

**EL TEOREMA DE EUCLIDES COMO HERRAMIENTA PARA APRENDIZAJE
DE LA PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS EN LOS GRADOS
OCTAVO Y NOVENO**

**PRESENTADO POR:
ESPERANZA LOVERA DE RINCÓN**

**DIRECTOR:
PROF. JORGE EDGAR PÁEZ ORTEGÓN**

**CODIRECTOR:
PROF. JUAN CARLOS ÁVILA MAHECHA**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, 2018**

**EL TEOREMA DE EUCLIDES COMO HERRAMIENTA PARA APRENDIZAJE
DE LA PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS EN LOS GRADOS
OCTAVO Y NOVENO**

ESPERANZA LOVERA DE RINCÓN

C.C. 41728912

CÓDIGO: 2012140073

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR POR EL
TÍTULO DE LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR: PROF. JORGE EDGAR PÁEZ ORTEGÓN

CODIRECTOR: PROF. JUAN CARLOS ÁVILA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, 2018

AGRADECIMIENTOS

A Dios por la vida, por los talentos, por brindarme oportunidades de aprendizajes y experiencias maravillosas.

A mi esposo, por ser mi compañero de lucha, de vida y ser parte fundamental en la realización de este proyecto.

A mis padres que siguen siempre animándome y estando ahí para colaborarme en todo lo que les sea posible.

A mis hijos, incluyendo a mi nuera y mi yerno, por ser mi inspiración, mis asesores y alcahuetes en todas mis locuras.

A mis nietos y bisnieto por ser inspiración y a quienes quiero dejar el mensaje de que todo lo que se propongan lo pueden lograr, con determinación, perseverancia y esfuerzo.

Al profesor Jorge Edgar Páez por su permanente disposición y colaboración en la dirección de este trabajo.

Al profesor Pablo Beltrán, por sus aportes en la formulación del proyecto.

Al profesor Juan Carlos Ávila por su generosa e invaluable colaboración en el desarrollo del mismo.



FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: **"El teorema de Euclides: Una propuesta didáctica desde concretos y electrónicos."**, elaborado por los estudiantes:

Esperanza Lovera de Rincón - código 2012140073 - cédula 41728912

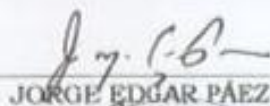
Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **42** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

En constancia se firma a los 04 días del mes de diciembre de 2018.

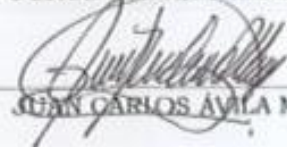
Director del Trabajo:

Profesor


JORGE EDGAR PÁEZ ORTEGÓN

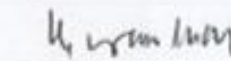
Co-Director:

Profesor


JUAN CARLOS ÁVILA MAHECHA

Jurado:

Profesor


LUIS FRANCISCO GUAYAMBUCO

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Excellence in Education</i>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 5	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	El Teorema de Euclides para el aprendizaje de la proporcionalidad y semejanza de triángulos en los grados de octavo y noveno
Autor	Lovera de Rincón, Esperanza
Director	Páez Ortigón, Jorge Edgar; Ávila Mahecha, Juan Carlos
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2018. 122 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	TEOREMA DE EUCLIDES; ALTÍMETRO PEDAGÓGICO; SEMEJANZA; PROPORCIONALIDAD; GEOGEBRA Y SECUENCIA DIDÁCTICA.

2. Descripción
Este trabajo tiene como objetivo diseñar una Secuencia Didáctica y un material concreto que se denominó Altímetro Pedagógico con el que se pretende que, a partir del teorema de Euclides, los estudiantes de octavo y noveno logren inferirlo y con él puedan acercarse a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos. Para ello se toma como base el libro Elementos de Euclides, los documentos legales que rigen la educación en Colombia, el software de geometría dinámica GeoGebra y las situaciones didácticas como metodología propuesta por el Ministerio de Educación Nacional en el año 2013.

3. Fuentes
Briseño, S., & Alamillo S., L. (octubre de 2017). Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria. <i>IE Revista de investigación Educativa de la rediech</i>. Bustamante, G. (2013). <i>Mundo Geométrico. Libro de Teoría geométrica</i>. Venezuela. <i>Diccionario etimológico</i>. (s.f.). Recuperado el 26 de junio de 2018, de http://etimologias.dechile.net Euclides. (1991). <i>Elementos</i> (Vols. Libros I - IV). (M. L. Puertas C., Trad.) Madrid, España:

- Gredos, S.A.
- Euclides. (1994). *Elementos* (Vols. Libros V- IX). (M. L. Puertas C., Trad.) Madrid, España: Gredos S.A.
- Guacaneme S., E. (2012). Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿un asunto útil para un profesor? *Tecné, Episteme y Didaxis*. TEA(52), 113- 131.
- Hernández R., N. (Febrero de 2015). Las prácticas de enseñanza de la proporcionalidad en una telesecundaria rural del Estado de México: Un estudio de caso. México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Hernández S., R., Fernández C., C., & Babbista L., M. (2010). *Metodología de la investigación*. (Quinta ed.). México: Mc Graw Hill.
- Joya, A., Patiño, O., Buitrago, L., Sabogal, Y., Ortiz, L., Ramírez, M., & Sánchez, C. (2016). *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 7*. Bogotá, Colombia: Santillana.
- Joya, A., Patiño, O., Buitrago, L., Sabogal, Y., Ortiz, L., Ramírez, M., & Sánchez, C. (2016). *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 8*. Bogotá: Santillana.
- Levi, B. (2006). *Leyendo a Euclides*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Serie Lineamientos Curriculares. Matemáticas*. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¿un reto escolar*. (M. d. Nacional, Ed.) Colombia. Recuperado el 07 de 07 de 2018, de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (2013). *Secuencia Didáctica en Matemáticas: Educación Básica Secundaria*. (MEN, Ed.) Bogotá, Colombia: MEN. Recuperado el 12 de octubre de 2018
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje (DAB)*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado el 07 de 07 de 2018, de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Vamos a aprender matemáticas*. Bogotá, Colombia: MEN.
- Moise, E. (1986). *Geometría Moderna*. Estados Unidos: Adison-Wesley Iberoamericana S.A.
- Mora M., L. C., Torres D., J. A., & Luque A., C. J. (s.f). Euclides y el currículo. XIV *Encuentro de Geometría y II de Aritmética*, (págs. 401-416). Bogotá.
- Orozco, J. (2013). *Juega y construye la Matemática 8º*. Bogotá, Colombia: Comunidad de Hermanos Maristas de la Enseñanza.
- Perry, P., Guacaneme, E., & Fernández , F. (Junio de 2003). *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer*. (P. Perry, E. Guacaneme, A. Andrade , & F. Fernández, Edits.) Bogotá, Colombia: Una empresa docente, universidad de los Andes.
- Sánchez, C. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de

Euclides. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*(32), 71-92. Recuperado el 23 de octubre de 2017, de <http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n32/n32a06.pdf>
 Vasco, C. (2006). *Didáctica de las matemáticas*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

4. Contenidos

Este documento rescata el Teorema de Euclides como herramienta pedagógica para que los estudiantes de octavo y noveno grados puedan inferirlo y con él acercarse a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos. Además describe el proceso de creación de un artefacto con fines educativos, al que se le ha nominado **Altímetro Pedagógico** a través del diseño de una Secuencia Didáctica.

El recorrido que el lector podrá realizar inicia con una mirada de la propuesta que hacen los documentos que regulan los procesos de enseñanza de las matemáticas para los grados octavo y noveno frente a temas como proporcionalidad y semejanza de triángulos, los cuales son contrastados con algunos libros de texto para dichos grados. Esta revisión documental lleva al planteamiento de la pregunta ¿Cómo enseñar los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos a partir del Teorema de Euclides a través de una Secuencia Didáctica que implique el uso de material concreto?

Para dar respuesta a la pregunta expuesta se plantea como objetivo diseñar una Secuencia Didáctica y un material concreto que permita, con la ayuda del software de geometría dinámica GeoGebra, deducir el teorema de Euclides y a partir de él desarrollar el proceso de aprendizaje, de al menos una noción de proporcionalidad y semejanza de triángulos, en estudiantes de octavo y noveno. Para cumplir con lo propuesto se realizaron varias acciones como el diseño y la construcción del llamado **Altímetro Pedagógico**, la elaboración de una Secuencia Didáctica a partir del planteamiento de situaciones problema que pongan a prueba la eficacia del instrumento para deducir el Teorema de Euclides y el acercamiento a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos. También ha sido importante el uso del software de Geometría Dinámica GeoGebra, tanto para recordar los saberes previos como para el proceso de adquisición de otros aprendizajes.

Las indagaciones teóricas realizadas en el Estado de Arte refieren un pequeño recuento histórico del Teorema de Euclides y su aplicación en la educación matemática, luego se reseñan algunas investigaciones actuales frente a proporcionalidad y semejanza de triángulos. Se hizo una búsqueda documental del desarrollo del Teorema de Euclides en la educación, pero no se encontraron muchas investigaciones del tema.

A continuación, se presenta el marco teórico, en el que se desarrollan conceptos claves como Secuencia Didáctica, teorema de Euclides, proporcionalidad y semejanza de triángulos. Además, se describe el **Altímetro Pedagógico**, como material concreto diseñado y elaborado con el objetivo de posibilitar a los estudiantes intuir y aplicar dicho teorema.

Seguidamente se elabora una propuesta pedagógica basada en una Secuencia Didáctica, para lo cual se desarrolla una visión general, una ruta de aprendizaje, la descripción de aprendizajes y finalmente una actividad de cierre que posibilita la evaluación de los logros esperados.

Se continúa con la descripción de las observaciones realizadas a través del pilotaje de la Secuencia Didáctica y la experimentación del **Altímetro Pedagógico**, además de las reestructuraciones de las situaciones de la secuencia que da lugar a partir de la puesta en escena de la propuesta pedagógica. Finalmente, se exponen las conclusiones y se presentan algunas propuestas investigativas que pueden surgir a partir del presente trabajo.

5. Metodología

Para la creación de una propuesta pedagógica que intente rescatar el Teorema de Euclides como herramienta metodológica se diseña y elabora un artefacto con fines educativos que posibilita la vivencia experiencial de estos planteamientos euclidianos y una Secuencia Didáctica que, a través de situaciones problema, permite a los estudiantes de octavo y noveno grado comprender los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos.

Se escoge la población de estudiantes de octavo y noveno puesto que, de acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos básicos de Aprendizaje, en estos grados ya se deben tener los conocimientos básicos para la comprensión de dichos conceptos. Además de ser el momento en donde explícitamente se empieza a trabajar el uso de los teoremas. Se ha realizado una propuesta desde el enfoque cualitativo, puesto que se inicia con una idea y el planteamiento de una pregunta a la que se busca dar respuesta a través del desarrollo de una Secuencia Didáctica, que con su aplicación en una prueba piloto permite su reestructuración y enriquecimiento, para ser trazada de una mejor forma, de tal manera que se acerque más al cumplimiento del objetivo. Es así como esta propuesta “es flexible y se mueve entre los eventos y su interpretación, entre las respuestas y el desarrollo de la teoría” (Hernández S., Fernández C., & Babtista L., 2010. p. 20).

La ruta metodológica se traza de la siguiente manera: Inicialmente se indaga sobre la utilidad del Teorema de Euclides para el cálculo de alturas lo que lleva a la idea de la construcción de un artefacto educativo (**Altímetro pedagógico**) que permitiera llevar, a los estudiantes, a un contexto real dicho teorema. En el proceso de diseña y elabora el **Altímetro Pedagógico**, se hace evidente el potencial que este tiene para que se comprendan los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos. De esta manera se llega a la creación de una Secuencia Didáctica con seis situaciones que en forma procesual va llevando a los estudiantes a la comprensión de estos temas.

Se continua realizando un pilotaje de la sucencia didáctica y una observación de los aciertos y desaciertos de la misma, lo que permite hacer las reestructuraciones necesarias para que la propuesta sea pertinente para el cumplimiento de los objetvos. Finalmente se determinan las conclusiones a que da lugar y la posibles proyecciones del trabajo realizado.

6. Conclusiones

Después de una indagación frente al uso del Teorema de Euclides en la enseñanza de proporcionalidad y semejanza de triángulos y evidenciar que este es una herramienta que poco se ha tenido en cuenta para estos fines, se diseñó una Secuencia Didáctica y un material concreto que permite, con la ayuda del software de geometría dinámica GeoGebra, aproximarse a la deducción del teorema de Euclides y a partir de él desarrollar el proceso de aprendizaje, de al menos una noción de proporcionalidad y semejanza de triángulos, en estudiantes de octavo y noveno grado. Es así como después del desarrollo de la propuesta expuesta en el presente documento se puede concluir que:

- La Secuencia Didáctica, por su carácter procesual, posibilita que los estudiantes se apropien de conceptos de geometría básica, a través del uso del programa de geometría dinámica GeoGebra y vean su aplicabilidad en situaciones reales.
- La Secuencia Didáctica que se desarrolla en el presente trabajo permite que el estudiante llegue a conjeturar el Teorema de Euclides y con él la comprensión de conceptos como proporcionalidad y semejanza de triángulos.
- Las situaciones problema que se plantean a los estudiantes y la posibilidad de que estos se resuelvan a través de la comprobación real, otorga que ellos logren mejores comprensiones, construyan saberes, exploren otros caminos para llegar a las nuevas significaciones.
- El **Altímetro Pedagógico** es una herramienta que, en conjunto con la planeación de actividades pedagógicas que contengan situaciones problema, posibilita que los estudiantes infieran el Teorema de Euclides y el acercamiento a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos.
- La Secuencia Didáctica diseñada y verificada a través de la prueba piloto, da cuenta de la eficacia del **Altímetro Pedagógico** para deducir el Teorema de Euclides y el acercamiento de los estudiantes, a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos. Aunque es evidente que el artefacto tiene un margen de error, por cuanto la imprecisión en la toma de medidas y el uso de cifras decimales, puede dificultar que los estudiantes identifiquen igualdad entre razones, pero a la vez su uso en contextos pedagógicos puede proporcionar nuevas posibilidades de construcción de conocimientos.
- El teorema de Euclides como herramienta para abordar el estudio de la semejanza de triángulos, permite que los estudiantes reconozcan con facilidad la congruencia de los ángulos, pero se les dificulta reconocer la proporcionalidad entre los lados correspondientes.

Elaborado por:	Lovera de Rincón, Esperanza
Revisado por:	Páez Ortégón, Jorge Edgar; Ávila Mahecha, Juan Carlos

Fecha de elaboración del Resumen:	9	11	2018
--	---	----	------

Tabla de contenido

1.	Introducción	1
2.	Justificación.	3
3.	Objetivos.....	19
3.1.	OBJETIVO GENERAL	19
3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	19
4.	Estado de arte.....	20
4.1.	RECUENTO HISTÓRICO	20
4.2.	TEOREMA DE EUCLIDES FRENTE A LA ENSEÑANZA DE PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS.....	21
5.	Marco teórico.....	24
5.1.	SECUENCIA DIDÁCTICA.....	24
5.2.	TEOREMA DE EUCLIDES.....	25
5.3.	PROPORCIONALIDAD.....	28
5.4.	SEMEJANZA DE LOS TRIÁNGULOS	33
5.5.	ALTÍMETRO PEDAGÓGICO.....	35
5.5.1.	<i>Origen del Altímetro Pedagógico.....</i>	<i>35</i>
5.5.2.	<i>Descripción del altímetro pedagógico</i>	<i>37</i>
5.5.3.	<i>Partes del Altímetro Pedagógico.....</i>	<i>38</i>

5.5.4.	<i>Cómo se usa el Altímetro Pedagógico</i>	41
6.	Propuesta pedagógica: Secuencia Didáctica.....	44
6.1.	VISIÓN GENERAL.....	44
6.2.	RUTA DE APRENDIZAJE	45
6.3.	DESCRIPCIÓN DE APRENDIZAJES	47
6.3.1.	<i>Fase 1: Saberes previos</i>	48
	Situación No 1: Conceptos preliminares.....	48
	Situación No. 2: Construcciones básicas.....	48
6.3.2.	<i>Fase 2: Acercamiento al Teorema de Euclides</i>	48
	Situación No. 3: Ángulos internos de un triángulo	49
	Situación No. 4: Acercamiento al Teorema de Euclides.....	49
	Situación No. 5: Semejanza de triángulos.	49
6.3.3.	<i>Fase 3: Momento de evaluación</i>	49
	Situación No. 6: Hallar la altura de mi salón de clase.....	49
6.4.	GUÍA DEL DOCENTE	50
7.	Prueba piloto de la Secuencia Didáctica.....	77
8.	Conclusiones.....	79
9.	Proyección	81

Índice de tablas

Tabla 1: Exploración con los documentos normativos que rigen el Sistema Educativo Nacional.	5
Tabla 2: Registro de las observaciones hechas de los libros de texto frente a la enseñanza del Teorema de Euclides.....	11
Tabla 3: El Teorema de Pitágoras demostrado con el Teorema de Euclides.....	15
Tabla 4: Otra interpretación del Teorema de Euclides	27
Tabla 5: Datos de la Figura 14.....	36
Tabla 6: Ruta de aprendizaje.....	46
Tabla 7: Tabla de registro medidas internas de un triángulo.	65
Tabla 8: Tabla de registro de medidas	69
Tabla 9: Tabla de registro de medidas. Ejemplo de un resultado real en una aplicación	71
Tabla 10: Ejemplo tabla de registro, de un resultado real en una aplicación.....	72
Tabla 11: Tabla de registro de medidas	84
Tabla 12: Tabla de registro de medidas. Ejemplo de un resultado real en una aplicación	87
Tabla 13: Ejemplo tabla de registro, de un resultado real en una aplicación.....	88

Índice de figuras

Figura 1: Teorema de Euclides en la construcción y enseñanza de los números irracionales.....	18
Figura 2: Basada en la proposición 8, libro IV. Elementos	25
Figura 3: Triángulo rectángulo	27
Figura 4: Razón entre áreas.....	29
Figura 5: Razón entre segmentos.....	30
Figura 6: Razones homogéneas de volumen.....	31
Figura 7: Representación gráfica de no proporcionalidad	32
Figura 8: Razones proporcionales.....	32
Figura 9 Figuras semejantes.....	33
Figura 10: Triángulos semejantes	33
Figura 11 Ángulos congruentes entre lados proporcionales	34
Figura 12: Altura del triángulo rectángulo con respecto a la hipotenusa.	35
Figura 13: Triángulo rectángulo doblado por su altura sobre la hipotenusa.....	36
Figura 14: Triángulo rectángulo trazados frente a un muro.	36
Figura 15: Primer boceto del Altímetro Pedagógico.	37

Figura 16: Línea de proceso del Altímetro pedagógico	38
Figura 17: Altímetro pedagógico y sus partes	39
Figura 18: Cabezote	39
Figura 19: Barra de soporte.....	40
Figura 20: Base	40
Figura 21: Plomada	41
Figura 22: Flexómetro.....	41
Figura 23: Procedimiento para el uso del altímetro pedagógico.....	42
Figura 24: Proceso de la Secuencia Didáctica.	50
Figura 25: Puntos	54
Figura 26: Pasos para realizar un segmento con una medida dada.....	55
Figura 27: Pasos para realizar una recta	55
Figura 28: Polígono irregular en GeoGebra.....	56
Figura 29: Pasos para realizar un polígono regular	57
Figura 30: Toma de medida de un ángulo.	58
Figura 31: Razón entre dos segmentos.	60
Figura 32: Puntos equidistantes.	61
Figura 33: Recta por puntos equidistantes.	62
Figura 34: Construcción de un triángulo.	65

Figura 35: Ángulos internos de un triángulo.	65
Figura 36: Demostración de la medida de los ángulos internos de un triángulo.	66
Figura 37: Tarea actividad de cierre	67
Figura 38: Procedimiento para el uso del altímetro pedagógico.....	69
Figura 39: Triángulo rectángulo. Actividad de cierre Situación 4.....	71
Figura 40: Triángulos semejantes	74
Figura 41: Conjetura hecha por un estudiante acerca de medida proporcional.	78
Figura 42: Procedimiento para el uso del altímetro pedagógico.....	85
Figura 43: Triángulo rectángulo. Actividad de cierre Situación 4.....	87

Tabla de anexos

Anexo A. Red de las definiciones, postulados, nociones comunes y proposiciones que respaldan este trabajo	93
Anexo B. Situaciones de los estudiantes.....	97
Anexo C. Evidencias de la aplicación.....	112

1. Introducción

La propuesta pedagógica que se plantea a continuación tiene como objetivo el diseño de una Secuencia Didáctica y un material concreto que les permita a los estudiantes de octavo y noveno que, a partir de la inferencia del Teorema de Euclides, se posibilite un acercamiento a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos. Para ello se toma como base el libro Elementos de Euclides, los documentos legales que direccionan el trabajo matemático para estos grados, el software de geometría dinámica GeoGebra y las secuencias didácticas como metodología propuesta por el Ministerio de Educación en el año 2013. A continuación, se presenta la estructura que se desarrolla a lo largo del documento, en la cual se pretende abordar los aspectos necesarios para la consecución de los objetivos.

En la **justificación** se presenta el enunciado del Teorema de Euclides y se realiza su riqueza y la necesidad de crear nuevas estrategias y un material concreto que permite a los estudiantes intuir el teorema y tener un acercamiento a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos.

Seguidamente se describe el **objetivo** de la propuesta pedagógica, que plantea el diseño de una Secuencia Didáctica y un material concreto que permite con la ayuda del software de geometría dinámica GeoGebra, deducir el teorema de Euclides y a partir de él desarrollar el proceso de aprendizaje, de al menos una noción de proporcionalidad y semejanza de triángulos en estudiantes de octavo y noveno..

El capítulo llamado **Estado de Arte**, presenta un sondeo documental acerca del Teorema de Euclides, tanto en su aspecto histórico como en su aplicabilidad para la construcción de conceptos como proporcionalidad y semejanza de triángulos. En cuanto a la historia se hace un esbozo de los aportes que hace Euclides en su libro Elementos y para sondear sobre la

aplicabilidad pedagógica del Teorema, se realiza un barrido bibliográfico sobre la enseñanza de proporcionalidad y semejanza de triángulos

En el siguiente capítulo referente al **marco teórico** se pretende desarrollar algunos conceptos necesarios para la realización del trabajo como son Secuencia Didáctica, el Teorema de Euclides, proporcionalidad y semejanza de triángulos. Se hace también una descripción detallada del **Altímetro Pedagógico**, que es el material concreto que surge para que a través de la experimentación los estudiantes puedan deducir el teorema y utilizarlo para el cálculo de algunas medidas de longitud.

Seguidamente, con base en el diseño y elaboración del **Altímetro Pedagógico**, se crea una **propuesta pedagógica**, a partir de la Secuencia Didáctica como herramienta, para el cumplimiento del objetivo planteado. Dicha metodología tiene cuatro partes que son: la visión general, la ruta de aprendizaje, la descripción de aprendizajes y la actividad de cierre.

Después de una prueba piloto de la Secuencia Didáctica propuesta frente a la experimentación del **Altímetro Pedagógico**, se hace una revisión de los resultados, contrastándolos con los objetivos propuestos. Esta evaluación posibilita su reestructuración y enriquecimiento de la Secuencia Didáctica propuesta.

Se continúa presentando las conclusiones que muestran los alcances logrados con el diseño tanto del **Altímetro Pedagógico**, como de la Secuencia Didáctica propuesta, dando cuenta de la consecución de los objetivos propuestos. Sin embargo se evidencia también algunas imprecisiones del artefacto.

Finalmente, después de interactuar en múltiples contextos con el **Altímetro Pedagógico** y la aplicación de la Secuencia Didáctica propuesta, se plantean algunas posibilidades de exploración tanto del artefacto, del software de Geometría Dinámica GeoGebra, del teorema de Euclides como herramientas pedagógicas, no solo para el aprendizaje de proporcionalidad y semejanza de triángulos, sino para la construcción de otros conceptos de la geometría y la trigonometría.

2. Justificación.

Al reflexionar e indagar sobre cómo enseñar los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos, aparece el Teorema de Euclides como una herramienta que puede facilitar dicho quehacer pedagógico. Este teorema aparece expresado en varios libros de texto, como puede verse en la tabla 2, de la siguiente manera: en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de la longitud de la hipotenusa por la longitud de la proyección del cateto sobre sí misma, obteniendo dos triángulos semejantes entre sí y semejantes al triángulo que los contiene y que la altura trazada desde el ángulo recto a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos que determina sobre esta.

De aquí surge la necesidad de indagar sobre la riqueza de este teorema, su origen, su pertinencia, de acuerdo con los documentos legales que rigen la educación en Colombia, su uso en textos escolares y explotación que se ha hecho de ese potencial que se percibe en el teorema. Para ello se toma como base el libro “Elementos”, que contiene un conjunto de definiciones, postulados, nociones comunes y proposiciones geométricas jerárquicamente organizadas por Euclides y su equipo de trabajo, las cuales tienen vigencia desde hace más de veinte siglos.

Sin embargo, cabe resaltar que tanto el conocimiento geométrico como matemático que se expone en los Elementos, no es autoría de Euclides en su totalidad, pues realmente se conoce que civilizaciones muy antiguas “anteriores en milenios a la obra de Euclides, tuvieron entre sus aportes algo que, desde el punto de vista de los conocimientos prácticos, coincide perfectamente con los principios de la Geometría, de la Aritmética y del Álgebra”. (Levi, 2006. p. 43), pero fue Euclides el primero en recopilar, organizar e intentar crear una teoría matemática.

Descubriendo la riqueza del Teorema de Euclides se intuye que este puede ser una herramienta que posibilita una manera de introducir la proporcionalidad y semejanza de

triángulos para su enseñanza. Sin embargo, al realizar una búsqueda del mismo en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, para los grados octavo y noveno se indica que el estudiante debe reconocer y contrastar “propiedades y relaciones geométricas utilizadas en la demostración de teoremas básicos” (MEN, 2006. p. 86), se observa que se considera la importancia del uso de teoremas como Thales y Pitágoras, pero el de Euclides no se menciona.

De igual forma se rescata que la propuesta planteada en los Lineamientos Curriculares de matemáticas (1998), invita al docente a “aceptar que el conocimiento matemático es el resultado de la evolución histórica” (MEN, 1998. P 14), lo cual justifica la retrospectiva a los Elementos de Euclides. Por otro lado también afirma que el maestro debe “valorar la importancia que tienen los procesos constructivos” (MEN, 1998. P 14).

A partir de lo anterior se gesta el diseño, la elaboración y el uso de un artefacto que en adelante se llamará **Altímetro Pedagógico**, que pretende ser un recurso didáctico que los estudiantes puedan utilizar en una situación concreta y a partir de ella descubrir relaciones y regularidades que les permitan un acercamiento al teorema de Euclides y por ende a los conceptos de semejanza y proporcionalidad de triángulos privilegiando “como contexto del hacer matemático escolar las situaciones problemáticas” (MEN, 1998. P 15), las cuales, de acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional, en los Lineamientos Curriculares de matemáticas se entienden como aquellas que.

Proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos. Estos problemas pueden surgir del mundo cotidiano...de otras ciencias y de las mismas matemáticas. (MEN, 2006. p. 52)

Para iniciar el proceso de exploración del uso del Teorema de Euclides en la construcción de conceptos matemáticos, se hace un análisis de los documentos legales frente de la educación matemática, Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y Derechos básicos de

Aprendizaje (DBA), y se continúa haciendo una revisión somera de libros de texto actuales y el uso que estos hacen del mismo.

La tabla 1 muestra el resultado de la exploración realizada en los documentos normativos que rigen el Sistema Educativo Nacional, los cuales son los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los DBA (MEN, 2016). En la primera columna de manera textual lo referente a proporcionalidad, semejanza de triángulos y el uso de teoremas. En la segunda columna se presenta un comentario por medio de preguntas como ¿los estudiantes deben conocer, comprender y utilizar teoremas para la solución de problemas? y ¿los estudiantes deben utilizar material concreto para la comprensión de los conceptos? Preguntas que posibilitan determinar la importancia del uso del material concreto y la importancia de conocer y utilizar teoremas como el de Euclides.

Tabla 1: Exploración con los documentos normativos que rigen el Sistema Educativo Nacional.

Citación textual	Interpretación
Derechos Básicos de aprendizaje 8° (2016)	
<i>Numeral 6. “Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto.</i>	¿Los estudiantes deben conocer, comprender y utilizar teoremas para la solución de problemas?
Evidencias de aprendizaje	En este numeral se intuye que los estudiantes deben conocer y utilizar los teoremas para identificar relaciones de congruencia y semejanza.
<i>*Discrimina casos de semejanza de triángulos en situaciones diversas.</i>	
<i>*Resuelve problemas que implican aplicación de los criterios de semejanza.</i>	¿Los estudiantes deben utilizar material concreto para la comprensión de los conceptos? No lo expresa.
<i>*Compara figuras y argumenta la posibilidad</i>	

de ser congruentes o semejantes entre sí”.

(MEN, 2016. p. 62)

Numeral 7. “Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y los aplica en situaciones reales.

Evidencias de aprendizaje

**Describe teoremas y argumenta su validez a través de diferentes recursos.*

**Argumenta la relación pitagórica por medio de construcción al utilizar material concreto.*

**Reconoce relaciones geométricas al utilizar el teorema de Pitágoras y Thales, entre otros.*

**Aplica el teorema de Pitágoras para calcular la medida de cualquier lado de un triángulo rectángulo.*

**Resuelve problemas utilizando teoremas básicos” (MEN, 2016. p. 62)*

¿Los estudiantes deben conocer, comprender y utilizar teoremas para la solución de problemas?

El numeral 7 sí expresa concretamente que los teoremas son herramientas fundamentales a la hora de reconocer relaciones geométricas, identificar regularidades, argumentar propiedades y resolver problemas, pero centra su atención en los teoremas de Pitágoras y Thales, ignorando la riqueza del teorema de Euclides.

¿Los estudiantes deben utilizar material concreto para la comprensión de los conceptos?

El numeral 7 enuncia que el estudiante “describe teoremas y argumenta su validez a través de diferentes recursos” y aunque no menciona material concreto se puede intuir. En otro aparte afirma que el estudiante “argumenta la relación pitagórica por medio de construcción al utilizar material concreto”

Derechos Básicos de aprendizaje 9° (2016)

Numeral 5 “Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (Teorema de Thales y Teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes.

Evidencias de aprendizaje:

**Describe y justifica procesos de medición de longitudes.*

**Explica propiedades de figuras geométricas que se involucran en los procesos de medición.*

**Justifica procedimientos de medición aparte del Teorema de Tales y Teorema de Pitágoras y relaciones intra e interfigurales.*

**Valida la precisión de instrumentos para medir longitudes.*

**Propone alternativas para estimar y medir con precisión diferentes magnitudes”. (MEN, 2016. p. 68)*

¿Los estudiantes deben conocer, comprender y utilizar teoremas para la solución de problemas?

Sí, y concretamente menciona la utilidad de los teoremas de Thales y de Pitágoras para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo y aunque no nombra concretamente el Teorema de Euclides deja abierta la posibilidad al uso de otros teoremas o herramientas geométricas.

¿Los estudiantes deben utilizar material concreto para la comprensión de los conceptos?

Este numeral no habla específicamente de material concreto, pero hace referencia a instrumentos para medir longitudes y también de alternativas para estimar y medir con precisión diferentes magnitudes.

Numeral 6 “Conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y

¿Los estudiantes deben conocer, comprender y utilizar teoremas para la solución de problemas?

teoremas básicos.

Evidencias de aprendizaje:

**Reconoce regularidades de formas bidimensionales y tridimensionales.*

**Explica criterios de semejanza y congruencia a partir del Teorema de Thales.*

**Compara figuras geométricas y conjetura sobre posibles regularidades.*

**Redacta y argumenta procesos llevados a cabo para resolver situaciones de semejanza y congruencia de figuras.” (MEN, 2016. p. 69)*

Sí, el numeral 6 hace referencia a conjeturar a partir de criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos, concretamente a partir del teorema de Thales, dejando de lado el teorema de Euclides.

¿Los estudiantes deben utilizar material concreto para la comprensión de los conceptos?

No hace referencia explícita a la manipulación de material concreto.

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar. (2006)

**“Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados” (MEN, 2006. p. 87)*

¿Los estudiantes deben conocer, comprender y utilizar teoremas para la solución de problemas?

Concretamente no se refiere a los teoremas pero se puede intuir que son útiles para generalizar procedimientos de cálculo para encontrar longitudes, áreas y volúmenes

¿Los estudiantes deben utilizar material concreto para la comprensión de los conceptos?

No habla concretamente de la comprensión de los conceptos, pero sí se puede ver en estos estándares, la importancia de que el estudiante conozca, seleccione y utilice diferentes instrumentos de medición.

“Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas”. (MEN, 2006. p. 86)

¿Los estudiantes deben conocer, comprender y utilizar teoremas para la solución de problemas?

En este aparte se hace referencia a que los estudiantes deben verificar, reconocer y contrastar propiedades utilizadas en la demostración de teoremas,

“Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Thales)”. (MEN, 2006. p. 86)

¿Los estudiantes deben utilizar material concreto para la comprensión de los conceptos?

En este aparte no se hace referencia explícita a la necesidad de usar material concreto.

“Aplico y justifico criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas”. (MEN, 2006. p. 86)

“Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas”. (MEN, 2006. p. 86)

A partir de la tabla anterior se puede intuir que se ha minimizado la riqueza del Teorema de Euclides y su aporte en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad y semejanza de triángulos en los grados de octavo y noveno de la educación media en Colombia. Así mismo, es evidente la importancia que estos documentos le dan al uso de material concreto para la aplicación de los conceptos matemáticos abordados, en donde la comprensión del Teorema de Euclides puede ser útil en dicho proceso. De la misma manera se evidencia la importancia de la formulación y resolución de problemas, desde el reconocimiento de las relaciones geométricas (proporcionalidad y semejanza).

La anterior información se corrobora con un barrido bibliográfico de algunos libros de texto de matemáticas de octavo y noveno. Dicha revisión se ha registrado en la tabla 2, que da cuenta de las observaciones hechas frente a la enseñanza del Teorema de Euclides como herramienta para la comprensión de diferentes conceptos matemáticos, como proporcionalidad y semejanza de triángulos en dichos documentos.

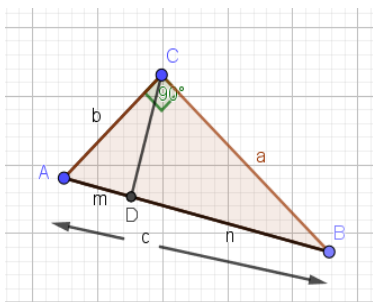
La selección se basó en textos que correspondieran a los grados octavo o noveno, editados entre el año 2013 y 2017. Además, se estableció como condición que al menos una institución educativa lo estuviera utilizando y que estos abordaran el Teorema de Euclides bien sea dentro de las explicaciones planteadas o los ejercicios propuestos. De igual manera se tuvo en cuenta que sus contenidos respondieran a los requerimientos legales frente a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) y DBA (2016). Estos textos fueron organizados por variables como lo son el origen del teorema de Euclides desde una perspectiva histórica, uso de distintas formas de ser presentado el teorema (enunciado, algebraico y geométrico), explicación de la demostración y para finalizar alguna aplicación en el contexto escolar.

En los documentos revisados se busca evidenciar qué tanta importancia se le da al Teorema de Euclides, bien sea como herramienta para el abordaje de temas como proporcionalidad y semejanza de triángulos, o como inferencia del estudio de dichos temas. Para dicho fin se muestra en forma textual cómo cada uno de estos textos aborda el Teorema de Euclides en la resolución de problemas a través de preguntas como: ¿existe algún tipo de

interpretación o deducción del teorema?, ¿se ofrece a los estudiantes alguna explicación sobre la veracidad del teorema? y ¿aparecen ejercicios de aplicación? Finalmente se relacionan los hallazgos encontrados, luego de la revisión de los textos analizados, lo cual se sintetiza en la tabla 2.

Tabla 2: Registro de las observaciones hechas de los libros de texto frente a la enseñanza del Teorema de Euclides.

Planteamiento del Teorema de Euclides ¹	Interpretación
<u>Libro de texto</u> <i>Juega y construye la Matemática. 8º.(Orozco, 2013. p. 206)</i> El teorema dice: <i>En un triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de la longitud de la hipotenusa por la longitud de la proyección del cateto sobre sí misma, significa que en todo triángulo rectángulo como el que se muestra a continuación se cumple que:</i>	¿Existe algún tipo de interpretación o deducción del teorema? Sí, hay unas deducciones en los numerales a, b, c, d, pero aparecen solamente enunciadas, no demostradas. ¿Se ofrece a los estudiantes alguna explicación sobre la veracidad del teorema? No, debe aceptarse como verdadero. ¿Aparecen ejercicios de aplicación? El texto presenta una actividad en la



a. Al trazar la altura **h** sobre la hipotenusa, se obtienen dos triángulos semejantes **ADC** y

¹ Lo que aparece en esta columna es copiado textualmente de los libros, por lo tanto no se titulan las figuras.

BDC.

- b. La proyección de lado **a** sobre hipotenusa **c**, es el segmento **n** y la proyección de lado **b** sobre la hipotenusa **c**, es el segmento **m**.
- c. La altura **h** correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos

que divide a ésta. $\frac{n}{h} = \frac{h}{m}$, por lo tanto

$$h^2 = (m)(n)...$$

- d. La altura correspondiente a la hipotenusa es cuarta proporcional entre la hipotenusa y los

catetos $\frac{c}{a} = \frac{b}{h} ...$

- e. Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella, de la

siguiente forma: $\frac{c}{a} = \frac{a}{n}$ y $\frac{c}{b} = \frac{b}{m}$

cual el estudiante debe hallar el valor de la altura o del lado que hace falta en seis triángulos rectángulos presentados.

Libro de Texto

Vamos a aprender matemáticas 9° (MEN, 2017.
p. 78 Y 79

Aparece con dos nombres que son:

Teorema de la altura y dice:

El cuadrado de la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la misma.

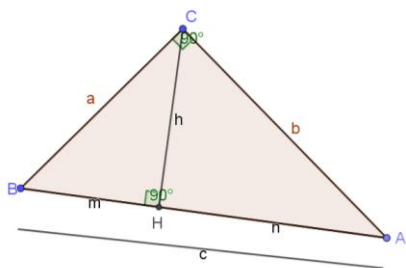
Luego aparece el siguiente ejemplo:

¿Existe algún tipo de interpretación o deducción del teorema?

No, solamente aparece enunciado el teorema.

¿Se ofrece a los estudiantes alguna explicación sobre la veracidad del teorema?

La veracidad del teorema se muestra a



Por el teorema de Pitágoras, en el triángulo rectángulo BCH de la figura anterior se cumple que:

$$a^2 = m^2 + h^2$$

Por el teorema de la altura se tiene que

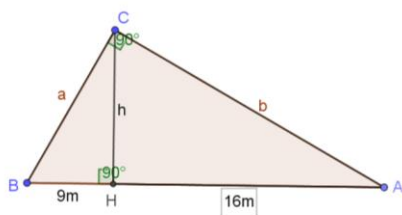
$$h^2 = m \cdot n$$

Luego,

$$a^2 = m^2 + m \cdot n = m(m + n) = m \cdot c$$

Y aparece a manera de ejemplo la siguiente aplicación

Para calcular la medida del lado a del triángulo rectángulo de la siguiente figura se aplican el teorema de la altura y el teorema de Pitágoras.



partir del Teorema de Pitágoras.

¿Aparecen ejercicios de aplicación?

Aparecen unos ejercicios de aplicación, resueltos y otros para que los resuelva el estudiante.

-
- *Por el teorema de la altura:*

$$h^2 = 9 \cdot 16 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12m$$

- *Por el teorema de Pitágoras*

$$\alpha^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow \alpha^2 = 225 \Rightarrow \alpha = 15m$$

Teorema del cateto que dice:

El cuadrado de un cateto de un triángulo rectángulo es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre la misma.

Seguidamente aparece un ejemplo en el que se utilizan razones trigonométricas para resolver un triángulo.

Si bien, la tabla 2 no representa la descripción de una investigación a profundidad, sí da indicios de que la enseñanza del Teorema de Euclides, en algunos casos, se limita a enunciarlo como una mera proposición algorítmica. Cabe aclarar que los libros que se tuvieron en cuenta fueron seleccionados entre varios, pero solo estos abordaban el Teorema de Euclides.

La anterior indagación documental lleva a la pregunta ¿Cómo enseñar los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos a partir del Teorema de Euclides a través de una Secuencia Didáctica que implique el uso de material concreto?, a la cual se pretende dar respuesta con la propuesta pedagógica planteada.

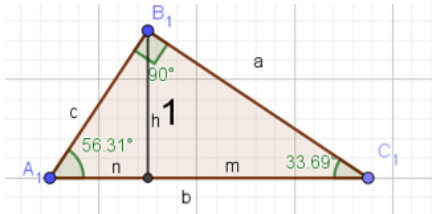
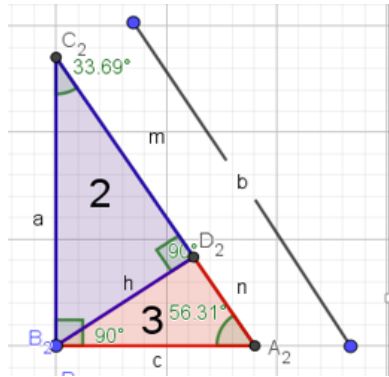
Las observaciones realizadas tanto en los referentes legales como en los libros de texto llevan a la posibilidad de diseñar, y aplicar estrategias pedagógicas que rescaten el Teorema de Euclides como herramienta para la enseñanza y aprendizaje de conceptos como proporcionalidad y semejanza de triángulos y su aplicación en situaciones matemáticas concretas.

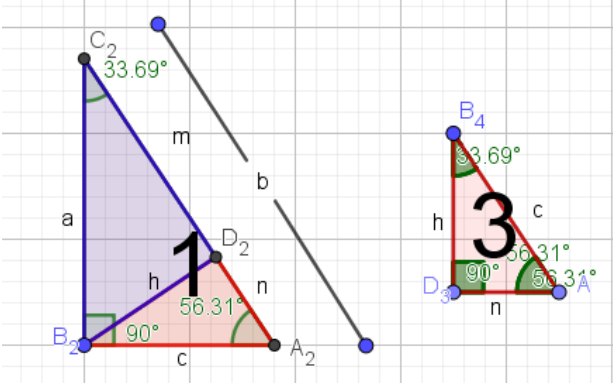
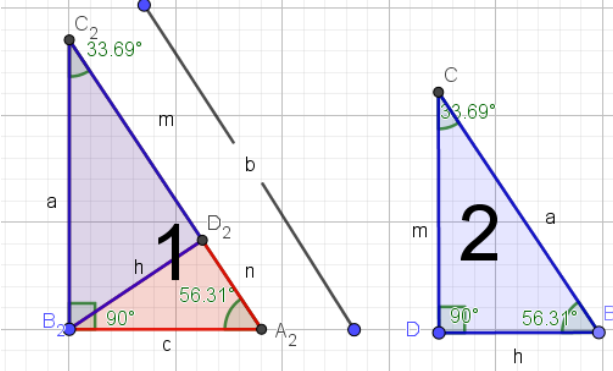
También del Teorema de Euclides se puede rescatar la importancia que tiene para demostrar otros teoremas como por ejemplo el Teorema de Pitágoras, como se puede ver en la Tabla 3.

En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa forma dos triángulos adicionales y los tres triángulos, tanto los que se forman con la altura como el triángulo que los contiene son semejantes porque tanto los ángulos correspondientes son congruentes, como los lados correspondientes son proporcionales.

El teorema de Euclides dice que la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos que determina sobre ella. Partiendo de esta premisa se puede llegar a demostrar el Teorema de Pitágoras, como se muestra en la tabla 3.

Tabla 3: El Teorema de Pitágoras demostrado con el Teorema de Euclides.

	$(1) \frac{m}{h} = \frac{h}{n}$	Teorema de Euclides relativo a la altura
	(2) La altura del triángulo 1 sobre la hipotenusa lo divide en los triángulos 2 y 3	

	(3) Estableciendo relación entre los lados correspondientes de los triángulos 1 y 3	$\frac{n}{c} = \frac{c}{b}$ $\frac{n}{c} = \frac{c}{m+n}$
	(4) Estableciendo relación entre los lados correspondientes de los triángulos 1 y 2	$\frac{a}{m} = \frac{b}{a}$ $\frac{a}{m} = \frac{m+n}{a}$
	(5) Por la primera ecuación del numeral (3) se puede decir que	$c^2 = n \cdot b$
	(6) Por la primera ecuación del numeral (4) se puede decir que	$a^2 = m \cdot b$

	(7) Si sumamos componente a componente las ecuaciones de los numerales (5) y (6)	$a^2 + c^2$ $= n.b + m.b$ $a^2 + c^2 = b(m + n)$ Como $b = (m + n)$
	(8) Llegando así al teorema de Pitágoras	$a^2 + c^2 = b^2$

El Teorema es de gran utilidad para que el estudiante tenga un acercamiento al concepto de proporcionalidad puesto que se pueden establecer diferentes razones entre la altura de un triángulo rectángulo trazada sobre la hipotenusa y cada uno de los segmentos determinados sobre ella, hasta que descubra que dos pares de razones son iguales, aproximándose así a lo que significa proporcionalidad. Después de que el estudiante se acerque al concepto de proporcionalidad debe descubrir, a través de la resolución de situaciones problema propuestas, la congruencia de ángulos, para que así pueda intuir el concepto de semejanza de triángulos.

Por otra parte se descubre también la utilidad del Teorema para la construcción y enseñanza de los números irracionales $\overline{p}$, donde p es un número primo mayor que 1, puesto que el teorema dice que la altura del triángulo rectángulo sobre la hipotenusa, es media proporcional entre los segmentos que determina sobre ella, como se muestra a continuación:

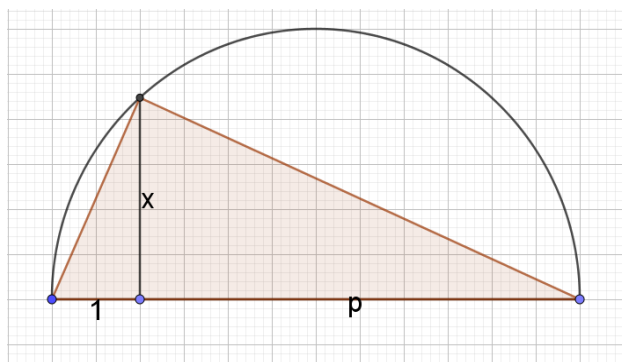


Figura 1: Teorema de Euclides en la construcción y enseñanza de los números irracionales.

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{p} \text{ por el teorema de Euclides}$$

$$\text{Entonces } x^2 = 1 \cdot p$$

$$\text{O sea que } x = \sqrt{p}$$

3. Objetivos.

3.1. Objetivo General

Diseñar una Secuencia Didáctica y un material concreto que permite con la ayuda del software de geometría dinámica GeoGebra, deducir el teorema de Euclides y a partir de él desarrollar el proceso de aprendizaje, de al menos una noción de proporcionalidad y semejanza de triángulos en estudiantes de octavo y noveno utilizando como herramienta el **Altímetro Pedagógico**.

3.2. Objetivos específicos

Diseñar y construir un artefacto que, a partir de su uso, permita a los estudiantes inferir el Teorema de Euclides y con él acercarse a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos.

Elaborar una Secuencia Didáctica que, a través del uso de material concreto y el programa de geometría dinámica GeoGebra, brinde herramientas a los estudiantes, de octavo y noveno, para la comprensión del Teorema de Euclides y los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos.

Plantear situaciones problema sobre semejanza y proporcionalidad de triángulos, cuya resolución se facilite a través del uso del artefacto construido (**Altímetro Pedagógico**).

Diseñar una Secuencia Didáctica que a través de situaciones problema ponga a prueba la eficacia del artefacto construido (**Altímetro Pedagógico**) para deducir el Teorema de Euclides y a través de él se logre el acercamiento a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos.

4. Estado de arte

El interés por conocer las aplicaciones pedagógicas del Teorema de Euclides en la construcción de conceptos como proporcionalidad y semejanza de triángulos, ha llevado a la realización de un sondeo documental desde su historia, hasta las investigaciones que se han suscitado al respecto. En cuanto a la historia se hace un esbozo de los aportes que hace Euclides en su libro Elementos. De igual forma se ha hecho una búsqueda frente a las contribuciones académicas recientes sobre las aplicaciones pedagógicas del Teorema, y a investigaciones referentes a la enseñanza de proporcionalidad y semejanza de triángulos.

4.1. Recuento histórico

El origen del conocimiento matemático es tal vez tan antiguo como la misma humanidad. Por ejemplo, existen pruebas que desde el siglo XIX antes de Cristo, los egipcios ya tenían una matemática aplicada a las necesidades, lo que los llevaba a resolver problemas con cierta complejidad.

Levi (2006) afirma que este conocimiento matemático no es de origen griego y que son muchos los historiadores que hacen referencia a que antes de los aportes hechos por Euclides ya se encontraban principios que aportaban a los conocimientos matemáticos. Prueba de lo anterior ha sido el resultado de unas investigaciones y excavaciones hechas en Babilonia, en las que se han encontrado “millares de tablas de ladrillo referidas a dos o tres mil años antes de Euclides, en los cuales se pudo leer un verdadero tratado de Geometría, Aritmética, Álgebra, comprendiendo ecuaciones de segundo y aun de tercer grado...” (Levi, 2006 p.43).

Hablar de Euclides es hablar de los Elementos, su gran obra, en la cual aprovechando el conocimiento teórico y práctico que existía, y tal vez sin proponérselo intentó crear la primera teoría matemática, pues lo recopiló y organizó, como un sistema teórico, teniendo en cuenta que la validez universal de algún concepto debe pasar por la deducción y la demostración, partiendo de los postulados, que son conocimientos básicos que se admiten sin necesidad de demostración.

La profesora Clara Sánchez (2012), en su artículo “La historia como recurso didáctico”, afirma que, existe en muchos docentes de la educación media un desconocimiento de la historia de la geometría, específicamente de la obra de Euclides, que es, sin duda, la obra matemática más importante de todos los tiempos y de los aportes que esta puede proporcionar a la enseñanza de la geometría, convirtiéndose en un recurso valioso incluso en el campo de la didáctica. (p. 72)

4.2. Teorema de Euclides frente a la enseñanza de proporcionalidad y semejanza de triángulos.

En cuanto a la enseñanza de proporcionalidad y semejanza de triángulos se ha dejado de lado la riqueza del Teorema de Euclides y cuando se tienen en cuenta se ha centrado en la memorización de postulados dejando de lado la comprensión del mismo. Vasco (2006), sostiene que las temáticas de la geometría se ha reducido a nivel mundial de tal manera que, actualmente se puede ver “el abandono de la geometría en casi todas las partes del mundo, la pérdida de la más elemental imaginación tridimensional y el entrenamiento de los jóvenes en la manipulación de sistemas simbólicos formales, sin ninguna conceptualización que los sostenga” (Vasco, 2006. p. 29) esto se evidencia en los libros de texto analizados que dan cuenta de que la enseñanza de la geometría se limita a enunciar teoremas y aplicarlos en ejercicios descontextualizados.

Por ejemplo, en el libro que se citó en la tabla 2 *Vamos a aprender matemáticas*, (MEN, 2017. p. 78 y 79) sin ninguna explicación se procede a presentar unos ejemplos de ejercicios resueltos y otros similares que deben realizar los estudiantes

Por otra parte, en lo referente al proceso de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad se puede ver en la investigación hecha por el Instituto Nacional para la Evaluación en Educación (INEE) en México (2006), cuyo resultado muestra que los estudiantes obtienen bajos resultados, a pesar de tratarse “de un contenido matemático que se aborda en todos los niveles educativos y que, además, su uso trasciende el ámbito escolar” (Hernández R., 2015. p. 19). Siendo este uno de los conceptos más aplicados en contextos de la cotidianidad, la escuela debía permitir al estudiante su aprendizaje significativo de tal manera que este saber pueda ser aplicado contextos extracurriculares.

Otros autores refieren que en la enseñanza de la matemática de la escuela “la razón se presenta como una división indicada, como un cociente exacto o como un operador multiplicativo. En cualquiera de los tres casos, el tratamiento que se hace de la razón termina por identificarla con un número” (Perry, Guacaneme, & Fernández , 2003. p. 24). Lo anterior reduce a una mera aplicación de operaciones básicas, en donde lo importante sería el resultado, dejando de lado la comprensión de lo que realmente ocurre en las relaciones de proporcionalidad. Al respecto Perry et al., (2003) argumentan que “para no desatender su naturaleza, la razón debería ser tratada como una relación y no como el resultado de una operación; así mismo, la proporción debería ser presentada como una relación entre relaciones y no como una igualdad entre resultados de operaciones” (p. 23).

Lo anterior se sustenta con la definición que Euclides hace de razón en el libro V que dice: “Razón es una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de su cantidad” [V, Def. 3], y cuando se refiere a magnitudes se asume como una cantidad de medida.

La propuesta pedagógica que se plantea pretende que, sin dejar de lado la comprensión del concepto de razón como una relación, sea el cociente entre los dos términos de la razón (antecedente y consecuente) el que muestre el resultado de dicha relación. Euclides en su libro elementos [V, Def. 6] afirma que las magnitudes que tienen la misma razón se llaman proporcionales. Si a esta idea se le agrega la posibilidad del uso de material concreto y del software de geometría dinámica GeoGebra que favorezca la comprensión del estudiante, se potencializa el uso de estos conceptos en diferentes situaciones.

Sin embargo, la problemática planteada no radica solo en las dificultades presentadas en las estrategias pedagógicas aplicadas. Para Perry et al. (2003), abordar esta situación desde los diseños curriculares debe ser una prioridad en donde estos “propicien el aprendizaje escolar de tales conceptos y la utilidad de los mismos para resolver problemas específicos y para promover el desarrollo de habilidades y competencias”. (Perry et al., 2003. p. 25). Estos mismos autores brindan algunas herramientas que posibilitan la comprensión del proceso más allá del descubrimiento del resultado.

De igual forma ocurre con el concepto de semejanza de triángulos que, de acuerdo con Briceño y Alamillo (2017), su principal dificultad radica en que las matemáticas se están enseñando en forma simbólica dejando de lado la manipulación de objetos. Estos mismos autores, citando a Barrantes, Balletbo y Fernández (2014) resaltan que “la enseñanza de la geometría es difícil por el nivel de abstracción visual, mental y espacial, pues la enseñanza es presentada de forma tradicional, es decir, enfocándose en el aspecto memorístico” (Briceño & Alamillo S., 2017. p. 112)

Al respecto, Rivas, Godino & Castro (2012), referidos por Hernández (2015) afirman que “diferentes estudios en los que se concluye que la escuela se limita a la enseñanza de reglas (dejan de lado) procedimientos que carecen de significado para los alumnos y que no permiten que se ponga en juego un razonamiento proporcional” (Hernández R., 2015. p. 23)

El sondeo teórico realizado, los análisis de los documentos legales y los libros de texto llevan a la construcción de la pregunta ¿Cómo enseñar los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos a partir de intuir el Teorema de Euclides a través de una Secuencia Didáctica que implique el uso de material concreto?

5. Marco teórico

Para el desarrollo del presente trabajo resulta necesario realizar una aproximación a la definición y uso de las Secuencias Didácticas, la demostración del Teorema de Euclides que aparece en los Elementos, los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos. También se hace una descripción del **Altímetro Pedagógico**, que es un material concreto surgido del estudio de la posibilidad de medir alturas no fácilmente accesibles, tomando algunas medidas y aplicando el Teorema de Euclides

5.1. Secuencia Didáctica

Se ha escogido Secuencia Didáctica desde la perspectiva que ha abordado el MEN que en el 2013 expide una serie de instrumentos que propone un quehacer pedagógico basado en esta metodología. El documento “Secuencia Didáctica en Matemáticas” (2013), plantea que una secuencia se realiza en varias sesiones, que para el presente texto se llaman situaciones y están basadas “en la resolución de problemas y la indagación” (MEN, 2013. p. 9).

Cada una de las situaciones planteadas tendrá como objetivo facilitar la comunicación entre los estudiantes de tal manera que se les brinde “la oportunidad de expresarse en sus propias palabras, de escribir sus propias opiniones, hipótesis y conclusiones, a través de un proceso colaborativo y libre que les aumente la confianza en sí mismos y su autonomía como aprendices.” (MEN, 2013. p. 9).

Es así como la secuencia se fundamenta en dos elementos, situaciones problema y el contenido matemático que en este caso es el Teorema de Euclides como pretexto para el aprendizaje de la proporcionalidad y semejanza de triángulos.

La estructura que se plantea tiene cuatro partes. Primero la visión general, que trata el planteamiento del objetivo en donde se indicará lo que se quiere lograr a partir de la ejecución de la Secuencia Didáctica, se sigue con la ruta de aprendizaje que marca el recorrido que se realiza para el cumplimiento del objetivo principal. La tercera parte es la descripción de aprendizajes que refieren los objetivos particulares de cada una de las situaciones y por último se realiza una actividad de cierre que corresponde a la evaluación del cumplimiento del objetivo.

5.2. Teorema de Euclides

La propuesta pedagógica planteada surge a partir del **Teorema de Euclides** tomado del libro “Elementos”, que ha sido el principal recurso a tener en cuenta para la Secuencia Didáctica planteada para la enseñanza de la proporcionalidad y la semejanza de triángulos Anexo 1. A continuación se exponen las proposiciones del autor que hacen referencia a dicho teorema:

[VI, 8] Si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al (triángulo) entero y entre sí. (Euclides, 1994. p. 69)

[VI, 8] Demostración: (Parte de la demostración textual según los Elementos)

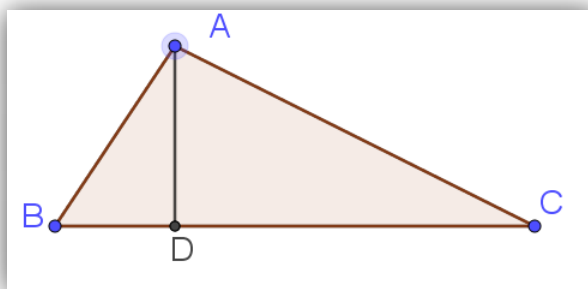


Figura 2: Basada en la proposición 8, libro IV. Elementos

Sea ABC el triángulo rectángulo que tiene el ángulo recto BAC , y trácese desde A

hasta BC la perpendicular AD

Digo que cada uno de los triángulos ABD y ADC es semejante al (triángulo) entero ABC y también (son semejantes) entre sí.

Pues como el (ángulo) BAC es igual al (ángulo) ADB ; porque cada uno de ellos es

recto; y el (ángulo) correspondiente a B es común a los dos triángulos ABC , ABD ,

entonces, el (ángulo) restante ACB es igual al (ángulo) restante BAD [I, 32]; por

tanto, el triángulo ABC y el triángulo ABD son equiángulos, Luego, como el (lado)

BC que subtiende el (ángulo) recto del triángulo ABC es al (lado) BA que

subtiende el (ángulo) recto del triángulo ABD , así el propio (lado) AB que

subtiende el ángulo correspondiente a C del triángulo ABC es al (lado) BD que

subtiende el (ángulo) igual BAD del triángulo ABD , y también el (lado) AC al

(lado) AD que subtiende el ángulo correspondiente a B común a los dos triángulos

[VI, 4]. Por tanto, el triángulo ABC y el triángulo ABD son equiángulos y tienen

proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales. Entonces el

triángulo ABC es semejante al triángulo ABD [VI, Def. 1].” (Euclides, 1994. p. 69)

[VI, 8] Aporisma: “A partir de esto queda claro que si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, la recta trazada es la media proporcional de los segmentos de la base”. (Euclides, 1994. p. 70)

La forma como se puede reescribir el teorema de Euclides sería:

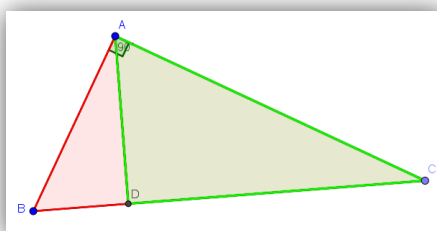


Figura 3: Triángulo rectángulo

La forma como se podría reescribir la demostración que hace Euclides sería la que se muestra a continuación en la Tabla 4:

Tabla 4: Otra interpretación del Teorema de Euclides		
AFIRMACIÓN		RAZÓN
1.	$\angle BAC \cong \angle ADB$	Rectos
2.	$\angle ABD \cong \angle ABC$	Común
3.	$\angle ACB \cong \angle BAD$	[I, 32]
	$\angle ACD \cong \angle BAD$	La suma de los 3 ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.
4.	$\triangle ABC$ y $\triangle ABD$	Equiángulos
5.	$\frac{BC}{BA} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{AD}$	[VI, 4]
		En un triángulo equiángulo, los lados que corresponden a los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden a los ángulos iguales son correspondientes.

6. Lados de $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$ son proporcionales.
Por los numerales (4) y (5)
7. $\triangle ABC \sim \triangle ABD$ [VI, Def. 1]
Y
 $\triangle ABC \sim \triangle ADC$
Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que corresponden a los ángulos iguales.
8. $\triangle ABD$ y $\triangle ADC$ son semejantes al $\triangle ABC$
Por los numerales (4) (5) (6) (7)
9. $\angle BDA \cong \angle ADC$ (7) (8)
Rectos
10. $\angle BAD \cong \angle ACD$
Por el numeral (3)
11. Ángulos restantes
[I, 32]
 $\angle ABD \cong \angle DAC$
12. $\triangle ABD$ y $\triangle ADC$ son equiángulos.
Por los numerales (10) (11) (12)
13. $\frac{BD}{DA} = \frac{AD}{DC} = \frac{BA}{AC}$ [VI, 4]
14. $\triangle ABD \sim \triangle ADC$ [VI, Def. 1]
-

5.3. Proporcionalidad

Hablar de proporcionalidad implica abordar el concepto de razón, que es la relación entre dos números o entre dos cantidades y lo que lleva a la proporcionalidad es la comparación entre dos razones. Según Arratía, y otros (2016) refiriendo a Piaget afirman que el concepto de

proporcionalidad se puede construir más fácilmente iniciando con la manipulación de elementos, que permitan comprender de una forma cualitativa y lógica antes de comprender una estructura cuantitativa. Según Guacaneme (2012) hay tres definiciones del libro V que nos introducen en este tema de la proporcionalidad como son:

[V, Def. 1] “Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor” (Euclides, 1994. p. 9)

Esta primera definición parece ser un intento de especificar razón que es un término relativo a la comparación de dos magnitudes, una menor y una mayor y según la traductora Puertas (1994) es lo que hoy se conoce como “ser submúltiplo de” (Ver Figura 4)

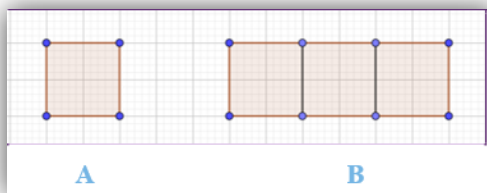


Figura 4: Razón entre áreas

En la figura 4, se dice que el área de la figura A es submúltiplo del área de la figura B, porque la figura A está contenida en la figura B un número exacto de veces.

[V, Def. 2] “Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor”.
(Euclides, 1994. p. 9)

Esta definición se refiere al caso contrario, en el que la magnitud mayor contiene a la menor, o sea que se refiere a la propiedad “ser múltiplo de” (Ver Figura 5)

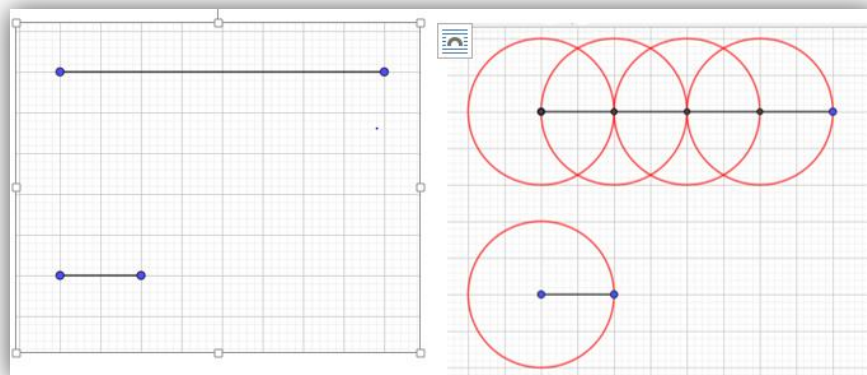


Figura 5: Razón entre segmentos

En la figura anterior se dice que el segmento mayor es múltiplo del menor porque podría contener al segmento menor un número de veces (cuatro veces para este caso). Se podría decir también que la razón es de 4 a 1 y se escribe 4:1.

[V, Def. 3] “Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas” (Euclides, 1994. p. 9)

Según Guacaneme cuando en esta definición se hace mención al tamaño entre dos magnitudes, que para el caso son de un objeto geométrico, hace referencia a una característica cuantitativa, no numérica es decir, “el tamaño de un segmento es la cantidad de longitud del mismo, pero no la medida de la cantidad de su longitud, o bien, el tamaño de una región es la cantidad de superficie de esta, pero no su área” (Guacaneme S., 2012. p. 117)

Cuando en la definición se lee homogéneas se refiere a que las dos magnitudes comparadas en una razón son de longitud, o las dos son de superficie o las dos son de volumen. Por ejemplo, se puede establecer una relación o una comparación entre las siguientes figuras que son homogéneas porque todas son figuras sólidas que tienen volumen. O sea que el volumen de estas figuras se puede comparar por medio de una razón: (Ver Figura No. 6)



Figura 6: Razones homogéneas de volumen

[V, Def. 5] “Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente” (Euclides, 1994. p. 11)

[V, Def. 6] “Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón” (Euclides, 1994. p. 12)

En este concepto de la proporcionalidad, la obra de Euclides los Elementos, concretamente el libro V, Def. 5 se constituyó en un eje fundamental para “la formulación de relaciones entre magnitudes, sin interesar si estas eran o no conmensurables y, en consecuencia, sin recurrir a los valores numéricos de sus medidas para establecer tanto las razones entre magnitudes, como la proporción entre razones” (Guacaneme, E. 2012). Como lo dice también Puertas “suele considerarse que esta Def. V, 5 constituye la piedra angular de la teoría de la proporción” (Puertas, 1994. p. 12)

Según Guacaneme (2012), los historiadores resaltan la importancia de esta definición, y aunque su lenguaje no sea fácil de entender para un lector moderno la tarea se puede facilitar acudiendo a representaciones gráficas. (Ver Figura 7)

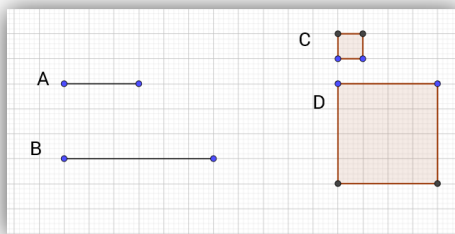


Figura 7: Representación gráfica de no proporcionalidad

Si se comparan los segmentos A y B se puede observar que el segmento A es menor que el segmento B y también que la superficie C es menor que la superficie D.

Además, A es múltiplo de B, porque el segmento A se puede representar un número de veces en el segmento B y la superficie C se puede representar un número de veces en la superficie D, entonces se puede comparar la razón que guarda A con B y la razón que guarda C con D. Esto se da si la comparación de los tamaños da como resultado el mismo número. Como se puede ver en la figura 7, la razón entre A y B no es la misma razón que entre C y D, es decir que si se quiere medir el segmento B con el segmento A, lo mide dos veces, mientras que la superficie C mide 16 veces a la superficie D.

Así mismo, si se comparan dos razones y el cardinal que representa la relación entre M y N, es el mismo que representa la relación entre O y P, existe proporcionalidad directa (Ver Figura 8). Esto se podría escribir de tres formas:

$$M : N :: O : P$$

$$\frac{M}{N} = \frac{O}{P}$$

$$\text{“M es a N como O es a P”}$$

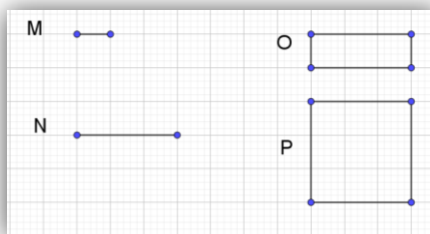


Figura 8: Razones proporcionales

5.4. Semejanza de los triángulos

En términos generales dos figuras son semejantes si “tienen exactamente la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño” (Moise, 1986. p. 321), así como se muestra en la Figura 9

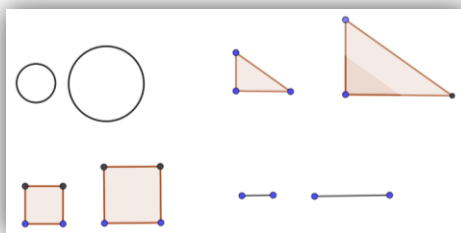


Figura 9 Figuras semejantes

Los polígonos se consideran semejantes si los ángulos correspondientes son iguales, es decir son congruentes y la razón de sus segmentos es constante.

Estos conceptos están respaldados por algunas definiciones y proposiciones del libro Elementos de Euclides, de los cuales aparecen a continuación algunas definiciones y proposiciones:

[VI, Def. 1] “Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales”. (Euclides, 1994. p. 55)

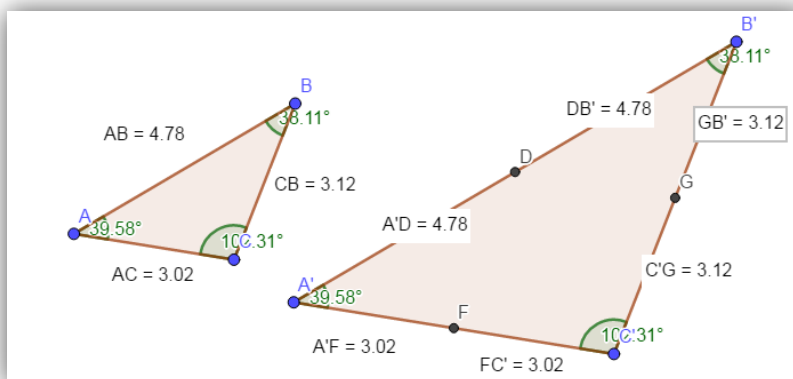


Figura 10: Triángulos semejantes

ÁNGULOS CONGRUENTES

$$\angle BCA = \angle B'C'A'$$

$$\angle CAB = \angle C'A'B'$$

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$

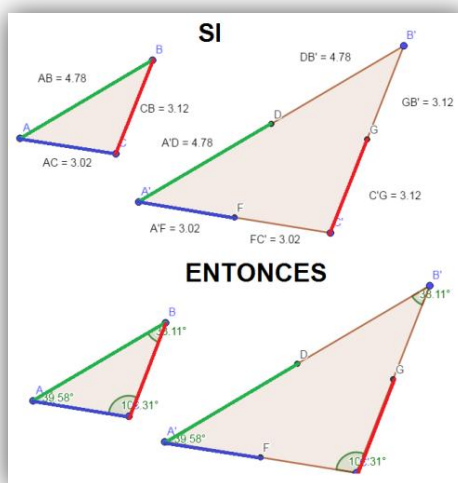
LADOS PROPORCIONALES

$$2AB = A'B$$

$$2BC = B'C$$

$$2AC = A'C$$

[VI, 5] Si dos triángulos tienen los lados proporcionales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes. (Euclides, 1994. p. 63)



Figuran 11 Ángulos congruentes entre lados proporcionales

[VI, 6] Si dos triángulos tienen un ángulo (del uno) igual a un ángulo (del otro) y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes. (Euclides, 1994. p. 65)

[VI, 7] Si dos triángulos tienen un ángulo de uno igual a un ángulo de otro y tienen proporcionales los lados que comprenden los otros ángulos y tienen los restantes ángulos parejamente menores o no menores que un recto, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos que comprenden los lados proporcionales (Euclides, 1994. p. 66)

5.5. Altímetro pedagógico

Para el desarrollo de la propuesta pedagógica se ha tenido en cuenta, como elemento fundamental, el uso de material concreto, para la enseñanza de proporcionalidad y semejanza de triángulos. Por tal razón se ha trabajado en el diseño, elaboración y puesta en práctica de un material concreto que facilite la comprensión de dichos conceptos a través de la intuición y aplicación del Teorema de Euclides.

5.5.1. Origen del Altímetro Pedagógico

Altímetro Pedagógico ha sido el nombre otorgado a un artefacto que surge pensando, tanto en las propiedades de los triángulos rectángulos como en el Teorema de Euclides. Es así como su primer boceto nace de las propiedades de un triángulo rectángulo (Ver Figura 12) en el cual se toma como base la hipotenusa y se traza sobre ella la altura desde el vértice del ángulo recto.

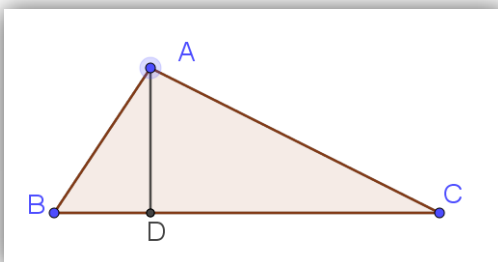


Figura 12: Altura del triángulo rectángulo con respecto a la hipotenusa.

Inicialmente se pensó en una actividad que sería calcular la altura de un edificio o de una pared del aula de clase, utilizando las propiedades de los triángulos rectángulos. Si la altura que se quiere calcular es **AD**, es necesario tener en cuenta:

Si se conoce que el ángulo **A** es recto, entonces los ángulos **B** y **C** son complementarios, es decir sus medidas suman 90° . Pero surgen dos dificultades, si existe un muro del cual se quiere conocer la altura, no es fácil establecer el triángulo rectángulo, cuyo ángulo recto esté en

la parte superior, ni determinar el triángulo rectángulo como tal. Entonces surge la idea de doblar el triángulo, generando dos triángulos rectángulos como se ve en las Figura 13.

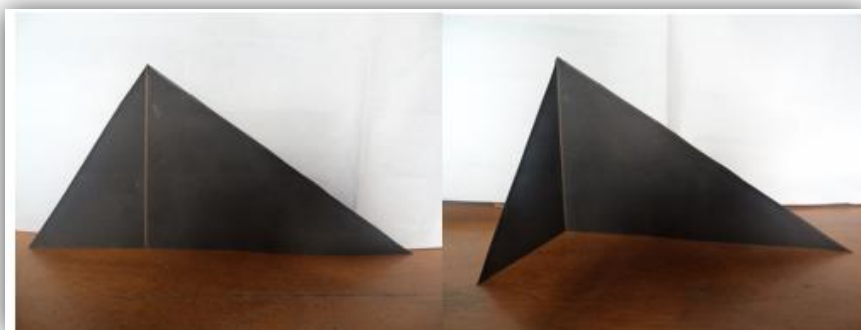


Figura 13: Triángulo rectángulo doblado por su altura sobre la hipotenusa

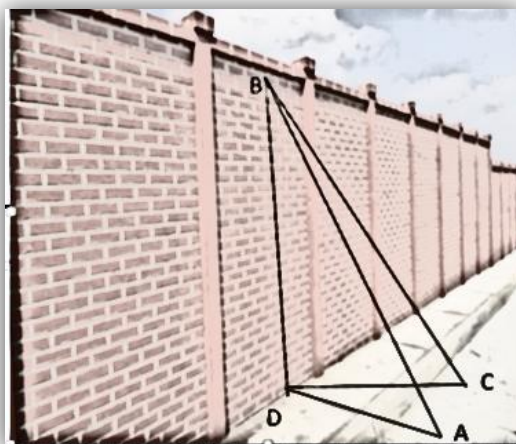


Figura 14: Triángulo rectángulo trazados frente a un muro.

De lo anterior se puede deducir:

Tabla 5: Datos de la Figura 14

$\triangle ABC$ rectángulo	Dado
$\angle ABC$ recto	Dado
$\angle BAC$ y $\angle BCD$ complementarios	La suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es 180°
$\angle ABD$ y $\angle DBC$ son complementarios	Los dos forman un ángulo recto

Entonces si los ángulos A y C son complementarios, los dos ángulos formados en B son complementarios y se pueden aplicar las propiedades de un triángulo rectángulo, imaginando el triángulo desdoblado con ángulo recto en B. Con base en esta idea empieza a ser pensada la creación de un artefacto que permita la ubicación del punto B y la medida de los ángulos A y C.

5.5.2. Descripción del altímetro pedagógico

El Altímetro Pedagógico es el artefacto principal, creado para el desarrollo de la Propuesta Pedagógica en mención, que fue pensado para aplicar el Teorema de Euclides, algunas propiedades de los triángulos rectángulos y algunas nociones de proporcionalidad para determinar la medida de la altura de una pared o la distancia de un punto determinado al piso.

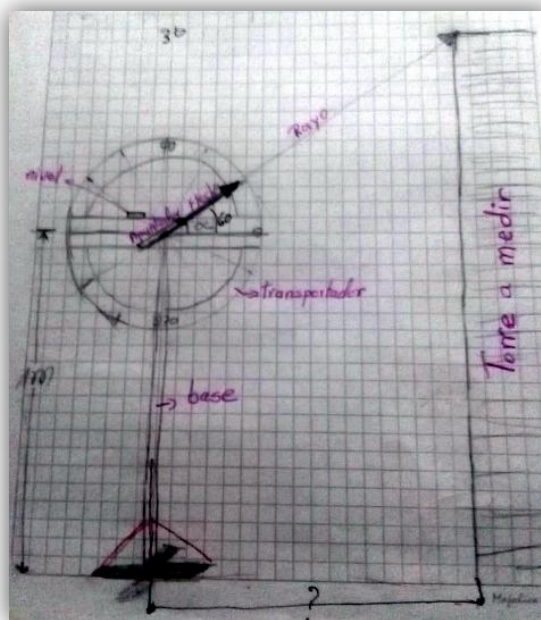


Figura 15: Primer boceto del Altímetro Pedagógico.

La idea inicial fue crear un dispositivo que permitiera medir la distancia de un punto ubicado en lo alto de un edificio hasta el piso, utilizando el Teorema de Euclides (ver

Figura 15). Esta primera idea fue evolucionando, pasando por varias fases en el proceso de diseño y luego de elaboración del artefacto en un taller de carpintería. ”

Si se quiere tomar la altura de un muro se ubica el punto del láser que lleva **Altímetro Pedagógico**, en la parte superior de dicho muro. Debido a la potencia de la luz del láser, que se pierde en exteriores, para las secuencias didácticas que se desarrollan en este documento se decide realizar las pruebas dentro de un recinto cerrado.

A continuación se muestra proceso de elaboración del artefacto, hasta llegar al producto final, al que se ha llamado **Altímetro Pedagógico**, el cual terminó construyéndose básicamente en cuatro partes principales que son un cabezote, una barra de soporte, una base y una plomada.



Figura 16: Línea de proceso del Altímetro pedagógico

5.5.3. Partes del Altímetro Pedagógico.

El **Altímetro Pedagógico** está constituido por cuatro partes, cabezote, barra de soporte, base y una plomada, las que en su conjunto permite que los estudiantes puedan hallar alturas a partir de hacer conjeturas sobre proporcionalidad y semejanza de triángulos, intuyendo el Teorema de Euclides. (Ver Figura 17)

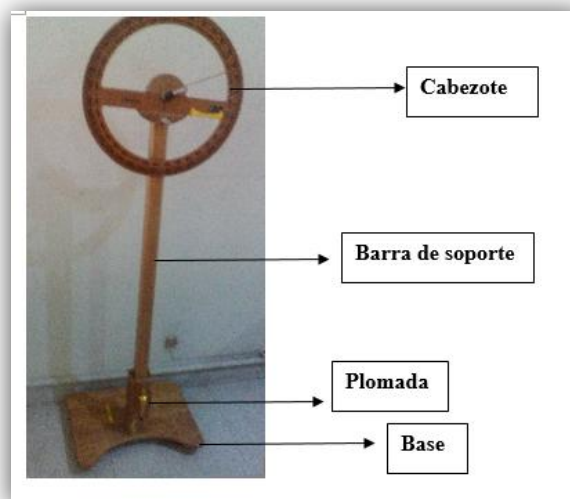


Figura 17: Altímetro pedagógico y sus partes

El **Cabezote**, está formado por un transportador de tablero, una manecilla, un apuntador con rayo láser y un nivel. La función de este cabezote básicamente es ubicar con el rayo láser el punto del cual se quiere determinar la altura y medir el ángulo de elevación por medio del transportador y la manecilla.

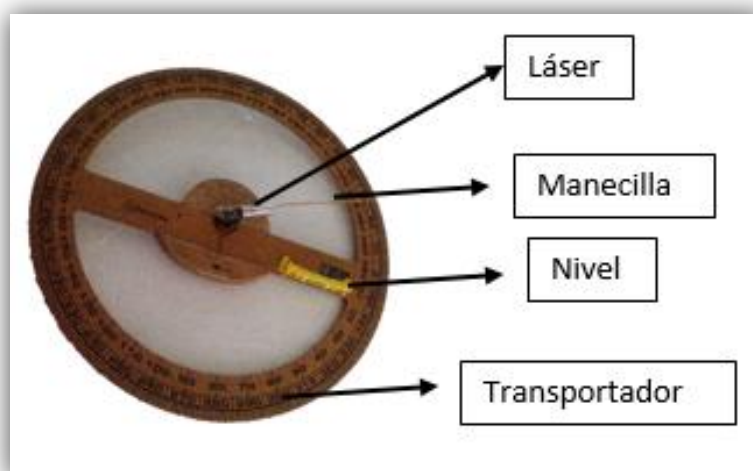


Figura 18: Cabezote

La **barra de soporte**, como su nombre lo indica es el soporte del artefacto y es el que une la base con el cabezote. Su longitud es de 99 cm.



Figura 19: Barra de soporte

La **base**. Está formada por una tabla de madera, que tiene unos tornillos de nivelación en la parte inferior y un nivel en la parte superior. Tiene también una caja que va a recibir la barra de soporte y un tornillo que permite darle estabilidad al conjunto en general.

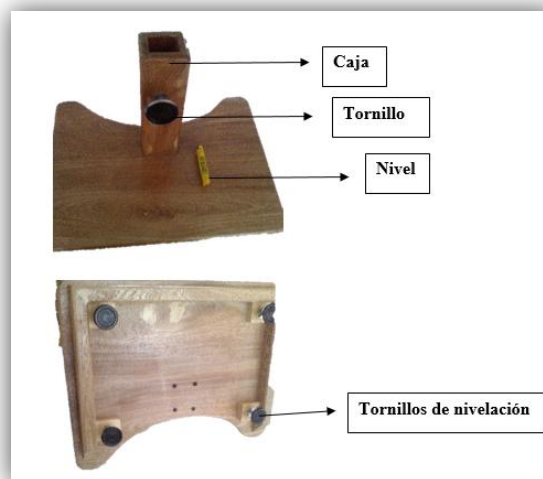


Figura 20: Base

Y finalmente, el **Altímetro Pedagógico** también tiene una **plomada** que es un instrumento metálico, de forma cónica en la parte inferior, que pende de una cuerda de nailon. Esta plomada al caer sobre el piso con la punta untada de mineral de colores, determina en el piso un punto clave en la formación de los triángulos necesarios para la aplicación del Teorema de Euclides.



Figura 21: Plomada

Como un elemento adicional está el **flexómetro** que permite tomar las distancias desde el punto marcado por la plomada hasta la pared.



Figura 22: Flexómetro

5.5.4. Cómo se usa el Altímetro Pedagógico

Antes de iniciar los procesos de medición con el Altímetro Pedagógico, se debe confirmar que el altímetro esté nivelado, para ello se observan los dispositivos con los que cuenta el artefacto.

Una vez realizado el procedimiento anterior, se prosigue a elegir un punto en la parte superior de un muro del cual se quiere conocer su altura. Es preferible ubicarlo sobre una de las aristas del salón porque así se facilita reconocer la perpendicular del punto al piso, determinando lo que en la figura 23 corresponde al punto F.



Figura 23: Procedimiento para el uso del altímetro pedagógico.

Se prosigue a colocar el altímetro a una distancia arbitraria de dicho muro. Con el láser se ubica el punto A, que es el punto del cual se quiere tomar su distancia al piso. Con este punto la manecilla del cabezote permite calcular la medida del ángulo de elevación, a partir de una línea imaginaria que va del centro del transportador al muro, que es paralela al piso y que está a una altura de 108 cm., formando el **BC**. Con la ayuda de la plomada se marca un punto en el suelo, que corresponde al punto D. Al calcular la distancia entre los puntos D y F, se está calculando también la distancia entre los puntos B y C, ya que estos son segmentos congruentes por ser paralelas entre paralelas. Luego con la manecilla del transportador marcando el ángulo complementario al $\angle ABC$, se busca una ubicación para el altímetro, de tal manera que el láser apunte al mismo punto A. Una vez logrado esto, con la plomada, se puede determinar el punto E y por lo tanto se puede determinar la distancia entre los puntos E y F, que es equivalente a la distancia entre los puntos C y G por ser congruentes.

A la proporción que se quiere llegar con los estudiantes, después de un proceso de experimentación que se puede observar en la situación No. 4, mediante la utilización de la siguiente tabla es:

	$m\angle B$	$m\angle G$	AC	BC	CG	$\frac{AC}{BC}$	$\frac{AC}{CG}$	$\frac{BC}{CG}$	$\frac{CG}{AC}$	$\frac{BC}{AC}$
1	30		62							
2	35		62							
3	40		62							
4	42		62							
5	45		62							

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CG}$$

De esta proporción se puede deducir que:

$$AC^2 = BC \cdot CG$$

$$AC = \sqrt{BC \cdot CG}$$

$$AF = 108 + \sqrt{BC \cdot CG}$$

Siendo AF la distancia que se está buscando.

6. Propuesta pedagógica: Secuencia Didáctica

¿Cómo hallar la altura de mi salón de clase con la ayuda del Altímetro Pedagógico?

A partir del diseño y elaboración del **Altímetro Pedagógico**, se crea la propuesta pedagógica de la Secuencia Didáctica como herramienta para el cumplimiento del objetivo planteado. Dicha metodología tendrá cuatro partes que son: la visión general, la ruta de aprendizaje, descripción de aprendizajes y la actividad de cierre.

6.1. Visión general

Lo que se pretende con la aplicación de la Secuencia Didáctica es plantearles a los estudiantes situaciones problema que puedan resolver en forma concreta a partir de la exploración del **Altímetro Pedagógico**, de tal manera que ellos puedan indagar, buscar posibles soluciones y con ellas inferir el Teorema de Euclides y comprender los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos.

El propósito de esta secuencia es que los estudiantes de grado octavo y noveno infieran el Teorema de Euclides a través de situaciones problema que, al ser aplicadas en contextos experienciales, les permitan comprender los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos. El eje transversal de la secuencia es: **¿Cómo hallar la altura de mi salón de clase con la ayuda del Altímetro Pedagógico?** Es así que esta secuencia promueve el desarrollo del pensamiento matemático y de habilidades comunicativas en donde los estudiantes deben plantear hipótesis, trazar posibles soluciones, construir conceptos, etc. Permanentemente se promueven espacios para que los estudiantes comuniquen a otros sus comprensiones con relación al objetivo propuesto.

La Secuencia Didáctica, está dividida en tres fases: “Saberes previos”, con dos situaciones, “Acercamiento al Teorema de Euclides”, con tres situaciones y “Momento de evaluación”, con una situación.

Los desempeños esperados para el estudiante en esta Secuencia Didáctica son:

- Recordar conceptos básicos como puntos, segmentos, rectas, polígonos, paralela, perpendicular, ángulos y toma de medidas, por medio de la exploración del software de geometría dinámica GeoGebra.
- Construir conceptos básicos como punto medio, mediatriz y perpendicularidad a partir de exploración y deducción.
- Establecer relaciones entre magnitudes de segmentos, permitiéndole llegar al concepto de razón.
- Recordar conceptos de ángulos internos de un triángulo, ángulos complementarios y ángulos rectos y comprobar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180° .
- Descubrir o inferir alguna relación entre la altura del triángulo rectángulo y los segmentos determinados por esta sobre la hipotenusa, acercándose al Teorema de Euclides.
- Reconocer cuándo dos triángulos son semejantes.
- Acercarse a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos a partir del Teorema de Euclides.

6.2. Ruta de aprendizaje

A continuación, la tabla 6, presenta la ruta de aprendizaje, que es un esquema que, a groso modo, muestra las generalidades de las seis situaciones que se exponen, “como una ruta que ilustra las ideas clave de aprendizaje a desarrollar, los desempeños esperados y una breve descripción de las actividades de aprendizaje” (Ministerio de Educación Nacional, 2013. p. 10)

Tabla 6: Ruta de aprendizaje

SITUACIÓN	PREGUNTA GUÍA	CONCEPTOS ABORDADOS	DESEMPEÑOS DEL ESTUDIANTE
Situación No. 1 Conceptos preliminares	¿Cómo utilizar el software de geometría dinámica GeoGebra?	Nociones básicas de geometría como puntos, segmentos, rectas, polígonos, paralela, perpendicular, ángulos y toma de medidas.	Recordar conceptos básicos como puntos, segmentos, rectas, polígonos, paralela, perpendicular, ángulos y toma de medidas, por medio de la exploración del software de geometría dinámica GeoGebra.
Situación No. 2 Construcciones básicas	¿Cómo se puede llegar, a través de la exploración del software de geometría dinámica a la construcción de conceptos básicos de geometría?	Nociones básicas de geometría, punto medio, mediatriz, medición de ángulos internos de un triángulo, rectas perpendiculares y noción de razón.	Constituir conceptos básicos como punto medio, mediatriz y perpendicularidad a partir de exploración y deducción. Establecer relaciones entre magnitudes de segmentos permitiéndole llegar al concepto de razón.
Situación No. 3 Ángulos internos de un	¿Cuánto es la suma de los ángulos internos de un	Suma de ángulos internos de un triángulo y ángulos complementarios.	Recordar conceptos de ángulos internos de un triángulo, ángulos complementarios y ángulos rectos y comprobar

	triángulo.	triángulo?		que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180° .
Situación No. 4	Acercamiento al Teorema de Euclides.	¿Cómo se usa y para qué sirve el altímetro pedagógico?	Razón, proporción y semejanza de triángulos.	Descubrir o inferir alguna relación entre la altura del triángulo rectángulo y los segmentos determinados por esta sobre la hipotenusa, acercándose al Teorema de Euclides.
Situación No. 5	Semejanza de triángulos	¿Cuándo dos triángulos son semejantes?	Semejanza de triángulos	Reconocer cuándo dos triángulos son semejantes.
Situación No. 6	Hallar la altura de mi salón de clase	¿Cuál es la altura de mi salón de clase?	Teorema de Euclides, proporcionalidad y semejanza de triángulos.	Acercarse a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos a partir del Teorema de Euclides.

6.3. Descripción de aprendizajes

La Secuencia Didáctica que se propone consta de seis situaciones que se describirán a continuación.

6.3.1. Fase 1: Saberes previos

Esta primera fase consta de dos situaciones en donde se pretende que los estudiantes exploren el software de geometría dinámica GeoGebra ya que este será útil para recordar los conocimientos requeridos para la construcción de los nuevos aprendizajes planteados como la inferencia del Teorema de Euclides y la aplicación en contextos reales de los conceptos como proporcionalidad y semejanza de triángulos.

Situación No 1: Conceptos preliminares

Esta situación pretende que los estudiantes recuerden los conceptos básicos de la geometría tales como puntos, segmentos, rectas, polígonos, paralela, perpendicular, ángulos, toma de medidas, entre otros y que a la vez se familiarice con el uso del programa de geometría dinámica GeoGebra.

Situación No. 2: Construcciones básicas

La segunda situación busca que el estudiante realice construcciones geométricas básicas tales como: punto medio, mediatriz, medición de ángulos internos de un triángulo, rectas perpendiculares y noción de razón. Además que use el compás para la traslación de magnitudes y se familiarice con la medición de longitud de segmentos y de amplitud angular.

6.3.2. Fase 2: Acercamiento al Teorema de Euclides

Esta fase consta de tres situaciones que plantean contextos problema que requieran el uso del **Altímetro Pedagógico** para posibilitar que los estudiantes puedan inferir dicho Teorema aplicando los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos.

Situación No. 3: Ángulos internos de un triángulo

El estudiante realizará diferentes ejercicios que le permitirán comprobar que la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo siempre será 180° .

Situación No. 4: Acercamiento al Teorema de Euclides.

En esta situación el estudiante debe conocer y manipular el **Altímetro Pedagógico** y su uso para la toma de medida de ángulos de elevación, y realizarán ejercicios con el mismo artefacto, que permitan establecer relaciones o razones entre las diferentes medidas tomadas. Se continuará con una actividad que les permita diferenciar si esas razones son o no iguales, de tal manera que puedan establecer el concepto de proporcionalidad. En una quinta situación se busca que lleguen a una conjetura que se acerque al Teorema de Euclides. Finalmente se les plantearán problemas matemáticos en donde puedan hallar alturas aplicando los saberes construidos.

Situación No. 5: Semejanza de triángulos.

Esta situación pretende que el estudiante pueda reconocer y definir cuándo dos triángulos son semejantes. En esta situación es muy importante el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, que permite tomar y comparar las medidas de los lados de los triángulos y tomar la medida de los ángulos correspondientes.

6.3.3. Fase 3: Momento de evaluación

Esta fase consta de una situación en donde se le pide al estudiante hallar la medida de su salón de clase aplicando todos los saberes construidos en las situaciones anteriores. Para ello deben utilizar los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos desde el Teorema de Euclides.

Situación No. 6: Hallar la altura de mi salón de clase

Finalmente, después de una serie de aprendizajes logrados en cada uno de los momentos de la Secuencia Didáctica, el estudiante ya cuenta con las herramientas necesarias para hallar la

altura de su salón de clase con la ayuda del **Altímetro Pedagógico**, para ello debe utilizar las inferencias hechas frente al Teorema de Euclides y los saberes construidos frente a proporcionalidad y semejanza de triángulos.

6.4. Guía del docente

A continuación, se muestra la guía del docente que será la ruta de trabajo para el desarrollo de la Secuencia Didáctica que se propone. Esta comprende de una parte que son las generalidades de la secuencia y otra parte que son cada una de las situaciones descritas.

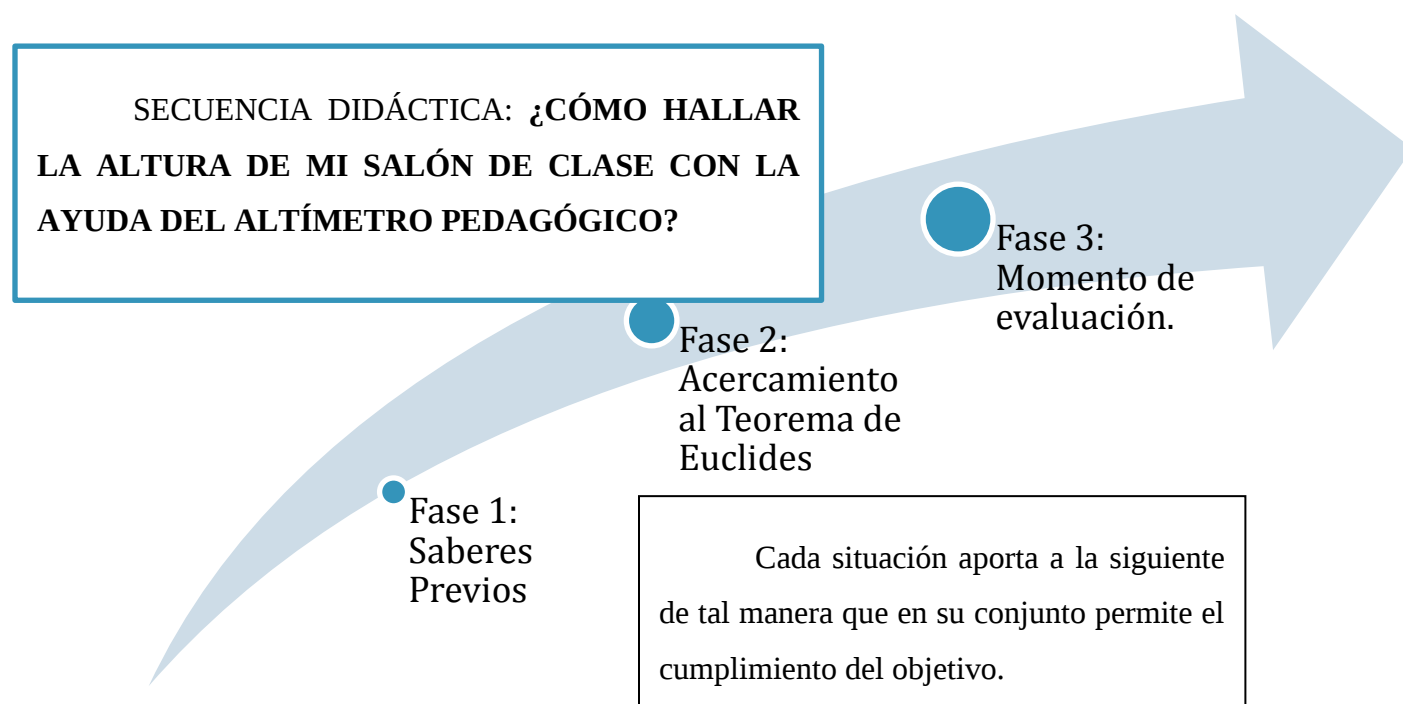


Figura 24: Proceso de la Secuencia Didáctica.

GUÍA DEL DOCENTE

SECUENCIA DIDÁCTICA: ¿CÓMO HALLAR LA ALTURA DE MI SALÓN DE CLASE CON LA AYUDA DEL ALTÍMETRO PEDAGÓGICO?

Objetivo general: Acercar a los estudiantes a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos a partir de la inferencia del Teorema de Euclides.

Objetivos específicos:

- Recordar conceptos básicos de geometría por medio de la exploración del software de geometría dinámica GeoGebra.
- Construir conceptos básicos como punto medio, mediatriz y perpendicularidad a partir de exploración y deducción.
- Establecer relaciones entre magnitudes de segmentos permitiéndole llegar al concepto de razón.
- Recordar conceptos de ángulos internos de un triángulo, ángulos complementarios y ángulos rectos y comprobar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180° .
- Descubrir e inferir alguna relación entre la altura del triángulo rectángulo y los segmentos determinados por esta sobre la hipotenusa, acercándose al Teorema de Euclides.
- Reconocer cuándo dos triángulos son semejantes.
- Acercar a los estudiantes a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos a partir del Teorema de Euclides.

Fase 1: Saberes

Situación 1: Conceptos preliminares

previos.	Desempeño del estudiante: Recordar conceptos básicos como puntos, segmentos, rectas, polígonos regulares e irregulares y toma de medidas tanto de longitudes como de amplitud angular, por medio de la exploración del software de geometría dinámica GeoGebra. Situación 2: Construcciones básicas, exploración, deducción y formulación. Desempeño del estudiante: • Realizar, en el software de geometría dinámica GeoGebra, algunas construcciones como paralelas, perpendiculares y polígonas irregulares • Construir segmentos cuya relación entre ellos permite un acercamiento al concepto de razón.
Fase 2: Acercamiento al Teorema de Euclides	Situación 3: Ángulos internos de un triángulo. Desempeño del estudiante: Recordar conceptos de ángulos internos de un triángulo, ángulos complementarios y ángulos rectos y comprobar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°. Situación 4: Acercamiento al Teorema de Euclides. Desempeño del estudiante: Descubrir o inferir alguna relación entre la altura del triángulo rectángulo y los segmentos determinados por esta sobre la hipotenusa, acercándose al Teorema de Euclides.

	Situación 5: Semejanza de triángulos Desempeño del estudiante: Reconocer cuándo dos triángulos son semejantes.
Fase 3: Momento de evaluación	Situación 6: Hallar la altura de mi salón de clase Desempeño del estudiante: Acercarse a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos a partir del Teorema de Euclides.

FASE 1: SABBERES PREVIOS

SITUACIÓN No 1: Conceptos preliminares	
Asignatura: Matemáticas	
Pregunta guía: ¿Cómo utilizar el software de geometría dinámica GeoGebra?	
Conceptos abordados: Nociones básicas de geometría como puntos, segmentos, rectas, polígonos, paralela y perpendicular	
Desempeño del estudiante:	
Recordar conceptos básicos como puntos, segmentos, rectas, polígonos, paralela, perpendicular, ángulos y toma de medidas, por medio de la exploración del software de geometría dinámica GeoGebra.	

Materiales

- Tablet o computador con el programa de GeoGebra
- Guía del estudiante
- Marcadores

Tiempo: Sesión de 50 minutos

Descripción de la situación

En un primer momento los estudiantes deberán desarrollar una guía en las cuales deben usar el software de geometría dinámica GeoGebra.

Las instrucciones son:

Explorar los íconos y las opciones que se pueden desplegar de cada uno de ellos. Por ejemplo:

1. Con la opción punto  ubicar cuatro puntos en el plano. Para nombrar cada uno de ellos se selecciona uno y haciendo clic derecho sobre él, se despliegan unas opciones, de las cuales se debe escoger la opción “etiqueta visible”. Hacer este procedimiento con todos los puntos.

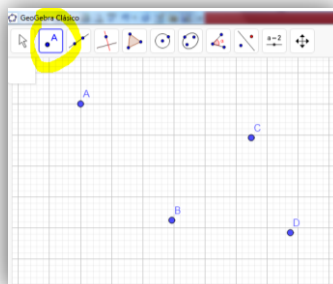


Figura 25: Puntos

2. Seleccionar la opción segmento,  luego se hace clic en un punto del plano, apareciendo el punto de inicio del segmento y se hace otro clic, donde se quiera terminar

el segmento. También se puede construir un segmento con una medida determinada, para esto se hace clic en el tercer ícono y se selecciona la opción “segmento de longitud dada”



, se hace clic en el plano y aparece un punto y un recuadro que pide la longitud del segmento deseado, se coloca la medida y aparece el segmento.

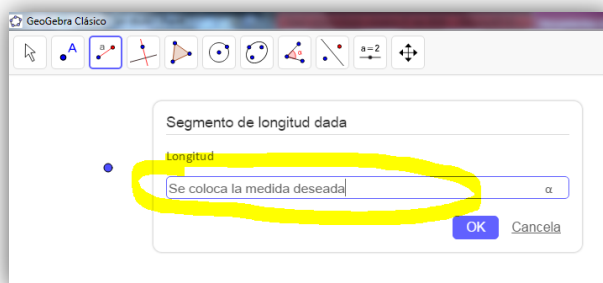
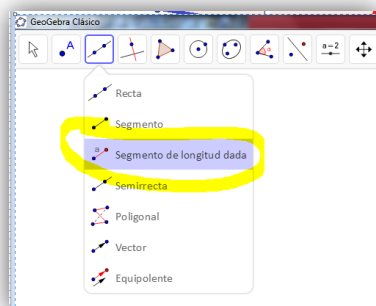


Figura 26: Pasos para realizar un segmento con una medida dada

3. Selecciona la opción recta,  luego selecciona un punto y seguidamente el otro, deferentes a los del ítem 2, logrando así la representación de una recta.

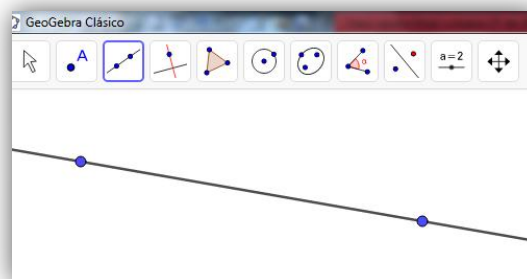
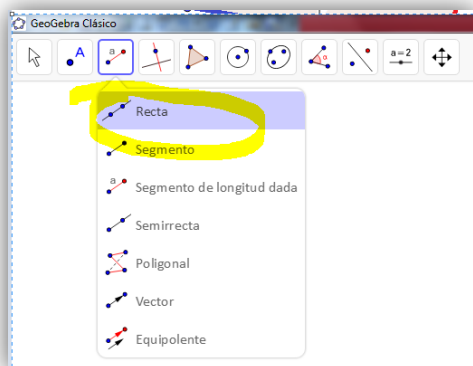


Figura 27: Pasos para realizar una recta

4. Construir un polígono irregular haciendo clic en el quinto ícono  de la barra de herramientas.

Al hacer clic en este ícono se despliegan varias opciones, se selecciona la opción “polígono”,

con el que se puede construir un polígono irregular y al hacer clic en el plano o “vista gráfica”, permite crear tantos vértices como lados se quiera que tenga el polígono. La gráfica debe terminar en el vértice donde se inició que es la forma como se cierra el polígono y se termina la acción.

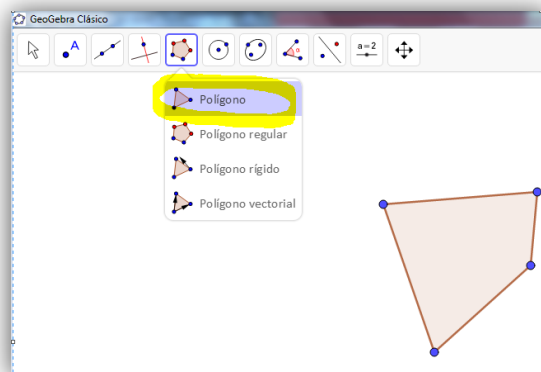
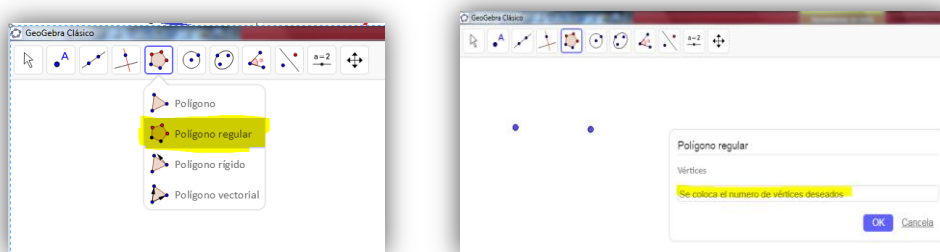


Figura 28: Polígono irregular en GeoGebra.

5. Haciendo clic en el quinto ícono, opción polígono regular, construir un polígono de 5 lados, nombrar los vértices y tomar las medidas de los lados.

Para construir un polígono regular con la opción existente en GeoGebra, se busca en el quinto ícono, se hace clic en “polígono regular” y se traza un segmento de la medida que se quieran los lados del polígono y se ve un recuadro que pide el número de lados del polígono y aparece el polígono equilátero (los lados tienen la misma medida.)



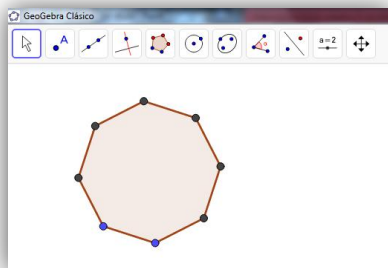


Figura 29: Pasos para realizar un polígono regular

Para tomar la medida de los lados del polígono, se selecciona la opción  distancia o longitud, se hace clic en dos vértices consecutivos del polígono, determinando así la longitud del segmento correspondiente. Halla la longitud de todos los segmentos del polígono.

6. Construir el ángulo ABC y el ángulo DEF, como se muestran en la figura, de cualquier amplitud y con la opción ángulo  se toman las medidas.

En este caso es importante recordar a los estudiantes que los ángulos se pueden nombrar con una sola letra o con tres. Cuando se nombra con una sola letra, esa letra es el nombre del vértice y cuando se nombra con tres letras, la del centro representa el vértice. Es importante que el estudiante se dé cuenta que no se mide el mismo ángulo si los puntos se nombran en el mismo sentido de las manecillas del reloj, que si se nombran en sentido contrario.

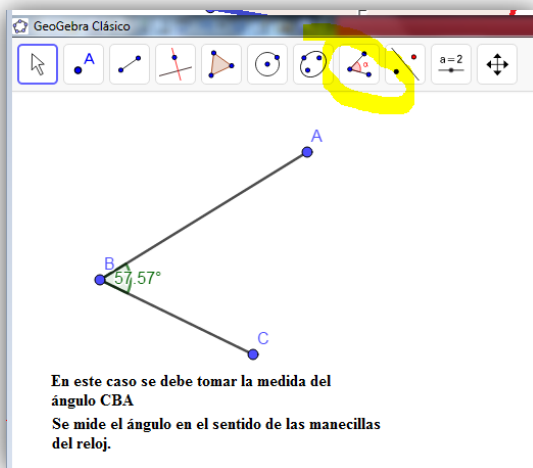


Figura 30: Toma de medida de un ángulo.

7. En un plano nuevo (Archivo – Nuevo) construir un segmento y un punto fuera de él y con la opción paralela  selecciona el segmento y seguidamente el punto, observarás que se construye una recta **paralela** al segmento inicial.
8. En un plano nuevo (Archivo – Nuevo) construir un segmento y un punto fuera de él y con la opción perpendicular  selecciona el segmento y seguidamente el punto, observarás que se construye una recta **perpendicular** al segmento inicial.
9. Dados los puntos A, B, C, D y E construir el polígono ABCDE, medir sus lados y los ángulos internos. Realizarlo de acuerdo a las indicaciones de los numerales anteriores
 - a. Construir el polígono sin usar la opción “polígono” existentes en GeoGebra (En este caso el estudiante debe construir los segmentos AB, BC, CD, DE y EA.)
 - b. Construir el polígono usando la opción existente en GeoGebra , como ya se había hecho.

Actividad de cierre:

Construya con polígonos de tres y cuatro lados una casa

- a) Nombrar cada uno de los puntos que resultaron.
- b) Identificar cuáles segmentos son paralelos y cuáles son perpendiculares.
- c) Tomar la medida de todos los segmentos y todos los ángulos internos de la figura que se construyó.

SITUACIÓN No 2: Construcciones básicas

Asignatura: Matemáticas

Pregunta guía: ¿Cómo se puede llegar, a través de la exploración del software de geometría dinámica a la construcción de conceptos básicos de geometría?

Conceptos abordados: Nociones básicas de geometría, punto medio, mediatriz, medición de ángulos internos de un triángulo, rectas perpendiculares y noción de razón.
--

Desempeño del estudiante:

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Construye conceptos básicos como punto medio, mediatriz y perpendicularidad a partir de exploración y deducción. • Establece relaciones entre magnitudes de segmentos permitiéndole llegar al concepto de razón. |
|---|

Materiales	
-------------------	--

• Tablet o computador con el programa de GeoGebra • Guía del estudiante • Marcadores	Tiempo: Sesión de 50 minutos
--	------------------------------

Descripción de la situación

1. Dados los segmentos AB y CD, por medio de la opción compás  establecer qué relación o qué razón existe entre los dos segmentos, es decir cuántas veces se puede trazar el segmento AB dentro del segmento CD. El compás para este ejercicio se usa de la siguiente forma:

Con la opción compás se hace clic en A y luego en B y aparece una circunferencia de radio AB.

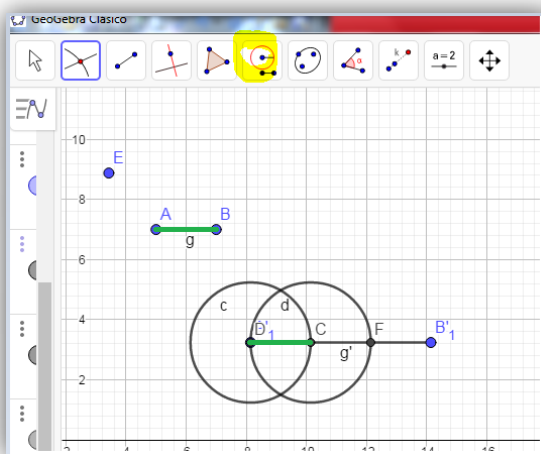


Figura 31: Razón entre dos segmentos.

El compás para este ejercicio se usa de la siguiente forma:

- Con la opción compás se hace clic en A y luego en B y aparece una circunferencia de radio AB.

- Luego se hace clic en C y ese radio queda trazado sobre el segmento CD si se establece el punto de intersección entre la circunferencia y el segmento apareciendo el punto E.
 - Seguidamente se efectúa el mismo proceso, haciendo clic en A y en B para crear una circunferencia de radio AB, pero ahora se va a hacer clic en E, para establecer el segmento EF congruente (de igual longitud) al segmento AB.
2. Para este ejercicio se sugiere utilizar el tablero de GeoGebra sin la cuadrícula de guía. Ubicar dos puntos en el plano y nombrarlos con letras las mayúsculas A y B. Utilizando únicamente la opción punto del software, establecer un punto que se calcule equidistante de los puntos A y B es decir a pulso.
- Nota: Equidistante significa que están a la misma distancia.
3. Verificar si el punto construido C es equidistante de los puntos A y B tomando las respectivas medidas, para lo cual se usa la opción distancia o longitud , haciendo clic consecutivamente en los puntos A y C y luego en los puntos A y B. Si no se logró la equidistancia en un primer momento, se debe correr el punto con la opción  hasta que las distancias sean iguales.

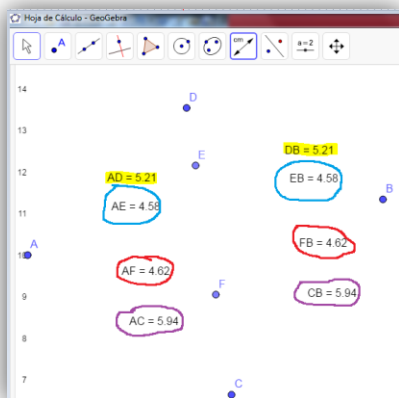


Figura 32: Puntos equidistantes.

Entre las opciones de respuesta que podrían surgir se prevé que sea crear el punto medio del

$\overline{AB}$ y otra crear un punto equidistante, pero no colineal con A y B.

4. Construya otros cinco puntos equidistantes a los inicialmente dados, nómbralos con las letras D, E, F, G, H y tome las medidas para poder confirmar la equidistancia.
5. ¿Cuántos puntos podrían ubicarse que cumplan con la característica de equidistancia de los puntos A y B?

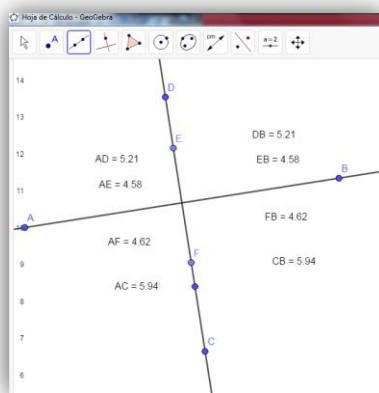


Figura 33: Recta por puntos equidistantes.

6. Trazar otros puntos que te permitan ver qué característica especial tiene la ubicación de estos puntos.
7. ¿Qué otras medidas podría tomarse en la figura resultante?

Es posible que llegue a la medida de los ángulos, que debe darles 90° o el maestro debe llevarlos a ello.

8. A la figura resultante con los puntos trazados, se le conoce con el nombre de mediatriz y siempre se construye con base en un segmento. Construye una definición de mediatriz con respecto al $\overline{AB}$.

Con la coordinación del profesor y con base en las definiciones construidas por los estudiantes

se debe llegar a la definición correcta de la mediatriz del $\overline{AB}$, que puede ser:

Mediatriz del $\overline{AB}$ es la perpendicular que pasa exactamente por el punto medio de un segmento.

Mediatriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremo A y B del segmento.



Trazar el $\overline{AB}$, con el ícono correspondiente trazar la mediatriz de dicho segmento y verificar si corresponde exactamente a la definición que se ha elaborado.

Actividad de cierre:

Se quiere construir una estación de Transmilenio de tal forma que esté a la misma distancia del barrio Villas del Madrigal y Garcés Navas. Trace, en el software de geometría dinámica GeoGebra, dos puntos que representen los barrios y ubique dos posibilidades donde podría ir la estación de Transmilenio.

FASE 2: ACERCAMIENTO AL TEOREMA DE EUCLIDES

SITUACIÓN No 3: Ángulos internos de un triángulo

Asignatura: Matemáticas

Pregunta guía: ¿Cuánto es la suma de los ángulos internos de un triángulo?

Conceptos abordados: Suma de ángulos internos de un triángulo, ángulos complementarios y ángulos alternos internos.

Desempeño del estudiante:

Recordar conceptos de ángulos internos de un triángulo, ángulos complementarios y ángulos rectos y comprobar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180° .

Materiales

- Tablet o computador con el programa de GeoGebra
- Guía del estudiante
- Marcadores

Tiempo: Sesión de 50 minutos

Descripción de la situación

En un primer momento los estudiantes, organizados en parejas, deberán desarrollar una guía con actividades que se aplicarán con el software de geometría dinámica GeoGebra.

Con la siguiente actividad se busca que los estudiantes confirmen que las medidas de los ángulos internos de un triángulo suman 180° y por lo tanto que si uno de los ángulos es recto, los otros dos son complementarios (sus medidas suman 90°)

1. Con la opción polígono deben construir cinco triángulos diferentes y numerarlos.
2. También se deben enumerar los ángulos de cada triángulo con los números del 1 al 3, como en el ejemplo siguiente:

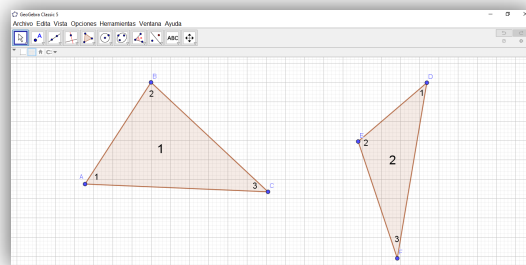


Figura 34: Construcción de un triángulo.

3. Tomar la medida de todos los ángulos internos y completar la tabla 7:

Tabla 7: Tabla de registro medidas internas de un triángulo.

ÁNGULOS				
TRIÁNGULO	$m\angle 1$	$m\angle 2$	$m\angle 3$	TOTAL
1				
2				
3				
4				
5				

4. ¿Qué observa en la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo?
5. En el archivo de GeoGebra **suma de los ángulos internos de un triángulo**:

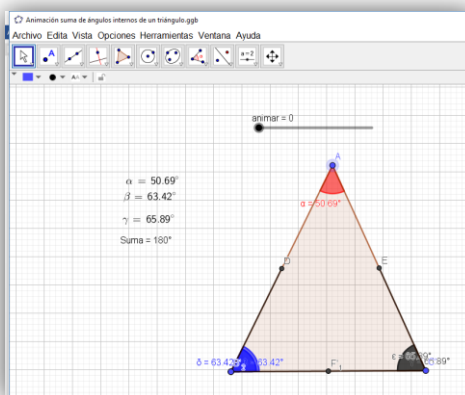


Figura 35: Ángulos internos de un triángulo.

Mover cada uno de los vértices y observar qué pasa con cada uno de los ángulos.

Manipular la animación manual y automáticamente, de cero a uno.

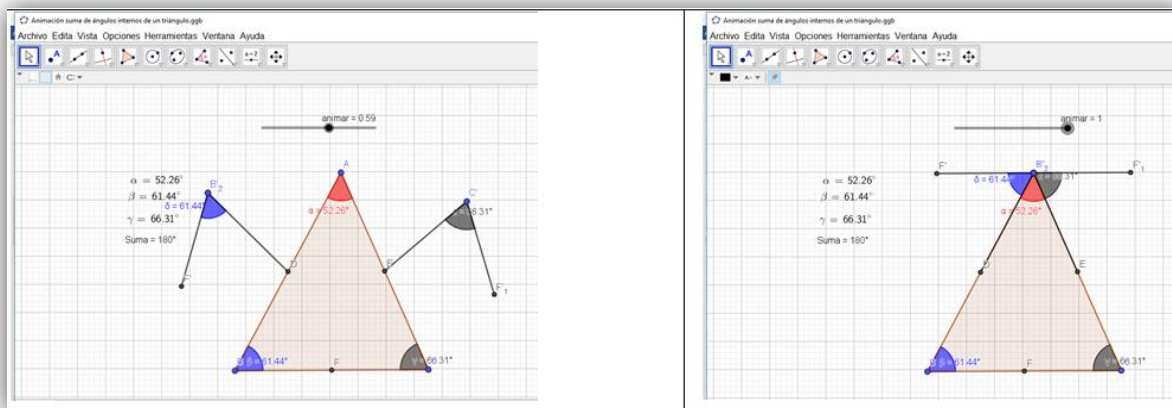


Figura 36: Demostración de la medida de los ángulos internos de un triángulo.

Desplazar el vértice A (el vértice del ángulo rojo) hasta convertir el ángulo

En ángulo recto.

¿Qué característica tienen los otros dos ángulos?

¿Cómo comprobar si la $\overleftrightarrow{F'F'_1}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son paralelas?

El objetivo de esta última pregunta es recordar cómo se mide la distancia entre un punto y una recta y la definición de paralela.

Nota: se trazan dos o tres puntos en la $\overleftrightarrow{F'F'_1}$, la perpendicular por esos puntos a la $\overleftrightarrow{BC}$ y se toman las medidas que deben ser iguales si las rectas son paralelas.

Actividad de cierre (Se puede dejar de tarea)

Para evitar que un pino se ladee el ingeniero forestal recomendó colocar dos varas opuestas, de tal manera que el ángulo que formen las varas en la cima del pino sea recto. Si la primera vara que coloqué desde el piso a la cima del pino forma un ángulo de $32,83^\circ$, ¿Cuánto debe medir el ángulo que forme la otra vara con el piso, para asegurar que el ángulo en la cima del pino sea recto?

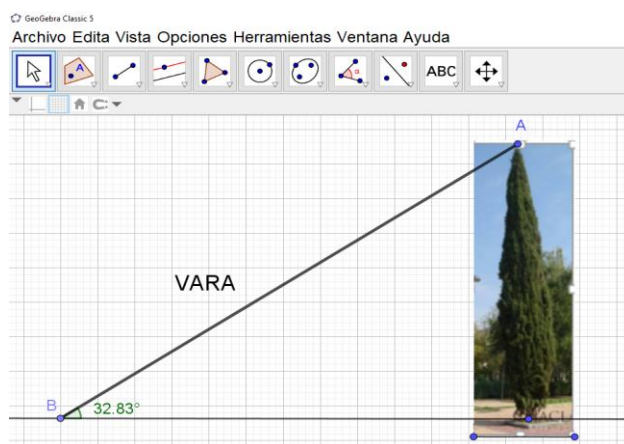


Figura 37: Tarea actividad de cierre

SITUACIÓN No 4: Acercamiento al Teorema de Euclides.

Asignatura: Matemáticas

Pregunta guía: ¿Cómo se usa y para qué sirve el altímetro pedagógico?

Conceptos abordados: Razón, proporción y semejanza de triángulos.

Desempeño del estudiante:

Descubre o infiere alguna relación entre la altura del triángulo rectángulo y los segmentos determinados por esta sobre la hipotenusa, acercándose al Teorema de Euclides.

Materiales • Guía del estudiante • El Altímetro Pedagógico. • Una tabla de registro • Flexómetro	Tiempo: Sesión de 50 minutos
Descripción de la situación Al comenzar esta situación, el estudiante debe tener claro que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados y por lo tanto, si dos de los ángulos del triángulo son complementarios (la suma de sus medidas es 90 grados), entonces el triángulo es rectángulo. Como el objetivo del altímetro pedagógico es medir alturas, es importante tener en cuenta que el centro del cabezote del altímetro, que es donde está el transportador se encuentra a 108 centímetros del piso y es a partir de aquí donde se puede calcular la altura buscada. Procedimiento El altímetro tiene un transportador y un láser que permite medir el ángulo a un punto determinado, por lo cual se puede realizar el siguiente procedimiento: 1. Se coloca el punto A en una pared, a una altura fácil de verificar por los estudiantes, para este ejemplo a 1,70 m. 2. Una pareja de estudiantes recibe la siguiente tabla:	

Tabla 8: *Tabla de registro de medidas*

	$m\angle B$	$m\angle G$	AC	BC	CG	$\frac{AC}{BC}$	$\frac{AC}{CG}$	$\frac{BC}{CG}$	$\frac{CG}{AC}$	$\frac{BC}{AC}$
1	30		62							
2	35		62							
3	40		62							
4	42		62							
5	45		62							

- En este ejercicio la longitud del segmento AC se conoce y es 62 cm, con lo que se busca que reconozcan la relación entre los segmentos y se conoce la medida del ángulo B.
- Utilizando el **Altímetro Pedagógico**, el estudiante debe completar cada fila, partiendo del ángulo que se le da inicialmente, 30° para la primera fila.
- El altímetro debe ser colocado en un sitio del salón de tal manera que estando el transportador marcando los 30°, la luz del láser marque exactamente el punto previamente ubicado en la pared.
- Con la ayuda de la plomada y el flexómetro se puede encontrar un punto en el suelo y se puede hallar la distancia del altímetro a la pared, es decir que se puede hallar la longitud del segmento DF y por tanto la longitud del segmento BC. Esta medida debe ser colocada en la casilla correspondiente de la tabla.

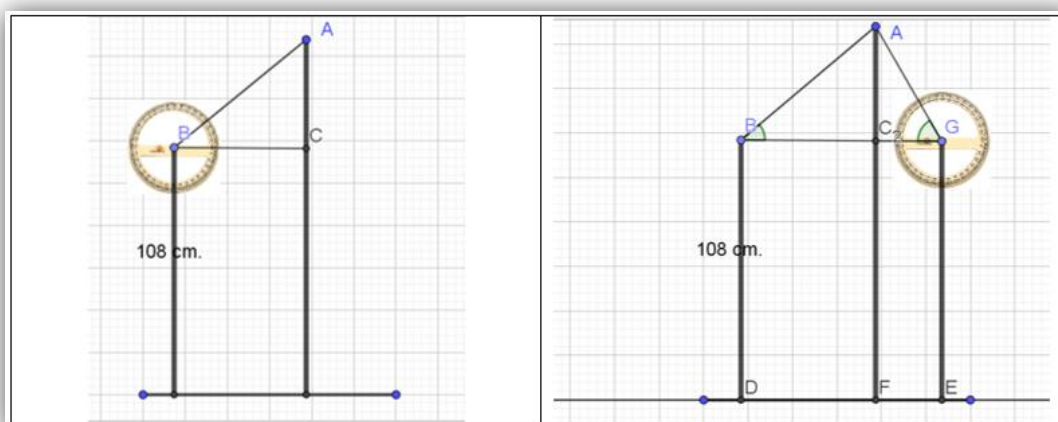


Figura 38: Procedimiento para el uso del altímetro pedagógico.

7. Ahora ubique la manecilla del transportador indicando la medida del ángulo complementario al ángulo tomado en el paso anterior (es decir que la suma de la medida de los dos ángulos sea 90°), Colocar el altímetro en otro lado del salón, pero en el punto en el cual se logre que la luz del rayo láser caiga en el mismo punto A. El nuevo punto determinado por la plomada del altímetro es el punto E y el punto central del transportador es el punto G que pertenece a la recta BC, como se muestra en la figura 38.
8. En las columnas relativas a la razón entre las medidas de dos segmentos se va registrar el cociente entre ellas, preferiblemente con tres o más cifras decimales
9. Realizar el mismo experimento anterior varias veces y registrar los resultados en la tabla 8 hasta que el estudiante pueda concluir la relación entre algunos de los segmentos creados. Es importante que el estudiante reconozca que la longitud del segmento DF es equivalente a la longitud del segmento BC, así como la longitud del segmento BD es equivalente a la longitud del segmento CF, lo que quiere decir que son segmentos congruentes.
10. El estudiante debe observar los resultados de la tabla y ver, como se muestra en la tabla 9, que existen valores muy parecidos. Es de aclarar que los valores no dan exactamente iguales debido al uso de cifras decimales, a la imprecisión en la toma de medidas e incluso al manejo del **Altímetro Pedagógico**. Por esta razón en la actividad de cierre se sugiere verificar los resultados de estas razones con GeoGebra para lograr mayor exactitud.

Actividad de cierre:

En los resultados de la tabla 9, habrá una fila donde al comparar algún par de relaciones o razones el resultado sea más parecido que en las otras filas. (Ver Tabla 9)

Tabla 9: Tabla de registro de medidas. Ejemplo de un resultado real en una aplicación

	$m\angle B$	$m\angle G$	AC	BC	CG	$\frac{AC}{BC}$	$\frac{AC}{CG}$	$\frac{BC}{CG}$	$\frac{CG}{AC}$	$\frac{BC}{AC}$
1	30		62							
2	35		62							
3	40	50	62	725	52	0,85	1,19	1,39	0,84	1,17
4	42		62							
5	45		62							

Con el propósito de comprobar estos resultados en GeoGebra y utilizando los conocimientos adquiridos en las sesiones anteriores, construir el triángulo rectángulo en GeoGebra, con los ángulos dados en esa fila, pero cuya altura sobre la hipotenusa sea 62 cm. Tomar las medidas de los segmentos determinados por la altura sobre la hipotenusa y llenar nuevamente los datos pedidos en la tabla en una fila adicional.

Esta construcción se puede hacer de varias formas, pero se espera que los estudiantes lleguen a algo similar a lo que se ve en la figura 39:

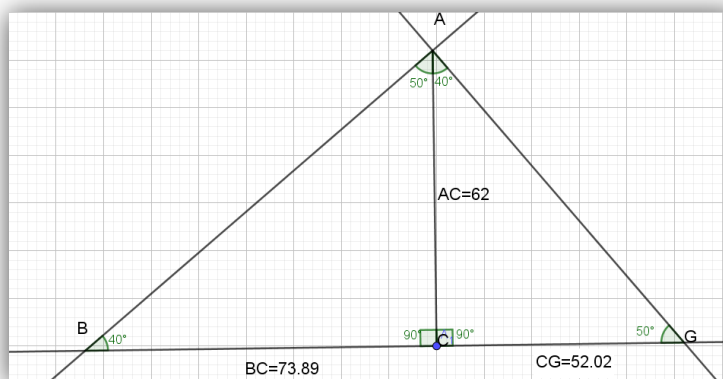


Figura 39: Triángulo rectángulo. Actividad de cierre Situación 4

Al completar la tabla quedaría de la siguiente forma (Ver Tabla 10):

Tabla 10: Ejemplo tabla de registro, de un resultado real en una aplicación.

	$m\angle B$	$m\angle G$	AC	BC	CG	$\frac{AC}{BC}$	$\frac{AC}{CG}$	$\frac{BC}{CG}$	$\frac{CG}{AC}$	$\frac{BC}{AC}$
1	30		62							
2	35		62							
3	40	50	62	72.5	52	0.85	1.19	1.39	0.84	1.17
4	42		62							
5	45		62							
3	40	50	62	73.89	52.02	0.839	1.192	1.42	0.838	1.192

Responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué puede observar en los nuevos valores de la tabla?
(Respuesta esperada: Que los que tienen el mismo color de fondo son iguales o muy parecidos.)
- Si se igualan las razones como aparecen en el encabezado de la tabla es decir con los nombres de los segmentos ¿cómo quedarían esas igualdades?

Respuesta esperada para el ejemplo:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CG}{AC} \quad y \quad \frac{AC}{CG} = \frac{BC}{AC}$$

Concepto:
Cuando dos razones son iguales, se convierte en una proporción

- Supongan que no se conoce la medida del segmento AC y si las medidas de los demás, remplace los valores conocidos, según la última fila de la tabla 9.

Respuesta esperada para el ejemplo:

$$\frac{AC}{73.89} = \frac{52.02}{AC} \quad y \quad \frac{AC}{52.02} = \frac{73.89}{AC}$$

Despejar y comprobar que $AC=62$

4. Multiplicando ambos términos por AC queda que

$$(AC)^2 = 73.89 \times 52,02$$

$$\text{entonces } AC = \sqrt{3843.7578}$$

$$AC = 61.998 \text{ (aproximadamente 62)}$$

SITUACIÓN No 5: Semejanza de triángulos

Asignatura: Matemáticas

Pregunta guía: ¿Cuándo dos triángulos son semejantes?

Conceptos abordados: Semejanza de triángulos

Desempeño del estudiante: Reconoce cuándo dos triángulos son semejantes.

Materiales: Tablet o computadores con GeoGebra

Tiempo: Sesión de 50 minutos

Descripción de la situación:

Antes de abordar esta situación debemos recordar lo visto en situaciones anteriores:

Si dos triángulos tienen congruentes uno a uno sus ángulos, los triángulos son semejantes.

Y si los lados de dos triángulos son proporcionales uno a uno, los triángulos son semejantes

1. Observen con atención los triángulos que se muestran en la Figura 40

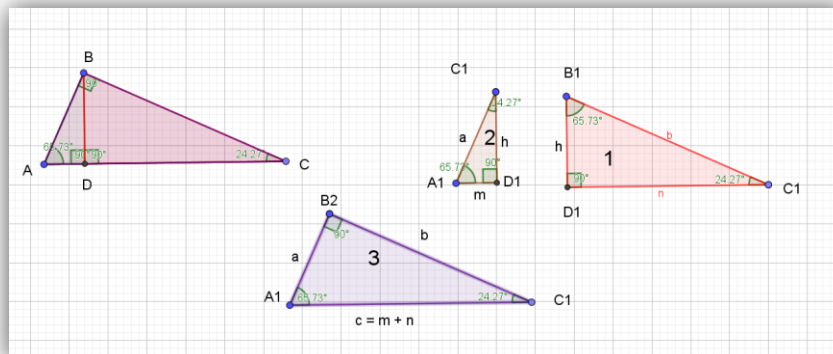


Figura 40: Triángulos semejantes

2. ¿Qué tienen en común los tres triángulos?

Pueden responder que todos los triángulos tienen un ángulo de 40° , uno de 50° y uno de 90° , o que sus ángulos son congruentes.

3. Verifique si hay proporcionalidad entre los lados correspondientes, es decir son correspondientes los lados que forman los ángulos de la misma medida.

4. En un archivo de GeoGebra se construye un triángulo ABC. Con la opción traslación



, se selecciona el objeto a trasladar, luego la opción traslación y se traza el vector en la dirección y el sentido a donde se quiera trasladar el triángulo ABC, resultando dos triángulos congruentes (dos triángulos son congruentes si sus lados y sus ángulos son congruentes).

Con la opción homotecia se pueden construir triángulos semejantes de la siguiente forma:

- Se selecciona la figura.

- Se selecciona la opción homotecia .

- Luego un punto fuera de la figura, que se llama centro de homotecia, que es el que permite alejar, acercar o superponer el triángulo resultante al triángulo inicial.

- Comparar los ángulos correspondientes.
- Comparar por medio de una razón los lados correspondientes

Actividad de cierre:

Con cartulina verifique el Teorema de Euclides con respecto a la altura y con respecto a los catetos.

FASE 3: MOMENTO DE EVALUACIÓN

SITUACIÓN No 6: Hallar la altura de mi salón de clase

Asignatura: Matemáticas

Pregunta guía: ¿Cuál es la altura de mi salón de clase?

Conceptos abordados: Teorema de Euclides, proporcionalidad y semejanza de triángulos.

Desempeño del estudiante: Acercarse a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos a partir del Teorema de Euclides.

Materiales

- Guía del estudiante
- **Altímetro Pedagógico**
- Flexómetro

Tiempo: Dos sesiones de 50 minutos

Descripción de la situación

Se ubica un punto en uno de los extremos más altos del salón, del que el profesor previamente debe conocer la altura para poder verificar tanto el conocimiento adquirido,

como la precisión del trabajo de los estudiantes.

En este punto no se explica detalladamente el uso del altímetro puesto que en el desarrollo del trabajo se hizo y lo utilizaron en un caso concreto de toma de medida de altura.

Simplemente se van a enumerar los pasos que se espera que los estudiantes sigan:

- Se marca en el transportador del Altímetro un ángulo menor de 90° . Por ejemplo pueden ser 60°
- Se ubica el Altímetro de tal manera, sin mover la manecilla del transportador, el láser apunte alumbra exactamente al punto seleccionado.
- Con la ayuda del flexómetro y la plomada se mide la distancia de la pared al muro.
- Se vuelve a hacer el mismo proceso, pero en este caso la medida del ángulo que se marca con el transportador, debe ser complementaria a la medida del ángulo anterior, para garantizar que el ángulo que se va a formar en la parte superior es de 90° y se puede aplicar el teorema de Euclides, relativo a la altura.
- Tomando la nueva distancia del centro del transportador del altímetro a la pared, se tienen las dos proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, a los que se han llamado m y n . por el Teorema de Euclides la altura (h) es media proporcional entre m y n .

Actividad de cierre:

Enunciar el Teorema de Euclides y modelar una fórmula para:

Hallar la altura si se conoce o se puede deducir la medida de la proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

7. Prueba piloto de la Secuencia Didáctica

La prueba piloto consistió en la puesta en escena de las cuatro primeras situaciones diseñadas para la Secuencia Didáctica (Ver anexo C), con tres estudiantes de octavo y noveno de diferentes colegios. Esto se hizo con el fin de revisar la pertinencia de las actividades y realizar los ajustes necesarios para el cumplimiento del objetivo. La propuesta pedagógica expuesta en el numeral 6 del presente documento ya cuenta con las modificaciones a que dio lugar después del resultado de las observaciones realizadas.

Para que los estudiantes pudieran participar en la prueba piloto de la Secuencia Didáctica que se propone, los padres de familia firmaron un consentimiento informado para poder ser grabados y fotografiados durante la prueba y así poder utilizar las evidencias en el análisis de las situaciones.

Dentro de las observaciones realizadas en estas pruebas, fue evidente que los estudiantes no tenía los conceptos claros de paralelas, perpendiculares, segmento, recta, entre otros, por lo que se rescata la importancia que tiene la fase 1 “Saberes previos” de la Secuencia Didáctica, que busca recordar estos elementos que, aunque ya debían haber sido incorporados por los estudiantes, en la realidad muchos de ellos tienen dificultades con los mismos.

En esta fase de la secuencia el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, fue de vital importancia ya que aunque ninguno de los tres estudiantes conocía el programa, el haberlo utilizado les permitió sorprenderse y construir nuevos saberes.

Frente al uso del **Altímetro Pedagógico**, al comienzo se dificultó ver las relaciones entre las razones ya que las medidas eran inexactas, si bien esto permitió exigirle a los estudiantes que fueran más precisos con estas, también es evidente que el artefacto tiene un margen de error, sin

embargo esta es una herramienta que les posibilita la comprensión de los conceptos en situaciones reales.

En cuanto a la Secuencia Didáctica que se propone, la aplicación de la prueba piloto permitió hacer ciertas reformas para lograr que los estudiantes comprendieran mejor lo que se proponía. Una de las modificaciones que se realizó fue terminar la secuencia con la comprobación de la exactitud de los resultados obtenidos en la situación “Acercamiento al Teorema de Euclides” por medio del uso del software de geometría dinámica. Se cambiaron algunos términos que no eran precisos o claros, se complementó con preguntas que permitían hacer mejores comprensiones a los estudiantes, entre otros cambios que posibilitaron la consecución del objetivo propuesto.

A pesar de las dificultades presentadas con la aplicación de la Secuencia Didáctica, los estudiantes lograban hacer conjeturas acerca del Teorema de Euclides expresadas en sus términos (Ver Figura 41), lo que permitió ver que se lograba la construcción de los aprendizajes esperados.

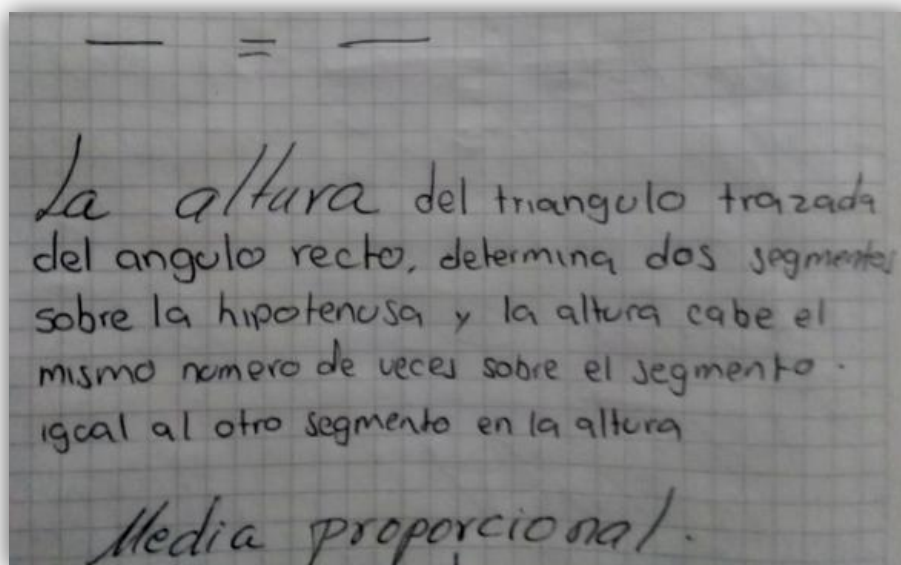


Figura 41: Conjetura hecha por un estudiante acerca de medida proporcional.

8. Conclusiones

Después de una indagación frente al uso del Teorema de Euclides en la enseñanza de proporcionalidad y semejanza de triángulos y evidenciar que este es una herramienta que poco se ha tenido en cuenta para estos fines, se diseñó una Secuencia Didáctica y un material concreto que permite, con la ayuda del software de geometría dinámica GeoGebra, aproximarse a la deducción del teorema de Euclides y a partir de él desarrollar el proceso de aprendizaje, de al menos una noción de proporcionalidad y semejanza de triángulos, en estudiantes de octavo y noveno grado. Es así como después del desarrollo de la propuesta expuesta en el presente documento se puede concluir que:

- La Secuencia Didáctica, por su carácter procesual, posibilita que los estudiantes se apropien de conceptos de geometría básica, a través del uso del programa de geometría dinámica GeoGebra y vean su aplicabilidad en situaciones reales.
- La Secuencia Didáctica que se desarrolla en el presente trabajo permite que el estudiante llegue a conjeturar el Teorema de Euclides y con él la comprensión de conceptos como proporcionalidad y semejanza de triángulos.
- Las situaciones problema que se plantean a los estudiantes y la posibilidad de que estos se resuelvan a través de la comprobación real, otorga que ellos logren mejores comprensiones, construyan saberes, exploren otros caminos para llegar a las nuevas significaciones.
- El **Altímetro Pedagógico** es una herramienta que, en conjunto con la planeación de actividades pedagógicas que contengan situaciones problema, posibilita que los estudiantes infieran el Teorema de Euclides y el acercamiento a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos.
- La Secuencia Didáctica diseñada y verificada a través de la prueba piloto, da cuenta de la eficacia del **Altímetro Pedagógico** para deducir el Teorema de Euclides y el acercamiento de

los estudiantes, a los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos. Aunque es evidente que el artefacto tiene un margen de error, por cuanto la imprecisión en la toma de medidas y el uso de cifras decimales, puede dificultar que los estudiantes identifiquen igualdad entre razones, pero a la vez su uso en contextos pedagógicos puede proporcionar nuevas posibilidades de construcción de conocimientos.

- El teorema de Euclides como herramienta para abordar el estudio de la semejanza de triángulos, permite que los estudiantes reconozcan con facilidad la congruencia de los ángulos, pero se les dificulta reconocer la proporcionalidad entre los lados correspondientes.

9. Proyección

Es importante mostrar que durante el desarrollo del presente trabajo se descubrió que el **Altímetro Pedagógico** puede tener otros campos de acción dentro del quehacer matemático, que pueden ser objeto de un estudio posterior.

En el campo de la trigonometría puede resultar una herramienta interesante para la construcción de conocimiento acerca de las razones trigonométricas y su aplicabilidad en un caso concreto.

También se pudo ver que así como se usó el **Altímetro Pedagógico** para calcular alturas por medio del Teorema de Euclides, también se podría lograr este objetivo utilizando el Teorema de Pitágoras e incluso utilizando el Teorema de Thales.

Después de la aplicación de la prueba piloto y algunas sugerencias del jurado se ve que a la Situación No. 4 se le deben hacer algunas modificaciones sustanciales para que realmente el estudiante pueda inferir el Teorema de Euclides. Se sugieren las siguientes modificaciones:

SITUACIÓN No 4: Acercamiento al Teorema de Euclides.
Asignatura: Matemáticas Pregunta guía: ¿Cómo se usa y para qué sirve el altímetro pedagógico?
Conceptos abordados: Razón, proporción y semejanza de triángulos.

Desempeño del estudiante:

Descubre o infiere alguna relación entre la altura del triángulo rectángulo y los segmentos determinados por esta sobre la hipotenusa, acercándose al Teorema de Euclides.

Materiales

- Guía del estudiante
- El Altímetro Pedagógico.
- Una tabla de registro
- Flexómetro

Tiempo: Sesión de 50 minutos

Descripción de la situación

Al comenzar esta situación, el estudiante debe tener claro que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados y por lo tanto, si dos de los ángulos del triángulo son complementarios (la suma de sus medidas es 90 grados), entonces el triángulo es rectángulo.

Como el objetivo del altímetro pedagógico es medir alturas, es importante tener en cuenta que el centro del cabezote del altímetro, que es donde está el transportador se encuentra a 108 centímetros del piso y es a partir de aquí donde se puede calcular la altura buscada.

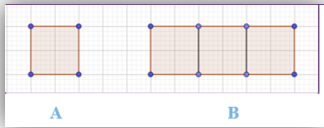
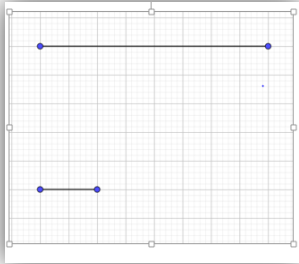
Procedimiento

El altímetro tiene un transportador y un láser que permite medir el ángulo a un punto determinado, por lo cual se puede realizar el siguiente procedimiento:

Lo primero que debe reconocer el estudiante para el desarrollo de esta guía es el concepto de razón como relación entre dos magnitudes que se puede presentar como el consiente entre las

mismas. Para lo cual se le plantea el siguiente ejercicio:

11. Entendiendo la razón como una relación, como una comparación entre magnitudes, que se puede expresar como un cociente se tiene: (observar y completar la tabla)

Relación entre magnitudes	Formas de expresarla	Cociente
	Uno es a tres $1:3$ $\frac{1}{3}$	0,33
	Cuatro es a uno $4:1$ $\frac{4}{1}$	4

Para continuar el desarrollo de la presente situación el estudiante recibe la tabla No. 8 y un esquema con los nombre de los puntos que él debe reconocer, en el momento de usar el **Altímetro Pedagógico** (figura 38). Por ejemplo:

- El punto A, está ubicado en una pared del aula de clase a 1.70 m de altura.
- El punto B corresponde al punto donde resulta ubicado el altímetro, con el ángulo dado en la tabla, de tal manera que la luz del láser señale el punto A.
- Siendo F un punto ubicado en el piso, el AF es perpendicular al piso.
- El punto G es el punto donde se ubica el altímetro, cuando el transportador está marcando el ángulo complementario al ángulo en el punto B y el láser está marcando el

punto A

- BC es la distancia del punto B al AF y CG es la distancia del punto G al AF .

12. Se coloca el punto A en una pared, a una altura fácil de verificar por los estudiantes, para este ejemplo a 1,70 m.

13. Una pareja de estudiantes recibe la siguiente tabla:

Tabla 11: *Tabla de registro de medidas*

	$m\angle B$	$m\angle G$	AC	BC	CG	$\frac{AC}{BC}$	$\frac{AC}{CG}$	$\frac{BC}{CG}$	$\frac{CG}{AC}$	$\frac{BC}{AC}$
1	30		62							
2	35		62							
3	40		62							
4	42		62							
5	45		62							

14. En este ejercicio la longitud del segmento AC se conoce y es 62 cm, con lo que se busca que reconozcan la relación entre los segmentos y se conoce la medida del ángulo B.

15. Utilizando el **Altímetro Pedagógico**, el estudiante debe completar cada fila, partiendo del ángulo que se le da inicialmente, 30° para la primera fila.

16. El altímetro debe ser colocado en un sitio del salón de tal manera que estando el transportador marcando los 30°, la luz del láser marque exactamente el punto previamente ubicado en la pared.

17. Con la ayuda de la plomada y el flexómetro se puede encontrar un punto en el suelo y se puede hallar la distancia del altímetro a la pared, es decir que se puede hallar la longitud del segmento DF y por tanto la longitud del segmento BC. Esta medida debe ser colocada en la casilla correspondiente de la tabla.

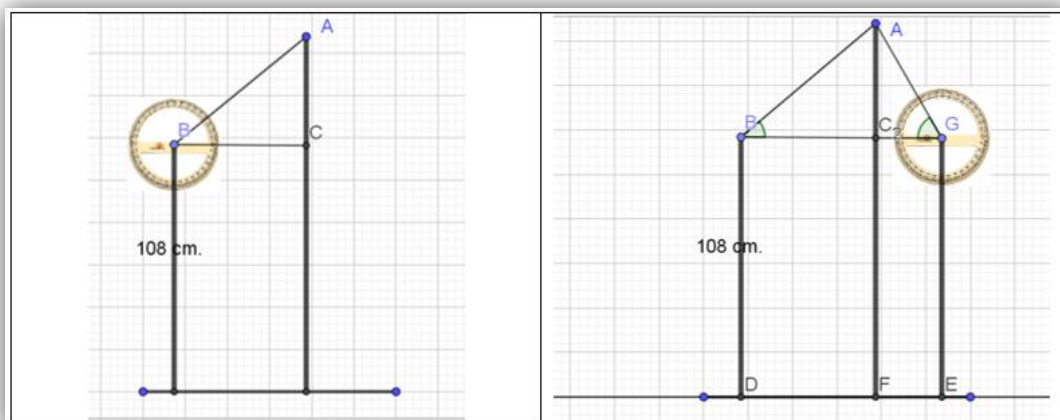


Figura 42: Procedimiento para el uso del altímetro pedagógico.

18. Ahora ubique la manecilla del transportador indicando la medida del ángulo complementario al ángulo tomado en el paso anterior (es decir que la suma de la medida de los dos ángulos sea 90°), Colocar el altímetro en otro lado del salón, pero en el punto en el cual se logre que la luz del rayo láser caiga en el mismo punto A. El nuevo punto determinado por la plomada del altímetro es el punto E y el punto central del transportador es el punto G que pertenece a la recta BC, como se muestra en la figura 42.
19. En las columnas relativas a la razón entre las medidas de dos segmentos se va registrar el cociente entre ellas, preferiblemente con tres o más cifras decimales
20. Realizar el mismo experimento anterior varias veces y registrar los resultados en la tabla 8 hasta que el estudiante pueda concluir la relación entre algunos de los segmentos creados. Es importante que el estudiante reconozca que la longitud del segmento DF es equivalente a la longitud del segmento BC, así como la longitud del segmento BD es equivalente a la longitud del segmento CF, lo que quiere decir que son segmentos congruentes.
21. El estudiante debe observar los resultados de la tabla y ver, como se muestra en la tabla 9, que existen valores muy parecidos. Es de aclarar que los valores no dan exactamente iguales debido al uso de cifras decimales, a la imprecisión en la toma de medidas e incluso al manejo del **Altímetro Pedagógico**. Por esta razón los estudiantes deben realizar una tabla paralela, pero usando ya no el altímetro pedagógico sino el software de geometría dinámica GeoGebra, para lograr mayor exactitud. Se le puede sugerir además que use más

cifras decimales.

22. ¿Existen razones que se puedan igualar?

Lo que se espera es que los estudiantes lleguen a resultados como los que se presentan en la tabla que aparece a continuación, donde una vez verificada con GeoGebra se pueda llegar a la igualdad de las siguientes razones:

	$m\angle B$	$m\angle G$	AC	BC	CG	$\frac{AC}{BC}$	$\frac{AC}{CG}$	$\frac{BC}{CG}$	$\frac{CG}{AC}$	$\frac{BC}{AC}$
1	30		62							
2	35		62							
3	40	50	62	72.5	52	0.85	1.19	1.39	0.84	1.17
4	42		62							
5	45		62							
3	40	50	62	73.89	52.02	0.839	1.192	1.42	0.838	1.192

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CG}{AC} \text{ y } \frac{AC}{CG} = \frac{BC}{AC}$$

23. Si se sabe que en una igualdad de cocientes el producto de medios es igual al producto de extremos, ¿de qué otra manera podrían expresarse las anteriores ecuaciones?

La respuesta esperada es $AC \cdot AC = BC \cdot CG$, o lo que es lo mismo $AC^2 = BC \cdot CG$

Aquí se les puede decir a los estudiantes que esto es lo que se conoce como El Teorema de Euclides.

Actividad de cierre:

En los resultados de la tabla 9, habrá una fila donde al comparar algún par de relaciones o razones el resultado sea más parecido que en las otras filas. (Ver Tabla 9)

Tabla 12: Tabla de registro de medidas. Ejemplo de un resultado real en una aplicación

	$m\angle B$	$m\angle G$	AC	BC	CG	$\frac{AC}{BC}$	$\frac{AC}{CG}$	$\frac{BC}{CG}$	$\frac{CG}{AC}$	$\frac{BC}{AC}$
1	30		62							
2	35		62							
3	40	50	62	725	52	0,85	1,19	1.39	0,84	1,17
4	42		62							
5	45		62							

Con el propósito de comprobar estos resultados en GeoGebra y utilizando los conocimientos adquiridos en las sesiones anteriores, construir el triángulo rectángulo en GeoGebra, con los ángulos dados en esa fila, pero cuya altura sobre la hipotenusa sea 62 cm. Tomar las medidas de los segmentos determinados por la altura sobre la hipotenusa y llenar nuevamente los datos pedidos en la tabla en una fila adicional.

Esta construcción se puede hacer de varias formas, pero se espera que los estudiantes lleguen a algo similar a lo que se ve en la figura 43:

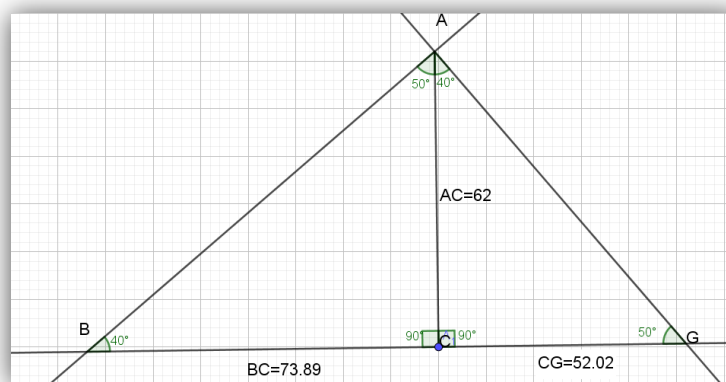


Figura 43: Triángulo rectángulo. Actividad de cierre Situación 4

Al completar la tabla quedaría de la siguiente forma (Ver Tabla 10):

Tabla 13: Ejemplo tabla de registro, de un resultado real en una aplicación.

	$m\angle B$	$m\angle G$	AC	BC	CG	$\frac{AC}{BC}$	$\frac{AC}{CG}$	$\frac{BC}{CG}$	$\frac{CG}{AC}$	$\frac{BC}{AC}$
1	30		62							
2	35		62							
3	40	50	62	72.5	52	0.85	1.19	1.39	0.84	1.17
4	42		62							
5	45		62							
3	40	50	62	73.89	52.02	0.839	1.192	1.42	0.838	1.192

Responder las siguientes preguntas:

5. ¿Qué puede observar en los nuevos valores de la tabla?

(Respuesta esperada: Que los que tienen el mismo color de fondo son iguales o muy parecidos.)

6. Si se igualan las razones como aparecen en el encabezado de la tabla es decir con los nombres de los segmentos ¿cómo quedarían esas igualdades?

Respuesta esperada para el ejemplo:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CG}{AC} \quad y \quad \frac{AC}{CG} = \frac{BC}{AC}$$

Concepto:
Cuando dos razones son iguales, se convierte en una proporción

7. Supongan que no se conoce la medida del segmento AC y si las medidas de los demás, remplace los valores conocidos, según la última fila de la tabla 9.

Respuesta esperada para el ejemplo:

$$\frac{AC}{73.89} = \frac{52.02}{AC} \quad y \quad \frac{AC}{52.02} = \frac{73.89}{AC}$$

Despejar y comprobar que AC=62

8. Multiplicando ambos términos por AC queda que

$$(AC)^2 = 73.89 \times 52,02$$

$$\text{entonces } AC = \sqrt{3843.7578}$$

$$AC = 61.99\text{€ (aproximadamente 62)}$$

Referencias

- Briseño, S., & Alamillo S., L. (octubre de 2017). Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria. *IE Revista de investigación Educativa de la rediech*.
- Bustamante, G. (2013). *Mundo Geométrico. Libro de Teoría geométrica*. Venezuela.
- Diccionario etimológico*. (s.f.). Recuperado el 26 de junio de 2018, de <http://etimologias.dechile.net>
- Euclides. (1991). *Elementos* (Vols. Libros I - IV). (M. L. Puertas C., Trad.) Madrid, España: Gredos, S.A.
- Euclides. (1994). *Elementos* (Vols. Libros V- IX). (M. L. Puertas C., Trad.) Madrid, España: Gredos S.A.
- Guacaneme S., E. (2012). Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿un asunto útil para un profesor? *Tecné, Episteme y Didaxis*. TEA(52), 113- 131.
- Hernández R., N. (Febrero de 2015). Las prácticas de enseñanza de la proporcionalidad en una telesecundaria rural del Estado de México: Un estudio de caso. México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Hernández S., R., Fernández C., C., & Babtista L., M. (2010). *Metodología de la investigación*. (Quinta ed.). México: Mc Graw Hill.
- Joya, A., Patiño, O., Buitrago, L., Sabogal, Y., Ortíz, L., Ramírez, M., & Sánchez, C. (2016). *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 7*. Bogotá, Colombia: Santillana.

- Joya, A., Patiño, O., Buitrago, L., Sabogal, Y., Ortíz, L., Ramírez, M., & Sánchez, C. (2016). *Proyecto SABER es SER y HACER Matemáticas 8*. Bogotá: Santillana.
- Levi, B. (2006). *Leyendo a Euclides*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Serie Lineamientos Curriculares. Matemáticas*. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar*. (M. d. Nacional, Ed.) Colombia. Recuperado el 07 de 07 de 2018, de https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (2013). *Secuencia Didáctica en Matemáticas: Educación Básica Secundaria*. (MEN, Ed.) Bogotá, Colombia: MEN. Recuperado el 12 de octubre de 2018
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje (DAB)*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado el 07 de 07 de 2018, de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Vamos a aprender matemáticas*. Bogotá, Colombia: MEN.
- Moise, E. (1986). *Geometría Moderna*. Estados Unidos: Adison-Wesley Iberoamericana S.A.
- Mora M., L. C., Torres D., J. A., & Luque A., C. J. (s.f). Euclides y el currículo. *XIV Encuentro de Geometría y II de Aritmética*, (págs. 401-416). Bogotá.
- Orozco, J. (2013). *Juega y construye la Matemática 8º*. Bogotá, Colombia: Comunidad de Hermanos Maristas de la Enseñanza.

- Perry, P., Guacaneme, E., & Fernández, F. (Junio de 2003). *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer*. (P. Perry, E. Guacaneme, A. Andrade, & F. Fernández, Edits.) Bogotá, Colombia: Una empresa docente, universidad de los Andes.
- Sánchez, C. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*(32), 71-92. Recuperado el 23 de octubre de 2017, de <http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n32/n32a06.pdf>
- Vasco, C. (2006). *Didáctica de las matemáticas*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Anexos

Anexo A. Red de las definiciones, postulados, nociones comunes y proposiciones que respaldan este trabajo

¿Dónde está el origen de este trabajo?

Es necesario decir que cuando se habla de un aparte del libro Elementos de Euclides, existe la siguiente nomenclatura:

[VI, 8] siempre entre paréntesis cuadrado, va en número romano el número del libro y en número arábigo, el número de la proposición.

[Post. 1] Postulado 1. En los postulados no aparece el número del libro, puesto que solamente aparecen 5 postulados en el primer libro.

[V, Def. 5] Hace referencia a la definición No. 5 del quinto libro.

[N.C. 3] Nociones comunes son nueve y solamente aparecen en el primer libro.

La idea original para el desarrollo del presente trabajo surge al leer el corolario que aparece en la proposición 8 del libro VI que dice:

[VI, 8] Si en un triángulo rectángulo se traza la perpendicular desde el vértice a la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al triángulo total y entre sí. (p. 811)

Corolario: De aquí se deduce que en un triángulo rectángulo la perpendicular trazada desde el vértice del ángulo recto a la base es media proporcional entre los segmentos de la base.

En el libro los Elementos esta proposición [VI, 8] está respaldada por la proposición [I, 32], la proposición [VI, 4] y la [VI, Def. 1], de las cuales las tres primeras tienen su respectivo soporte, como puede verse a continuación:

		[I,23]	[I,22]	[I, 3]	
			[I,8]	[I, 7]	[I, 5]
	[I,31]				
	*****	[I,27]	[I,16]	[I, 3]*****	
			[I, Def. 23]		
			[I, Def. 11]		
				[I, 3]	
				[I, 1]	
		[I,13]	[I, 11]	[I,8]	
[I,32]		***		[I, Def. 10]	
			[N.C. 1]		
	[I,29]		[N.C. 2]		
		[Post. 5]			
			[I, 13]		
			[N.C. 1]		
		[I,15]	[N.C. 3]		
		*	[Post. 4]		
	[I,13]	***			

En este cuadro se puede apreciar que la proposición [I, 32] está respaldada en las proposiciones [I, 31], [I, 29] y [I, 13]. La proposición [I, 31] está respaldada por la [I, 23] y [I, 27]. La proposición [I, 29] está respaldada por la proposición [I, 13], el [Post. 5] y la proposición [I, 15] y la proposición [I, 13] presenta tres asteriscos que indican que en la tabla ya se había mencionado y hay que buscar donde está descrito todo su soporte.

La proposición [VI, 4] tiene su respaldo en la siguiente axiomática:

		[Post. 2]			
				[I, 2]	
			[I, 3]	[Post. 3]	**
				[N.C. 1]	
			[Post. 1]		
	[I, 17]		[Post. 2]		
		[I, 16]	[N.C. 5]		
			[I, 4]	[N.C. 4]	
				[I, 13]	
			[I, 15]	[Post. 4]	*
				[N.C. 1]	
				[N.C. 3]	
		[I, 13]	***		
	[Post. 5]				
				[I, 3]	**
		[I, 27]	[I, 16]	[Post. 1]	
		*****	*****	[Post. 2]	
				[I, 4]	[N.C. 4]
				[N.C. 5]	
				[I, 15]	
	[I, 28]		[I.Def. 23]		

		[1,15]	•		
			[I,13]	•••	
			[Post. 5]		
			[I,15]	•	
		[I,29]	[N.C. 1]		
			[N.C. 2]		
		[I,26]	[I, 4]	[N.C. 4]	••••
	[I, 34]				
	••••••	[I, 4]			
		[N.C. 2]			
			[I, 31]	••••••	
					[I, 4]
				[I, 33]	[I, 27]
		[I,38]	[I, 36]	[I, 34]	••••••
	••••••			[I, 35]	
				[N.C. 1]	
[VI,4]			[I, 34]	••••••	
			[I,31]	••••••	
				[I. 31]	••••••
		[I, 39]	[I. 37] (1)	[I. 34]	••••••
				[I. 35]	

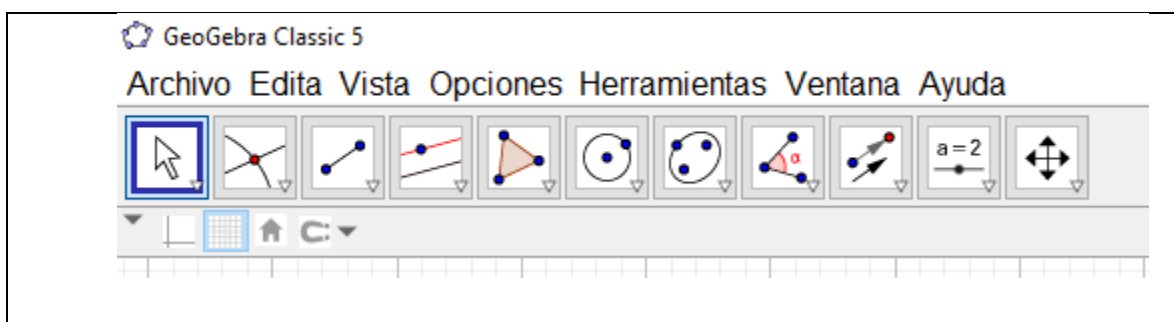
Anexo B. Situaciones de los estudiantes

SITUACIÓN 1. Explorando con GeoGebra

Hora de inicio _____ Hora de cierre _____

NOMBRE: _____ CURSO: _____

1. Explorar un software de Geometría Dinámica que tienen dentro de muchos otros íconos los siguientes. Oprimiendo en cada triangulito se despliegan muchas opciones:



2. Con la opción punto  ubicar cuatro puntos en el plano. Para nombrar cada uno de ellos se selecciona uno y haciendo clic derecho sobre él, se despliegan unas opciones, de las cuales se debe escoger la opción “etiqueta visible”. Hacer este procedimiento con todos los puntos.
3. Seleccionar la opción segmento,  luego se hace clic en un punto del plano, apareciendo el punto de inicio del segmento y se hace otro clic, donde se quiera terminar el segmento. También se puede construir un segmento con una medida determinada, para esto se hace clic en el tercer ícono y se selecciona la opción “segmento de longitud dada”



, se hace clic en el plano y aparece un punto y un recuadro que pide la longitud del segmento deseado, se coloca la medida y aparece el segmento.

4. Selecciona la opción recta,  luego selecciona un punto y seguidamente el otro, deferentes a los del ítem 2, logrando así la representación de una recta.

5. Construir un polígono irregular haciendo clic en el quinto ícono  de la barra de herramientas.

Al hacer clic en este ícono se despliegan varias opciones, se selecciona la opción “polígono”, con el que se puede construir un polígono irregular y al hacer clic en el plano o “vista gráfica”, permite crear tantos vértices como lados se quiera que tenga el polígono. La gráfica debe terminar en el vértice donde se inició que es la forma como se cierra el polígono y se termina la acción.

6. Haciendo clic en el quinto ícono, opción polígono regular, construir un polígono de 5 lados, nombrar los vértices y tomar las medidas de los lados.

Para construir un polígono regular con la opción existente en GeoGebra, se busca en el quinto ícono, se hace clic en “polígono regular” y se traza un segmento de la medida que se quieran los lados del polígono y se ve un recuadro que pide el número de lados del polígono y aparece el polígono equilátero (los lados tienen la misma medida.)

7. Construir el ángulo ABC y el ángulo DEF, como se muestran en la figura, de cualquier

amplitud y con la opción ángulo  se toman las medidas.

En este caso es importante recordar a los estudiantes que los ángulos se pueden nombrar con una sola letra o con tres. Cuando se nombra con una sola letra, esa letra es el nombre del vértice y cuando se nombra con tres letras, la del centro representa el vértice. Es importante que el estudiante se dé cuenta que no se mide el mismo ángulo si los puntos se nombran en el mismo sentido de las manecillas del reloj, que si se nombran en sentido contrario.

8. En un plano nuevo (Archivo – Nuevo) construir un segmento y un punto fuera de él y con la opción paralela  selecciona el segmento y seguidamente el punto, observarás que se construye una recta **paralela** al segmento inicial.
9. En un plano nuevo (Archivo – Nuevo) construir un segmento y un punto fuera de él y con la opción perpendicular  selecciona el segmento y seguidamente el punto, observarás que se construye una recta **perpendicular** al segmento inicial.
10. Dados los puntos A, B, C, D y E construir el polígono ABCDE, medir sus lados y los ángulos internos. Realizarlo de acuerdo a las indicaciones de los numerales anteriores
 - c. Construir el polígono sin usar la opción “polígono” existentes en GeoGebra (En este caso el estudiante debe construir los segmentos AB, BC, CD, DE y EA.)
 - d. Construir el polígono usando la opción existente en GeoGebra , como ya se había hecho.

Actividad de cierre:

Construya con polígonos de tres y cuatro lados una casa

- d) Nombrar cada uno de los puntos que resultaron.
- e) Identificar cuáles segmentos son paralelos y cuáles son perpendiculares.

Tomar la medida de todos los segmentos y todos los ángulos internos de la figura que se construyó.

SITUACIÓN 2. CONSTRUCCIONES BÁSICAS

Hora de inicio _____ **Hora de cierre** _____

NOMBRE: _____ **CURSO:** _____

1. Dados los segmentos AB y CD, por medio de la opción compás  establecer qué relación o qué razón existe entre los dos segmentos, es decir cuántas veces se puede trazar el segmento AB dentro del segmento CD. El compás para este ejercicio se usa de la siguiente forma:

Con la opción compás se hace clic en A y luego en B y aparece una circunferencia de radio AB.

El compás para este ejercicio se usa de la siguiente forma:

- Con la opción compás se hace clic en A y luego en B y aparece una circunferencia de radio AB.
 - Luego se hace clic en C y ese radio queda trazado sobre el segmento CD si se establece el punto de intersección entre la circunferencia y el segmento apareciendo el punto E.
 - Seguidamente se efectúa el mismo proceso, haciendo clic en A y en B para crear una circunferencia de radio AB, pero ahora se va a hacer clic en E, para establecer el segmento EF congruente (de igual longitud) al segmento AB.
2. Para este ejercicio se sugiere utilizar el tablero de GeoGebra sin la cuadrícula de guía. Ubicar dos puntos en el plano y nombrarlos con letras las mayúsculas A y B.

Utilizando únicamente la opción punto del software, establecer un punto que se calcule equidistante de los puntos A y B es decir a pulso.

Nota: Equidistante significa que están a la misma distancia.

3. Verificar si el punto construido © es equidistante de los puntos A y B tomando las respectivas medidas, para lo cual se usa la opción distancia o longitud , haciendo clic consecutivamente en los puntos A y C y luego en los puntos A y B. Si no se logró la equidistancia en un primer momento, se debe correr el punto con la opción  hasta que las distancias sean iguales.
4. ¿Podrían existir otros puntos equidistantes a los inicialmente dados? Si su respuesta es afirmativa ubique cinco puntos más, nómbralos con las letras D, E, F, G, H y tome las medidas para poder confirmar la equidistancia. Si considera que solamente existe un punto, explique sus razones.
5. ¿Cuántos puntos podrían ubicarse que cumplan con la característica de equidistancia de los puntos A y B?
6. ¿Existe alguna recta que contenga estos puntos? Si su respuesta es afirmativa verificar que todos los puntos de esa recta equidistan de los puntos A y B, ubicando varios puntos en la recta y tomando la medida de la distancia a A y a B.
7. Nombrar dos puntos de la nueva recta con las letras C y D
8. ¿Qué otras medidas podría tomarse en la figura resultante?
9. Escribir una definición de la $\overline{CD}$ con respecto al $\overline{AB}$ que se ha construido.
10. Trazar el $\overline{AB}$, con el ícono correspondiente trazar la mediatriz de dicho segmento y verificar si corresponde exactamente a la definición que se ha elaborado.

Actividad de cierre:

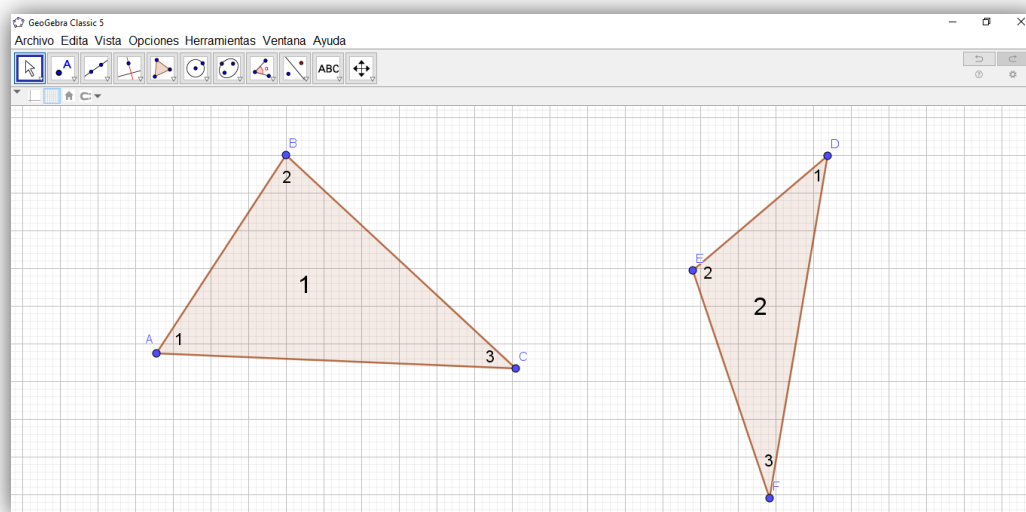
Se quiere construir una estación de Transmilenio de tal forma que esté a la misma distancia del barrio Villas del Madrigal y Garcés Navas. Trace, en el software de geometría dinámica GeoGebra, dos puntos que representen los barrios y ubique dos posibilidades donde podría ir la estación de Transmilenio

SITUACIÓN 3. ÁNGULOS INTERNOS DE UN TRIÁNGULO

Hora de inicio _____ Hora de cierre _____

NOMBRE: _____ CURSO: _____

1. Con la opción polígono deben construir cinco triángulos diferentes y numerarlos.
2. También se deben enumerar los ángulos de cada triángulo con los números del 1 al 3, como en el ejemplo siguiente:

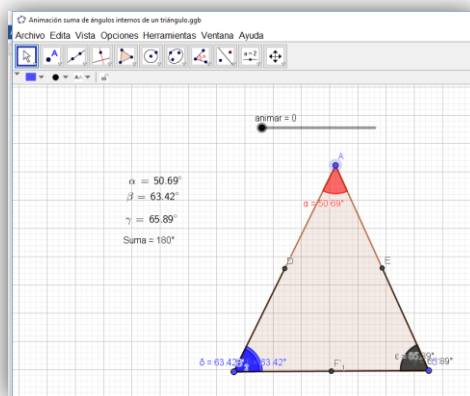


3. Tomar la medida de todos los ángulos internos y completar la siguiente tabla:

ÁNGULOS

TRIÁNGULO	$m\angle 1$	$m\angle 2$	$m\angle 3$	TOTAL
1				
2				
3				
4				
5				

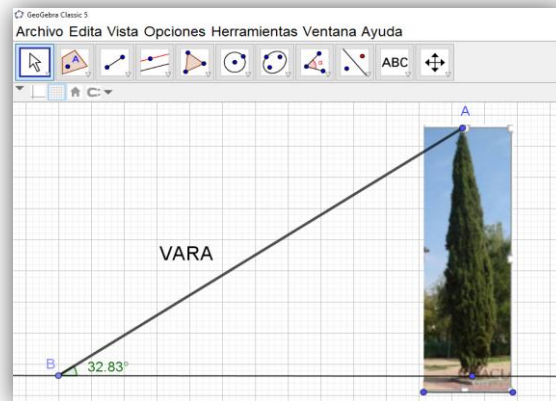
4. ¿Qué observa en la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo?
5. En el archivo de GeoGebra **suma de los ángulos internos de un triángulo**:



- Mover cada uno de los vértices y observar qué pasa con cada uno de los ángulos.
- Manipular la animación manual y automáticamente, de cero a uno.
- Desplazar el vértice A (el vértice del ángulo rojo) hasta convertir el ángulo
- En ángulo recto.
- ¿Qué característica tienen los otros dos ángulos?
- ¿Cómo comprobar si la $\overleftrightarrow{F'F'_1}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son paralelas?

• **Actividad de cierre (Se puede dejar de tarea)**

- Para evitar que un pino se ladee el ingeniero forestal recomendó colocar dos varas opuestas, de tal manera que el ángulo que formen las varas en la cima del pino sea recto. Si la primera vara que coloqué desde el piso a la cima del pino forma un ángulo de $32,83^\circ$, ¿Cuánto debe medir el ángulo que forme la otra vara con el piso, para asegurar que el ángulo en la cima del pino sea recto?



SITUACIÓN 4. ACERCAMIENTO AL TEOREMA DE EUCLIDES

Hora de inicio _____ Hora de cierre _____

NOMBRE: _____ CURSO: _____

Después de una breve presentación de un **Artefacto Pedagógico**, y el flexómetro, los estudiantes deben proceder a desarrollar la siguiente guía en parejas:

1. Se coloca el punto A en una pared, a una altura fácil de verificar por los estudiantes, para este ejemplo a 1,70 m.
2. Una pareja de estudiantes recibe la siguiente tabla:

	$m\angle B$	$m\angle G$	AC	BC	CG	$\frac{AC}{BC}$	$\frac{AC}{CG}$	$\frac{BC}{CG}$	$\frac{CG}{AC}$	$\frac{BC}{AC}$
1	30		62							
2	35		62							
3	40		62							
4	42		62							
5	45		62							

3. En este ejercicio la longitud del segmento AC se conoce y es 62 cm, con lo que se busca que reconozcan la relación entre los segmentos y se conoce la medida del ángulo B.
4. Utilizando el **Altímetro Pedagógico**, el estudiante debe completar cada fila, partiendo del ángulo que se le da inicialmente, 30° para la primera fila.
5. El altímetro debe ser colocado en un sitio del salón de tal manera que estando el transportador marcando los 30°, la luz del láser marque exactamente el punto previamente ubicado en la pared.
6. Con la ayuda de la plomada el flexómetro permite se puede encontrar un punto en el suelo y se puede hallar la distancia del altímetro a la pared, es decir que se puede hallar

la longitud del segmento DF y por tanto la longitud del segmento BC. Esta medida debe ser colocada en la casilla correspondiente de la tabla.

7. Ahora ubique la manecilla del transportador indicando la medida del ángulo complementario al ángulo tomado en el paso anterior (es decir que la suma de la medida de los dos ángulos sea 90°), Colocar el altímetro en otro lado del salón, pero en el punto en el cual se logre que la luz del rayo láser caiga en el mismo punto A. El nuevo punto determinado por la plomada del altímetro es el punto E y el punto central del transportador es el punto G que pertenece a la recta BC,.
8. En las columnas relativas a la razón entre las medidas de dos segmentos se va registrar el cociente entre ellas, preferiblemente con tres cifras decimales
9. Realizar el mismo experimento anterior varias veces y registrar los resultados en la tabla 7 hasta que el estudiante pueda concluir la relación entre algunos de los segmentos creados. Es importante que el estudiante reconozca que la longitud del segmento DF es equivalente a la longitud del segmento BC, así como la longitud del segmento BD es equivalente a la longitud del segmento CF, lo que quiere decir que son segmentos congruentes.
10. El estudiante debe observar los resultados de la tabla y ver los de cuales columnas se parecen más. (seguramente no se van a observar, pues se puede presentar un margen de error en el uso del altímetro y en la toma de las medidas)

Actividad de cierre:

En los resultados de la tabla anterior, habrá una fila donde al comparar algún par de relaciones o razones el resultado sea más parecido que en las otras filas. Con esos resultados en los que hay más similitud en una de las filas de la tabla, va a realizar lo siguiente:

Con el propósito de comprobar estos resultados en GeoGebra y utilizando los conocimientos adquiridos en las sesiones anteriores, construir el triángulo rectángulo en GeoGebra, con los ángulos dados en esa fila, pero cuya altura sobre la hipotenusa sea 62 cm. Tomar las medidas de los segmentos determinados por la altura sobre la hipotenusa y

llenar nuevamente los datos pedidos en la tabla en una fila adicional.

Responder las siguientes preguntas:

9. ¿Qué puede observar en los nuevos valores de la tabla?

(Respuesta esperada: Que los que tienen el mismo color de fondo son iguales o muy parecidos.)

10. Si se igualan las razones como aparecen en el encabezado de la tabla es decir con los nombres de los segmentos ¿cómo quedarían esas igualdades?

Respuesta esperada para el ejemplo:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CG}{AC} \quad y \quad \frac{AC}{CG} = \frac{BC}{AC}$$

Concepto:

Cuando dos razones son iguales, se convierte en una proporción

11. Supongan que no se conoce la medida del segmento AC y si las medidas de los demás, remplace los valores conocidos.

Respuesta esperada para el ejemplo:

$$\frac{AC}{73.89} = \frac{52.02}{AC} \quad y \quad \frac{AC}{52.02} = \frac{73.89}{AC}$$

Despejar y comprobar que AC=62

12. Multiplicando ambos términos por AC queda que

$$(AC)^2 = 73.89 \times 52,02$$

$$\text{entonces } AC = \sqrt{3843.7578}$$

$$AC = 61.99\text{€ (aproximadamente 62)}$$

SITUACIÓN 5. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Hora de inicio _____ Hora de cierre _____

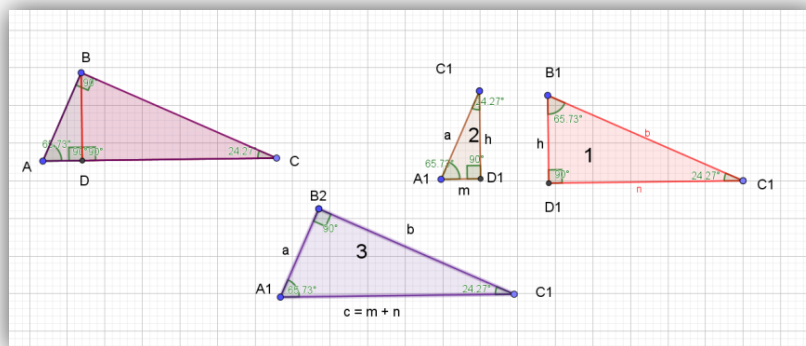
NOMBRE: _____ CURSO: _____

Antes de abordar esta situación debemos recordar lo visto en situaciones anteriores:

Si dos triángulos tienen congruentes uno a uno sus ángulos, los triángulos son semejantes.

Y si los lados de dos triángulos son proporcionales uno a uno, los triángulos son semejantes

1. Observen con atención los triángulos que se muestran en la siguiente figura



2. ¿Qué tienen en común los tres triángulos?

Pueden responder que todos los triángulos tienen un ángulo de 40° , uno de 50° y uno de 90° , o que sus ángulos son congruentes.

3. Verifique si hay proporcionalidad entre los lados correspondientes, es decir son correspondientes los lados que forman los ángulos de la misma medida.

4. En un archivo de GeoGebra se construye un triángulo ABC. Con la opción traslación , se selecciona el objeto a trasladar, luego la opción traslación y se traza el vector en la dirección y el sentido a donde se quiera trasladar el triángulo ABC, resultando dos triángulos congruentes (dos triángulos son congruentes si sus lados y sus ángulos son congruentes).

Con la opción homotecia se pueden construir triángulos semejantes de la siguiente forma:

- Se selecciona la figura.
- Se selecciona la opción homotecia .
- Luego un punto fuera de la figura, que se llama centro de homotecia, que es el que permite alejar, acercar o superponer el triángulo resultante al triángulo inicial.
- Comparar los ángulos correspondientes.
- Comparar por medio de una razón los lados correspondientes

SITUACIÓN 6. HALLAR LA ALTURA DE MI SALÓN DE CLASE

Hora de inicio _____ Hora de cierre _____

NOMBRE: _____ CURSO: _____

Descripción de la situación

Se ubica un punto en uno de los extremos más altos del salón, del que el profesor previamente debe conocer la altura para poder verificar tanto el conocimiento adquirido, como la precisión del trabajo de los estudiantes.

En este punto no se explica detalladamente el uso del altímetro puesto que en el desarrollo del trabajo se hizo y lo utilizaron en un caso concreto de toma de medida de altura. Simplemente se van a enumerar los pasos que se espera que los estudiantes sigan:

- Se marca en el transportador del Altímetro un ángulo menor de 90° .
- Se ubica el Altímetro de tal manera, sin mover la manecilla del transportador, el láser apunte alumbra exactamente al punto seleccionado.
- Con la ayuda del flexómetro y la plomada se mide la distancia de la pared al muro. }
- Se vuelve a hacer el mismo proceso, pero en este caso la medida del ángulo que se marca con el transportador, debe ser complementaria a la medida del ángulo anterior, para garantizar que el ángulo que se va a formar en la parte superior es de 90° y se puede aplicar el teorema de Euclides, relativo a la altura.

Tomando la nueva distancia del centro del transportador del altímetro a la pared, se tienen las dos proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, a los que se han llamado m y n . por el Teorema de Euclides la altura (h) es media proporcional entre m y n .

Anexo C. Evidencias de la aplicación

