderos espacios de conjeturación y exploración en los espacios propios de un curso y lo que implica dejar este tipo de labores como acciones extra clase donde posiblemente las intencionalidades de los procesos mencionados se vean tergiversados ya que muchas veces la obtención de un resultado académico entendida como una valoración numérica prima sobre los procesos deseables de la comprensión.

Ahora bien, de acuerdo con Tall & Vinner (1981, pp. 151-169), para la enseñanza y el aprendizaje de un concepto, éste se puede analizar como dos componentes que no necesariamente forman un todo articulado, *concept image* y *concept definition*. A continuación, se hace una breve descripción de ellos, y como se ha venido haciendo se presentará su respectiva contextualización del problema pretexto.:

- Concepto imagen (*Concept image*). Son todas aquellas ideas evocadas cuando se hace referencia a un concepto matemático en particular. Estas ideas han sido formadas a lo largo de la vida de un sujeto, e influyen positiva o negativamente en la adquisición y manejo del verdadero concepto matemático. Las palabras involucradas para referirse a un concepto matemático tienen diferentes significados en distintos contextos y paradójicamente podrían tener poco que ver con el concepto, por ejemplo, referirse a un redondel como una circunferencia o considerar que los únicos cilindros que existen son los circulares rectos y asociarlos con la idea de un vaso de jugo.

- Concepto definición (*Concept definition*). Es la definición formal descrita en los textos de matemáticas, en la cual las palabras tienen significados específicos referidos a ese contexto particular. Con ellos se espera que los estudiantes trabajen, pero eso no deja de ser sólo un deseo pues la distancia entre el concepto imagen y el concepto definición puede ser sencillamente abismal. Por ejemplo, la definición de cilindro desde una curva generatriz y una recta directriz.

Se dice que un estudiante, y en general una persona, no ha comprendido un concepto matemático hasta que no haya integrado el concepto imagen y el concepto definición; para ello, deben buscarse experiencias de aprendizaje pertinentes que le permita lograr las relaciones adecuadas para que incorpore a su estructura cognitiva el concepto matemático estudiado. Para Duval (2002) la visualización plantea tres problemas desde el punto de vista del aprendizaje: (1) discriminación de las características visuales relevantes; (2) el procesamiento figural, cambios entre registros visuales (descomponer, recomponer una figura; reconfiguración); cambio de perspectiva; (3) coordinación con el registro discursivo.

Un análisis de los elementos teóricos hasta aquí presentados muestra que es relevante destacar algunas tareas que sirvan como pauta inicial para los estudiantes, ya sea que estén empezando a desarrollar su capacidad de visualización o que ya tengan algunas habilidades en este campo y las utilicen como un elemento fundamental cuando se analiza un problema. El propósito será que lleguen a tener éxito al momento de implementar estrategias que posibiliten no solo la resolución de situaciones-problema específicas sino mejorar la comprensión. Así, según Gonzato, Díaz y Neto (2011), a fin de identificar los contenidos principales relacionados con la visualización de objetos tridimensionales, se analizan las tareas incluidas en las investigaciones sobre el tema en el campo de la educación matemática y de la psicología.

Los contenidos principales que surgen del análisis realizado por Gonzato et. Al (2011) son destacan cuatro grandes categorías principales de tareas (nombradas según la acción principal requerida para resolverlas) presentes en las investigaciones por ellos realizadas, a saber:

- Coordinar e integrar vistas ortogonales de objetos tridimensionales (permite construir coherentemente un objeto relacionado por lo menos dos vistas)
- Rotar un objeto tridimensional en el espacio (equivalente a cambiar mentalmente de perspectiva)
- Plegar y desplegar desarrollos planos de las figuras tridimensionales
- Componer y descomponer en partes las figuras tridimensionales

Teniendo en cuenta los aspectos mencionados anteriormente, evidencian que la visualización requiere la integración de diversos sistemas de representación y la capacidad de integrarlos; puesto que así se vislumbra con mayor facilidad la solución a situaciones relacionadas con figuras tridimensionales.

Autores como Gonzato (2011) y Duarte et. al (2009) destacan que el uso de software matemáticos provee herramientas que permiten manipular las figuras tridimensionales y observar características que resultan difíciles de ver cuando el objeto es estático. Así, se establece la importancia de tenerlos en cuenta para el desarrollo y posterior solución del problema pretexto planteado sobre el volumen encerrado por la intersección de los tres cilindros; ya que se requiere evaluar desde diferentes perspectivas la situación; y es en ese contexto, donde las tareas cognitivas asociadas a la visualización cobran no sólo sentido sino importancia.

3.2. Marco Matemático

Como se mencionó en la introducción, el problema de intersección de tres cilindros de radio r y la determinación de su volumen es sólo un pretexto para analizar el papel de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas y en particular en la resolución de problemas asociados con la intersección de curvas y superficies. El problema es tomado de una situación planteada en diversos textos de Cálculo en Varias Variables; particularmente Stewart (2012), lo propone como un ***Proyecto de Laboratorio*** (pág. 1032). La situación pretexto de entrada podría haber sido otra como la parametrización de curvas, la representación vectorial de curvas, la intersección de superficies, el comportamiento de las curvas de nivel o la representación y análisis de optimización de funciones en varias variables (particularmente de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$)…

El sólido común a dos o tres cilindros circulares rectos de radios iguales que se intersecan en ángulos rectos se llama el sólido de Steinmetz en honor al matemático y diseñador eléctrico austro-alemán Charles Proteus Steinmetz (1865-1923). Dos cilindros que se intersecan en ángulos rectos determinan un volumen denominado bicilindro (Figura 11) y tres cilindros que se intersecan determinan un tricilindro. La mitad de un bicilindro se llama bóveda y es utilizada en diseños arquitectónicos principalmente de índole religioso (Weisstein, s.f.).

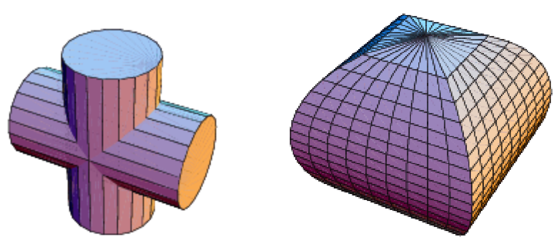


Figura 11 . Bicilindro. Weisstein (s.f.)

Para efectos de ir abordando la solución del problema planteado, a continuación, se presenta la solución analítica para hallar el volumen correspondiente al volumen encerrado al intersecar dos cilindros circulares rectos; lo que corresponde a calcular el volumen de lo que se denominaría una ***bibóveda***.

Arquímedes y el matemático chino Tsu Ch'ung-Chih conocían el volumen común a los dos cilindros, y no requerían grandes cálculos para determinarlo, pero las argumentaciones requerían una amplia comprensión de las proyecciones de los objetos. Sin embargo, el uso del cálculo proporciona una determinación un poco más simple aun cuando requiere en el fondo el mismo referente conceptual (Weisstein, s.f.).

Obsérvese en la *Figura 12* que el sólido siempre tiene una sección transversal cuadrada perpendicular a uno de los ejes.

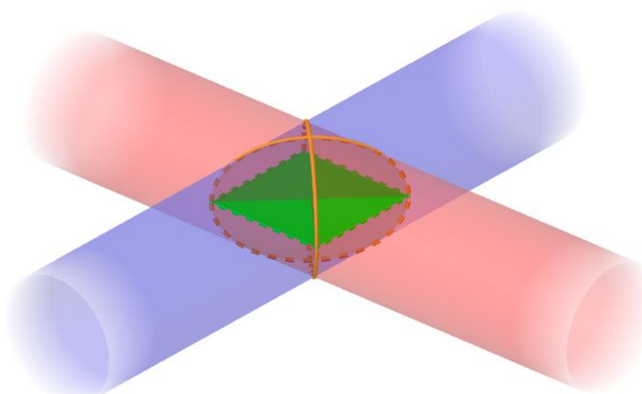


Figura 12 . Bicilindro con una sección transversal. Elaboración propia.

Utilizando el teorema de Pitágoras, se puede deducir que el cuadrado tiene lado $2\sqrt{r^2 - z^2}$ (*Figura 13*), por lo que para hallar el volumen del solido se utiliza la siguiente definición de volumen tomada y adaptada del texto de Stewart (2012, p.435):

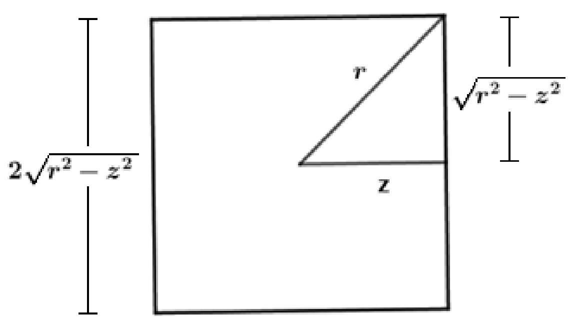


Figura 13 . Vista de la sección transversal. Elaboración propia.

Sea S un sólido que está entre $z = a$ y $z = b$. Si el área de la sección transversal de S en el plano P_z, a través de z y perpendicular al eje z, es $A(z)$, donde A es una función continua, entonces el ***volumen*** *de S está dado por:*

$$V = \int_a^b A(z)\, dz$$

Cuando aplica la fórmula del volumen $V = \int_a^b A(z)\, dz$ es importante recordar que es el área $A(z)$ de una sección transversal que se obtiene al cortar a través de z con un plano perpendicular al eje z.

Teniendo en cuenta lo anterior y lo deducido a partir de la *figura 13*, el volumen viene dado por:

$$V = \int_{-r}^{r} (2\sqrt{r^2 - z^2}\,)^2 \; dz$$

$$V = \int_{-r}^{r} 4(r^2 - z^2) \; dz$$

$$V = 4\int_{-r}^{r} (r^2 - z^2) \; dz$$

Utilizando propiedades de las integrales se tiene:

$$V = 4\left(\int_{-r}^{r} r^2 \, dz - \int_{-r}^{r} z^2 \, dz\right)$$

$$V = 4\left(r^2 \int_{-r}^{r} dz - \int_{-r}^{r} z^2 \, dz\right)$$

$$V = 4\left[r^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{-r}^{r}$$

Luego por el teorema fundamental del cálculo se obtiene:

$$V = 4\left\{[r^2(r - (-r))] - \left[\frac{r^3}{3} - \left(-\frac{r^3}{3}\right)\right]\right\}$$

$$V = 4\left([r^2(2r)] - \frac{2r^3}{3}\right)$$

$$V = 4\left(2r^3 - \frac{2r^3}{3}\right)$$

$$V = 8r^3 - \frac{8r^3}{3}$$

$$V = \frac{16}{3}\ r^3$$

Como el interés central es discutir sobre la visualización, se debe considerar que la forma en que se "ve" un problema depende no sólo del enunciado mismo, sino realmente, de las herramientas conceptuales con las que se cuenta. A continuación, se ofrece un procedimiento de resolución para determinar el volumen utilizando una integral triple, para ello se debe considera el siguiente apartado de Stewart (2012 p. 1022), el cual sustenta que:

> *"Si $f(x) \geq 0$, entonces la integral simple $\int_a^b f(x)dx$ representa el área bajo la curva $y = f(x)$ de a a b, y si $f(x,y) \geq 0$, entonces la integral doble $\iint_D f(x)dA$ representa el volumen bajo la superficie $z = f(x,y)$ y arriba de D. La interpretación correspondiente de una integral tiple $\iiint f(x,y,z)\ dV$, donde $f(x,y,z) \geq 0$ no es muy útil porque representa el "hipervolumen" de un objeto tetradimensional ya que, si bien se puede evaluar, no se tiene un referente físico con el cual relacionar la situación y el resultado numérico obtenido. No obstante, la integral triple $\iiint f(x,y,z)\,dV$ se puede interpretar de varias maneras en diferentes situaciones físicas, lo que depende de las interpretaciones físicas de x, y, z y $f(x,y,z)$.*
>
> *En particular, cuando $f(x,y,z) = 1$ para todos los puntos en E. Entonces la integral triple representa el volumen de E:*
>
> $$V(E) = \iiint_E dV"$$

Nótese que en últimas se está considerando que si se puede ver que éste es el $f(x,y,z) = 1$ en la fórmula anterior se tendría que, dado que $f(x,y,z) = 1 > 0$:

$$\iiint_E 1dV = \iint_D \left[\int_{\mu_1(x,y)}^{\mu_2(x,y)} dz\right] dA = \iint_D [\mu_2(x,y) - \mu_1(x,y)]dA$$

que representa el volumen localizado entre las superficies $z = \mu_1(x, y)$ y $z = \mu_2(x, y)$.

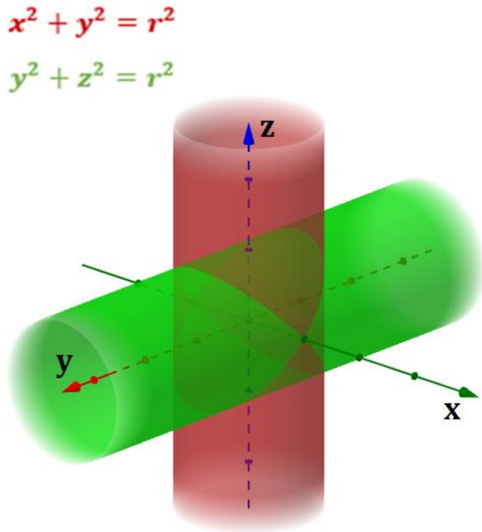


Figura 14 . Intersección de dos cilindros. Elaboración propia.

Apoyándose en Geogebra ® y en el análisis de la gráfica de la intersección de dos cilindros (ver *Figura 14*) es posible deducir que:

$$\begin{cases} -r \leq x \leq r \\ -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} \\ -\sqrt{r^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{r^2 - y^2} \end{cases} \qquad (1)$$

También se puede despejar las ecuaciones para encontrar los límites de integración de modo que de $x^2 + y^2 = r^2$ se tiene que $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ por lo que $-\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$ y de $z^2 + y^2 = r^2$ se tiene que $y = \pm\sqrt{r^2 - z^2}$ por lo que $-\sqrt{r^2 - z^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - z^2}$. Teniendo en cuenta lo planteado anteriormente se establece una integral triple donde las desigualdades planteadas (1) corresponden a los límites de integración:

$$V_2 = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} dz\, dy\, dx$$

Sin embargo, esta integral no es sencilla de resolver y que requiere de otro tratamiento. Al analizar el sistema de ecuaciones determinada por dos de los cilindros se tiene que:

$$
\begin{array}{c}
x^2 + y^2 = r^2 \\
\underline{-z^2 - y^2 = -r^2} \\
x^2 - z^2 = 0
\end{array}
$$

De donde se puede deducir que $z = \pm x$, como el sólido es simétrico entonces al remplazar este resultado en la integral se tiene:

$$V_2 = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-x}^{x} dz\, dy\, dx$$

ahora tomando la simetría de la región en el plano, se puede considerar que en lugar de integrar en el intervalo $[-r, r]$ se puede tomar 4 veces la integral en el primer cuadrante esto es entre $[0, r]$, así

$$V_2 = 4 \int_{0}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-x}^{x} dz\, dy\, dx$$

Al integrar respecto a z y aplicando el teorema fundamental del cálculo se obtiene:

$$V_2 = 4 \int_{0}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2x\, dydx$$

$$V_2 = 8 \int_{0}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} x\, dydx$$

Al integrar respecto a y y aplicando el teorema fundamental del cálculo se tiene que:

$$V_2 = 8 \int_{0}^{r} (x)(2\sqrt{r^2 - x^2})\, dx$$

$$V_2 = 8 \int_{0}^{r} (2x)(\sqrt{r^2 - x^2})\, dx$$

Realizando la integral por sustitución se tiene que si $u = r^2 - x^2$ entonces $du = -2x\, dx$, por tanto:

$$V_2 = -8 \int (\sqrt{u})\, du$$

$$V_2 = -8 \int u^{\frac{1}{2}}\, du$$

Al integrar respecto a u se tiene que:

$$V_2 = (-8)\left[\frac{2}{3}\ u^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$V_2 = \left(-\frac{16}{3}\right)\left[(u)\left(u^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

devolviendo la sustitución $u = r^2 - x^2$, y considerando los extremos de integración, se obtiene:

$$V_2 = \left(-\frac{16}{3}\right)\left[(r^2 - x^2)\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)\right]_0^r$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo y operando se tiene que:

$$V_2 = \left(-\frac{16}{3}\right)\left[(r^2 - r^2)\left(\sqrt{r^2 - r^2}\right) - (r^2 - 0^2)\left(\sqrt{r^2 - 0^2}\right)\right]$$

$$V_2 = \left(-\frac{16}{3}\right)\left[(0)(\sqrt{0}) - (r^2)\left(\sqrt{r^2}\right)\right]$$

$$V_2 = \left(-\frac{16}{3}\right)[-r^3]$$

$$V_2 = \frac{16}{3}r^3$$

De este modo se muestra que es posible solucionar el problema con una integral triple y aunque este método sea un poco más dispendioso, ayuda a la comprensión de las características del sólido y exige un nivel de visualización que generalmente requiere de la ayuda de algún software de geometría dinámica o una comprensión del concepto formal sobre la región E que se enuncia en el concepto formal o definición del concepto; en términos de Tall & Vinner (1981).

Siguiendo con la misma idea, para tres cilindros de igual radio que se intersecan en ángulos rectos el sólido resultante tiene 12 caras curvas. Si se dibujan planos tangentes donde las caras se encuentran, el resultado es un dodecaedro rómbico (*Figura 15*).

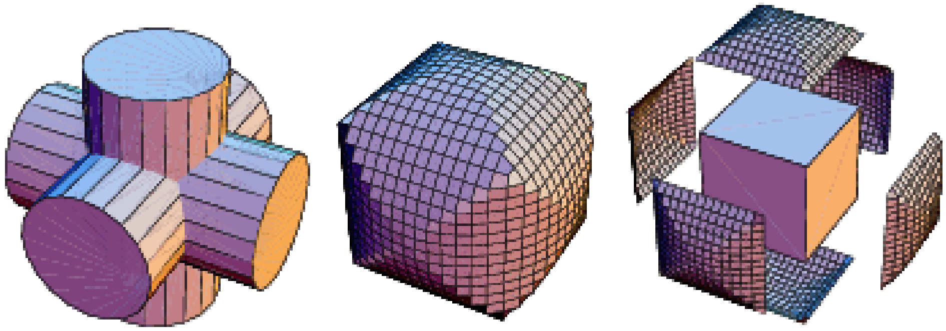


Figura 15. Tricilindro. Weisstein (s.f.)

Para hallar el volumen de este sólido se utiliza uno de los métodos que se utilizó para encontrar el volumen del sólido en el caso de la intersección de los dos cilindros, el cual, según Stewart, J (2012) menciona que si $f(x,y,z) = 1$ para todos los puntos en E, entonces la integral triple $\iiint_E dV$ representa el volumen de E, así:

$$V(E) = \iiint_E dV$$

Por practicidad, y debido a que el sólido cuenta con varios planos de simetría se puede calcular el volumen en un octante y posteriormente multiplicarlo por ocho. El sólido correspondiente sería una de las "esquinas" del sólido como se muestra en la *figura 16*, la expresión algebraica de esta porción del sólido, en el octante positivo, es:

$$U = \left((x,y,z) \in \mathcal{R}_+^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq \min\left\{\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - y^2}\right\}\right)$$

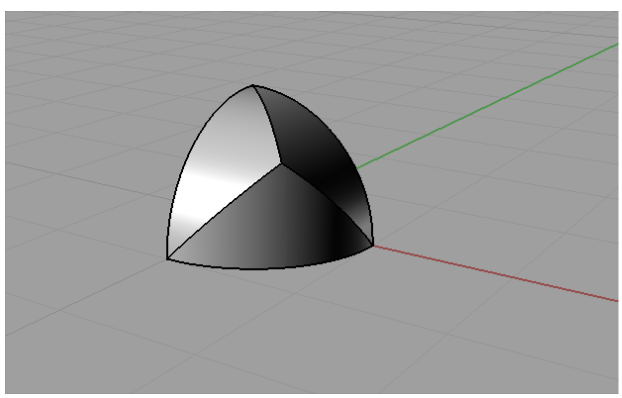


Figura 16. Vista del sólido en un octante elaborado en Rhinocero. Elaboración propia.

En la *Figura 17* se observa que los valores de z cambian respecto al cilindro que determina las caras del sólido, es decir, cuando la cara del sólido está limitada por el cilindro representado en color verde $x^2 + z^2 = r^2$ entonces $0 \leq z \leq \sqrt{r^2 + x^2}$ y del mismo modo, cuando la cara del solido está determinada por el cilindro representado en color azul, se tiene que $y^2 + z^2 = r^2$. De las *figuras 16* y *17* se puede deducir que el volumen total del sólido en el primer octante está determinado por la suma de dos integrales triples, pues como se observa entonces se tiene que $0 \leq z \leq \sqrt{r^2 + y^2}$, por esto el volumen del sólido en el primer octante es:

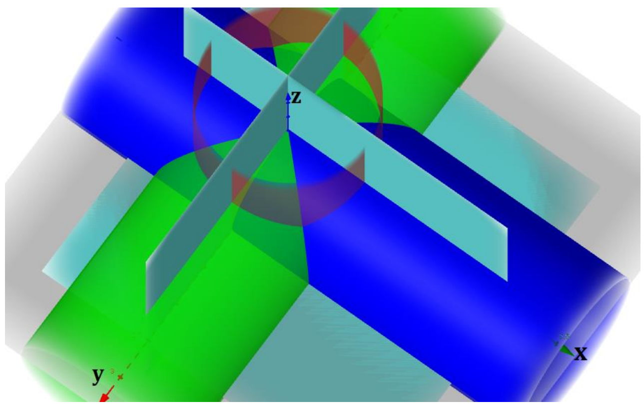


Figura 17. Intersección de los tres cilindros en el octante positivo en Geogebra®. Elaboración propia.

$$V = \iiint\limits_U dxdydz = \iint\limits_{D_1} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dzdxdy + \iint\limits_{D_2} \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} dzdxdy$$

Ahora bien, debido a las propiedades simétricas del sólido, se puede deducir que:

$$V = \iiint\limits_U dxdydz = 2 \iint\limits_{D_1} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dzdxdy \qquad (\mathbf{2})$$

Como se mencionó anteriormente el volumen total del sólido es:

$$V_T = 8\,V \qquad (\mathbf{3})$$

Donde V_T representa el volumen total del sólido y V el volumen en un octante. Remplazando (2) en (3) se tiene que:

$$V_T = 8\left(2\iint_{D_1}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dzdxdy\right)$$

$$V_T = 16\left(\iint_{D_1}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dzdxdy\right)$$

$$V_T = 16\left(\iint_{D_1}\sqrt{r^2-x^2}\,dxdy\right)$$

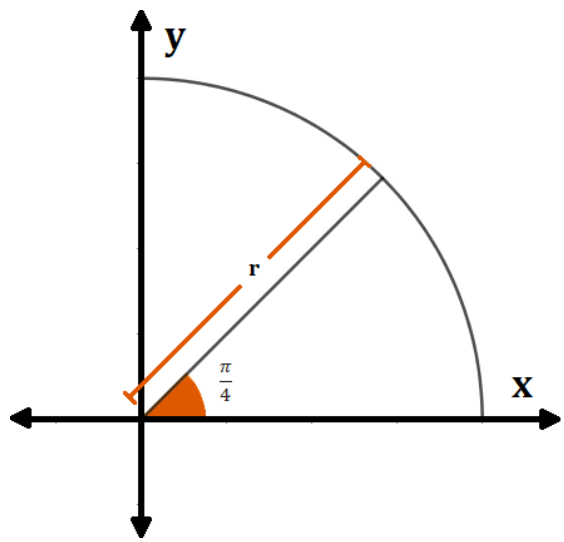


Figura 18. Corte del sólido con el plano xy. Elaboración propia.

Realizando un cambio de coordenadas cartesianas a polares en $\iint_{D_1}\sqrt{r^2-x^2}\,dxdy$ donde $x = a\cos\theta$ y $dA = dx\,dy = a\,da\,d\theta$ dado que el Jacobiano de la transformación es a y en la *Figura 18* se puede evidenciar que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ y $0 \leq a \leq r$, entonces la nueva integral sería:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^r \sqrt{r^2 - a^2\cos^2\theta}\,a\,da\,d\theta$$

Al sustituir $u = r^2 - a^2\cos^2\theta$ se tiene que $du = -2a\,cos^2\theta\,da$, por tanto:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\int_{r^2}^{r^2sen^2(\theta)}\sqrt{u}\,du\,d\theta$$

Utilizando los criterios de integración para polinomios tenemos:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(u^{\frac{3}{2}}\right) \, d\theta$$

Al devolver la sustitución se teiene que:

$$V = \left(-\frac{1}{3}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\left[(r^2 - a^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\right]_0^r \, d\theta$$

Luego por el teorema fundamental del cálculo podemos evaluar y posteriormente reducir la expresión, con lo que obtenemos:

$$V = \left(-\frac{1}{3}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\left[(r^2 - r^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} - (r^2 - 0^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\right] d\theta$$

$$V = \left(-\frac{1}{3}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\left[(r^2)^{\frac{3}{2}}(1 - \cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} - (r^2)^{\frac{3}{2}}\right] d\theta$$

$$V = \left(-\frac{1}{3}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\left[(r^2)^{\frac{3}{2}}(\operatorname{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}} - (r^2)^{\frac{3}{2}}\right] d\theta$$

$$V = \left(-\frac{1}{3}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)[(r)^3 sen^3\theta - (r)^3] \, d\theta$$

$$V = \left(-\frac{1}{3}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)(r^3)(sen^3\theta - 1) d\theta$$

$$V = \left(\frac{r^3}{3}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(\sec^2\theta) - \left(\frac{sen^3\theta}{\cos^2\theta}\right)\right] d\theta$$

$$V = \left(\frac{r^3}{3}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(\sec^2\theta) - \left(\frac{sen^3\theta}{\cos^2\theta}\right)\right] d\theta$$

Utilizando propiedades de las integrales junto con la identidad $sen^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ tenemos:

$$V = \left(\frac{r^3}{3}\right)\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta \, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(sen^2\theta)(sen\,\theta)}{cos^2\theta} \, d\theta\right]$$

$$V = \left(\frac{r^3}{3}\right)\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta \, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - cos^2\theta)(sen\,\theta)}{cos^2\theta} \, d\theta\right]$$

Al sustituir $u = cos\, \theta$ se tiene que $du = -sen\, \theta\, d\theta$, por tanto:

$$V = \left(\frac{r^3}{3}\right)\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta\, d\theta + \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1 - \mathrm{u}^2}{u^2}\ d\theta\right]$$

Utilizando las reglas de integración para polinomios y las propiedades de las integrales tenemos que:

$$V = \left(\frac{r^3}{3}\right)\left[[\tan\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{u^2}\ du - \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} du\right]$$

$$V = \left(\frac{r^3}{3}\right)\left[[\tan\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{1}{u}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - [u]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]$$

Luego por el teorema fundamental del cálculo podemos evaluar y posteriormente reducir la expresión, con lo que obtenemos:

$$V = \left(\frac{r^3}{3}\right)\left[\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right) - \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\right]$$

$$V = \left(\frac{r^3}{3}\right)\left[3 - \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

De este modo:

$$V = \iint_{D_1} \sqrt{r^2 - x^2}\, dxdy = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right) r^3$$

Y así remplazando en $V_T = 16\ \left(\iint_{D_1} \sqrt{r^2 - x^2}\, dxdy\right)$ se obtiene:

$$V_T = 16\ \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right) r^3$$

$$V_T = 8\ \left(2 - \sqrt{2}\right) r^3$$

De este modo se muestra que el volumen total del sólido es $8\left(2 - \sqrt{2}\right) r^3$.

Se debe evidenciar, nuevamente, cómo la complejidad relativa al proceso de solución está relacionada con las herramientas conceptuales, y procedimentales de las cuales este dotado el individuo resolutor y para ello los diferentes niveles de visualización presentados anteriormente juegan un papel relevante.

3.3. Marco Tecnológico

Sepúlveda, Vargas & Cristóbal (2013), Córdoba & Ardila (2011), National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989), entre otros, han señalado que la enseñanza actual de la geometría y de algunos temas del cálculo está centrada en el profesor y en la habilidad que él tenga para hacer representaciones gráficas en el tablero muy a pesar de la existencia de diversos recursos tecnológicos, ya sea por reticencia al uso, pasando por la falta de capacitación en el uso de los mismos, hasta algunos engorrosos procesos administrativos institucionales que algunos docentes prefieren evitar a la hora de tramitarlos.

Si bien las representaciones ofrecidas por los recursos tecnológicos -no todas- tienen un propósito didáctico, es el profesor o el usuario en general el que debe determinar ese carácter y establecer la forma en que éstas contribuyen al aprendizaje. Si la naturaleza de las representaciones son estáticas, estas no permitirán la flexibilidad suficiente para que las condiciones cambien y los estudiantes puedan observar lo que ocurre y las relaciones que se establecen al variar ciertos parámetros. Es por esto, que Abrate, Delgado y Pochulu (2006) citado en Córdoba y Ardila (2011, p.4), proponen el uso de tecnologías que involucren representaciones dinámicas, y que cualquier propuesta, que aspire a considerarse efectiva para la enseñanza de las matemáticas, debe considerar que el vínculo entre la visualización, la experimentación, el razonamiento lógico, la argumentación (comunicación matemática) y la aplicación resulte indisoluble.

Es en este punto donde la tecnología y la visualización toman sentido y se convierte la primera en una facilitadora de la segunda y ésta a su vez en una herramienta para una mejor conceptualización de los objetos y los procesos. Así un uso intencionado de la tecnología permite reorganizar el pensamiento matemático, elaborar más fácilmente conjeturas que promuevan la investigación y construcción de conocimiento. Balacheff (2000) citado por

Córdoba & Ardila (2011, p.435), reflexiona en torno al uso de entornos informáticos en la enseñanza de las matemáticas, señalando que "modifican el tipo de matemáticas que se puede enseñar, el conjunto de problemas y las estrategias didácticas. El conocimiento profesional del profesor también debe modificarse".

Para Scaglia & Götte (2008) citado en Córdoba y Ardila (2011, p.8), un cambio de herramientas durante la enseñanza conduce a un cambio en los problemas interesantes que se pueden plantear. En este sentido plantea dos tipos de transformaciones que se presentan:

- Por un lado, la tecnología informática ofrece la posibilidad de tratar problemas y experimentar situaciones que sin ella no serían accesibles para la enseñanza y el aprendizaje.
- Por otro lado, dicha tecnología abre la posibilidad de adoptar un enfoque experimental de las matemáticas que cambia la naturaleza de su aprendizaje.

Según Sepúlveda, Vargas & Cristóbal (2013) el desarrollo de herramientas computacionales ha influido notablemente tanto en los métodos y caminos para producir conocimiento disciplinar, como en la forma en que los estudiantes pueden aprender o construir ese conocimiento. En este sentido, el NCTM (1989, p. 43. -National Council of Teachers of Mathematics) establece que "la tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Influye en las matemáticas que se enseñan en la escuela y puede aumentar las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes". También, sugiere que en lugar de dedicar tanto tiempo a los algoritmos debería invertirse más tiempo y esfuerzo para que los estudiantes adquieran estructuras conceptuales mediante exploraciones, basadas en experiencias numéricas y geométricas, aprovechando las posibilidades que proporciona el uso de la tecnología (Sepúlveda, Vargas & Cristóbal, 2013). Es de resaltar que la anterior apreciación no desconoce la importancia que tienen los algoritmos en los procesos no sólo de resolución de problemas sino en la conceptualización, sino que apunta a enriquecer las actividades que puedan dotar de significado a los objetos de estudio.

En este sentido, Aranda & Callejo (2010) mencionan que:

> *"Para potenciar la construcción de los conceptos relativos al análisis matemático Artigue (1991) sugiere buscar un mejor equilibrio entre las*

diferentes representaciones de los mismos: la geométrica, la analítica/numérica, la analítica/algebraica y la verbal. Por otra parte Duval (2006) indica que construir el significado de los objetos matemáticos implica la capacidad de transformación de las representaciones, que admite dos formas la conversión y el tratamiento, según que cambie o se mantenga el sistema semiótico, y la coordinación interna entre representaciones, ya que la mera yuxtaposición simultánea de varias representaciones de un mismo objeto es insuficiente pues se limita a un reconocimiento mediante asociaciones que son particulares en cada caso."

Es por esto que algunos autores tales como: Sepúlveda, et. al (2013), Córdoba & Ardila (2011) y Aranda & Callejo (2010) proponen el uso de las tecnologías como instrumentos de mediación semiótica para introducir conceptos y relaciones matemáticas, gracias a su potencialidad para presentar simultáneamente varias representaciones de un mismo concepto y para favorecer la interacción y el dinamismo, pero advierten que el uso de herramientas computacionales, por si más mismas, no resuelve los problemas de enseñanza y análisis, pues es necesario un contexto coherente de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Así, para el desarrollo del presente trabajo de grado se consultó y trabajó con varios softwares de geometría dinámica y diseño e ingeniería. A continuación, se presentan los que finalmente fueron de utilidad y con los cuales se plantearon actividades y se desarrollaron modelos:

- ✓ **Geogebra®** es un programa de cálculo simbólico (CAS) que en un entorno dinámico ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas y planillas, y hojas de datos dinámicamente vinculadas. Particularmente en la parte gráfica permite la representación en dos y tres dimensiones y poder rotar estas últimas para tener diferentes vistas de los objetos representados. Adicionalmente posibilita una visualización tridimensional con gafas anaglíficas y más recientemente ha incorporado un entorno de realidad aumentada.

  De otra parte, permite abordar la geometría de forma dinámica e interactiva que ayuda a los estudiantes a visualizar contenidos matemáticos que son más complicados de afrontar desde un dibujo estático. También permite realizar construcciones de manera fácil y rápida, con un trazado exacto y real, que además ayudan a revelar las relaciones existentes entre los elementos de la figura construida; también permite la transformación dinámica de los objetos que la componen. (González, s.f.)

Actualmente Geogebra ® está trabajando sobre una app para integrar en los dispositivos móviles la realidad aumentada, y cuenta con diferentes versiones para IOS y Android. No se profundiza más en esta herramienta ya que es ampliamente difundida entre la comunidad de educadores matemáticos y cuenta con una sociedad divulgativa en la red que puede ser consultada por los interesados. Si bien, aún se encuentra en fase experimental, los desarrollos son muy amplios y el impacto a futuro en las aulas y en los procesos de enseñanza y aprendizaje, no sólo de las matemáticas sino de las ciencias en general, serán indiscutibles.

- ✓ **Rhinoceros** es un software que no está pensado como un programa de tipo didáctico sino de diseño. Cuenta con herramientas que permiten crear, editar, analizar, documentar, renderizar, animar y traducir curvas, superficies y sólidos, nubes de puntos y mallas poligonales. No hay límite de complejidad, grado o tamaño, aparte del que posea el hardware. (Robert McNeel & Associates, 2019)

A continuación, se presentan las características especiales del software, así como las principales herramientas que ofrece en la creación de modelos ya que es una herramienta poco difundida entre los educadores matemáticos y se considera que una breve presentación del mismo puede generar inquietudes sobre su uso y difusión en las aulas de clase con fines didácticos.

Características especiales:

- *Ilimitadas* herramientas de modelado 3D de forma libre, que solo se encuentran en productos que cuestan de 20 a 50 veces más. Con Rhino se puede modelar cualquier forma imaginable. A pesar de no ser gratuito se puede acceder a versiones demo.
- *Precisión* necesaria para el diseño, los prototipos, la ingeniería, el análisis y la fabricación de cualquier producto, desde aviación hasta joyería.

- *Compatibilidad* con la mayoría de los programas de diseño, dibujo, CAM, ingeniería, prototipado, análisis, renderizado, animación e ilustración.
- *Accesible*, es tan fácil de aprender y de utilizar que se puede dedicar al diseño y la visualización sin tener que preocuparse por el software.
- *Rápido*, incluso en un ordenador portátil común. No se necesita ningún hardware especial.
- **Plataforma de desarrollo** para cientos de productos 3D especializados.

Herramientas de creación de modelos:

- **Puntos**: puntos, nubes de puntos, rejilla de puntos, extraer de objetos, marcar (intersección, división, ángulo de desmoldeo, extremos, más cercano, focos)
- **Curvas**: línea, polilínea, curva de forma libre, círculo, arco, elipse, rectángulo, polígono, hélice, espiral, cónico, interpolación de puntos, puntos de control (vértices), trazado a mano alzada.
- **Curvas a partir de otros objetos**: a través de puntos, a través de polilínea, extender, continuar curva, empalmar, achaflanar, desfasar, mezclar, mezclar arco, desde dos vistas, perfiles de sección transversal, intersección, contorno en malla o superficie NURBS, sección en malla o superficie NURBS, borde, silueta, extraer curva isoparamétrica, extraer gráfico de curvatura, proyectar, atraer, trazado a mano alzada, estructura alámbrica, desasociar recorte, crear dibujos 2D con cotas y texto, desplegar superficies desarrollables.
- **Superficies**: desde 3 o 4 puntos, desde 3 o 4 curvas, desde curvas planas, desde red de curvas, rectángulo, plano deformable, extrusión, cinta, superficie reglada, superficie de transición con igualación de tangencia, desarrollable, barrido a lo largo de un carril con igualación de borde, barrido a lo largo de dos carriles con continuidad de borde, revolución, revolución por carril, mezclar, parche, drapear, cuadrícula de puntos, mapa de alturas, empalmar, achaflanar, desfasar y plano a través de puntos.
- **Sólidos**: caja, esfera, cilindro, tubo, tubería, cono, cono truncado, pirámide, pirámide truncada, elipsoide, toroide, extruir curvas planas, extruir superficies, tapar agujeros planos, unir superficies, región y fusión no múltiple.

Edición:

- **Herramientas generales**: eliminar, eliminar duplicados, unir, fusionar, recortar, deshacer recorte, partir, descomponer, extender, empalmar, chaflán, propiedades de objeto, historial.
- **Herramientas de transformación**: cortar, copiar, pegar, mover, rotar, simetría, escalar, estirar, alinear, matriz, retorcer, doblar, ahusar, cortar, desfasar, orientar, deslizar a lo largo de una curva, atraer, proyectar, edición de caja, aplastar, aplanar avanzado.
- **Puntos y curvas**: puntos de control, puntos de edición, guías, suavizar, alisar, cambiar el grado, añadir/suprimir nodos, añadir puntos de torsión, reconstruir, reajustar, igualar, simplificar, modificar peso, hacer periódica, ajustar tangencia final, ajustar costura, orientar en borde, convertir a arco, polilínea o segmentos de línea.
- **Superficies**: puntos de control, guías, cambiar el grado, añadir/suprimir nodos, igualar, extender, fusionar, unir, deshacer el recorte, dividir superficie en curvas isoparamétricas, reconstruir, reducir, hacer periódica, operaciones booleanas (unión, diferencia, intersección), desplegar superficies desarrollables, matriz a lo largo de curva en superficie.

  Sólidos: empalmar bordes, extraer superficie, vaciar, operaciones booleanas (unión, diferencia, intersección).

Existen otros software que pueden resultar útiles según unos propósitos específicos, sin embargo, la persona debe conocer las herramientas básicas del mismo, sus potencialidades y sus limitantes, ya que según unos propósitos propuestos, la pertinencia de su uso y las posibilidades que brindan para la visualización de una situación problema específica, puede resultar pertinente o no. Si no se tienen en cuenta esto, se corre el riesgo de que la herramienta resulte inadecuada e incluso pueda llegar a constituirse en un obstáculo.

4. Actividad de pilotaje

Teniendo en cuenta el marco teórico presentado anteriormente, se diseñó una guía, que se presenta a continuación, con el fin de evidenciar algunos aspectos relacionados con los sistemas de representación correspondientes a figuras tridimensionales. En cada uno de los apartados hay unas intencionalidades que serán presentadas. Los problemas son tomados o adaptados del texto Cálculo de Varias Variables, Trascendentes Tempranas, de James Stewart (2012) ya que es uno de los textos más empleados en los cursos de Cálculo Vectorial y Multivariado a nivel universitario. La actividad completa aparece en el anexo, sin embargo, para la descripción de la misma se irá presentando por apartados. A continuación, se presenta desde la teoría presentada en el marco teórico, la pertinencia y la intensión que tiene cada uno de los ejercicios propuestos en la guía.

1. Para los ejercicios que se presentan a continuación lleve a cabo los siguientes pasos:

- **a.** Identifique cuál es la superficie que represente cada ecuación.
- **b.** Realice la gráfica de las dos superficies en un mismo plano a mano.
- **c.** ¿Qué resulta al intersecar las dos superficies teniendo en cuenta el bosquejo?
- **d.** Halle la intersección analíticamente.
- **e.** Compare los resultados obtenidos graficando con ayuda de Geogebra ®

  - **I.** La esfera con centro $(-3, 2, 5)$ y radio 4 y el plano yz
  - **II.** $z = x^2 + y^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$
  - **III.** $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ y $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$
  - **IV.** $x^2 + y^2 = 1$ y $y + z = 2$
  - **V.** $z = 2x^2 - y^2$ y $z = 4$

2. Para los ejercicios que se presentan a continuación lleve a cabo los siguientes pasos:

- **a.** Identifique cuál es la superficie que represente cada ecuación.
- **b.** Realice la gráfica de las dos superficies en un mismo plano a mano.
- **c.** ¿Qué resulta al intersecar las dos superficies teniendo en cuenta el bosquejo?
- **d.** Encuentre una función vectorial que represente la curva de intersección de las dos superficies.
- **e.** Compare los resultados obtenidos graficando con ayuda de Geogebra ®.

I. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 1 + y$
II. $z = 4x^2 + y^2$ y $y = x^2$
III. $z = x^2 - y^2$ y $x^2 + y^2 = 1$

Inicialmente para el punto 1 y 2 se establecen algunos pasos a seguir, los cuales pretenden que el estudiante, una vez realizada una representación mental del objeto matemático o geométrico, halle la solución gráfica, por medio de bosquejos o usando el software Geogebra ®, y posteriormente halle la respectiva solución analítica, atendiendo a los niveles expuestos por Rojas, Castrillón & Córdoba (2015).

Para llevar a cabo lo propuesto en los literales a. y b. se requiere que el estudiante tenga algunos conocimientos previos de las representaciones de los objetos matemáticos pues ello le permitirá realizar un bosquejo más conciso de la figura tridimensional. En este sentido, es importante conocer algunos procedimientos analíticos ya que, a partir de la ecuación correspondiente a cada uno de los objetos geométricos involucrados, se pueden extraer elementos característicos propios de cada superficie. Un caso puntual de lo mencionado anteriormente se puede evidenciar al tener la ecuación de una esfera, puesto que de ella se pueden determinar el centro y el radio, elementos con los cuales se podría llevar a cabo un bosquejo aproximado de la figura.

El literal c. corresponde a visualizar la curva o superficie de intersección que se genera al graficar dos superficies. Esta tarea ya no resultará tan sencilla como la del punto anterior pues requiere tener una alta capacidad de visualización e identificación de objetos tridimensionales como se presentó en el marco teórico propuesto por Gonzato, Díaz & Neto (2011). Adicionalmente, los autores mencionan que dicha capacidad de visualizar se puede mejorar a través de cuatro categorías; en este caso, se destacan dos de ellas para dar solución a este inciso: Coordinar e integrar vistas ortogonales de objetos tridimensionales (construir el objeto teniendo en cuenta que la figura sea coherente al relacionar las vistas dadas) y rotar un objeto tridimensional en el espacio (mentalmente ver la figura en su totalidad desde diversas perspectivas).

La importancia de tener en cuenta estas dos tareas radica en la dificultad de visualizar e identificar el objeto tridimensional que resulta de intersecar dos superficies; no obstante, puede que un buen bosquejo a mano y el uso de estas dos capacidades no sea suficiente para reconocer en su totalidad la superficie o curva que se genera; es por ello que se plantea el último inciso:

e. Compare los resultados obtenidos graficando con ayuda de Geogebra ®.

… ya que, por medio de un software de geometría dinámica, en este caso Geogebra ®, se puede verificar con facilidad los gráficos realizados y obtener la intersección por medio de las herramientas que para este fin posee dicho programa.

Como menciona Tall (1997) esto corresponde a representaciones numéricas y simbólicas, las cuales pueden ser manipuladas al estar construidas en un ambiente virtual. Dichas construcciones permiten observar desde diversas perspectivas los objetos que visualmente en un solo plano no son fáciles de identificar.

Por otra parte, Geogebra® permite observar en el panel "vista algebraica" la ecuación correspondiente a los objetos que están presentes en la vista 3D; no obstante, es importante mostrar analíticamente que la ecuación da cuenta efectivamente del resultado que Geogebra® proporciona. Es por tal motivo que se propone el penúltimo inciso de cada uno de los ítems 1 y 2:

d. (1) Halle la intersección analíticamente.

d. (2) Encuentre una función vectorial que representa la curva de intersección de las dos superficies.

en ellos se pide al estudiante que proporcione un argumento analítico para hallar la ecuación que representa al objeto generado por la intersección; esto corresponde a una representación formal como lo menciona Tall (1997) en la cual se requiere de una prueba aun cuando ya se tiene una representación gráfica que permite anticipar la solución al ejercicio propuesto.

Posteriormente, se plantea el tercer punto el cual tiene como finalidad evidenciar qué tan fácil resulta para los estudiantes visualizar objetos tridimensionales que no son estáticos:

3. Sea L la intersección de los planos
$cx + y + z = c$ y $x - cy + cz = -1$, donde c es un número real.
a) Encuentre las ecuaciones simétricas para L.
b) Cuando varía el número c, la recta L barre una superficie S. Encuentre la ecuación para la curva de intersección de S con el plano horizontal $z = t$ (la traza de S en el plano $z = t$).

En particular para este caso, no es posible obtener la solución general del problema a partir de un bosquejo o de un caso particular, sino que por el contrario sería necesario graficar la situación varias veces teniendo precaución de darle valores diferentes al parámetro que determina los planos y por lo tanto a la recta. No obstante, como menciona Tall (1997) las representaciones visuales se pueden producir de manera aproximada o, más precisamente, con ordenadores dinámicos, pues de dicha manera se puede manipular el objeto representado y así observar diferentes perspectivas de la figura.

Finalmente se plantea el cuarto punto, el cual se relaciona con el problema pretexto de esta propuesta. No se aborda el problema en su totalidad por razones que serán presentadas posteriormente.

4. Bosqueje con cuidado el sólido encerrado por los tres cilindros
$x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 1,$
$z^2 + y^2 = 1$. Indique las posiciones de los ejes de coordenadas y marque las caras con las ecuaciones de los cilindros correspondientes.

Al plantear este ejercicio se pretende que los estudiantes realicen un bosquejo de la figura solicitada; aun cuando de antemano se sabe que esta figura es difícil de representar sin ayuda de un software, es importante que se empleen algunas de las tareas que propone Gonzato t. al (2011) como lo son: coordinar e integrar vistas ortogonales de objetos tridimensionales, rotar un objeto tridimensional en el espacio (o cambiar mentalmente de perspectiva) y componer y descomponer en partes las figuras tridimensionales; dichas tareas permiten que el estudiante obtenga una representación más o menos precisa de la figura en cuestión y así mismo, poder extraer algunas características en cuanto a su forma, simetrías, entre otras.
En este punto, la actividad inicialmente se diseñó preguntando por el volumen del sólido determinado por la intersección de los tres cilindros, sin embargo, por el desarrollo del curso, y por circunstancias de orden público asociadas a la movilización estudiantil por la defensa de la Educación Pública en Colombia del año 2018, el tema de integrales triples no se alcanzó

a abordar y era muy factible que fuera el camino de abordaje por el que optaran los estudiantes. Así, finalmente se decidió suprimir el proceso de cálculo y dejar la pregunta sólo hasta la fase de visualización asociada a la representación. Es de resaltar que debido a esto, el cumplimiento de los propósitos presentados en el anteproyecto de trabajo, así como en los objetivos del presente trabajo, quedaron sin poder ser cubiertos en su totalidad.

Finalmente, en la actividad de pilotaje, se presenta una “NOTA” que pretende que los estudiantes describan el aporte del Software (Geogebra ®) al proceso de solución, en este apartado se pretendía recoger evidencias donde los estudiantes manifestaran la forma en que empleaban el mismo; en el siguiente apartado se presentarán los resultados obtenidos con las correspondientes evidencias documentales.

5. Análisis de resultados

Antes de presentar el análisis de los resultados obtenidos, se hace una breve descripción de las condiciones y el entorno académico en el cual se aplicó la actividad de pilotaje propuesta.

El taller fue desarrollado con estudiantes del curso Cálculo en Varias Variables, el cual corresponde al último espacio académico de fundamentación de la línea del cálculo, teniendo en cuenta el programa curricular de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (v3); para registrar este curso los estudiantes tienen como prerrequisito el curso de Cálculo Integral, pero no el de Geometría Analítica, lo cual no deja de ser un inconveniente desde los procesos de conceptualización. Por otra parte, se supone que por la línea de Geometría, ellos ya han cursados los espacios de Geometría Plana y Geometría del Espacio.

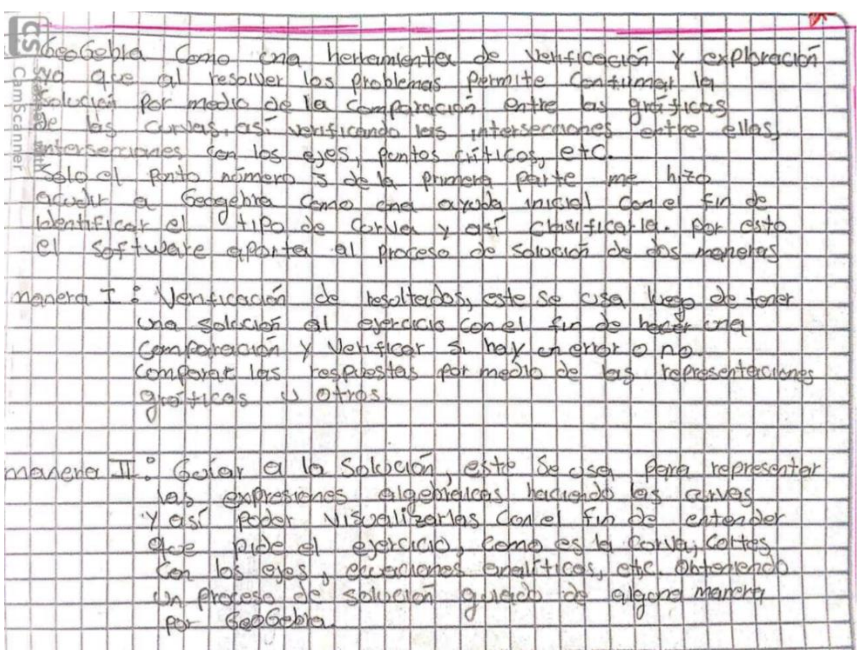
La implementación se llevó a cabo durante el semestre 2018-2 en el programa de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. El curso contaba con 30 estudiantes aproximadamente de los cuales realizaron la actividad 28 de ellos; sus edades oscilan entre 20 y 27 años, y mínimo llevan cinco semestres dentro del programa. Por otra parte, y como ya se mencionó, resulta importante resaltar que durante dicho semestre la Universidad Pedagógica Nacional, por fenómenos asociados con la ley de financiamiento de la educación pública en Colombia, no se encontraba desarrollando clases con normalidad dada la movilización estudiantil que es conocida por la opinión pública. Así, los espacios académicos no cumplieron con un desarrollo normal ni fueron abordados en su totalidad los contenidos programáticos propuestos toda vez que a lo sumo se cumplió con 12 de las 16 semanas de clase pactadas para el desarrollo de los sylabus.

El taller propuesto se implementó como una actividad para ser realizada en casa de manera individual y se solicitó llevar a cabo la misma siguiendo los pasos en el orden propuesto y consignar en extenso sus procedimientos y observaciones. Como se mostró anteriormente, una de las particularidades de esta guía fue la especificación de una “NOTA” que pretendía que los estudiantes describieran el aporte del Software (Geogebra ®) al proceso de solución.

Con ello se pretendía recoger evidencias donde los estudiantes manifestaran la forma en que empleaban el mismo; es gracias a esto que a continuación se analizan algunas de las evidencias encontradas que nos ayudan a esclarecer los diferentes usos que los estudiantes le dan a Geogebra® y cómo apoya los procesos de visualización.

Las utilidades que los estudiantes mencionan darle a Geogebra ® dependen de varios factores entre los cuales se encuentran el reconocimiento de las superficies, la complejidad de los enunciados, la variación de los parámetros de las ecuaciones, la habilidad que los estudiantes tienen para reconocer, esbozar, modelar y visualizar, entre otros elementos que pueden afectar el abordaje y solución de la situación planteada, es por esto que algunos estudiantes aclaran que las funciones del software dependen directamente de los ejercicios planteados, pues estos pueden ser abordados de diferentes maneras.

En la *Figura 19* se muestra el comentario de un estudiante que describe los usos que le dio al software dependiendo del ejercicio a desarrollar, el alumno sustenta que Geogebra ® tuvo dos funciones principales: la primera, en modo general, para la verificación y comparación de resultados y la segunda específicamente para dar solución a uno de los ejercicios por medio de la visualización a través de las representaciones que el software muestra.


GeoGebra como una herramienta de verificación y exploración ya que al resolver los problemas permite confirmar la solución por medio de la comparación entre las gráficas de las curvas, así verificando las intersecciones entre ellas, intersecciones con los ejes, puntos críticos, etc.
Solo el punto número 3 de la primera parte me hizo acudir a Geogebra como una ayuda inicial con el fin de identificar el tipo de curva y así clasificarla. Por esto el software aporta al proceso de solución de dos maneras

manera I: Verificación de resultados, este se usa luego de tener una solución al ejercicio con el fin de hacer una comparación y verificar si hay un error o no. Comparar las respuestas por medio de las representaciones gráficas u otros.

manera II: Guiar a la solución, esto se usa para representar las expresiones algebraicas haciendo las curvas y así poder visualizarlas con el fin de entender que pide el ejercicio, como es la curva, cortes con los ejes, ecuaciones analíticas, etc. Obteniendo un proceso de solución guiado de alguna manera por GeoGebra.

Figura 19. Comentario de un estudiante del curso Cálculo en Varias Variables sobre la actividad propuesta. Elaboración propia del estudiante.

Uno de los usos más comunes que la mayoría de los estudiantes mencionan darle a Geogebra ® es la comparación de resultados parciales, pues con ayuda del software pueden verificar las diferentes formas de representación (gráfica, analítica, numérica, etc.) ya sea durante el planteamiento, resolución o en la verificación de soluciones. A continuación, se muestra el comentario de un estudiante (ver *Figura 20*) que expresa utilizar Geogebra® específicamente para la comprobación de resultados analíticos y con esto la comprensión de la situación planteada, es decir, para verificar si los procesos mecánicos (ejercitación de procedimientos) realizados por el estudiante, son correctos para así de estos obtener cierta comprensión de la situación.

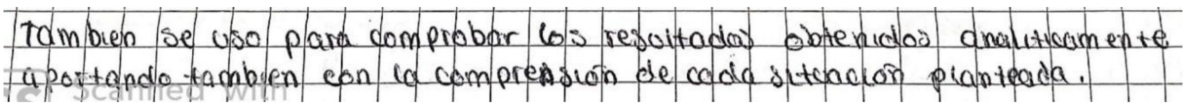
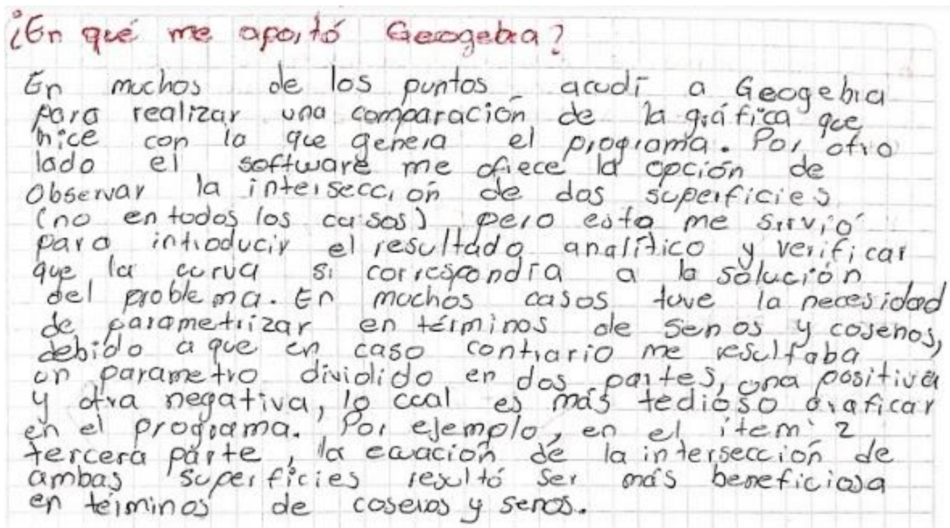

Tambien se uso para comprobar los resultados obtenidos analiticamente
aportando tambien con la compreasión de cada situacion planteada.

Figura 20. Comentario de un estudiante del curso Cálculo en Varias Variables sobre la actividad propuesta. Elaboración propia del estudiante.

Aunque este no es propósito a analizar en esta investigación es válido y compresible que el Software sea utilizado para tal fin, pues como plantea Duarte, Gómez & Toro (2009) en ningún momento se debe desvirtuar la importancia de la representación algebraica, por el contrario lo que se quiere es resaltar la necesidad de acompañar a esta de otras representaciones que la fortalezcan y coadyuven al proceso de conceptualización, por tanto se le debe dar gran importancia a la representación algebraica en cuanto tenga cierta relación e interpretación hacia otras representaciones, por ejemplo para el cálculo vectorial y multivariado donde las representaciones gráficas toman gran protagonismo, generalmente un resultado algebraico sin cierta interpretación gráfica puede terminar siendo solo una pila de símbolos carentes de sentido. Sin embargo, cabe resaltar que esta afirmación es específicamente con relación al ejemplo del cálculo vectorial y multivariado, pues en esta y en otras ramas matemáticas no necesariamente un resultado algebraico tiene interpretación gráfica o puede que no sea necesario destacar cierta relación. Es por esto que un resultado representado algebraicamente se puede relacionar con otros tipos (diferentes a la representación gráfica) de representaciones que eventualmente se puedan complementar mutuamente y ayudar a la comprensión y a la formalización de los conceptos en lo que se denomina la estructura de la disciplina.

Como se mencionó anteriormente, la mayoría de los estudiantes expresaron que usaban Geogebra® para la verificación ya sea gráfica, analítica, numérica o de cualquier otro tipo que logre realizar a partir de las propiedades y herramientas con las que cuenta el software. A continuación, se evidencia como otro estudiante menciona utilizar el software para la verificación tanto en el planteamiento del problema como en el análisis de resultados (ver *Figura 21*).


¿En qué me apoyó Geogebra?

En muchos de los puntos acudí a Geogebra para realizar una comparación de la gráfica que hice con la que genera el programa. Por otro lado el software me ofrece la opción de observar la intersección de dos superficies (no en todos los casos) pero esto me sirvió para introducir el resultado analítico y verificar que la curva sí correspondía a la solución del problema. En muchos casos tuve la necesidad de parametrizar en términos de senos y cosenos, debido a que en caso contrario me resultaba un parámetro dividido en dos partes, una positiva y otra negativa, lo cual es más tedioso graficar en el programa. Por ejemplo, en el ítem 2 tercera parte, la ecuación de la intersección de ambas superficies resultó ser más beneficiosa en términos de cosenos y senos.

Figura 21. Comentario de un estudiante del curso Cálculo en Varias Variables sobre la actividad propuesta. Elaboración propia del estudiante.

La verificación realizada inicialmente por el estudiante (al que se llamará estudiante A) durante el planteamiento del problema no es la misma que la verificación realizada por el estudiante del ejemplo anterior (al que se denominará estudiante B). En principio el estudiante A refiere a la comparación entre un esbozo manual realizado por este y la figura generada en Geogebra®, mientras que el estudiante B realiza una comparación netamente algebraica entre el resultado de su propia operabilidad y el resultado que muestra el software, estos corresponden, respectivamente, a las *representaciones visuales* y las representaciones numéricas y simbólicas propuestas por Vinner (1991) citado por Duarte et. al (2009).

Cabe resaltar que estas verificaciones con el software se realizan en momentos distintos de la resolución del problema, es decir, mientras que el estudiante A utiliza Geogebra® para realizar una verificación gráfica cuando este está planteando una ruta para hallar la solución al problema, el estudiante B utiliza el software con el fin de verificar si la solución ya encontrada es o no correcta.

El estudiante A también realiza una verificación de la solución encontrada que a diferencia del estudiante B, no compara las expresiones algebraicas de la solución, sino que ingresa la expresión algebraica (correspondiente a la solución) para verificar si esta curva coincide con la intersección que entrega como solución de la gráfica hecha por el software. Es interesante ver como se evidencia dos formas de comprobación de resultados con Geogebra® que involucran diferentes sistemas de representación, mientras que un estudiante acude netamente a la comparación de las representaciones algebraicas de la solución, el otro comprueba si la representación algébrica de la solución coincide con la representación gráfica de esta, comprobando así la utilidad que tienen los software de geometría dinámica en la enseñanza de las matemáticas, pues como menciona Sepúlveda, Vargas y Cristóbal (2013) la importancia del uso de la tecnología en el estudio y el aprendizaje de las matemáticas, tiene que ver con el uso y externalización de distintas representaciones de una situación.

Frente a las representaciones empleadas, los hallazgos son consistente con la forma en que se diseñó la actividad. los estudiantes respaldan el uso de Geogebra® como objeto de comprobación y esto favorece el manejo de diferentes representaciones de objetos y situaciones. Casi ningún estudiante mencionó utilizar el Software como una herramienta que brinde una primera idea de la situación. De otra información parte se encontraron gráficas excesivamente detalladas y precisas como los de la *Figura 22*, a estudiantes que mencionan solo utilizar Geogebra® para solucionar el punto 3 y para verificar resultados analíticos, como lo manifiestan en la *Figura 23*. Sin embargo, se genera una duda frente a sí los estudiantes realmente construyeron dichas representaciones sin recurrir inicialmente al software ó realizaron una réplica en papel del modelo representado en Geogebra ®.

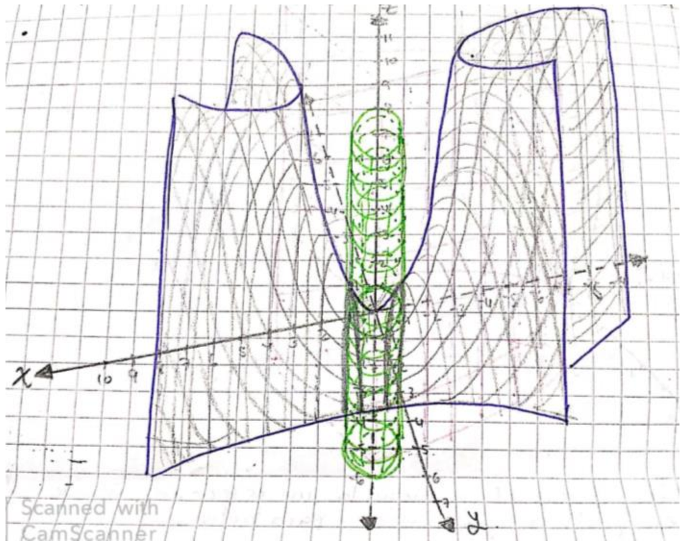


Figura 22. Gráfico elaborado por estudiante del curso Cálculo en Varias Variables. Elaboración propia el estudiante.

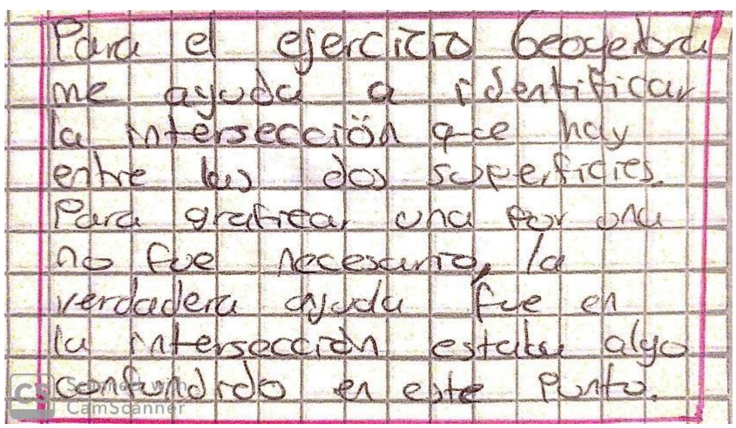


Figura 23. Comentario de un estudiante del curso Cálculo en Varias Variables sobre la actividad propuesta. Elaboración propia del estudiante.

A pesar de que este pueda ser un caso particular no resulta aislado, pues varios estudiantes presentan esta particularidad en el desarrollo de su trabajo, aunque el hecho de haberse apoyado en el software no es para nada malo, si lo es, querer ocultar cierta información pues esto dificulta o atrofia el análisis que se está realizando, ya que es precisamente esta información la que se utiliza como evidencia.

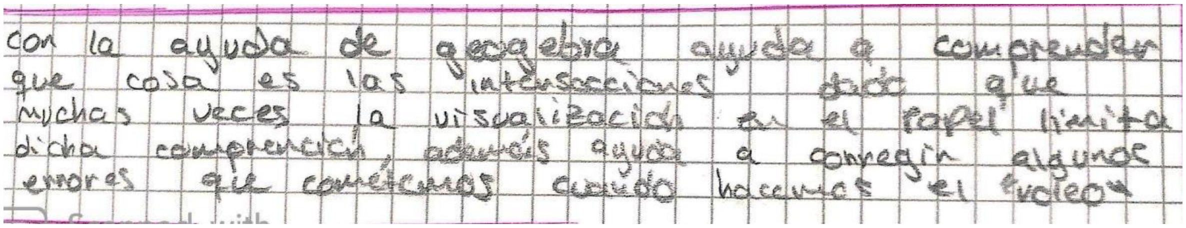

con la ayuda de geogebra ayuda a comprender
que cosa es las intersecciones dado que
muchas veces la visualización en el papel limita
dicha comprensión además ayuda a corregir algunos
errores que cometemos cuando hacemos el video

Figura 24. Comentario de un estudiante del curso Cálculo en Varias Variables sobre la actividad propuesta. Elaboración propia del estudiante.

Bajo el contexto de la comparación de la representación gráfica hecha en Geogebra® y la representación gráfica dibujada en un papel, uno de estos estudiantes afirma, como se muestra en la *Figura 24*, que *"muchas veces la visualización en el papel limita dicha comprensión"*, esta afirmación debe ser interpretada para no caer en la trivialidad de entenderla como categórica. En primer lugar, porque seguramente la intención del estudiante no es desvirtuar la visualización de representaciones gráficas hechas en papel, sino resaltar las representaciones dinámicas de un software y segundo porque estas representaciones también dependen de la capacidad del individuo para visualizar, dinamizar y realizar representaciones mentales y posteriormente plasmarlas como representaciones gráficas en una hoja de papel. Lo que es consistente con lo propuesto por Sepúlveda et. al (2013)

Es sensato pensar que el uso de un software como Geogebra® o en cualquier software de geometría dinámica facilita la visualización y por ende la comprensión como menciona Tall (1997) gracias a la posibilidad que ofrece de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples sistemas de representación dentro de esquemas interactivos. La tecnología abre espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel cuyas representaciones son rígidas o que requerirían un gran número de ellas para determinar ciertas propiedades y bajo ciertas circunstancias requerir un alto grado de precisión en el trazado el cual no necesariamente se da) en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración. O como menciona Balacheff (2000) citado por Córdoba y Ardila (2011) "La tecnología y la visualización toman sentido y se convierte la primera en una facilitadora de la segunda y ésta a su vez de una mejor conceptualización de los objetos y los procesos".

Como se ha venido mencionando una de las utilidades que los estudiantes mencionan darle al software es para apoyar y mejorar la comprensión de algún ejercicio particular, esto involucra por supuesto la visualización, que es uno de los medios con el cual se busca dicha comprensión. Para buscar analizar la utilidad de Geogebra ® en función de la visualización, y como ya se había reiterado, se planteó la guía que ya fue aplicada y en especial los puntos 3 y 4, pues estos involucran respectivamente dos aspectos importantes para el presente trabajo de grado, el primero la variación y el segundo el problema de los tres cilindros.

El punto tres, según las evidencias encontradas, como se muestra en la *Figura 24*, fue el ejercicio que más opuso resistencia en cuanto a la comprensión y visualización del mismo, los estudiantes expresaron tener mayor dificultad para abordarlo y manifestaron haber realizado uso recurrente del software Geogebra ®; pero ¿Por qué los estudiantes dicen tener más dificultades en un ejercicio que relaciona la intersección de dos planos (una recta), que con un ejercicio que relaciona la figura encerrada entre tres superficies cuádricas?. La respuesta puede resultar simple; para el ejercicio de los tres cilindros (Punto 4) se tienen ciertas características fijas que facilitan el proceso de visualización, por ejemplo que sus radios sean iguales y que el ángulo de intersección de sus ejes dos a dos sea de 90°, sin embargo no pasa igual con el punto 3, pues hay una particularidad y es que los planos no son objetos fijos, estos varían según un parámetro, por lo que su recta de intersección también varía barriendo una superficie particular donde además se debe encontrar la intersección de la superficie que barre esta recta y un plano horizontal $z = t$, esto supone mucha más complejidad pues no es igual visualizar un objeto fijo, estático y con ciertas condiciones regulares, que visualizar la intersección de un plano horizontal cualquiera con una superficie creada por una recta de intersección de dos planos que están en movimiento.

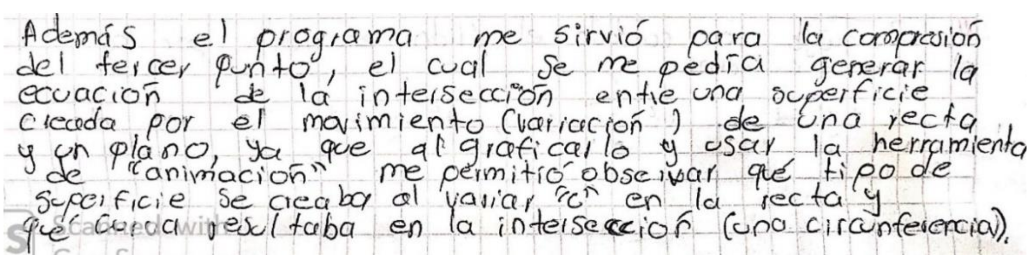

Además el programa me sirvió para la comprensión
del tercer punto, el cual se me pedía generar la
ecuación de la intersección entre una superficie
creada por el movimiento (variación) de una recta
y un plano, ya que al graficarlo y usar la herramienta
de "animación" me permitió observar qué tipo de
superficie se creaba al variar "c" en la recta y
qué resultaba en la intersección (una circunferencia).

Figura 25. Comentario de un estudiante del curso Cálculo en Varias Variables sobre la actividad propuesta. Elaboración propia del estudiante.

La mayoría de los estudiantes coincide en la necesidad de utilizar un software de geometría dinámica para dar solución de este ejercicio (punto 3) pues el planteamiento y desarrollo no es para nada fácil. No todos los estudiantes mencionan tener la misma dificultad con el desarrollo de dicho ejercicio, por ejemplo, lo descrito en la *Figura 25* ("pues no identificaba la superficie *S*") es una mirada global de la dificultad con la que tropezó este estudiante y aunque no especifica para nada el trasfondo de la dificultad, es importante resaltar que una parte importante de estudiantes mencionaron respuestas similares a estas, de lo que se puede asumir que tal vez este grupo de estudiantes no tenía idea alguna de la figura determinada por la intersección de la variación de estos planos.

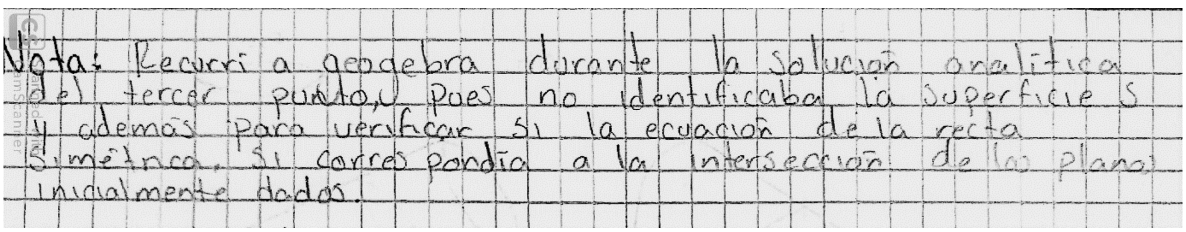

Nota: Recurrí a geogebra durante la solución analítica del tercer punto, pues no identificaba la superficie S y además para verificar si la ecuación de la recta simétrica si correspondía a la intersección de los planos inicialmente dados.

Figura 26. Comentario de un estudiante del curso Cálculo en Varias Variables sobre la actividad propuesta. Elaboración propia del estudiante.

Otra de las argumentaciones mencionadas por unos pocos estudiantes fue la descrita en la *Figura 26* ("se me pedía generar la ecuación de la intersección entre una superficie creada por el movimiento (variación) de una recta y un plano, ya que al graficar y usar la herramienta de 'animación' me permitió observar que tipo de superficie se creaba al variar *c*") la cual mencionaba o aludía directamente a la dificultad de determinar la superficie e intersección debido al movimiento o variación de los objetos y además expone la forma en que utilizó las herramientas del software para abordar el problema.

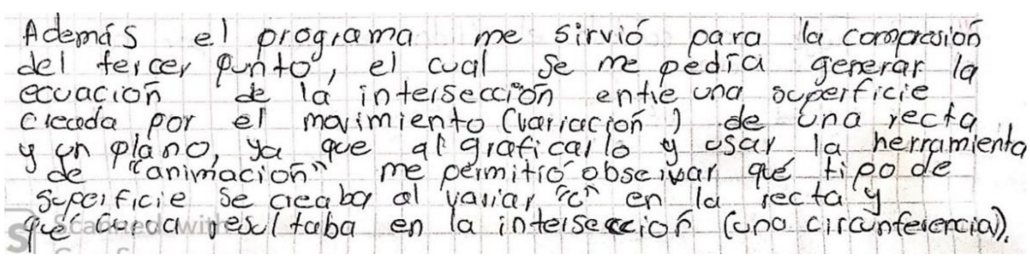

Además el programa me sirvió para la comprensión del tercer punto, el cual se me pedía generar la ecuación de la intersección entre una superficie creada por el movimiento (variación) de una recta y un plano, ya que al graficarlo y usar la herramienta de "animación" me permitió observar qué tipo de superficie se creaba al variar "c" en la recta y qué resultaba en la intersección (una circunferencia).

Figura 27. Comentario de un estudiante del curso Cálculo en Varias Variables sobre la actividad propuesta. Elaboración propia del estudiante.

Esta última parte es fundamental en el desarrollo de estrategias utilizando softwares matemáticos, pues muchos de estos tienen en cierto grado limitaciones, es decir no siempre muestran las soluciones o los detalles que necesitamos. Por ejemplo, Geogebra® no siempre muestra las intersecciones, de hecho solo muestra las intersecciones entre una superficie cualquiera y un plano, sin embargo este tema se estudiará más adelante (apartado 6) pues es un componente que no solo influyó en el desarrollo de la guía por parte de los estudiantes, sino que también fue un factor fundamental en el estudio y desarrollo del problema pretexto para la discusión (volumen de la figura encerrada por la intersección de tres cilindros rectos de mismo radio) del presente trabajo de grado.

Es importante recalcar lo realizado por los estudiantes para dar solución al punto 4, en el cual se les solicitaba realizar un bosquejo de la situación de la intersección de los tres cilindros. Independientemente del bosquejo realizado, se identificaron tres formas de visualizar, analizar y dibujar la situación. La primera, como se muestra en la *Figura 27*, da cuenta de la manera más rápida de bosquejar la situación, dibujando recurrentemente los tres cilindros y posteriormente analizando aquella figura que se puede visualizar en medio de los trazos, es por esto mismo que con este análisis la situación está sujeta a cualquier interpretación, pues mucha de la visualización y caracterización de la figura encerrada en los cilindros depende directamente y casi netamente de la capacidad e interpretación de trazo y dibujo del propio autor.

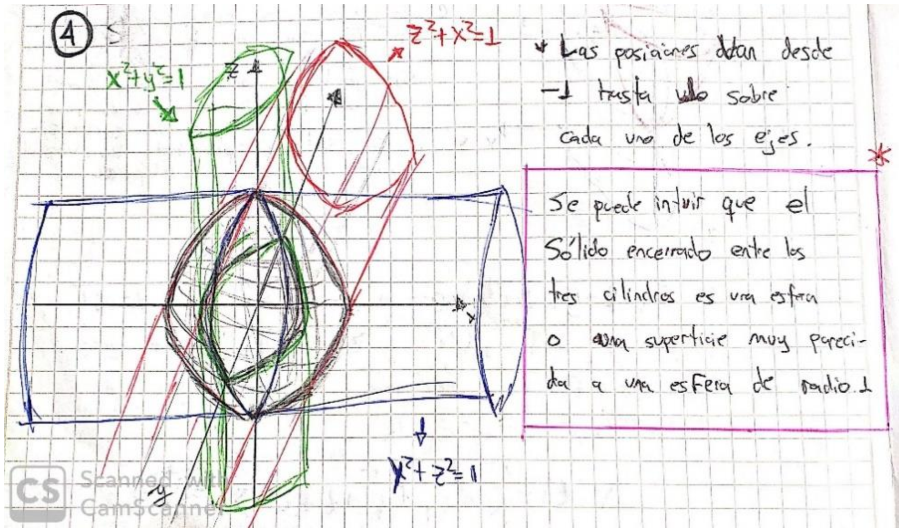


Figura 28. Gráfico elaborado por estudiante del curso Cálculo en Varias Variables. Elaboración propia del estudiante.

La siguiente forma en que se abordó la situación fue con relación a las vistas de la figura, como se muestra en la *Figura 28,* pues un gran número de la totalidad de estudiantes decidió hacerlo así y aunque de este modo de abordaje del problema también depende, aunque en menor medida, de la capacidad e interpretación de trazo y dibujo del propio autor, este brinda más elementos para el análisis de la situación y cierra un poco la brecha de las interpretaciones, brindando así un bosquejo más exacto de la situación.

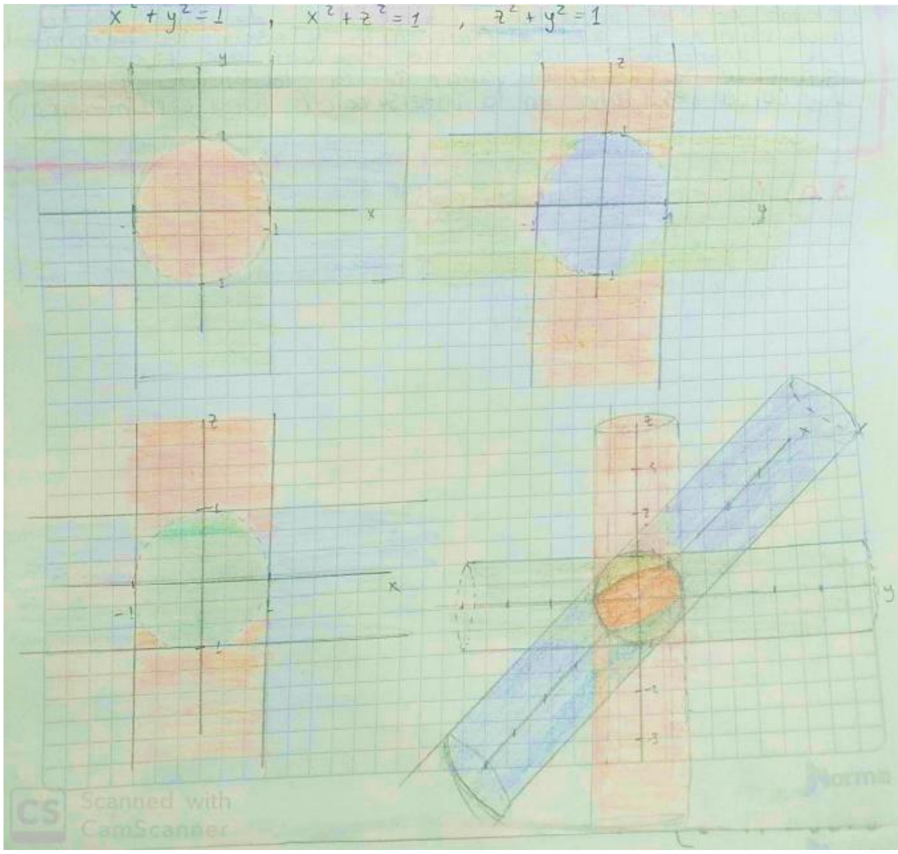


Figura 29. Gráfico elaborado por estudiante del curso Cálculo en Varias Variables. Elaboración propia del estudiante.

Por último, se presenta el abordaje de la situación a partir del análisis de anteriores intersecciones (ver *Figura 29*), es decir los estudiantes que realizaron este bosquejo y buscaron de este modo realizar una observación previa de las posibles intersecciones de dos cilindros para luego observar lo que el tercer cilindro podría modificar de esta. Este tipo de análisis tiene importancia para el proceso de visualización, pues interioriza la solución de un problema que refiere a la intersección de objetos estáticos, con transformaciones anteriores de dicho objeto, es decir, brinda cierto dinamismo a los objetos de la situación para comprender las transformaciones o modificaciones que sufre la figura cuando otra superficie interfiere en el entorno. Lo que evidencia lo propuesto en los tres tipos de sistemas de representación de Bruner (1950) citado por Camargo & Hederich, (2010, p. 331)

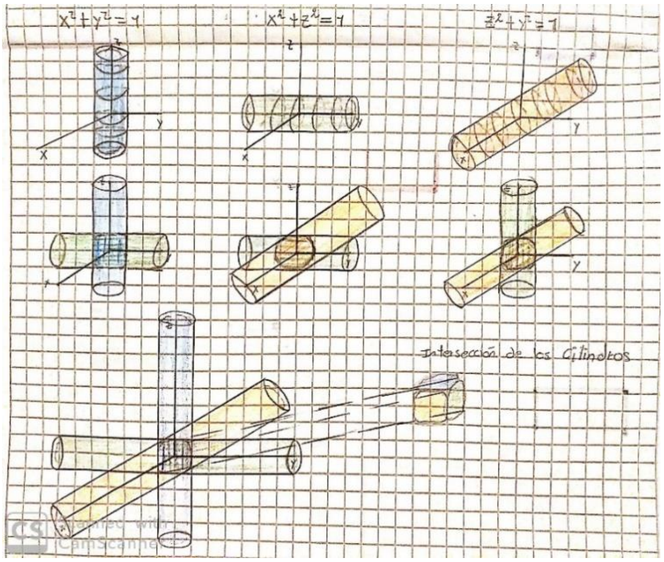


Figura 30. Gráfico elaborado por estudiante del curso Cálculo en Varias Variables. Elaboración propia del estudiante.

6. Análisis de los autores al problema pretexto

Teniendo en cuenta los estudios presentados acerca de la visualización en el marco teórico, los autores del presente trabajo se dieron a la tarea de experimentar de manera completa la resolución del problema con el fin de establecer su pertinencia en el desarrollo de un programa de Cálculo en Varias Variables para la formación inicial de profesores en un curso que pudiese llegar a ser desarrollado con normalidad académica en sus cronogramas, y que de algún modo permitiera hacer algunas sugerencias sustentadas para futuros desarrollos alrededor de este problema pretexto u otros relacionados con el problema de la visualización de objetos tridimensionales.

Lo primero que se logró establecer es que resulta indispensable pensar en las representaciones gráficas que se pueden realizar al tener un problema en cálculo multivariado, cálculo vectorial, geometría del espacio, o geometría analítica. En particular, para el desarrollo de los procedimientos correspondientes al volumen encerrado por la intersección de tres cilindros, se abordaron diversas perspectivas puesto que así se podría proporcionar una solución en la cual se integrará la parte analítica, desde el cálculo multivariado, y la parte visual, desde lo geométrico.

Inicialmente, para identificar el sólido resultante, se realizó un bosquejo a papel y lápiz, lo cual no resultó ser una tarea fácil puesto que no se logró identificar cuál era el sólido que quedaba encerrado por la intersección de los tres cilindros. Esto se debe a que no es posible ver desde diferentes perspectivas el bosquejo realizado porque la figura es estática, lo cual dificulta, de alguna manera precisar las características del sólido generado.

En paralelo al trabajo desarrollado con los estudiantes a los cuales se les implemento el taller, se puede comprobar que al graficar el sólido en papel y lápiz, no es posible definir su forma desde los objetos geométricos conocidos; cabe aclarar que esto sucede cuando no se ha realizado con anterioridad el gráfico a través de un software. Para el caso de la actividad realizada por los estudiantes del curso, obtener evidencias de este hecho se ve afectado por factores externos como lo son: la calificación que se puede obtener en el taller, la dificultad de realizar la construcción junto con la poca habilidad de dibujar, entre otros.

Por otra parte, en este punto del desarrollo de la actividad, usando Geogebra ®, surge la necesidad de usar otras herramientas para realizar el gráfico correspondiente, por ello se recurre al uso de software de geometría dinámica. Fundamentalmente, en un inicio se realiza un bosquejo con Geogebra®, y no fue posible realizar el sólido ya que el programa no cuenta con las herramientas suficientes para generar la intersección de dos superficies cuádricas si el objeto que se obtiene al intersecarlas no corresponde a un plano o a una curva, esto es, el software no permite aislar el sólido correspondiente a la intersección de los tres cilindros.

Posteriormente se pensó en un modelo físico, que se aproxima a un conector de 6 vías en PVC pero este tampoco aísla completamente la región…. Por ello, se decide buscar un software que cumpla con la condición de generar cualquier tipo de intersección; y se recurre al software ***Rhinoceros 3D***, que como ya se mencionó no es un software de uso matemático o con propósitos didácticos sino meramente centrado en el diseño y análisis de estructuras, no obstante permite realizar construcciones con objetos tridimensionales en las cuales se pueden observar las vistas y generar intersecciones como se muestra a continuación en las *figuras 31* y *32.*

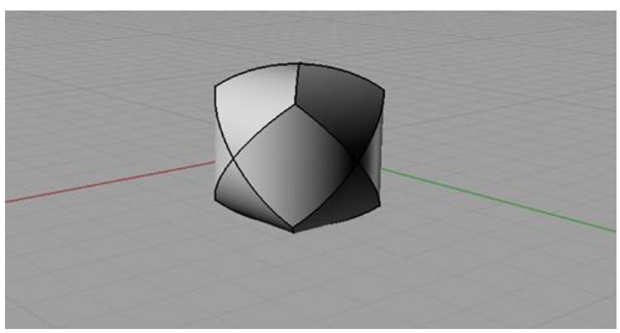


Figura 31. Tricilindro en Rhinoceros. Elaboración propia.

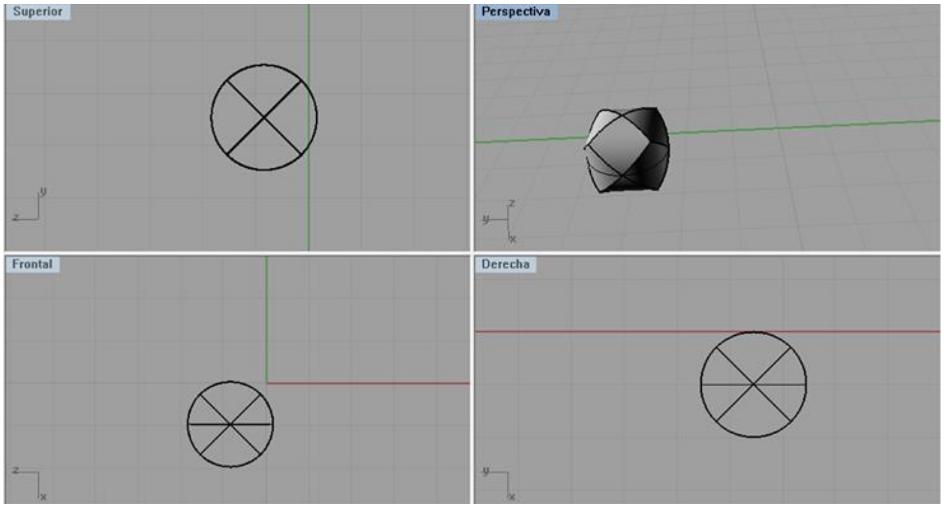


Figura 32. Vistas del tricilindro en Rhinoceros. Elaboración propia.

Adicionalmente, aun cuando tener la construcción no resuelve el problema planteado, si permite identificar algunas características que resultaran pertinentes a la hora de comparar lo obtenido con la solución analítica, por ejemplo, visualizar las doce caras que conforman la superficie del sólido, su simetría o que no corresponde a una esfera.

Una vez lograda esta representación, las tareas de visualización permitieron establecer un camino de resolución del problema y que fue presentado en el apartado correspondiente al marco matemático. Así los autores consideran que, si se quiere que los cursos de análisis vectorial, cálculo en varias variables, cálculo vectorial, geometría analítica y geometría del espacio cobren mayor sentido para los docentes de matemáticas en formación, las tareas de visualización deberán ser realizadas en diferentes entornos y con diferentes tipos de software que permitan no solo enriquecer las herramientas conceptuales y procedimentales de las matemáticas sino además dotarlas de sentido.

7. Conclusiones y sugerencias

A continuación, se presentan las principales conclusiones del trabajo y se articulan en relación con los objetivos específicos presentados:

a. *Con relación al análisis de casos particulares de intersecciones de superficies:*

En su mayoría, los estudiantes pueden reconocer las superficies involucradas en las situaciones, pero presentan dificultades para representarlas en papel y lápiz. Esto a su vez complica el proceso de interpretar y analizar un problema, puesto que dichas representaciones por ser estáticas no se pueden manipular o animar y por ello les cuesta identificar la superficie de intersección de las mismas.

b. *Con relación al estudio de teorías correspondientes a los problemas de visualización y sistemas de representación de superficies.*

La indagación que se llevó a cabo a través de la teoría permitió analizar, estudiar y seleccionar de manera acertada algunos ejercicios de intersección de superficies del libro Cálculo en una Variable, Trascendentes Tempranas de James Stewart (2012), los cuales permitieron, a la luz del marco teórico desarrollado, dar cuenta de los niveles y las estrategias de visualización utilizadas por los estudiantes en el momento de resolver las situaciones propuestas.

Se identificó además la pertinencia y la importancia de abordar un problema desde diversos sistemas de presentación (en particular analítico y gráfico), puesto que así se pueden extraer diversas características que permiten dar una solución acertada a lo que se plantea.

c. *En relación con plantear una solución al problema de la intersección de 3 cilindros circulares que poseen el mismo radio que se cortan en ángulos rectos.*

El proceso que se llevó a cabo para llegar a la solución de este problema requiere que el estudiante tenga diversos conocimientos previos en cuanto a: teoremas relacionados con volúmenes de superficies cuádricas, desarrollo y planeamiento integrales triples que modelen situaciones relacionadas con intersección de superficies cuádricas, técnicas de integración, cambio de coordenadas, entre otros.

En particular, dicho ejercicio, cuando los autores lo desarrollaron, permite identificar la importancia de pasar de bosquejos a papel y lápiz al uso de software dinámicos, pero a su vez muestra también que algunos softwares presentan las limitaciones a la hora de identificar características propias de la figura tridimensional resultante.

Los procedimientos analíticos desarrollados permiten mostrar la importancia de que más allá de representar la situación gráficamente, dichos resultados deben permitir verificar que aquello que se conjetura a partir de un gráfico resulta ser verídico

d. *En relación con los aportes que apoyen el desarrollo del seminario de cálculo en Varias Variables del programa en Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.*

El desarrollo del presente trabajo de grado nos permitió evidenciar la relación existente entre los diversos sistemas de representación y los aportes que se pueden extraer desde dichas representaciones para así lograr solucionar un problema. Además, la visualización es un componente que resulta importante desarrollar, estas habilidades se adquieren cuando se interactúa con diversos contextos en los cuales no se lleve a cabo el mismo procedimiento para llegar al planteamiento analítico o situaciones no rutinarias.

Por otra parte, como docentes en formación, la actividad de intervención muestra que es importante proponer a los estudiantes actividades en las cuales se lleve a cabo la exploración y no se llegue a una solución inmediata del problema a través del uso de fórmulas o regularidades entre otros ejercicios desarrollados dado que los contenidos temáticos del curso son bastante extensos. Sin embargo, una precisión sobre esta conclusión podría darse de manera más contundente si a futuro se desarrollan proyectos afines con grupos experimentales y de control.

A futuro resultará importante reformular los espacios de la línea del cálculo ya que no se están alcanzando a trabajar algunos ejes conceptuales que resultan relevantes en la formación disciplinar de los educadores matemáticos, lo cuál debería ser considerado en las renovaciones curriculares del programa de licenciatura.

Desde el objetivo general se encontró que los procesos de representación y visualización son de vital importancia en el proceso de interpretar y analizar un problema. Las representaciones realizadas en papel y lápiz son estáticas y no se pueden manipular o animar y por lo tanto permiten “ver” sólo lo que allí está representado y la tarea mental de visualización se hace más dispendiosa a si se cuenta con la posibilidad de tener diferentes vistas de la misma situación, lo que enriquece la conceptualización de los objetos matemáticos de estudio.

Ante dicha situación, se reafirma que las diferentes funciones de los softwares de geometría dinámica, en particular Geogebra®, posibilitan la verificación de resultados y planteamientos en diferentes sistemas de representación. No obstante, todos los programas en entornos dinámicos para el desarrollo de las matemáticas tienen limitaciones, sin embargo, utilizándolos de forma correcta, con el apoyo del docente y la formación tanto didáctica como disciplinar, pueden ayudar a potencializar ciertos procesos matemáticos.

Por otra parte, las situaciones que involucran cierto tipo de variación requieren y dependen de la capacidad de visualización y, por ende, más manejo de los diferentes sistemas de representación que ayuden a la comprensión de la situación. El análisis de situaciones que involucran parámetros pueden potenciar los diferentes niveles de representación propuestos.

Finalmente, debemos reconocer que dentro del diseño de la actividad, y a pesar de haber sido piloteada, se presentó un error a la hora de presentar lo enunciado relacionado con la esfera (Punto I, inciso (a)) ya que se está no se presentaba a través de su ecuación algebraica sino desde los elementos geométricos (centro y radio)

Referencias

Aranda, C., & Callejo, M. (2010). Un experimento de enseñanza para la construcción del concepto de integral definida usando un programa de geometría dinámica. *Proceedings of TIME*.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52, 215-241.

Camargo, A. & Hederich, C. (2010). Jerome Bruner: dos teorías cognitivas, dos formas de significar, dos enfoques para la enseñanza de la ciencia. psicogente, 13(24), undefined-undefined. [fecha de consulta 26 de noviembre de 2019]. issn: 0124-0137. disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=4975/497552357008

Córdoba, F., & Ardila, P. (2011). La visualización en matemáticas con ayuda de la geometría dinámica y sus aportes a la modelación.

Di Domenicantonio, R., Costa, V., & Vacchino, M. C. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. *Union. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *27*, 75-87.

Duarte, E., Gómez, H., & Toro, J. (2009). Estrategias de visualización en el cálculo de varias variables. *Revista Educación y Pedagogía*, *18*(45), 119-131.

Duval, R. (2002). Representación, visión y visualización: funciones cognitivas en el pensamiento matemático. Problemas básicos para el aprendizaje. En F. Hitt, (ed.), Representaciones y visualización matemática, (pp. 311-335). Capítulo norteamericano de PME: Cinvestav-IPN.

Godino, J.; Gonzato, M.; Cajaraville, J. & Fernández, T. (2012) Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias: Revista de investigación y experiencia didáctica*.

González, M. (s.f.). Iniciación al Geogebra®. Recuperado de: https://sites.google.com/site/Geogebra ®1112/características-de-Geogebra ®

Gonzato, M.; Diaz, J. & Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 23 (3).

Marmolejo, G. & Vega, M. (2012). *La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje.* Educación Matemática, 24(3), pp. 7-32.

Montecino, A., & Andrade, M. (2013). La visualización espacial como herramienta en el entendimiento de lo tridimensional.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pilatti, C.; Gabriel, K. & Bavaresco, D. (2016). Pesquisa de Desenvolvimento: o problema do sólido gerado pela intersecção de cilindros. REMAT, Caxias do Sul, RS, v. 2, n. 2, (pp. 164 -179).

Puga, K.; Castillo, L.; Gómez, E.; Santoyo, E. & Santoyo, F. (2016). *Un acercamiento al espacio tridimensional a través de la manipulación de objetos físicos y visuales.* En Mariscal, Elizabeth (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 376-383). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rico, L., Castro, E. & Romero, I. (2000). *Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas.* En Beltrán, J.; Autores, Más (Eds.), Intervención piscopedagógica y currículum escolar (pp. 153-182). Madrid: Pirámide.

Robert McNeel & Associates (2019). Rhinoceros. Recuperado de: https://www.rhino3d.com/6/features?fbclid=IwAR3uHya54alFAShH15r6ak3q8o5mTSPoWPOkt0sOmNyFl5tBeibmMf0bvog#overview

Rojas G. (2014). Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet*, *12*(1). https://doi.org/10.18845/rdmei.v12i1.1686

Rojas, C.; Castrillón, E.; Córdoba, F. (2015). Visualización gráfica 3d en GeoGebra para la enseñanza- aprendizaje de las ciencias básicas. Curso dictado en Encuentro internacional sobre la enseñanza de las ciencias exactas y naturales (4 de Septiembre 2015). Pereira, Colombia.

Stewart, J. (2012). Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas. Séptima edición. Toronto, Canadá: Cengage Learning.

Sepúlveda, A., Vargas, V., & Cristóbal, C. (2013). Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *82*, 65-87.

Tall, D. (1997). Functions and Calculus, Dordrecht, Kluwer A. P, pp. 289 - 325.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, whit particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169

Weisstein, E. (s.f.). Steinmet Solid. From Math World A Wolfram Web. Resource. http://mathworld.wolfram.com/SteinmetzSolid.html

Anexo

CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES - TALLER SUPERFICIES Y CURVAS 2018-II

1. **Para los ejercicios que se presentan a continuación lleve a cabo los siguientes pasos:**

   b. Identifique cuál es la superficie que represente cada ecuación.
   c. Realice la gráfica de las dos superficies en un mismo plano a mano.
   d. ¿Qué resulta al intersecar las dos superficies teniendo en cuenta el bosquejo?
   e. Halle la intersección analíticamente.
   f. Compare los resultados obtenidos graficando con ayuda de Geogebra ®

   I. La esfera con centro $(-3, 2, 5)$ y radio 4 y el plano yz
   II. $z = x^2 + y^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$
   III. $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ y $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$
   IV. $x^2 + y^2 = 1$ y $y + z = 2$
   V. $z = 2x^2 - y^2$ y $z = 4$

2. **Para los ejercicios que se presentan a continuación lleve a cabo los siguientes pasos:**

   a. Identifique cuál es la superficie que represente cada ecuación.
   b. Realice la gráfica de las dos superficies en un mismo plano a mano.
   c. ¿Qué resulta al intersecar las dos superficies teniendo en cuenta el bosquejo?
   d. Encuentre una función vectorial que representa la curva de intersección de las dos superficies.
   e. Compare los resultados obtenidos graficando con ayuda de Geogebra ®.

   I. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 1 + y$
   II. $z = 4x^2 + y^2$ y $y = x^2$
   III. $z = x^2 - y^2$ y $x^2 + y^2 = 1$

3. Sea L la intersección de los planos $cx + y + z = c$ y $x - cy + cz = -1$, donde c es un número real.
   a) Encuentre las ecuaciones simétricas para L.
   b) Cuando varía el número c, la recta L barre una superficie S. Encuentre la ecuación para la curva de intersección de S con el plano horizontal $z = t$ (la traza de S en el plano $z = t$).

4. Bosqueje con cuidado el sólido encerrado por los tres cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$, $z^2 + y^2 = 1$. Indique las posiciones de los ejes de coordenadas y marque las caras con las ecuaciones de los cilindros correspondientes.

NOTA: Si usted recurre a Geogebra ® durante la solución analítica, describa **clara y ampliamente** que le aportó el software al proceso de solución.

Si no lo usó como apoyo, **describa** si el software le aportó elementos para la comprensión o interpretación de los resultados.