ESTUDIO DE LOS DISTINTOS TEOREMAS DEL VALOR MEDIO EN EL CÁLCULO

Asociada al estudio de un tema específico

Presentado por:

DAVID ESTEBAN MORALES SUÁREZ

Cod: 2010140031

JULIÁN DAVID GLORIA LAMBRANO

Cod: 2010140019

Director:

BENJAMÍN RAFAEL SARMIENTO LUGO

Magister en docencia de la matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

COLOMBIA

2015

A mi Madre y Hermano.

Julián David Gloria

A Dios por darme la fuerza necesaria para salir adelante frente cualquier adversidad.

A mis padres y hermanos por apoyarme siempre.

A los profesores Benjamín Sarmiento, Hernán Díaz y todos aquellos que siempre estuvieron prestos para compartir su conocimiento.

David Esteban Morales

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Estudio del Teorema del Valor Medio y sus distintas presentaciones en el Cálculo.
Autor(es)	David Esteban Morales Suárez; Julián David Gloria Lambraño.
Director	Rafael Benjamín Sarmiento Lugo
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2015, 98 pág.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Teorema del Valor Medio, cálculo.

2. Descripción

Trabajo de grado que expone un análisis a fondo de los distintos Teoremas Del Valor Medio en el Cálculo, iniciando con el pre-cálculo, continuando con el cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo en varias variables y finalizando con variable compleja. Se presenta un aplicativo realizado en el programa Descartes 6.0 donde se expone la interpretación geométrica de cada teorema acompañado guías de trabajo, dirigido a estudiantes y profesores de diferentes asignaturas del Cálculo (en cada guía se aclara cual es la materia que deben estar cursando los estudiantes para poder ser utilizado como una herramienta de aprendizaje, o para profesores que deseen enseñar algún Teorema Del Valor Medio)

3. Fuentes

Apostol, T. (1967). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable con una introducción al algebra lineal.* Editorial Reverté.

Boyer, C. (1992). *Historia de la matemática.* Editorial Alianza.

Collete, J. (1973). *Historia de las matemáticas*. Volumen 2.

Evard, F; Jafari; A. (1992). *Complex Rolle's theorem, Amer. Math. Monthly*.

Gonzales, P. (1995). *Las técnicas del cálculo: Fermat Wallis y Roberval.*

Spivak, M. (1992). *Cálculo infinitesimal.* Editorial Revertre.

Tromba, A; Marsden, J. (1988). *Cálculo vectorial.* Editorial Addison Wesley Iberoamericana.

4. Contenidos

En primer lugar se presenta una breve reseña histórica del Teorema del Valor Medio, a continuación se expone el enunciado, la interpretación geométrica y la demostración de cada uno de los teoremas encontrados. Asimismo se aborda brevemente el Teorema del Valor Medio en los

números complejos; se finaliza con las guías de trabajo presentadas en el aplicativo los cuales tienen por finalidad que el estudiante o la persona interesada deduzca cada teorema a partir de la representación gráfica presentada.
5. Metodología
Para la elaboración del trabajo en primer lugar se consultó en fuentes bibliográficas la historia del Teorema del Valor Medio; en segundo lugar se examinaron cada una de las presentaciones del teorema, a continuación se buscaron las demostraciones de cada teorema y se realizó la interpretación geométrica de cada uno de ellos, analizando en cada caso lo que sucedería al modificarse el antecedente de cada teorema. Finalmente, se comenzó a elaborar el aplicativo, realizando la representación gráfica necesaria en cada caso.
6. Conclusiones
Una hipótesis que se tenía inicialmente era que las diferentes presentaciones del Teorema Del Valor Medio tenían alguna relación más allá del nombre. Después de haber revisado la historia del Teorema del Valor Medio es posible darse cuenta que cada teorema (tratados en la reseña histórica) tuvo un origen distinto a los demás. Algunos surgieron por la necesidad de demostrar diferentes teoremas como el "Teorema Fundamental del Cálculo", mientras que otros surgen como generalización de otros teoremas ya sea de R^n o para números complejos. La utilización de representaciones gráficas por medio del programa Descartes es un aspecto de vital importancia para la enseñanza de estos teoremas, ya que permite interiorizar el significado de estos.

Elaborado por:	David Esteban Morales Suárez: Julián David Gloria Lambraño.
Revisado por:	Rafael Benjamín Sarmiento Lugo

Fecha de elaboración del Resumen:	3	3	2015

CONTENIDO

TABLA DE GRÁFICAS

INTRODUCCIÓN

En cada uno de los cursos universitarios de cálculo se menciona alguna de las presentaciones del Teorema Del Valor Medio, ya sea como recurso para la demostración del teorema fundamental de cálculo o cómo un ejercicio extra de clase, a partir de esto surgen algunas dudas e interés sobre el tema que llevan a desarrollar este trabajo, en el cual se presenta un estudio sobre los distintos Teoremas Del Valor Medio (TVM) en las diferentes presentaciones del cálculo, iniciando con pre-cálculo, continuando con el cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo en varias variables y finalizando con variable compleja. Por esta razón, el trabajo está dirigido a estudiantes universitarios y docentes de las asignaturas de la línea del análisis matemático donde se aborda de manera directa e indirecta este teorema, y están interesados en la interpretación geométrica, ejemplos y demostraciones del mismo.

En primer lugar se presenta algunos apartes históricos de dicho teorema, luego se presentan el enunciado, la interpretación geométrica, además de un análisis del por qué las hipótesis de cada teorema tiene que cumplirse y demostrando de cada uno de los teoremas. Se realiza un esquema general sobre el Teorema del Valor Medio para funciones complejas extrapolando el Teorema para funciones continuas y el Teorema de Rolle de los números reales a los números complejos, verificando en cada caso si se cumplen o no dichos teoremas en la estructura de los números complejos. Al finalizar se presentan una serie de preguntas que guíen al usuario para la utilización de los applets de cada teorema que servirán para la deducción de cada una de las interpretaciones geométricas de los enunciados correspondientes a la presentación que se quiera estudiar.

Asimismo se desarrolló un applet el cual consta de diferentes construcciones realizadas en Descartes 2.0 para cada una de las versiones del TVM. Cada presentación está acompañada de una guía de trabajo (descrito anteriormente) ya que es a través de la exploración de las distintas representaciones gráficas que se espera que los estudiantes logren deducir la interpretación geométrica de cada uno de los teoremas presentes. Por último, cabe señalar que cada una de las representaciones gráficas de cada presentación incluidas en el presente trabajo son precisamente imágenes tomadas del aplicativo.

JUSTIFICACIÓN

En los distintos cursos del cálculo está presente el Teorema del Valor Medio, bien sea en cálculo diferencial, en cálculo integral o en cálculo vectorial, sin embargo después de haber pasado por cada uno de estos cursos nos preguntamos ¿existe alguna relación entre cada uno de estos teoremas? ¿De dónde surge el TVM? ¿Por qué surge el TVM?

Con base en estas preguntas surge la necesidad de realizar una búsqueda sistemática del TVM. En primer lugar se investigarán los hechos que están en la génesis del TVM, y a partir de esto y el estudio teórico de cada una de las presentaciones del mismo, crear un documento en el cual se recopile los enunciados y demostraciones del TVM en cada una de sus apariciones en el análisis matemático.

1. OBJETIVOS

1.1 Objetivo general

Elaborar un recurso bibliográfico[1] sobre el Teorema del Valor medio (TVM).

1.2 Objetivos específicos

- ✓ Destacar algunos momentos en la historia del TVM.
- ✓ Realizar la interpretación geométrica de cada uno de los distintos TVM.
- ✓ Recopilar la demostración de cada TVM.
- ✓ Analizar el por qué cada hipótesis de los diferentes TVM, son necesarias para que este se cumpla
- ✓ Elaborar un CD, que contenga ilustraciones dinámicas las cuales faciliten la visualización así como la enseñanza - aprendizaje de cada una de las interpretaciones geométricas del TVM en sus distintas presentaciones.

---

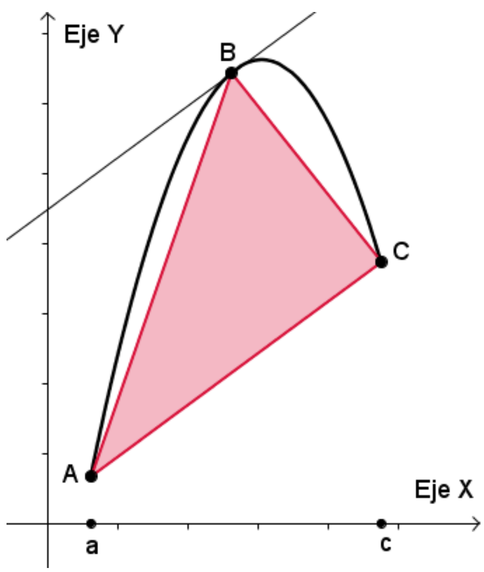
[1] Recurso: *"Medio de cualquier clase que, en caso de necesidad, sirve para conseguir lo que se pretende"*

Bibliográfico: "Perteneciente o relativo a la bibliografía" estas definiciones tomadas del Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (2014). Por lo cual para este trabajo se define un recurso bibliográfico como un documento que servirá para el estudio del Teorema del Valor Medio que contiene bibliografía complementaria.

2. ALGUNOS MOMENTOS EN LA HISTORIA DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

El primer vestigio que se tiene del Teorema del Valor Medio nos remonta al siglo III a. C., mucho antes de que se formalizara el Cálculo. Arquímedes de Siracusa demuestra rigurosamente que el área K de un segmento parabólico ABC es igual a cuatro tercios del área de un triángulo con misma base y misma altura.

En la gráfica 1, se muestra un segmento de parábola y el triángulo cuyos vértices son los puntos A, B, C.



$$K = \frac{4}{3} A(\Delta ABC)$$

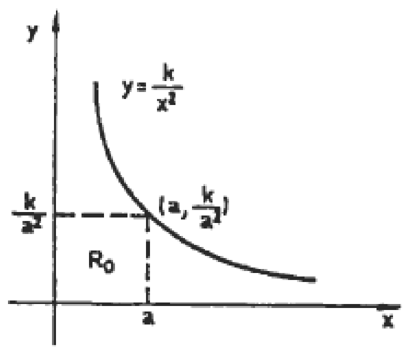
Gráfica 1. Área K de un segmento parabólico (Ortotoma)

Para determinar la altura del triángulo, Arquímedes traza una recta tangente a la curva de tal forma que sea paralela al segmento AC. El punto de tangencia es B. En el proceso que sigue Arquímedes encuentra que la pre-imagen del punto B se encuentra entre a y c. En el cálculo moderno esto es el Teorema del Valor Medio para derivadas aplicado a la parábola[2] en el intervalo a, c .

Hacia el año 1640, Fermat tenía un método que le permitía obtener el área entre un arco de hipérbola generalizada $x^n y^m = k$ (n, m enteros) en términos absolutos mediante rectángulos

[2] Arquímedes al igual que sus predecesores no emplea el nombre “parábola” sino “ortotoma” o “sección de un cono rectángulo”.

infinitesimales en donde sus áreas estaban en progresión geométrica y cuya razón era menor que la unidad[3]. De ésta forma logra demostrar que el área bajo la curva $y = \frac{k}{x^2}$ de a a ∞ es igual al área R_0 del rectángulo de base a y altura $\frac{k}{a^2}$, es decir, en notación moderna, $\int_a^\infty \frac{k}{x^2}dx = a(\frac{k}{a^2}) = R_0$ (Ver gráfica 2).



Gráfica 2. Área bajo la curva de $\boldsymbol{a}$ a ∞ de $\boldsymbol{y = \frac{k}{x^2}}$.

El resultado de Fermat no es propiamente el Teorema del Valor Medio para integrales, pero tiene una similitud con éste, en el sentido de que establece una relación entre un área bajo la curva y el área de un rectángulo.

En el año 1691, Michel Rolle publica el libro *Méthode pour résoudre les égalitéz*, el cual contiene un teorema de mucha importancia. Este surge de manera incidental mientras Rolle trataba un método para solucionar ecuaciones de manera aproximada. En el teorema se afirma: "Si una función f es diferenciable en el intervalo (a, b) y si $f(a) = f(b) = 0$, entonces $f'(x) = 0$ tiene por lo menos una raíz real entre a y b. Este teorema se conoce actualmente como Teorema de Rolle, que es un caso particular del teorema del valor medio para derivadas".

El siglo XIX se caracteriza principalmente por la introducción al rigor, atribuido a dos grandes matemáticos, Gauss y Cauchy. Hacia el año 1829 Cauchy define la integral definida en términos del límite de las sumas integrales, de la siguiente manera, si $S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$ entonces el límite S de esas sumas S_n de acuerdo a las longitudes de los intervalos $(x_i - x_{i-1})$ es la integral definida de la función $f(x)$ en el

[3] El trabajo realizado por Fermat lo puede encontrar en el documento *Las técnicas del cálculo: Fermat, Wallis y Roberval* de Pedro Gonzales Urbaneja.

intervalo $[0, X]$. Definiendo la integral de esta forma, Cauchy necesitaba demostrar la relación usual que une la integral con la derivada lo cual logró empleando el Teorema del Valor Medio. Si $f(x)$ es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo (a, b), entonces existe por lo menos un valor x_0 tal que $a < x_0 < b$ y $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$. La cual es la generalización del Teorema de Rolle descubierta un siglo antes.

El Teorema del Valor Medio no había sido objeto de atención hasta Cauchy. No obstante se reconoce como Teorema del valor medio de Cauchy a la forma más general:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

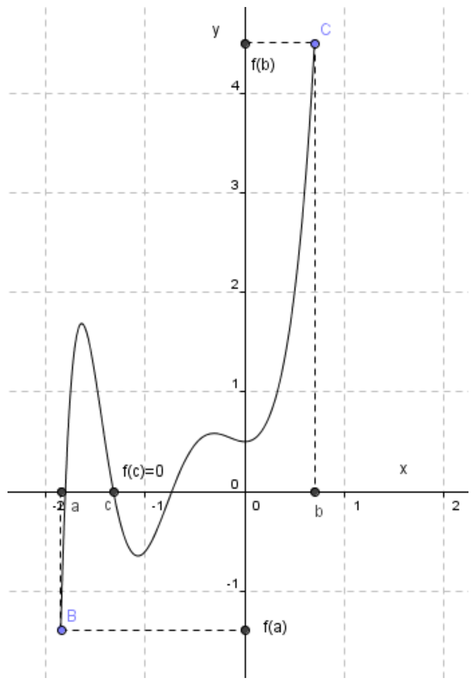
Según lo consultado, no se encontraron apartes históricos de otras presentaciones del Teorema del Valor Medio, posiblemente por los diferentes enunciados equivalentes que surgieron. Más allá de estas presentaciones existe un tema que aún no ha sido mencionado y el cual tiene una importancia histórica con respecto a las matemáticas y es el estudio de las *funciones complejas.* Desde los primeros trabajos publicados por Cauchy se han publicado muchos sobre variable compleja. En este caso se hará énfasis en aquellos se refieren al Teorema del Valor Medio para funciones complejas (De La Cruz 2010). Se sabe que al realizar una extensión del Teorema de Rolle y en general de funciones diferenciables para variable compleja esta no se cumple. Realmente la única extensión del teorema para variable compleja que funciona es para funciones integrables.

3. TEOREMA DE BOLZANO

Sea f continua en cada punto del intervalo $[a, b]$ y supóngase que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos. Existe entonces por lo menos un c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(c) = 0$.

3.1 Interpretación geométrica

Al tener una función continua en un intervalo determinado en donde las imágenes de los extremos del intervalo tienen signos diferentes, la función debe cortar al menos en un punto al eje x y este punto debe pertenecer al intervalo, esta interpretación se ilustra en la gráfica 3.



Gráfica 3. Representación gráfica del Teorema de Bolzano

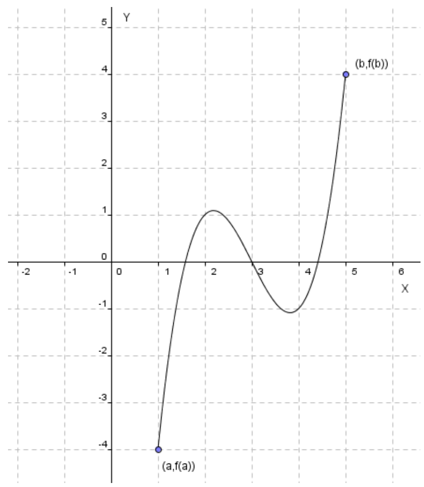
Veamos el resultado anterior con un ejemplo.

Sea $f(x) = (x-3)^3 - 2(x-3)$ en el intervalo $[1,5]$. Primero comprobemos que la función cumple las hipótesis del teorema de Bolzano. Como $f(x)$ es una función polinomica entonces es una función continua; además $f(1) = (1-3)^3 - 2(1-3) = -4$ y $f(5) = (5-3)^3 - 2(5-3) = 4$ verificando así que $f(1)$ y $f(5)$ tienen signos contrarios. Debemos hallar un punto en el cual $f(x) = 0$ y además verificar que el punto pertenezca al intervalo abierto $(1,5)$. Igualando a cero se obtiene:

$$0 = (x-3)^3 - 2(x-3)$$

$$0 = (x-3)((x-3)^2 - 2)$$

Se tiene un producto igualado a cero, por tanto $(x-3)=0$ o $(x-3)^2-2=0$ si tomamos el primer caso obtenemos que $x=3$ y $3 \in (1,5)$ así hemos hallado un número c en el cual $f(c)=0$ y pertenece al intervalo abierto $(1,5)$. Como el teorema de Bolzano garantiza la existencia de al menos un valor, no es necesario analizar el otro caso; sin embargo es fácil comprobar que las otras dos soluciones[4] pertenecen también al intervalo $(1,5)$. En la gráfica 4 se muestra la representación gráfica de la función $f(x)=(x-3)^3-2(x-3)$.



Gráfica 4. Representación gráfica de la función $f(x)=(x-3)^3-2(x-3)$ en el intervalo $[1,5]$

Analicemos ahora qué sucede si no se cumplen las hipótesis del teorema.

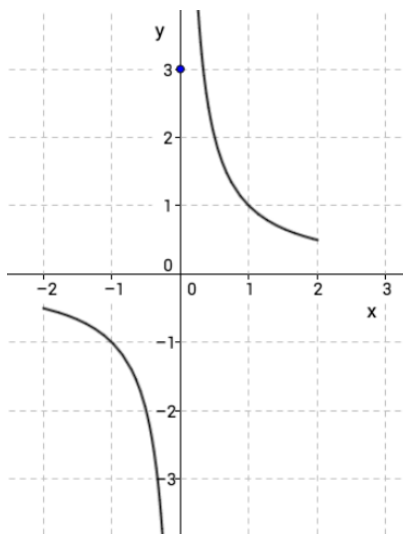
¿Qué sucede si se tiene una función continua en un intervalo cerrado pero no se cumple que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos? Es fácil comprobar que el teorema sin ésta condición no se cumple, basta con tomar la función constante $y=k$ con $k>0$ o $k<0$ en el intervalo $[a,b]$. Si $k>0$ las imágenes de cualquier valor que pertenezca al intervalo $[a,b]$ son positivas y todos los valores tienen la misma imagen (k) por tanto no existe un número c que pertenezca al intervalo tal que $f(c)=0$. Análogo si $k<0$. En conclusión para que se cumpla el teorema de Bolzano efectivamente las imágenes de los valores extremos deben tener signos opuestos. Veamos qué sucede si quitamos la continuidad.

La hipótesis señala que la función debe ser continua en cada valor del intervalo $[a,b]$, esto nos lleva a preguntar ¿qué ocuerre si la función no es continua en los extremos? Inicialmente se nota que el teorema se sigue cumpliendo para varias funciones, sin embargo teniendo en cuenta la segunda hipótesis basta con tener una función que no cambie de signo en el intervalo abierto

[4] Recuerde que una función polinómica de grado 3 tiene tres raíces.

(a,b) y las imágenes de a y b tengan signos opuestos para que el teorema no se cumpla. Analicemos este resultado con un ejemplo, sea $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & a<x<b \\ -3, & x=a \\ 5, & x=b \end{cases}$ como x^2+2 es una función polinómica se sigue que es continua en el intervalo (a,b); como $f(a)=-3$ y $f(b)=5$, se verifica que tienen signos opuestos, finalmente es evidente que todas las imágenes de los valores que pertenecen al intervalo (a,b) son mayores que 0; bajo estas condiciones no existe un número c que pertenezca al intervalo (a,b) tal que $f(c)=0$.

Después de analizar la continuidad en los extremos del intervalo y verificar que es necesaria la continuidad en estos puntos, surge la pregunta ¿qué ocurre si la función no es continua en algún valor del intervalo $[a,b]$? Analicemos la siguiente función, sea $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 3, & x=0 \end{cases}$ en el intervalo $[-2,2]$, su representación gráfica se puede observar en la gráfica 5. Esta función es continua en todo $x\in[-2,2]$ con $x\neq 0$, $f(-2)=-\frac{1}{2}$ y $f(2)=\frac{1}{2}$ sin embargo no existe ningún valor que pertenezca al intervalo $[-2,2]$, y tenga imagen cero.



Gráfica 5. Representación gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 3, & x=0 \end{cases}$

3.2 Demostración[5]

En primer lugar se realiza un esquema general de la demostración:

La idea básica de la demostración es hallar el mayor para el cual . Para encontrar este punto se crea el conjunto que es el conjunto de todas las imágenes que son menores o iguales a cero en el intervalo . Se verifica que el conjunto sea no vacio y acotado superiormente para concluir que dicho conjunto tiene una cota superior (el objetivo es concluir que esta cota superior es). En este paso empleamos una de las hipótesis del teorema ya que al afirmar que y tienen signos opuestos se tiene que es no vació así mismo la función es acotada superiormente ya que todos los valores pertenecen al intervalo . Es necesario recordar que la cota superior puede o no, pertenecer al conjunto por tal motivo se analiza lo que sucede cuando la imagen de la cota es positiva y negativa, se espera llegar a una contradicción en ambos casos para concluir que efectivamente

Supongamos que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$; se va a encontrar el mayor x para el cuál $f(x) = 0$. Sea S el conjunto de todos los puntos del intervalo $[a, b]$ para los cuales $f(x) \leq 0$. Hay por lo menos un punto en S dado que $f(a) < 0$ así, S es no vacío; S está acotado superiormente ya que todos los puntos de S pertenecen a $[a, b]$ y por el axioma de completitud el cual dice que *todo conjunto no vacío de reales acotado superiormente tiene un extremo superior*, a este extremo superior se llamará c. Se debe demostrar que $f(c) = 0$.

Por tricotomía se sabe que $f(c) > 0$, $f(c) < 0$ ó $f(c) = 0$.

Como se mencionó anteriormente el objetivo es llegar a una contradicción, la pregunta es ¿cómo? Se puede pensar dado el análisis realizado hasta el momento que la contradicción está en el supremo, si se supone que y se asume que existe un intervalo alrededor de para el cual las imágenes de todos sus valores tienen el mismo signo de , existirán valores mayores a que pertenezcan a lo cual contradice el hecho de que es el supremo de y de manera análoga si se asume que . Ahora bien la propiedad mencionada es la siguiente: *Sea continua en y supóngase que existe entonces un intervalo en el que tiene el mismo signo de* . En algunos libros de análisis se enuncia como una propiedad de las funciones continuas en otros recibe el nombre de *Teorema conservación del signo de las funciones continuas*. Se hará uso de ésta propiedad y al finalizar la demostración del Teorema de Bolzano se realizará su respectiva demostración.

[5] Demostración basada del libro *Cálculo* de Tom Apóstol.

Haciendo uso del teorema Conservación del signo de las funciones continuas Si $f \;\; c \;\; > 0$ hay un intervalo $\;\; c-\delta, c+\delta \;\;$ o $\;\; c-\delta, b \;\;$ si $c=b$ tal que $f(x)$ es positivo con x perteneciendo a dicho intervalo; por tanto, ningún punto de S puede ser mayor que $c-\delta$, luego $c-\delta$ es una cota superior de S, pero $c-\delta<c$ contradiciendo el hecho de que c es el supremo de S luego $f(c)$ no puede ser mayor que 0.

Si $f \;\; c \;\; < 0$ hay un intervalo $\;\; c-\delta, c+\delta \;\;$ o $\;\; c-\delta, b \;\;$ si $c=b$ tal que $f(x)$ es negativo, para los x que pertenecen al intervalo. Si esto sucede existe un valor c_0 que pertenece al intervalo $[a,b]$ para el cual $f \;\; c_0 \;\; < 0$ y $c_0>c$ pero esto contradice el hecho de que c es el supremo de S luego $f(c)$ no puede ser menor que 0.

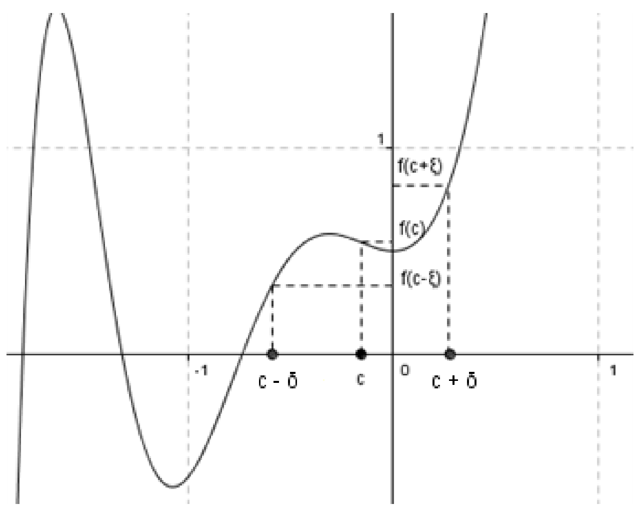
Como $f(c)$ no puede ser positivo ni negativo, $f \;\; c$ debe ser igual a cero. Demostrando así el teorema de Bolzano.

- *Teorema Conservación del signo de las funciones continuas*

Sea f continua en c y supóngase que $f \;\; c \;\; \neq 0$ existe entonces un intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ en el que f tiene el mismo signo de $f(c)$.

A pesar de que este teorema no es precisamente uno de los teoremas del valor medio, no sobra analizar su interpretación geométrica y lo que sucede al modificar su hipotesis.

Al tener una función continua en un número c que tiene una imagen distinta de cero, existe un intervalo (en el cual c esta contenido) para el cual las imágenes de todos los valores de dicho intervalo tienen el mismo signo que $f(c)$. Este resultado se ilustra en la gráfica 6.



Gráfica 3 Para y cercanos a , y .

Analicemos lo que sucede si se quita la continuidad en c. Sea $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$ esta función es continua en todo el dominio excepto en $c = 0$, naturalmente $f(c) \neq 0$ bajo estas condiciones no existe un intervalo para el cual todos sus valores sean negativos (el mismo signo de c) y contenga a c, puesto que la función e^x siempre alcanza valores positivos (salvo en $x = 0$ para esta fución en particular). De esta manera sin la continuidad no se cumple el teorema *Conservación del signo de las funciones continuas* (de aquí su nombre).

Observación: he aquí la importancia en la demostración del teorema de Bolzano de que la función sea continua en $[a, b]$. Sea $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \neq -2 \\ -3, & x = -2 \end{cases}$ en el intervalo $[-2,2]$ existe el conjunto S el cual es no vacío y acotado, luego debe existir un supremo, pero no se cumpliría el teorema conservación del signo de las funciones continuas ya que no existe ningún intervalo alrededor de un punto para el cual todos sus valores tengan signo negativo.

A continuación se realizará la demostración del teorema Conservación del signo de las funciones continuas, es natural pensar dado el analisis realizado anteriormente que la continuidad forma un papel fundamental en la demostración.

Demostración[6].

Supongamos que $f(c) > 0$, de la definición de continuidad se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$ siempre que $c - \delta < x < c + \delta$ (Ver gráfica 6).

Recordando que el objetivo es que tenga el mismo signo que es decir positivo, se necesita un adecuado de tal manera que ; de esta forma puede ser —— —— —— —— —— se tomara ——.

Al tomar el δ correspondiente a $\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$ y sustituyendo este valor en $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$ se tiene que $\frac{1}{2}f(c) < f(x) < \frac{3}{2}f(c)$ siempre que $c - \delta < x < c + \delta$.

De esta manera se tiene que $f(x) > 0$ en este intervalo, entonces $f(x)$ y $f(c)$ tienen el mismo signo.

[6] Demostración tomada del libro *Cálculo* de Tom Apostol volumen 1.

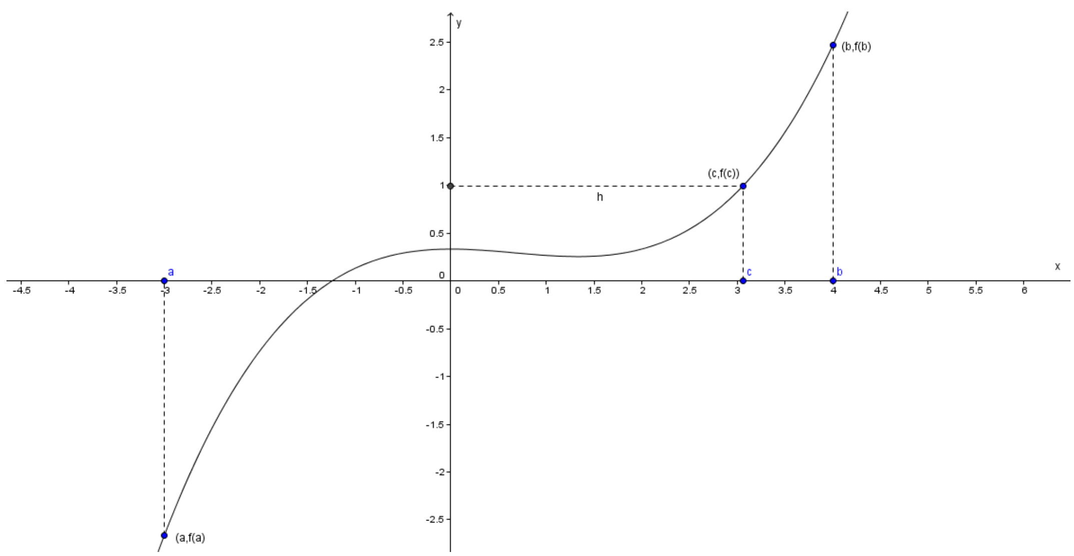
De manera análoga si $f \;\; c \;\; < 0$ se toma el δ correspondiente a $\epsilon = -\frac{f(c)}{2}$ donde se verifica nuevamente que $f(x)$ y $f(c)$ tienen el mismo signo.

4. TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Sea f una función continua en un intervalo (a, b). Entonces para cada u tal que $f(a) < u < f(b)$ ó $f(a) > u > f(b)$, existe al menos un c dentro de $[a, b]$ tal que $f(c) = u$.

4.1 Interpretación geométrica

Geométricamente, el teorema del valor medio establece que la función alcanza todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Se verá está interpretación a partir de un ejemplo; considérese la función $f(x) = \frac{x^3-2x^2+5}{15}$ en el intervalo $[-3,4]$. Donde se tiene que $f(a) = -2{,}67\ y\ f(b) = 2{,}47$. En este caso el teorema establece que para cualquier n tal que $-2{,}67 < n < 2{,}47$ es decir para cualquier número que esté entre $f(a)$ y $f(b)$, existe un número c entre a y b para el cual la imagen de dicho número sea igual a n, por ejemplo si se toma $n = 1$ existe algún c entre a y b para el cual $f(c) = n = 1$, lo cual se ilustra en la gráfica 7.

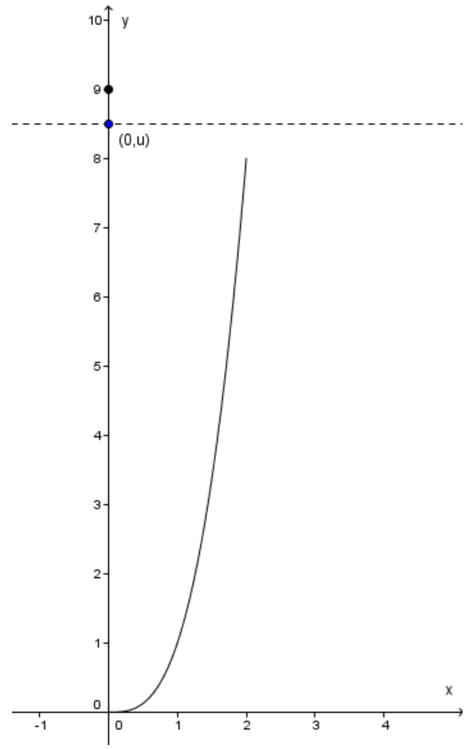


Gráfica 7. Función $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3-2x^2+5}{15}}$, existe un valor $\boldsymbol{c}$ en $[\boldsymbol{-3, 4}]$ para el cual $\boldsymbol{f(c) = 1}$.

Después de haber realizado la interpretación gráfica de este teorema, se analiza si las condiciones que presenta el teorema son las necesarias y qué ocurre si se elimina alguna de ellas:

¿Qué sucede si la función es continua en el intervalo abierto (a, b), pero no es continua en los extremos?

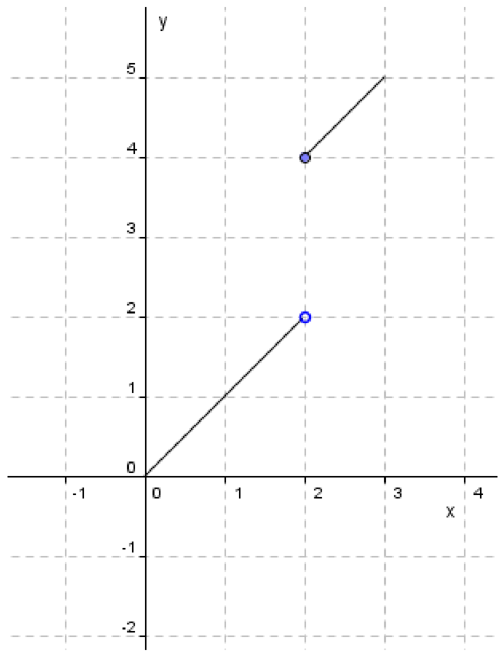
Considere la función $f(x) = \begin{cases} 9, & x = 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$ Sea $u = 8.5$ donde $f(2) < u < f(0)$ es decir $2^3 = 8 < 8.5 < 9$. Como se ilustra en la gráfica 9, no es posible encontrar un valor que pertenezca al intervalo $[0,2]$ tal que su imagen sea u, luego el teorema no se cumple.



Gráfica 4. No se cumple el Teorema del Valor Intermedio si la función es continua en el intervalo abierto (0,2).

Es claro que al tener una función continua en un intervalo abierto y discontinua en los extremos del intervalo no se cumple el teorema del Valor Intermedio, la pregunta ahora es ¿qué sucede si la función no es continua en un punto del intervalo?

Sea $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ x + 2, & x \geq 2 \end{cases}}$ en el intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{3}]$de esta función se tiene que $\boldsymbol{f(0) = 0}$ y $\boldsymbol{f(3) = 5}$ para cualquier $\boldsymbol{u}$ tal que $\boldsymbol{2 \leq u < 4}$ se cumple que $\boldsymbol{f(0) < u < f(b)}$ sin embargo no existe ningún $\boldsymbol{c}$ para el cual $\boldsymbol{f(c) = u}$. Este resultado se ilustra en la gráfica 6.



Gráfica 6. Función $f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ x+2, & x \geq 2 \end{cases}$ en el intervalo [0,3]

4.2 Demostración[7]

Sea $g = f - u$ en el intervalo $[a, b]$. Se define ésta función ya que en el antecedente del Teorema del Valor Intermedio se tiene que $f(a) < u < f(b)$; al restar u en cada término se obtiene $f(a) - u < u - u < f(b) - u$ o lo que es igual $g(a) < 0 < g(b)$. Al ser f una función continua en el intervalo $[a, b]$, $f - u$ seguirá siendo continua[8] en dicho intervalo. Al ser g continua en $[a, b]$ y como $g(a) < 0 < g(b)$ es posible emplear el Teorema de Bolzano a la función g. Concluyendo así que existe algún c en $[a, b]$ tal que $g(c) = 0$, así $0 = f(c) - u$ y $f(c) = u$. Demostrando así el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas.

---

[7] La demostración de este teorema es tomada del libro *Cálculo* de Tom Apostol. Vol. 1.

[8] Un argumento geométrico es el siguiente: al restarle una constante a una función se está trasladando dicha función u unidades, la función sigue siendo continua.

5. CÁLCULO DIFERENCIAL

5.1 TEOREMA DE ROLLE

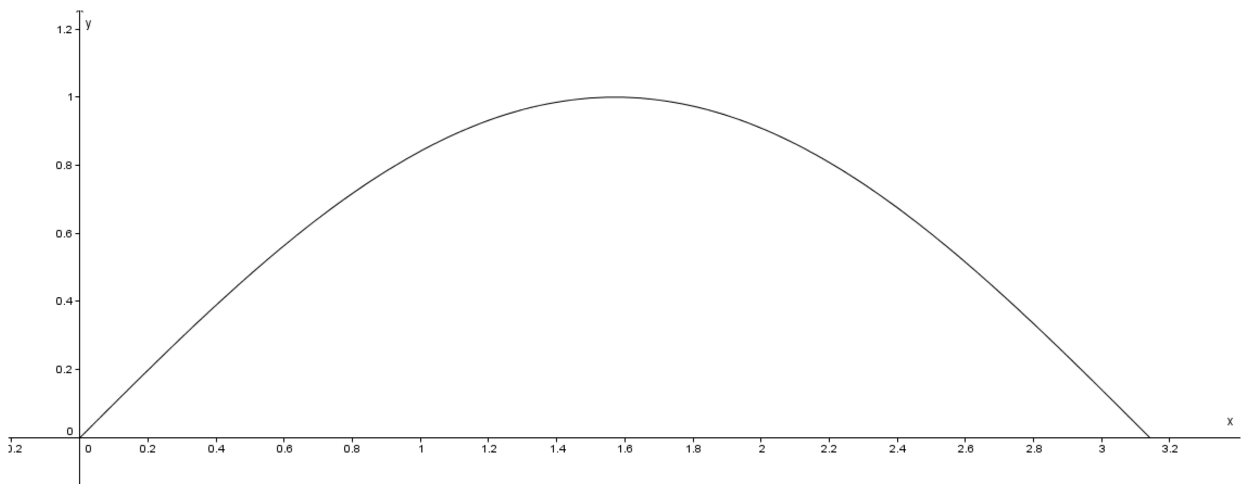
Sea f una función que satisface las tres hipótesis siguientes:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es diferenciable en el intervalo (a, b).
3. $f(a) = f(b)$.

Entonces hay un número c, en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

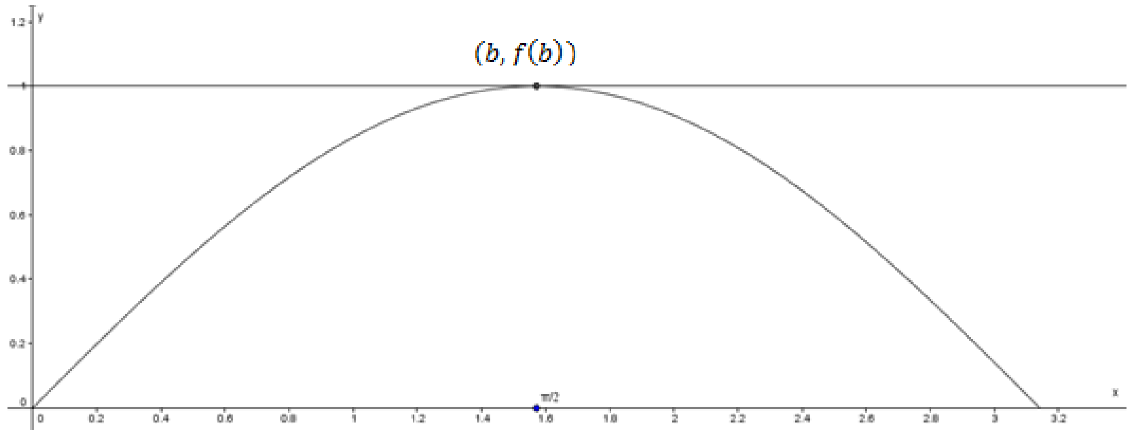
5.1.1 Interpretación geométrica

Inicialmente se graficará una función que cumpla las condiciones iniciales, como por ejemplo $f(x) = \operatorname{sen} x$, en el intervalo $[0, \pi]$ como se ilustra en la gráfica 7.



Gráfica 7. Función $\boldsymbol{f(x) = sen\ (x)}$ en el intervalo $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\pi}]$.

Se sabe que $f(0) = 0$ y $f(\pi) = 0$, además es derivable en el intervalo $(0, \pi)$. Ahora bien existe un punto en el cual la derivada es 0, o mejor la pendiente de la recta tangente es igual a 0. Ese punto es $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Ver gráfica 8.



Gráfica 8. Para la función $\boldsymbol{f(x) = sen\,(x)}$ se tiene $\boldsymbol{f'(\pi/2) = 0}$.

Se puede observar que la recta que pasa por el punto $(b, f(b))$, tiene pendiente 0, y es tangente a la curva en dicho punto. Por lo cual es posible afirmar que una interpretación gráfica a este teorema, es que dadas las condiciones iniciales, existe un punto en el cual la recta tangente a la curva es paralela al eje x.

En el anterior ejemplo, se tomó una función que cumplía el antecedente del Teorema de Rolle. Sin embargo se generaron las siguientes preguntas: ¿todo el antecedente es necesario para que se cumpla el consecuente?, es decir, por ejemplo ¿qué sucede si la función no es diferenciable en el intervalo? O ¿qué sucede si se cambia la condición $f(a) = f(b)$?, ¿seguirá existiendo un numero c para el cuál $f'(c) = 0$?

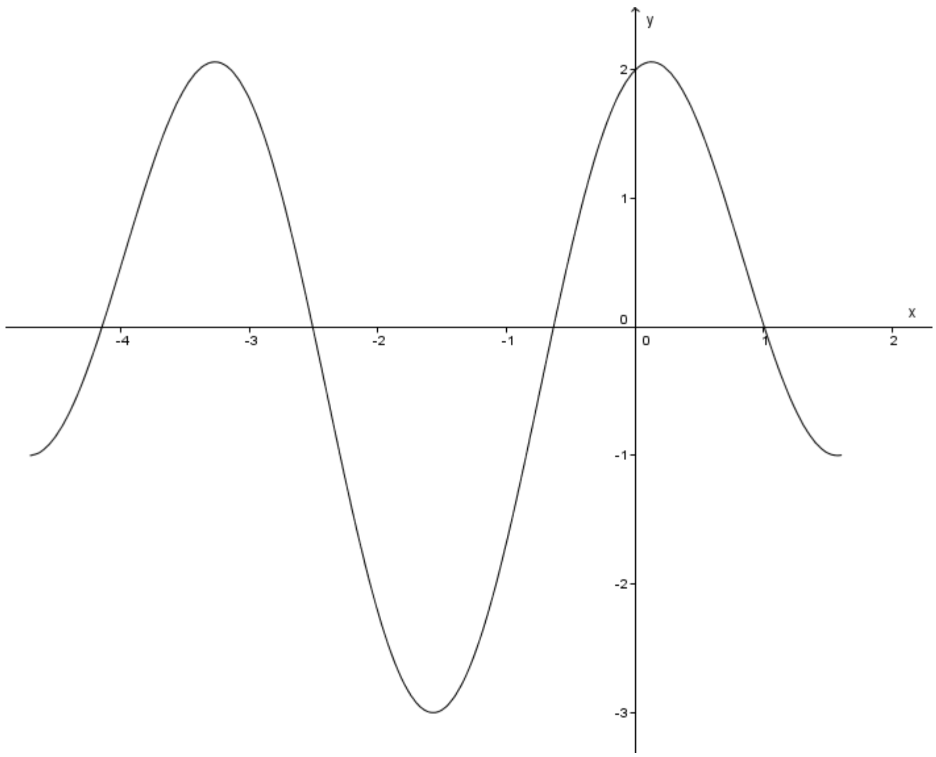
Para resolver estos interrogantes y otros que posiblemente surjan, vamos a realizar el siguiente análisis, reformulando el Teorema de Rolle y verificando si se cumple o no dicho teorema.

Se analizará que sucede si no se cumplen las condiciones del teorema.

- ¿Qué sucede si la función no es continua en el intervalo $[a, b]$?

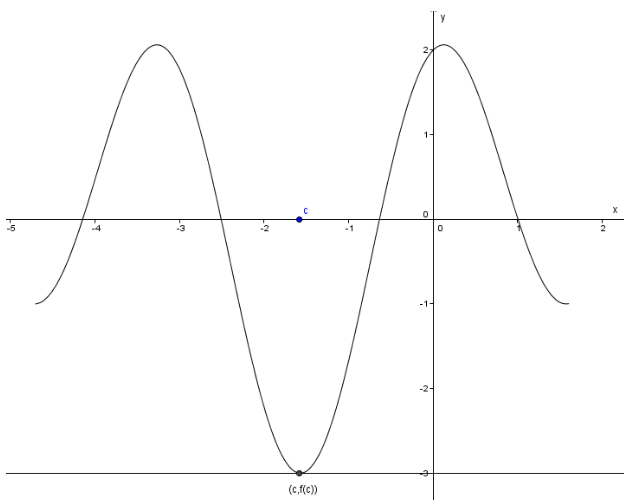
Cómo f es diferenciable en el intervalo abierto, se tiene la continuidad en (a, b). Es decir la función posiblemente no es continua únicamente en los extremos del intervalo.

Si se toma la función $y = sen(x) + 2cos(2x)$, en el intervalo $(-4.7, 1.6)$ como se ilustra en la gráfica 9; la función es diferenciable en el intervalo y $f(-4.7) = f(1.6)$.



Gráfica 9. Función $\boldsymbol{f(x) = sen\,(x) + 2cos\,(2x)}$, en el intervalo $(\mathbf{-4.7, 1.6})$.

Entonces existe un valor c, en $(-4.7, 1.6)$ tal que $f'(c) = 0$; éste punto como se ilustra en la gráfica 10 efectivamente existe y es $c = -1.58$.

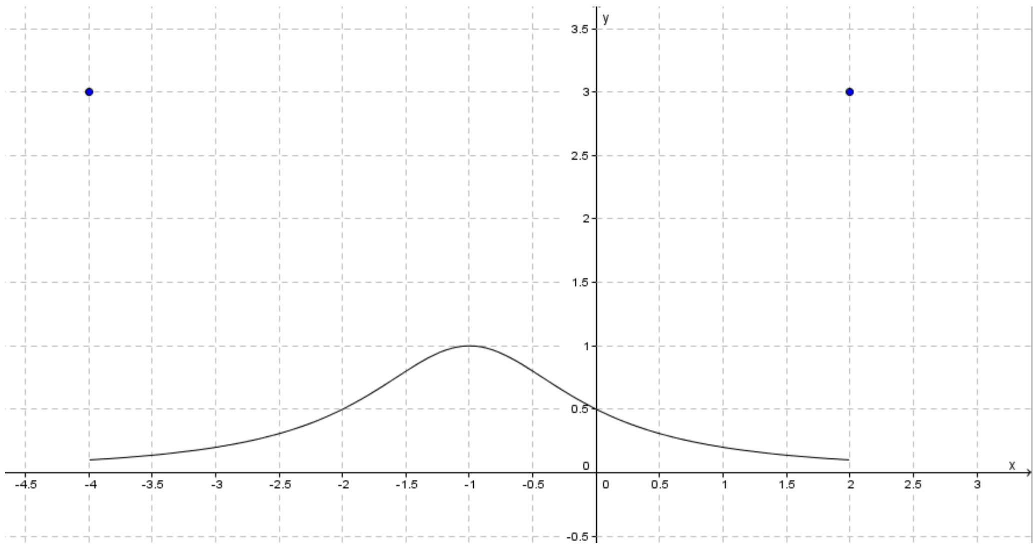


Gráfica 10. Para la función descrita en la gráfica 10, se tiene $\boldsymbol{f'(-1.58) = 0}$

Si se quita esta condición, el teorema funciona para un gran número de funciones, pero ¿qué sucede cuando estas que se toman no son continuas en $[a, b]$? Considere la siguiente función (grafica 11):

Sea $f(x) = \begin{cases} 3 & si\ x = -4 \\ 3 & si\ x = 2 \\ \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2} & si\ -4 < x < 2 \end{cases}$

Ésta función es diferenciable en el intervalo (-4,2)[9] y $f(-4) = f(2) = 3$



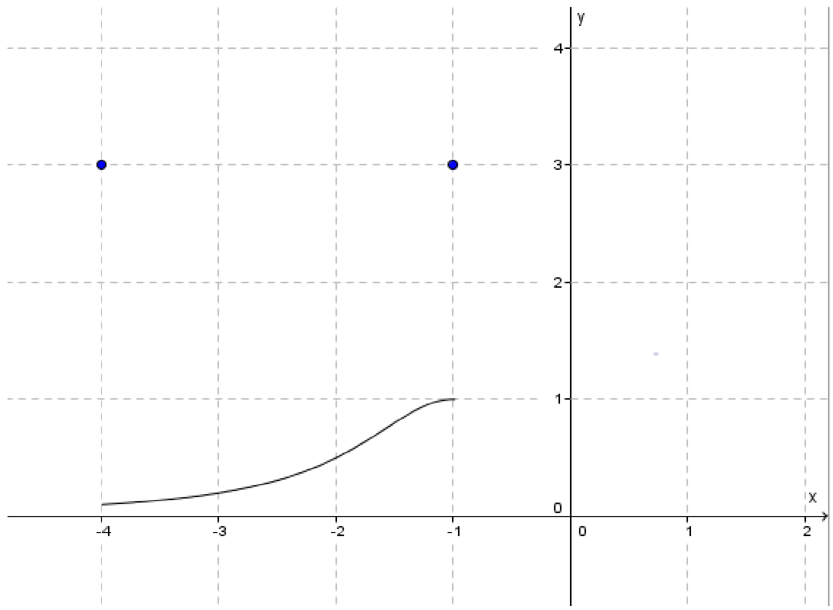
Gráfica 11. Función diferenciable en el intervalo $(-\mathbf{4}, \mathbf{2})$ con $\boldsymbol{f}(-\mathbf{4}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{2})$.

Cómo se puede observar esta función también cumple las condiciones ya que existe un número en el cual $f'(c) = 0$. Dicho punto es $c = -1$. Considere ahora una redefinición de esta función al intervalo $(-4, -1)$. Se tiene:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & si\ x = -4 \\ 3 & si\ x = -1 \\ \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2} & si\ -4 < x < -1 \end{cases}$$

Como se ilustra en la gráfica 12, ésta nueva función es diferenciable y continua en $(-4, -1)$ y $f(-4) = f(-1) = 3$. Sin embargo no existe un punto $c \in (-4, -1)$ en el cual $f'(c) = 0$

[9] Al ser f una función de la forma $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ y g polinómica, es derivable en todos los puntos tales que $g(x) \neq 0$



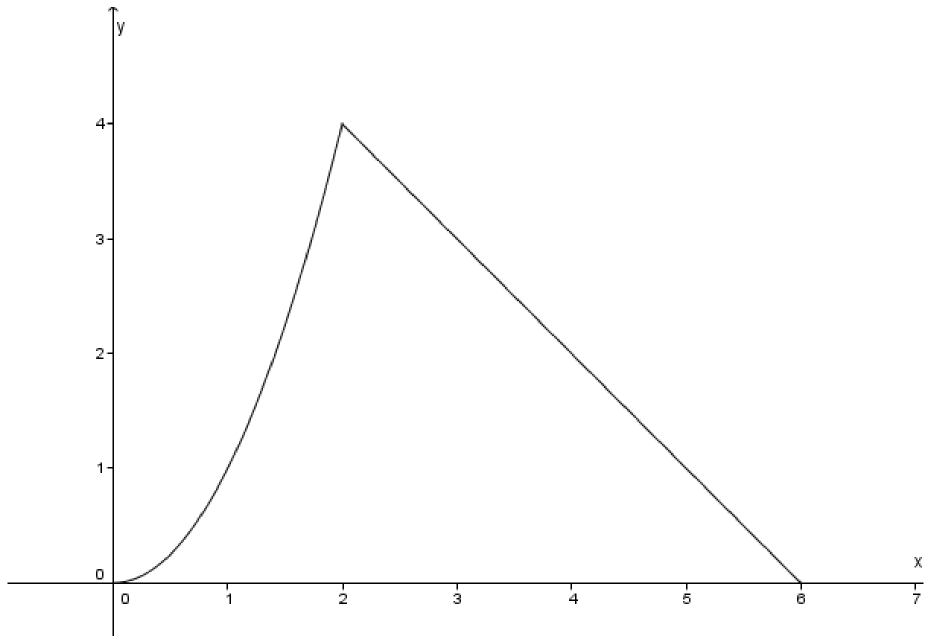
Gráfica 12. No se cumple el Teorema de Rolle si la función es continua en $\boldsymbol{-4,-1}$.

Luego la función debe ser continua en todo el intervalo cerrado a,b para que se cumpla el Teorema de Rolle.

- Ahora bien ¿Qué sucede si la función no es diferenciable en (a,b)?

Considere la siguiente función ilustrada en la gráfica 13, la cual no es derivable en todo el intervalo:

$$f\ x\ =\ \begin{matrix} x^2 \ \ si\ 0 \leq x < 2 \\ -x+6 \ \ si\ 2 \leq x \leq 6 \end{matrix}$$



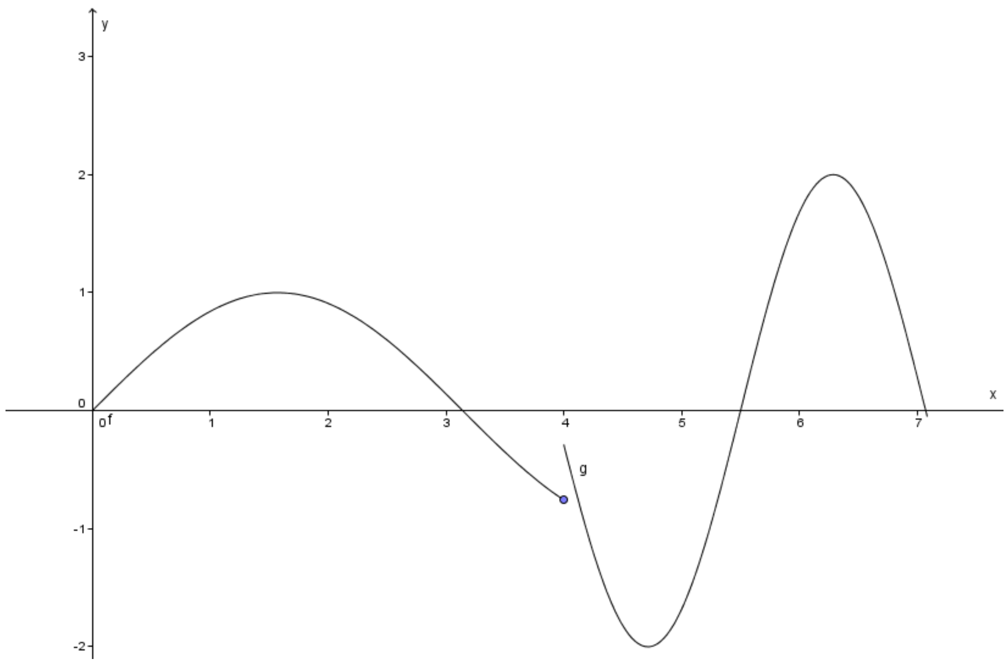
Gráfica 13. Función no derivable en $\boldsymbol{x = 2}$.

Esta función es continua en $[0,6]$, $f(0) = f(6) = 0$ y no es derivable en $x = 2$. Sin embargo, no existe un punto $c \in [0,6]$ en el cuál $f'(c) = 0$. Luego es necesario que la función sea derivable en el intervalo para que se cumpla el teorema de Rolle.

- ¿Qué sucede si la función no cumple las condiciones en un punto del intervalo (a, b)?

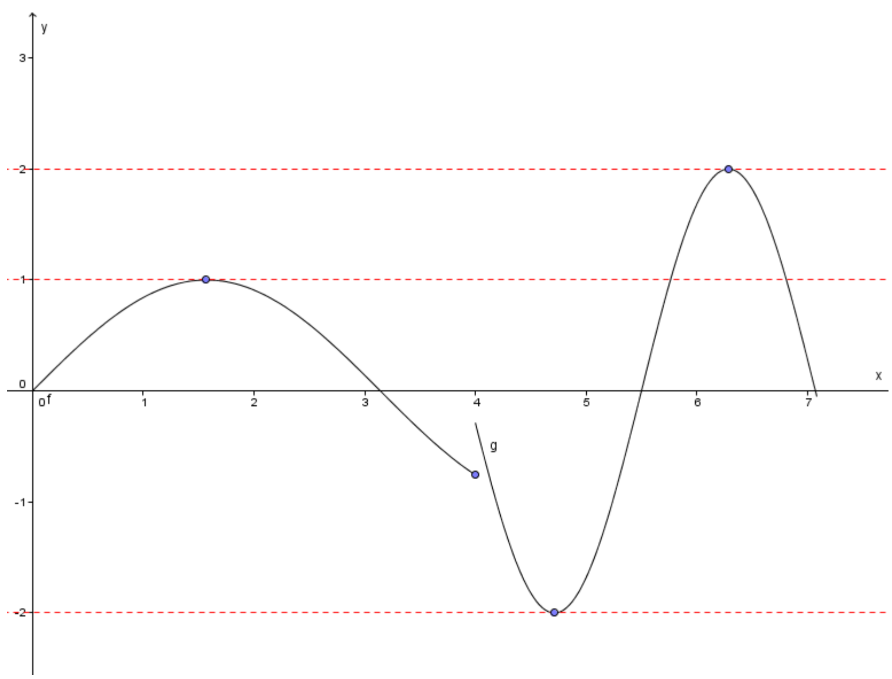
Un ejemplo de una función que no cumple esta condición, pero cumple todas las demás es:

$$f(x) = \begin{cases} senx & si\ 0 \leq x \leq 4 \\ 2\cos(2x) & si\ 4 < x \leq 7.08 \end{cases}$$ (Ver gráfica 14)



Gráfica 14. Función que cumple las características de la conjetura 3.

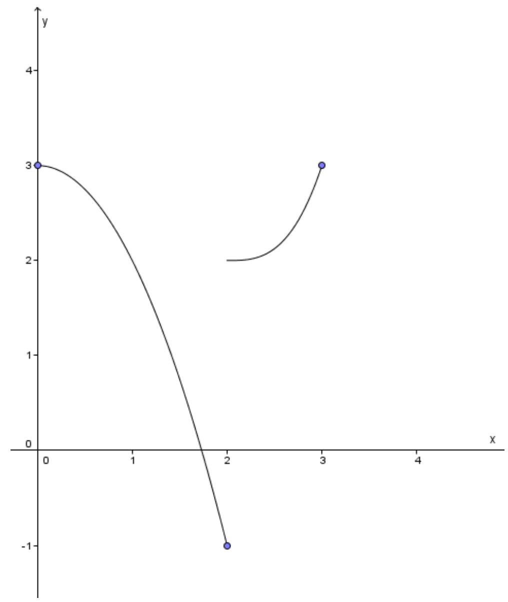
Con estas condiciones es posible encontrar puntos en los cuales la derivada evaluada en dicho punto sea cero, este resultado se muestra en la gráfica 15.



Gráfica 15. Puntos en los cuales la derivada evaluada en dichos puntos es igual a cero.

Analicemos más funciones:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 + 2 & si\ 2 < x \leq 3 \\ -x^2 + 3 & si\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



Gráfica 56. Función derivable en el intervalo $(\mathbf{0}, \mathbf{3})$ excepto en $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$.

Esta función no es continua en $x = 2$ y se cumplen las demás condiciones. Sin embargo, no existe un punto c en el cuál $f'(c) = 0$.

Luego es necesario que cumpla la condición en todo el intervalo para que funcione el teorema.

5.1.2 Demostración del Teorema de Rolle[10]

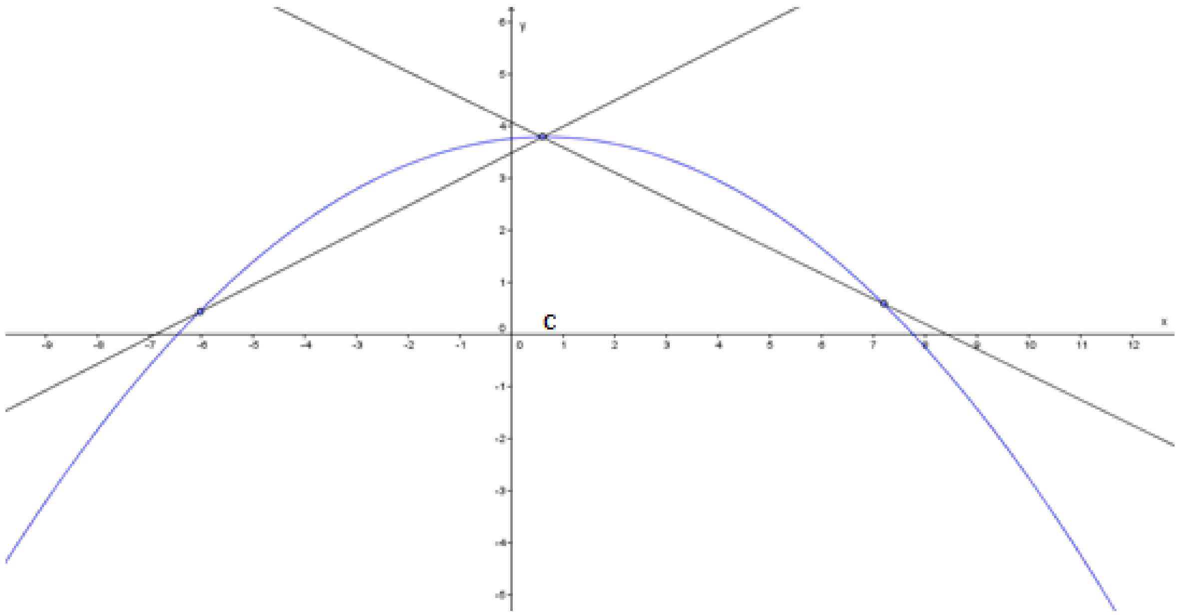
Para su demostración se consideran los siguientes casos:

Caso 1 Si f es una función constante en $[a, b]$, entonces $f'(x) = 0$ para todo x en $[a, b]$.

Caso 2 $f(x) > f(a)$ para todo x en (a, b)

Inicialmente se hará uso de un argumento geométrico. Supóngase que f alcanza un máximo en c. Las secantes trazadas por los puntos a la izquierda de $(c, f(c))$ tienen pendiente negativa es decir $f'(x) \leq 0$ para $x < c$ y las secantes trazadas a la derecha de $(c, f(c))$ tienen pendiente positiva $f'(x) \geq 0$ para $x > c$ como se puede observar en la gráfica 22, se tiene que $f'(x) \leq 0$ y $f'(x) \geq 0$, como f es derivable en x, se sigue que $f'(x) = 0$.

[10] Basada en la demostración de Louis Leithold (1982).



Gráfica 22. Secantes trazadas a izquierda y derecha del punto (x, f(x)).

Pero esto no funciona como una demostración, si acaso funcionaria como una prueba informal, ahora bien se verá una prueba formal para este caso.

Como $f(x)$ es contínua en $[a, b]$ y $f(a) < f(x)$, al saber que $f(a) = f(b)$ debe existir algún c tal que $f(c)$ sea mayor que todas las imágenes de los valores del intervalo. Esta es una forma intuitiva de ver el "$Teorema\ Del\ Valor\ Extremo$", el cual dice si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, f alcanza un valor máximo en $f(c)$ y un valor mínimo en $f(d)$ en los números c y d en $[a, b]$.

La idea es que en estos puntos la derivada sea 0, para lo cual se emplea el "*Teorema de Fermat"* el cual indica que dada una función $f: R \rightarrow R$ y supóngase que f alcanza su máximo o mínimo en un punto a, si f es derivable en a entonces $f'(a) = 0$.

Ahora bien

Dado que f es continua en $[a, b]$, según el *teorema del valor extremo*, f tiene un valor máximo en algún punto del intervalo, como $f(a) = f(b)$ debe alcanzar su valor máximo en algún c en el intervalo (a, b), además f es derivable en el intervalo, en particular en c, y al ser c máximo se puede decir, gracias al *Teorema de Fermat*, que $f'(c) = 0$.

Caso 3 $f(x) < f(a)$ para algún x en (a, b).

Sabiendo que f es continua, de acuerdo con el *teorema del valor extremo* f tiene un valor mínimo en $[a, b]$, como $f(a) = f(b)$ esta función debe alcanzar su valor mínimo en un numero

d en (a, b). Cómo f es derivable en (a, b), se tiene en particular que lo es en d, por lo cual cumple el *Teorema de Fermat*, por lo cual $f'(d) = 0$

5.2 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA FUNCIONES DERIVABLES

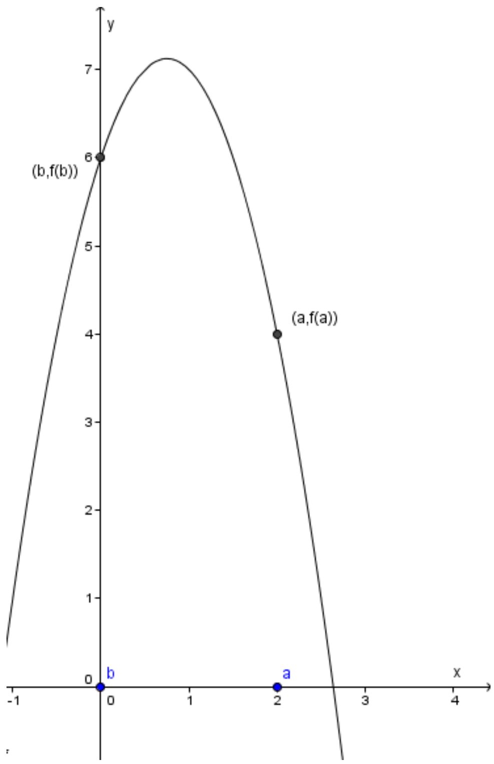
Si f es contínua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo (a, b), entonces existe por lo menos un valor x_0 tal que $a < x_0 < b$ y

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

5.2.1 Interpretación geométrica

Cabe señalar en primer lugar que el Teorema de Rolle es un caso particular del Teorema del Valor Medio para funciones derivables. Por tal motivo el análisis realizado en el inciso 4.1.1 sobre la interpretación geométrica del Teorema de Rolle se aplica también al Teorema del Valor Medio para funciones derivables. Por tal motivo se analizará la interpretación geométrica del teorema sin modificar el antecedente del mismo.

Se hará un ejemplo con la curva $f(x) = -2x^2 + 3x + 6$ en el intervalo $[0,2]$ (Gráfica 23)

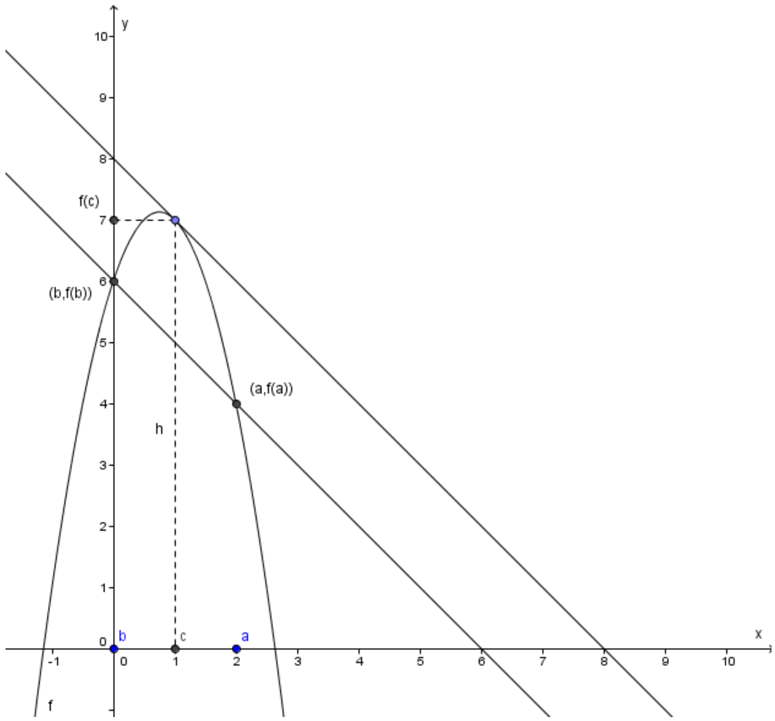


Gráfica 23. Función $\boldsymbol{f(x) = -2x^2 + 3x + 6}$ en el intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{2}]$.

Con las condiciones iniciales se tiene que:

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

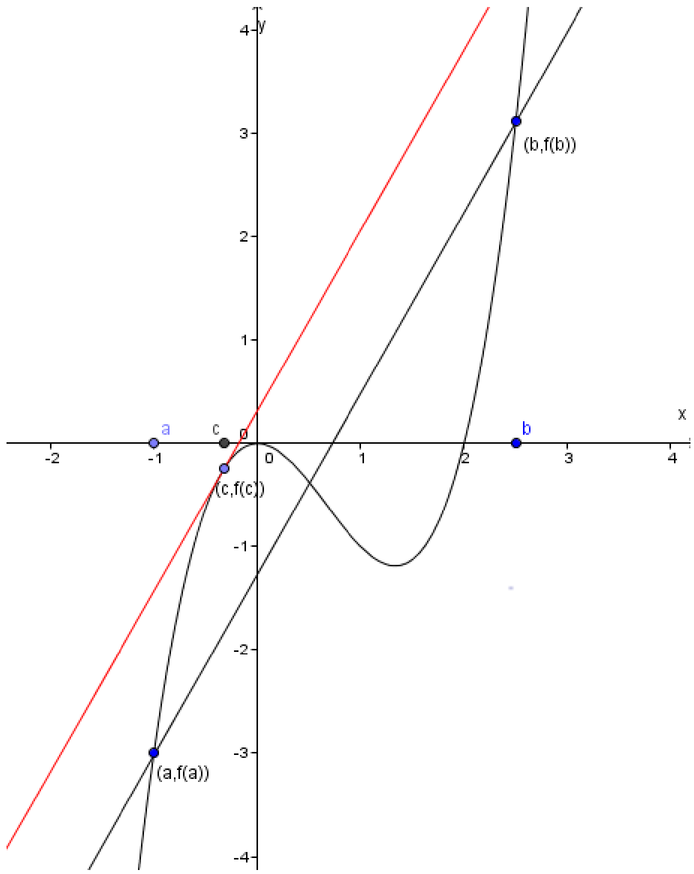
Ahora bien, ¿qué quiere decir $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$? No es más que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$; $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en algún punto con abscisa c. Por lo cual una interpretación geométrica resulta ser que para algún punto c, la recta tangente a la curva en dicho punto es paralela a la recta determinada por los extremos del intervalo de derivabilidad, como se ilustra en la gráfica 24.



Gráfica 24.6 Recta tangente paralela a la recta que contiene los puntos $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))$ $\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{b}))$.

Como se puede ver la recta que pasa por el punto $(c, f\ \ c\ )$ es tangente a la curva por dicho punto, pero además es paralela a la recta determinada por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Finalmente la gráfica 25 ilustra la representación grafica de este teorema:

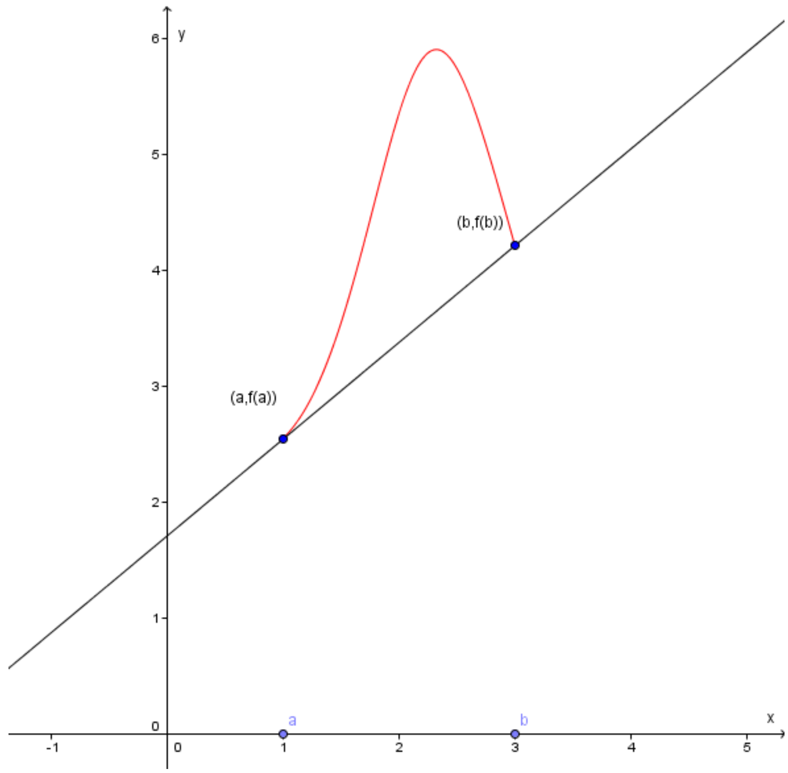


Gráfica 25. La pendiente de la recta tangente en el punto $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}))$ es la misma pendiente de la recta que contiene los puntos $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))$ y $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}))$.

5.2.2 Demostración del Teorema del Valor Medio para funciones derivables[11]

Para la demostración de este teorema inicialmente se obtendrá la ecuación de la recta secante a la función f que contiene a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

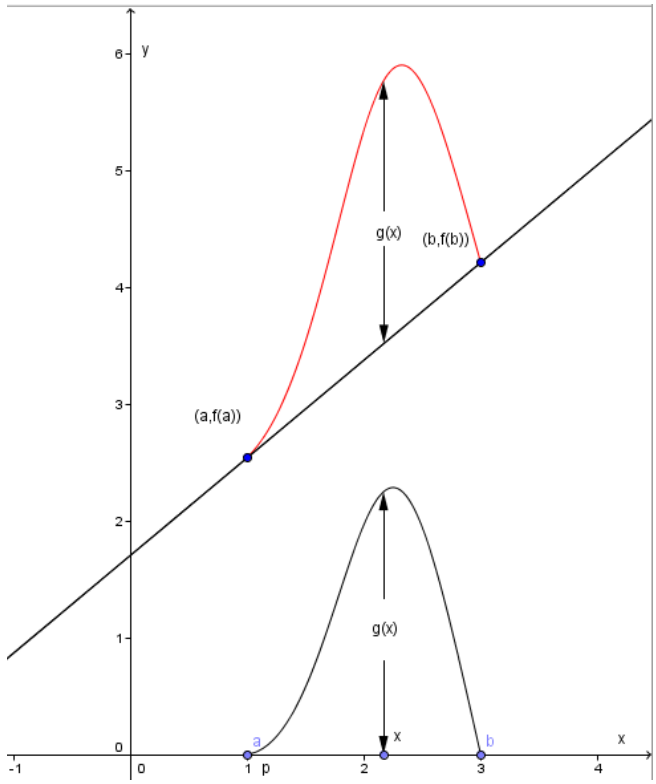
[11] Basada en la demostración de Louis Leithold (1982).



Gráfica 7 Recta secante que contiene los puntos $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))$ $\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}))$.

La pendiente de esta recta es $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, por lo cual la ecuación de la recta queda $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$

Ahora bien se va a construir una función auxiliar $g = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$, la cual es la diferencia de f y la función cuya gráfica es el segmento de recta que une a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ cómo se muestra en la gráfica 27.



Gráfica 8 Función $\boldsymbol{f}$ [Rojo] y función auxiliar g [Negro].

El objetivo de utilizar esta función es que cumple las condiciones del Teorema de Rolle. Cómo se ve en la gráfica $g(a) = g(b) = 0$, lo cual se cumple para cualquier función ya que la diferencia es 0 en a y b, ahora bien utilizando un argumento algebraico, sea $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$ evaluando g en a y en b se tiene que $g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) - f(a) = f(a) - f(a) = 0$ y $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) - f(a) = f(b) - (f(b)-f(a)) - f(a) = f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0$, en conclusión $g(a) = g(b) = 0$

Además se tiene que g es continua y derivable en $[a, b]$[12] con lo cual cumple las condiciones del Teorema de Rolle, aplicando este, existe un número c en (a, b) tal que $g'(c) = 0$, se tiene que $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ adicional $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. En conclusión $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para algún $c \in [a, b]$ que es lo que se quería demostrar.

[12] Esta función g es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) ya que tanto f como la recta que contiene a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ son continuas y derivables.

5.3 TEOREMA DE CAUCHY:

Sean f y g dos funciones continúas en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que admitan derivadas en todo el intervalo abierto (a, b), entonces para un cierto c de (a, b) se tiene que

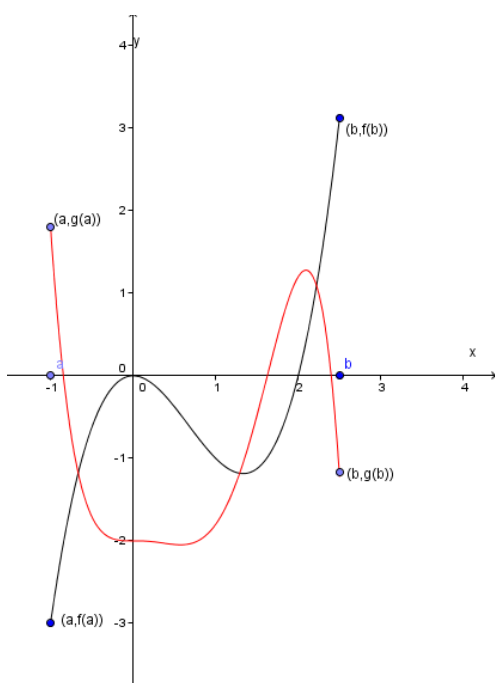
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

5.3.1 Interpretación geométrica

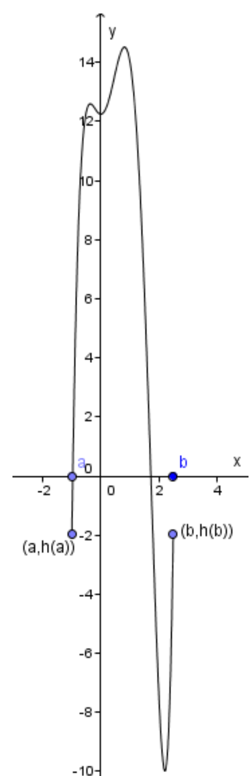
No es posible realizar una interpretación geométrica del Teorema de Cauchy, ya que tenemos cocientes de valores de dos funciones y por otro lado cociente de las derivadas en un punto, por lo cual lo máximo que se puede hacer es examinar la función auxiliar $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$, la cual es utilizada para realizar la demostración utilizando el Teorema de Rolle.

La gráfica 28 ilustra la representación gráfica del teorema:

a)



b)



Gráfica 28. a) Funciones f [Negro] y g [Rojo]. b) Función auxiliar h(x) = f(x) [g(b) - g(a)] - g(x) [f(b)-f(a)]

5.3.2 Demostración del Teorema de Cauchy[13]

Sea $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$. Por ser f y g continuas se tiene que h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Además $h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b)$

Empleando el teorema de Rolle se sigue que $h'(x) = 0$ para algún c de (a, b) es decir $h'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)] = 0$.

Luego $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ que es lo que se quería demostrar.

6. CÁLCULO INTEGRAL

6.1 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA FUNCIONES INTEGRABLES

Si f es continua en $[a, b]$, para un cierto c de $[a, b]$ se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$$

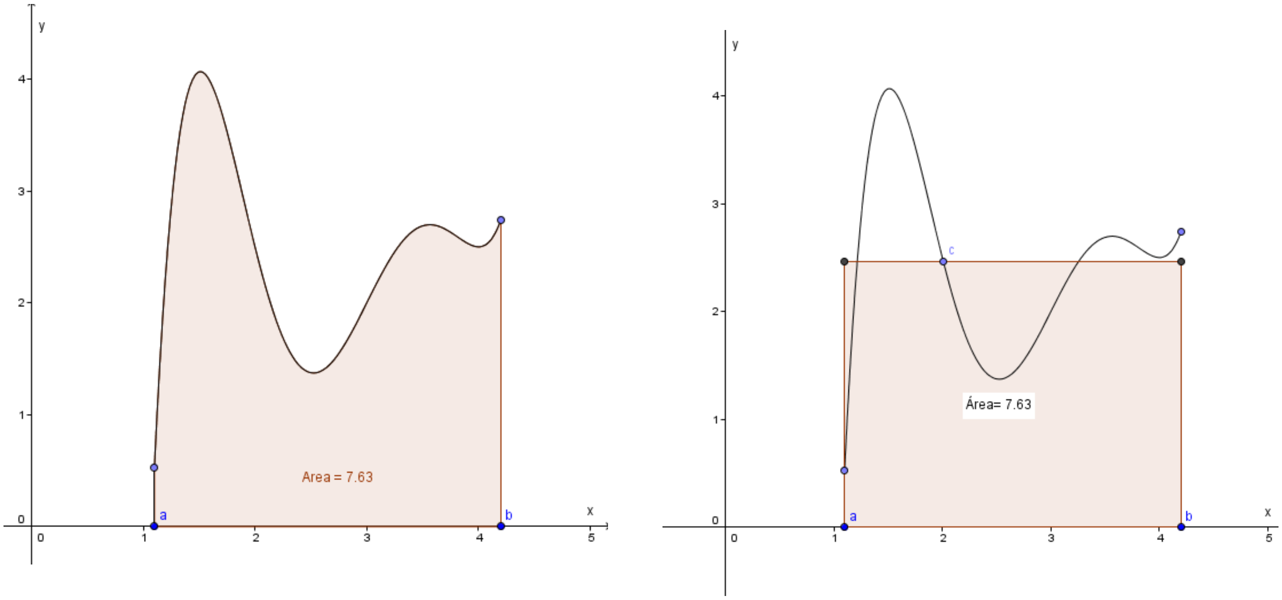
6.1.1 Interpretación geométrica

Geométricamente el teorema del valor medio para funciones integrables establece que dada una función continua en un intervalo $[a, b]$, existe un valor c para el cual el área bajo la curva de la función en dicho intervalo es igual al área del rectángulo de base $(b - a)$ y altura $f(c)$.

Ejemplo: sea la función $f(x) = (x - 3)^5 + 0.5(x - 3)^4 - 3(x - 3)^3 + 2(x - 3) + 2$ continua en el intervalo $[1.1, 4.2]$, para un cierto c que pertenece al intervalo, el área del rectángulo cuya base[14] es $(b - a)$ y altura $f(c)$ es la misma que el área bajo la curva. Este resultado se ilustra en la gráfica 29.

[13] Basada en la demostración de Louis Leithold (1982)

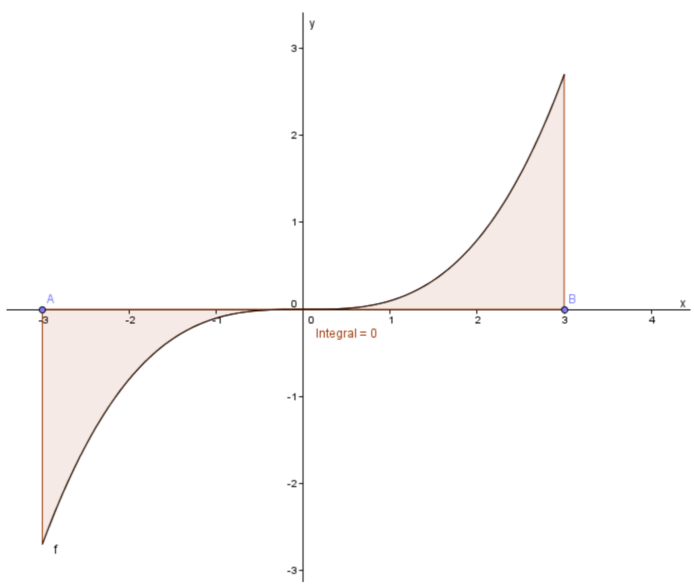
[14] Por facilidad de escritura se menciona “base” refiriéndose a la medida de la longitud de la base.



Gráfica 29. a) Área bajo la curva de la función $f\ \ x\ = (x-3)^5 + 0.5(x-3)^4 - 3(x-3)^3 + 2(x-3)\ +\ 2$ en el intervalo 1.1,4.2 . b) Área del rectángulo de base $(b\ -\ a)$ y altura $f(c)$.

La anterior interpretación geométrica conlleva a la siguiente pregunta ¿Qué sucede si la función toma valores negativos? Para ilustrar esta posibilidad se partirá del siguiente ejemplo:

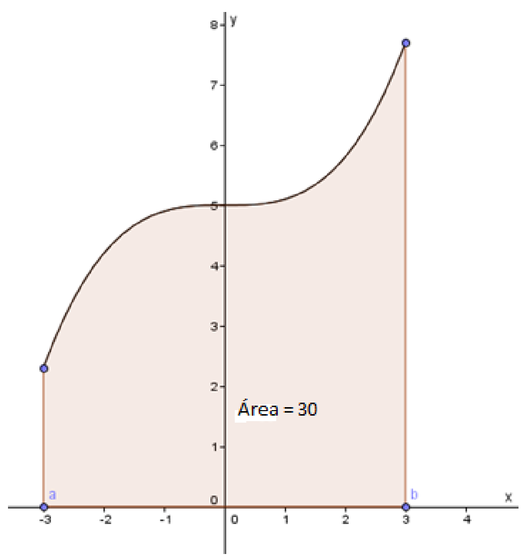
Sea la función $f(x) = \frac{x^3}{10}$, en el intervalo $[-3,3]$ como se muestra en la gráfica 30.



Gráfica 90. Función $\boldsymbol{f(x)\ =\ \frac{x^3}{10}}$, en el intervalo $[\boldsymbol{-3,3}]$.

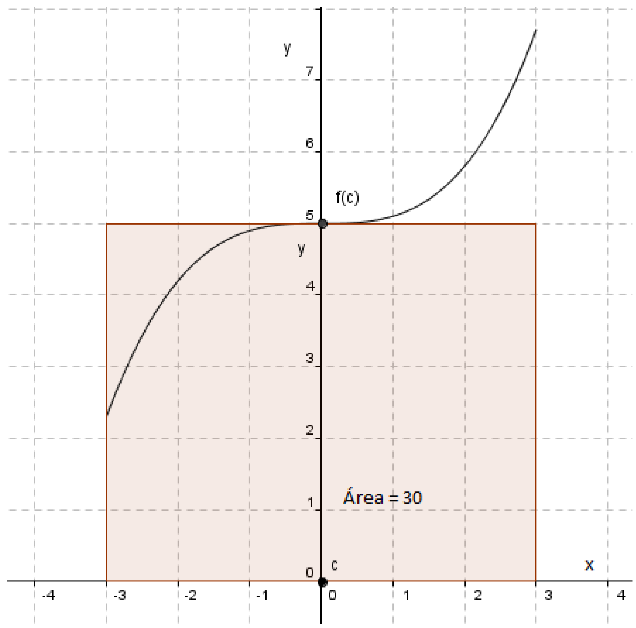
Al resolver la integral definida $\int_{-3.5}^{3.5} \frac{x^3}{10} dx$ da como resultado 0, el lector podrá imaginar que existe c en $[-3.5,3.5]$ para el cual $f(c) = 0$. Efectivamente esta conclusión es cierta, de hecho el teorema se sigue verificando sin importar que la función tome valores positivos o negativos. Sin embargo dado que la interpretación geométrica de la integral resulta ser la diferencia de áreas entre la región positiva y la región negativa, el área del "rectángulo" en este caso resulta ser 0; pero gráficamente no es posible determinar un rectángulo de altura 0, es precisamente este hecho por el cual para realizar una interpretación geométrica de este teorema se toman intervalos de funciones en los cuales esta sea positiva.

No obstante es posible modificar la situación; basta con trasladar la función de tal forma que la función sea positiva. Por ejemplo: $f(x) = \frac{x^3}{10} + 5$ de esta manera es posible hallar el área bajo la curva. Ver la gráfica 31.



Gráfica 31. Área bajo la curva de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{10} + 5}$ en el intervalo [-3.5, 3.5].

De esta manera al aplicar el TVM para funciones integrables es posible observar la interpretación geométrica como se ilustra en la gráfica 32.

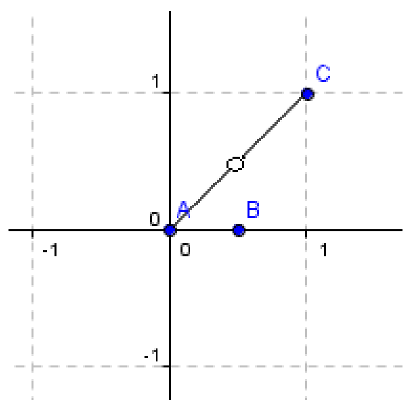


Gráfica 32. Área del rectángulo de base (3-(-3)) = 6 y altura $f(0) = 5$.

A continuación se analizará las consecuencias de omitir la hipótesis del teorema:

¿Qué sucede si la función no es continua en algún punto del intervalo $[a, b]$? Supóngase que se sigue cumpliendo el teorema, luego se debe cumplir para cualquier función aún sin la continuidad.

Sea $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \neq \frac{1}{2} \\ 0 & si\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ en el intervalo [0,1] (grafica 33). Como se puede observar ésta función no es continua en el punto $x = \frac{1}{2}$ ya que $\lim_{x \to \frac{1}{2}} x = \frac{1}{2}$ y $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.



Gráfica 33. función en el intervalo [0,1]

Por otro lado al aplicar el teorema a la función dada en el intervalo $[0,1]$ se tiene lo siguiente:

$$\int_0^1 xdx = f(c)(1-0)$$

$$\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = f(c)$$

$$\frac{1}{2} = f(c)$$

Para que $f(c) = \frac{1}{2}$, c deber ser este mismo valor. No obstante si $c = \frac{1}{2}$ su imagen resulta ser cero. Concluimos de esta forma que si la función no es continua en algún punto del intervalo $[a, b]$ no se cumple el teorema.

En algunos casos el número c puede coincidir con los extremos del intervalo, surge la siguiente pregunta ¿en cuáles casos los extremos del intervalo no pueden coincidir con el número c?

En primer lugar es necesario verificar que efectivamente $f(c)$ puede ser igual a $f(a)$ o a $f(b)$. Sea $f(x) = senx + 1$ en el intervalo $[0,2\pi]$ como se ilustra en la gráfica 34. Aplicando el TVM se tiene:

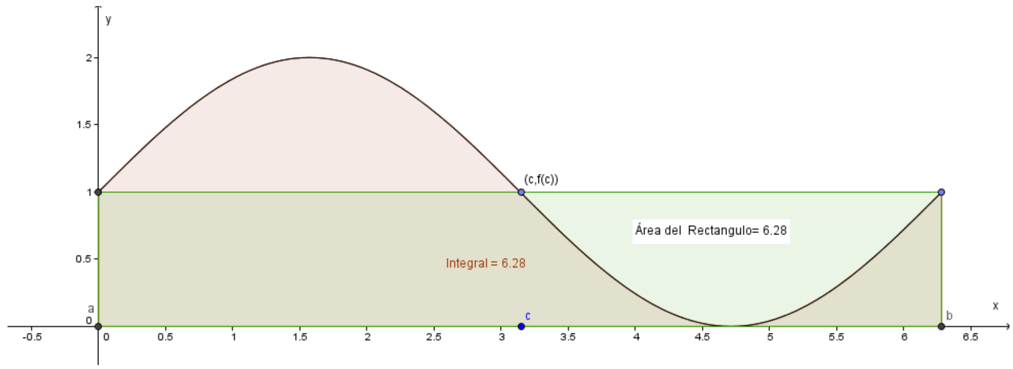
$$\int_0^{2\pi} (senx+1)dx = f(c)(2\pi - 0)$$

$$\frac{\int_0^{2\pi}(senx+1)dx}{2\pi} = f(c)$$

$$\frac{-cos2\pi + 2\pi + 1 - 0}{2\pi} = f(c)$$

$$1 = f(c)$$

Por otro lado se tiene: $f(a) = sen(0) + 1 = 1$ y $f(b) = sen(2\pi) + 1 = 1$. En conclusión $f(a) = f(b) = f(c)$. Es decir, en este caso la imagen del número c apropiado coincide con $f(a)$ y $f(b)$.

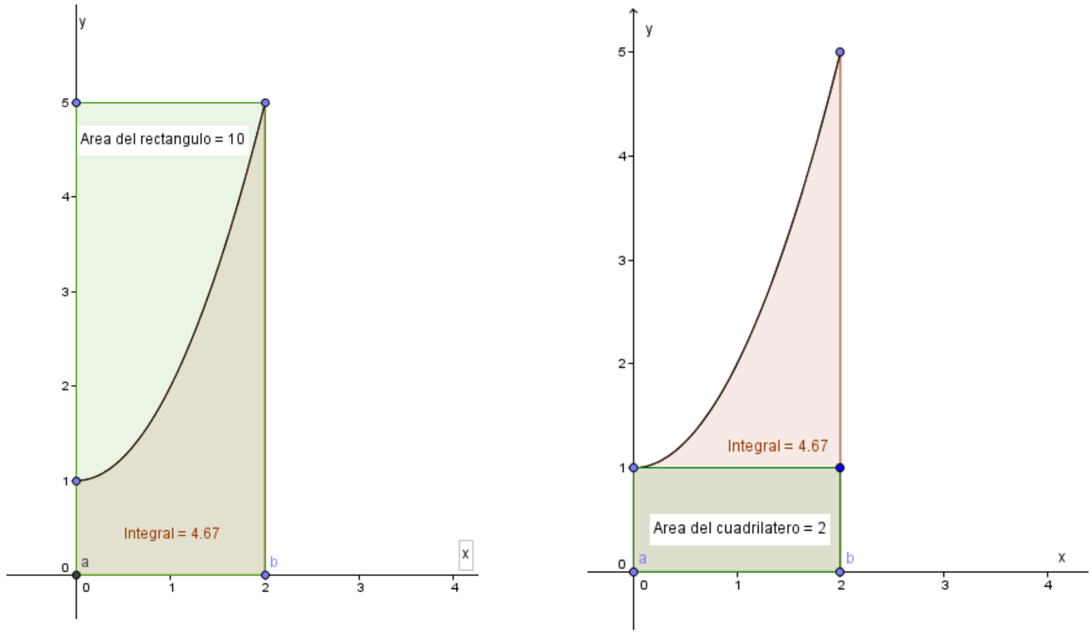


Gráfica 34. Función en la cual la imagen de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})$ coincide con $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

Es natural pensar que si $f(a)$ y $f(b)$ son máximos o mínimos de la función, el valor de c no coincidiría con a o con b, sin embargo es necesario que se cumpla $f(a) \neq f(b)$ ya que si se tiene la función constante tanto $f(a)$ como $f(b)$ son máximos y mínimos y tienen la misma imagen de c para cualquier número entre a y b. Ilustremos lo anterior con un ejemplo:

Sea $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[a, b]$ como se puede observar en la gráfica 35, f presenta un valor mínimo en $x = a$ y f presenta un valor máximo en $x = b$ y $f(a) \neq f(b)$; gráficamente se puede concluir que c no puede ser a ni b ya que en cualquier caso el área bajo la curva es mayor o menor respectivamente.

a) b)



Gráfica 35. Área del rectángulo de base $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ y altura $\boldsymbol{M}$. b) área del rectángulo de base $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ y altura $\boldsymbol{m}$. Donde $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{m}$ son los valores máximos y mínimos de la función respectivamente.

6.1.2 Demostración del Teorema del Valor Medio para funciones integrables[15]

Como $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, la función alcanza un máximo y un mínimo (Este resultado se enuncia en la demostración del teorema De Rolle). Supóngase que $M\ y\ m$ son los valores máximo y mínimo de la función f en el intervalo $[a,b]$ respectivamente. Por definición de máximo y mínimo se tiene que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$.

Integrando a ambos lados resulta $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M dx$. Como m y M son constantes, entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

Esta desigualdad expresa que el área bajo la curva es mayor que el área del rectángulo cuya base es y altura el valor mínimo de la función y es menor que el área del rectángulo que tiene la misma base y altura el valor máximo (Vea la gráfica 35). El objetivo de ésta demostración es encontrar un valor entre y para emplear gracias a la continuidad el teorema del valor intermedio.

Dividiendo a ambos lados de la expresión por $(b-a)$ se tiene $m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \leq M.$

Dado que la hipótesis del teorema establece que f es una función continua en $[a,b]$y además es claro que $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$ es un valor que pertenece al conjunto de los Reales tal que $m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \leq M$, es posible aplicar el teorema del Valor Intermedio a la función f para afirmar que para algún c de (a,b) se tiene que $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$ que es lo que se quería demostrar.

6.2 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA FUNCIONES INTEGRABLES (PONDERADO)

Supóngase que f y g son continuas en $[a,b]$ si g no cambia nunca de signo en $[a,b]$ entonces, para un cierto c de $[a,b]$, se tiene

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

6.2.1 Interpretación geométrica

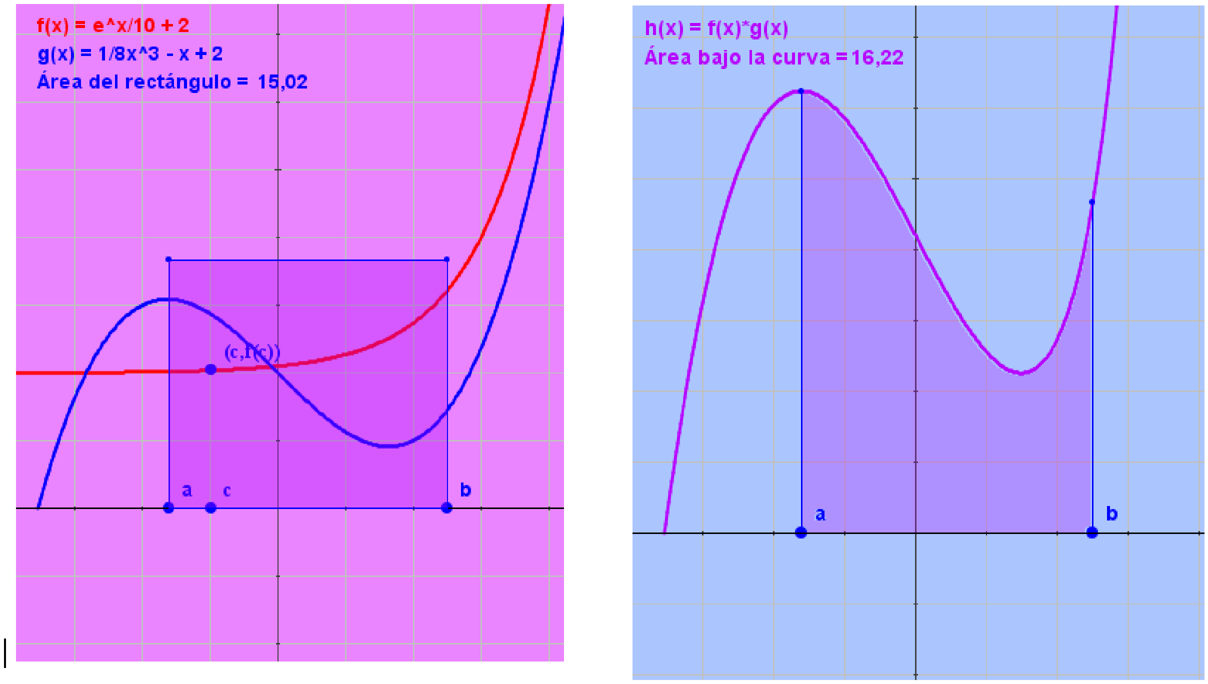
En este caso la interpretación geométrica no es tan directa ya que se concluye $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$ donde $f(c)\int_a^b g(x)\,dx$ se interpreta como el área bajo la curva por un valor.

Sin embargo es posible modificarlo empleando el TVM para integrales a la integral $\int_a^b g(x)\,dx$: se concluye $\int_a^b g(x)\,dx = g(z)\,(b-a)$ para un cierto z que pertenezca al intervalo $[a,b]$. De este modo el teorema se puede reformular de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = [f(c)\,g(z)](b-a)$$

De esta forma la interpretación geométrica que se puede realizar es la siguiente: dadas dos funciones positivas $f(x)$ y $g(x)$, el área bajo la curva de $f(x)\,g(x)$ es igual al área del rectángulo de base $(b-a)$ y altura $f(c)\,g(z)$. En la gráfica 36 se ilustra este resultado:

a) b)



Gráfica 36. a) Área del rectángulo de base $(b-a)$ y altura el producto $f(c)g(z)$. b) Área bajo la curva de $f\;\;x\;\;*g(x)$.

6.2.2 Demostración del Teorema Del Valor Medio Para Funciones Integrables (ponderado)[16]

Supóngase inicialmente que $g \geq 0$ en $[a,b]$, realizando la misma deducción que en el TVM para integrales se puede decir que $m \leq f(x) \leq M$ donde $m\ y\ M$ son valores mínimo y máximo en $[a,b]$ respectivamente. Multiplicando por $g(x)$ resulta $mg\;\;x\;\;\leq f\;\;x\;\;g(x) \leq Mg(x)$

En este paso es importante señalar la importancia de la hipótesis " *no cambia nunca de signo en* puesto que al multiplicar la desigualdad por esta no cambia de signo (si se supone que). La idea de fondo de la demostración es la misma que se emplea en la demostración del teorema del Valor Medio para integrales, primero se busca un valor que esté entre y y Como y son continuas su producto también es una función continua, así es continua. Luego es posible aplicar el teorema del valor intermedio a la función demostrando así el teorema.

[16] Demostración basada en el libro Calculus de Tom Apostol.

y después integrando se obtiene $\int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx$

Ahora bien si $\int_a^b g(x) = 0$ el teorema se cumpliría ya que $\int_a^b f(x) \times 0dx = f(c)\int_a^b 0\, dx$ es decir $0 = 0$.

Ahora suponiendo que $\int_a^b g(x) \neq 0$ se divide a ambos lados de la desigualdad entre $\int_a^b g(x)dx$ de lo cual resulta $\frac{\int_a^b mg(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq \frac{\int_a^b Mg(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ pero como $m\, y\, M$ son constantes, da como resultado $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)}{\int_a^b g(x)} \leq M$.

Al ser $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas, su producto $f(x)g(x)$ también es continua y al ser $\frac{\int_a^b f(x)g(x)}{\int_a^b g(x)}$ un valor entre m y M es posible aplicar el teorema del Valor Intermedio para funciones continuas a la función $f(x)g(x)$, concluyendo así que para algún c de $[a, b]$ se tiene que $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)}{\int_a^b g(x)}$ o bien $f(c)\int_a^b g(x) = \int_a^b f(x)g(x)$ lo cual es lo que se quería demostrar.

Si $g(x) < 0$ se realiza de manera análoga la demostración, la única diferencia es que se obtiene la desigualdad $m > \frac{\int_a^b f(x)g(x)}{\int_a^b g(x)} > M$ con lo cual no existe inconveniente alguno ya que el teorema del Valor Intermedio establece la desigualdad $f(a) > u > f(b)$ como hipótesis. De esta manera es posible nuevamente aplicar el teorema del Valor Intermedio a la función $f(x)g(x)$ demostrando así el teorema.

6.3 SEGUNDO TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA FUNCIONES INTEGRABLES

Considere que g es continua en $[a,b]$ y que f tiene derivada continua y que nunca cambia de signo en $[a,b]$. Entonces para un cierto c de $[a,b]$, se tiene:

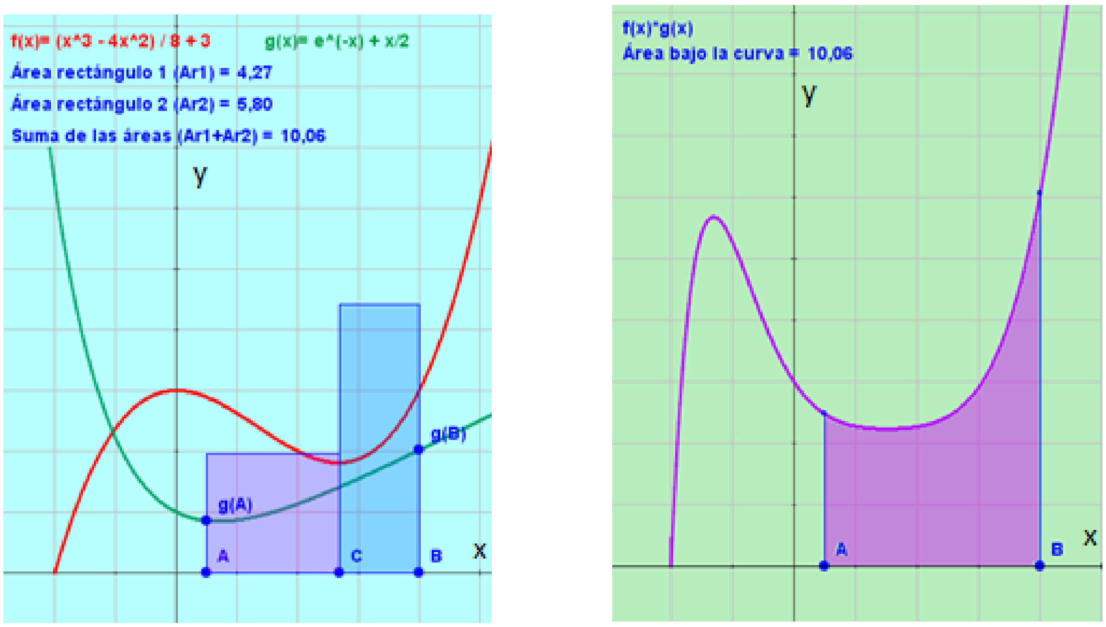
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx + f(b)\int_c^b g(x)\,dx$$

6.3.1 Interpretación geométrica.

Al igual que la interpretación geométrica del teorema ponderado para integrales, la interpretación geométrica de éste teorema no es directa, sin embargo este teorema se interpreta análogamente que el ponderado para integrales, de la siguiente manera:

A las integrales $\int_a^c g(x)\,dx$ y $\int_c^b g(x)\,dx$ se aplica el TVM para integrales es decir existen z y w para los cuales $\int_a^c g(x)\,dx = g(z)(c-a)$ y $\int_c^b g(x)\,dx = g(w)(b-c)$ reemplazando este resultado en el consecuente del segundo Teorema del Valor Medio para funciones integrables se obtiene $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(a)g(z)](c-a) + [f(b)g(w)](b-c)$ es decir que el área bajo la curva de la función $f(x)g(x)$ en el intervalo $[a,b]$ es igual a la suma de las áreas del rectángulo de base $(c-a)$ y altura $f(a)g(z)$ y el rectángulo de base $(b-c)$ y altura $f(b)g(w)$. La anterior conclusión se puede observar en la gráfica 37.

a) b)



Gráfica 37 a) Suma del área del rectángulo de base $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$ y altura $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})$ con el área del rectángulo de base $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ y altura $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w})$. b) Área bajo la curva de la función $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$.

6.3.2 Demostración del Segundo Teorema Del Valor Medio para Funciones Integrables [17]

Sea $G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$, como se tiene que g es continua, se puede decir que $G'(x)=g(x)$.

Además es posible resolver la siguiente integral

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,G'(x)\,dx$$

Realizando integración por partes, se tiene:

$$u=f(x) \quad \text{y} \quad u'=f'(x)\ ;\ dv=G'(x) \quad \text{y} \quad v=G(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,G'(x)\,dx=f(b)\,G(b)-f(a)G(a)-\int_a^b G(x)\,f'(x)\,dx \ (1)$$

[17] Tomada del libro Calculus de Tom Apóstol.

Como $G(a) = \int_a^a g(a) = 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,G'(x)\,dx = f(b)\,G(b) - \int_a^b G(x)\,f'(x)\,dx$

Por el teorema del valor medio ponderado, se tiene

$\int_a^b G(x)\,f'(x)dx = G(c)\int_a^b f'(x)\,dx = G(c)\,[f(b) - f(a)]$ para algún $c \in [a, b]$. (En este paso se hace uso del hecho de que f tiene derivada continua y que nunca cambia de signo en $[a, b]$).

Reemplazando este resultado en (1) se obtiene

$$\int_a^b f(x)\,G'(x)\,dx = f(b)\,G(b) - G(c)\,[f(b) - f(a)] = f(b)\,G(b) - G(c)\,f(b) + G(c)f(a)$$

$$= G(c)\,f(a) + f(b)\,[G(b) - G(c)]$$

Se sustituyen $G(c) = \int_a^c g(x)\,dx$ y $G(b) - G(c) = \int_b^c g(x)$ en (1) se tiene $G(c)\,f(a) + f(b)\,[G(b) - G(c)] = f(a)\int_a^c g(x)\,dx + f(b)\int_b^c g(x)\,dx$

Finalmente $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx + f(b)\int_b^c g(x)\,dx$ que es lo que se quería demostrar.

6.4 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES

Antes de empezar a trabajar este teorema es importante mostrar como teoría preliminar la diferencia y relación entre una función de varias variables y una función vectorial.

Cuando se tiene un intervalo I real, y una función $f: I \to R^n$ se está hablando de una funcion vectorial de una variable real. En cambio si se tiene D un subconjunto de R^n con $n > 1$, y una función $f: D \to R^p$ es una función de varias variables, en el caso particular cuando $p = 1$, se tiene una función $f: R^n \to R$ es llamada un campo escalar, en el caso que $p > 1$ a la función $f: R^n \to R^p$ se le denomina función vectorial de varias variables.

Sea U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f: U \to \mathbb{R}$ una funcion diferenciable en todo U. Sean x e y dos puntos de U tales que el segmento xy esté totalmente contenido en U. Entonces existe un punto $z \in xy$ tal que

$$f(y) - f(x) = df(z)(y - x) =< \nabla f(z), y - x >$$

6.4.1 Interpretación gráfica

La interpretación geométrica de este teorema es parecida a la de funciones derivables (2.2.2) ya que finalmente es, dada una función en varias variables y un segmento (xy) que esté totalmente contenido en dicha función, se busca un punto en xy en el cual la pendiente de la recta tangente en dirección al segmento xy sea igual a $f(y) - f(x)$.

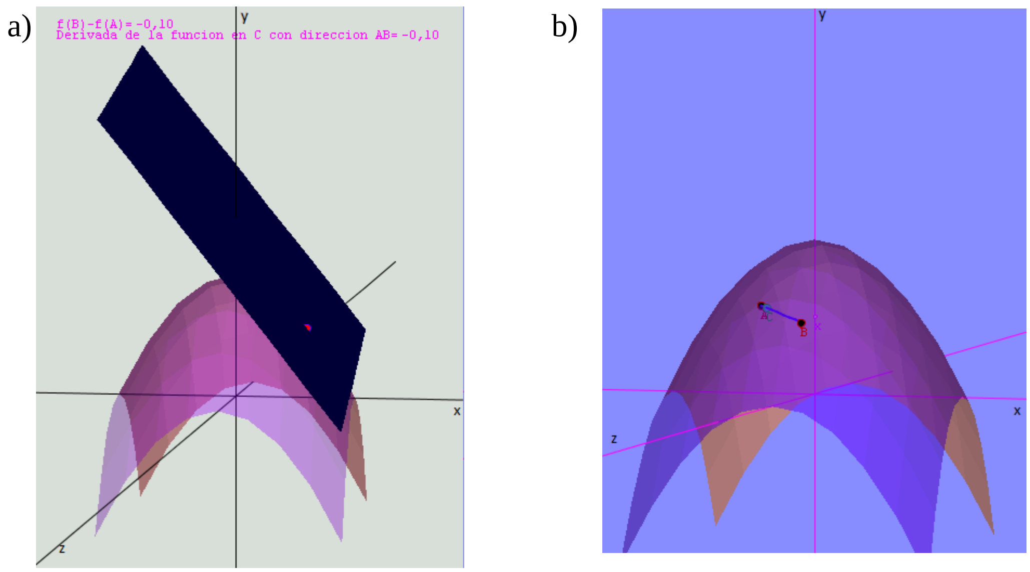
Después de haber estudiado este teorema surge la siguiente pregunta ¿Por qué simplemente no se puede realizar una generalización del teorema del valor medio para funciones diferenciables?

Conjetura 1

Para generalizar el TVM para funciones diferenciables sería fácil simplemente decir “dada una función $F: [a, b] \to R^n$ derivable, existe un punto $c \in (a, b)$ en el cual la recta tangente a la imagen de F sea paralela a la recta que pasa por $F(a)$ y $F(b)$ es decir $F´(c) = \frac{F(a)-F(b)}{a-b}$

Aunque parezca convincente esta generalización se verá con un ejemplo porque no se cumple. Considerando la función $F(x) = (x^3, 2x^4)$ definida en el intervalo $[0,1]$ se busca un punto c en el cual se cumpla $F\ 1 - F\ 0 = F´\ c\ (1 - 0)$ teniendo en cuenta que $F´(x) = (3x^2, 8x^3)$, $F(1) = (1,2)$ y $F(0) = (0,0)$ la ecuación anterior resulta siendo un sistema de ecuaciones (1,2)=($3c^2, 8c^3$) de lo cual se tiene $\begin{matrix} 1 = 3c^2 \\ 2 = 8c^3 \end{matrix}$ la cual no tiene solución ya que se tiene que c tiene que ser $c = \sqrt{\frac{1}{2}}$ y $c = \sqrt[3]{\frac{2}{8}}$ a la vez.

En la gráfica 38 se presenta la representación gráfica del Teorema del Valor Medio para funciones reales de varias variables:



Gráfica 38. a) Plano tangente a la superficie en el punto c. b) Segmento que determinará la dirección de la derivada por el punto c

6.4.2 Demostración[18]

Se escribe el segmento $[x, y]$ como imagen de una función: sea $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definida por $\varphi(t) = x + t(y - x)$. φ es continua, su imagen es el segmento $[x, y]$, y es diferenciable, con $d\varphi(t) = (y - x)$ en cualquier punto $t \in [0,1]$.

Para estudiar el comportamiento de f sobre el segmento, se considera la composición de las dos funciones $g(t) = f \circ \varphi(t)$. Esta función g es ahora una función de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, continua y derivable, por lo que es posible aplicar el teorema del valor medio para estas funciones, por lo cual resulta que $g(1) - g(0) = g'(c)(1 - 0) = g'(c)$ donde $c \in [0,1]$.

---

[18] Demostración tomada de: "http://ocw.unican.es/ciencias-experimentales/analisis-de-varias-variables-reales/material-de-clase-2/valor-medio-w.pdf" el 11 de octubre del 2014

Ahora $g(1) = f(\varphi(1)) = f(y)$, $g(0) = f(\varphi(0)) = f(x)$ aplicando la regla de la cadena $dg(c) = df(\varphi(c)) \circ d\varphi(c)$ es decir, escribiendo la igualdad entre las matrices correspondientes $g'(c) =< \nabla f(\varphi(c)), y-x >$ sustituyendo en la ecuación anterior se tiene que $f(y) - f(x) =< \nabla f(\varphi(c)), y-x >$

Donde $\varphi(c) = z$ es un punto de $[x, y]$, probando así el teorema.

6.5 FUNCIONES VECTORIALES

Supóngase que existe la derivada de $f'(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{y};\boldsymbol{y})$ para cada t en el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Entonces para un cierto número real θ en el intervalo abierto $0 < \theta < 1$ se tiene $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{z};\boldsymbol{y})$ donde $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{y}$.

6.5.1 Interpretación geométrica

La interpretación geométrica de este teorema es análoga al teorema del valor medio en varias variables. La diferencia entre estos teoremas es que para el TVM para funciones vectoriales se considera una función vectorial mientras que para varias variables se considera una función real.

6.5.2 Demostración[19]

Para realizar esta demostración, inicialmente es necesario demostrar el teorema "si $g(t) = f(a+ty)$ y si una de las derivadas $g'(t)$ o $f'(a+ty;y)$ existe, entonces también existe la otra, y además son iguales $(g'(t) = f'(a+ty;y))$"

Realizar la prueba de este teorema, es solo utilizar el cociente de diferencias para g, del cual resulta que $\frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \frac{f(a+ty+hy)-f(a+ty)}{h}$ haciendo $h \to 0$ se obtiene $g'(t) = f'(a+ty;y)$ que es lo que se quería demostrar.

Ahora bien, para demostrar el TVM supóngase que $g(t) = f(a+ty)$ aplicando el teorema mencionado anteriormente a g en el intervalo $[0,1]$ se tiene que $g(1) - g(0) = g'(\theta)$, donde $0 < \theta < 1$.

---

19 Tomada del libro Calculus de Tom Apóstol (1985).

Ya que $g(1) - g(0) = f(a + y) - f(a)$ y $g'(\theta) = f'(a + \theta y; y)$ se llega a $f(a + y) - f(a) = f'(a + \theta y; y)$ que es lo que se quería demostrar.

7. VARIABLE COMPLEJA

Al realizar el análisis del TVM en sus distintas presentaciones bien sea de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, surge la siguiente pregunta ¿será que dicho teorema se cumple para funciones complejas?, al preguntar esto se plantea en primer lugar si se cumple el TVM para funciones continuas en los complejos, para ello se reformula dicho teorema en términos de números complejos, es decir:

Conjetura 1:

> *Sea f una función compleja de variable compleja definida en un intervalo $[z_o, z_1]$, para cada w tal que $f\ \ z_o\ \ < w < f\ \ z_1\ \ $, existe al menos un z dentro de (z_o, z_1) tal que $f\ \ z\ \ = w$.*

Ésta conjetura no tiene sentido en el conjunto de los números complejos, ya que los complejos como se demostrará a continuación no satisfacen los axiomas de orden:

Prueba:

Para realizar la verificación de la conjetura, en primer lugar es necesario recordar la definición de orden: Un conjunto de elementos A es un conjunto ordenado si existe una relación de orden $\leq$ tal que para dos elementos cualesquiera a y b de A se cumple que $a < b$, $a = b$ o $a > b$. Además se cumple los siguientes axiomas:

1. $\forall a, b \in A, a \leq a$.
2. Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.
3. Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.
4. $\forall a, b \in A, a \leq b$ o $b \leq a$
5. Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$
6. Si $0 \leq a$ y $0 \leq b$ entonces $0 \leq ab$

Teniendo en cuenta lo anterior, supongamos que $i \neq 0$, luego $i < 0$ o $i > 0$. Si $i > 0$ por el axioma 6 se tiene que $ii > 0$, luego por definición se tiene que $-1 > 0$ lo cual es equivalente a tener $0 > 1$ sumando 1 a ambos lados de la desigualdad; ahora si se tiene que $-1 > 0$ luego en virtud del axioma 6, $-1 \quad -1 > 0$ es decir $1 > 0$ lo cual contradice el axioma 4. De este modo se concluye que es imposible tener $i > 0$; de manera análoga se comprueba que i no puede ser menor que cero. Se concluye finalmente que no hay una manera de ordenar los complejos según la definición de conjunto ordenado.

De esta manera se comprueba que el TVM para funciones continuas no tiene lugar en los números complejos.

Continuando con la línea de las presentaciones del Teorema del Valor Medio, la siguiente hipótesis que resulta es que el TVM se cumple para funciones diferenciables, reformulando este teorema para funciones complejas resulta la siguiente conjetura:

8. INSTRUCTIVO PARA EL USO DEL CD

Requisitos: Es necesario que el computador donde se va a ejecutar el programa tenga Descartes 2.0 y la versión de Java "7 Update 11", puede descargar ésta versión a partir del siguiente link: http://www.oldapps.com/java.php?old_java=8696.

Instrucciones:

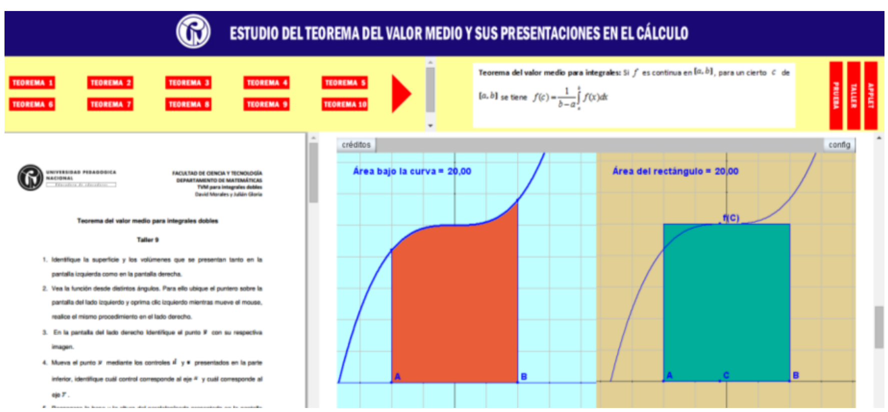
1. Después de introducir el CD al computador, debe ejecutar el programa en la carpeta "equipo", oprimiendo doble clic sobre el siguiente icono:

Grafica 39. Icono del aplicativo

2. Una vez realizado esto aparece en el navegador predeterminado la siguiente pantalla:

Grafica 40. Pantalla de inicio del aplicativo

3. Oprimir clic en el botón "ENTRAR", al realizar esto aparecerá la siguiente pantalla:



Grafica 41. Ejemplo pantalla del aplicativo.

4. En la parte superior podrá encontrar cada una de las presentaciones del Teorema del Valor Medio. Basta con pulsar clic sobre el teorema que se desea trabajar.
   Una vez realizado esto, en la parte superior aparecerá el enunciado correspondiente al teorema junto con tres botones llamados *Prueba*, *Taller y Applet.* Los cuales permiten acceder a la demostración, a la guía de trabajo y al applet del teorema que se quiere estudiar.

9. GUIAS DE TRABAJO

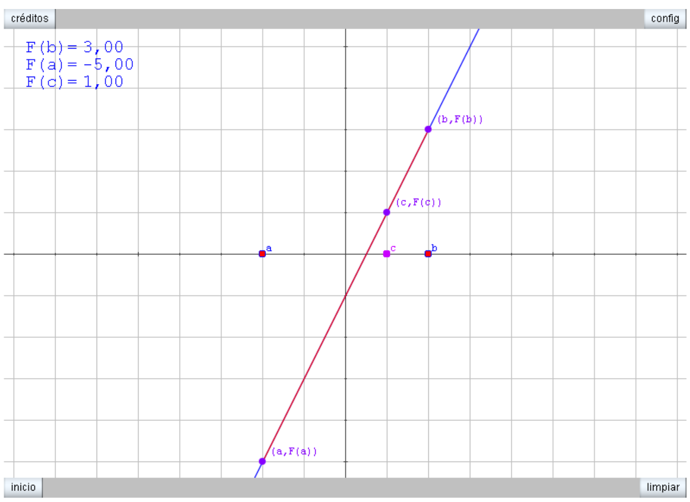
9.1 Funciones continuas.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Teorema del Valor Intermedio
David Morales y Julián Gloria

Objetivo: Deducir la interpretación geométrica del Teorema del Valor Intermedio a partir de la exploración.
Dirigido a: Estudiantes de pre-cálculo y Cálculo diferencial.

Para la el Applet 1



Gráfica 42. Pantallazo de la primera gráfica para el Teorema del Valor Intermedio

1. Escoja un numero cualquiera que esté entre $f(a)$ y $f(b)$ ____
2. ¿Es posible encontrar un número c en el cual $f(c)$ tenga el mismo valor al número escogido? (realice el mismo procedimiento con 2 números diferentes)

____

____.

3. Cambie los valores de a y b a continuación responda nuevamente los numerales anteriores con este nuevo intervalo.

4. Sin importar cuál sea el número escogido, ¿Siempre es posi ble encontrar un punto en el intervalo cuya imagen sea ese número? ________
5. ¿Qué sucede si se toma un número que esté por fuera del intervalo?

   ____

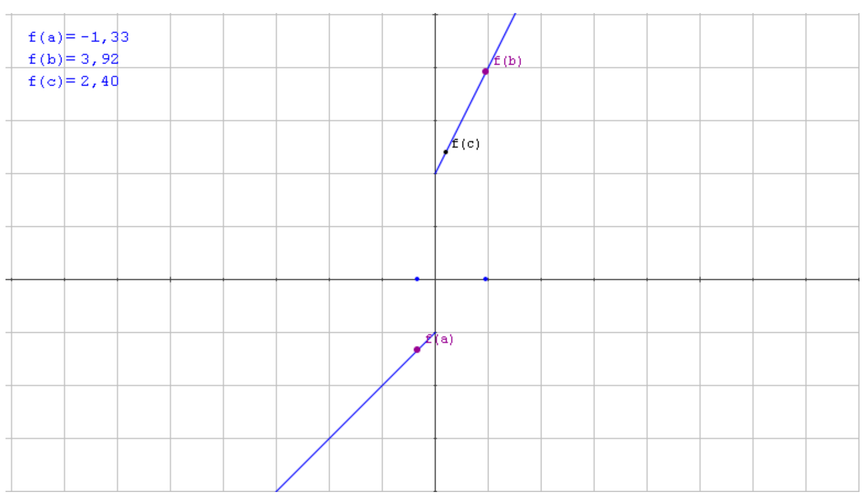
   ____.

Repita las preguntas pero ahora con la gráfica del Applet 2

6. Realice una conjetura a partir de los resultados encontrados anteriormente

Para el Applet 3

En esta pantalla aparece la función $f(x) = \begin{matrix} 2x+2 & si\ \ x \geq 0 \\ x-1 & si\ x < 0 \end{matrix}$



Gráfica 43. Pantalla del tercer applet para el Teorema del Valor Intermedio

1. Verifica si la conjetura formulada anteriormente se cumple para esta función

   ____

   ____.

2. ¿Cuál es la diferencia entre la función presentada en esta pantalla y las anteriores?

   ____

   ____.

3. Escoja un numero cualquiera que esté entre $f(a)$ y $f(b)$ ________

4. ¿Es posible encontrar un número c en el cual $f(c)$ tenga el mismo valor al número escogido? (realice el mismo procedimiento con 2 números diferentes)

   ____

   ____.

5. Cambie los valores de a y b seguidamente responda nuevamente el numeral anterior con este nuevo intervalo.

   ____

   ____.

6. A partir de las respuestas a las preguntas anteriores formule si es necesario reformule la conjetura presentada anteriormente.

   ____

   ____.

9.2 Funciones derivables.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

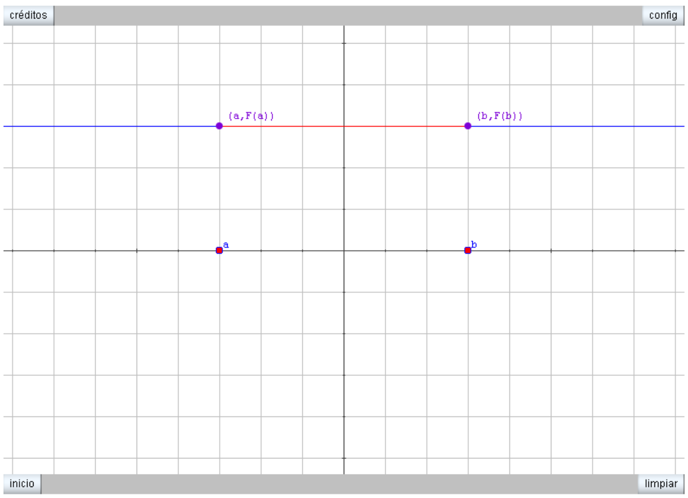
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Teorema del Valor Medio para Funciones Derivables

David Morales y Julián Gloria

Objetivo: Deducir la interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio para funciones Derivables a partir de la exploración.

Dirigido a: Estudiantes de cálculo diferencial.

Para el Applet 1

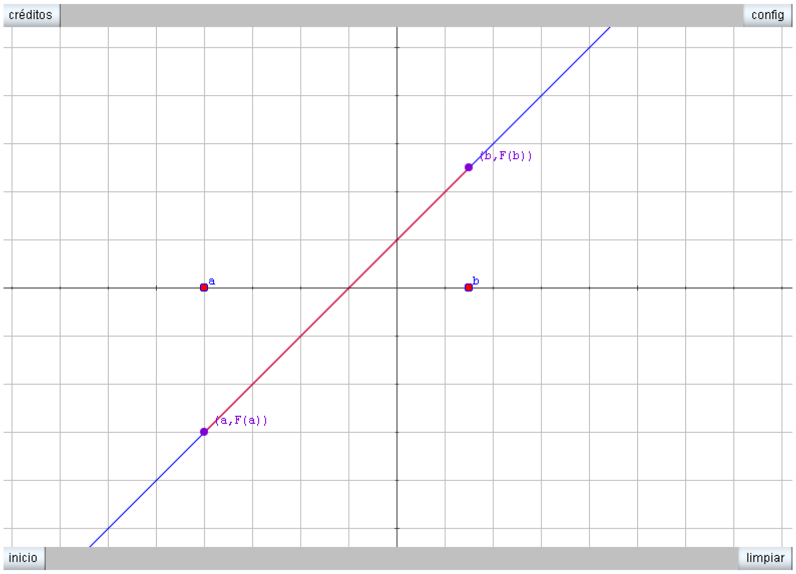


Gráfica 44. Pantalla del primer applet para el Teorema Del Valor Medio para funciones Derivables

En la primera pantalla aparece la recta $f(x) = 3$, a partir de esta grafica responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $f(a)$ y $f(b)$? ______________________________
2. ¿Cuál es el valor de la derivada para la función en cualquier punto del intervalo (a, b)? ______________________________
3. Si se cambian los valores de a y b, ¿las respuestas a las preguntas anteriores siguen siendo las mismas? ______________________________

Para la pantalla 2

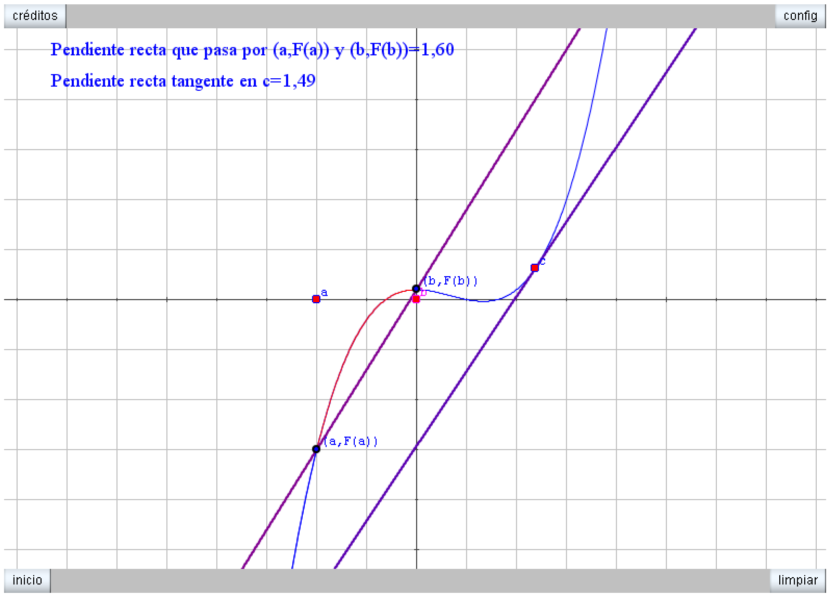


Gráfica 45. Pantalla del segundo applet para el Teorema Del Valor Medio para funciones Derivables

La ecuación de la recta que aparece en esta pantalla es $f(x) = x + 1$.

1. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $f(a)$ y $f(b)$? ____
2. ¿Cuál es el valor de la derivada para la función en cualquier punto dentro del intervalo (a, b)? __________________________________
3. Si se cambia el intervalo $[a, b]$, las respuestas a las preguntas anteriores se mantienen ¿por qué? ____
____.
4. A partir de las respuestas a los numerales de las dos primeras pantallas formule una conjetura, y piense que sucede si la función no es una recta que se espera que suceda ____
____
____.

Para la pantalla 3



Gráfica 46. Pantalla del tercer applet para el Teorema Del Valor Medio para funciones Derivables

1. Mueva c hasta encontrar un valor en el cual la pendiente de la recta que pasa por $f(a$ y $f(b)$ tenga el mismo valor que la pendiente de la tangente que pasa por c.
2. ¿Es posible encontrar un punto que cumpla la condición del numeral anterior, pero que esté en el intervalo (a, b)?, ¿es único este punto?

____

____

____.

3. Acercar los putos a y b de tal forma que el intervalo sea muy pequeño y realiza nuevamente los numerales anteriores

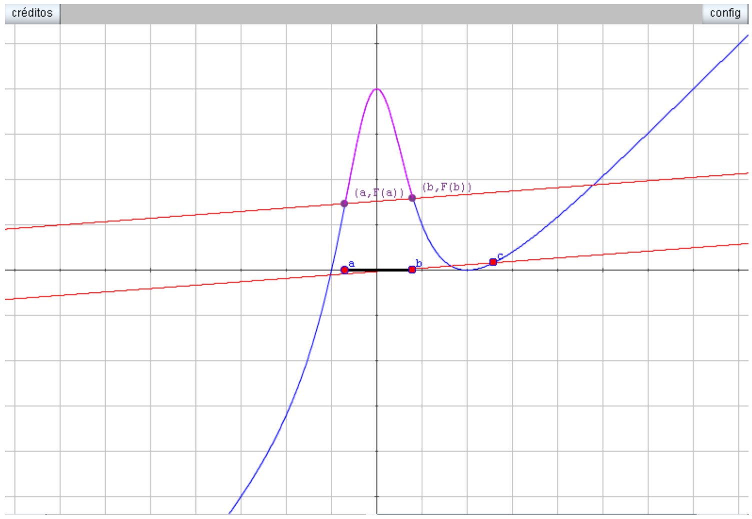
____

____

____.

4. ¿Es posible encontrar un intervalo $[a, b]$ en el cual el punto c tal que los valores mencionados anteriormente sean iguales esté siempre fuera del intervalo?_____
5. ¿Es posible encontrar un intervalo $[a, b]$ en el cual el número c tal que los valores mencionados anteriormente sean igual esté siempre dentro del intervalo?______

Para la pantalla 4



Gráfica 47. Pantalla del cuarto applet para el Teorema Del Valor Medio para funciones Derivables

En esta pantalla la recta que pasa por c es paralela a la recta que pasa por $f(a)$ y $f(b)$

1. Mueve c hasta encontrar un valor en el cual la recta que pasa por c sea tangente a la curva
2. Es posible encontrar un valor que cumpla la condición del numeral anterior, pero que esté en el intervalo a, b .
3. Acerca los puntos a y b de tal forma que el intervalo sea muy pequeño y realiza nuevamente los numerales anteriores
4. Encuentra (si es posible) un intervalo (a, b) tal que la tangente a la curva siempre esté dentro del intervalo
5. Encuentra (si es posible) un intervalo (a, b) tal que la tangente a la curva siempre esté fuera del intervalo
6. ¿Qué relación tienen las rectas paralelas en el plano?

   ____

   ____

   ______________.
7. ¿Cómo se relacionan los numerales presentados en esta pantalla con las pantallas anteriores?

____

____

____.

8. Reformule la conjetura inicial con las respuestas de las últimas dos pantallas

____

____

______________.

AYUDA PARA FORMULAR LA CONJETURA:

- ¿Es necesario que la función sea continua en el intervalo cerrado o es suficiente en el abierto?
- ¿Es necesario que la función sea diferenciable en el intervalo cerrado o es suficiente en el abierto?

9.3 Teorema de Rolle

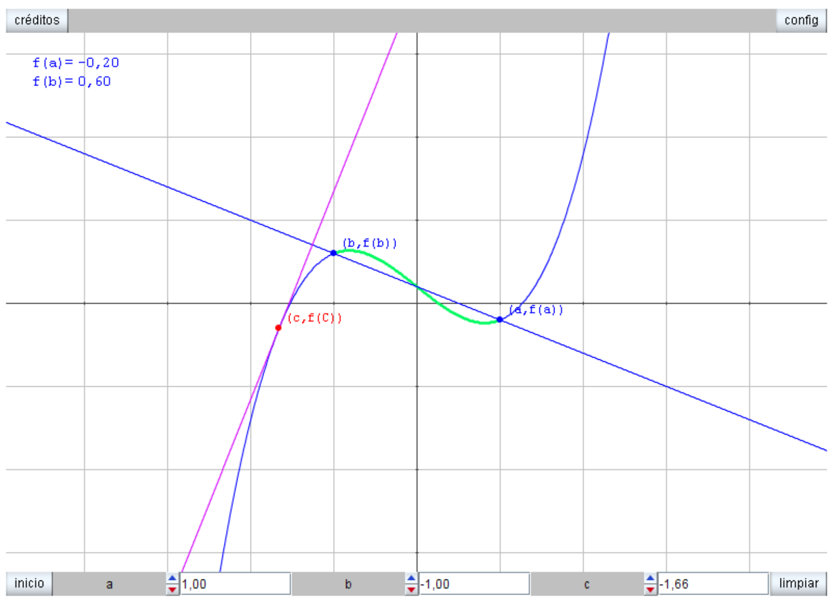
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Teorema de Rolle
David Morales y Julián Gloria

Objetivo: Deducir la interpretación geométrica del Teorema de Rolle a partir de la exploración.

Dirigido a: Estudiantes de Cálculo diferencial.

En la pantalla aparece la función $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$ y la recta morada representa la tangente a la curva en el punto $(c, f\ \ c\ )$.



Gráfica 48. Pantalla del applet para el Teorema de Rolle

1. Cambia los valores de a y b de tal forma que $f(a) = f(b)$
2. Cambia el valor de c hasta llegar a un punto en el intervalo $[a, b]$ de tal forma que la recta que pasa por $f(c)$ sea paralela a la recta que pasa por $f(a)$ y $f(b)$
3. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por $f(a)$ y $f(b)$?
4. Cambia el valor de a y b pero que $f(a)$ y $f(b)$ sigan teniendo el mismo valor: ¿siempre es posible encontrar un punto en el intervalo $[a, b]$ en el cual la derivada sea 0?

5. ¿Es posible decir que este es un caso particular *del teorema del valor medio para funciones diferenciables*, explique su respuesta?
6. A partir de las respuestas a los numerales anteriores realice una conjetura.

Ayuda para realizar la conjetura:

-Si es un caso particular del teorema del valor medio para funciones diferenciables que condiciones adicionales debe añadir para este teorema y cuál sería la conclusión

9.4 Teorema del Valor Medio de Cauchy.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

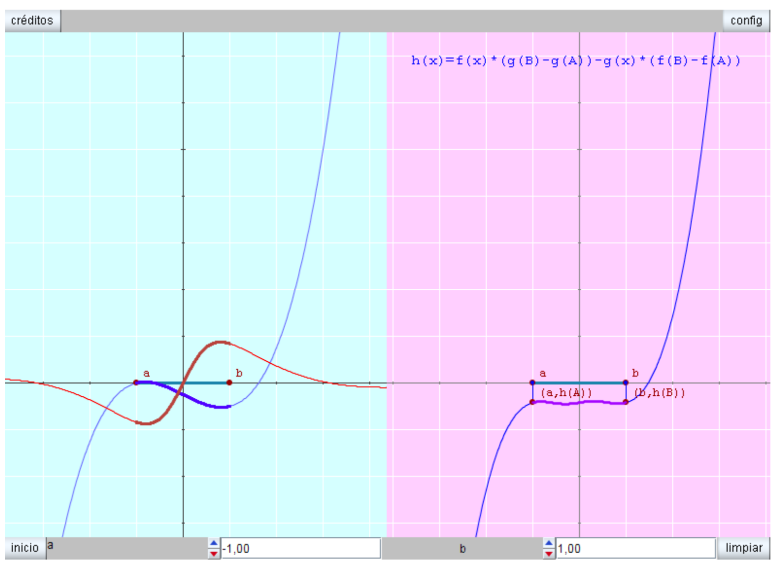
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Teorema de Valor Medio de Cauchy

David Morales y Julián Gloria

Objetivo: deducir la interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio de Cauchy a partir de la exploración.

Dirigido a: Estudiantes de cálculo diferencial.

En el plano de la izquierda aparecen las funciones $f(x) = \frac{(x^3-2x-1)}{4}$ (azul) y $g(x) = \frac{2*sen(x)}{x^2+1}$(rojo)



Gráfica 49. Pantalla del primer applet para el Teorema Del Valor Medio de Cauchy

1. Sí f y g son derivables que se puede decir de la función $h(x)$que aparece en la pantalla 2

   ____

   ____.

2. ¿La función $h(x)$ cambia dependiendo de a y b? ¿por qué?

   ____

   ____.

3. Mira el plano de la derecha, ¿qué relación tiene $h(a)$ y $h(b)$?

____

____.

4. ¿La respuesta a la pregunta anterior sigue siendo la misma sin importar los valores que tomen a y b? (compruébalo reemplazando a y b en h)

____

____.

5. Aplica el teorema de roll para la función h e intenta llegar a una relación de la forma $\frac{f' c}{g' c} =$

____

____.

6. ¿Esta relación depende de $f(x)$ y $g(x)$ o se puede decir que se cumple para cualquier par de funciones que se tome?

____

____

____.

7. Realiza una conjetura a partir de las respuestas a las preguntas anteriores.

____

____.

Ayuda para formular la conjetura:

Qué condiciones tienen que tener $f(x)$ y $g(x)$ para que se pueda aplicar el teorema de Rolle para h

9.5 Funciones Integrables.

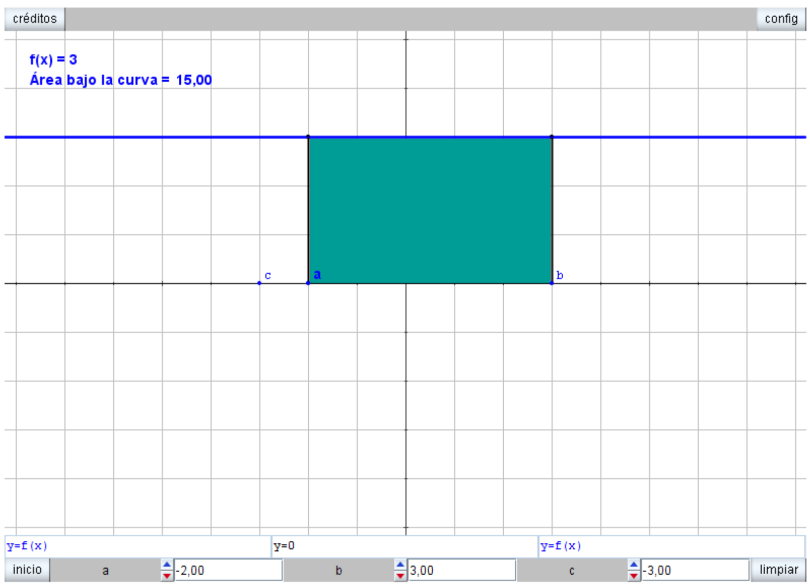
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Teorema del Valor Medio para funciones Integrables
David Morales y Julián Gloria

Objetivo: deducir la interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio para funciones integrables a partir de la exploración.

Dirigido a: Estudiantes de Cálculo integral.

Para el Applet 1



Gráfica 50. Pantalla del primer applet para el Teorema Del Valor Medio para Integrales

1. Dada la función constante, identifique el Área bajo la curva de la función en el intervalo (a, b)
2. Mueva el punto c de tal forma que este entre a y b ¿Cuál es la imagen de c?, es decir f c $=$ ______
3. ¿cuál es el área del rectángulo con base $b - a$ y altura $f(c)$?

____

4. Modifique la posición del punto a y del punto b de tal forma que la abscisa de a sea menor que la abscisa de b. Verifique el área bajo la curva.
5. Mueva nuevamente el punto c cumpliendo que c esté entre a y b y responda la pregunta 3 con estas características:

   Área del rectángulo =__________
6. Encuentra alguna relación entre el Área del rectángulo anterior y el Área bajo la curva. Formule una conjetura:

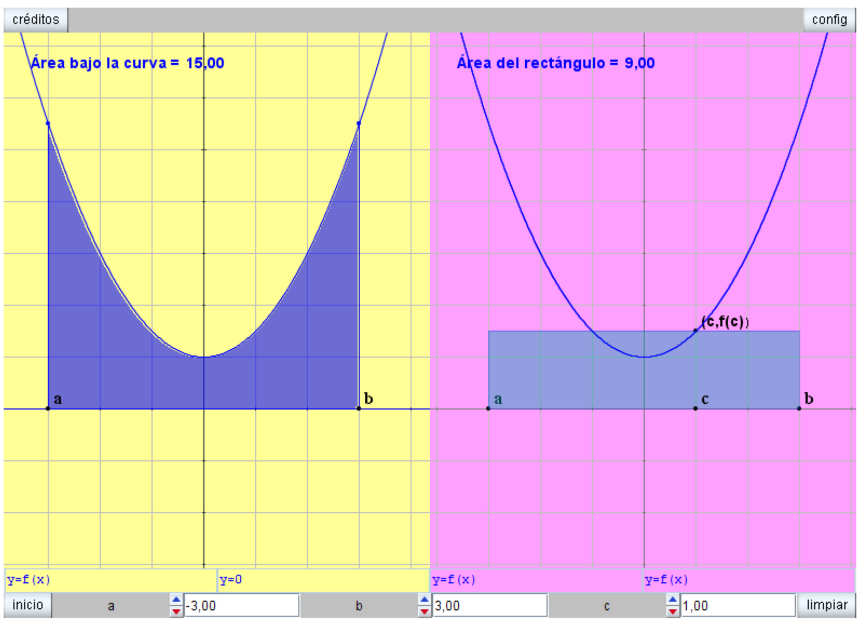
   ____

   ____

   ____

   ___.

Para el Applet 2



Gráfica 51. Pantalla del segundo applet para el Teorema Del Valor Medio para Integrales

1. Identifique el área bajo la curva de la función $f\ \ x\ \ = \frac{(x^2+2)}{2}$ en el intervalo (a, b).
2. En la segunda gráfica, mueva el punto c a lo largo del intervalo $[a, b]$, ¿qué observa?

   ____

   ____

   ____.

3. ¿Cuál es la base y la altura del rectángulo identificado en el punto anterior?

   Base: ________

   Altura: ________

4. Observe el área de las dos gráficas en la parte superior de cada una de ellas, mueva el punto c y observé la variación del área del rectángulo, ¿es posible hallar un rectángulo cuya Área sea igual a la del Área bajo la curva?

   ____

   ____

   _.

5. Cambie los valores de a y b de tal manera que se cumpla que a $< b$, observe que el intervalo sea el mismo en ambas gráficas.

6. Solucione si es necesario los puntos 2, 3 y 4 con éste nuevo intervalo:

   ____

   ____

   ____

7. Realice nuevamente los puntos 5 y 6, formule una conjetura:

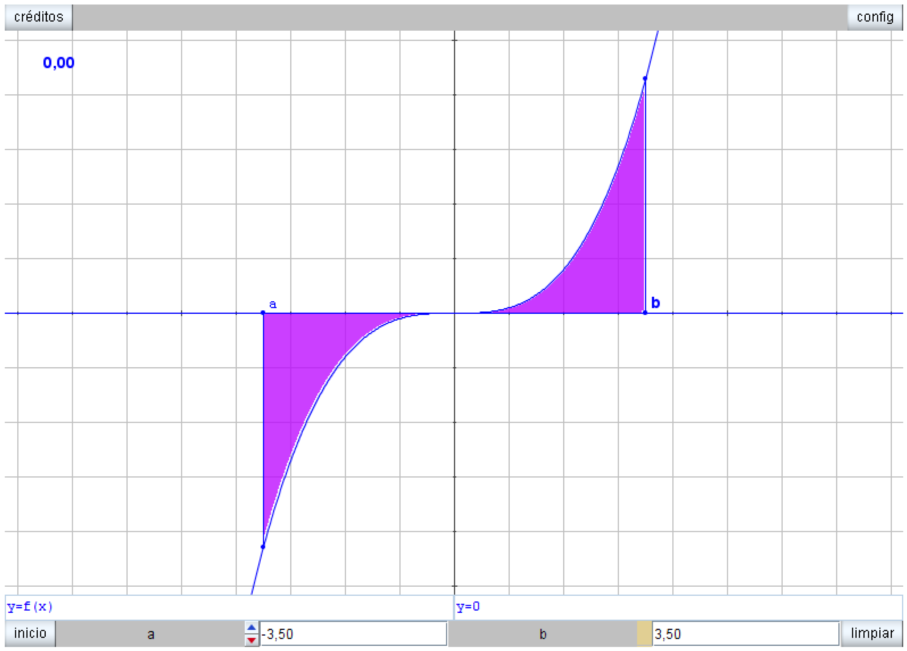
   ____

   ____

   ____

   ____

Para el Applet 3



Gráfica 52. Pantalla del tercer applet para el Teorema Del Valor Medio para Integrales

1. Identifique la función $f\ x = \frac{x^3}{10}$. ¿Qué representa la región azul de la curva?

____

____

____

____

2. Mueva el punto a a lo largo del eje x de tal forma que la nueva posición del punto A sea menor que la anterior es decir "hacía $-\infty$".
3. Identifique el valor numérico que aparece en la parte superior de la gráfica, ¿qué sucede con él cuando se mueve el punto a?, ¿qué información cree que está brindando dicho valor?

____

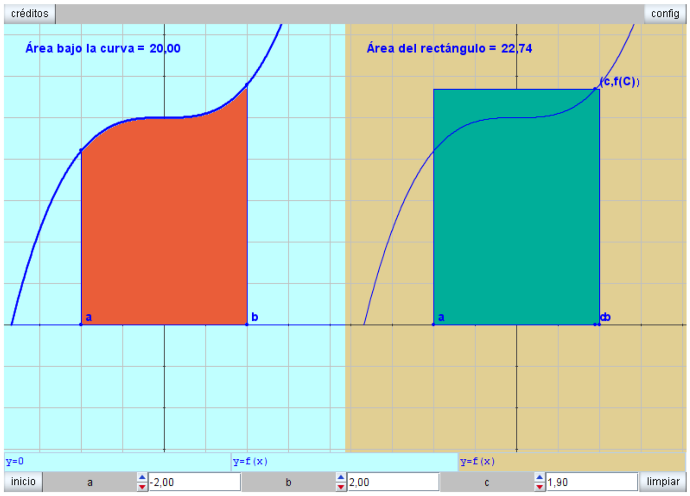
____

____

____

Aclaración: El valor numérico que aparece NO corresponde al área bajo la curva; puesto que este dato toma valores negativos, el dato realmente corresponde a la diferencia de las áreas entre la región positiva y la negativa.

Applet 4



Gráfica 53 Pantalla del cuarto applet para el Teorema Del Valor Medio para Integrales

1. Identifique el área bajo la curva de la función $f\ x\ = \frac{x^3}{10} + 5$ en el intervalo (a, b).
2. En la segunda gráfica, mueva el punto C a lo largo del intervalo $[a, b]$.
3. ¿Cuál es la base y la altura del rectángulo que aparece?
4. Observe el área de las dos gráficas en la parte superior de cada una de ellas, mueva el punto c y observé la variación del área del rectángulo, ¿es posible hallar un rectángulo cuya área sea igual a la del área bajo la curva?

 ____

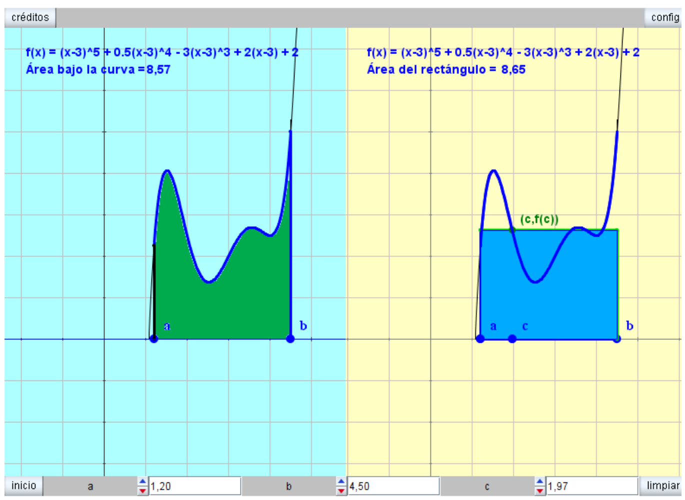
 ____

 ____

5. Cambie los valores de a y b de tal manera que se cumpla que $\mathrm{a} < b$, observe que el intervalo sea el mismo en ambas gráficas. Responda nuevamente la pregunta 7 con éste nuevo intervalo:

6. Con base en lo realizado anteriormente reformule la conjetura realizada en el ítem 7 de la segunda parte:

Applet 5



Gráfica 54 Pantalla del quinto applet para el Teorema Del Valor Medio para Integrales

1. Identifique el área bajo la curva de la función:

$$f\ \ x\ \ = (x-3)^5 + 0.5(x-3)^4 - 3(x-3)^3 + 2(x-3) + 2$$

En el intervalo $[a, b]$.

2. Realice los pasos 5 a 9 de la tercera parte con esta función, compruebe la conjetura realizada en el ítem 10 y si es necesario reformúlela:

9.6 Funciones integrables (ponderado).

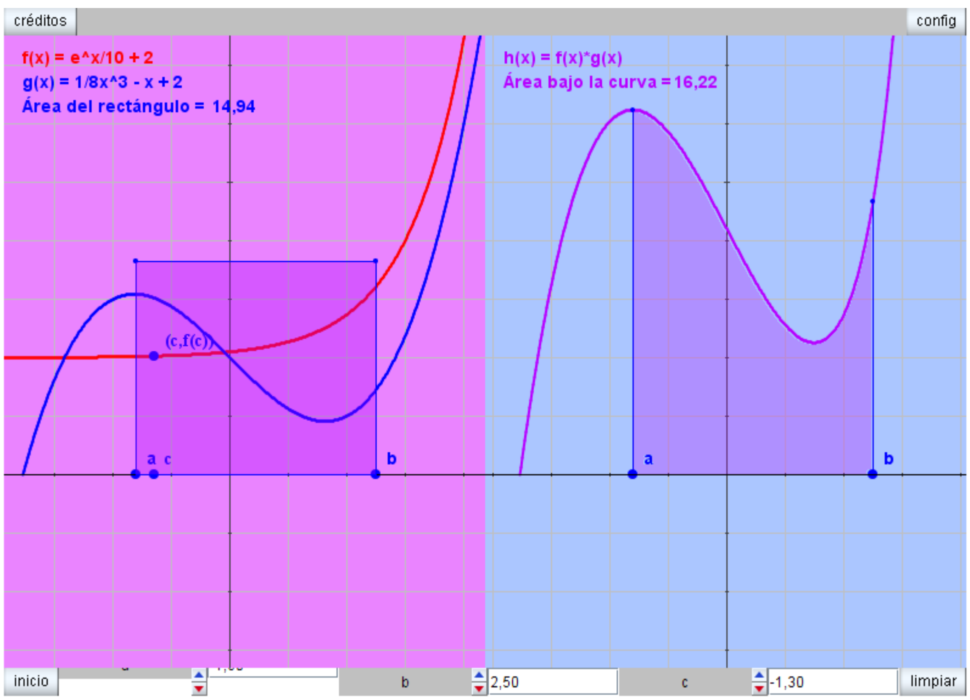
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Teorema del Valor Medio para Funciones Integrables (ponderado)
David Morales y Julián Gloria

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Objetivo: deducir la interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio ponderado para funciones integrables.

Dirigido a: estudiantes de Cálculo integral.

Para el Applet 1



Gráfica 55. Pantalla del primer applet para el Teorema Del Valor Medio para Integrales (ponderado)

1. En la pantalla de la izquierda identifique las dos funciones que se presentan, ¿Qué características logra reconocer de estas funciones?

____

____

____

____

2. En la pantalla de la derecha se encuentra la función $h(x)$ que es el producto de las funciones de la pantalla izquierda, es decir $h\ x\ = f\ x\ g(x)$ describa cuáles características tiene esta función.

____

____

____

3. Identifique el área bajo la curva de la función $h(x)$.
4. Mueva el valor c de tal forma que $a < c < b$. ¿qué sucede?

____

____

____

5. Si sigue moviendo el punto c cumpliéndose la propiedad antes mencionada, ¿qué relación encuentra entre el área del rectángulo y el área bajo la curva?, ¿existe algún rectángulo cuya área sea la misma o se aproxime a la del área bajo la curva?

____

____

____

6. Mueva los puntos a y b, de tal forma que se cumpla $a < b$.
7. Repita los pasos 4 y 5. ¿Se mantien e la relación hallada en el ítem 5?

____

____

____

8. Pruebe con varios intervalos $[a, b]$ ¿existe algún intervalo en el cuál el área del rectángulo no se aproxime al área bajo la curva? ¿qué puede concluir?

____

____

9. ¿Logra identificar la base y la altura del rectángulo?

____

____

Es fácil verificar que la base es $(b - a)$, sin embargo la altura no es tan directa, responda las siguientes preguntas:

10. ¿La altura del rectángulo es mayor que $f(c)$? ________ ¿siempre?, es decir ¿en cualquier intervalo $[a,b]$?_________

11. Teniendo en cuenta el siguiente hecho:

Si g es continua en $[a,b]$, para un cierto c de $[a,b]$ se tiene:

$$\int_a^b g(x)\,dx = g(c)(b-a) = x_1$$

Para algún intervalo $[A,B]$ (el que usted escoja), ¿encuentra alguna relación entre x_1, $f(C)$ y la altura del rectángulo?

Sugerencia: tome el intervalo $[0,1]$, halle x_1, es decir $\int_a^b g(x)\,dx$ y halle el punto $(c,f(c))$ para el cual el área del rectángulo es igual al área bajo la curva.

____

____

- Con base en lo realizado en la primera y segunda parte, formule una conjetura:

____

____

____

____

Para el Applet 2

Realice la primera y segunda parte de la guía de trabajo aplicado al siguiente applet, teniendo en cuenta que la altura apropiada en este nuevo applet está en función de $g(x)$ y no de $f(x)$ como en el anterior caso, así, el punto 11 de la segunda parte se replantea de la siguiente forma:

11. Teniendo en cuenta el siguiente hecho:

Si f es continua en $[a,b]$, para un cierto c de $[a,b]$ se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) = x_2$$

Para algún intervalo $[a, b]$ (el que usted escoja), ¿encuentra alguna relación entre x_2, $g(c)$ y la altura del rectángulo?

Sugerencia: tome el intervalo $[0,1]$, halle x_2, es decir $\int_a^b f(x)\,dx$ y halle el punto $(c, g(c))$ para el cual el área del rectángulo es igual al área bajo la curva.

____

____

Verifique si su conjetura se cumple en este caso, si es necesario reformúlela:

____

____

____

____

9.7 Segundo teorema de funciones integrables.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

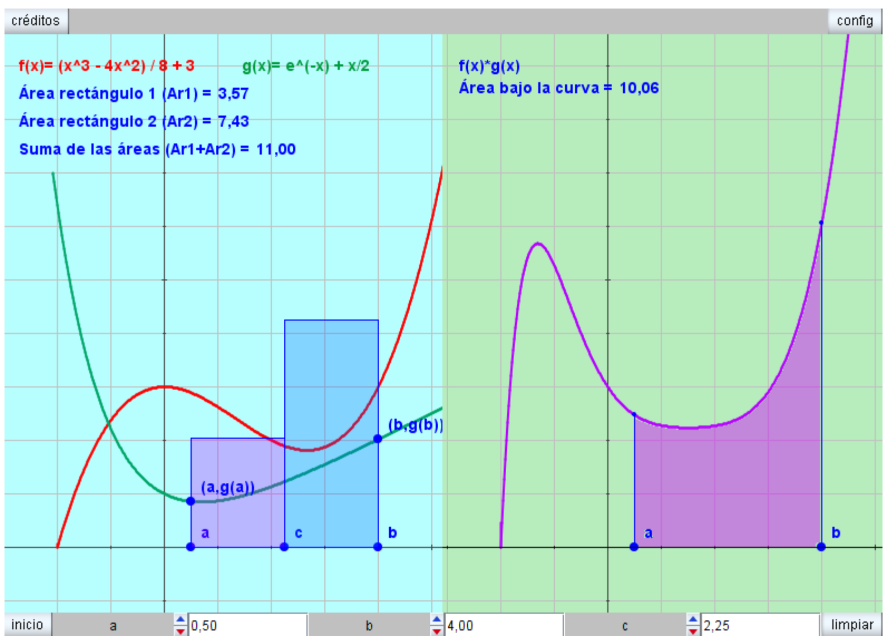
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Segundo Teorema del valor Medio para funciones Integrables

David Morales y Julián Gloria

Objetivo: deducir la interpretación geométrica del segundo Teorema del Valor Medio para funciones integrables.

Dirigido a: estudiantes de Cálculo integral.

Primera parte:



Gráfica 56 Pantalla del applet para el Segundo Teorema Del Valor Medio para Integrales

1. En la pantalla de la izquierda identifique las dos funciones que se presentan, ¿Qué características logra reconocer de estas funciones?

____

____

2. En la pantalla de la derecha se encuentra la función $h(x)$ que es el producto de las funciones de la pantalla izquierda, es decir $h(x) = f(x) * g(x)$ describa cuáles características tiene esta función.

____

____

3. Identifique el área bajo la curva de la función $h(x)$.
4. Identifique los dos rectángulos de la pantalla de la izquierda con sus respectivas áreas y la suma de éstas.
5. Mueva el punto c a través del intervalo $[a, b]$, ¿qué relación encuentra entre la suma de las áreas de los rectángulos de la izquierda y el área bajo la curva?

____

____

____

6. Mueva los puntos a y b de tal manera que se cumple que ambos sean positivos o ambos negativos.
7. Mueva nuevamente el punto c a través del intervalo $[a, b]$, ¿se mantiene la relación encontrada en el ítem 5?

____

____

____

____.

8. Repita el procedimiento con varios intervalos y verifique que la relación hallada se cumple en cada caso, ¿qué puede concluir?

____

____

____

____

Segunda parte:

9. Identifique la base de cada uno de los rectángulos:

   Base Rectángulo 1: _____

   Base Rectángulo 2: _____

10. ¿La altura del rectángulo 1 es mayor que $g(a)$?, ¿siempre?

11. ¿La altura del rectángulo 2 es mayor que $g(b)$?, ¿siempre?

12. Aplique el teorema del valor medio para integrales a cada uno de los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ a la función $f(x)$ y responda las preguntas:

Teorema del valor medio para integrales aplicado a $f(x)$ en el intervalo a, c

Si f es continua en $[a, c]$, para un cierto d de $[a, c]$ se tiene:

$$\int_{A}^{C} f \; x \; dx = f \; d \quad c - a \quad = x_1$$

Para algún intervalo $[a, c]$ (el que usted escoja),

¿Encuentra alguna relación entre x_1, $g(a)$ y la altura del rectángulo?

Sugerencia: tome el intervalo [0,1], halle x_1, es decir $\int_{A}^{C} f \; x \; dx$ y halle el punto $(d, f(d))$ para el cual el área del rectángulo es igual al área bajo la curva.

13. De la misma manera que el ítem anterior aplique el TVM para integrales, al intervalo $[c, b]$, halle x_2, ¿encuentra alguna relación entre x_2, $g(b)$ y la altura del rectángulo?

- Con base en lo realizado en la primera y segunda parte, formule una conjetura:

9.8 Integrales dobles.

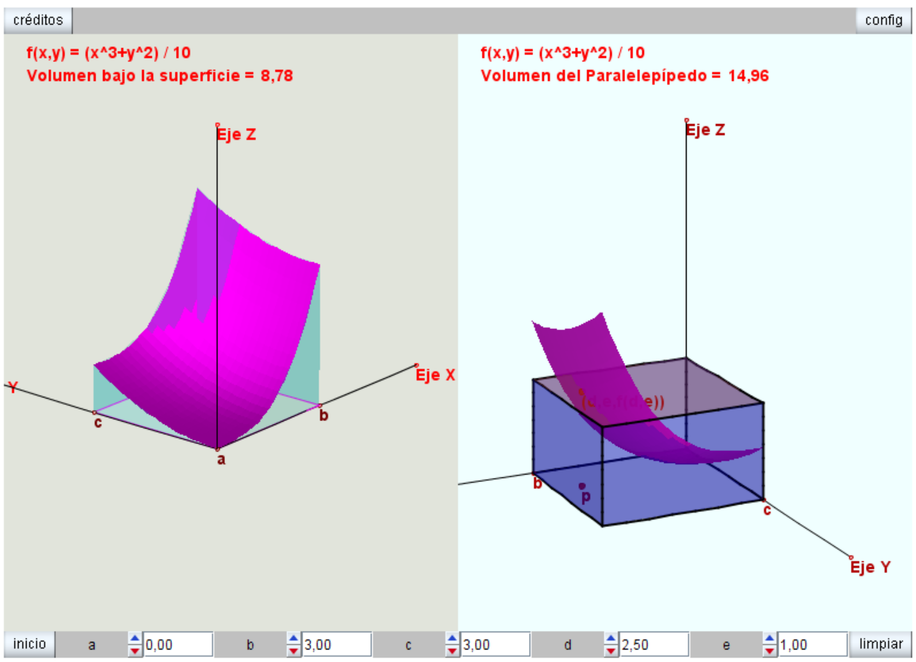
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
TVM para integrales dobles
David Morales y Julián Gloria

Objetivo: deducir la interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio para integrales dobles.

Dirigido a: estudiantes de Cálculo en Varias Variables.

Applet



Gráfica 57 Pantalla del applet para el Teorema Del Valor Medio para Integrales dobles

1. Identifique la superficie y los volúmenes que se presentan tanto en la pantalla izquierda como en la pantalla derecha.
2. Vea la función desde distintos ángulos. Para ello ubique el puntero sobre la pantalla del lado izquierdo y oprima clic izquierdo mientras mueve el mouse, realice el mismo procedimiento en el lado derecho.
3. En la pantalla del lado derecho Identifique el punto p con su respectiva imagen.

4. Mueva el punto p mediante los controles d y e presentados en la parte inferior, identifique cuál control corresponde al eje x y cuál corresponde al eje y.
5. Reconozca la base y la altura del paralelepípedo presentado en la pantalla derecha.

   Base: ______

   Altura: ______
6. Mueva el punto p, es posible obtener una altura específica para la cual el volumen del paralelepípedo sea la misma (o bastante aproximada) a la del volumen bajo la superficie presentada en la pantalla derecha:

   ____

   ____

   ___.
7. Mueva los puntos a, b y c; nuevamente vea la función desde distintos ángulos ¿qué ocurre?

   ____

   ____

   ____

   ____
8. Repita el procedimiento realizado en el ítem 6, ¿ocurre lo mismo?, formule una conjetura:

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____.
9. Ubique la función en varios intervalos, para cada uno de ellos verifique si existe un paralelepípedo que tenga el mismo volumen que el volumen bajo la superficie.

   ____

   ____

   _______________________________________.
10. Con base en lo realizado en el punto anterior compruebe su conjetura y si es necesario reformúlela:

9.9 Funciones reales de varias variables.

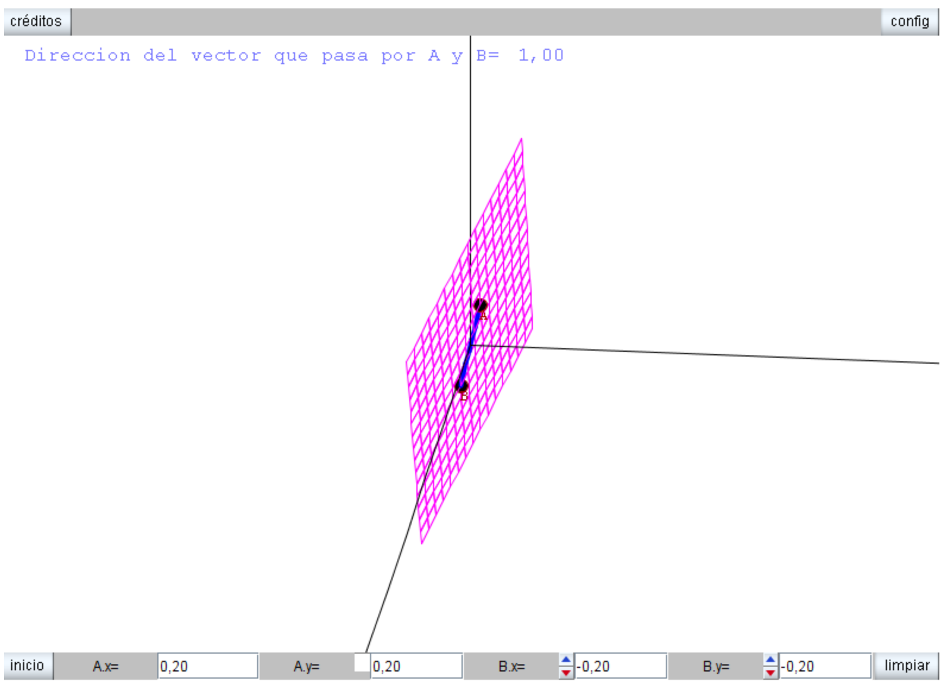
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
TVM funciones Reales de Varias Variables
David Morales y Julián Gloria

Objetivo: Deducir el Teorema del Valor Medio para Funciones Reales de Varias Variables.

Dirigido a: Estudiantes de Cálculo en Varias Variables.

En esta pantalla aparece la superficie $f(x,y) = 2x + 2y$



Gráfica 58 Pantalla del primer applet para el Teorema Del Valor Medio para Funciones reales de Varias Variables

1. ¿Cuál es la derivada direccional de la recta tangente a la superficie en algún punto con dirección del segmento AB? _______________
2. ¿Es posible encontrar un punto contenido en el segmento AB tal que el valor de la derivada direccional (con dirección al vector AB) sea igual a $f(A) - f(B)$? ¿este punto es único? _________

3. Cambie las coordenadas de los puntos A y B y responda nuevamente las preguntas anteriores.

____

____.

4. ¿Importa cuáles son las coordenadas de A y B o siempre serán las mismas las respuestas a las preguntas anteriores?

____

____

____.

Para la pantalla 2

En estas pantallas aparece la superficie $f(x, y) = 1 - x\text{^}2 - y\text{^}2$.

1. Cambie las coordenadas de A y B de tal forma que el segmento AB quede contenido en la superficie.
2. ¿Es posible encontrar un punto C de tal forma que la tal que el valor de la derivada direccional (con dirección al vector AB) sea igual a $f(A) - f(B)$?
3. Repita el numeral anterior con otras coordenadas para A y B pero que el segmento AB siga contenido en la superficie
4. Cambie las coordenadas de A y B de tal forma que el segmento ya no este contenido, ¿tiene sentido el número que representa la derivada direccional cuando C esta por fuera de la superficie?

   ____

   ____.

5. Si todo el segmento no está contenido en la superficie ¿es posible encontrar algún punto C sobre la superficie de tal forma que el valor de la derivada direccional (con dirección al vector AB) sea igual a $f(A) - f(B)$? ¿por qué?

   ____

   ____

   ____.

6. A partir de los resultados obtenidos en los numerales anteriores formule una conjetura para funciones reales en varias variables.

10. CONCLUSIONES

- Una hipótesis que se tenía inicialmente era que las diferentes presentaciones del Teorema del Valor Medio tenían alguna relación más allá del nombre, después de haber revisado la historia del Teorema del Valor Medio es posible darse cuenta que cada teorema (tratados en la reseña histórica) tuvo un origen distinto a los demás, algunos surgieron por la necesidad de demostrar diferentes teoremas como el "Teorema Fundamental del Cálculo", mientras que otros surgen como generalización de otros teoremas ya sea de R^n o para números complejos; así mismo es importante notar que no es fácil encontrar apartados históricos para cada uno de los teoremas, en cualquier libro de historia de las matemáticas tratan únicamente el Teorema de Rolle y el Teorema del Valor Medio para Funciones Derivables pero como se mencionó anteriormente por su importancia en la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo.

- El estudio de las funciones complejas es atrayente, en particular para el Teorema del Valor Medio, un trabajo de grado dedicado a este teorema en funciones complejas sería un trabajo bastante interesante, si es de interés particular de algún estudiante de un área relacionada con las matemáticas.
- Un objetivo importante que se logró en este trabajo fue realizar una recopilación de la demostración e interpretaciones geométrica de cada uno de los distintos Teoremas del Valor Medio, para que cualquier persona que desee estudiar alguna de estas pueda tomar este documento como base de consulta.
- El desarrollo de guías de trabajo para la deducción de las diferentes interpretaciones geométricas del Teorema del Valor Medio en las distintas presentaciones es un trabajo que requiere mucha preparación y análisis, las guías de trabajo presentadas en este trabajo pueden ser adaptados y modificados para un mejor uso. Acompañados con los applets pueden llegar a ser una propuesta muy interesante en el aula.
- La elección de esta temática no fue de forma aleatoria, uno de los propósitos personales para el estudio de las diferentes presentaciones del TVM era reforzar las temáticas del cálculo, para el correcto análisis de estas presentaciones. Se pudo ver en el trabajo que fue

necesario aplicar conocimientos desde pre-calculo hasta cálculo en varias variables, adicional un tema de análisis en específico de funciones complejos que, aunque no fue profundo, desarrolló un gran interés en los autores.

- Para nadie es desconocido que el uso de tecnologías en el aula favorece en gran medida la comprensión de algunas temáticas, el aprender a utilizar un programa como Descartes 2.0 se puede ver como un logro de aprendizaje, ya que este es diferente a todos los demás programas conocidos por los autores, las herramientas e instrucciones necesarias para el desarrollo de un applet es diferente e involucra un conocimiento matemático muy amplio.

11.BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T. (1967). *Calculus. Volumen 1. Cálculo con funciones de una variable con una introducción al algebra lineal*. Editorial Reverté.

Apostol, T. (1985). *Calculus. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades (2)*. Editorial Reverté.

Boyer, C. (1992). *Historia de la matemática*. Alianza editorial.

Collete, J. (1973).*Historia de las matemáticas (*2).

Concha, M; Cornejo, C; Villalobos, E. (2005). Integrales dobles y triples. Universidad de Santiago de Chile.

De la Cruz, R. (2010). *Derivación, el Teorema de Rolle y del Valor Medio para funciones de una Variable Compleja. Revista Sigma, 10 (1).* Pag. 32-37 http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulos/Vol´umenXNo1/3.pdf

Evard, F; Jafari; A. (1992*). Complex Rolle's theorem, Amer. Math. Monthly*, 99.pp 858-861.

Gonzales, P. (1995). *Las técnicas del cálculo: Fermat Wallis y Roberval.*

Ivorra, C.. (2002). *Funciones de Variable Compleja*.

Krasnov, M; Kiseliov, A; Makarenko, G. (1976). *Funciones de Variable Compleja, Cálculo Operacional y Teoría de la Estabilidad*. Editorial Reverté

Leithold, L. (1982). *El Cálculo con Geometría Analítica*. Editorial Harla Harper & Row Latinoamericana

Pemba, J-P; Davies, A; Muoneke, N. (2007). *Complexification of Rolle's Theorem, Applications and Applied Mathematics (AAM): An International Journal*, 2(1).

Polya, G; Latta, G. (1976). *Variable Compleja*. Editorial Limusa.

Spivak, M. (1992). *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté.

Stewart, J. (2008*). Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años. Barcelona: Crítica.*

Tromba, A; Marsden, J. (1988). *Cálculo vectorial.* Editorial Addison Wesley Iberoamericana.