

Estudio de Representaciones de Funciones Polinómicas en el Plano PAR

Laura Valentina Moreno Sánchez

Universidad Pedagógica Nacional

1444756: Trabajo de Grado

Prof. Natalia Morales Rozo

22 de mayo de 2023

Dedico este trabajo a:

A mi familia, por el apoyo al camino que he escogido.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente a todas las personas que me acompañaron en este proceso.

A mis padres y a mí hermana por ser pilares y soporte. Por su apoyo y confianza, porque siempre han acompañado mi camino.

A mis abuelos, por cuidar y estar pendientes de mí, por sus deseos sinceros que nacen del corazón para mi bienestar.

A mi asesora, Natalia Morales, por su orientación a lo largo de este trabajo, por brindarme sus herramientas y experticia en este ejercicio.

A mis amigos, por haber llenado mi carrera de risas y buenas memorias, por haber estado ahí en cada altibajo.

CONTENIDO

Resumen	9
Introducción	10
Capítulo I. Preliminares.....	12
Justificación	12
Objetivos.....	15
Objetivo General.....	15
Objetivos Específicos.....	15
Aspectos metodológicos	15
Elementos sobre la metodología	16
Fases del estudio	19
Capítulo II. Marco de referencia	21
Noción de representación	21
Conocimiento del profesor de matemáticas.....	26
Conocer las Matemáticas	27
Experimentar las matemáticas en acción	28
Saber de matemáticas.....	28
Saber aprender matemáticas	29
Recursos tecnológicos en la práctica docente.....	30
Plano PAR	31
Estudio de funciones polinómicas en el plano cartesiano	32
Función lineal y afín	34
Función cuadrática	35
Función cúbica	37

Funciones pares y funciones impares	39
Capítulo III. Estudio de funciones polinómicas en el plano PAR.....	40
Función lineal y afín	40
Función cuadrática.....	53
Función cúbica.....	62
Funciones pares e impares	81
Funciones pares.....	81
Funciones impares	83
Capítulo IV. Resultados y conclusiones.....	84
Aspectos metodológicos	84
En relación con los objetivos específicos	85
En relación con el objetivo general	88
Experiencia profesional y personal qué dejo el trabajo	89
Referencias bibliográficas	92

Tablas

Tabla 1 <i>Interacción entre las representaciones</i>	23
Tabla 2 <i>Valor m en la primera simetría de puntos.....</i>	45
Tabla 3 <i>Segunda simetría de puntos.....</i>	47
Tabla 4 <i>Valores de la recta asintótica con la función $y = ax^2$.....</i>	55
Tabla 5 <i>Valores de la recta asintótica de la función $y = ax^2 + bx$</i>	56
Tabla 6 <i>Valores de la recta asintótica de la función $y = ax^2 + c$</i>	57
Tabla 7 <i>Simetría de los valores \ddot{m}, \ddot{b} y la intersección de la recta asintótica con el eje y</i>	58
Tabla 8 <i>Ejemplos para encontrar \ddot{b}</i>	60
Tabla 9 <i>Distinta forma de escritura del parámetro \ddot{b}</i>	60
Tabla 10 <i>Resultados de $y = x^3 + bx^2$</i>	73
Tabla 11 <i>Resultados de $y = 2x^3 + 7x^2 + cx$.....</i>	74
Tabla 12 <i>Resultado de b con la función $y = 5x^3 + bx^2$</i>	75

Figuras

Figura 1 Plano PAR	32
Figura 2 Comportamiento de las funciones pares e impares	39
Figura 3 Coordenadas $y = 1x$	40
Figura 4 Función $y = 2x$	43
Figura 5 Función lineal primera secuencia de pendientes	45
Figura 6 Función lineal segunda secuencia de pendientes	48
Figura 7 Determinar J con el plano cartesiano	49
Figura 8 Representación para encontrar m	50
Figura 9 Ecuaciones de las rectas.....	51
Figura 10 Intersecciones de las rectas coordenadas de la función $y = x^2$	54
Figura 11 Representación cuadrática constante de la función cuadrática.....	56
Figura 12 Recta asintótica de la función $y = ax^2 + bx + c$	58
Figura 13 Sucesión de puntos que determinan una recta perpendicular	59
Figura 14 Representación secuencia de puntos $y = ax^3 + bx^2$	64
Figura 15 Representación secuencia de puntos $y = -ax^3 + bx$	64
Figura 16 Curvas de rectas coordenadas intersecadas	69
Figura 17 Representación curvas $y = -ax^3 - bx^2$	70
Figura 18 Representación curvas de $y = ax^3 - bx$	70
Figura 19 Representaciones de curvas con $a > 0$ y $0 < c < 1$	71
Figura 20 Coordenadas Paralelas	72
Figura 21 Puntos $(0, t_1)$, $(0, -t_1)$, $(f, y(t_1))$ y $(f, y(-t_1))$	77
Figura 22 Representación con puntos T_k	82

Figura 23 Representación con puntos P_k 82

Figura 24 Representación con P_k 82

Figura 25 Representación elipse con P_k 83

Resumen

Este trabajo surge por la inquietud de estudiar las funciones polinómicas en un plano diferente al usual, plano PAR -*Parallel Axes Representation-* (Nachmias y Arcavi, 1990; citado en Morales Rozo, 2021). Para ello, se tuvieron en cuenta referentes metodológicos (la ingeniería didáctica, el método inductivo y deductivo) y conceptuales. Estos últimos son: la noción de representación y la influencia que está tiene en el aprendizaje, el conocimiento del profesor de matemáticas siguiendo el modelo de Stacey (2008) y lo expuesto de las funciones polinómicas en algunos textos de educación secundaria y media.

Como resultados de este estudio se identificaron las representaciones graficas que tienen las funciones lineales, cuadráticas y cúbicas, así como su expresión algebraica en el plano PAR. Además, se logró generalizar comportamientos que identificaban a las funciones pares e impares en dicho plano. Para ello, se desarrolló un programa en el *software* GeoGebra que permite reconocer el comportamiento y las particularidades de cada función.

Palabras clave: Plano PAR, funciones polinómicas, noción de representación, conocimiento del profesor, GeoGebra.

Introducción

El presente documento es una monografía producto de la formación académica de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional [UPN]. Este trabajo tiene como finalidad estudiar las representaciones de funciones polinómicas de $R \rightarrow R$ en un sistema con ejes paralelos, llamado plano PAR -*Parallel Axes Representation-* (Nachmias y Arcavi, 1990; citado en Morales Rozo, 2021). En este sentido, este documento se organiza a partir de cuatro capítulos: preliminares, marco de referencia, estudio de funciones polinómicas en el plano PAR, y resultados y conclusiones.

El primer capítulo denominado *Preliminares* contiene la justificación del proyecto que expresa las razones por las cuales se inició esta investigación, los objetivos generales y específicos que destacan los aspectos importantes que se quieren abordar con el trabajo, y la metodología de investigación, que se utilizó para dar orden y coherencia al estudio: la ingeniería didáctica, y el método inductivo y deductivo. De esto último, adicionalmente, se planteó cómo se relaciona cada aspecto metodológico con el estudio de las funciones en el plano PAR y la construcción misma del trabajo llevado a cabo.

El segundo capítulo, denominado *Marco de referencia*, está dividido en cinco apartados que corresponden con: (1) la noción de representación, donde se esbozará su importancia en relación con el campo de la Didáctica de las Matemáticas; (2) la formación y el conocimiento que el profesor de matemáticas debe tener a favor de su labor docente, según lo propuesto por Stacey (2008); (3) el uso de las TIC para el aprendizaje de las Matemáticas; (4) las características propias del plano PAR, (5) y lo expuesto en algunos libros de texto sobre el estudio usual de las funciones polinómicas en la educación secundaria y media.

El tercer capítulo se centra en el estudio de las funciones polinómicas en el plano PAR. El cual incluye, la representación gráfica y algebraica de las funciones polinómicas en el plano PAR, y las expresiones que permiten identificar y caracterizar la transformación de cada función polinómica del plano cartesiano al plano PAR y viceversa. Es de mencionar que lo presentado en este capítulo contó con el apoyo del *software* GeoGebra.

En el cuarto capítulo se encuentran los resultados y conclusiones propios del presente trabajo. De esto, es de destacar los aportes del mismo en la formación académica de los futuros profesores de matemáticas en relación con los errores que se tuvieron a lo largo de su desarrollo para la consecución de los objetivos propuestos, así como el uso del *software* GeoGebra y los procesos inmersos durante el estudio matemático.

Finalmente, es de mencionar que un producto adicional fue el diseño de un programa en GeoGebra ubicado en el siguiente enlace <https://www.geogebra.org/m/wkapgb52>, dicho programa se utilizó de manera transversal en todo el planteamiento y estudio de las funciones polinómicas.

Capítulo I. Preliminares

En este capítulo se encuentra la justificación del trabajo relacionada con el interés académico en algunas asignaturas de la Licenciatura y con la importancia de la noción de representación en la Historia de las Matemáticas, su articulación con el objeto matemático a estudiar y la importancia del objeto dentro del currículo escolar colombiano.

También se presentan los objetivos propuestos para el estudio y el desarrollo del mismo; y los aspectos metodológicos a usar en el trabajo (ingeniería didáctica, y método deductivo e inductivo), continuando con la aplicación de ellos en cada parte del estudio y finalizando con las fases de desarrollo y los recursos empleados.

Justificación

De los cursos de la línea de Geometría y particularmente, del espacio académico de Geometría Analítica de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN, se generó un interés personal y profesional por las propiedades y características que tienen las Figuras geométricas en el plano cartesiano, aclarando que la representación no solo hace parte de la Geometría, sino que, es transversal a todas las ramas de las Matemáticas; por ello, se hace referencia a la noción de representación (Rico et al., 2000) como uno de los asuntos a estudiar.

A lo largo de la Historia de las Matemáticas, la noción de representación ha estado inmersa. Particularmente, a principios del siglo XVII con la obra del matemático Rene Descartes, *La Géometrie*, se muestra la relación que existe entre la construcción de curvas geométricas y la solución de ecuaciones algebraicas (Esteve, 2001). Otro momento en el cual la noción de representación dio un giro fue en 1960, cuando se dio la necesidad de no utilizar representaciones como forma de demostración (Viviente, 1988), especialmente en el Álgebra y la Geometría.

En el campo de la Filosofía de las Matemáticas la noción de representación se ha estudiado por pensadores como Kant, quien la utilizó como una base epistemológica en su crítica a la razón pura y por Platón en el mito de la caverna donde el conocimiento es la representación del mundo de las ideas (Rico, 2009); generando así, que esto se utilice como una herramienta que ayuda a la comprensión y al conocimiento de las Matemáticas.

Por otro lado, en el campo de la Didáctica de las Matemáticas las representaciones han sido de gran importancia. Esto debido a que es posible abstraer y analizar los conceptos y objetos matemáticos a partir de sus diferentes representaciones (algebraicas, gráficas o simbólicas) que estos puedan tener. Además, brindan la facilidad de recordar, razonar y comunicar ideas; por tal motivo, las representaciones cumplen un papel intermediario entre el concepto y el sujeto. Señalando así lo expuesto por Rojas (2012), que “todo concepto matemático remite a un no-objeto y por tanto no son posibles las referencias ostensivas y hay una obligatoriedad a servirse de representaciones” (p. 2).

Con base en lo anterior y otros elementos de las Matemáticas y las matemáticas escolares, se decidió que el asunto matemático a estudiar es la representación gráfica de funciones polinómicas en un sistema de representación no-usual (diferente al plano cartesiano). Particularmente, el sistema de representación a utilizar es el plano PAR, el cual se caracteriza por tener los ejes x y y paralelos, lo que conlleva a que las coordenadas tengan una representación diferente haciendo que sean rectas y no puntos. En este sentido, las funciones polinómicas tendrán distintas representaciones a las obtenidas y estudiadas usualmente en el plano cartesiano.

En lo que se refiere al estudio de las funciones, en el currículo colombiano el pensamiento variacional tiene un proceso más lento, ya que se diferencia por tener una complejidad en la comprensión del concepto de función y todo lo que ella implica, que es: la magnitud que varía y la que permanece constante, la dependencia e independencia de variables y la razón de cambio.

Además, del reconocimiento propio de sus características y del comportamiento de sus diferentes representaciones (MEN, 2006). Sin embargo, se evidencia la importancia que tiene la función en la resolución de problemas, ya que desarrolla el análisis, la modelación y la argumentación de los estudiantes al momento de explicar distintos fenómenos no solo del contexto matemático, sino, de otras ciencias (ej. sociales, física y biología).

Así, como el plano cartesiano es estudiado para la comprensión de funciones polinómicas a partir sus representaciones gráficas, se espera que con el plano PAR ocurra lo mismo, de tal manera que se puedan evidenciar las variaciones que presentan las funciones cuando se realizan modificaciones al plano de representación; permitiendo identificar las fortalezas, y quizás debilidades, al momento de utilizar la representación en los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados con estos objetos de estudio a nivel de la educación básica secundaria y media. De tal manera, se pretende tener un panorama más amplio, que este basado en la experiencia y en el estudio de las funciones con la finalidad de tener un acercamiento a posibles cuestionamientos que se presentan en la clase de matemáticas al abordar la representación de funciones y dar una mejor articulación entre las funciones y sus diferentes representaciones.

Por otra parte, y con base en los intereses académicos presentados se plantea la pregunta problema a tener en cuenta: ¿cuáles son las representaciones de las funciones polinómicas en el plano PAR? De la anterior pregunta, surgen los siguientes cuestionamientos, a los que también se espera dar respuesta: ¿cómo está actividad matemática aporta a mi formación como futura profesora de matemáticas?; y ¿se podrán incorporar recursos tecnológicos para el estudio de las representaciones de las funciones polinómicas en el plano PAR? Si es el caso, ¿cómo, para qué y cuáles?

Objetivos

Para el estudio que se expone en el presente trabajo de grado se proponen los siguientes objetivo general y objetivos específicos, respectivamente.

Objetivo General

Estudiar las representaciones de funciones polinómicas de $R \rightarrow R$ en el plano PAR, teniendo en cuenta las propiedades y características de estas.

Objetivos Específicos

- Elaborar un marco de referencia que aluda al estudio del concepto de representación, de las funciones polinómicas de $R \rightarrow R$ en el plano cartesiano, y del plano PAR.
- Caracterizar e identificar las representaciones de las funciones polinómicas en el plano PAR.
- Escribir los resultados y conclusiones del estudio de las funciones polinómicas en el plano PAR, haciendo énfasis en cómo este tipo de estudios influyen en la formación de futuros profesores de matemáticas.

Aspectos metodológicos

La metodología tenida en cuenta para el desarrollo de este trabajo es la *ingeniería didáctica*, de la cual se presentan las características y fases que fueron utilizadas para darle al documento y al estudio realizado una mejor coherencia y cohesión. Además, se menciona la importancia que el método inductivo y deductivo tuvo para encontrar todos los resultados presentados a medida que se iba haciendo el estudio de cada función polinómica en el plano PAR.

Elementos sobre la metodología

Para este trabajo se toma la definición de ingeniería didáctica según Douady (1995) la cual dice “la ingeniería didáctica es el conjunto de secuencias [...] concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente para efectuar un proyecto de aprendizaje” (p. 61). La ingeniería didáctica como metodología de investigación empezó a surgir en Francia en los años ochenta, a partir de la necesidad de evidenciar la efectividad de las investigaciones educativas en la enseñanza y el aprendizaje de la escuela. De esta metodología, según Artigue (1995), se hace necesario resaltar que para la construcción de un proyecto se necesita de unas buenas bases conceptuales para la obtención de un nuevo conocimiento, además de tener la habilidad para la articulación adecuada de ellas dentro del proyecto.

Por su parte, Calderón y León (2012) dicen que esta metodología se caracteriza por tener una micro y una macro ingeniería, que surgen a través del análisis de las secuencias propuestas. La *micro ingeniería*, se evidencia cuando en la investigación se puede trabajar la complejidad de los fenómenos de manera local y precisa, observando la relación entre la enseñanza y el aprendizaje; y la *macro ingeniería* se basa en la comprensión de la micro ingeniería a través de la duración de la relación anteriormente mencionada.

Dentro de la ingeniería didáctica se destaca al proceso de validación como aquel análisis que se realiza *a priori* con los recursos didácticos que se van a implementar en la investigación, y el producto obtenido después de realizar las tareas (*momento a posteriori*). Así mismo, es necesario contrastar y validar las preguntas iniciales que se plantearon al inicio de la investigación con los resultados de esta para así generar las conclusiones. Esta es una de las principales características por las cuales se diferencia la metodología de la ingeniería didáctica con las demás, ya que sus análisis y conclusiones se hacen a través del estudio de casos como: el

análisis de tareas específicas de un determinado objeto matemático; entendiendo las tareas como aquellas que permiten generar y desarrollar habilidades en el proceso para alcanzar los aprendizajes del objeto, teniendo la posibilidad de enlazar los conocimientos macro y micro curriculares.

Adicionalmente, Artigue (1995) plantean que esta metodología concibe cuatro fases que le permiten al investigador distinguir cada proceso en la investigación. Las fases son: análisis preliminar, concepción y análisis *a priori*, experimentación, y análisis *a posteriori* y evaluación. A continuación, se presentan los elementos generales de dichas fases:

Fase de análisis preliminar: Esta fase se caracteriza por una búsqueda exhaustiva del campo epistemológico del objeto; de sus formas de enseñanza y los efectos de esta; y de la comprensión por parte de los estudiantes, teniendo en cuenta sus dificultades conceptuales y cómo estas impiden su proceso de aprendizaje. Además, se caracteriza por no estar en una parte específica del trabajo, aunque si se utiliza como base para el desarrollo del mismo en las otras tres fases.

Fase de concepción y análisis *a priori*: En esta fase el investigador identifica y toma la decisión de trabajar sobre un determinado grupo de variables, estas variables pueden ser *macro didácticas* como la organización global, y *micro didácticas* enfocadas al análisis de la secuencia de tareas. A su vez, en esta fase se tiene el análisis *a priori* que se basa en el estudio del conjunto de hipótesis de las cuales se observa el proceso de aprendizaje en cada una de las fases.

Fase de experimentación: En esta fase se pone en práctica las secuencias de tareas y a partir de ello, se hace la recolección de datos que se enfocan en las variables determinadas.

Fase de análisis *a posteriori* y evaluación: Esta fase constata la validación de las hipótesis generadas en la investigación con los datos obtenidos en la experimentación, la cual se realiza teniendo en cuenta el análisis del contenido.

A su vez, los métodos inductivos y deductivos se ven evidenciados en la metodología del documento, ya que a partir de ellos se hace posible llegar a conclusiones de manera más efectiva y práctica. Particularmente, el método inductivo es de carácter ascendente ya que permite llegar a una generalización a través de casos particulares evidenciando sus características, propiedades y comportamientos (Abreu, 2014).

Por su parte, el método deductivo se caracteriza por estudiar la aplicación de las generalidades de un fenómeno a casos particulares o específicos, además, para este documento se ve lo mencionado por Samper et al. (2010) quienes clasifican una parte del razonamiento en Geometría como una deducción formal que cumple unas características, las cuales fueron aplicadas en el estudio:

- Aceptación de definiciones equivalentes y selección de la(s) más útil(es) para un proceso de demostración o en la resolución de problemas.
- Deducción de información nueva acerca de una Figura teniendo en cuenta información previa.
- Reconocimientos de cuándo y cómo utilizar elementos auxiliares en una Figura.

Ahora bien, para determinar los aspectos en los cuales se centró este estudio respecto a la metodología de la ingeniería didáctica, y los métodos deductivo e inductivo. Se destaca que, aunque no es un trabajo enfocado en el diseño e implementación de secuencias de tareas o de un proyecto de aprendizaje, si se realizó un estudio secuencial y coherente del objeto matemático: funciones polinómicas. Permitiendo poner en práctica los métodos deductivos e inductivos para encontrar y determinar las representaciones gráficas y algebraicas más adecuadas al objeto matemático. Además, de aprender a partir de la experiencia cómo son los procesos de aprendizaje

por los cuales pueden atravesar los estudiantes en su proceso formativo con dicho objeto matemático.

Fases del estudio

Este apartado se continuará con los elementos de la metodología haciendo referencia a los cuatro momentos que se tuvieron en cuenta para el desarrollo del estudio propuesto, realizado y presentado en este trabajo.

En el primer momento, se consultó información para sustentar a través de la Historia la importancia del objeto a trabajar en los campos de las Matemáticas y la Didáctica de la Matemáticas. Así mismo, se plantearon los objetivos general y específicos y se decidió la metodología a implementar para desarrollar de manera adecuada este documento.

Para el segundo momento, se buscó información sobre la noción de representación y la importancia que ésta tiene en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, además, se hizo necesario reconocer que conocimientos debía tener el profesor de matemáticas y cómo estos se ven reflejados en el aprendizaje de sus estudiantes. Con base en ello y la importancia de los recursos tecnológicos en el aula, se buscaron artículos que estuvieran relacionados con las fortalezas y debilidades que tales recursos tienen en la enseñanza y aprendizaje ya que para este trabajo se hizo uso de un software. Para el uso del software se necesitó reconocer las características y propiedades que tiene el plano PAR, distinguiendo principalmente sus ejes y sus coordenadas.

Para finalizar se tuvo en cuenta el objeto matemático a estudiar: funciones polinómicas; se realizó una búsqueda y revisión de referentes teóricos como lo fueron textos diseñados para la educación básica secundaria y media, y artículos centrados en las funciones destacando sus características y representaciones en el plano cartesiano, las cuales permitieron dar solución y

orden al estudio. Lo anterior con la finalidad de poder construir lo que se denominó en este documento como el marco de referencia.

El tercer momento, hace referencia al estudio de las funciones polinómicas en el plano PAR, el cual se desarrolló de la misma manera como se expuso en el marco de referencia: función lineal, cuadrática, cúbica y pares e impares. En cada una se realizó un análisis detallado del comportamiento de las funciones empezando con ejemplos específicos y encontrado de allí las generalidades que eran definidas a partir de las modificaciones hechas a los parámetros. También, se identificaron las representaciones gráficas y algebraicas, encontrando particularidades en cada una de ellas basadas en las representaciones implementadas en el plano cartesiano.

Dichas representaciones se lograron identificar con ayuda del *software* GeoGebra, sin embargo, al principio se trazaban las funciones de manera manual, es decir se hacían las coordenadas punto a punto, lo cual no permitía ver un comportamiento de la función especialmente de la función lineal puesto que fue la primera en estudiarse. Por tanto, se decidió crear un programa que permitiera graficar cualquier cantidad de coordenadas de manera inmediata según la función que se estuviera analizando. Se aclara que la elección del *software* fue de carácter personal, ya que era el más usado y conocido por la FEM.

Por último, el cuarto momento, corresponde al capítulo de resultados y conclusiones en el cual se articularon las soluciones obtenidas, los objetivos propuestos, y los logros y dificultades que se tuvieron a lo largo del estudio. Además, los aprendizajes que dejó este trabajo en la formación profesional y personal de la FEM.

Capítulo II. Marco de referencia

El marco de referencia en correspondencia con lo que se mencionó en la introducción está dividido en cinco apartados. El primero alude a la noción y concepto de representación, su historia, su uso e importancia en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, y los tipos de representaciones que existen. El segundo apartado, estará relacionado con el conocimiento que debe tener el profesor de matemáticas para la enseñanza de las matemáticas a través de las cuatro componentes propuestos por Stacey (2008).

Por su parte, en el tercer apartado se encuentra la articulación de los recursos tecnológicos como facilitadores para el aprendizaje y la manipulación de los objetos matemáticos. Posteriormente, en el cuarto, se presentan las características del plano PAR y sus respectivas diferencias con el plano cartesiano. Finalmente, en el último, se encontrará el estudio llevado a cabo sobre las funciones polinómicas en el plano cartesiano en relación con la enseñanza y el contexto de la educación básica secundaria y media.

Noción de representación

La noción de representación es un concepto que desde los años ochenta, se ha resaltado como aquella traducción que se hace por medio de signos, símbolos, gráficas o expresiones que dan la facilidad de comunicar y manifestar: ideas, procedimientos y conocimientos. Por ello tienen un papel fundamental en la comprensión e interpretación de procesos matemáticos ya que siguiendo a Radford (1998, citado en Rico, 2009), mediante “el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas, de ahí su interés didáctico” (p. 3).

Para un buen entendimiento y construcción de un concepto matemático se debe tener claridad y hacer una distinción entre su representación y el objeto, lo cual se logra a través de los dos grandes tipos de representación: externas e internas. Las representaciones externas permiten la comunicación de las ideas matemáticas y sus diversas formas, que son: enunciados, formulas, gráficas y Tablas. Sin embargo, para su existencia se ve la necesidad de una representación interna que le permita y le facilite a la mente razonar y reflexionar sobre el objeto. Otro autor que hace referencia a las representaciones externas e internas es Kaput (1992, citado en Rico, 2009) quien considera esa distinción entre el mundo de las operaciones mentales y las operaciones físicas, las cuales permiten a la mente abstraer todas las cualidades y características que tiene una representación específica del objeto y además a distinguir cuál es la que más le conviene para una situación determinada.

Haciendo énfasis en la distinción que se debe tener entre el concepto y el objeto matemático en las representaciones externas, se hace necesario identificar que existen diferentes tipos de representaciones y de cada una se pueden extraer características propias del objeto matemático. Por ello, es importante resaltar que, en el campo educativo entre más representaciones pueda identificar el estudiante, mejor será su comprensión e interpretación del objeto ya que al tener tantas representaciones como sean posibles, se van generando en el estudiante capacidades que indirectamente se fortalecen en la manipulación de las representaciones. Al respecto, en la Tabla 1 se plasma la propuesta que Burkhard et al. (1993, citados en Rico et al., 2000) propusieron para explicar a través de verbos las habilidades que se obtienen cuando se interactúa entre las representaciones.

Tabla 1*Interacción entre las representaciones*

Hasta Desde	Descripciones verbales	Tablas	Gráficas	Fórmulas
Descripciones verbales	X	Medición	Destrezas de modelización o bosquejo descriptivo	Modelización analítica
Tablas	Lectura	X	Trazado	Ajuste
Gráficas	Interpretación	Lectura	X	Ajuste de curvas
Fórmulas	Reconocimiento de parámetros	Cómputo	Bosquejo	X

Nota: Tomado de Burkhard, et al. (1993, citados en Rico et al., 2000, p. 105)

Otra forma en la que se distinguen las representaciones externas son los sistemas de representación simbólica y de representación gráfica. Las representaciones simbólicas están enfocadas a la programación, caracterizándose por una sintaxis que es de forma clara y ordenada, además de ser discretas y de orden alfanumérico. Las representaciones gráficas son aquellas que tienen una sintaxis que se rige a partir de reglas de composición y convenios de información en el campo matemático, las cuales son continuas y de tipo Figurativo. Duval (1993, citado en Rico et al., 2000)

Duval (s.f, citado en Rojas, 2012) resalta tres maneras para identificar los componentes de una representación: el objeto representado, el contenido de la representación y la forma de la

representación; los cuales se pueden presentar en registros discursivos y no discursivos. Los registros discursivos tienen como base el lenguaje natural y el formal utilizados especialmente para las definiciones, teoremas, cálculos, entre otros. Por otro lado, los no discursivos son las Figuras geométricas y los sistemas coordenados, en los cuales se pueden hacer combinaciones o cambios generando habilidades en los estudiantes.

Teniendo en cuenta la forma de las representaciones, en la resolución de problemas se ve la importancia del uso y manipulación de algunas o todas las representaciones del o los objetos matemáticos, lo cual tiene beneficios muy positivos ligados al desarrollo cognitivo y procedural del estudiante. Es por lo que Duval (1998, citado en Oviedo et al., 2012, p. 32) clasifica tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis, entendiendo la semiosis como la elaboración y manipulación de una representación:

1. La presencia de una representación identificable.
2. El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada.
3. La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...”, es decir, con dos tipos de registros disímiles, con diferentes representaciones.

Ahora bien, entendiendo que el aprendizaje del conocimiento matemático se basa en el concepto de estructura, en donde se estudian las operaciones, relaciones y propiedades entre los objetos matemáticos, son dichas relaciones las que permiten hablar de los sistemas de representación. Así, que siguiendo a Duval (s.f, citado en Rojas, 2012),

Una representación jamás puede ser considerada y analizada sin hacer referencia al sistema a través del cual fue producida. Las especificidades del sistema (físico,

orgánico o semiótico) que permitieron la producción de una representación, son las que determinan *la relación entre el contenido y el objeto representado*. El contenido de las representaciones de un mismo objeto cambia en función del sistema por el cual fueron producidas. (p. 2)

Con base en lo anterior, las representaciones son indispensables en la enseñanza y el aprendizaje de los objetos matemáticos, porque hacen visible la naturaleza de estos haciéndolos más accesibles al conocimiento e interpretación no solo de los estudiantes en su proceso de aprendizaje, sino también en el que hacer docente. Además, se resalta la importancia del contexto en el que está inmerso el objeto ya que permite dar un orden y guía en el uso de las representaciones y así poder generar un óptimo uso.

En ese sentido, según Rico et al. (2000), el conocimiento matemático en la educación escolar se divide en dos aspectos disciplinar y cognitivo. En el aspecto *disciplinar* se encuentran los cinco pensamientos estipulados en los documentos curriculares nacionales, el aspecto *cognitivo* evidencia la articulación entre los conceptos y procedimientos en el abordaje de una secuencia de tareas, entendiendo el concepto como el aspecto específico y el procedimiento como las diferentes formas de abordar las tareas. En este último, se tiene en cuenta la articulación entre los conceptos y los procedimientos inmersos para el desarrollo del pensamiento. Por ello, se hace relevante mencionar las subcategorías que tienen:

El concepto está dividido en tres niveles conceptuales hechos, conceptos y estructuras conceptuales. Los *hechos* son la unidad de información que está clasificada en términos, notaciones, convenios y resultados. Los *conceptos* son el conjunto determinado de hechos, que son representados a partir de las relaciones entre símbolos y signos. Las *estructuras conceptuales* ayudan a generar redes a través de una forma ordenada y clara de las relaciones entre los conceptos para la construcción del objeto matemático.

Los procedimientos, por su parte, también cuentan con tres niveles: destrezas, razonamientos y estrategias. Las *destrezas* pueden ser métricas, gráficas y de representación, donde se generan los cambios en las representaciones de un mismo objeto, teniendo en cuenta las reglas particulares de cada una. Los *razonamientos* pueden ser de tipo lógico-deductivo, inductivo o analógico los cuales ayudan a establecer relaciones entre los conceptos, a través de una secuencia de pasos debidamente argumentados. Las *estrategias* pueden cambiar según el razonamiento utilizado, sin embargo, estas se ejecutan teniendo en cuenta las representaciones del objeto y sus relaciones.

Finalmente, todo lo anterior se conecta con el trabajo realizado puesto que el objeto matemático que se estudiará refuerza el pensamiento variacional y sistemas algebraicos. Presentando la posibilidad, de establecer conexiones que permitan generar nuevas representaciones determinadas por el plano PAR, haciendo que el uso de su simbología sea una herramienta que ayude a expresar y a sintetizar ideas matemáticas. Así mismo, desarrolla las destrezas de tipo gráfico y de representación ya que permitirán encontrar patrones y regularidades que diferencian al objeto de un sistema de representación con otro.

Conocimiento del profesor de matemáticas

La formación y el conocimiento del profesor de matemáticas es muy importante ya que proporciona, entre otras cosas, las bases en el aprendizaje de los objetos matemáticos en los estudiantes. Por tanto, su dominio de los objetos no solo debe ser coherente y consistente con lo expuesto en el aula de clase, sino que debe tener en cuenta el avance que las matemáticas han tenido para poder involucrarlas adecuadamente en su discurso.

Con base en ello, se siguen los planteamientos realizados por Stacey (2008) enfocados en la formación docente para la enseñanza de las matemáticas, entre los cuales se destaca la interacción

productiva entre el saber matemático del profesor y la aplicación que debe hacer en el aula según lo estipulado en el currículo. Así y con la finalidad de profundizar en el conocimiento del profesor para la enseñanza del contenido matemático, Stacey (2008) plantea cuatro aspectos que se deben tener en cuenta:

- Conocer las matemáticas
- Experimentar las matemáticas en acción
- Saber matemáticas
- Saber aprender matemáticas

Conocer las Matemáticas

El *conocer las matemáticas* es saber los objetos matemáticos que se deben abordar entendiendo sus características y propiedades. Para ello, el profesor asimila su papel como eje fundamental no solo en el conocimiento matemático de sus estudiantes, sino, en la percepción que ellos tengan sobre las matemáticas. Por consiguiente, según Stacey (2008) la enseñanza se da con base en dos cosas: la primera es en las estructuras internas y externas del conocimiento, teniendo en cuenta que las relaciones que allí se generan permiten una mejor solución y claridad del problema. Y la segunda hace referencia al crecimiento constante que hacen las matemáticas para así reevaluar como se pueden articular con el currículo de matemáticas.

Lo anterior indica la buena preparación formativa que debe tener el profesor que le permita afrontarse de una manera más segura y decidida a las situaciones inherentes a la clase de matemáticas. En consecuencia, la formación universitaria debe estar relacionada con las áreas que se enseñan en la educación escolar, con la finalidad que el profesor pueda articular las matemáticas a enseñar con las aprendidas (CBMS -*Conference Board of the Mathematical Sciences*- citado en Stacey,2008).

Experimentar las matemáticas en acción

El *experimentar las matemáticas en acción*, es permitirle al profesor desenvolverse de la mejor manera, tanto discursiva como conceptualmente dentro del aula de clase con el objeto matemático. Sin embargo, para que el profesor tenga ese manejo del objeto en el aula, anteriormente debió tener experiencias cercanas que le permitieran desarrollar habilidades en la aplicación de los contenidos matemáticos. Para ello, Cooney y Wiegle (2003, citados en Stacey, 2008) dan tres principios para la aproximación de las matemáticas a enseñar en la formación de los futuros profesores:

Principio 1: Experimentar las matemáticas como una actividad polifacética.

Principio 2: Estudiar explícitamente sobre las matemáticas escolares y reflexionar al respecto.

Principio 3: Experimentar las matemáticas que ayuden a orientar los estilos de enseñanza de cada objeto matemático.

Con base en lo anterior, se debe tener en cuenta la importancia que tiene dentro de la formación docente las experiencias cercanas al aula de matemáticas, ya que son enriquecedoras, significativas y educativas las cuales van generando nuevas concepciones de su enseñanza y aprendizaje. A su vez, es de notar que quienes estudian las matemáticas son personas que no sólo les interesa entender su aplicabilidad, sino también su historia ya que le permite ver de manera más profunda su belleza, generando una mayor comprensión y utilidad del objeto a lo largo de los años (Stacey, 2008).

Saber de matemáticas

El *saber de matemáticas*, está relacionado con el conocimiento que es adquirido por parte del profesor de la historia del objeto matemático, y cómo lo utiliza o no de manera oportuna para

llevar a cabo su clase. Particularmente, la parte histórica genera en él una mirada crítica y filosófica de las matemáticas, además de permitirle ver el mundo de una manera diferente, a través de ellas. A su vez, se reconoce que la historia en el contexto escolar no se trata de manera profunda o en ocasiones se omite para dar continuidad a lo procedural, práctico y teórico (Stacey, 2008). Por tal motivo, se evidencia cómo la historia se ha relacionado más en el conocimiento que debe tener el profesor que con la enseñanza y aplicabilidad que se le puede dar en el contexto escolar.

En este aspecto, también se reconoce la importancia que los profesores estén pendientes de los avances matemáticos, para posteriormente articularlos en el aula con algún objeto o concepto matemático. Sin embargo, se presenta una dificultad en su implementación ya que por factores como: los conocimientos base que deben tener los estudiantes en algunos casos son precarios para esta nueva información, y que los avances que se presentan son muy técnicos y no permiten hacer conexión directa en la educación escolar (Stacey, 2008).

Saber aprender matemáticas

El *saber aprender matemáticas* se basa en la acción constante de aprender a aprehender, donde los profesores son autónomos en su proceso de aprendizaje matemático, siendo capaces de identificar que no todos los aspectos aprendidos en la práctica formativa y académica consolidan su aprendizaje dentro y fuera del aula. En consecuencia, se resalta lo dicho por CBMS (2001, citado en Stacey, 2008) quienes aclaran que la enseñanza en las universidades debe estar proyectada a un aprendizaje continuo y permanente de las matemáticas que lleven a una buena formación conceptual sin dejar de lado lo estructurado y dicho en el currículo escolar.

Recursos tecnológicos en la práctica docente

Los adelantos en Matemáticas se han conseguido no solo por los precedentes teóricos, sino también por los recursos tecnológicos, como lo son los *softwares* y las calculadoras que han venido siendo más eficaces y exactos gracias a los algoritmos y las sintaxis que allí se manejan para la manipulación de los objetos matemáticos. Por lo tanto, es importante que el profesor utilice y comprenda este recurso como un medio que le permite la interacción entre el objeto y el concepto teniendo así una mejor enseñanza y aprendizaje. Con lo anterior, se sigue a Garibay y Angelote (s.f, citados en Calvo y Gil, 2013) quienes advierten que:

Al apoyarse en las nuevas tecnologías como herramienta que mejora el aprendizaje es necesario diseñar actividades adecuadas y analizar con cada una de ellas qué competencias queremos que nuestros [estudiantes] desarrolleen con la misma, deben considerarse como un recurso para la adquisición autónoma del conocimiento. (p. 537)

Es importante tener la claridad que los softwares no se crearon para suplir la enseñanza del docente, sino para fomentar el desarrollo de habilidades y competencias en el aprendizaje del objeto matemático. Por consiguiente, ayudan a tratar algunas dificultades en relación con el comportamiento del objeto matemático bajo ciertos parámetros o restricciones, reconociendo cuándo estos se pueden o no usar en el aula de matemáticas. En este sentido, uno de los *software* más conocidos en el sector educativo es *GeoGebra*, un programa que siguiendo a Calvo y Gil (2013) facilita el aprendizaje del álgebra, la geometría y la integración de otros asuntos matemáticos. A continuación, se esbozan unas particularidades del *software GeoGebra*, dado que para este trabajo se utilizó de forma recurrente, especialmente para lo presentado en el siguiente capítulo.

El aplicativo se caracteriza, por tener varias opciones que el profesor puede utilizar para realizar representaciones gráficas de objetos matemáticos a través de sus expresiones algebraicas. Además, se incorporan movimientos dinámicos que permiten detallar su comportamiento, incluso GeoGebra cuenta con una comunidad en línea en donde diferentes usuarios pueden entrar a subir, descargar o modificar programas interactivos.

Con base en lo anterior, se sigue a Avecilla et al. (2015) quienes exponen tres características que desarrolla en los estudiantes el uso de GeoGebra, las cuales también se ven desarrolladas en la formación y la práctica docente:

- El programa ofrece una interfaz fácil de usar, menús multilingües y comandos interactivos.
- Facilita los proyectos matemáticos de los estudiantes y profesores, haciendo múltiples presentaciones y generando un aprendizaje por medio de la experimentación de los objetos matemáticos.
- Los estudiantes y profesores pueden personalizar sus creaciones a través de la adaptación que tiene la interfaz, por ejemplo: tamaño de la fuente, el idioma, la calidad de los gráficos, color, coordenadas, grosor de línea, estilo de línea y otras características.

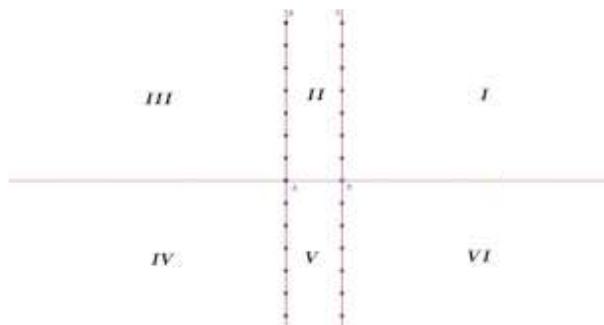
Plano PAR

En este apartado, se presentan las condiciones propias del plano PAR, el cual constituye el escenario de representación matemática a abordar en el presente trabajo. Así pues, siguiendo a Nachmias y Arcavi (1990, citado en Morales, 2021), el plano PAR “*Parallel Axes Representation*” como se puede ver en la Figura 1 se caracteriza por tener dos rectas verticales paralelas como ejes, la izquierda corresponde al eje x y la derecha al eje y ; y una tercera recta perpendicular a los ejes (horizontal) llamada recta de origen. Nótese que estas tres rectas

determinan sextantes (seis semiplanos) en el plano PAR, a diferencia del plano cartesiano que está constituido por cuadrantes (cuatro semiplanos).

Figura 1

Plano PAR



A su vez, teniendo en cuenta que en el plano cartesiano se implementa el uso de coordenadas (x, y) para su ubicación, es de notar que en el plano PAR la representación de las coordenadas será distinta a la usual, siendo rectas y no puntos. No obstante, su ubicación en el plano PAR se determina, a partir de los valores de x y de y . En este sentido, las coordenadas en el plano PAR se denotarán como $\overleftrightarrow{(x, y)}$ y se nombrarán como: recta coordenada. Particularmente, en el plano PAR la recta coordenada $\overleftrightarrow{(0, 0)}$ es la misma recta de origen.

Además, por convención, la recta de origen no solo determina dos semiplanos, sino que también indica la parte positiva y negativa de los ejes. Luego los puntos de los ejes que pertenecen al semiplano superior les corresponderán los valores positivos y a los puntos de los ejes que pertenecen al semiplano inferior los valores negativos. Así mismo, es de mencionar que la unidad de medida de cada uno de los ejes es la misma entre ellos.

Estudio de funciones polinómicas en el plano cartesiano

El sistema cartesiano es el plano bidimensional conformado por dos rectas perpendiculares, correspondientes al eje x (recta horizontal) y el eje y (recta vertical) las cuales

forman cuatro cuadrantes y determinan un único punto de intersección. Para graficar en el plano cartesiano se hace uso de las parejas ordenadas definidas en Muñoz (2001) como “el conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ se designará en adelante por (a, b) y se llamará la pareja ordenada con primera componente a y segunda componente b ” (p.64). Además, se le denomina relación (binaria) al conjunto de parejas ordenadas cuyo *dominio* y *rango* de la relación se refiere al conjunto de las primeras y segundas componentes, respectivamente.

En consecuencia, un punto Q cuya pareja ordenada es (x, y) se grafica al tomar las rectas perpendiculares al eje x por x y del eje y por y , y su intersección será el punto Q ,denotado esto por $Q(x, y)$.

Por su parte, el plano cartesiano ha sido de gran utilidad para la enseñanza y el aprendizaje de objetos matemáticos especialmente para identificar las representaciones gráficas de funciones. Siguiendo a Muñoz (2001) se entiende por función como una “relación en la cual no existen dos o más parejas distintas con la misma primera componente; o lo que es lo mismo: f es una función $\Leftrightarrow f$ es una relación y $(\forall x, y, z)((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z)$ ” (p. 78).

Ahora bien, siguiendo a Camacho (2009) las funciones de valor y variable real se clasifican en algebraicas y transcendentales. Particularmente, Stewart et al. (2006) dice que en las funciones algebraicas se encuentran las funciones polinómicas que se caracterizan por ser continuas, no tener asíntotas y tener exponentes enteros. Estas funciones son de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ donde } a_n \neq 0 \text{ y } n \text{ es un entero no negativo.}$$

Las funciones polinómicas se nombran según el grado que tengan: lineal o afín si su grado es 1, cuadrática cuando es 2 y cúbica si es 3, para las funciones que tienen un grado mayor o igual a 4 no se tiene una palabra en específico, sino, que se denominan según el grado que tenga (ej, función de grado 7).

Función lineal y afín

Según Lehmann (1989) las funciones lineales se caracterizan por tener como expresión algebraica a $y = mx$ con $m \neq 0$ y siendo m número real, y las funciones afines son de la forma $y = mx + b$, con $m, b \neq 0$; siendo m y b números reales. A su vez, m y b son los parámetros que definen la función, y su representación gráfica en el plano cartesiano es una recta. El parámetro m es la pendiente determinada como la razón que hay entre el cambio en y y el cambio en x , donde dados dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ (los cuales son los puntos mínimos requeridos para graficar una recta en el plano cartesiano) se cumple que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ahora, para determinar la recta primero se identificará el valor de m y sin tener en cuenta el valor de b se obtendrán los siguientes dos casos, planteados por Herrera Ruiz et al. (2003), para su posible representación gráfica teniendo en cuenta el ángulo (α) que forma la recta con el eje x . El primero, si $m > 0$ su pendiente es positiva y se tendrá una recta creciente con un ángulo $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. El segundo, si $m < 0$ su pendiente es negativa y la recta irá decreciendo a lo cual se le atribuye que el ángulo α está comprendido entre $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

El parámetro b es la ordenada de la función cuando se evalúa en ella $x = 0$, donde su punto es de la forma $T(0, b)$. Gráficamente determina el punto de intersección de la recta con el eje y , donde, dependiendo de su valor la recta cortará al eje y en su parte positiva o negativa. Como primer caso se tiene que si $b > 0$ entonces la función $f(x) = mx$ subirá b unidades respecto al punto de origen y su punto de intersección es $T(0, b)$. Si, por el contrario $b < 0$ la recta bajará b unidades respecto al origen indicando que la intersección con el eje y es $T(0, -b)$. Por último, se tiene que si $b = 0$ la función pasara por $O(0,0)$.

Una característica, que se puede identificar entre dos rectas representativas de algún par de funciones lineales es determinar si son rectas perpendiculares o paralelas a partir del valor de m . Si el valor es el mismo las rectas de las funciones son paralelas, si, por el contrario, son diferentes y la multiplicación entre ellas es -1 , las rectas son perpendiculares.

Función cuadrática

Siguiendo a Zill y Dewar (2012) la ecuación de segundo grado o función cuadrática tiene la siguiente forma $y = ax^2 + bx + c$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, en el plano cartesiano se representa a través de una parábola cuyo dominio está definido de $(-\infty, \infty)$. Cuando $a > 0$ y $a < 0$ la parábola abrirá hacia arriba o hacia abajo respectivamente, a su vez, está cuenta con los siguientes elementos: vértice, foco, directriz, eje de simetría y lado recto.

El vértice $V(h, k)$ es el punto máximo o mínimo de la parábola según el valor de a , si $a > 0$ es mínimo y si $a < 0$ es máximo, el foco es un punto fijo de coordenadas $F\left(h, k + \frac{1}{4a}\right)$ y la directriz es la recta d fija que tiene la misma distancia del vértice al foco, es decir, los puntos de la parábola equidistan del foco y directriz. El eje de simetría es la recta vertical $x = h$ que divide a la parábola en dos partes iguales y el lado recto es un segmento que pasa por el foco y es paralelo a la directriz (Lehmann, 1989).

Para el estudio de las funciones cuadráticas se tienen en cuenta cuatro casos de acuerdo con Herrera et al. (2003): $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx$, $y = ax^2 + c$ y $y = ax^2 + bx + c$ en ellos se podrá mostrar los elementos de la parábola y la apertura que tiene la parábola según la expresión.

Cuando $y = ax^2$ el vértice coincidirá con el punto de origen de los ejes coordenados $V(0,0)$, el foco es $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$, la directriz es $d = -\frac{1}{4a}$ y su eje de simetría es el eje y . Por lo tanto,

estas paráolas no van a presentar ninguna traslación. Cuando las paráolas son de la forma $y = ax^2 + bx$, el vértice tiene las siguientes coordenadas $V\left(-\frac{b}{2a}, y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, su foco es $F\left(-\frac{b}{2a}, y\left(-\frac{b}{2a}\right) + \frac{1}{4a}\right)$, su directriz se determina a partir de la distancia entre el foco y el vértice y su eje de simetría es $x = -\frac{b}{2a}$.

Cuando la paráola es $y = ax^2 + c$, su vértice es el punto $V(0, c)$ haciendo que el eje de simetría sea el eje y . Además, la paráola tiene una traslación en el mismo eje la cual está determinada por el valor de c , si $c > 0$ el vértice estará en la parte positiva del eje y y estará en la parte negativa las c unidades cuando $c < 0$, teniendo en cuenta que la orientación de la apertura está determinada por a .

Por último, cuando se tienen las funciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$ se cumple lo mencionado anteriormente, donde estas paráolas son una traslación de $y = ax^2 + bx$ con c unidades hacia arriba o hacia abajo y con un desplazamiento horizontal o vertical de la función $y = ax^2$. Para la apertura de la paráola en cualquiera de esos casos se analizá el valor de a , si $a \geq 1$ la paráola tiene una apertura estrecha acercándose al eje y y si $0 < a < 1$ entonces la paráola se va agrandando, caso análogo cuando $a \leq 1$ y $0 > a > -1$.

La paráola, además de tener los elementos anteriormente mencionados, presenta intersecciones con el eje x y para encontrarlas se sigue a Zill y Dewar (2012) los cuales analizan la función igualándola a cero, para posteriormente utilizar la ecuación cuadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y encontrar las soluciones de x .

Ahora bien, analizando los posibles resultados del discriminante $b^2 - 4ac$ se obtienen 3 casos:

- 1) Si $b^2 - 4ac = 0$, la paráola corta en un solo punto con el eje x .

2) Si $b^2 - 4ac < 0$, la solución no es real indicando que la parábola y el eje x no tiene puntos de corte.

3) Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene solución real e indica que la parábola tiene dos puntos de corte con el eje x .

Es de resaltar que la función cuadrática tiene otras formas de representación simbólica, las cuales son identificadas por Gómez (2007, citado en Roa, 2018) quien menciona cuatro tipos de representación simbólica: estándar, multiplicativa, canónica y del foco. La representación estándar es la que se va a manejar a lo largo de este documento y que se amplió previamente. La multiplicativa es de la forma $y = a(x - r_1)(x - r_2)$, la canónica $y = a(x - h)^2 + k$, y la del foco $y = \frac{1}{4p} (x - x_0)^2$.

Función cúbica

La función cúbica, conocida porque su mayor grado es tres y su ecuación algebraica es de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Dicha función se caracteriza porque su dominio se encuentra definido de $(-\infty, \infty)$, indicando que es continua, además, tiene puntos de inflexión que en la representación gráfica se identifican en el cambio de concavidad y en los posibles máximos y mínimos.

Para estudiar a las funciones cúbicas se toman los cinco casos expuestos en Herrera et al. (2003) $y = ax^3$, $y = ax^3 + bx^2$, $y = ax^3 + cx$, $y = ax^3 + d$ y $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Es de mencionar que dependiendo del valor del parámetro a la representación gráfica va a crecer o decrecer cuando $a > 0$ y $a < 0$, respectivamente. El primer caso cuando $y = ax^3$ la gráfica contará con solo un punto de corte el cual será $O(0,0)$, si $a > 0$ la gráfica se alejará del eje y y caso contrario si $a < 0$.

El segundo caso donde $y = ax^3 + bx^2$, la gráfica tendrá dos puntos de corte en el eje x $(0,0)$ y $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$. En ese sentido, se comienza a evidenciar un punto de inflexión cuyas coordenadas son $\left(-\frac{b}{3a}, 0\right)$ y los puntos máximos y mínimos que presentan están asociados a los valores de a y b :

- Cuando $a > 0$ y $b > 0$ el máximo local está en R^- y el mínimo local en $x = 0$
- Cuando $a > 0$ y $b < 0$ el máximo local está en $x = 0$ y el mínimo local en R^+
- Cuando $a < 0$ y $b > 0$ el máximo local está en R^+ y el mínimo local en $x = 0$
- Cuando $a < 0$ y $b < 0$ el máximo local está en $x = 0$ y el mínimo local R^-

En el tercer caso se encuentran las funciones cubicas de la forma $y = ax^3 + cx$, si a y c tienen el mismo signo la gráfica tiene un solo punto de corte $(0,0)$ y su representación gráfica es similar al caso uno. Si a y c tienen los mismos signos entonces la gráfica tiene tres puntos de corte con el eje x . Si a y c tienen los signos opuestos, evidencia que cuando $a > 0$ y $c < 0$ entonces lo primero que se encontrara en la gráfica es un máximo y cuando $a < 0$ y $c > 0$ en la gráfica se encontrara un mínimo.

En el cuarto caso las funciones de la forma $y = ax^3 + d$, tienen dos puntos de corte uno en el eje x y el otro en el eje y . El punto en x se encontrará igualando a 0 la ecuación y despejando x para encontrar su valor y para el caso del eje y el punto estará definido como $(0, d)$ ya que indicará si la gráfica sube o baja d unidades. Por último, se presentan las funciones de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, conocido como el caso general el cual abarca todo lo dicho anteriormente.

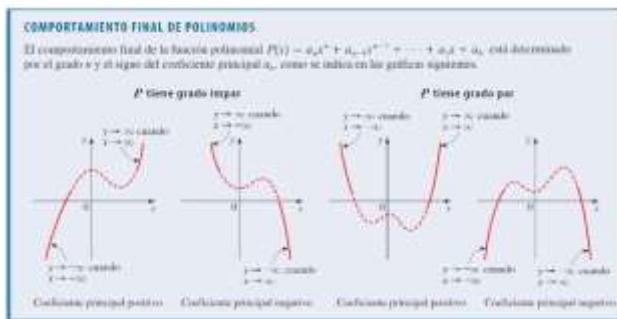
Funciones pares y funciones impares

Las funciones polinómicas se pueden clasificar en pares e impares. Las funciones pares son aquellas que cumplen que $f(x) = f(-x)$, haciendo que la representación de la función sea simétrica respecto al eje y. Las funciones impares son aquellas que cumplen que $-f(x) = f(-x)$, la gráfica tiene una simetría rotacional de 180° respecto al origen. (Camacho, 2009)

Para Stewart et al. (2006) el comportamiento de las representaciones de las funciones pares e impares se ve influenciado por el valor del coeficiente principal, haciendo que la gráfica vaya de infinito positivo a infinito negativo o en sentido contrario. Así, como se explica en la Figura 2.

Figura 2

Comportamiento de las funciones pares e impares



Nota: Adaptado de Precálculo Matemáticas para el Cálculo de Stewart et al. 2012

Capítulo III. Estudio de funciones polinómicas en el plano PAR

El presente capítulo muestra el estudio realizado sobre el comportamiento de las funciones polinómicas en el plano PAR. Para ello, se inicia con la caracterización de cada una de las funciones (lineal, cuadrática, cúbica) y posteriormente, se expresan algunas observaciones, en términos de las funciones pares e impares.

Función lineal y afín

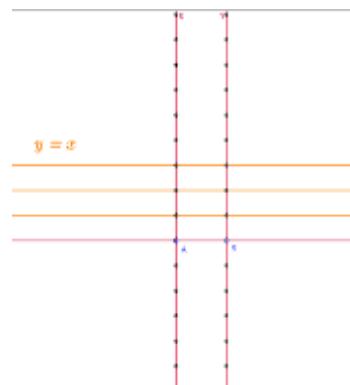
Para el estudio de las funciones lineales y afines, se partió de la ecuación canónica $y = mx + b$ donde $m, b \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$.

Así, se analizaron en el plano PAR dos casos: el primero, las funciones lineales cuya expresión algebraica es $y = mx$, mostrando las generalidades encontradas en relación con las representaciones cuando varía m ; y como segundo caso, las funciones afines cuya expresión es $y = mx + b$ con $b \neq 0$, donde se establecieron las condiciones de las representaciones en el plano PAR a partir de los términos m y b .

Para el primer caso $y = mx$, si $m = 1$, las rectas coordenadas $\overleftrightarrow{(x,y)}$ que hacen válida la ecuación $y = 1x$ son rectas paralelas, así como se muestra en la Figura 3.

Figura 3

Coordenadas $y = 1x$



Ahora bien, si $m \neq 1$ se estableció que su representación es el punto que surge de la intersección de las infinitas rectas coordenadas que hacen válida la ecuación, y se ubica en la recta de origen.

Para mostrar esto, se presentan tres sub-casos en los cuales se analizó qué pasa con el punto cuando $m > 1$, $0 < m < 1$ y $m < 0$:

- a. Si $m > 1$, el punto de intersección de las rectas coordenadas o el punto que representa la función está en la semirrecta de la recta de origen que determina los sextantes III y IV, y entre más grande sea m el punto se acerca más al eje x .
- b. Si $0 < m < 1$, el punto que representa la función se encuentra en la semirrecta de la recta de origen que determina los sextantes I y VI; cuando m se va haciendo más pequeño el punto se va acercando al eje y , de lo contrario el punto se aleja del eje.
- c. Si $m < 0$, el punto que representa la función está en el segmento de la recta de origen que determina los sextantes II y V. Además, si m se hace cada vez más pequeño el punto está más lejos del eje y y más cercano al eje x .

Para el segundo caso de las funciones $y = mx + b$ con $b \neq 0$, se consideraron las condiciones de m determinadas en el caso anterior y en cada una de ellas se analizaron las representaciones, teniendo en cuenta si b es mayor o menor que cero.

- a. Si $m = 1$ y $b < 0$ o $b > 0$, no existe una representación explícita de la función en tanto el conjunto de las infinitas rectas coordenadas que hacen válida la ecuación son paralelas entre sí, lo que implica que no haya un punto de intersección.
- b. Si $m > 1$ y $b > 0$, el punto que representa la función se encuentra en el sextante IV. Por su parte, cuando $b < 0$ el punto que representa a la función está en el sextante III. Para ambos valores de b , si b se $b \rightarrow -\infty$ o $b \rightarrow +\infty$ el punto se aleja de la recta de origen y en caso contrario $b \rightarrow 0^+$ o $b \rightarrow 0^-$ se acerca.

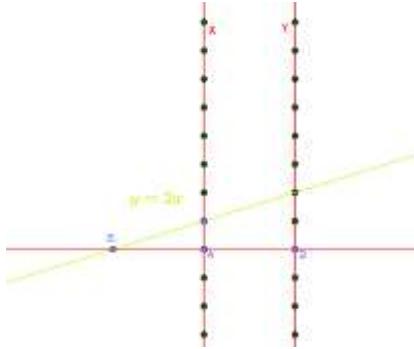
- c. Si $0 < m < 1$ y $b > 0$ el punto que representa la función se encuentra en el sextante I, entre más grande sea b más se aleja de la recta de origen, ahora, si $b < 0$ el punto está en el sextante VI. Para ambos valores de b , si b se $b \rightarrow -\infty$ o $b \rightarrow +\infty$ el punto se aleja de la recta de origen y en caso contrario $b \rightarrow 0^+$ o $b \rightarrow 0^-$ se acerca.
- d. Si $m < 0$ y $b > 0$ el punto que representa la función se ubica en el sextante II y entre más grande sea b más se aleja de la recta de origen. Por su parte, si $b < 0$ el punto que representa la función está en el sextante V. Para ambos valores de b , si b se $b \rightarrow -\infty$ o $b \rightarrow +\infty$ el punto se aleja de la recta de origen y en caso contrario $b \rightarrow 0^+$ o $b \rightarrow 0^-$ se acerca.

A continuación, se muestran algunas particularidades encontradas en la exploración realizada para determinar lo expresado anteriormente. Para esto, se hace necesario considerar que las letras A y B representan el valor cero de los ejes x y y , respectivamente. Además, es de notar que para graficar una función de ese tipo basta con hacer dos rectas coordenadas de ella y determinar su punto de intersección, si lo tiene.

Ahora bien, en la Figura 4 se muestra que el punto B_1 , representa la función lineal $y = 2x$; dicho punto es determinado a partir de la intersección de la recta de origen con una circunferencia de centro A y radio AB , por lo tanto la distancia entre A y B es igual a la distancia entre A y B_1 y además se cumple la igualdad $B_1 - A - B$, donde $d(AB) = f$ con $f \in \mathbb{R}$ por esta razón se puede decir que A es punto medio del segmento B_1B denotado por $\overline{B_1B}$.

Figura 4

Función $y = 2x$



Luego, teniendo en cuenta lo referido en el primer caso, donde las funciones eran de la forma $y = mx$, con $m > 1$, se pudo concluir que todos los puntos que representan a las funciones que tienen $m > 2$ y $b = 0$ se ubican en el $\overline{B_1A}$. Ahora, si la función es de la forma $y = mx$ con $m < 1$ los puntos estarán en la semirrecta determinada por los sextantes I y VI o en el segmento determinado por los sextantes II y V, entonces los puntos que representan a las funciones de la forma $y = mx$ con $1 < m < 2$ y $b = 0$ se van a encontrar a la izquierda de B_1 y en la recta de origen.

Posteriormente, en la semirrecta que determina los sextantes III y IV se realizó el siguiente procedimiento. Se estableció con la herramienta del *software* GeoGebra simetría central, la simetría del punto A respecto a B_1 , dando como resultado el punto A_1 , que cumple con la interestancia $A_1 - B_1 - A$ donde $d(A_1A) = 2f$. Haciendo el mismo procedimiento con los puntos B_1 y A_1 se obtuvo el punto B_2 , donde $B_2 - A_1 - B_1$ y $d(B_2A) = 3f$. Realizando los mismos pasos repetidas veces se obtienen los puntos $A_2, B_3, \dots, A_n, B_n$, donde la distancia de cada punto encontrado con el punto A son las siguientes $d(A_2A) = 4f$, $d(B_3A) = 5f$, $\dots, d(A_nA) = (2n)f$, $d(B_nA) = (2n-1)f$.

Ahora, para determinar la función lineal que representan cada uno de los puntos A_n y B_n ; se trazó una recta con cada uno y con el valor 1 del eje x del plano PAR. Obteniendo como resultado que el valor de m de cada punto estaba determinado por la distancia que hay entre el punto B y el punto de intersección que se genera por la recta coordenada con el eje y del plano PAR.

Para encontrar los valores de m , primero se determinaron las expresiones algebraicas en el plano cartesiano de las rectas coordenadas, teniendo en cuenta que se toma como plano cartesiano la recta de origen y el eje x del plano PAR. Donde las coordenadas de A_n y B_n son $(-2nf, 0)$ y $(-(2n - 1)f, 0)$ respectivamente y el valor 1 en el eje x del plano PAR corresponde a $(0,1)$, dando como resultado que sus expresiones algebraicas son:

$$y_{A_n} = \left(\frac{1}{2nf}\right)x + 1 \quad \text{y} \quad y_{B_n} = \left(\frac{1}{(2n-1)f}\right)x + 1$$

Posteriormente, para encontrar el punto de intersección que va a determinar el valor de m que representan los puntos A_n y B_n , se tiene presente que en el plano cartesiano el eje y del plano PAR es $x = f$. Por tanto, al reemplazarlo en las expresiones algebraicas se obtiene el punto donde ambas rectas se intersecan el cual es $\left(f, \left(\frac{1}{2nf}\right)f + 1\right)$ para los puntos A_n y $\left(f, \left(\frac{1}{(2n-1)f}\right)f + 1\right)$ para los B_n .

En ese sentido, por un lado, en la Tabla 2 están los valores de m de las funciones que representan los puntos A_n y B_n . Por otro lado, en la Figura 5 se muestran dos cosas: la primera las rectas coordinadas que se pueden determinar a partir de cada uno de los puntos A_n y B_n y con el punto del eje x del plano PAR que establece el valor de 1; y la segunda las funciones lineales que representan.

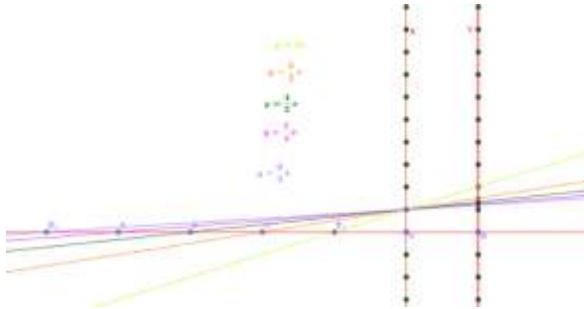
Tabla 2

Valor m en la primera simetría de puntos

Punto	$d(A_nA)$	Valor de m	Punto	$d(B_nA)$	Valor de m
A_1	$2f$	$\frac{3}{2}$	B_1	f	2
A_2	$4f$	$\frac{5}{4}$	B_2	$3f$	$\frac{4}{3}$
A_3	$6f$	$\frac{7}{6}$	B_3	$5f$	$\frac{6}{5}$
:	:	:	:	:	:
A_n	$(2n)f$	$\frac{2n+1}{2n}$	B_n	$(2n-1)f$	$\frac{2n}{2n-1}$

Figura 5

Función lineal primera secuencia de pendientes



Posteriormente, se realizó la generalización de los datos anteriormente encontrados de los valores de m correspondientes a los puntos B_n y A_n . Para ello, se toma a K_n como el conjunto de los puntos B_n y A_n , atendiendo al orden de construcción $\{A_1, B_1, A_2, B_2, \dots\}$, dando como resultado que el valor de m correspondiente a cada punto K_n es $\frac{n+1}{n}$.

Luego, si $n \rightarrow \infty$ se tiene que m cada vez se va acercando a 1; esto se comprueba al analizar el límite de la sucesión de números, de la siguiente manera:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 1$$

Llevando a cabo el mismo procedimiento, pero en la semirrecta que es determinada por los sextantes I y VI y teniendo como referencia el punto C_1 que surge por la intersección de infinitas rectas que representa a la función lineal $y = \frac{1}{2}x$, donde la distancia que hay entre A y B es la misma que hay entre B y C_1 , ya que el punto C_1 surge como la intersección de la recta de origen con una circunferencia de centro B y radio AB por lo tanto cumpliéndose así la interestancia $A - B - C_1$, es decir que $d(C_1A) = 2f$ con $f \in \mathbb{R}$. Por ello B es punto medio del $\overline{AC_1}$.

Teniendo presente el primer caso estudiado de las funciones lineales en el plano PAR, es de notar que los puntos que representan a las funciones donde $0 < m < \frac{1}{2}$ y $b = 0$ están ubicados en el $\overline{BC_1}$ y los puntos de las funciones con $\frac{1}{2} < m < 1$ y $b = 0$ se encuentran a la derecha de C_1 y en la recta de origen.

En la semirrecta determinada por los sextantes I y VI, se realizó el mismo procedimiento al de la semirrecta determinada por los sextantes III y IV. Primero se tomó la simetría central del punto B respecto al punto C_1 , dando como resultado el punto D_1 que cumple con la interestancia $B - C_1 - D_1$ y $d(BD_1) = 2f$. Volviendo a trazar la simetría central del punto C_1 respecto al punto B_1 se obtiene el punto C_2 que cumple con la interestancia $C_1 - D_1 - C_2$ y $d(BC_2) = 3f$. Realizando el mismo procedimiento varias veces se encuentran los puntos $D_2, C_3, D_3, \dots, C_n, D_n$ y

en cada punto encontrado la distancia con el punto B es $d(BD_2) = 4f, d(BC_3) = 5f, d(BD_3) = 5f, \dots, d(BC_n) = (2n - 1)f, d(BD_n) = (2n)f$

Obteniendo que las expresiones algebraicas de las rectas son $y_{D_n} = \left(\frac{1}{2nf}\right)x + 1$ y $y_{C_n} = \left(\frac{1}{(2n-1)f}\right)x + 1$ y sus puntos de intersección son $\left(f, \left(\frac{1}{2nf}\right)f + 1\right)$ para los puntos D_n y $\left(f, \left(\frac{1}{(2n-1)f}\right)f + 1\right)$ para los C_n .

En ese sentido, por un lado, en la Tabla 3 están los valores de m de las funciones que representan los puntos C_n y D_n . Por otro lado, en la Figura 6 se muestran dos cosas: la primera las rectas coordenadas que se pueden determinar a partir de cada uno de los puntos C_n y D_n y con el punto del eje x del plano PAR que establece el valor de 1; y la segunda las funciones lineales que representan.

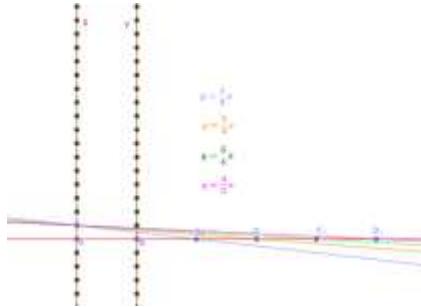
Tabla 3

Segunda simetría de puntos

Punto	$d(C_nB)$	Valor de m	Punto	$d(D_nB)$	Valor de m
C_1	f	$\frac{1}{2}$	D_1	$2f$	$\frac{2}{3}$
C_2	$3f$	$\frac{3}{4}$	D_2	$4f$	$\frac{4}{5}$
C_3	$5f$	$\frac{5}{6}$	D_3	$6f$	$\frac{6}{7}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
C_n	$(2n - 1)f$	$\frac{2n - 1}{2n}$	D_n	$(2n)f$	$\frac{2n}{2n + 1}$

Figura 6

Función lineal segunda secuencia de pendientes



En el proceso de generalización de los resultados, se toma a S_n como el conjunto de puntos de C_n y D_n $\{C_1, D_1, C_2, D_2, \dots\}$, donde el valor m de cada punto S_n es $\frac{n}{n+1}$. En este sentido se identificó, que cuando n toma valores muy grandes, m tiende a 1, lo cual se puede comprobar a partir de analizar el límite de la expresión:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + 0} \right)$$

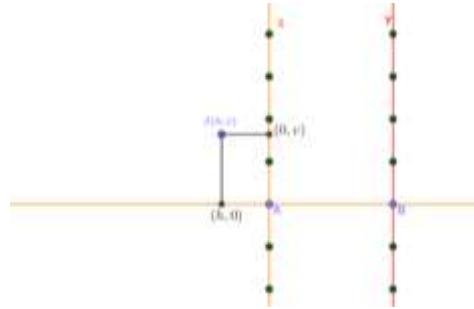
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Por otra parte, para encontrar la ecuación $y = mx + b$ a partir de un punto (determinado por la intersección de las rectas coordenadas) ubicado en el plano PAR, se hace por medio de determinar el plano cartesiano en el plano PAR. La recta de origen y el eje x , serán los ejes x y y del plano usual (cartesiano), así se asume al punto J como la representación de la función lineal o afín en el plano PAR. En principio, se toma de referencia las coordenadas de los puntos de

intersección de las rectas perpendiculares con los ejes cartesianos, obteniendo como resultado $(h, 0)$ y $(0, v)$ y por lo tanto, el punto J tiene las siguientes coordenadas cartesianas (h, v) , lo anterior se muestra en la Figura 7.

Figura 7

Determinar J con el plano cartesiano



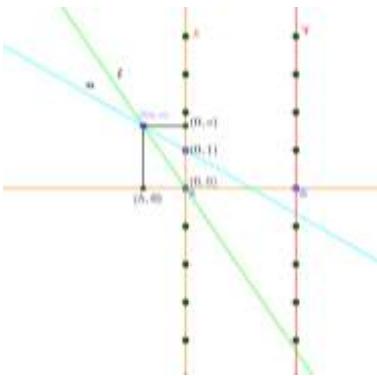
Retomando el objetivo de encontrar la ecuación $y = mx + b$ a partir de un punto (determinado por la intersección de las rectas coordenadas) ubicado en el plano PAR, se han de tener en cuenta la coordenada cartesiana $J(h, v)$ y la distancia entre los ejes del plano PAR (f).

Ahora, para determinar m , primero se realizaron varios ejemplos teniendo como referencia distintos puntos que representaban funciones lineales conocidas en el plano PAR. Sin embargo, no se logró establecer alguna de las expresiones algebraicas como la verdadera.

Por lo tanto, en la Figura 8 se muestra cómo se relacionaron las coordenadas de J y de otros puntos específicos teniendo en cuenta los elementos que se pueden determinar en el plano cartesiano. En este sentido, sea el punto J de coordenadas (h, v) y las rectas l y n que pasan por J y los puntos A cuyas coordenadas son $(0,0)$ y T que tiene coordenadas $(0,1)$, respectivamente.

Figura 8

Representación para encontrar m



Continuando, se procede a encontrar las ecuaciones de las rectas. En primer lugar, para encontrar el valor de m se utilizan los dos puntos por los cuales se determinaron las rectas, obteniendo las siguientes expresiones:

$$m_l = \frac{v}{h} \quad m_n = \frac{v-1}{h}$$

Por lo tanto, utilizando la ecuación punto pendiente se encuentran las expresiones algebraicas que corresponden a cada recta:

$$y_l = \frac{v}{h}x \quad y_n = \frac{v-1}{h}x + 1$$

Teniendo en cuenta que el eje y del plano PAR es perpendicular a su recta de origen, la cual corresponde al eje x del plano cartesiano va a tener una distancia f del eje y (en el plano cartesiano determinado) y una expresión $x = f$. De este modo, las ecuaciones de las rectas evaluadas en x son:

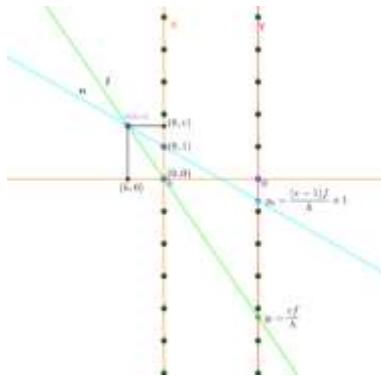
$$y_l = \frac{vf}{h} \quad y_n = \frac{v-1}{h}f + 1$$

Ahora, en la Figura 9 se muestra que, para determinar la expresión algebraica se utilizan los elementos del plano PAR, se toman las rectas l y n como rectas coordenadas que pasan en el eje x en los valores 0 y 1, respectivamente; cuyas imágenes corresponden a las funciones de las

rectas (l y n) encontradas en el plano cartesiano usual, es decir que se denominan como $\overleftrightarrow{l(0, y_l)}$ y $\overleftrightarrow{n(1, y_n)}$.

Figura 9

Ecuaciones de las rectas



Para encontrar el valor de m del punto que representa la función lineal en el plano PAR, se utilizó la ecuación de la pendiente a partir de dos rectas coordenadas del plano PAR, cuyas coordenadas son $\overleftrightarrow{l(0, y_l)}$ y $\overleftrightarrow{n(1, y_n)}$, obteniendo lo siguiente:

$$m = \frac{\left(\frac{v-1}{h}f + 1\right) - \left(\frac{vf}{h}\right)}{1 - 0}$$

$$m = \left(\frac{v-1}{h} \times f + 1\right) - \left(\frac{vf}{h}\right)$$

$$m = \left(\frac{vf - f}{h} + 1\right) - \left(\frac{vf}{h}\right)$$

$$m = \frac{vf - f + h}{h} - \frac{vf}{H}$$

$$m = \frac{vf - f + h - vf}{h}$$

$$m = \frac{h - f}{h}$$

$$m = 1 - \frac{f}{h}$$

Para la expresión del parámetro b , se tuvo en cuenta la dependencia que había entre la coordenada h del punto que representa la función en plano PAR con la distancia f que hay entre los ejes del plano PAR. En este sentido, dado que el valor de h depende directamente de la medida de f entonces entre más grande sea f más grande será h . Sin embargo, es importante tener en cuenta que la coordenada v es una variable independiente puesto que no sufre modificaciones al cambiar la distancia entre los ejes del plano PAR, es por ello que la expresión algebraica que representa al parámetro b es:

$$b = \frac{fv}{h}$$

En conclusión, para un punto cualquiera que se determine a partir de la intersección de infinitas rectas coordenadas y que pertenezca a los sextantes del plano PAR o a la recta de origen, se podrá encontrar la función a la cual está representando, trazando las distancias h , v y f y reemplazando en la siguiente expresión:

$$y = \left(1 - \frac{f}{h}\right)x + \left(\frac{fv}{h}\right)$$

Con los resultados anteriormente encontrados, se concluyó que, por medio de la expresión algebraica de la función lineal en el plano cartesiano, se puede obtener la posición exacta del punto que la representa en el plano PAR, teniendo en cuenta que la distancia entre los ejes (f) siempre se debe conocer.

Para encontrar la coordenada h se utilizó la ecuación de la pendiente, con el fin de despejar h , de la siguiente manera:

$$m = 1 - \frac{f}{h}$$

$$m - 1 = -\frac{f}{h}$$

$$h(m - 1) = -f$$

$$h = -\frac{f}{m - 1}$$

Ahora, para la coordenada v se sustituyó h en la ecuación del parámetro b , obteniendo lo siguiente:

$$b = \frac{fv}{h}$$

$$\left(-\frac{f}{m - 1}\right)b = fv$$

$$-\frac{fb}{m - 1} = fv$$

$$\left(-\frac{fb}{m - 1}\right)\left(\frac{1}{f}\right) = v$$

$$v = -\frac{b}{m - 1}$$

En ese sentido la posición del punto que representa a la función lineal en el plano PAR tiene la siguiente expresión:

$$J\left(-\frac{f}{m - 1}, -\frac{b}{m - 1}\right)$$

Función cuadrática

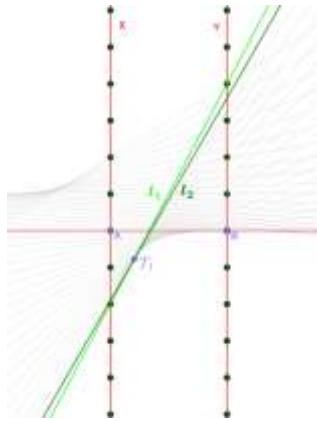
El estudio de las funciones cuadráticas que se caracteriza por tener una expresión algebraica de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se hizo a través de la representación gráfica que se genera por los puntos de intersección de las rectas coordenadas en el plano PAR, de la siguiente manera:

Sea el conjunto de n rectas coordinadas l_i y cuyas intersecciones son el conjunto de puntos T_k que determinan la representación de la función cuadrática en el plano PAR, los cuales

se definen como $l_k \cap l_{k+1} = \{T_k\}$ con $k \in \mathbb{Z}^+$. En la Figura 10 se identifica un ejemplo de las intersecciones:

Figura 10

Intersecciones de las rectas coordenadas de la función $y = x^2$



El resultado de unir los puntos T_k fue una hipérbola cuyas rectas asintóticas tienen un comportamiento particular en el plano PAR, ya que una de ellas siempre corresponderá con el eje x y la otra de acuerdo con la función cuadrática presenta un recorrido por los sextantes del plano PAR. Luego, la representación gráfica de la función cuadrática en el plano PAR es una recta asintótica de la forma: $\ddot{f}(x) = \ddot{m}x + \ddot{b}$.

En relación con lo anterior, para determinar el comportamiento de la recta, se hizo el estudio a partir de los cuatro casos derivados de la expresión algebraica: $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$, $y = ax^2 + bx$ y $y = ax^2 + bx + c$. En ellos, se realizaron variaciones a los parámetros con el fin de obtener resultados más claros para poder llegar a una generalización de su comportamiento.

Para el primer caso, se estudiaron las funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2$ con $a \neq 0$, de lo cual se obtuvo que la representación gráfica de la función cuadrática en el plano PAR

tiene dos formas: $\ddot{f}(x) = r$ con $r = \frac{1}{-2a}$ cuando $-14 < a < -7$ y $7 \leq a < 14$ o $\ddot{f}(x) = \ddot{m}x + \ddot{b}_0$, las cuales dependen del valor de a , tal como se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4

Valores de la recta asintótica con la función $y = ax^2$

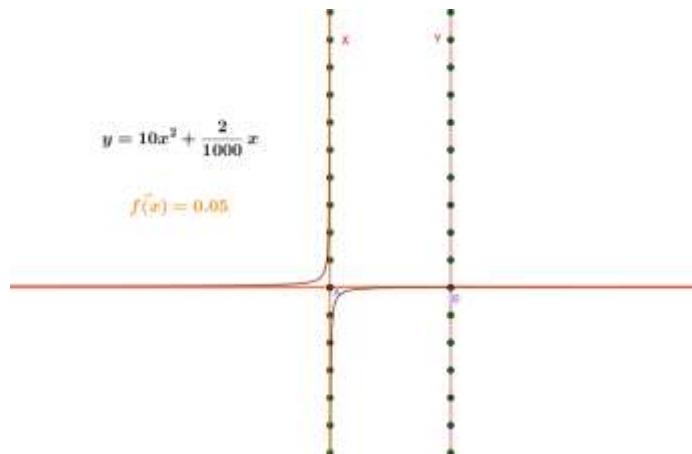
Característica del parámetro a	Valor de \ddot{m} y \ddot{b}
$-7 < a < 0$	$\ddot{m} > 0$ y $\ddot{b} < 0$
$a \leq -14$	$\ddot{m} < 0$ y $\ddot{b} < 0$
$0 < a < 7$	$\ddot{m} < 0$ y $\ddot{b} > 0$
$a \geq 14$	$\ddot{m} > 0$ y $\ddot{b} > 0$

El segundo caso consistió en las funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + bx$, donde dependiendo de los cambios a los parámetros a y b , se obtenían dos particularidades en la expresión algebraica y en el comportamiento de la recta.

- La primera particularidad se presenta cuando $a = 10$ o $a = -10$ y $b = \frac{2}{10^n}$ con $n \in \mathbb{N}$ ya que la recta asintótica es de la forma $\ddot{f}(x) = \frac{b-1}{-2a}$, para dicha recta el valor de f no es relevante. Un ejemplo de esta primera particularidad se muestra en la Figura 11, cuando $a = 10$, $b = \frac{2}{10^2}$, y ya que la representación gráfica de la función cuadrática en el plano PAR es una recta constante. Es de mencionar que esta particularidad no se evidencia de manera explícita en el programa.

Figura 11

Representación cuadrática constante de la función cuadrática



- La segunda particularidad, se relacionó con el valor de b ya que dependiendo del valor de dicho parámetro la función cuadrática en el plano PAR tiene tres representaciones. La primera es cuando $b = 1$ y $-8 \leq a \leq 8$ o $a = 1$, la función cuadrática tiene su representación gráfica en la recta de origen del plano PAR. La segunda es una recta de la forma $\ddot{f}(x) = \ddot{m}x$ y se presenta cuando el parámetro a tiene los valores diferentes de la representación anterior y $b = 1$ (en el programa para estos casos arrojara el valor cero en \ddot{m} y \ddot{b}). La tercera es una recta de la forma $\ddot{f}(x) = \ddot{m}x + \ddot{b}$ cuyos valores se encuentran en la .
 - Tabla 5
- Valores de la recta asintótica de la función $y = ax^2 + bx$ que cumple con las condiciones anteriormente nombradas.*

Tabla 5

Valores de la recta asintótica de la función $y = ax^2 + bx$

Características de los parámetros a y b	Valor de \ddot{m} y \ddot{b}
---------------------------------------------	----------------------------------

$a < 0 \text{ y } b < 0$	$\ddot{m} > 0 \text{ y } \ddot{b} < 0$
$a < 0 \text{ y } b > 0$	$\ddot{m} > 0 \text{ y } \ddot{b} > 0$
$a > 0 \text{ y } b < 0$	$\ddot{m} < 0 \text{ y } \ddot{b} > 0$
$a > 0 \text{ y } b > 0$	$\ddot{m} < 0 \text{ y } \ddot{b} < 0$

Para el tercer caso se estudiaron las funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + c$ cuya representación en el plano PAR tienen la expresión $f(\ddot{x}) = \ddot{m}\ddot{x} + \ddot{b}$, la cual va cambiando de acuerdo con el valor de los parámetros a y c . Es de notar, que en la Tabla 6 se muestra una característica principal de estas funciones con la representación algebraica en el plano PAR: la correspondencia del valor de \ddot{m} con el valor de c y el valor de \ddot{b} con el valor de a :

Tabla 6

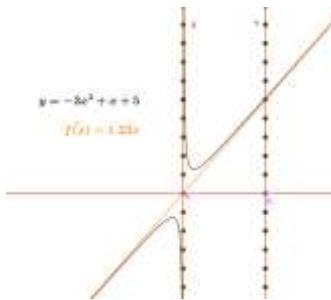
Valores de la recta asintótica de la función $y = ax^2 + c$

Características de los parámetros a y c	Valor de \ddot{m} y \ddot{b}
$a > 0 \text{ y } c > 0$	$\ddot{m} > 0 \text{ y } \ddot{b} > 0$
$a < 0 \text{ y } c > 0$	$\ddot{m} > 0 \text{ y } \ddot{b} < 0$
$a > 0 \text{ y } c < 0$	$\ddot{m} < 0 \text{ y } \ddot{b} > 0$
$a < 0 \text{ y } c < 0$	$\ddot{m} < 0 \text{ y } \ddot{b} < 0$

Por último, se analizaron las funciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \neq 0$. En este permanecen los resultados anteriormente encontrados y en la Figura 12 se presenta un ejemplo de ello cuando $b = 1$, $f = 4$ y $a, c \in \mathbb{R}$, ya que la forma de la recta asintótica que representa a la función cuadrática en el plano PAR es $\ddot{f}(x) = \ddot{m}x$.

Figura 12

Recta asintótica de la función $y = ax^2 + bx + c$



Por su parte, durante el estudio de las funciones cuadráticas se identificaron dos particularidades

- La primera particularidad cuando se tienen las funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + bx$ con $a \in \mathbb{R}$, b un valor fijo que corresponde a la simetría de los valores de \ddot{m} , \ddot{b} y a la intersección entre el eje y con la recta asintótica, dependiendo del valor de f . Es de mencionar, que el término simetría se relaciona al comportamiento de los valores, en tanto dicha simetría se establece respecto a el parámetro $a \rightarrow 0^+$ y $a \rightarrow 0^-$. En la Tabla 7 se presenta un ejemplo de estas funciones cuando los valores de \ddot{m} , \ddot{b} y la intersección de la recta asintótica con el eje y son simétricos.

Tabla 7

Simetría de los valores \ddot{m} , \ddot{b} y la intersección de la recta asintótica con el eje y

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>m̃</i>	<i>b̃</i>	Intersección¹
-4	3	4	0.06	0.25	0.5
-3	3	4	0.08	0.33	0.66

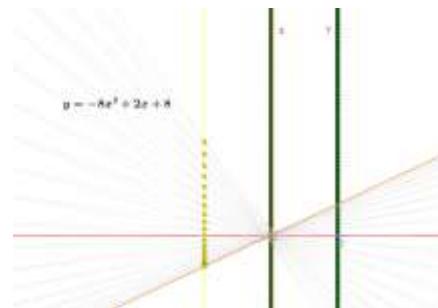
¹ Estos valores no se identifican en el programa realizado

-2	3	4	0.13	0.5	1
-1	3	4	0.25	1	2
1	3	4	-0.249	-1	-2
2	3	4	-0.13	-0.5	-1
3	3	4	-0.08	-0.33	-0.66
4	3	4	-0.06	-0.25	-0.5

- La segunda particularidad, está relacionada al conjunto de puntos formada por la intersección de los pares de rectas coordenadas, definidas como: Sea el conjunto de las rectas coordenadas l_i las intersecciones $\{P_k\}$ de la forma $l_k \cap l_{i-(k-1)} = \{P_k\}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Para que, la sucesión de puntos P_k se forme, el parámetro b debe tener la siguiente condición $b \neq 1$. En la Figura 13, se puede identificar el comportamiento de este conjunto de puntos que determina una única recta, donde la recta es perpendicular a la recta de origen del plano PAR.

Figura 13

Conjunto de puntos que determinan una recta perpendicular



Para encontrar las expresiones algebraicas que permitan el paso del plano cartesiano al plano PAR de una función cuadrática, se tomaron casos particulares para determinar los términos

\ddot{m} y \ddot{b} escritos a partir de los parámetros a , b y c . La primera regularidad encontrada fue la escritura de \ddot{b} en términos de los parámetros a y b , teniendo como referencia el segundo caso estudiado de las funciones cuadráticas $y = ax^2 + bx$. Para ello, se realizaron dos ejemplos a partir de unas tabulaciones presentadas en la Tabla 8, en donde se evidencian los cambios que se presentan en \ddot{b} , al tener fijo a , ir moviendo b y $f = 4$:

Tabla 8

Ejemplos para encontrar \ddot{b}

a	b	\ddot{b}
7	1	0
7	2	-0.07
7	3	-0.14
7	4	-0.21
7	5	-0.29

a	b	\ddot{b}
2	1	0
2	2	-0.25
2	3	-0.5
2	4	-0.75
2	5	-1

Posteriormente se identificó una nueva forma de escritura de \ddot{b} , teniendo en cuenta el parámetro a y la conversión de los números decimales a fracción, obteniendo así los resultados de la Tabla 9 :

Tabla 9

Distinta forma de escritura del parámetro \ddot{b}

a	b	\ddot{b}
7	1	0
7	2	$\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{a}$
7	3	$(-1)\frac{1}{a}$

a	b	\ddot{b}
2	1	0
2	2	$\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{a}$
2	3	$(-1)\frac{1}{a}$

7	4	$\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{a}$
7	5	$\left(-\frac{4}{2}\right)\frac{1}{a}$

2	4	$\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{a}$
2	5	$\left(-\frac{4}{2}\right)\frac{1}{a}$

Finalmente, se encontró la regularidad para estos dos casos de \ddot{b} , que también sirve para todas las funciones cuadráticas de los casos anteriormente estudiados, esta es:

$$\ddot{b} = \frac{b - 1}{-2a}$$

Cuando se evalua un \ddot{b} en la expresión usual de la función cuadrática ($y(\ddot{b}) = a(\ddot{b})^2 + b(\ddot{b}) + c$) y a f (distancia entre los ejes) en la ecuación de la recta asintótica que representa a la función cuadrática en el plano PAR ($\ddot{f}(f) = \ddot{m}(f) + \ddot{b}$), se obtiene como resultado el mismo valor. En este sentido, las dos funciones evaluadas coinciden con la intersección de la recta asintótica y el eje y del plano PAR. Lo anterior pasa porque una corresponde a la imagen de la función cuadrática en el plano PAR y la otra desde una perspectiva del plano cartesiano es la imagen de la recta en el eje y evaluada en $x = f$, respectivamente.

Con base en lo anterior se afirma que $\ddot{f}(x) = y$, de lo cual despejando adecuadamente se puede deducir la expresión para encontrar el valor de \ddot{m} , dando como resultado:

$$\ddot{m}(f) + \ddot{b} = a(\ddot{b})^2 + b(\ddot{b}) + c$$

$$\ddot{m} = \frac{a(\ddot{b})^2 + b(\ddot{b}) + c - \ddot{b}}{f}$$

Es de mencionar que a la par que se realizaban los cálculos a papel y lápiz se corroboraban con el *software*, en donde se percató de un error en la comparación de los resultados, ya que en el software se trabajó a partir de números decimales y a papel y lápiz con la

fracción, dando así un error de aproximación del 0,01. Por ello los cálculos para el valor de \ddot{m} se tendrán con un error de aproximación muy pequeño.

Función cúbica

El estudio de las funciones cúbicas que se caracteriza por tener una expresión algebraica de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se hizo a través de la representación gráfica que se genera por los puntos de intersección de las rectas coordenadas en el plano PAR, de la siguiente manera:

Sea el conjunto de n rectas coordenadas l_i y cuyas intersecciones son el conjunto de puntos P_k que determinan la representación de la función cuadrática en el plano PAR, los cuales se definen como $l_k \cap l_{n-(k-1)} = P_k$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Dichos puntos arrojaron una sucesión de puntos que pertenecían a una única recta, en ese sentido, la sucesión de puntos es la representación gráfica de las funciones cúbicas en el plano PAR.

Para el estudio de las funciones cúbicas se tomaron los ocho casos que se derivan de la expresión $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, estos son: $y = ax^3$, $y = ax^3 + bx^2$, $y = ax^3 + cx$, $y = ax^3 + d$, $y = ax^3 + bx^2 + cx$, $y = ax^3 + bx^2 + d$, $y = ax^3 + cx + d$ y $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

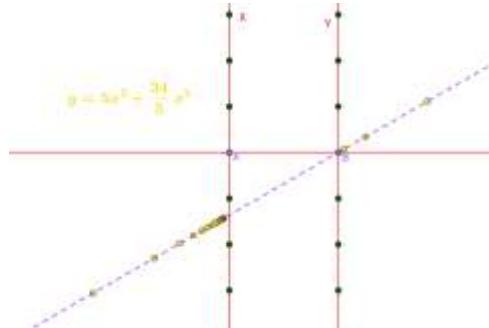
El primer caso, correspondió a las funciones cúbicas de la forma $y = ax^3$, cuya representación gráfica fue la sucesión de puntos que se encontraba ubicada en la recta de origen, donde, dependiendo del valor de a los puntos tienen una posición en la recta. Cuando $a > 0$ los puntos están ubicados en las semirrectas formadas por los sextantes I y VI y los sextantes III y IV y si $a < 0$ estaban en el segmento determinado por los sextantes II y V.

En el segundo caso, se estudiaron las funciones cubicas de la forma $y = ax^3 + bx^2$ las cuales tienen su representación gráfica a partir de la secuencia de puntos que está ubicada en uno o más de los sextantes que tiene el plano PAR, dependiendo del valor que tomen los parámetros:

- Si $a > 0$ y $b > 0$ en la Figura 14 se ve la ubicación de los puntos que está dividida entre el sextante I y IV de forma ascendente.

Figura 14

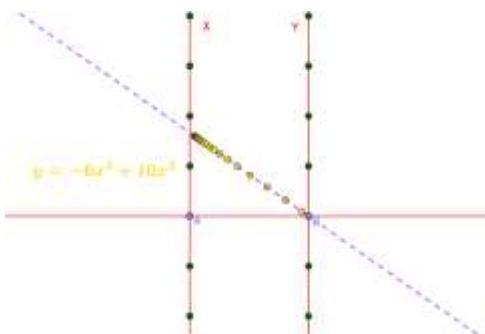
Representación secuencia de puntos $y = ax^3 + bx^2$



- Si $a < 0$ y $b < 0$ los puntos que representan a la función cúbica en el plano PAR están ubicados en el sextante V de forma ascendente.
- Si $a > 0$ y $b < 0$ que los puntos están ubicados en los sextantes III y VI de forma descendente.
- Sí $a < 0$ y $b > 0$ en la Figura 15 se muestra que la secuencia de puntos está ubicada en el sextante II de forma descendente.

Figura 15

Representación secuencia de puntos $y = -ax^3 + bx$



Para el tercer caso se estudiaron las funciones cubicas de la forma $y = ax^3 + cx$, donde su representación gráfica es similar a lo estudiado en el primer caso ya que su ubicación está en la recta de origen, y depende del valor que tienen los parámetros a y c .

- Si $a > 0$ y $c \geq 1$ los puntos están ubicados en la semirrecta determinada por los sextantes III y IV y cuando c toma valores más grandes los puntos se acercaron al eje x . Pero si se mantiene a tiene las mismas condiciones y $0 < c < 1$ los puntos estan en las dos semirrectas del plano PAR.
- Si $a < 0$ y $c < 0$ los puntos estan ubicados en segmento determinado por los sextantes II y V, y los puntos se aproximaban más al eje x cuando c se toma valores más grandes.
- Para los casos donde a y c tienen signos diferentes la secuencia de puntos no tiene un lugar en específico de la recta de origen ya que los puntos están a lo largo de la misma.

En el cuarto caso se estudiaron las funciones de la forma $y = ax^3 + d$, donde analizando sus parámetros se obtuvo que la secuencia de puntos está en uno o más sextantes.

- Si $a > 0$ y $d > 0$ la secuencia de puntos está en los sextantes I y IV de forma ascendente.
- Si $a < 0$ y $d > 0$ la secuencia de puntos está ubicada en el sextante II y los puntos están de forma ascendente.
- Si $a > 0$ y $d < 0$ los puntos están en los sextantes III y VI de forma descendente,
- Si $a < 0$ y $d < 0$ los puntos están en el sextante V, de forma descendente.

El estudio del quinto caso corresponde a las funciones cúbicas de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx$, las cuales tienen una particularidad en su representación gráfica cuando $c = 1$, ya que los puntos están determinando una recta paralela a la recta de origen. Cuya ubicación en el plano PAR depende del parámetro a , si $a > 0$ los puntos están en el sextante III y si $a < 0$ los puntos están en los sextantes I y II. En ese sentido, la representación de estas funciones gira en torno a los valores de c : $c > 1, 0 < c < 1$ y $c < 0$.

- Con $c > 1$
 - Si $a > 0, b > 0$ los puntos están en el sextante IV de forma descendente.
 - Si $a < 0$ y $b > 0$ los puntos están en los sextantes I, II y IV de forma ascendente.
 - Si $a < 0$ y $b < 0$ los puntos están en los sextantes III, V y VI de forma descendente.
 - Si $a > 0$ y $b < 0$ los puntos están en el sextante III de forma ascendente.
- Con $0 < c < 1$
 - Si $a > 0$ y $b > 0$ los puntos están en los sextantes I y IV de forma ascendente
 - Si $a < 0$ y $b > 0$ los puntos están en los sextantes I y II de forma descendente.
 - Si $a < 0$ y $b < 0$ los puntos están en los sextantes V y VI de forma ascendente.
 - Si $a > 0$ y $b < 0$ los puntos están en los sextantes III VI de forma descendente.
- Con $c < 0$
 - Si $a > 0$ y $b > 0$ los puntos están en los sextantes I, II y IV de forma ascendente.
 - Si $a < 0$ y $b > 0$ los puntos están en el sextante II de forma descendente.
 - Si $a < 0$ y $b < 0$ los puntos están en el sextante V de forma ascendente.
 - Si $a > 0$ y $b < 0$ los puntos están en los sextantes III, V y VI de forma descendente.

Para el sexto caso, se toman las funciones cúbicas de la forma $y = ax^3 + bx^2 + d$ en donde la ubicación de la secuencia de puntos se determina a partir de las ocho posibles combinaciones que se presentan en los valores de los parámetros.

- Si $a > 0, b > 0$ y $d > 0$ los puntos están en los sextantes I y IV de forma ascendente.
- Si $a < 0, b < 0$ y $d < 0$ los puntos están en el sextante V de forma descendente.
- Si $a > 0, b > 0$ y $d < 0$ los puntos están en los sextantes III, IV y V de forma descendente.

- Si $a > 0, b < 0$ y $d < 0$ los puntos están en los sextantes I y IV de forma ascendente.
- Si $a > 0, b < 0$ y $d > 0$ los puntos están en los sextantes I y IV de forma ascendente.
- Si $a < 0, b > 0$ y $d < 0$ los puntos están en los sextantes II y V de forma descendente.
- Si $a < 0, b > 0$ y $d > 0$ los puntos están en el sextante II de forma ascendente.
- Si $a < 0, b < 0$ y $d > 0$ los puntos están en los sextantes II y V de forma ascendente.

En el séptimo caso, se estudiaron las funciones de cúbicas de la forma $y = ax^3 + cx + d$,

donde como en el caso anterior se analizaron las ocho posibles combinaciones de los valores que pueden tomar los parámetros.

- Si $a > 0, c > 0$ y $d > 0$ los puntos están en el sextante IV de forma ascendente.
- Si $a < 0, b < 0$ y $d < 0$ los puntos están en el sextante V de forma descendente.
- Si $a > 0, c > 0$ y $d < 0$ los puntos están en el sextante III de forma descendente.
- Si $a > 0, c < 0$ y $d > 0$ los puntos están en los sextantes II y IV de forma ascendente.
- Si $a > 0, c < 0$ y $d < 0$ los puntos están en los sextantes III y V de forma descendente.
- Si $a < 0, c > 0$ y $d > 0$ los puntos están en los sextantes II y IV de forma ascendente.
- Si $a < 0, c > 0$ y $d < 0$ los puntos están en los sextantes III y V de forma descendente.
- Si $a < 0, c < 0$ y $d > 0$ los puntos están en el sextante II de forma ascendente.

Por último, se estudiaron los casos donde la función cúbica es de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dando como resultados que la ubicación de la secuencia de puntos está en uno, dos, tres o varios sextantes.

La secuencia de puntos ubicados en un único sextante es porque los parámetros tienen las siguientes condiciones:

- Si $a < 0, b > 0, c < 1$ y $d > 0$ los puntos están en el sextante II de forma ascendente.

- Si $a > 0, b < 0, c > 1$ y $d < 0$ los puntos están en el sextante III de forma descendente.
- Si $a > 0, b > 0, c \geq 1$ y $d > 0$ los puntos están en el sextante IV de forma ascendente.
- Sí $a < 0, b < 0, c < 1$ y $d < 0$ los puntos están en el sextante V de forma ascendente.

La secuencia de puntos ubicados en dos sextantes es porque los parámetros tienen las siguientes condiciones:

- Si $a > 0, b > 0, c > 1, d < 0$ y $a > 0, b < 0, c > 1, d > 0$ los puntos están en los sextantes III y IV de forma descendente y ascendente, respectivamente.
- Si $a < 0, b > 0, c < 1, d < 0$ y $a < 0, b < 0, c < 1, d > 0$ los puntos están en los sextantes II y V de forma descendente y ascendente, respectivamente.
- Si $a < 0, b > 0, c > 1, d > 0$ los puntos están en los sextantes II y IV de forma ascendente.
- Si $a > 0, b < 0, c < 1$ y $d < 0$ los puntos están en los sextantes III y V de forma descendente.

La secuencia de puntos ubicado en tres sextantes es porque los parámetros tienen las siguientes condiciones:

- Si $a > 0, b > 0, c < 1$ y $d > 0$ los puntos están en los sextantes I, II y IV de forma ascendente.
- Sí $a < 0, b < 0, c \geq 1$ y $d < 0$ los puntos están en los sextantes III, V y VI de forma descendente.

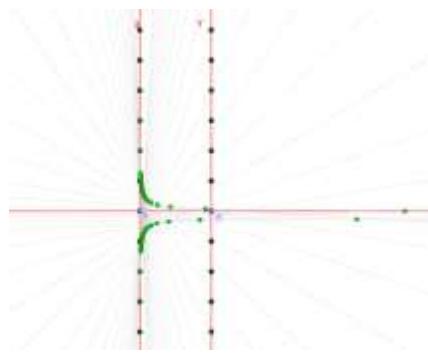
- Si $a > 0, b < 0, c < 1$ y $d > 0$, $a < 0, b < 0, c > 1$ y $d > 0$ y $a < 0, b > 0, c > 1$ y $d <$ los puntos están en los sextantes I, II y IV de forma ascendente.

Durante el proceso de exploración se evidenciaron dos particularidades que correspondieron a: la secuencia de puntos T_k mencionados en la función cuadrática, los cuales forman curvas que dependiendo de la función cúbica estas tienen alteraciones, dichas curvas se van a explicar en los primeros cuatro casos y los otros cuatro casos se dejan a ejercicio del lector. El segundo corresponde a una particularidad en la función cúbica de la forma $y = ax^3 + cx$, donde algunas de sus rectas coordenadas son paralelas.

Para el primer caso, las funciones cúbicas $y = ax^3$ en la Figura 16 se muestra que los puntos T_k forman dos curvas simétricas respecto a la recta de origen, sin embargo, la posición de los puntos cambia cuando a toma valores negativos y positivos. Si $a > 0$ los puntos están en los sextantes III y IV y si $a < 0$ los puntos están ubicados en el sextante II y V.

Figura 16

Curvas de rectas coordenadas intersecadas

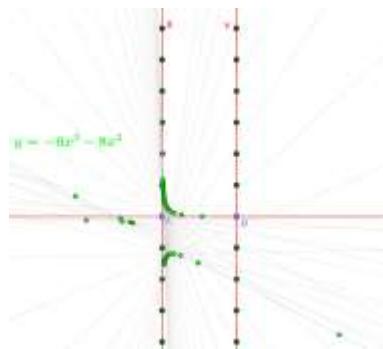


En el segundo caso cuando $y = ax^3 + bx^2$ los puntos T_k tienen cuatro comportamientos en donde se pueden presentar una o las dos curvas, las cuales dependen de los valores de los parámetros a y b anteriormente estudiados.

- Si $a > 0$ y $b > 0$ los puntos T_k forman solo una curva que está ubicada en el sextante III
- Si $a < 0$ y $b < 0$ en la Figura 17 se muestra que los puntos T_k forman dos curvas ubicadas en los sextantes II y V respectivamente,

Figura 17

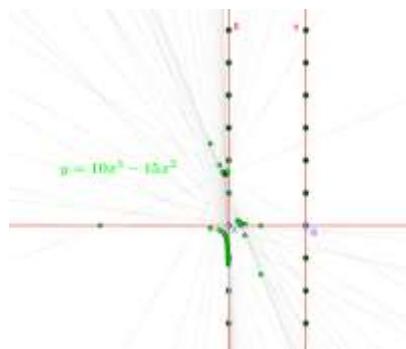
Representación curvas $y = -ax^3 - bx^2$



- Si $a > 0$ y $b < 0$ en la Figura 18 se muestra que los puntos T_k forman una sola curva en el sextante V.

Figura 18

Representación curvas de $y = ax^3 - bx$

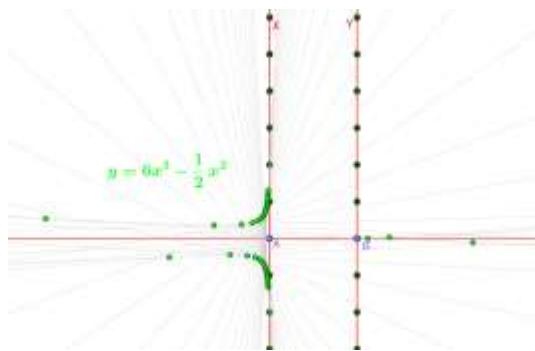


- Si $a < 0$ y $b > 0$ los puntos T_k forman una curva cuyos puntos están ubicados en el sextante V.

El tercer caso corresponde a las funciones cúbicas de la forma $y = ax^3 + cx$, donde se presenta una similaridad con los puntos T_k del primer caso, puesto que se forman dos curvas simétricas respecto a la recta de origen. Por un lado, cuando $a > 0$ y $c \geq 1$ $0 < c < 1$ en la Figura 19 gráfica 18 se identifica que los puntos están ubicados en los sextantes III y IV y otro lado, cuando $a < 0$ y $c < 0$ los puntos están ubicados en los sextantes II y V. Sin embargo, en las funciones cúbicas donde los parámetros a y c tiene signos opuestos no se presenta ninguna curva, porque la sucesión de puntos que representa a la función en el plano PAR está ubicada en toda la recta de origen.

Figura 19

Representaciones de curvas con $a > 0$ y $0 < c < 1$



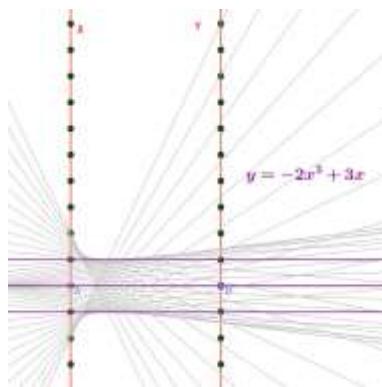
Para el cuarto caso, en las funciones cúbicas de la forma $y = ax^3 + d$ las curvas que son formadas por los puntos T_k se presentan de acuerdo con los valores de los parámetros a y d .

- Si $a > 0$ y $d > 0$ los puntos T_k forman una curva ubicada en el sextante IV.
- Si $a < 0$ y $d > 0$ los puntos T_k forman una curva y están ubicados en el sextante II.
- Si $a > 0$ y $d < 0$ los puntos T_k forman una curva que está ubicada en el sextante III.
- Si $a < 0$ y $d < 0$ los puntos T_k forman dos curvas que están ubicada en los sextantes II y V.

La segunda particularidad corresponde a las rectas coordenadas de las funciones cúbicas de la forma $y = ax^3 + cx$, ya que, si $a > 0$ y $c = -(a - 1)$ y $a < 0$ y $c = (|a| + 1)$ las rectas coordenadas $\overleftrightarrow{(0,0)}, \overleftrightarrow{(1,1)}$ y $\overleftrightarrow{(-1,-1)}$ son paralelas. En la Figura 20 se muestra un ejemplo específico.

Figura 20

Coordenadas Paralelas



Teniendo en cuenta que la representación de las funciones cúbicas es la secuencia de puntos que está contenida en una recta, es de mencionar que no se logró identificar la regularidad de la secuencia debido a la programación realizada en GeoGebra, ya que, entre cada par de puntos hay infinitos puntos. Por lo anterior, para encontrar las expresiones algebraicas que permitan el paso del plano cartesiano al plano PAR, se toma como referencia la recta que está determinada como: $\tilde{f}(x) = \tilde{m}x + \tilde{b}$, donde la escritura de sus elementos se encontró a partir de los casos anteriormente estudiados de la función cónica en el plano PAR, dando como resultado dos posibles formas.

Forma #1

La primera expresión que se determinó \tilde{m} , a partir de tomar ejemplos específicos de funciones cúbicas e ir cambiando el valor de sus parámetros para así identificar las variaciones que presentaba e incorporarlas a la expresión.

Como primer paso se tomó un ejemplo de las funciones cúbicas de la forma $y = ax^3 + bx^2$, donde en la Tabla 10 se muestran los resultados cuando $a = 1$, $b \neq 0$ y $f = 4$.

Tabla 10

Resultados de $y = x^3 + bx^2$

b	\tilde{m}
1	0.25
2	0.5
3	0.75
4	1
5	1.25

Analizando la diferencia que tenía cada par de valores, se encontró que el resultado es el mismo 0.25, la cual equivale a escribir $\frac{1}{f}$, teniendo en cuenta la influencia de los parámetros a y b se obtiene que la expresión de \tilde{m} , para estos casos es:

$$\tilde{m} = \frac{b}{f(a)}$$

Continuando y teniendo presente que el valor de \tilde{m} dependía de los demás parámetros de la función cónica, se tomó las funciones de la forma $y = ax^3 + d$, donde $a = 1$, $d \neq 0$ y $f = 4$. Dando como resultado que la diferencia entre los valores de \tilde{m} era la misma, indicando así que para estas funciones la expresión es:

$$\tilde{m} = \frac{d}{f}$$

Con las expresiones anteriores y con los casos estudiados se evidenció que el valor del parámetro c no estaba, pero influía fuertemente en \tilde{m} , es por ello se tomó a las funciones cúbicas de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx$ y en la Tabla 11 están los resultados de \tilde{m} cuando $a = 2, b = 7, c \neq 0, f = 4$.

Tabla 11

Resultados de $y = 2x^3 + 7x^2 + cx$

c	\tilde{m}
1	-0.5
2	-0.125
3	-0.25
4	-0.375
5	-0.5
6	-0.625

Analizando la diferencia entre los valores de \tilde{m} , se obtuvo que es $\frac{1}{8}$ lo cual se puede escribir como $\frac{1}{f(a)}$, siendo análogo a la primera generalización. Es por ello, por lo que se toma la ecuación $\frac{b}{f(a)}$ y se incluye c teniendo en cuenta la condición que debe tener para generar un valor, ya que si $c = 1$ la recta es constante. Obteniendo la siguiente expresión:

$$\tilde{m} = -\frac{b(c-1)}{f(a)}$$

Ahora bien, en las ecuaciones $\frac{d}{f}$ y $-\frac{b(c-1)}{f(a)}$ se observa que los cuatro parámetros de la función cúbica están involucrados, lo cual permitió agruparlas y operarlas para así obtener la expresión final de \tilde{m} .

$$\tilde{m} = \frac{d}{f} - \frac{b(c-1)}{f(a)}$$

$$\tilde{m} = \frac{b - bc + da}{f(a)}$$

Para encontrar la expresión de \tilde{b} , se tuvo en cuenta que los únicos parámetros de la función cúbica que interferían eran a y b . Por lo tanto, en la Tabla 12

Resultado de \tilde{b} con la función $y = 5x^3 + bx^2$ se muestran los resultados de tomar una función cúbica de la forma $y = ax^3 + bx^2$ con $a = 5$, $b \neq 0$ y $f = 4$.

Tabla 12

Resultado de \tilde{b} con la función $y = 5x^3 + bx^2$

b	\tilde{b}
1	-0.2
2	-0.4
3	-0.6
4	-0.8

Posteriormente, reescribiendo los resultados en números decimales se evidenció que \tilde{b} , se escribe de la forma:

$$\tilde{b} = -\frac{b}{a}$$

Por último, con las dos últimas ecuaciones se obtiene la expresión de la recta que representa la expresión de la función cubica en el plano PAR con los parámetros a, b, c y d .

$$\tilde{f}(x) = \left(\frac{b - bc + da}{F(a)} \right) x + \left(-\frac{b}{a} \right)$$

Forma #2

Para encontrar la expresión de \tilde{m} y \tilde{b} , se tuvo en cuenta dos ecuaciones y la secuencia de puntos. La primera ecuación es $\tilde{f}(x) = \tilde{m}x + \tilde{b}$ que hace referencia a la recta donde está contenida la secuencia de puntos, la segunda es $\hat{y} = \hat{m}x + \hat{b}$ representando la ecuación de las rectas coordenadas del plano PAR y un punto de la secuencia es determinado como $P(\widetilde{x_i}, \widetilde{y_i})$. Lo anterior con el objetivo de encontrar las expresiones teniendo en cuenta lo ya conocido en el plano cartesiano, determinar la ecuación de la recta a partir de dos puntos. Primero encontrando la ecuación de las rectas coordenadas, luego los dos puntos de intersección que las rectas generan y por último utilizando esos puntos para encontrar la ecuación de la recta que contiene a la secuencia de puntos.

El primer paso, correspondió a una particularidad que se encontraba al generar la secuencia de puntos que representa a la función cúbica en el plano PAR, ya que los valores que se tomaban en el eje x tienen que ser simétricos respecto a la recta de origen para determinar el punto de la secuencia. En ese sentido, si se toma a dos valores en el eje x $t_1, -t_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ se obtendrán dos rectas coordenadas que pasan por esos valores y determinaran el punto que pertenece a la secuencia. Con lo anterior, trasladado al plano cartesiano tomando a la recta de origen y el eje x del plano PAR como eje x y y del plano cartesiano respectivamente, se obtiene que las coordenadas que corresponden a esos valores son $(0, t_1)$ y $(0, -t_1)$.

Luego se evaluó el valor de t_1 y $-t_1$ en la ecuación cartesiana de la función cúbica:

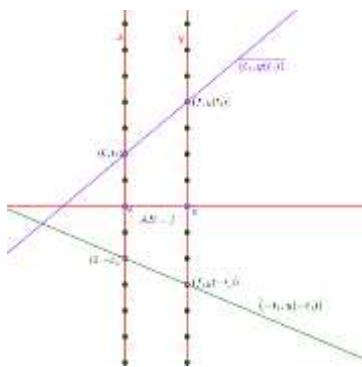
$$y(t_1) = a(t_1)^3 + b(t_1)^2 + c(t_1) + d \quad y \quad y(-t_1) = a(-t_1)^3 + b(-t_1)^2 + c(-t_1) + d$$

Dando como resultado las rectas coordenadas del eje y del plano PAR es decir

$\overleftrightarrow{(t_1, y(t_1))} y \overleftrightarrow{(-t_1, y(-t_1))}$. Ahora, teniendo como referencia el plano cartesiano y considerando que el eje y del plano PAR en el plano cartesiano es $x = f$, entonces, en la Figura 21 se puede observar que los puntos de intersección de la recta coordenada con $x = f$ están definidos en su primera coordenada como f y en la segunda como la imagen que corresponde a la función cúbica en el plano PAR es decir $(f, y(t_1))$ y $(f, y(-t_1))$.

Figura 21

Puntos $(0, t_1)$, $(0, -t_1)$, $(f, y(t_1))$ y $(f, y(-t_1))$



Con los cuatro puntos $(0, t_1)$, $(0, -t_1)$, $(f, y(t_1))$ y $(f, y(-t_1))$, se pudo encontrar las pendientes de las dos rectas coordenadas que van a determinan el punto de la secuencia, utilizando la fórmula de la pendiente:

$$\widehat{m}_1 = \frac{y(t_1) - t_1}{f} \quad y \quad \widehat{m}_2 = \frac{y(-t_1) + t_1}{f}$$

Dando como resultado que las ecuaciones de las rectas coordenadas son:

$$\hat{y} = \frac{y(t_1) - t_1}{f} x + \hat{b} \quad y \quad \hat{y} = \frac{y(-t_1) + t_1}{f} x - \hat{b}$$

Es de mencionar que, para facilitar los cálculos, las rectas coordenadas vistas desde el plano cartesiano van a tener su punto de corte en t_1 y $-t_1$, por tal motivo se toma las ecuaciones de las rectas como:

$$\hat{y} = \frac{y(t_1) - t_1}{f}x + t_1 \quad y \quad \hat{y} = \frac{y(-t_1) + t_1}{f}x - t_1$$

Para el segundo paso se encontró el punto de intersección de las rectas coordenadas que pertenece a la secuencia de puntos que representa a la función cúbica en el plano PAR, para ello se igualaron las ecuaciones de las rectas coordenadas y posteriormente se reemplazaron con las expresiones de las pendientes \widehat{m}_1 y \widehat{m}_2 para así poder despejar x :

$$\frac{y(t_1) - t_1}{f}x + t_1 = \frac{y(-t_1) + t_1}{f}x - t_1$$

$$\widehat{m}_1 x + t_1 = \widehat{m}_2 x - t_1$$

$$x(\widehat{m}_1 - \widehat{m}_2) = -2t_1$$

$$x = \frac{-2t_1}{(\widehat{m}_1 - \widehat{m}_2)}$$

Luego, se realizó la resta de las pendientes, con la finalidad de dejar expresado todo en los términos que ya se conocían, dando como resultado:

$$\widehat{m}_1 - \widehat{m}_2 = \frac{a(t_1)^3 + b(t_1)^2 + c(t_1) + d - t_1}{f} - \frac{a(-t_1)^3 + b(-t_1)^2 + c(-t_1) + d + t_1}{f}$$

$$\widehat{m}_1 - \widehat{m}_2 = \frac{2a(t_1)^3 + 2c(t_1) - 2t_1}{f}$$

$$\widehat{m}_1 - \widehat{m}_2 = \frac{2t_1(a(t_1)^2 + c - 1)}{f}$$

Reemplazando el resultado de la resta en la expresión de x se obtuvo:

$$x = \frac{-2t_1}{\left(\frac{2t_1(a(t_1)^2 + c - 1)}{f} \right)}$$

$$x = \frac{-f}{a(t_1)^2 + c - 1}$$

Con el valor de x , se sustituyó y se operó en una ecuación de las rectas coordenadas. Lo anterior, con la finalidad de encontrar la posición del punto que está en la sucesión, obteniendo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \frac{a(t_1)^3 + b(t_1)^2 + c(t_1) + d + t_1}{f} \left(\frac{-f}{a(t_1)^2 + c - 1} \right) + t_1 \\ \hat{y} &= - \left(\frac{a(t_1)^3 + b(t_1)^2 + c(t_1) + d + t_1 + a(t_1)^3 + c(t_1) - t_1}{a(t_1)^2 + c - 1} \right) \\ \hat{y} &= \frac{c(t_1)(a - 1) - b(t_1)^2 - d}{a(t_1)^2 + c - 1}\end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección de las rectas coordenadas son:

$$P_1 \left(\frac{-f}{a(t_1)^2 + c - 1}, - \frac{b(t_1)^2 + d}{a(t_1)^2 + c - 1} \right)$$

Es de notar que, para encontrar la recta que contiene a la sucesión de puntos, es necesario tener la posición de dos puntos P_1 y P_2 . En el caso de P_2 , su ubicación se encuentra tomando otros valores t_2 y $-t_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ y realizando un procedimiento análogo se obtiene que su ubicación en el plano cartesiano está determinada como:

$$P_2 \left(\frac{-f}{a(t_2)^2 + c - 1}, - \frac{b(t_2)^2 + d}{a(t_2)^2 + c - 1} \right)$$

Para finalizar, se encontró la ecuación de la recta que contiene a la secuencia de puntos, haciendo uso de los puntos P_1 y P_2 y reemplazando de manera adecuada en la fórmula de pendiente. Obteniendo el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
\tilde{m} &= \frac{-\frac{b(t_2)^2 + d}{a(t_2)^2 + c - 1} + \frac{b(t_1)^2 + d}{a(t_1)^2 + c - 1}}{\frac{-f}{a(t_2)^2 + c - 1} + \frac{f}{a(t_1)^2 + c - 1}} \\
\tilde{m} &= \frac{-\frac{(b(t_2)^2 + d)(a(t_1)^2 + c - 1) + (b(t_1)^2 + d)(a(t_2)^2 + c - 1)}{(a(t_2)^2 + c - 1)(a(t_1)^2 + c - 1)}}{\frac{-F(a(t_1)^2 + c - 1) + F(a(t_2)^2 + c - 1)}{(a(t_2)^2 + c - 1)(a(t_1)^2 + c - 1)}} \\
\tilde{m} &= \frac{\frac{(b - bc + da)(t_2^2 - t_1^2)}{(a(t_2)^2 + c - 1)(a(t_1)^2 + c - 1)}}{\frac{Fa(t_2^2 - t_1^2)}{(a(t_2)^2 + c - 1)(a(t_1)^2 + c - 1)}} \\
\tilde{m} &= \frac{b - bc + da}{Fa}
\end{aligned}$$

Con la expresión de la pendiente y el punto P_1 , se encontró la ecuación de la recta que contiene a la secuencia de puntos que representa a la función cúbica en el plano PAR:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= \left(\frac{b - bc + da}{fa} \right) \left(x + \frac{f}{a(t_1)^2 + c - 1} \right) + \left(-\frac{b(t_1)^2 + d}{a(t_1)^2 + c - 1} \right) \\
\tilde{f}(x) &= \left(\frac{b - bc + da}{fa} \right) x + \left(\frac{b - bc + da}{a(a(t_1)^2 + c - 1)} - \frac{b(t_1)^2 + d}{a(t_1)^2 + c - 1} \right) \\
\tilde{f}(x) &= \left(\frac{b - bc + da}{fa} \right) x + \left(\frac{b - bc + da - ab(t_1)^2 - ad}{a(a(t_1)^2 + c - 1)} \right) \\
\tilde{f}(x) &= \left(\frac{b - bc + da}{fa} \right) x + \left(\frac{b(1 - c - a(t_1)^2)}{a(a(t_1)^2 + c - 1)} \right) \\
\tilde{f}(x) &= \left(\frac{b - bc + da}{fa} \right) x - \frac{b(a(t_1)^2 + c - 1)}{a(a(t_1)^2 + c - 1)} \\
\tilde{f}(x) &= \left(\frac{b - bc + da}{fa} \right) x - \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

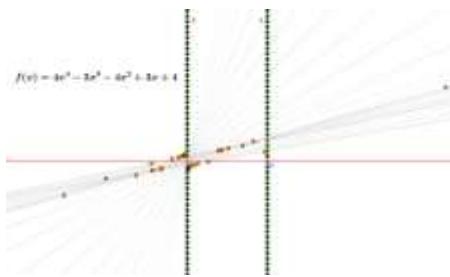
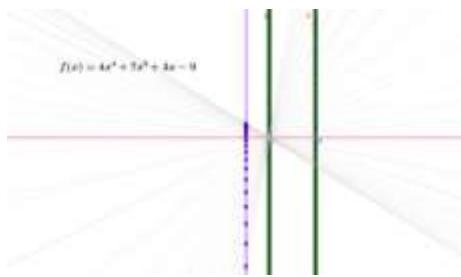
Funciones pares e impares

El comportamiento de las funciones pares e impares se estudió de acuerdo con los puntos de intersección que determinaron las representaciones de las funciones cuadráticas y cúbicas en plano PAR, donde las intersecciones de las funciones cuadráticas se definieron como el conjunto de n rectas coordenadas l_i y cuyas intersecciones son el conjunto de puntos T_k que definen la representación de la función en el plano PAR, los cuales se determinan como $l_k \cap l_{k+1} = \{T_k\}$ con $K \in \mathbb{Z}^+$. Por su parte, las funciones cúbicas son el conjunto n rectas coordenadas l_i y cuyas intersecciones son el conjunto de puntos P_k que definen la representación de la función en el plano PAR, los cuales se determinan como $l_k \cap l_{n-(k-1)} = P_k$, $K \in \mathbb{Z}^+$.

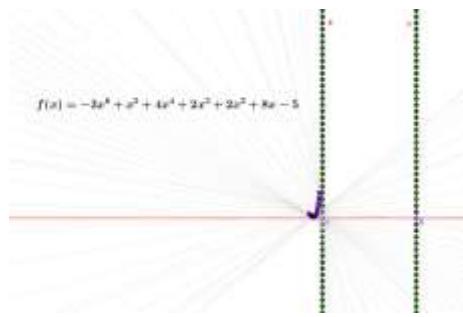
Con los dos conjuntos de puntos T_k y P_k respectivamente se logró mostrar particularidades de su comportamiento con las funciones de cuarto hasta séptimo grado. En ese sentido, para este apartado se presentará el comportamiento de los puntos si lo tienen, en cada una de las funciones, con la finalidad de encontrar una generalidad en la representación gráfica de las funciones pares e impares.

Funciones pares

En primer lugar, las funciones de cuarto grado de la forma $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ en el plano PAR se caracterizan por tener un comportamiento similar en los dos conjuntos de puntos. En los puntos T_k se tiene una representación formada por dos curvas que en algunos casos es parecido a una hipérbola y en casos como en la Figura 22 no se puede identificar, por dicho comportamiento, se le asigna el nombre de PAR-Hiperbólica. Por otro lado, los puntos P_k presentaron dos comportamientos que dependían del parámetro b , cuando $b = 0$ en la Figura 23 los puntos de intersección forman una recta perpendicular a la recta de origen y como caso contrario $b \neq 0$ los puntos formaban una curva PAR-Hiperbólica.

Figura 22*Representación con puntos T_k* **Figura 23***Representación con puntos P_k* 

Posteriormente en las funciones de sexto grado que tienen como expresión algebraica $y = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ las cuales solo contaron con una representación en el plano PAR determinada por el conjunto de los puntos P_k , en los cuales se forma una recta o una curva dependiendo de las condiciones de los parámetros b y d . La recta se genera cuando $b = 0$ y $d = 0$ siendo esta perpendicular a la recta de origen y caso contrario cuando $b \neq 0$ y $d \neq 0$ en la Figura 24 se muestra cómo se forma una sección de la curva PAR-Hiperbólica, la cual no se pudo definir porque no se encontró una que tomara todo el conjunto de puntos.

Figura 24*Representación con P_k* 

Con base en lo anterior y lo estudiado y encontrado en la función cuadrática, se tiene que cuando se gráfica una función par en el plano PAR se van a encontrar dos representaciones, la primera es una recta euclíadiana perpendicular a la recta de origen del plano PAR determinada por el conjunto de puntos P_k y la segunda una posible curva a los extremos de las rectas coordenadas.

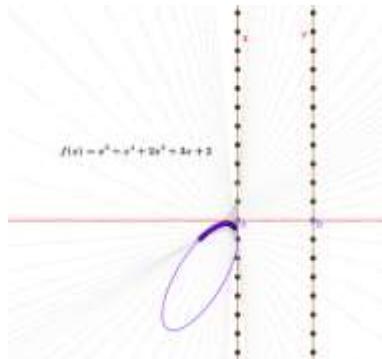
Funciones impares

Las funciones de quinto grado cuya forma es $y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, en el plano PAR tuvieron dos representaciones que contienen al conjunto de puntos P_k : la secuencia de puntos y la elipse.

Cuando la función es $y = ax^5 + cx^3 + ex + f$ se genera una secuencia de puntos que está contenida en una recta de la forma $f(x) = mx + b$, comportamiento similar a las funciones cúbicas. La elipse en la Figura 25 por su parte se genera cuando los parámetros de la función a, c y e tienen las siguientes características $a > 0, e > 0$ y $-e < c < e$.

Figura 25

Representación elipse con P_k



En las funciones de séptimo grado $y = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h$ los puntos no tenían un comportamiento el cual se pudiera generalizar, sin embargo, si los coeficientes $b, d, f = 0$ los puntos P_k generan una sucesión de puntos contenidas en una recta de la forma $f(x) = mx + b$.

Teniendo en cuenta lo estudiado en la función lineal y cúbica y lo encontrado en las funciones de quinto y séptimo grado, se concluye que, cuando se gráfica una función impar en el plano PAR se obtiene que su representación gráfica es una secuencia de puntos que está contenida en una única recta.

Capítulo IV. Resultados y conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones y reflexiones que surgieron a lo largo del desarrollo y construcción de este documento, expresando la influencia de los aspectos metodológicos en este; y el alcance que se tuvo en relación con los objetivos específicos los cuales permitieron el cumplimiento del objetivo general. Además, estarán inmersos los resultados que se obtuvieron durante el estudio, la respuesta a las preguntas planteadas y las posibles investigaciones que se pueden abordar a futuro teniendo como base el mismo. Por último, se expone cómo esta investigación influyó en mi formación personal y profesional como futura profesora de matemáticas.

Aspectos metodológicos

Teniendo en cuenta las cuatro fases planteadas por Artigue et al. (1995) y las características del método inductivo y deductivo tomadas de Abreu (2014) y Samper et al. (2010) respectivamente se hace necesario evidenciar en qué parte del desarrollo del documento se vieron o no inmersas, para ello se tomará cada fase y se analizará lo respectivo. La primera fase, *análisis preliminar*, no se contempla de una manera específica en el estudio, ya que las formas de enseñanza del objeto no se tomaron en cuenta, sin embargo, si están presentes los conocimientos que se adquirieron en la formación académica para encontrar particularidades de las funciones polinómicas en el plano PAR.

La segunda fase de *concepción y análisis*, a priori se presenta en la construcción del marco de referencia, ya que se vio la necesidad de estudiar objetos, conceptos, procedimientos y habilidades utilizados en el plano cartesiano para la enseñanza y el aprendizaje en la educación básica secundaria y media. Así, se utilizaron los anteriores conocimientos como una guía

conceptual que permitió tener una claridad y orden durante el estudio, además de permitir tener un buen dominio de las diferentes representaciones gráficas y algebraicas que tiene un objeto matemático.

La tercera fase de *experimentación* se centra especialmente en el capítulo de estudio de las funciones polinómicas en el plano PAR, el cual es organizado de la misma manera que el marco de referencia: de lo sencillo a lo complejo analizando las representaciones algebraicas y gráficas. Así mismo, dentro de esta fase se ve el uso del método inductivo y deductivo, ya que el método inductivo permitió hacer los hallazgos directamente en el plano PAR debido a que se partía de ejemplos muy particulares para llegar posteriormente a la generalización y el deductivo evidenciado cuando se necesitó tomar algo de lo ya formalizado en el plano cartesiano para utilizarlo en el plano PAR.

La última fase de análisis *a posteriori* y evaluación se evidencia en el presente capítulo: resultados y conclusiones, en el cual se identifican diferencias y similitudes en lo expuesto en el marco de referencia y lo encontrado en el estudio de las funciones polinómicas en el plano PAR.

En relación con los objetivos específicos

La construcción del marco de referencia correspondiente al capítulo II dio el cumplimiento del primer objetivo específico planteado para este trabajo, puesto que en él se abordaron distintos asuntos que le dieron sentido y orden al documento permitiendo enfocar el objeto de estudio, mediante los temas que allí se trataron: la noción de representación enfocada en el aprendizaje y las habilidades que los estudiantes desarrollan cuando las utilizan, el estudio de las funciones polinómicas en el plano cartesiano y las características principales que tiene el plano PAR. Además, se incluyeron asuntos emergentes que se consideraron importantes como es el caso del

conocimiento que debe tener el profesor de matemáticas desde lo propuesto por Stacey (2008) y los recursos tecnológicos en y para la práctica docente.

Particularmente, el estudio de las funciones polinómicas en el plano cartesiano consistió en analizar cada función a partir de su expresión algebraica identificando el comportamiento que tenía su representación gráfica, de acuerdo con las modificaciones realizadas a sus parámetros. Lo anterior permitió que el estudio de las funciones polinómicas en el plano PAR se hiciera de manera ordenada y de forma análoga a lo que normalmente se realiza en el plano cartesiano, con ello los resultados obtenidos de sus representaciones se lograron identificar de manera más detallada, permitiendo una mejor comprensión.

Con lo anterior se da paso al segundo objetivo específico: la caracterización e identificación de las representaciones de las funciones polinómicas en el plano PAR, en donde se vio la necesidad de tener un apoyo visual que permitiera identificar de manera rápida y eficaz el comportamiento de las representaciones gráficas de las funciones. Por tal motivo, adicionalmente se construyó un programa en el software *GeoGebra* el cuál se puede encontrar en el siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/m/wkapgb52>, en donde según la expresión algebraica usual ingresada se pueden visualizar las rectas coordenadas, los puntos de intersección que tienen las rectas y el objeto geométrico que ellos forman en el plano PAR.

De manera específica, los objetos geométricos que se evidenciaron en cada una de las funciones fueron:

La representación gráfica de la función lineal en el plano PAR está determinada por los dos parámetros de la expresión algebraica usual de la función, dando como resultado que su comportamiento es dependiente del parámetro m , ya que si $m = 1$ la representación de la función polinómica en el plano PAR son infinitas rectas coordenadas que entre sí son paralelas, caso contrario cuando $m \neq 1$ donde su representación es un punto.

En las funciones cuadráticas su representación gráfica es una recta asintótica que hace parte de una hipérbola y de acuerdo con los parámetros de la expresión algebraica usual esta va cambiando, además, cuando el parámetro $b \neq 1$ se forma una recta perpendicular a la recta de origen del plano PAR, con distintos puntos de intersección.

Las funciones cúbicas se representan gráficamente en el plano PAR, por una sucesión de puntos contenidos en una misma recta, los cuales son determinados a partir de los valores que tengan los parámetros. En dichas funciones, también se evidenció otro comportamiento interesante con otra sucesión de puntos que son determinados por las rectas coordenadas, los cuales forman curvas que están ubicadas a los extremos de las rectas coordenadas.

Por último, se analizaron las funciones de cuartos, quinto, sexto y séptimo grado que permitieron llegar a una generalidad de la representación de las funciones pares e impares: las funciones pares van a tener dos representaciones una curva o una recta perpendicular a la recta de origen y las funciones impares en el plano PAR son una secuencia de puntos.

Con base en lo anteriormente mencionado surgen y se proponen las siguientes preguntas para futuros trabajos ¿cuál o cuáles serán las representaciones que tienen las funciones no polinómicas en el Plano PAR?

En cuanto al programa, para el caso de la función lineal no solo se cuenta con el paso del plano cartesiano al plano PAR, sino que, también se pueden ingresar los elementos de la expresión algebraica que tiene la función en el plano PAR y este arrojará la expresión de la función usual. Además, es de mencionar que la inclusión emergente del programa permitió: (1) generar un dinamismo que no era posible tener si se construía a papel y lápiz cada una de las funciones, lo cual tomaba más tiempo y podía generar errores al no tener exactitud con ciertos valores, dado que las funciones están establecidas de R en R; (2) identificar el objeto geométrico

que representaba las funciones en el plano PAR y (3) evidenciar características particulares de cada función en el plano PAR.

Como es de notar, el programa no era parte del interés inicial del estudio y por tanto del documento, se reconoce y sugiere que este puede ser mejorado en futuras investigaciones. A su vez, con la creación de este programa se dio respuesta a la pregunta “¿se podrán incorporar recursos tecnológicos para el estudio de las representaciones de las funciones polinómicas en el plano PAR? Si es el caso, ¿cómo, para qué y cuáles?” planteadas en la justificación de este trabajo. Puesto que lo anterior evidenció la importancia que tienen los recursos tecnológicos en el aprendizaje de cualquier objeto matemático, el cual se puede manipular, modificar según sea la necesidad del momento, generando en los estudiantes habilidades, competencias o procesos significativos como lo son la visualización y la argumentación.

Finalmente, para dar cuenta del cumplimiento del tercer objetivo específico sobre la escritura de los resultados y conclusiones del estudio de las funciones polinómicas en el plano PAR, haciendo énfasis en cómo este tipo de estudios influyen en la formación de futuros profesores de matemáticas, se alude a dos asuntos referidos en este mismo capítulo. El primero en relación con el alcance de los objetivos específicos y el objetivo general, y el segundo en torno a la experiencia profesional y personal que dejó el trabajo y que se presenta posteriormente.

En relación con el objetivo general

A partir de lo expuesto previamente sobre los objetivos específicos y en general todo el extenso de este documento, el objetivo general “Estudiar las representaciones de las funciones polinómicas en el plano PAR, teniendo en cuenta las propiedades y características de estas” en términos generales, se puede concluir que fue alcanzado en su totalidad. Dado que, el estudio permitió detallar algunas de las características del objeto matemático, como lo fueron, sus

representaciones gráficas a través de determinar los puntos que se forman por las intersecciones de las rectas coordenadas y las expresiones algebraicas que las identifican en dicho plano, las cuales surgen por el objeto que forman los puntos representativos. A su vez, en algunas funciones se identificaron las expresiones que permitieron pasar de la expresión algebraica usual a la comprendida en relación con el plano PAR y viceversa.

En ese sentido, a partir de las representaciones de las funciones polinómicas en el plano PAR se logró evidenciar el objeto geométrico que las identifica en el plano PAR, dando así respuesta a la pregunta ¿Cuál es la representación de las funciones polinómicas en el plano PAR? Es de notar que la respuesta no es única, puesto que las funciones pueden tener dos o más representaciones dependiendo del dinamismo que se presenta en la intersección de las rectas coordenadas. Adicionalmente, en algunas de estas representaciones las cuales no fueron seleccionadas como la representación a considerar para caracterizar la función, se logró identificar el objeto geométrico; y en otras, se presentó el análisis realizado de lo que se observó, de acuerdo con las modificaciones que se le iban haciendo a los parámetros de la expresión algebraica usual. Por ello, se deja abierto el estudio de estas representaciones teniendo en cuenta los comportamientos que estas pueden presentar, así mismo poder experimentar que otras formas geométricas o no geométricas salen con las posibles combinaciones de las intersecciones de las rectas coordenadas.

Experiencia profesional y personal qué dejó el trabajo

Finalmente, en este apartado se dará respuesta a la pregunta ¿cómo está actividad matemática aporta a mi formación como futura profesora de matemáticas? Contemplada en la justificación de este trabajo y que apoya el cumplimiento del último objetivo específico. Para ello, se tienen en cuenta dos asuntos, siendo el primero el dominio que el profesor de

matemáticas debe tener siguiendo el modelo de Stacey y el segundo reconociendo las representaciones como una herramienta fundamental en el proceso de aprendizaje.

En primer lugar, lo expuesto en el conocer las matemáticas y el saber matemáticas del modelo de Stacey junto con los recursos tecnológicos para la práctica docente expuestos en el capítulo II, se destaca que el dominio del profesor sobre las herramientas tecnológicas juega un papel fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de cualquier objeto matemático, ya que este le permitirá explorar diferentes situaciones de una forma dinámica e interactiva. Lo anterior, permite captar con mayor rapidez y efectividad la dificultad del estudiante y, posibilita al profesor el diseño y estructuración de métodos que lo ayuden a superar los errores o, en el caso contrario, a potenciar aquellas habilidades que los estudiantes adquieran por medio del recurso. Aunque dicho recurso tecnológico resulta muy útil y eficiente, es importante reconocer que también tiene limitaciones y barreras que le impiden abarcar algunas de las características particulares que tenga el objeto de estudio.

Siguiendo con el modelo de Stacey en el saber aprender matemáticas y experimentar las matemáticas en acción se concluye la importancia de la visión articulada que debe tener el profesor de matemáticas, ya que le permitirá tener mayor claridad y dominio de cualquier objeto matemático. Por esta razón, este trabajo destaca que la principal acción que debe hacer y tener un profesional en la docencia o un docente en formación es la capacidad investigativa, comunicativa y argumentativa, ya que le da habilidades y seguridad para la enseñanza de cualquier objeto matemático.

En el segundo momento se reconoce que la articulación de conexiones entre las representaciones gráficas y algebraicas permitieron establecer que, dentro del aula de clase, estas dos representaciones son necesarias para entablar conexiones conceptuales significativas en los

estudiantes. Lo cual les ayuda a ampliar su visión respecto al objeto matemático, identificando las propiedades que cada una de ellas brinda. De lo anterior se evidenció que, para este trabajo las conversiones más trabajadas entre las representaciones de Burkhard et al. (1993, citados en Rico et al, 2000) fueron el ajuste de curvas y el bosquejo, permitiendo el desarrollo de habilidades matemáticas por medio de la manipulación de las representaciones, mediante la búsqueda de los resultados. Por ello es importante que el profesor identifique el objeto de su enseñanza y las representaciones que más se adecuan a las necesidades de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

- Abreu, J. L. (2014). El Método de la Investigación. *ISSN*, 9(3), 195-204.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En *Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (1.^a ed., pp. 33-60). Grupo Editorial Iberoamérica.
<http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf>
- Avecilla, F. B., Cárdenas, O. B., Vaca, B., & Ponce, B. H. (2015). *GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil*. 28(5), 121-132.
- Calderón, D. I., & León, O. L. (2012). La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula. En *Lenguaje y Educación: Perspectivas metodológicas y teóricas para su estudio* (pp. 71-104). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Calvo, I., & Gil, L. G. (2013). *Formación de docentes de matemáticas en el uso de recursos tecnológicos*. 537-547.
<http://funes.uniandes.edu.co/20024/1/Calvo2013Formaci%C3%B3n.pdf>
- Camacho, A. (2009). *Cálculo diferencial*. Díaz de Santos.
- Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En *Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (1.^a ed., pp. 61-96). Grupo Editorial Iberoamérica. <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf>
- Esteve, M. R. M. (2001). Las relaciones entre el álgebra y la geometría en el siglo XVII. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 24(51), 705-725.
- Herrera Ruiz, A. J., Salgado Ramírez, D. C., Nivia Romero, L. F., Acosta Mahecha, M. L., & Orjuela Murcia, J. P. (2003). *Álgebra y Geometría II*. Santillana.

- Lehmann, C. (1989). *Geometría analítica*. LIMUSA.
- MEN (Ed.). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden* (1. ed). Ministerio.
- Morales Rozo, N. (2021). Sistemas de representación no-usuales en la formación de profesores como estrategia para comprender los procesos de aprendizaje de objetos matemáticos. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 50. <https://doi.org/10.17227/ted.num50-12321>
- Muñoz, J. (2001). *Introducción a la teoría de conjuntos* (Cuarta). Universidad Nacional de Colombia.
- Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria*, 13, 29-36.
<https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112>
- Rico, L. (2009, enero). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática*. ResearchGate.
https://www.researchgate.net/publication/28318960_Sobre_las_Nociones_de_Representacion_y_Comprehension_en_la_Investigacion_en_Educacion_Matematica
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M., & Socas, M. (2000). *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (2.ª ed.). Editorial Horsori.
- Rojas, P. J. (2012). Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 12(1), 1-5. <https://doi.org/10.18845/rdmei.v12i1.1686>
- Samper, C., Camargo, U., & Leguizamón, C. (2010). *Como promover el razonamiento en el aula por medio de la geometría* (Vol. 1-1). Universidad Pedagógica Nacional.

Stacey, K. (2008). Mathematics for secondary teaching. En *The international handbook of mathematics teacher education. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp. 87-113). Sense Publishers.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2006). *Precálculo matemáticas para el cálculo* (5.^a ed.).

CENGAGE Learning.

Viviente, M. (1988). Geometría y/o álgebra geométrica. *Zubía*, 6, 91-97.