# APORTES A LA FORMACIÓN DE UN PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE LA HISTORIA COGNITIVA SOBRE EL PENSAMIENTO DE GALILEO

JHOAN MANUEL RIPOLL ARISTIZABAL

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D. C.
2020

# APORTES A LA FORMACIÓN DE UN PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE LA HISTORIA COGNITIVA SOBRE EL PENSAMIENTO DE GALILEO

JHOAN MANUEL RIPOLL ARISTIZABAL
CÓDIGO ESTUDIANTIL 2015140069
CC. 1030535976

Trabajo de Grado realizado como requisito parcial
para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Director: Dr. Edgar Alberto Guacaneme Suárez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2020

**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**

# ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"APORTES A LA FORMACIÓN DE UN PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE LA HISTORIA COGNITIVA SOBRE EL PENSAMIENTO DE GALILEO"**, elaborado por el estudiante **JHOAN MANUEL RIPOLL ARISTIZABAL**, identificado con el Código **2015140069** y Cédula **1030535976**, el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y dos (42)** puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas.**

En constancia se firma a los diecinueve (19) días del mes de octubre de 2020.

Edgar A. Guacaneme S.

Dr. EDGAR ALBERTO GUACANEME SUÁREZ
Asesor del Trabajo de grado

Mg. NATALIA MORALES ROZO
Jurado del Trabajo de grado

Mg. LUIS FRANCISCO GUAYAMBUCO QUINTERO
Jurado del Trabajo de grado

## Dedicatoria

El presente trabajo lo dedico primero a Dios, por otorgarme su bendición durante las distintas etapas de mi vida, en especial en mi proceso formativo como licenciado en matemáticas.

A mis padres quienes con su amor y esfuerzo durante estos años me han brindado su apoyo y amor, velando mis sueños, llorando mi llanto y celebrando mis triunfos.

A mis hermanos que con su amor me han inspirado para siempre seguir adelante con mis proyectos y metas.

Al profesor Edgar Guacaneme por todo su apoyo y guía durante el desarrollo del presente proyecto.

A los maestros que desde niño y hasta el día de hoy me han transmitido su amor por las matemáticas.

A mis abuelos fallecidos, en especial Manuel Antonio Ripoll quien con su ejemplo me enseñó que siempre hay que aprender un nuevo conocimiento y a trabajar sin rendirse ante las adversidades.

## Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos: a mis padres, quienes me han apoyado a lo largo de toda mi vida; a la Universidad Pedagógica Nacional, por brindarme la oportunidad de formarme profesionalmente; al Departamento de Matemáticas que me ha otorgado su apoyo durante mi formación docente; a los profesores de la Licenciatura en Matemáticas, en especial al profesor Edgar Guacaneme, un ser humano ejemplar, con profundos valores éticos y morales, quien me brindó su orientación y apoyo durante el proceso y realización del presente trabajo así como en los distintos aspectos relacionados con el mismo, compartiendo conmigo sus conocimientos, consejos, sugerencias, paciencia y dedicación; a los profesores Alejandro Sánchez y Luis Guayambuco, por su invaluable humanidad y apoyo durante mi etapa inicial en las prácticas pedagógicas; a la profesora Lyda Mora, quien me inspiró con su pasión por la docencia; y, a todos los maestros que influyeron en mi formación docente.

A todos ustedes, mil gracias por ser parte de mi vida y por enriquecer mi persona con tantos aspectos positivos de su ser.

**Contenido**

## Índice de tablas

**Índice de figuras**

## Índice de anexos

## Resumen

Aunque dentro de la formación del profesor de Matemáticas en algunos centros de educación superior se contempla la enseñanza de la Historia de las Matemáticas, la realidad es que comúnmente suele subestimarse el potencial del conocimiento histórico en la formación de maestros en esta área de estudio (Historia de las Matemáticas), relegándola únicamente al enriquecimiento intelectual del maestro en formación, por lo que, puede generar la sensación de trivialidad o de poco productiva para la labor docente.

Mediante el presente informe de trabajo de grado, presento el resultado de haber estudiado un documento sobre Historia de las Matemáticas; estudiar un documento (académico y científico) hace referencia a indagar a fondo las teorías y conceptos inmersos en él, de manera tal permiten a quien estudia el documento, conocer y exponer con exactitud la postura del autor y los fundamentos en los que se basa este para formular su tesis, en el caso particular de este trabajo, realizar este ejercicio con el documento de Palmieri (2003) me permitió comprender la tesis del autor sobre la pertinencia de estudiar el pensamiento de Galileo Galilei en torno a la matematización de la naturaleza[1] a partir de la teoría de la ciencia cognitiva y los modelos mentales. Para mostrar los resultados del estudio dispondré de dos momentos.

En el primer momento, presentaré un resumen del documento de estudio “Mental models in Galileo’s early mathematization of nature” (Modelos mentales de Galileo en la temprana matematización de la naturaleza) (Palmieri, 2003) en el que, a grandes rasgos, describiré el

[1] También mencionada como matematización física temprana

contenido del documento de estudio, el cual se centra en el papel de la ciencia cognitiva desde una perspectiva de la historia cognitiva y cómo esta no solo aporta a la comprensión del pensamiento y proceder de Galileo Galilei en su matematización física temprana, sino que también invita a filósofos, historiadores y científicos cognitivos a trabajar de manera interdisciplinar, lo que contribuye al "estudio *tanto* de la evolución y estabilización de los mecanismos cognitivos *como* a las dinámicas de fijación subyacentes a los sistemas de creencias difusas" (Palmieri, 2003 p. 260). En el segundo momento presentaré el contenido histórico y matemático al que tuve que acudir para una óptima comprensión del texto, tanto en su componente contextual como en su componente teórico matemático.

Por otro lado, luego de haber presentado el documento de Palmieri y el conocimiento inmerso en él, procederé a contrastar la experiencia en el estudio de dicho documento a través de las categorías propuestas en la tesis doctoral de Guacaneme (2016), particularmente por medio del uso de las categorías referidas al para qué estudiar Historia de las Matemáticas como maestro de esta área, y al cómo el estudio de la Historia de las Matemáticas contribuye en la formación del profesor en pro del conocimiento del profesor de Matemáticas, más allá de la erudición. Todo lo anterior, con el fin de concienciar respecto a algunas de las bondades que le otorga al profesor el estudio de un documento histórico matemático y su potencial académico más allá de la adquisición de conocimiento.

## Introducción

El presente documento es el resultado del ejercicio académico de haber estudiado un artículo de historia de las ciencias titulado, "*Mental models in Galileo's early mathematization of nature"* (Palmieri, 2003). Este ejercicio ilustra el estudio de documentos históricos como aspecto enriquecedor del conocimiento del profesor de matemáticas, de la labor docente y de su identidad profesional.

He de aclarar, que este documento lo escribo en primera persona del singular, en la medida que, este refleja mi experiencia al estudiar un artículo histórico, lo que me convierte en objeto de estudio, así mismo, soy quién presenta los resultados del ejercicio académico propuesto, por lo que también actúo como ente investigador; También aclaro, que eventualmente en el estilo de escritura hago uso de la primera persona del plural, en relación con la participación de otras personas, a propósito de esto, es menester indicar que, este trabajo de grado contó con distintas direcciones; inicialmente, se planteó un anteproyecto de grado junto al profesor Edgar Guacaneme, y a causa de una situación institucional ajena a mi persona, el Departamento de Matemáticas me asignó como asesor de trabajo de grado al profesor Jojhan Jiménez para los periodos académicos 2018-II y 2019-I, con quien adelanté el proceso de traducción del artículo de Palmieri y realicé un primer acercamiento de estudio del documento; para el Periodo 2019-II y hasta el periodo actual 2020-I, el profesor Edgar Guacaneme retomó la dirección del presente trabajo de grado, asesorándome y guiándome en las distintas cuestiones relacionadas con este.

Retomando la idea del primer párrafo de este apartado, debo mencionar que, para el caso particular del presente trabajo de grado, el artículo de Palmieri invita a estudiar historia de la ciencia a partir de un enfoque de ciencia cognitiva, a fin de develar aspectos importantes en el razonamiento de personajes célebres en la historia de las ciencias y las matemáticas. Esta perspectiva de historia cognitiva de la ciencia suele omitirse en buena parte de los trabajos históricos y se postula fundamental en la constitución de los profesionales encargados de promover procesos de aprendizaje.

El presente documento está organizado en tres capítulos en donde describo el trabajo que realicé en torno al estudio del artículo de Palmieri, y unos anexos. En el primer capítulo, describo aspectos generales del estudio realizado, tales como: objeto de estudio, justificación, objetivos y fases metodológicas.

En el segundo capítulo, presento dos momentos del estudio realizado en torno al documento de Palmieri (2003). En el primer momento exhibo como resultado una síntesis del artículo. En el segundo momento describo la teoría y recursos estudiados para la comprensión del artículo.

En el tercer capítulo, expongo algunos de los conocimientos adquiridos al estudiar el documento de Palmieri (2003), a través de las categorías tratadas en uno de los apartados de la tesis doctoral del profesor Guacaneme (2016), a fin de vislumbrar de qué manera el estudio de Historia de las Matemáticas (o de la Historia de las Ciencias) trasciende en el conocimiento del profesor de matemáticas, más allá de la erudición.

Adicionalmente, anexo la traducción, no oficial, del artículo de Palmieri (2003) y de elementos que me permiten ampliar el marco contextual referente a Galileo Galilei.

Espero que la lectura del documento incentive, en los profesores en formación profesional y en ejercicio, el estudio de la Historia de las Matemáticas, a fin no solo de enriquecer su conocimiento, sino también de adquirir artefactos[2] que aporten a su labor desde distintas perspectivas llegándose a convertir en herramientas docente (Guacaneme, 2016) .

[2] La noción de artefacto es tomada de (Guacaneme, 2016) y abordada en el tercer capítulo del presente documento.

# 1 Generalidades del estudio

En el presente capítulo describo aspectos generales vinculados al proceso de estudio realizado. Particularmente presento el objeto de estudio, expongo las razones que motivaron el estudio, explicito los propósitos o metas que propusimos para este, de las cuales se muestra el balance en el apartado de conclusiones de este documento y, finalmente, doy cuenta y razón de aspectos metodológicos que tuvimos en cuenta en el desarrollo del estudio reportado.

## 1.1 Objeto de estudio

Con el presente escrito develo el resultado de mi experiencia personal al estudiar un documento histórico matemático en pro de la formación profesional de los profesores de matemáticas.

Para la consecución de resultados llamativos a la luz del estudio de un documento histórico en pro de la formación de los profesores de matemáticas, este trabajo de grado lo centro en la lectura comprensiva del texto titulado "*Mental models in Galileo's early mathematization of nature*" (Modelos mentales de Galileo en la temprana matematización de la naturaleza), escrito por Palmieri (2003), En dicho artículo, el autor hace un análisis sobre cómo Galileo asimiló las Matemáticas, cómo estas estaban influenciadas cognitivamente por el pensamiento de su época y el de sus predecesores (Arquímedes y Euclides), y cómo las utilizó para la matematización de la naturaleza.

Pero ¿qué quiero decir con una lectura comprensiva? Quiero decir que se analicé profundamente cada uno de los elementos mencionados por Palmieri en su documento para describir el pensamiento de Galileo en torno a los modelos mentales que él empleó para su temprana matematización de la naturaleza. Ahora bien, esto a su vez, me requirió de una comprensión de la obra de Euclides en relación con la teorización y uso de las razones y proporciones en el campo aritmético y geométrico y de la obra de Arquímedes respecto a su noción de semejanza sobre centros de gravedad tanto en figuras planas como en sistemas de balanzas. Igualmente me requirió comprender el contexto científico de la época en que vivió Galileo y la intención de su obra en cuestión.

## 1.2 Justificación

La justificación que sustenta el presente trabajo la realizo en dos partes. En primera instancia, hago una reflexión personal en torno al por qué he decidido hacer el presente trabajo de grado enfocado en la Historia de las Matemáticas y la importancia que le doy a la misma. En segunda instancia, presento un sustento teórico basado en el estado del arte desarrollado por Guacaneme (2016) que me permite dilucidar la importancia del ejercicio de estudiar un documento de la Historia de las Matemáticas como aporte en la formación docente.

Durante mi vida he tenido especial gusto por las Matemáticas y he valorado la influencia de estas en el desarrollo cultural de la humanidad; es gracias a las Matemáticas y a la manera como la humanidad las ha utilizado, que nuestra sociedad es lo que es hoy día y cuenta con distintos beneficios desarrollados científicamente. Por esto, me he interesado en transmitir el amor y pasión que siento por las Matemáticas a las personas que me rodean, aunque en ocasiones ha sido un poco difícil hacerlo, bien sea por la predisposición negativa que algunas personas tienen hacia las Matemáticas o bien porque consideran el carácter poco útil de estas (ambas probablemente debidas experiencias en los procesos formativos). Por tales motivos, me he preocupado en buscar distintas estrategias pedagógicas para ayudar a dichas personas a desarrollar gusto por las Matemáticas; en este sentido he inicialmente intuido y recientemente identificado que comprender y utilizar la Historia de las Matemáticas puede constituir una de tales estrategias.

Al revisar la necesidad de reivindicación de la Historia de las Matemáticas, particularmente en la formación del profesor de Matemáticas, Guacaneme (2016) ha concretado un marco de categorías sobre su utilidad y pertinencia. Así, ha planteado que la Historia de las Matemáticas es una herramienta útil, puesto que permite hacer un recorrido por la evolución de distintos procesos matemáticos; a su vez, muestra una visión amplia y profunda del cómo la Historia de las Matemáticas aporta al profesor de matemáticas para la comprensión de los objetos matemáticos que va a enseñar en el aula, y que no se agota con dicha comprensión.

Así mismo, Guacaneme (2016) dentro de sus categorías sobre las visiones vinculadas al ¿para qué se procura la apropiación del conocimiento histórico de las matemáticas por parte del profesor de matemáticas? (Dotar al profesor de visiones de la actividad matemática, Visión de las Matemáticas, Visión del conocimiento Matemático y Visión de los objetos de las Matemáticas) afirma que la visión histórica de las Matemáticas dota al profesor de herramientas para su desempeño profesional, ya que, esta amplía y diversifica dicha visión del profesor, motivándolo a proponer formas alternas de actividad matemática al aportarle una ampliación de su conocimiento profesional matemático y del cómo podría enseñarlo, ya que, puede jugar un papel humanizador en el proceso formativo de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes.

Por otro lado, Pardo Salcedo & Gómez Alfonso (2005 p.251), afirman que conocer la Historia de las Matemáticas posibilita que el profesor identifique en los estudiantes las dificultades e inconsistencias conceptuales a las que los matemáticos se han enfrentado a lo largo de la historia, posibilitándole al profesor, crear estrategias que contribuyan a los estudiantes en la comprensión de conceptos matemáticos.

Canal (2011) en su trabajo de Fin de Master titulado "La enseñanza de los números complejos en el bachillerato", cita a Urbaneja (2004 p. 17, quien se refiere a P.Puig 1951), para invitar a "No olvidar el origen concreto de las matemáticas, ni los procesos históricos de su evolución". y así contemplar la Historia de las Matemáticas como una herramienta útil no solo para el profesor sino también para el alumno; según él:

> "Es importante que el alumno no vea en las Matemáticas algo ya hecho, producto de un gusto especial por ciertas cosas abstractas. Sino que, ha sido la vida, con sus necesidades concretas, la que ha obligado al hombre a esforzarse por resolverlas; las principales conquistas humanas han tenido siempre el acicate de responder a una necesidad real.
>
> Que el alumno conozca el origen de las Matemáticas y las líneas generales de su historia. A través de ello, llegará a comprender que las Matemáticas son algo frío e intangible. Puede ser muy conveniente también que en los momentos oportunos el alumno tenga noticia sobre los principales matemáticos, de las incidencias de su vida. Ello puede contribuir a hacer más humana su visión de las Matemáticas. <u>Que no sea sorprendente que</u>

un matemático determinado llegue a ser el personaje admirado por un alumno[3]" (Canal, 2011 p. 15, refiriendose a P.Puig 1951).

Habiendo mencionado algunas de las bondades que incentivan la implementación de la Historia de las Matemáticas (las anteriormente citadas), Canal (2011, basandose en Gutiérrez 2010, para referirse a Urbaneja, Toeplitz y Guzmán) menciona que algunos autores apuestan seriamente por la utilización de la Historia de las Matemáticas en las aulas, e identifica un costo sobre la implementación de la historia, y es que, esta (la Historia de las Matemáticas) requiere por parte de los profesores una mayor dedicación en cuanto a trabajo y tiempo, sin embargo, su beneficio es en parte, dotar a las Matemáticas de un sentido más humano, y por ende, más cercano a los estudiantes. ¿Pero cómo se puede utilizar la Historia de las Matemáticas?

Según Canal (2011 p.22, apoyado en Vázquez 2010), se requeriría de demasiado tiempo para presentar a los estudiantes la Historia de las Matemáticas; incluso, sería necesario disponer de una asignatura propia para la Historia de las Matemáticas si se quisiera presentarla con gran rigor, por lo que "son muchos los puntos de vista posibles para intentar incorporar la historia de las matemáticas en la enseñanza", y enumera cuatro puntos que considera ofrecen un mayor interés, a saber:

1. La relación de las matemáticas con el desarrollo cultural de la época.
2. La utilización de los grandes problemas matemáticos como contexto para la introducción de ciertos temas.

[3] Subrayado no presente en el texto original; se subraya valga la redundancia para resaltar la idea expresada por el autor.

3. La información sobre la vida de grandes matemáticos.
4. La evolución a lo largo de la historia de los conceptos y símbolos que son objeto de estudio en los niveles no universitarios.

Lo anterior, es una importante guía para articular la Historia de las Matemáticas en los procesos formativos de los estudiantes, lo cual exige y permite al docente dotarse de herramientas para enseñar las Matemáticas y, entre otros muchos asuntos, comprender las dificultades, errores y obstáculos que puedan presentar los estudiantes en sus procesos de aprendizaje y que muy seguramente también tuvieron los personajes de la historia. Así, conocer la Historia de las Matemáticas seguramente dotará al profesor de ejemplos reales para vislumbrar la forma como el estudiante razona ante distintas situaciones en el aula; y le permitirá relacionar la forma de pensar de los estudiantes, dados los conocimientos previos que poseen y el contexto en el que viven, con los conocimientos previos que tenían los personajes de la historia y el contexto en el que ellos vivían, para generar estrategias que fortalezcan los procesos de aprendizaje en el aula.

Ahora bien, aunque reconozco que la Historia de las Matemáticas contribuye en gran medida como agente motivador en el aprendizaje del estudiante, el presente documento lo enfoco en la utilidad de estudiar Historia de las Matemáticas en pro del Conocimiento del Profesor de Matemáticas, contrastando la actividad de estudiar un documento histórico matemático con las categorías propuestas por Guacaneme (2016) ya mencionadas en párrafos anteriores y de las cuales hablo un poco más en el capítulo 3 del presente documento, la fin de dar cuenta del aporte que hizo dicha actividad académica en mi formación profesional.

En sintonía con lo anterior, escogimos el artículo de Palmieri (2003) como documento a estudiar, ya que, a pesar de que en la literatura especializada reconocemos varios textos que versan sobre la obra de Galileo, no identificamos alguno referente al pensamiento de Galileo respecto a los modelos mentales en su temprana matematización, por lo que el artículo mencionado nos generó particular interés y consideramos que podría aportar importantes elementos en pro de mi formación docente.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo general

Con el presente trabajo de grado pretendo analizar la utilidad de realizar la lectura comprensiva de un documento histórico-matemático, mediante un contraste entre el estudio del documento "Mental models in Galileo's early mathematization of nature" y las categorías propuestas por Guacaneme (2016) en relación con la utilidad de la Historia de las Matemáticas en la formación del profesor de matemáticas; a favor del saber, el hacer y el ser de un futuro profesor de matemáticas.

### 1.3.2 Objetivos específicos

- Evidenciar comprensión del contenido del texto "*Mental models in Galileo's early mathematization of nature*" escrito por Paolo Palmieri (2003), a partir de un análisis profundo de los conceptos y las consideraciones planteadas por el autor y registrándolas en un texto explicativo propio.

- Identificar elementos conceptuales, de naturaleza matemática e histórica necesarios, que exige la lectura comprensiva del texto en cuestión, así como exponer la manera en que estos se emplean.
- Establecer en qué medida el estudio de un documento de Historia de las Matemáticas enriquece, a un futuro docente de Matemáticas.

## 1.4 Aspectos metodológicos

Las tareas propuestas para la construcción del presente documento se pueden catalogar en tres momentos, los cuales frecuentemente se desarrollaron en paralelo.

Durante el primer momento, realicé una traducción no oficial del documento de Palmieri (2003), con el fin de obtener como resultado una traducción al lenguaje técnico propio del documento. Este ejercicio tuvo también como intención, lograr una primera aproximación a la comprensión del contenido del documento.

Durante el segundo momento, realicé una lectura e interpretación minuciosa del artículo de Palmieri, registrando en un diario de campo tanto las ideas planteadas por el autor, como elementos a estudiar necesarios para una correcta interpretación de dichas ideas, realizando a la par, indagaciones respecto a distintos temas y teorías abordados en el artículo, ya que era menester estudiarlos para la correcta comprensión de este y la redacción de un escrito explicativo que sintetizara las ideas principales del artículo. Además, el diario de campo en cuestión me permitió ganar en conciencia respecto al proceso de estudio y comprensión del documento y posteriormente, dicho diario se convirtió en fuente de información que aportó elementos para develar en qué medida el estudiar Historia de las Matemáticas me permite enriquecer mis conocimientos, el quehacer y el ser como futuro profesor de Matemáticas.

Durante el tercer momento estudié la manera como la Historia de las Matemáticas, y en concreto la historia tratada en el documento de Palmieri (2003), puede influenciar, a futuros profesores de matemáticas, mediante el contraste entre los conocimientos adquiridos al estudiar el artículo con las categorías tratadas por Guacaneme (2016) respecto al para qué sirve la Historia de las Matemáticas (HM).

# 2 Estudio del documento "*Mental models in Galileo's early mathematization of nature*"

Este capítulo lo desarrollo en dos partes. En la primera parte, menciono elementos importantes del artículo (Palmieri, 2003), a través de la quinta y más reciente versión de un resumen de las ideas que el artículo expone. El proceso de comprensión y apropiación de los elementos del artículo fue laborioso, dado que, por un lado, el lenguaje utilizado por el autor es un lenguaje académico cuidadosamente elaborado, ya que, el artículo está dirigido a un público con conocimientos en ciencia cognitiva e Historia y Filosofía de la ciencia y, por otro lado, la selección de las ideas fue un trabajo difícil y prolongado. En efecto, al momento de escoger aspectos fundamentales para plantear una síntesis del documento, cada idea planteada por Palmieri parecía importante, motivo por el cual la primera versión del resumen se tornó más en una transcripción, paso a paso, de la construcción de las ideas y argumentos del autor; a medida que gané comprensión del texto, pude recoger más fácilmente los aspectos fundamentales que condensan y sostienen la postura de Palmieri en su artículo.

En una segunda parte, establezco un apartado en el que se discuten las herramientas teóricas a las que fue necesario recurrir para una adecuada comprensión del documento de Palmieri (2003).

## 2.1 Resumen del artículo

En el documento "Mental models in Galileo's early mathematization of nature", escrito por el doctor Paolo Palmieri (2003), se aborda cómo la ciencia cognitiva puede apoyar a la historia de la ciencia para así poder comprender la manera como razonaron personajes científicos históricos. En el caso puntual de este artículo, se aborda la forma cómo razonaba Galileo Galilei, a partir de un análisis cognitivo que permite develar aspectos fundamentales en el proceder matemático de este personaje para matematizar fenómenos físicos naturales y que salen a la luz desde una perspectiva de la ciencia cognitiva.

El artículo se divide en seis secciones, a saber:

1. Introducción
2. Modelos mentales e historia cognitiva
3. La dimensión visual del razonamiento proporcional de Galileo
4. Pruebas de imagen: Objeción constructivista de Clavius a Galileo
5. Remodelación de Galileo del equilibrio arquimediano
6. Conclusión

Organizado el artículo de esta manera, el autor expone los elementos fundamentales de la ciencia cognitiva a favor de la historia de la ciencia y de esta manera, invita a la comunidad académica a trabajar de manera interdisciplinar en pro de un estudio histórico-científico más completo.

En la **Introducción** del documento, Palmieri reconoce a William R. Shea como uno de los personajes que ha estudiado a mayor profundidad la obra de autores que han intentado matematizar el mundo natural y, entre ellos, resalta especialmente a Galileo Galilei, en quién se evidencia una aceptación de la teoría de proporciones euclidianas para su matematización física temprana. Así mismo, Palmieri evidencia que, si bien existen muchos estudios sobre la matematización de la naturaleza hecha por Galileo, se desconoce a profundidad la estructura cognitiva que utilizó para su razonamiento.

Respecto a esto, Palmieri reconoce tres autores que han realizado importantes estudios en la obra de Galileo, ellos son:

- Winifred Wisan, quien hizo relevantes aportes sobre el estudio de Galileo del movimiento acelerado y el movimiento de proyectiles. Palmieri ataca fuertemente lo que llama un problema de reconstrucción al lenguaje simbólico moderno de la obra de Galileo que hace Wisan, aduciendo que de esta manera se pierden aspectos fundamentales para develar la manera real en la que Galileo razonaba.
- Enrico Giusti, quien aportó sobre la obra de Galileo estudios que evidencian la relación que hacía este entre cantidades físicas homogéneas y objetos geométricos simples (por ejemplo, segmentos) y reconoce que para Galileo fue imposible relacionar cantidades heterogéneas a través de razones. Palmieri sostiene que a diferencia de Wisan, el estudio de Guisti aporta elementos para la comprensión del lenguaje técnico galileano.
- Alexandre Koyré, quien cataloga a Galileo como un reivindicador del enfoque platónico, pero lo critica fuertemente denominándolo “usuario abusador de experimentos de pensamiento”; sin embargo, Palmieri afirma que, en la obra de Koyré no está explícito, ni hay indicios siquiera de lo que para él es un experimento de pensamiento.

Palmieri propone a los modelos mentales y la historia cognitiva como herramientas que ofrecen un mejor marco para entender el presunto uso de experimentos de pensamiento por parte de Galileo, sugiriendo así, que los problemas relacionados con mecanismos cognitivos deberían ser de interés para filósofos científicos, historiadores y científicos cognitivos.

Para mostrar su punto, el autor primero recurre a aclarar lo que son **Modelos mentales e historia de la ciencia** y la manera como se interrelacionan, para luego, con base en esto, abordar aspectos del razonamiento de Galileo.

Basándose en la teoría de los modelos mentales y el "código triple" de representaciones mentales de Philip Johnson-Laird (Palmieri, 2003 p. 232) (en el cual se reconocen tres formas de representación mental resumidos en la Tabla *1*), e integrando esta teoría con los aportes que ofrece a la historia cognitiva, Palmieri establece como base que los modelos mentales y en general los sistemas de representación no simbólicos del razonamiento, parecen funcionar mejor que la lógica verbal y las reglas para la manipulación de símbolos, con lo que procede a estructurar los argumentos que sustentan su postura, la cual sostiene que los modelos mentales de Galileo no clasifican como experimentos de pensamiento, y que posiblemente están vinculados a los procesos cognitivos subyacentes a la *fijación de creencias* (Palmieri, 2003 p. 260), idea abordada en la sección 6 del artículo.

| **Representaciones mentales** | | |
|---|---|---|
| **Representaciones proposicionales** | **Imágenes mentales** | **Modelos mentales** |
| Mantienen una estructura de predicado-argumento | Muestran la percepción desde el punto de vista del observador | Muestran la percepción desde el punto de vista del observador |

| | | |
|---|---|---|
| Se usan para tareas deductivas | Pueden ser manipuladas | Pueden ser manipuladas |
| Usan normas básicas de inferencia | No capturan clases de situaciones | Capturan clases de situaciones (posiblemente aplicables en experimentos de pensamiento) |
| Funcionan mejor en descripciones indeterminadas de estados de cosas | | Construcciones cognitivas completamente generales no limitadas a tareas de razonamiento |

*Tabla* 1 Síntesis del código triple de representación mental de Johnson-Laird

Palmieri sostiene que hay tres problemas para el historiador que opta por un marco cognitivo los cuales refieren a:

- La noción de representación mental (idea abordada en la tabla 1).
- El conexionismo y la teoría general de la cognición.
- La aplicabilidad de la ciencia cognitiva a la historia de la ciencia.

Para dar claridad sobre la relación entre los tres problemas mencionados, el autor recurre a la "teoría computacional de la cognición" de Robert Cummins, la cual, en síntesis, dice que la capacidad de un sistema cognitivo depende de su estado actual y no de la historia que lo condujo a ese estado particular y, aclara que representar algo es tener su estructura; así, cuando se usa una representación mental (ya sea una representación proposicional, una imagen mental o un modelo mental) lo que se hace es representar la estructura de un estado de cosas o eventos particular.

De acuerdo con Palmieri, Galileo al conocer la estructura del su esquema de razonamiento basado en la representación de velocidad, distancia y tiempo, a partir de la representación de estas magnitudes mediante objetos geométricos simples, puede aplicar su esquema mental a cualquier otro conjunto de magnitudes que satisfagan relaciones geométricas entre las entidades geométricas asociadas a cantidades físicas, por lo anterior los modelos que ofrece la ciencia cognitiva pueden aplicarse a la historia de la ciencia generando una conexión entre ambos (ciencia cognitiva e historia de la ciencia) dotando al historiador de un contexto mental, cognitivo y científico del objeto de estudio en cuestión, permitiéndole así una mayor comprensión de dicho objeto.

Luego de la aclaración sobre lo que es un modelo de representación mental y la conexión que se puede establecer entre este y la historia de la ciencia, Palmieri aborda lo que denomina **La dimensión visual del razonamiento proporcional de Galileo**. En este apartado menciona que Galileo, conociendo ampliamente la obra de Euclides y de Arquímedes, procede a mostrar su postulado sobre centros de gravedad que dice:

> Suponemos que, de pesos iguales dispuestos de manera semejante en balanzas diferentes, si el centro de gravedad de un compuesto [de pesos] divide su equilibrio en una cierta razón, luego el centro de gravedad del otro compuesto también divide su equilibrio en la misma razón (Palmieri, 2003 p. 238).

Para mostrar su punto, Galileo realiza una reversión de la teoría de semejanza en figuras planas y proporciones de Euclides y una generalización de la teoría sobre centros de gravedad en figuras planas de Arquímedes. Para esto tiene en cuenta que, por un lado, en la teoría euclidiana sobre semejanza, desarrollada en el sexto libro de *Elementos*, Euclides afirma que si dos figuras planas (por ejemplo, dos triángulos) son equiangulares y los lados alrededor de ellos son proporcionales, entonces las figuras son semejantes; por otro lado, en *Sobre el equilibrio de los planos*, Arquímedes menciona que, si dos figuras planas son semejantes, entonces sus centros de gravedad están ubicados de manera semejante. Galileo ilustra entonces dos sistemas de balanzas en equilibrio con pesos iguales uno a uno, dispuestos de manera semejante, (ver *Figura* 1) y concluye que los centros de gravedad de los diferentes sistemas en equilibrio dividen a los brazos de las balanzas en longitudes proporcionales. Así se evidencia que Galileo reconoce primero una semejanza (semejanza en los sistemas de balanzas en equilibrio con disposiciones de pesos iguales de manera semejante) y posteriormente concluye una proporcionalidad (proporcionalidad en la longitud de los brazos de las balanzas respecto al centro de gravedad). Es en ese sentido que dice Palmieri que Galileo realizó una reversión de la teoría de Euclides y una generalización de la teoría de Arquímedes.

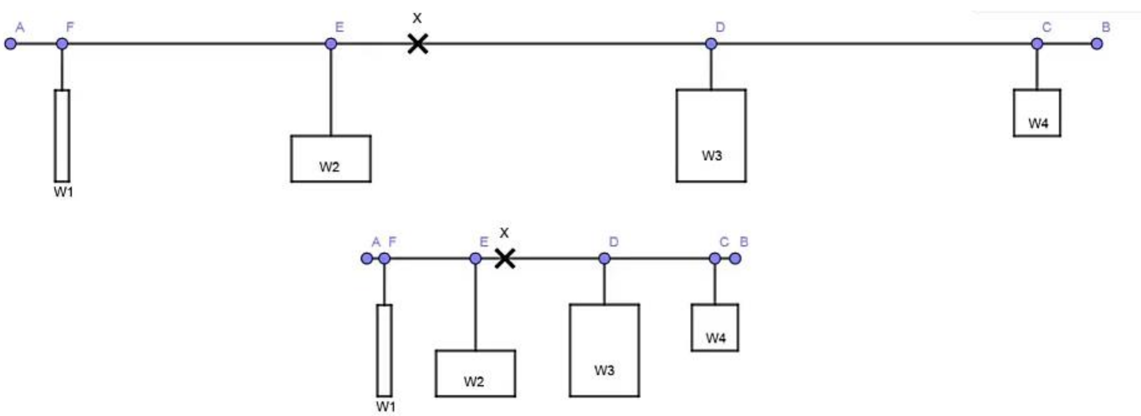



*Figura 1 Sistemas de balanzas configurados de manera semejante según interpretación de Palmieri respecto al lenguaje utilizado por Galileo en su postulado sobre centros de gravedad*

A esta construcción Palmieri la llama “modelo mental de Galileo de equilibrios semejantes”, a través del cual Galileo logra hacer homogéneo el mundo de la proporcionalidad euclidiana y el mundo de las cantidades físicas.

Ya que Galileo procedió a demostrar su postulado a partir de representaciones gráficas, Palmieri procede a abordar otro aspecto relacionado con el razonamiento de Galileo, en el apartado titulado **Pruebas de Imagen: objeción constructivista de Clavius a Galileo**. En este se basa en la producción de James R. Brown, quién ha dedicado esfuerzos en el estudio referente a la validez de las pruebas de imagen como pruebas reales a situaciones matemáticas y a reconocer que son pedagógicamente importantes y psicológicamente sugestivas; ello, en contra de gran parte de la comunidad académica que tanto rechaza esta forma de demostración, como afirma que las imágenes son dispositivos heurísticos que no prueban nada (Palmieri, 2003 p. 244).

Respecto a las pruebas de imagen utilizadas por Galileo para demostrar su postura sobre los centros de gravedad en sistemas semejantes de balanzas, Palmieri refiere que Christoph Clavius se opuso fuertemente a esta forma de demostración de Galileo, acusándolo incluso de un "salto de fe" en la capacidad de su modelo mental, por lo que lo invitó a realizar una demostración proposicional en la que mostrara que los centros de gravedad representados por los puntos $X$ y $X'$ de los sistemas de balanzas, son en efecto el mismo punto (ver Figura 2), tal como afirmaba Galileo, porque, afirma Clavius, al cambiar el nombre de $X'$ por $Y$, el razonamiento de Galileo llevaría a la conclusión de que como $BX$ es a $XA$ así $AY$ es a $YD$. En este caso, la afirmación de Galileo de que BX es doble XA no se seguiría (Palmieri, 2003 p. 246). Ello por cuanto, según Clavius, una representación visual no puede ser un sustituto de una demostración.

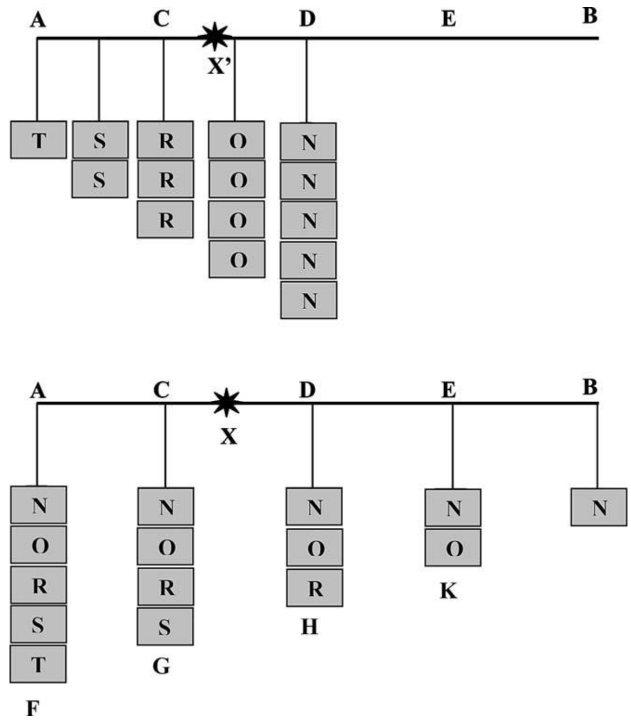



*Figura 2 Situación final balanza transformada y la original (Palmieri, 2003, p. 247)*

A pesar de las fuertes críticas de Clavius, Galileo tiene plena confianza en su modelo de representación, lo cual Palmieri deja en evidencia en el apartado **Remodelación de Galileo del equilibrio arquimediano**. En este afirma que Galileo gobierna el equilibrio arquimediano y llega así a la proporcionalidad en el mundo físico natural. Para mostrar su punto, Palmieri hace uso del modelo mental de Galileo sobre el cilindro en equilibrio que se ilustra en la Figura 3.

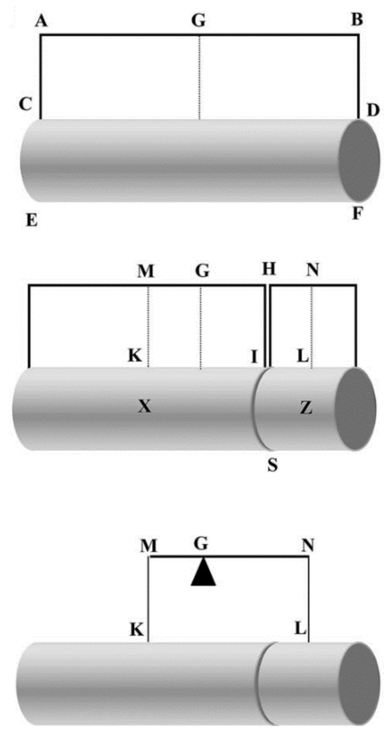



*Figura 3 Anatomía del modelo mental de Galileo de un sólido cilíndrico en equilibrio (Palmieri, 2003, p. 249)*

La interpretación que hace Palmieri sobre el proceder de Galileo en este modelo mental es la siguiente. Galileo imagina un cilindro ideal, ese cilindro se mantiene en equilibrio si se cuelga por hilos representados por los segmentos $AC$ y $BD$, pero el sistema igualmente se mantendrá en equilibrio si se cuelga únicamente de un hilo conectado al centro de gravedad del cilindro. Posteriormente Galileo propone cortar el cilindro arbitrariamente de manera tal que queden dos cilindros ideales, cada cilindro se mantendrá en equilibrio si al igual que el cilindro original, a estos se les cuelga con hilos de sus extremos, pero también se mantendrán en equilibrio si se cuelgan por sus centros de gravedad con los hilos representados por los segmentos $MK$ y $NL$ respectivamente. Luego, Galileo ve una relación de proporcionalidad inversa entre las longitudes de los segmentos $MG$ y $NG$ respecto al peso de los cilindros $X$ y $Z$.

Respecto al modelo mental sobre los cilindros en equilibrio, hay teorías sobre el presunto proceder de Galileo y los conocimientos utilizados por este, tal como la propuesta de J. De Groot, quién establece que Galileo se basó en el problema del disco móvil el cual es un principio pseudo-Aristotélico que dice “para distancias cubiertas en el mismo tiempo por puntos a distintas distancias a lo largo de un disco móvil, la razón de lo tangencial al movimiento centrípeto es proporcional”(Palmieri, 2003, p. 251, citando a De Groot, 2000, p. 651, 655). Tomeo y Piccolomini explican que el punto que se encuentra más alejado del centro del disco móvil y movido por la misma potencia que el punto más cercano al centro, se mueve más rápido, lo cual es la base del análisis de De Groot.

En este problema se identifican dos tipos de movimiento (Palmieri, 2003 p. 251), el movimiento *praeter naturam* (el cual se conoce como fuerza centrípeta), que es mayor para lo que se mueve en un círculo más pequeño y los *movimientos naturales* (llamado “circunferencial” por Tomeo y “tangencial” por Piccolomini), el cuál es mayor para lo que se mueve en el círculo mayor. Con esto, tanto Tomeo como Piccolomini concluyen que lo que está más alejado del centro se ve menos obstaculizado por el movimiento *praetern naturam* (ver Figura 4).

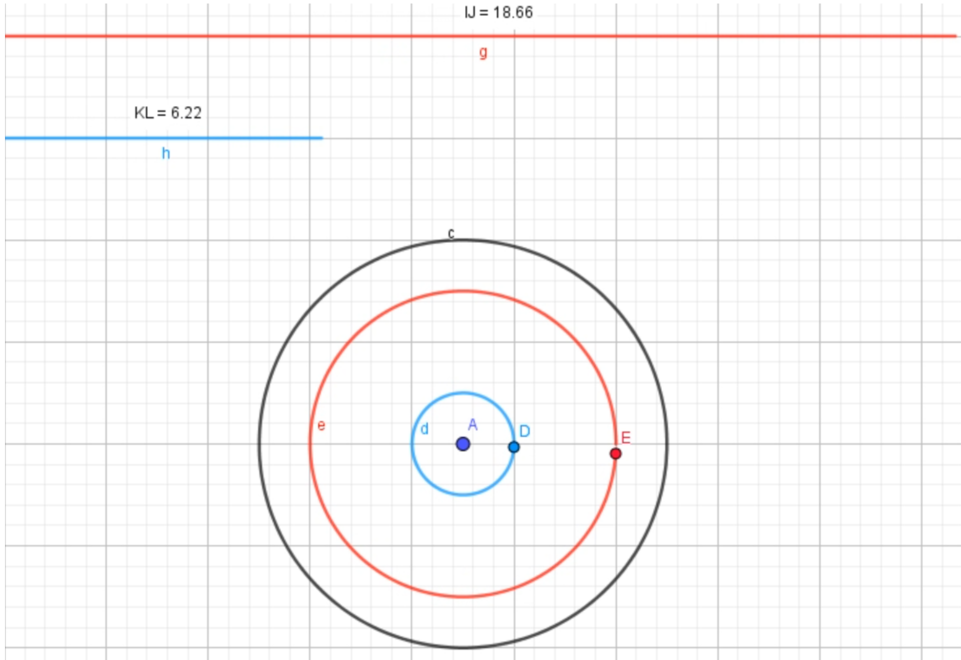



*Figura 4 Representación gráfica del problema del disco móvil. El punto E (en color rojo) recorre una mayor distancia que el punto D (en color azul), en el mismo tiempo. Arriba se ilustra mediante segmentos la distancia recorrida*

La idea que sustenta la postura de De Groot es que existe una proporcionalidad entre la distancia de los puntos $D$ y $E$ respecto al centro $A$ del disco y la respectiva distancia que recorre cada punto en el mismo lapso de tiempo; sin embargo, dice Palmieri, nada en el tratamiento que hace Galileo en el problema del cilindro en equilibrio evidencia que haya usado como base el problema del disco móvil, por lo que este propone que el proceder de Galileo es más coherente con el usado por Pappus en el problema del plano inclinado, en el que se encuentra una esfera en perfecto equilibrio, valga la redundancia, en un plano inclinado, como si esta se encontrase en reposo en un plano horizontal. Para ilustrar la situación, Palmieri ofrece la siguiente gráfica del plano inclinado de Pappus y su lectura personal como un problema de equilibrio arquimediano representado en la Figura 5.

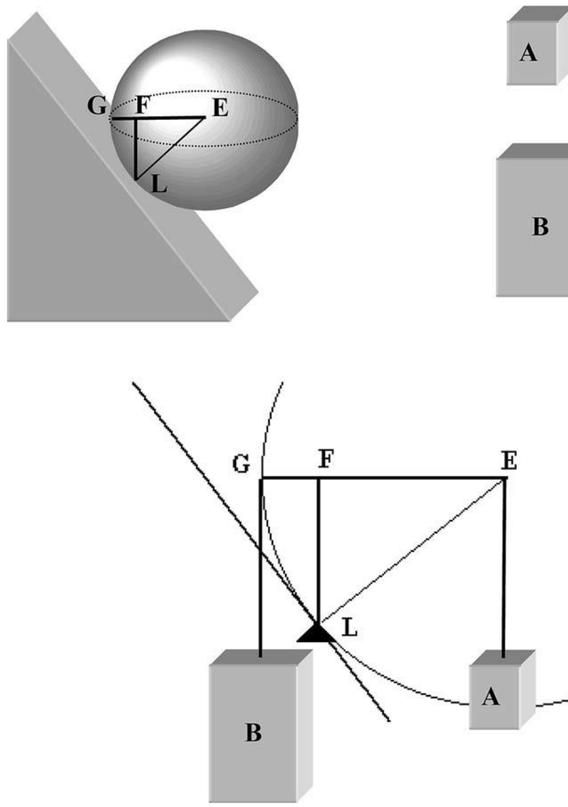



*Figura 5 Arriba ilustración del problema del plano inclinado de Pappus. Abajo representación del problema del plano inclinado como un problema de equilibrio arquimediano propuesto por Palmieri (2003, p. 253)*

Palmieri ofrece la visión de Pappus como base del argumento de Galileo ya que Galileo conocía la obra de Pappus; y así como Pappus reconoció un problema de equilibrio arquimediano en el problema de la esfera en equilibrio en el plano inclinado, Galileo también reconoce en el problema del cilindro un problema de equilibrio arquimediano. Esta visión (la de Palmieri) es más acorde que la visión de De Groot (Palmieri, 2003 p. 252).

Para cerrar su idea, Palmieri aborda un apartado llamado **Conclusión: modelos mentales, experimentos de pensamiento y la historia de la ciencia**. En este hace un recuento de los resultados obtenidos hasta el momento, mencionando que se vio lo que es un modelo mental y su aplicabilidad en la historia de la ciencia, así como algunos aspectos de la matematización de

Galileo que eran cognitivamente dependientes de modelos mentales no simbólicos y pasa a desarrollar lo que denomina una nueva perspectiva sobre la “irritante” pregunta historiográfica sobre el presunto uso de experimentos de pensamiento por parte de Galileo.

Ya que Alexandre Koyré no menciona ni deja indicios de lo que para él es un experimento de pensamiento, Palmieri recurre a distintos autores que definen o dan indicios de lo que para ellos es un experimento de pensamiento, ideas que están representadas en la Tabla 2. Con base en esto, Palmieri Argumenta el por qué la representación mental que usa Galileo, no califica como experimento de PensamientoTabla 3 Argumentación de Palmieri sobre el por qué la representación mental que usa Galileo no califica como experimento de pensamiento. Ver Tabla 1 Tabla 3 Argumentación de Palmieri sobre el por qué la representación mental que usa Galileo no califica como experimento de pensamiento.

| **Experimentos de pensamiento** | |
|---|---|
| **J. Brown** | Experimento de pensamiento → Destructivo o Constructivo<br>Experimento de pensamiento → Destructivo y Constructivo → Platónico |
| **John Norton** | Postulan estados de casos hipotéticos<br>Invocan datos irrelevantes para la generalidad de una condición. |
| **Ronald Laymon** | Son límites ideales de la experimentación real. |
| **Andrew Irvin** | Son argumentos relativos a eventos particulares de asuntos de naturaleza hipotética que lleva a conclusiones sobre la naturaleza del mundo que nos rodea. |
| **Tamar Gendler** | En un experimento de pensamiento se hace un juicio sobre si los resultados en realidad se pueden obtener, lo que |

| | |
|---|---|
| | proporciona un punto de apoyo para reorganizar aspectos conceptuales aportando información novedosa no empírica. |
| **Nenand Miščević** | Experimento de pensamiento: Tipo de razonamiento basado en modelos mentales<br><br>Los modelos mentales, son un medio ideal para experimento de pensamiento. |
| **James McAllister** | El experimento de pensamiento no posee significado evidente, un carácter que solo adquieren bajo ciertos supuestos. |

*Tabla 2 Experimentos de pensamiento desde la perspectiva de distintos autores.*

Luego procede a comparar con estas definiciones sobre experimentos de pensamiento con el análisis que hace Galileo respecto a la teoría sobre caída de cuerpos de Aristóteles (ver Tabla 3), cuestión que abordó en su libro *Dos nuevas ciencias* en el que cuestiona que, si en verdad los cuerpos más pesados caen a mayor velocidad que los menos pesados, ¿qué pasa si en la caída de una bala de mosquete y una bala de cañón ambos objetos se funden formando un solo cuerpo? Entonces se tendría un cuerpo que debería desacelerarse a causa de la resistencia que genera en él la bala de mosquete, pero a la vez es un cuerpo más pesado que debería ser más rápido que la bala de cañón. A su vez, se plantea la siguiente pregunta "si dos cuerpos exactamente iguales en peso y forma caen a la par, y en el trayecto se funden formando un solo cuerpo con el doble de tamaño y peso, ¿qué pasa con el cuerpo resultante?, ¿por qué habría de duplicarse la velocidad del cuerpo recién formado como la teoría del movimiento de Aristóteles parece sugerir?" Galileo llega aquí a una contradicción.

| **El objeto que cae no puede ser un experimento de pensamiento** | |
|---|---|
| **Perspectiva** | **Justificación** |
| **Brown** | El acertijo de Galileo no es constructivo ni destructivo |

| | |
|---|---|
| **Norton e Irvin** | Porque no es un argumento |
| **Laymon** | Porque es difícil encontrar principios científicos que soporten la afirmación de Galileo. |
| **McAllister** | Las explicaciones teóricas de los supuestos experimentos de Galileo no prueban que tienen evidencia intrínseca significativa respecto a la objeción a Aristóteles. |

*Tabla 3 Argumentación de Palmieri sobre el por qué la representación mental que usa Galileo no califica como experimento de pensamiento.*

Por otro lado, aborda otra cuestión referente a la forma de argumentación de Galileo, en lo que McAllister denomina "rechazo del aristotelismo sobre la experimentación del pensamiento de Galileo" (Palmieri, 2003 p. 255 ciando a Mc Allister, 1996 p. 239), atribuyéndole dicho rechazo a un único aristotélico, conocido como Coresio, quién refutó el proceder de Mazzoni (primero maestro, luego colega y amigo de Galileo), quién compartía y divulgaba la manera como Galileo refutaba la postura aristotélica de que la caída de los cuerpos ligeros es imposible. Sin embargo, lo interesante de esta cuestión es que tanto Coresio como Galileo tenían formas de proceder análogas; incluso, la construcción de su argumentación por *reductio ad absurdum* es homogénea y en ambos se evidencia una "fijación de creencias" expresada en Coresio en que es imposible que los cuerpos ligeros puedan descender y en Galileo en que todos los cuerpos caen a la misma razón.

Posteriormente, Palmieri sostiene que la pregunta de McAllister, sobre si los experimentos de pensamiento son evidentemente inertes, podría ser reformulada en términos de los procesos cognitivos subyacentes a la fijación de creencias. Palmieri (2003) afirma que esta pregunta más que a los contenidos sobre creencias fijas, concierne a los procesos subyacentes a la fijación de creencias, y manifiesta que, en el sentido explicado por Jerry Fodor en su teoría sobre la modularidad de la mente y la pregunta ¿cómo se fijan las creencias? Parece que, la fijación de creencias es un fenómeno cognitivo profundo que ocurre a nivel de lo que Fodor llama “mecanismos *centrales*” los cuales funcionan difusamente a través de sistemas modulares que escapan a la comprensión de la ciencia cognitiva actual. Así mismo Palmieri concluye que los sistemas no simbólicos del razonamiento, aquellos que involucran procesos de visualización, parecen funcionar cognitivamente de manera más profunda que los sistemas proposicionales o aquellos basados en símbolos y reglas de inferencia, y podrían jugar un papel decisivo en los procesos que subyacen a la fijación de creencias. Infortunadamente hoy en día no se podría ofrecer una respuesta concreta y completa respecto a la pregunta propuesta en líneas anteriores; sin embargo, Palmieri tiene confianza en que la ciencia cognitiva, como ciencia, evolucionará y en un futuro podrá abordar problemas relacionados directamente con la fijación de creencias.

Para concluir, Palmieri afirma que la historia cognitiva podría tener el potencial de sacar a la luz todo un espectro de casos en los que se han aplicado estructuras y mecanismos más o menos exitosos durante el desarrollo científico de los últimos milenios y así poder estudiar el por qué algunos mecanismos cognitivos de representación parecen ser más exitosos que otros (Palmieri, 2003 p. 260). En el caso de Galileo, se vio que herramientas cognitivas específicas como los modelos mentales, se aplicaron a la matematización del mundo natural. La historia cognitiva puede contribuir al estudio de la evolución de los mecanismos cognitivos y de los aspectos concernientes a la fijación de creencias, justo en la intersección de las áreas de interés de los historiadores, filósofos y científicos cognitivos (Palmieri, 2003 p. 260).

## 2.2 Herramientas teóricas para la comprensión del artículo

En este apartado evidencio elementos que estudié paralelamente al texto de Palmieri (2003), a fin de mostrar los elementos teóricos que aportaron en mi comprensión de dicho artículo; para lo anterior, primero procederé a describir un contexto histórico basado en la vida y obra de Galileo, y posteriormente, mencionaré componentes matemáticos necesarios para comprender las ideas expuestas por el autor. Sin duda, la adquisición de estos conocimientos me facilitó la comprensión de la propuesta de Palmieri al dotarme de los conocimientos directamente relacionados con su postura.

### 2.2.1 Respecto al contexto histórico

#### *2.2.1.1 Biografía de Galileo*

Teniendo en cuenta que el texto de Palmieri está enfocado en el estudio del pensamiento de Galileo Galilei y su matematización física temprana (o del mundo natural), lo primero que hice fue estudiar su biografía registrada en documentales *La historia de los humanos 14 Galileo Galilei* (Leighton & Wood, 2013), *Los expedientes Galilei Ciencia y Fe* (Rtve, 2018) y *Galileo Galilei, y sin embargo se mueve* (Educational Foundation, 2002) así como parte del libro de De Santillana (1960) *El Crimen de Galileo,* a fin de complementar los conocimientos previos sobre este importante personaje pionero en la revolución científica renacentista. A continuación, relato algunos aspectos de la vida y obra de Galileo[4].

[4] Para una versión más completa de la biografía de Galileo, revisar el Anexo 2.

A Galileo Galilei se le reconoce como digno hijo de su padre, Vincenzo Galilei, un conocido músico quien cuestionó los parámetros establecidos para la composición musical de la época a partir de armónicas pitagóricas y las cuales fueron influyentes en las artes durante siglos; así mismo, Galileo es conocido por su mente innovadora y atrevida, capaz de cuestionar distintos conceptos filosóficos de la época, incluso creencias eclesiásticas, a pesar de declararse creyente cristiano-católico.

Durante su vida, Galileo fue un apasionado por el conocimiento principalmente matemático; esto se evidencia en su producción académica, la cual está centrada en el movimiento de cuerpos, cuestiones mecánicas y Astronomía. A él se le atribuye una hermosa cita que dice:

> Este gran libro, el universo, solo puede ser entendido si se aprende y se comprende el lenguaje y el alfabeto con el que está escrito, es decir: el lenguaje de las matemáticas, triángulos, círculos y figuras geométricas, figuras sin las que sería humanamente imposible entender una sola palabra, sin ellas, deambularíamos por un oscuro laberinto (Educational Foundation, 2002, m. 7:00).

A Galileo se le reconoce como un seguidor de la obra de Copérnico, la cual es opuesta al geocentrismo aristotélico y de la Iglesia católica; en la teoría de Copérnico no es el Sol y los astros quienes giran en torno a la Tierra como centro del universo, sino que es la Tierra quién gira en torno al Sol. Fue gracias al invento del catalejo y la optimización hecha por Galileo bautizada "telescopio" que este último pudo corroborar, a partir de la observación del movimiento de otros astros como Júpiter y sus satélites, el movimiento de la Tierra en torno al Sol; además infirió que, si los astros son esféricos entonces la Tierra también es esférica. Así mismo, su invento le permitió observar, por primera vez en la historia de la humanidad, la superficie de la Luna, la cual describió de la siguiente manera en su obra titulada *Sidereus Nuncius* (Mensajero Sideral):

> Uno puede saber con la certeza que nos proporcionan los sentidos, que la Luna ciertamente no posee una superficie lisa y pulida; al contrario, es rugosa y desigual como la propia superficie de la Tierra, está llena de grandes protuberancias, abismos profundos, suaves colinas y profundos valles (Leighton & Wood, 2013, m. 10:34) y (Educational Foundation, 2002)

Estos descubrimientos le significaron el reconocimiento y fama que había buscado durante toda su vida y que le representaron una considerable mejora en su calidad de vida.

Posteriormente a la publicación y difusión de sus hallazgos astronómicos, Galileo se vio envuelto en una serie de enfrentamientos y juicios ante la Santa Inquisición, dado que, algunas de sus afirmaciones astrológicas iban en contravía de los preceptos concebidos como verdades por parte de la escuela aristotélica de la Iglesia católica; se presume que, a partir de una manipulación efectuada por un sector jesuita del clérigo, se modificó el acuerdo que él tenía con la Iglesia respecto a la difusión y estudio de sus teorías, por lo que la Santa Inquisición lo obligó a retractarse de sus teorías (ver Anexo 3. Sentencia del Tribunal de la Inquisición, 22 de junio de 1633), motivo por el cual Galileo publicó la siguiente declaración:

> Mi error ha sido, lo confieso en verdad, la ambición de gloria, la pura ignorancia y el descuido, y me confirmo en mi aseveración. No he sostenido ni sostengo como verdadera la opinión que ha sido condenada, la del movimiento de la Tierra y la inmovilidad del Sol,

> si me concedieran como deseo los medios y el tiempo para dar una clara demostración de ello, estoy listo para hacerlo.

Pero, a pesar de esto fue privado de su libertad física, con lo que posteriormente declaró (ver Anexo 4. Abjuración de Galileo, 22 de junio de 1633):

> Yo, Galileo, hijo del finado Vincenzo Galilei Florentino, de 70 años de edad, he sido declarado por el santo oficio, culpable de ser sospechoso de reiterada y vehemente herejía, eso es como decir que he sostenido y creído que el Sol era el centro inamovible del universo y que la Tierra no era el centro y se mueve, con sincero corazón y una fe ciega, abjuro, maldigo y aborrezco los errores y herejías anteriormente mencionados.

Más la privación de su libertad finalmente no fue intelectual, pues a pesar de esa adversidad, el gran Galileo publicó a la edad de 74 años su obra *Dos Nuevas Ciencias* y continuó con sus estudios científicos sobre el movimiento de los cuerpos celestes hasta el final de sus días.

#### *2.2.1.2 Clavius y Galileo*

Dado que, durante el estudio de la biografía de Galileo se resalta el hecho de que él tuvo notorias diferencias con algunos sectores jesuitas de la Iglesia Católica, un aspecto importante para comprender parte del contexto del documento de Palmieri es el que se centra en el conflicto entre Galileo Galilei y Christophorus Clavius, puesto que, Clavius fue un Matemático jesuita que refutó varias de las posturas científicas de Galileo, (quizás influenciado en parte por sus creencias religiosas) y uno de los apartados del texto guía se titula "*Pruebas de imagen: Objeción constructivista de Clavius a Galileo"*, en donde se observa que Galileo en sus esfuerzos por ser reconocido académicamente mantuvo directa comunicación con Clavius. A continuación, procedo a sintetizar algunos aspectos de la relación entre Clavius y Galileo, expuestas en el libro *El crimen de Galileo* (De Santillana, 1960).

En el texto de De Santillana (1960) se aborda el impacto que tuvo Galileo en la secularización del pensamiento y cómo a través de sus conocimientos enfrentó diversas adversidades, entre ellas, los conflictos religiosos para defender sus principios y convicciones científicas frente a los jesuitas, particularmente frente a Clavius, quien en un principio contempló las teorías galileanas como descabelladas y al telescopio como un instrumento trivial.

Por ejemplo, De Santillana (1960) al respecto dice que al observar con gran atención la actitud del padre Clavius, autoridad jesuita en Astronomía, se evidencia que no puede sujetarse a la idea de que puedan existir auténticas montañas en la Luna y que Galileo está tratando de explicar lo que es observado por determinadas diferencias de densidad en el interior del reluciente y diáfano cuerpo del satélite. Sin embargo, a pesar de la resistencia de Clavius respecto a sus teorías y estudios, Galileo no desistió en sus convicciones, ni tampoco a la controversia cosmológica, y planteó un grave problema para Clavius y sus colegas matemáticos en el Colegio Romano sobre la visión que la Iglesia tenía del mundo y el entendimiento sobre la Astronomía.

De acuerdo con sus experimentos y sus cuestionamientos, generó un nuevo enfoque del cosmos al explicar que los cuerpos celestes, particularmente la Luna, no son lisos, por el contrario, la Luna es áspera, irregular y llena de cavidades, desafiando la teoría tolemaica y los preceptos religiosos que existían para la época. En este contexto, Clavius, fue muy cauteloso en su interpretación de varios preceptos galileanos, especialmente en el significado de la apariencia tosca de la Luna; esta se convirtió finalmente en una extensa polémica a la que los profesores aristotélicos se lanzaron con furor.

La realidad es que, durante algunos años Clavius aceptaba que el sistema de Galileo era más elegante que el de Ptolomeo y admitía que se usara como método de trabajo, pero aún pensaba que *La Biblia*, tal y como había sido interpretada por la Iglesia, reflejaba la realidad científica del cosmos. Al respecto, manifiesta De Santillana que "los astrónomos jesuitas, o cuando menos Clavius y Grienberger, vieron sacudida su estricta fe tolemáica" (1960 p. 30) motivo por el cual, ceder ante la información celeste aportada por Galileo, fue en verdad una decisión difícil para Clavius, autor de la reforma del calendario gregoriano y director indiscutido de la astronomía jesuita. Al principio se burló de las descripciones celestes obtenidas a partir del telescopio y dijo que ese instrumento de novedad trivial tendría primero que establecerlas allá (en la luna) para luego poder ser vistas; pero después de haber observado a través del mejor telescopio de Galileo, debió "rendirse graciosamente" (De Santillana, 1960 p. 30).

Así mismo, la insistencia de Galileo sobre su teoría en las manchas solares y su teoría de que los cuerpos giraban alrededor de la Tierra, fueron realmente desafiantes para el pensamiento jesuita. También, Galileo confirmó la teoría de Copérnico al mostrar con su telescopio que Venus giraba alrededor del Sol y no de la Tierra, como se creía. Estos aspectos cosmológicos pusieron en entredicho varias afirmaciones de la Iglesia por lo que Galileo empezó a verse como un detractor, ganando así fuerte oposición desde algunos sectores jesuitas, motivo por lo que él decidió dejar a un lado la concepción copernicana y solo abordar con Clavius los temas de los cuales tuviera una evidencia, como las montañas de la Luna, reorientando así su debate sobre pensamientos aristotélicos, sin discutir acerca de sus creencias religiosas.

#### *2.2.1.3 Enfoque platónico de Galileo según Koyré y su calificativo como abusador de experimentos de pensamiento*

Al inicio de la búsqueda de información referente al marco contextual sobre Galileo, una profesora del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional, me sugirió leer sobre Alexandre Koyré, pues es uno de los referentes a la hora de estudiar documentos filosófico-científicos sobre Galileo. Gracias a su consejo, encontré dos textos interesantes del mencionado autor llamados *Estudios de historia del pensamiento científico* y *Estudios galileanos,* en ellos hay algunos apartados que permiten introducirse a la filosofía científica detrás de la obra de Galileo, y que posteriormente, facilitan comprender la mención que hace Palmieri respecto a la categorización de Koyré sobre la escuela de pensamiento en la que encaja Galileo "…la matematización de la naturaleza de Galileo como la reivindicación de un enfoque platónico al estudio del mundo natural" (Palmieri, 2003 p. 232, citando a Koyré 1978, 1943). Posteriormente, este estudio posibilitó comprender el cuestionamiento que hace Palmieri sobre la acusación de Koyré hacia Galileo, como un abusador de los experimentos de pensamiento, sin que este (Koyré) hubiese manifestado lo que para él es un experimento de pensamiento.

A continuación, un breve resumen de la idea de Koyré sobre Galileo como un pensador de la corriente platónica.

Es de recalcar que para Koyré la observación al igual que la experimentación le permiten comprender la unión esencial que tienen la religión y la ciencia, contrario a las creencias y teorías tradicionales. Según Koyré con los descubrimientos realizados a través del telescopio, Galileo revolucionó las teorías físicas y astronómicas en lo concerniente al movimiento de la Tierra y el centro del cosmos, principalmente, lo referente al principio de inercia, pues establece relaciones entre los movimientos y las fuerzas, contrariando a los pensadores griegos. Koyré (1988) dice:

> … la revolución espiritual del siglo XVI la describe a través de dos rasgos “primero; la destrucción del cosmos y por consiguiente la desaparición en la ciencia fundadas en esta noción, segundo; la geometrización del espacio, es decir la sustentación de la concepción de un espacio homogéneo y abstracto de la geometría euclidiana”. Se puede resumir y expresar del siguiente modo estas dos características: La matematización (geometrización) de la naturaleza, y por consiguiente la matematización (geometrización de la ciencia).

Sin embargo, según Koyré (1988), Galileo no debió tomar una actitud defensiva, errónea y burlesca frente a las teorías geocéntricas y aristotélicas; por el contrario, debió revolucionar y cambiar el pensamiento inquisitivo de la época, combatiendo ciertas teorías erróneas, para corregirlas o sustituirlas por otras mejores (p. 155). Es bien sabido que el punto de vista y referente de pensamiento que tenía Galileo era platónico debido a la cuestión del papel y la naturaleza de las Matemáticas, el cual constituía el principal tema de oposición entre Aristóteles y Platón, ya que para este último, la utilización de las Matemáticas en Física como instrumento de prueba era necesario (Koyré, 1988 p. 171); esta diferencia entre la forma de Platón para explicar su posición a partir de las Matemáticas, era un proceder contradictorio para Aristóteles, debido a que la Física no se conforma con la rigidez y precisión de los conceptos matemáticos, puesto que para Aristóteles esta era vista como una ciencia abstracta.

Para comprender mejor parte del pensamiento de Galileo y ver la unión esencial de él con el pensamiento platónico, a menudo olvidado entre las teorías astronómicas y físicas, es necesario reconocer la conciencia filosófica y científica de la época, la cual era en su mayoría de corriente aristotélica. Para Aristóteles, el movimiento en el vacío no era concebido ya que su teoría se basaba en que el objeto debía encontrarse en su lugar natural y volver a este si era separado violentamente; un movimiento natural no puede producirse en el vacío, un cuerpo colocado en el vacío no sabría a dónde ir. Aristóteles creía que el impulso de un cuerpo para alcanzar su máxima acción y causa, determinado *ímpetus*, vence la resistencia que el medio opone al cuerpo y esta es incompatible con un método matemático. De ahí la contradicción que tenía con Platón y posteriormente con Galileo, ya que para este último no había distinción entre un cuerpo en reposo y un cuerpo en movimiento.

Galileo propone que la naturaleza está escrita en caracteres geométricos, es decir, mediante el uso de objetos geométricos se puede describir fenómenos físicos, atribuyéndole a los objetos geométricos propiedades de las magnitudes físicas; el movimiento de la caída de los cuerpos está sujeto a la ley de los números, entendiendo esto como la aplicación de características entre objetos matemáticos (por ejemplo la semejanza entre triángulos) a magnitudes de naturaleza física, y esto para Galileo, significa platonismo, ya que, sin Matemáticas no se podía aprender Filosofía; sin embargo, Galileo discrepaba con Platón en el hecho de que la Astronomía no es la

Física, y era inútil pensar una Filosofía de la naturaleza de las Matemáticas, sin entender esta diferencia.

Tal como se puede observar en Koyré (1988), él ha dejado en claro que el proceder filosófico de Galileo para su matematización de la naturaleza, lo realiza desde un enfoque platónico, herramienta que, como se describió anteriormente, permite comprender la mención que hace Palmieri en su trabajo sobre Koyré.

Por otro lado, en el texto de Koyré (1980), titulado *Estudios galileanos*, la mención que este hace sobre el presunto abuso de Galileo de experimentos de pensamiento expresa:

> Los «experimentos» a los que apela —o apelará más tarde— Galileo, incluso los que realmente ejecuta, no son ni serán nunca otra cosa que experimentos de pensamiento. Los únicos, por lo demás, que podían hacerse con los objetos de su física. Pues los objetos de la física galileana, los cuerpos de su dinámica, no son cuerpos «reales». En lo irreal del espacio geométrico no hay cabida para los cuerpos «reales» —reales en el significado del sentido común—(Koyré, 1980 p. 72).

Tal como alude Palmieri (2003), Alexandre Koyré solo se limita a decir que Galileo hace uso de experimentos de pensamiento, más no se detiene a expresar lo que para él es un experimento de pensamiento.

### 2.2.2 Conocimientos teóricos matemáticos y físicos

A continuación presento una breve descripción de la teoría matemática que estudié y que fue de utilidad para interiorizar aspectos fundamentales del análisis que hace Palmieri (2003) sobre el proceder cognitivo de Galileo y los elementos teóricos que pudo haber usado como base para su matematización física temprana.

#### *2.2.2.1 Respecto a la teoría de semejanza en figuras planas*

Durante el estudio del documento de Palmieri, evidencio que, para sustentar su postulado sobre centros de gravedad en sistemas de balanzas semejantes, Galileo realizó una reversión de la teoría euclidiana sobre semejanza de triángulos[5], y una generalización de la teoría arquimediana sobre semejanza en la distribución de centros de gravedad en figuras planas.

A continuación, describo en qué consisten tanto la perspectiva de semejanza euclidiana como la arquimediana; en este sentido, primero relato aspectos que hubo lugar a indagar sobre la teoría de Euclides referida a la semejanza, luego menciono la visión arquimediana de semejanza a partir de centros de gravedad y, finalmente, expongo de qué manera este estudio me permite una mejor comprensión del texto guía.

En la definición I del sexto libro de *Elementos*, Euclides expresa lo que para él es la semejanza entre dos figuras planas o rectilíneas; en la edición de Commandino & Simson, (1855) se establece que:

> Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos respectivamente iguales y proporcionales los lados que contienen ángulos iguales (p. 149).

Es decir, Euclides primero identifica que dos figuras geométricas planas son equiangulares (es decir que uno a uno sus ángulos son congruentes), luego que los lados

[5] Noción ilustrada en párrafos posteriores

contenidos por los ángulos congruentes son proporcionales y con esto concluye que los triángulos son semejantes. En la Figura 6 se ilustran dos triángulos semejantes de acuerdo con las condiciones dadas por Euclides.

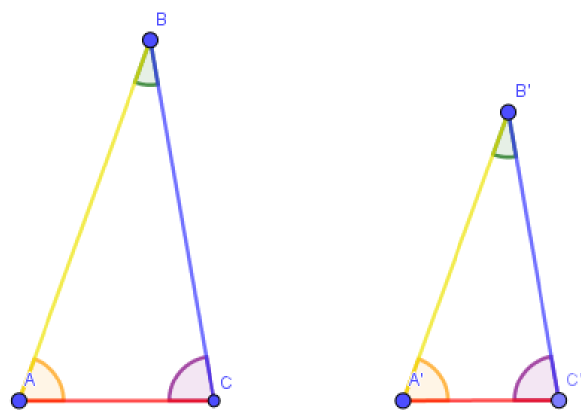



*Figura 6 Representación de triángulos semejantes*

A continuación, muestro de manera un poco más detallada la semejanza euclidiana, tomando como base la proposición 6 del sexto libro de *Elementos*, aunque para ello es recomendable tener en cuenta las definiciones dadas en este libro, así como la proposición 1:

Definiciones (Commandino & Simson, 1855 p. 149):

1. Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos respectivamente iguales, y proporcionales los lados que contienen ángulos iguales.
2. Aquellas figuras recíprocas (esto es los triángulos entre sí, y los paralelogramos entre sí) que tienen los lados que contienen dos ángulos de tal suerte proporcionales, que un lado de la primera es al de la segunda, como el otro lado de la segunda es al otro de la primera.

3. Se dice, que una recta está dividida en extrema, y media razón, cuando toda la línea es a su segmento mayor, como este es al menor.
4. La altura de una figura es la línea recta tirada perpendicularmente del vértice a la base.

Respecto a la definición 1, mediante la Fig. 6 he ilustrado anteriormente la noción de semejanza en figuras planas dada por Euclides, al menos para el caso de los triángulos; por tal motivo, procederé a ilustrar la definición 2.

Al remontarnos a la Figura 6 podemos ver los segmentos o lados del triángulo diferenciados por colores. La definición 2 del sexto libro de *Elementos* dice: "Aquellas figuras son recíprocas (esto es los triángulos entre sí, y los paralelogramos entre sí) que tienen los lados que contienen dos ángulos de tal suerte proporcionales que un lado de la primera es al de la segunda, como el otro lado de la segunda es al otro lado de la primera" (Commandino & Simson, 1855 p. 149), teniendo en cuenta esto, en la figura mencionada podemos observar que el segmento de color amarillo $AB$ es al segmento $A'B'$ así como el segmento de color azul $B'C'$ es al segmento $BC$.

Para la definición 3 del sexto libro de *Elementos* consideramos un segmento $AB$ y un punto $C$ entre $A$ y $B$ representados en la Figura 7, la extrema y media razón indica que el segmento menor representado en la Figura 7 $AC$ es al segmento $BC$ como $BC$ es al segmento $AB$.

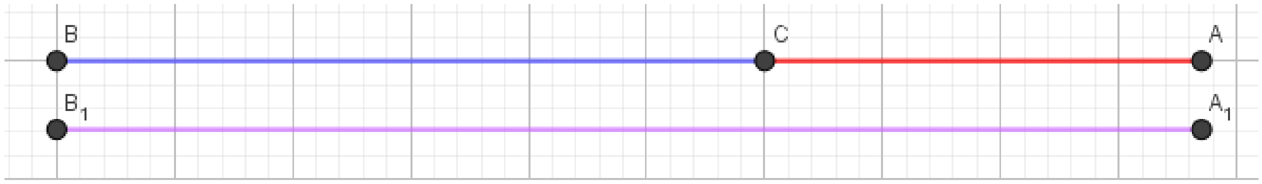



*Figura 7 segmento dividido en extrema y media razón*

Para la definición 4 recurriremos a la representación gráfica de dicha definición mediante las Figuras 8, 9, 10 y 11 a fin de ilustrar la altura según Euclides.

Cabe resaltar que las figuras planas (las trabajadas por Euclides en *Elementos*) tienen tantas alturas como vértices tiene la figura. Se puede reemplazar el objeto geométrico *base* de la figura usado por Euclides, por la recta que contiene dicho objeto, de manera tal que es posible encontrar alturas que quedan en el exterior de las figuras como se observa en la Figura 8 y en la Figura 10.

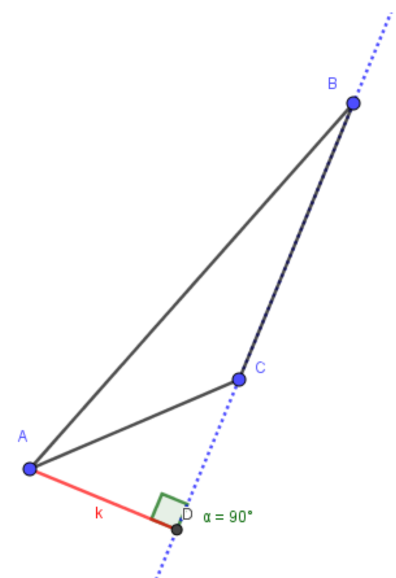



*Figura 8 En color rojo, representación de una de las alturas del triángulo ABC*


*Figura 9 Representación de una de las alturas de un rectángulo*

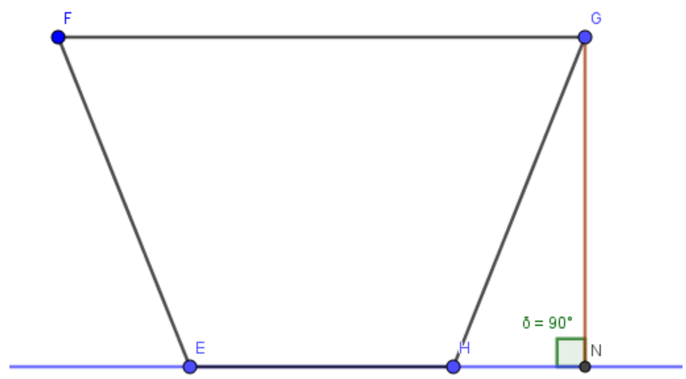



*Figura 10 Altura* $\overline{GN}$ *en el exterior del cuadrilátero* $EFGH$

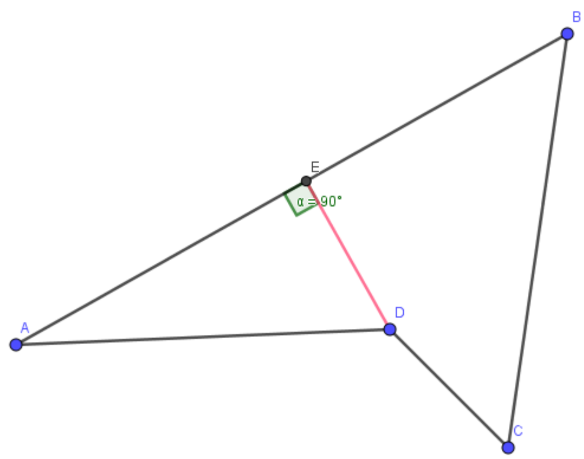



*Figura 11 representación en color rojo de una de las alturas del cuadrilátero* $ABC$

Luego de haber visto brevemente las definiciones del sexto libro de *Elementos*, muestro las proposiciones 1 y 4 del mismo libro, ya que Palmieri las menciona en el desarrollo de su texto, como fundamento de su afirmación en cuanto a que Galileo hace una reversión de la semejanza euclidiana y una generalización de la semejanza arquimediana para su proposición 1 sobre sistemas de balanzas semejantes.

**Proposición 1.** Los triángulos y los paralelogramos que tienen una misma altura son entre sí como sus bases.(Commandino & Simson, 1855, p. 149)

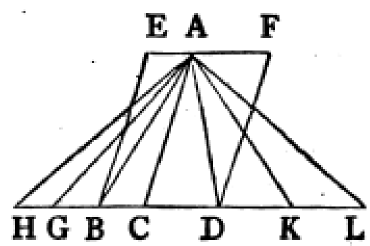



*Figura 12 Representación propuesta por Euclides (Commandino & Simson, 1855)*

Tengan los triángulos $ABC$, $ACD$, y los paralelogramos EC, CF la misma altura, A saber la perpendicular tirada del punto $A$ a la recta $BD$ por ambas partes hasta $H$, $L$ y tómese cuantas partes se quieran $BG$, $GH$ iguales a la base $BC$ es a la $C$ (Commandino & Simson, 1855, p. 149).

Prolónguese $BD$ por ambas partes hasta $H$, $L$, y tómese cuantas partes se quieran $BG$, $GH$ iguales a la base $BC$, como también cuantas partes se quieran $DK$, $KL$ iguales a la base $CD$ , tírense así mismo $AG$, $AH$, $AK$, $AL$. Siendo pues iguales entre las líneas $CB$, $BG$, $GH$, también los triángulos $AHG$, $AGB$, $ABC$ serán entre sí iguales, luego cuán multíplice sea la base $HC$ de la $BC$, tan multíplice será el triángulo $AHC$ del $ABC$. Por la misma razón cuan multíplice sea la base $LC$

de la $CD$, tan multíplice será el triángulo $ALC$ del $ACD$, y según sea la base $HC$ igual, mayor, o menor que la $CL$, el triángulo $AHC$ será igual, mayor o menor que el $ALC$: dadas, pues, cuatro cantidades, esto es las dos bases $BC$, $CD$, y los dos triángulos $ABC$, $ACD$, se han tomando cualesquiera equimultíplices de la base $BC$ y del triángulo $ABC$, esto es la base $HC$ y el triángulo $AHC$, y otras cualesquiera multíplices de la base $CD$, y del triángulo $ACD$, es a saber la base $CL$, y el triángulo $ALC$, luego el triángulo $ABC$ será al $ACD$ como la base $BC$ a la $CD$.

Y por ser el paralelogramo $EC$ duplo del triángulo $ABC$, y el paralelogramo $CF$ duplo del triángulo $ACD$, y tener las partes la misma razón que sus equimultíplices, será el paralelogramo $EC$ al $CF$, como el triángulo $ABC$ al $ACD$. Luego habiéndose demostrado que el triángulo $ABC$ es al $ACD$, como la base $BC$ a la $CD$, y el paralelogramo $EC$ al $CF$ como el triángulo $ABC$ al $ACD$, será el paralelogramo $EC$ al $CF$ como la base $BC$ a la $CD$. Por consiguiente, los triángulos, &c. L.Q.D.D. (Commandino & Simson, 1855, p. 149)

**Corolario**. De aquí es que los triángulos y paralelogramos de iguales alturas son entre sí como sus bases.

Porque colocadas las figuras de manera que sus bases estén en una misma recta, y tiradas perpendiculares de los vértices de los triángulos a las bases, resultará la recta que junta los vértices paralela a la recta en que están las bases, por ser las perpendiculares iguales y paralelas entre sí: por tanto, supuesta la misma construcción que en la proposición, la demostración será también la misma.

De acuerdo con la información suministrada en la anterior proposición del libro de *Elementos* de Euclides, procedo a mostrar aspectos importantes de esta con la ayuda de software de geometría. Partiendo de la Figura 13 tenemos los triángulos $ABC$ y $ACD$ y los paralelogramos $EBCA$ y $CDFA$ de acuerdo con las condiciones propuestas por Euclides.

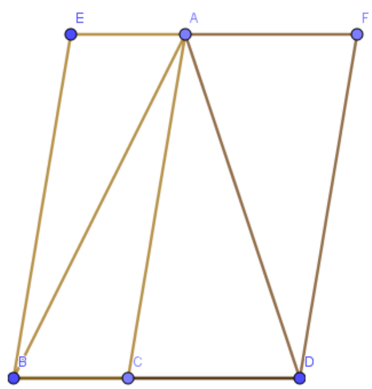



*Figura 13 Triángulos $ABC$ y $ACD$, paralelogramos $EBCA$ y $CDFA$ de acuerdo con descripción de Euclides.*

Luego realizamos la prolongación de los segmentos $BC$ y $CD$ y se trazamos los segmentos $GA$ y $HA$ con los cuales se determinan los triángulos $AGB$ y $AHG$. Por construcción, tienen igual medida de altura y base que el triángulo $ABC$; con un procedimiento análogo tenemos que los triángulos $ADK$ y $AKL$ con longitud de base y altura igual al triángulo $ACD$ como podemos observar en la Figura 14.

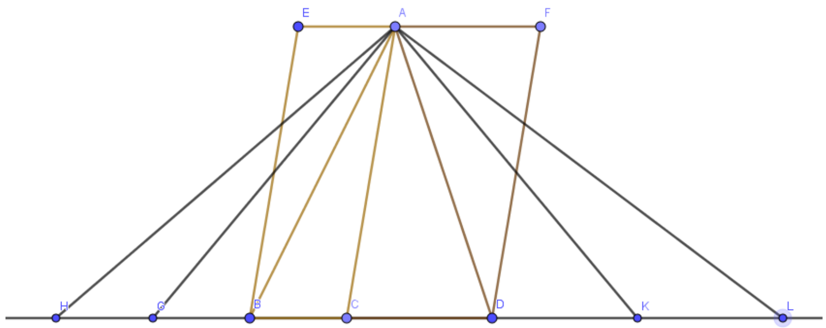



*Figura 14. Construcción de triángulos $AGB$, $AHG$, $ADK$ y $AKL$ de acuerdo con pasos propuestos por Euclides.*

Aunque dada la forma como se ha realizado la construcción puede resultar trivial resaltar que el área de los triángulos $ABC$, $AGB$ y $AHG$ es igual, y lo mismo ocurre con los triángulos $ACD$, $ADK$ y $AKL$ (sabiendo que $A\Delta = \frac{b*h}{2}$) y cada terna de triángulos comparten igual longitud tanto de sus bases cómo de sus alturas, a fin de ilustrar esta situación, procedo a representarla mediante software de geometría en la Figura 15.

Así mismo podemos observar para los triángulos $AGB$ y $AHG$ que su área es el doble del área de $ABC$, como el área de $ADK$ y $AKL$ es el doble del área de $ADC$ (Figura 15); también el área del triángulo $AHC$ es tres veces el área del triángulo $ABC$, y de la misma forma ocurre para el triángulo $ALC$ respecto al triángulo $ACD$ (Figura 16).

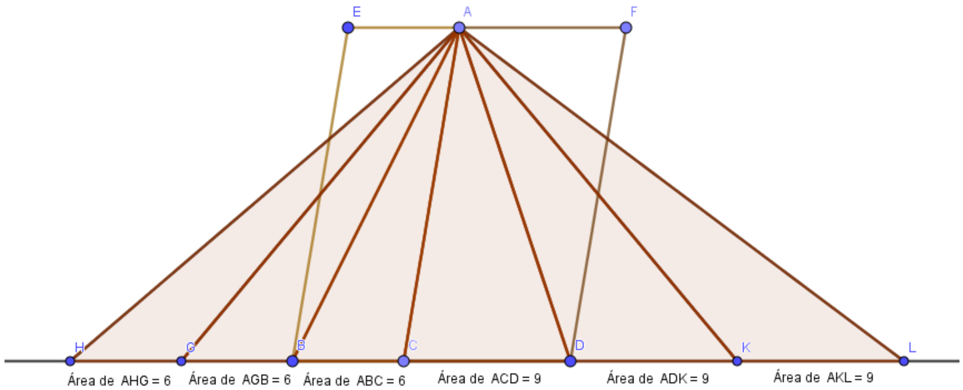



*Figura 15. Área de los triángulos $ABC$, $AGB$, $AHG$, $ADC$, $ADK$ y $AKL$.*

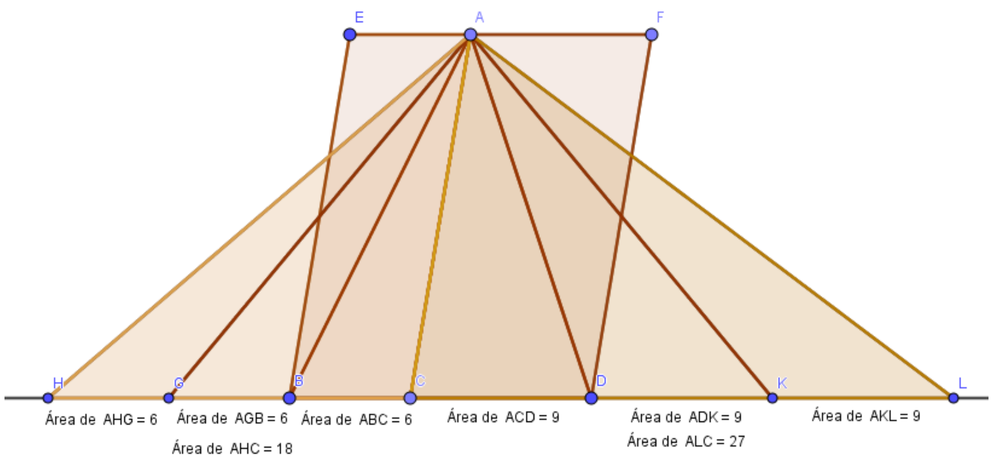



*Figura 16 El área del triángulo $AHC$ es tres veces el área de los triángulos $ABC$, $AGB$ y $AHG$. El área del triángulo $ALC$ es tres veces el área de los triángulos $ADC$, $ADK$ y $AKL$.*

En concordancia con lo anterior hallamos el área de los paralelogramos $EBCA$ y $CDFA$ la cual evidentemente es el doble que la de los triángulos $ABC$ y $ADC$ respectivamente (Figura 17) ya sea por fórmula general para hallar el área de cuadriláteros, por conocimientos previos en geometría o incluso por la intuición que nos provee la representación gráfica de la situación.

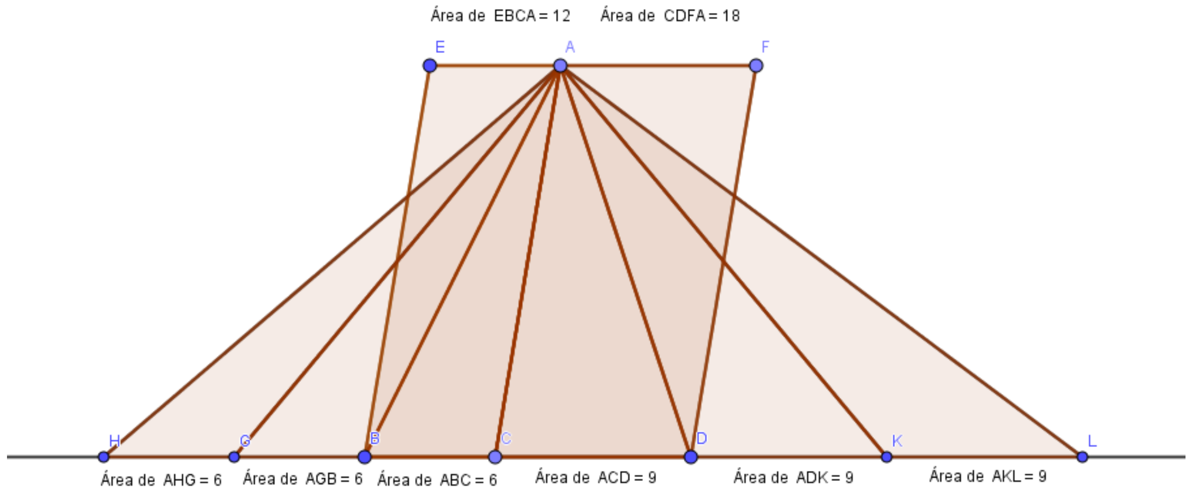



*Figura 17 Área de los paralelogramos $EBCA$ y $CDFA$ contrastada con el área de los triángulos mencionados en la Fig. 13.*

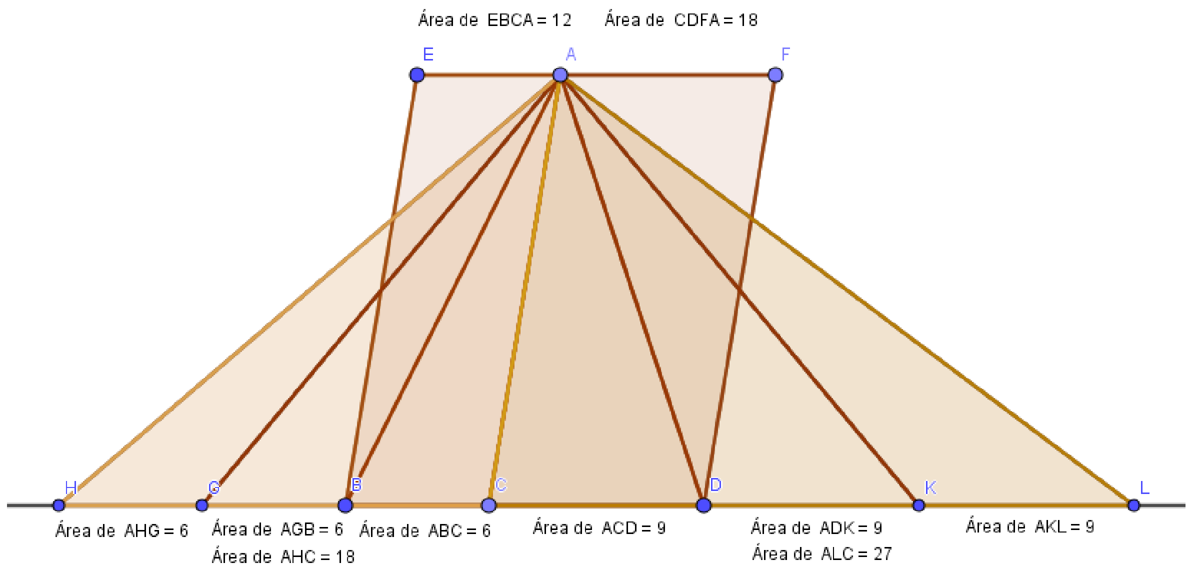



*Figura 18 Área de los paralelogramos $EBCA$ y $CDFA$ contrastada con el área de los triángulos mencionados en la Fig. 13 y visualización del área de los triángulos $AHC$ y $ALC$.*

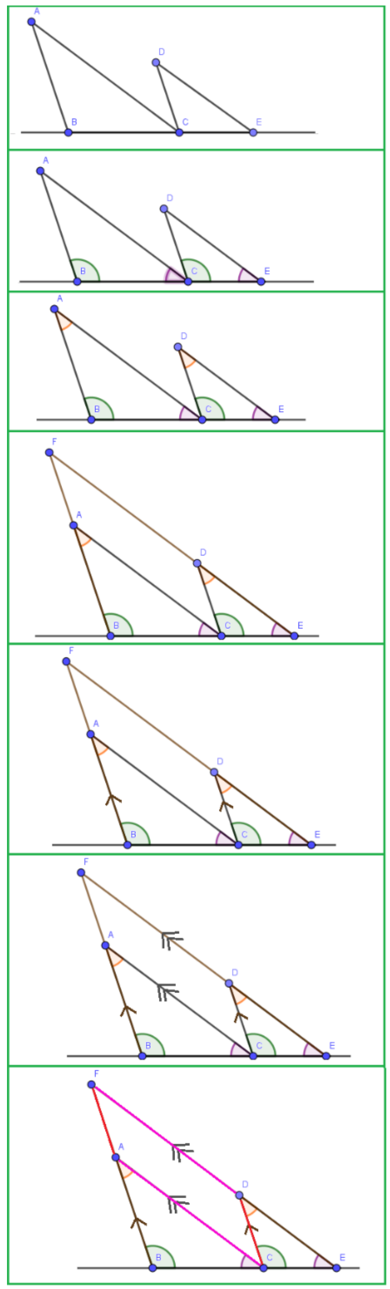
Con lo anterior podemos concluir que: como la base $BC$ es a la base $CD$, así el triángulo $ABC$ es al triángulo $ACD$, y el paralelogramo $EBCA$ es al paralelogramo $CDFA$.

**Proposición 4.** Los triángulos equiángulos tienen proporcionales los lados que contienen iguales ángulos; y homólogos los lados opuestos a ángulos iguales. (Commandino & Simson, 1855 p. 155)

Tengan los triángulos equiángulos $ABC$, $DCE$ el ángulo $ABC$ igual al ángulo $DCE$, y el $ACB$ igual al $DEC$, y por consiguiente el ángulo $BAC$ igual al $CDE$. Digo, que los lados de dichos triángulos, que contienen ángulos iguales, serán proporcionales; y los lados opuestos a ángulos iguales serán homólogos (Commandino & Simson, 1855 p. 155).

Colóquese el triángulo $DCE$ de manera que su lado $CE$ esté directamente al $BC$, y siendo los ángulos $ABC$, $ACB$ menores que dos rectos, y el $ACB$ igual a $DEC$, resultarán $ABC$, $DEC$ menores que dos rectos: por tanto $BA$, $ED$ prolongadas se encontrarán: prolónguese, y encuéntrese en el punto $F$. por ser el ángulo $DCE$ igual al $ABC$, será $BF$ paralela a $CD$: además, por ser el ángulo $ACB$ igual al $DEC$, será $AC$ paralela a $FE$: luego $FACD$ será un paralelogramo; por consiguiente $AF$ igual a $CD$, y $AC$ a $FD$ siendo, pues, la $AC$ paralela al lado $FE$ del triángulo $FBE$, será $BA$ a $AF$, como $BC$ a $CE$: pero $AF$ es igual a $CD$ luego: $BA$ será a $CD$, como $BC$ a $CE$: y permutando será $AB$ a $BC$, como $DC$ a $CE$. A más de esto, siendo $CD$ paralela a $BF$, será $BC$ a $CE$, como $FD$ a $DE$: pero $FD$ es igual a $AC$: luego $BC$ será a $CE$, como $AC$ a $DE$, y permutando $BC$ a $CA$, como $CE$ a $ED$: por consiguiente habiéndose demostrado, que $AB$ es a $BC$, como $DC$ a $CE$; y $BC$ a $CA$; como $CE$ a $ED$, será por igualdad $BA$ a $AC$, como $CD$ a $DE$. Por consiguiente, los triángulos, son semejantes. &c. L.Q.D.D (Commandino & Simson, 1855 p. 156).

Para esta proposición considero que la demostración propuesta en el libro VI de *Elementos* es especialmente precisa y clara, por lo que me limitaré a anexar la Figura 19 con la que podremos hacer un seguimiento de los pasos propuestos por Euclides.



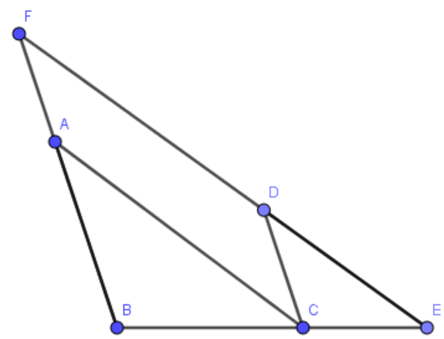



*Figura 19 Construcción geométrica propuesta por Euclides para demostrar la proposición 6 del sexto libro de* Elementos*.*

Por otro lado, Palmieri (2003) afirma, que Galileo hizo una generalización de la teoría arquimediana sobre centros de gravedad en figuras planas o rectilíneas. Palmieri (2003) referencia la noción de Arquímedes de semejanza de la siguiente manera, "los puntos colocados de manera semejante en figuras semejantes son tales que las líneas dibujadas desde ellos en ángulos iguales hacia los lados correspondientes forman ángulos iguales con los correspondientes lados"(Palmieri, 2003, p. 241). De acuerdo con Strathern (1999), Arquímedes en *Sobre el equilibrio de los planos* determina el centro de gravedad de distintas figuras planas, es decir, bidimensionales (p. 23), en donde supone concentrado todo el peso de la figura, llegando así a resultados que luego demuestra por el método de exhaución, En la Figura 20 se visualiza una representación gráfica de semejanza en la disposición de centros de gravedad en figuras planas semejantes de Arquímedes; es de resaltar que para los triángulos el centro de gravedad se localiza mediante el punto de intersección entre sus medianas, mientras que para cuadriláteros, el centro de gravedad es localizado mediante el punto de intersección entre sus diagonales tal y como se puede observar en la Figura 20.

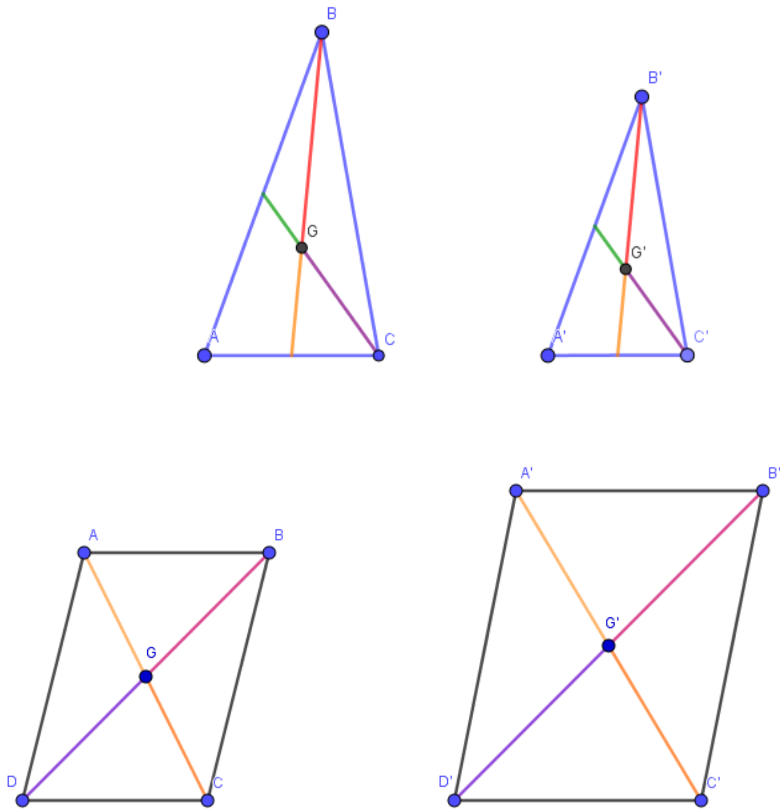



*Figura 20 Semejanza en la disposición de centros de gravedad en figuras planas semejantes propuesta por Arquímedes. arriba con triángulos. Abajo con paralelogramos.*

Como se puede observar en la Figura 20 los centros de gravedad representados, tanto para los triángulos semejantes, como para los cuadriláteros semejantes, deja apreciar, a partir de los colores, que para el caso de los cuadriláteros

$A$ es a $G$ como $A'$ es a $G'$,

$B$ es a $G$ como $B'$ es a $G'$,

$C$ es a $G$ como $C'$ es a $G'$ y

$D$ es a $G$ como $D'$ es a $G'$,

De manera análoga para los triángulos semejantes.

Una vez mostrada parte de la perspectiva euclidiana y arquimediana respecto a la semejanza de figuras planas, procedo a mencionar aspectos de estas que permitieron comprender la reversión y generalización hecha por Galileo para establecer semejanza con cantidades físicas a partir de sistemas de balanzas.

Para establecer la semejanza de los centros de gravedad en sistemas de balanzas semejantes con disposiciones semejantes de igual peso, Galileo primero procedió a construir sistemas que tuviesen los mismos pesos distribuidos de manera semejante en balanzas, de manera tal que los sistemas se mantienen en equilibrio (Ver Figura 21); Galileo, por consiguiente, concluye que los centros de gravedad están dispuestos de manera semejante y la longitud de los brazos de las balanzas respecto al centro de gravedad son proporcionales uno a uno de manera similar $A$ con $A'$ y $A''$; $B$ con $B'$ y $B''$. En este sentido es que Palmieri afirma que Galileo generaliza la noción de Arquímedes sobre centros de gravedad al extender propiedades dadas a objetos geométricos al mundo de las cantidades físicas; por otro lado, reconoce una reversión del método de Euclides, en el sentido que Galileo procede de la semejanza en su sistema y posteriormente concluye proporcionalidad, Galileo reconoce la semejanza en la distribución de pesos iguales en sistemas de balanzas semejantes, y a partir de esto, concluye proporcionalidad entre la longitud de los brazos de las balanzas respecto al centro de gravedad del sistema; a diferencia de Euclides, quien primero reconoce proporcionalidad y luego concluye semejanza, en ese sentido, Euclides reconoce dos figuras geométricas de la misma naturaleza, dos triángulos por ejemplo, después determina si sus ángulos son equiangulares[6], posteriormente precisa la correspondencia de los segmentos uno a uno y si resulta que son proporcionales, entonces Euclides concluye que los triángulos son semejantes, así mismo según Palmieri (2003) la noción de Euclides sobre semejanza en figuras planas está basada en la aplicación de proporcionalidad equimúltiple (para ver más sobre la proporcionalidad equimúltiple revisar 2.2.2.2); *"la proposición 4 del libro 6 de Elementos, depende de la primera proposición del Libro 6, en la que mediante la técnica de los equimúltiplos Euclides muestra que los triángulos (y paralelogramos) que tienen la misma altura son entre sí como sus bases"* (Palmieri, 2003, p. 242) (dicha proposición se ha mencionado en párrafos anteriores).

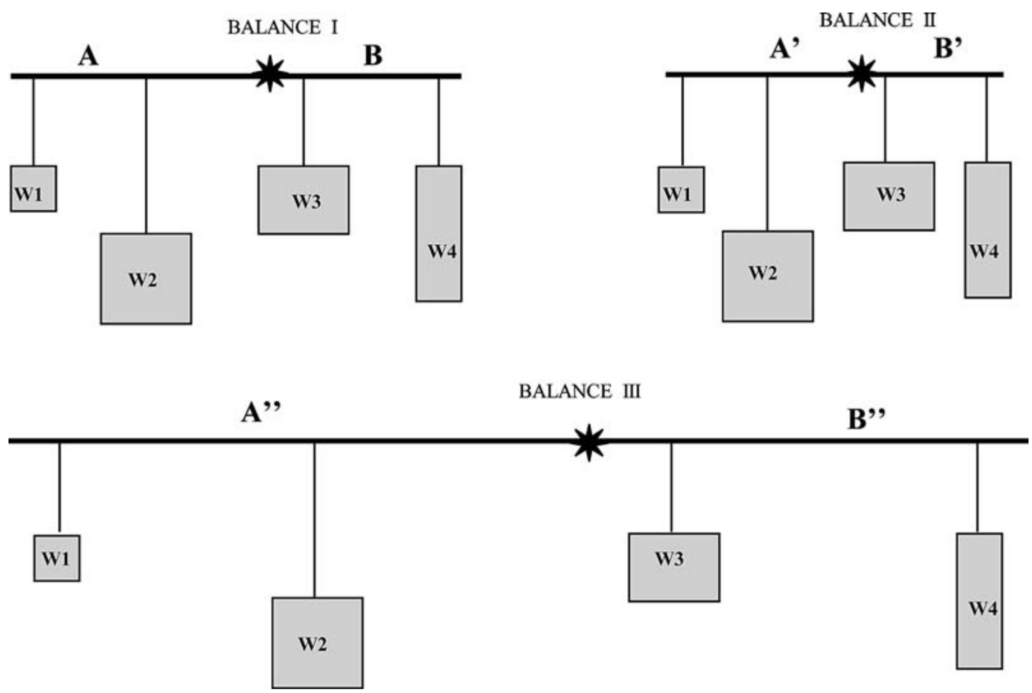



*Figura 21* Los modelos similares de balanzas. Disposiciones similares de igual peso W1, W2, W3, W4 en tres diferentes equilibrios I, II, II *(Palmieri, 2003, p. 243)*

[6] Palabra que utiliza Palmieri (2003) para referirse a congruencia entre ángulos

El estudio de la teoría inmersa en este subapartado sobre la teoría de semejanza en figuras planas, me posibilitó comprender los pasos propuestos por Galileo para llegar a la proporcionalidad en su sistema de balanzas los cuales he descrito anteriormente en presente documento, y entender en cierta medida, las teorías que fundamentan su aseveración, de manera tal, que se logré vislumbrar aspectos sumamente importantes que sustentan la postura de Palmieri (2003) sobre la generalización y reversión de la teoría sobre semejanzas que usó Galileo.

#### 2.2.2.2 Respecto a la oscuridad de la noción Euclidiana de equimúltiplo para Galileo

En el apartado "La dimensión visual del razonamiento proporcional de Galileo" del documento de Palmieri (2003) hablo sobre la forma como Galileo, conociendo las teorías de semejanza euclidianas y arquimedianas, hace una reversión de la primera y una generalización de la segunda, a fin de mostrar su proposición I sobre semejanza en sistemas de balanzas en equilibrio. En el artículo (Palmieri, 2003) se menciona que, para Galileo, era oscura la noción de proporcionalidad equimúltiple dada por Euclides ya que, esta noción no se puede aplicar eficazmente al mundo natural. Por esto, él (Galileo) propone a Torricelli reemplazar dicha noción oscura con otra noción de equimúltiplo más apropiada para el mundo de las cantidades físicas. En el presente apartado, muestro la definición de proporcionalidad equimúltiple dada por Euclides en el quinto libro de *Elementos* y posteriormente procedo a exponer algunos argumentos que Palmieri (2001) utiliza para explicar la oscuridad de dicha definición en Galileo.

Definición 5 libro V de *Elementos*

> Se dice, que cuatro cantidades están en la misma razón, esto es la primera a la segunda, y la tercera a la cuarta, cuando respectivamente comparados cualesquiera equimultíplices

(es decir cualquiera que sea el multiplicador) de la primera, y de la tercera con cualesquiera equimultíplices de la segunda, y de la cuarta, aquellos dos, ó exceden, ó están excedidos, ó son iguales respectivamente a estos dos (Commandino & Simson, 1855 p. 111).

Considerando la anterior definición, y en concordancia con Hernández (2017 p. 9), la definición dice que si se tienen cuatro magnitudes $a, b, c, d$. y dos multiplicadores cualesquiera $m$ y $n$ de manera tal que, si, $ma > mc \wedge mc > nd$, ó, $ma = mc \wedge mc = nd$ , ó, $ma < mc \wedge mc < nd$ , en otras palabras, si las cuatro cantidades están en la misma razón, se cumple que $a$ guarda con $b$ la misma relación que $c$ con $d$, es decir: $a$ es a $b$, así como $c$ es a $d$

Cabe resaltar que, tanto para Euclides como para Galileo, las razones solo se pueden dar entre cantidades homogéneas dos a dos. Esto es, para el caso de Euclides, $a$ y $b$ por ejemplo longitudes de segmentos, $c$ y $d$ superficies de figuras geométricas (triángulos, cuadriláteros, círculos, entre otros). El caso de Galileo es similar, pero aplicándolo a magnitudes físicas como por ejemplo $a$ y $b$ distancias, $c$ y $d$ pesos.

Una representación geométrica relacionada con la definición es la siguiente: Consideremos los segmentos $FG$, $HI$, $WX$, $YZ$ como las cantidades $a$, $b$, $c$, $d$ respectivamente como se observa en la Figura 22, $m = 3$ y $n = 2$ , podemos ver gráficamente que entre los posibles casos brindados en la definición se presenta el segundo posible ($ma = nb \wedge mc = nd$), luego podemos afirmar que $a$ guarda con $b$ la misma relación que $c$ con $d$. Cabe señalar que con valores diferentes para $m$ y $n$ se podría presentar los casos ($ma < nb \wedge mc < nd$) ó ($ma > nb \wedge mc > nd$)

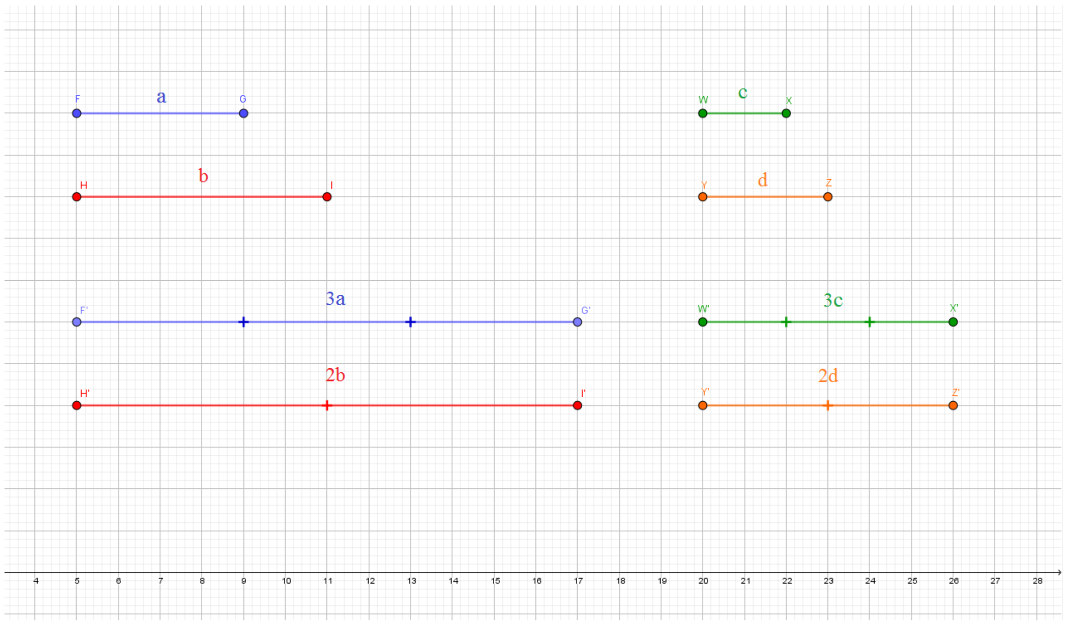



*Figura 22 Ejemplo de la definición 5 libro V de* Elementos.

Al tomar por ejemplo cuadrados cuyas bases tienen medida igual a las del ejemplo anterior una a una, así como los mismos valores para los multiplicadores $m$ y $n$ se obtiene una situación análoga a la anterior (situación representada en la Figura 23).

De la misma manera se puede tomar $a$ y $b$ como segmentos y $c$ y $d$ como cuadrados y se obtendrá como resultado que $a$ guarda con $b$ la misma relación que $c$ con $d$.

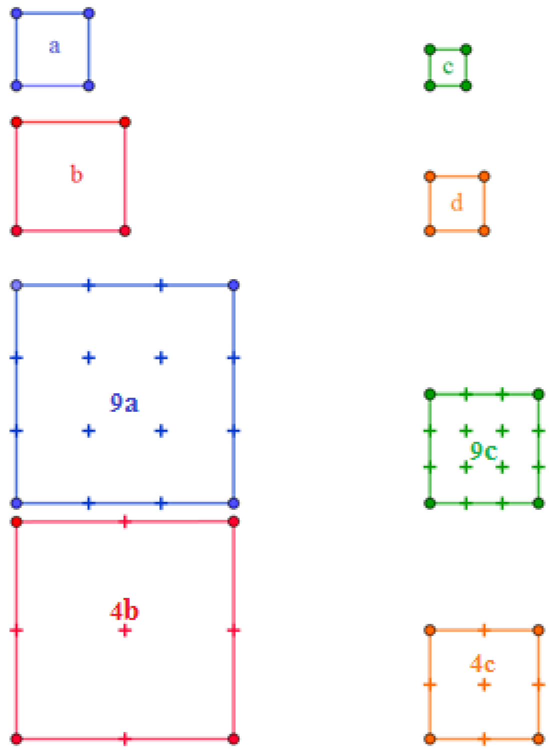



*Figura 23 Ejemplo de la definición 5 libro V de* Elementos *aplicada al área de cuadrados.*

Respecto a la definición 5 del libro V de *Elementos*, Fuentes & Sandoval (2017) mencionan que Guacaneme (2015) halló cuatro magnitudes homogéneas que no son proporcionales, a pesar de que para algunos múltiplos si se cumple; para los segmentos de mayor longitud utilizó $m = 2$ y para los de menor longitud $n = 4$. En la Figura 24 y en la Figura 25 se puede observar respectivamente los casos en donde se cumple la proporcionalidad equimúltiple para cuatro magnitudes homogéneas y en dónde no se cumple dicha proporcionalidad al usar multiplicadores $m$ y $n$ distintos para el segundo caso (Figura 25).

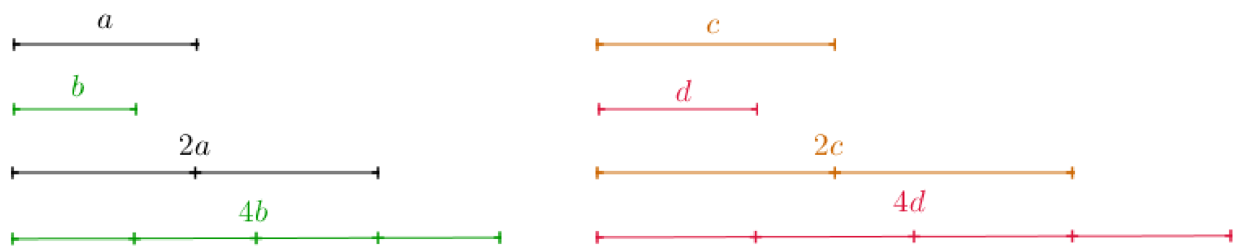



*Figura 24 Magnitudes homogéneas que son proporcionales* (Fuentes Caucalí, J. T., & Sandoval Mendoza, 2017, p. 32)

*Figura 25 Magnitudes que no son proporcionales halladas por Guacaneme (2015)* (Fuentes Caucalí, J. T., & Sandoval Mendoza, 2017, p. 33)

Antes de dar razón respecto a la oscuridad de la que habla Galileo, mencionaré brevemente las definiciones 6 y 8 del libro V de *Elementos* que respectivamente enuncian "llámense proporcionales las cantidades que tienen una misma razón" (*Elementos* de Euclides, edición Commandino & Simson, 1855 p. 111) y "proporción es semejanza de razones" (*Elementos* de Euclides, edición Commandino & Simson, 1855 p. 112).

Respecto a esta terminología utilizada por Euclides, Guacaneme (2012) señala que la proporcionalidad geométrica no se reduce a la semejanza, aunque guardan una relación. En el documento señala que la semejanza sugiere una relación entre figuras rectilíneas mientras que la proporcionalidad se refiere a las proporciones que se pueden establecer entre magnitudes de objetos geométricos. De lo anterior se deduce que cuando Euclides habla de proporcionalidad, está hablando de cantidades que guardan una misma razón y, de acuerdo con Guacaneme (2012), una razón en la terminología euclidiana es una relación entre propiedades de objetos geométricos, en la proposición 8 del libro VI Euclides vincula la proporción con la semejanza al determinar que triángulos equiangulares con lados proporcionales son semejantes.

Respecto a la noción de proporcionalidad equimúltiple de Euclides, Galileo la considera una noción completamente oscura. De acuerdo con Palmieri (2001), el fundamento de su incomodidad con la noción euclidiana de equimúltiplo, es que esta no se puede aplicar de manera simple y efectiva al mundo de las cantidades físicas, según Palmieri (2001) Galileo utilizó por primera vez la técnica de los equimúltiplos en su primer *De Motu* para probar que los pesos de diferentes volúmenes de cuerpos que tienen el mismo peso específico están en la misma proporción que sus volúmenes, en la Figura 26 se ilustra dos volúmenes $a$ y $b$ desiguales, $c$ y $d$ sus pesos, Galileo intenta probar que $c$ es a $d$ así como $a$ es a $b$ .

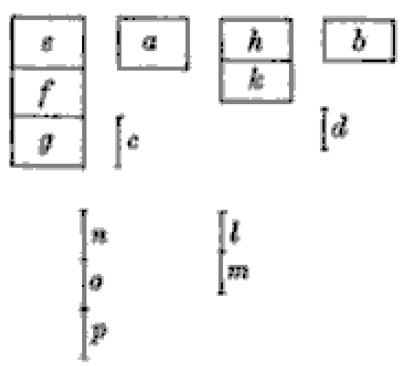



*Figura 26 matematización de pesos según la proporcionalidad equimúltiple, (Palmieri, 2001, p. 599 Fig 5)*

El problema que encontró Galileo al trasladar la proporcionalidad equimúltiple al mundo de cantidades físicas, la evidenció al momento de ensamblar el peso $nop$ (Figura 26) tres veces el peso $c$ y el peso $lm$ dos veces el peso $d$, ya que, mientras los volúmenes son cantidades geométricas, los pesos son cantidades físicas, "y no se puede suponer que las simples relaciones geométricas entre los segmentos elegidos por Galileo para *"geometrizar"* los pesos, representan isomórficamente las mismas relaciones físicas entre pesos" (Palmieri, 2001 p. 588)

La misma incomodidad respecto a los equimúltiplos que presentaba Galileo era compartida por Clavius, quién también la consideraba como una noción oscura; en distintas ocasiones aportó sugerencias y correcciones a Galileo para tratar de llegar a una definición más pura, que permitiese a la proporcionalidad equimúltiple aplicarse al mundo de las cantidades físicas de manera simple y eficaz; de hecho, Palmieri (2001) manifiesta que tanto Clavius como Galileo llegaron a proponer alternativas muy parecidas, seguramente por la cercanía entre ellos en su lucha por reemplazar esa oscura noción.

Durante el desarrollo de su idea, Galileo ofreció distintas propuestas en documentos como *De Motu* y *Dos nuevas ciencias*; sin embargo, dice Palmieri, dichas propuestas contaron con el problema de que Galileo llegó a transferir propiedades de los objetos geométricos a los objetos físicos, sin que esto fuese necesariamente verídico. A pesar de todo esto, en Palmieri (2003) se puede evidenciar que Galileo ofrece eliminar esa incómoda oscuridad, la cual es mencionada en la sección 3.1del presente documento, a partir de su proposición sobre sistemas de balanzas semejantes con disposiciones semejantes de pesos iguales en equilibrio, dejando de lado el uso de la proporcionalidad equimúltiple de Euclides en su construcción. Con lo anterior Palmieri (2003) afirma que Galileo "logra hacer homogéneo el mundo de la proporcionalidad euclidiana y el mundo de las cantidades físicas" (Palmieri, 2003 p. 242).

#### 2.2.2.3 *Respecto al equilibrio en los sistemas de balanzas*

Continuando con los elementos que me ayudaron a comprender el documento de Palmieri (2003), un aspecto importante aludido en el documento es el del equilibrio arquimediano en sistemas de balanzas, el cual fue usado por Galileo para su construcción de sistemas de balanzas semejantes en equilibrio. A continuación, presento una breve muestra de en qué consiste esta teoría arquimediana aplicada a las balanzas.

En el documento *Arquímedes y la palanca*, de Strathern (1999), se menciona el dominio de Arquímedes sobre el concepto de fulcro, con el que llegó a encontrar el centro de gravedad en sistemas de palancas. En esencia, Arquímedes establece que, para que un sistema de balanza se mantenga en equilibrio, la razón entre los pesos dispuestos en el sistema y su distancia al centro de gravedad del sistema debe ser inversamente proporcional. En la Figura 27 podemos observar que $A$ es a $B$ como $d$ lo es a 1, $\frac{A}{B} = \frac{d}{1}$.

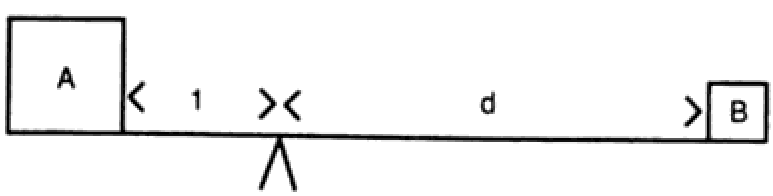



*Figura 27 Ley del equilibrio de Arquímedes. tomada Strathern (1999, Pág. 22).*

A continuación, un ejemplo ilustrado en la Figura 28 con la ayuda de software interactivo[7] en el que podemos apreciar un sistema de balanza con dos pesos diferentes, uno el doble del otro; el sistema se mantiene en equilibrio porque el peso que es la mitad del otro se encuentra al doble de la distancia al centro de gravedad del sistema que su contraparte.

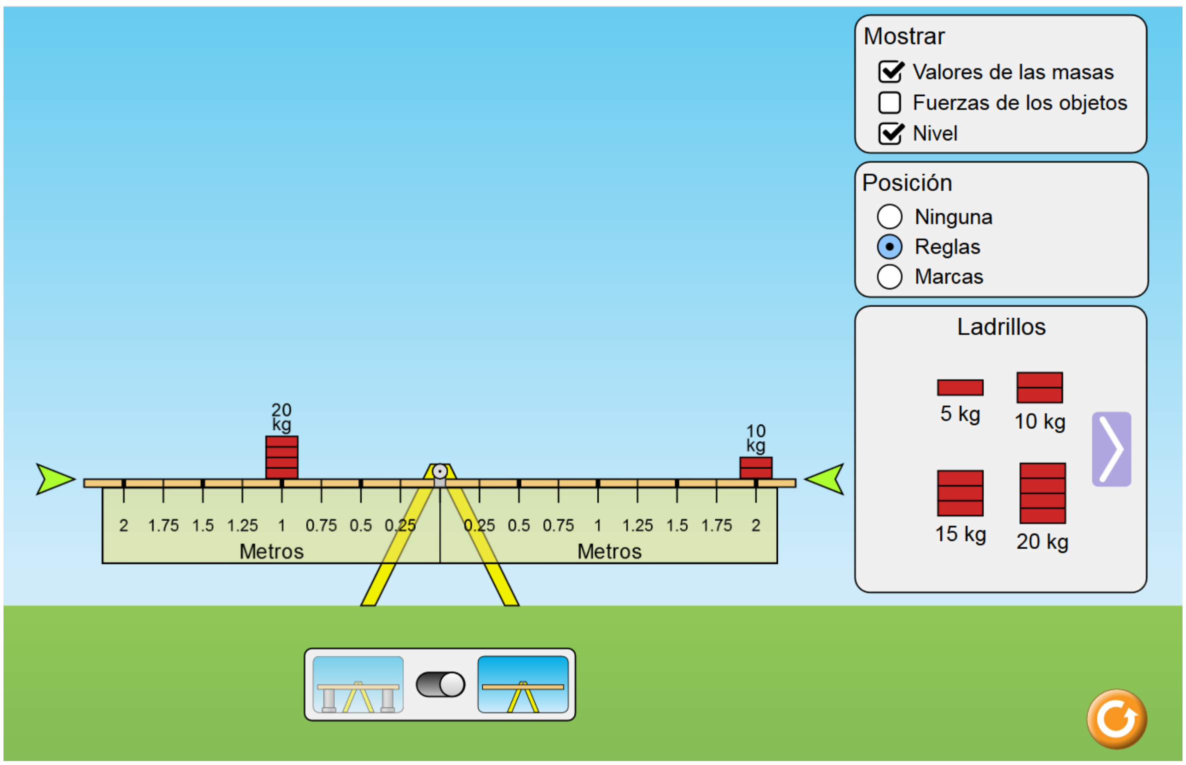



*Figura 28 Ejemplo de la ley del equilibrio de Arquímedes*

La comprensión de esta ley arquimediana me contribuyó no solo entender el modelo mental de Galileo para su proposición I sobre sistemas de balanzas semejantes con pesos iguales

[7] Simulador del sitio web https://phet.colorado.edu/sims/html/balancing-act/latest/balancing-act_es.html con el que se puede experimentar a fin de comprender la ley del equilibrio de Arquímedes.

dispuestos de manera semejante, sino también me permitió visualizar el problema del cilindro en equilibrio como un problema de equilibrio arquimediano, tal como presume Palmieri que lo vio Galileo.

#### *2.2.2.4 Respecto al problema del disco móvil*

Durante el transcurso del documento sobre modelos mentales de Palmieri (2003) se puede evidenciar cómo él establece los argumentos necesarios para defender su postura sobre lo que considera es la influencia científica que más se aproxima al tratamiento hecho por Galileo en su teoría sobre sistemas de balanzas en equilibrio; por ejemplo, respecto a la posición de De Groot, la cual afirma que para el problema del cilindro en equilibrio Galileo se basó en el problema del disco móvil tratado por Piccolomini y Tomeo, Palmieri (2003) reconoce que seguramente Galileo conocía dicho problema, pero nada en el tratamiento que Galileo hizo en el problema del cilindro en equilibrio está fundado en el problema del disco móvil, por lo que Palmieri ofrece como alternativa el problema del plano inclinado de Pappus el cuál se ajusta más con el proceder de Galileo.

El problema del disco móvil dice que si se tiene un disco rotando sobre su centro $C$, y dos puntos $D$ y $E$ posicionados sobre dicho disco a una distinta distancia del centro, el punto que se encuentre más alejado del centro recorre mayor distancia que el punto que se encuentra más cercano a $C$ en el mismo el tiempo $t$ Palmieri (2003 p. 251). (Ver Figura 29).

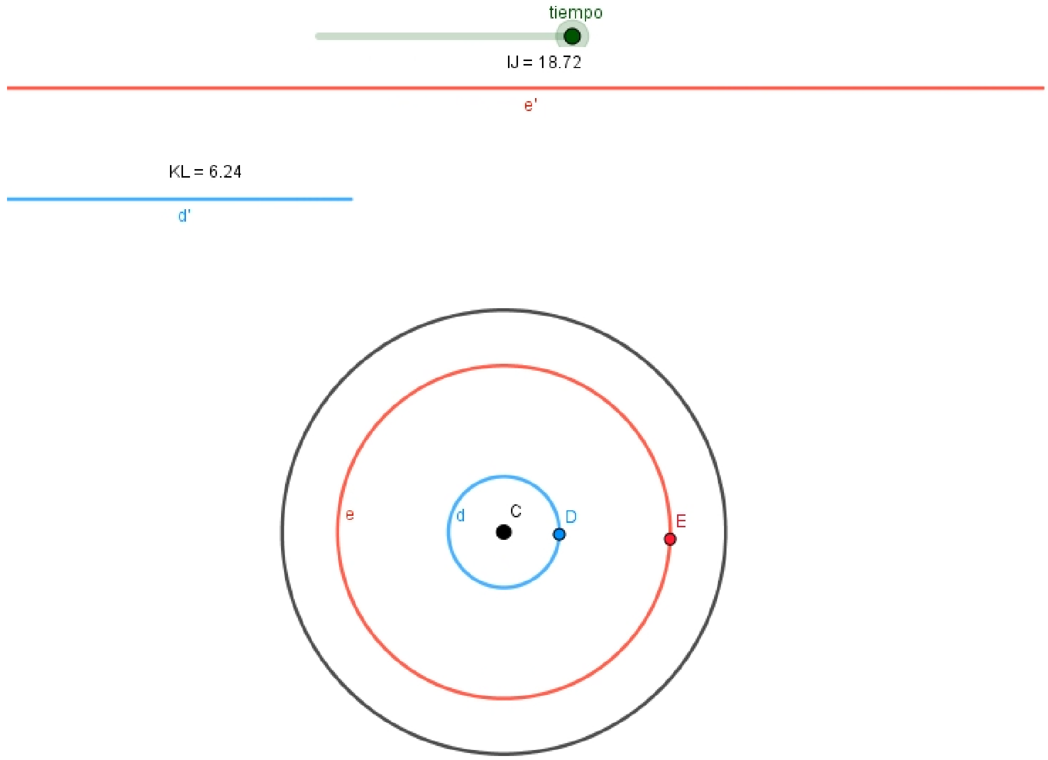



*Figura 29 Problema del disco móvil. El punto $E$ recorre mayor distancia que el punto $D$ en el mismo tiempo $t$.*

Algebraicamente se puede observar calculando la longitud de las circunferencias determinadas por el punto $C$ y los radios $CD$ y $CE$ respectivamente. La fórmula para hallar dichas magnitudes es $L_{\odot r} = 2\pi r$. La longitud $L$ de las circunferencias determinadas por las condiciones anteriores es $L_{\odot CD} = 2\pi CD$ y $L_{\odot CD} = 2\pi CE$ respectivamente, usando como base la Figura 29. Se observa que el radio[8] $CD$ es menor que el radio $CE$. Por consiguiente $L_{\odot CD}$ es menor que

[8] Se toma la definición de radio como distancia dejando de lado su definición como segmento sin desconocer su existencia.

$L_{\odot CE}$. Ya que la longitud de la circunferencia con centro $C$ y radio $CE$ es mayor que la longitud de circunferencia con centro $C$ y radio $CD$, de acuerdo con el problema del disco móvil representado en la Figura 29, podemos determinar que $E$ recorre mayor distancia que $D$ en el mismo tiempo, por consiguiente, podemos afirmar que $E$ se mueve a una mayor velocidad que $D$.

# 3 Relación entre la Historia de las Matemáticas y su utilidad para el profesor de matemáticas

En el desarrollo de este capítulo presento el resultado de haber estudiado un documento de Historia de las Matemáticas, a partir de la experiencia vivida durante el proceso de desarrollo del trabajo de grado, teniendo en cuenta que, aunque no se cuenta con alto nivel de sistematicidad en la recolección de información, dado que, como mencioné en la introducción del presente documento, hubo dos direcciones diferentes en el proceso, y no contamos con todos los registros que quisiéramos para hacer un análisis profundo, si contamos con una estrategia metodológica relacionada con la reflexión a posteriori,  recurriendo a una mirada retrospectiva de la labor desempeñada, a partir de los registros del diario de campo mencionado anteriormente y escritos reflexivos que se fueron elaborando durante el estudio del artículo de Palmieri.

Así mismo, el eje para el análisis que presento en el presente capítulo, son las categorías que hace Guacaneme (2016) respecto al para qué estudiar Historia de las Matemáticas (HM) en pro del conocimiento del profesor de Matemáticas (CPM) las cuales inicialmente sintetizo y, posteriormente, realizo un contraste entre estas categorías establecidas por Guacaneme y los elementos que aportó la experiencia de estudiar el documento de Palmieri (2003) a favor de mi formación profesional.

## 3.1 Categorías en relación con el para qué de la Historia de las Matemáticas en la formación de un profesor de Matemáticas

Antes de abordar las categorías en relación al para qué de la Historia de las Matemáticas en la formación de profesores de matemáticas, cabe aclarar que la discusión sobre la relación "Historia en las Matemáticas-Educación Matemática" ha estado marcada en cuatro ámbitos: la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas, la Historia de las Matemáticas en las investigaciones del campo de la Educación Matemática, la Historia de las Matemáticas en la educación del profesor de Matemáticas y la Historia de la enseñanza de las Matemáticas (Guacaneme, 2016, p. 115). Para el efecto de este trabajo, profundizo en la Historia de las Matemáticas en la educación del profesor de Matemáticas, pues este ayuda a entender el por qué se debe enseñar a los docentes en formación sobre Historia de las Matemáticas y para qué sirve apropiar este conocimiento por parte del profesor, no solo en su trabajo durante las clases sino en su vida como profesional y académico.

Vale aclarar que tomo los planteamientos de Guacaneme (2016), debido a que su tesis doctoral incluye un estado del arte en el que se recoge bastante de la información actual sobre la discusión en torno a la HM y su relación con la formación docente. En esa misma tesis se caracteriza la intención de incorporar la HM en la formación de los profesores de Matemáticas desde dos puntos de vista: el primero "Dotar al profesor de visiones" y el segundo "Dotar al profesor de artefactos". Estos aspectos son primordiales para generar en el profesor herramientas para enriquecer su labor docente.

La educación de los profesores de matemáticas tiene como propósito formar profesionales idóneos, que puedan reflexionar, aprender, enseñar y generar conocimiento desde las matemáticas. Esta visión de los profesores de matemáticas lleva consigo una perspectiva ampliada de lo que tiene que ser, o debe ser la formación de profesores en matemáticas, principalmente entendiendo esta desde una mirada didáctica que involucra a todos sus agentes, es decir, el profesor, el estudiante y el saber matemático (Guacaneme, 2016), con el fin de tener una construcción ampliada del campo del saber en el que nos ubicamos. Debido a esta intencionalidad, se crea el cuestionamiento sobre el papel de la HM en la formación de los profesores de matemáticas, entendiéndola (HM) desde distintas perspectivas y miradas que apoyan la inclusión en los currículos de esta disciplina, para fortalecer el conocimiento pedagógico y matemático de los profesores.

Asimismo, al hablar del profesor de Matemáticas debemos hablar de lo que se considera característico de un maestro integral en esta área, por lo que se precisa aclarar que un maestro debe tener en su actuar como profesional el componente de investigación, en su propia práctica, en los conocimientos que lo construyen como profesor y en las estrategias que utilizará para la educación en matemáticas, esto con el fin de crear un académico conocedor de su área y que genera conocimientos actualizados y reflexivos sobre las matemáticas (Guacaneme, 2016).

Por consiguiente, reconoce Guacaneme (2016) que la relación de la Historia de las Matemáticas en la "Educación del Profesor de Matemáticas", en primer lugar, puede ser vista como un artefacto y posterior herramienta del conocimiento profesional del maestro de matemáticas, en el cual se enriquece al maestro, ayuda en las concepciones que este tiene sobre los conocimientos en matemáticas, al igual que construye una manera de fundamentarlos y la reflexión que se da mediante la investigación de sus prácticas académicas. También, al hablar de la formación de los profesores de matemáticas se reconocen estrategias para la construcción de currículos, en el cual se apoye una visión sobre la importancia de adicionar la HM como recurso para los maestros (Guacaneme, 2016, p. 23). Esta aclaración de Guacaneme ayuda a entender por dónde va la discusión sobre la apropiación de la historia en los currículos que forman a los profesores de Matemáticas, y da un acercamiento al por qué apropiarse de este conocimiento como maestro en esta área.

Ahora, iniciaré explicando la categoría **"Dotar al profesor de visiones"**. En esta se muestra una perspectiva del profesor que ha optado por un enfoque en Historia de las Matemáticas; esta categoría cuenta con cuatro subcategorías importantes de la actividad matemática: visión de la actividad matemática, visión de las Matemáticas, visión del conocimiento matemático y visión de los objetos matemáticos.

Por consiguiente, se señala brevemente estas subcategorías las cuales ilustran cómo se dota al profesor de visiones.

- La visión de la actividad matemática. Esta subcategoría hace referencia al aprecio desarrollado por parte del profesor de matemáticas respecto a la producción del conocimiento matemático y las condiciones que dieron lugar a este, lo que favorece la comprensión de las temáticas de estudio, así mismo permite reconocer la actividad matemática como actividad humana y la relación que tiene el conocimiento matemático con la producción de conocimiento en otras áreas, humanizando de esta manera la producción del conocimiento.

- La visión de las Matemáticas. Establece que la visión de las matemáticas del profesor que opta por una perspectiva de la HM se redirige a valorar a las matemáticas como una ciencia vinculada a distintas áreas de conocimiento, dejando de lado la visión de que las matemáticas son una ciencia autónoma e independiente.
- La visión del conocimiento matemático: Esta hace referencia al valor epistemológico que tiene el estudio de la HM, reconociendo, los valores científicos que fundamentan a las matemáticas desde su propia historia, su desarrollo y evolución.
- La visión de los objetos de las matemáticas**.** Expone en su estado del arte Guacaneme (2016) que "permite reconocer preguntas, problemas, tratamientos, acepciones, representaciones, formas de pensamiento, etc. sobre objetos matemáticos específicos. Igualmente, se sostiene que la HM exhibe interrelaciones entre objetos matemáticos o con objetos de otras disciplinas y que revela la interdependencia de metaconceptos… con el carácter evolutivo de los conceptos, de las formas de representación y del lenguaje" (p. 221). Lo motiva a plantear la idea de que también ayuda a la comunidad científica a considerar la producción matemática como un objeto interdisciplinar de estudio o que por lo menos invita a los científicos a contemplar la idea de hacerlo.

Así, con estas categorías se puede dar respuesta a los porqués de la enseñanza, aprendizaje y apropiación de la HM por parte del profesor de matemáticas; esto tiene total relación a la segunda categoría nombrada anteriormente **“Dotar al profesor de artefactos”** que se describe claramente en la tesis (Guacaneme, 2016), dividida esta en tres subcategorías, a saber: Mirada epistemológica y del pensamiento matemático, Maneras de enseñar e insumos para el aula y el currículo y, Competencias personales y profesionales.

Cuando se habla de los artefactos que se generan a partir del conocimiento de HM para los profesores, se refiere a los elementos científicos que se apropian con este conocimiento y que el profesor podrá usar en su ejercicio profesional convirtiéndolos en herramientas.

La primera de ellas, la mirada epistemológica y del pensamiento matemático, alude a una metáfora utilizada en la Biología y adoptada por la epistemología y es la filogénesis/ontogénesis del conocimiento matemático; es decir, la historia de la evolución del conocimiento que se ve mediante el estudio de los orígenes de las matemáticas, por lo tanto el uso primordial del reconocimiento de la historia para la generación de sus objetos de estudio de una manera general, pero también la evolución del pensamiento de los individuos, es decir, cada uno de los científicos de las matemáticas (Guacaneme, 2016 p. 222).

Las maneras de enseñar e insumos para el aula y el currículo, indica que “se reconoce como conocimiento necesario (la Historia de las Matemáticas) y pertinente para el profesor de Matemáticas, en tanto que puede orientar sus acciones y decisiones didácticas y le ofrece un marco de referencia para interpretar dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas”

(Guacaneme, 2016, p. 222), dotándolo, al igual que con la anterior subcategoría, de herramientas necesarias para el desarrollo de su profesión.

Y, por último, las competencias personales y profesionales hacen referencia a las habilidades que adquiere el profesor de matemáticas al tener que estudiar otros aspectos de su disciplina, leyendo, escribiendo, escuchando sobre la HM mientras está pensando matemáticamente sobre todos estos temas; así el profesional que estudia historia crea nuevas maneras de entender y pensar sobre su disciplina.

Con esto se verían claramente las respuestas a la pregunta del para qué aprender HM en los procesos de formación de un profesor de matemáticas, entendiendo con ello que la labor de la formación debe ser desde las visiones variadas que se genera en la discusión académica y las habilidades científicas que crea en los profesores el conocimiento de la HM.

## 3.2 Aportes del estudio a mi formación profesional

Al hablar de por qué dar cursos de HM a los profesores que están durante su formación profesional el estado del arte elaborado por el profesor Guacaneme (2016) permite ver distintas posturas de diferentes autores, como es el caso de Fauvel & Van Maanen (1997), quienes exponen que esta promueve el entusiasmo por las matemáticas además de generar en los profesores habilidades de lectura de manera crítica y contextualizada, es decir una manera diferente de leer, con la cual los profesores son dotados de más herramientas para envolverse en la vida académica. Del mismo modo, Gulikers & Blom (2001) citados por Guacaneme (2016), exponen que esta genera una interrelación disciplinar que ayuda a dinamizar las matemáticas, por lo que complementa el conocimiento de los profesores a la hora de construir sus clases y sus currículos.

Por otra parte, Arcavi & Isoda (2007) citados también por Guacaneme (2016) revelan que el conocimiento en HM, lleva a la "descentración", término que utilizan para especificar la capacidad de los profesores de adoptar la perspectiva del otro para desde allí entender lo que él piensa o hace. Por lo tanto, al tener en cuenta el texto de Palmieri (2003), pude experimentar cómo se genera la capacidad de utilizar los procesos mentales usados por Galileo para entender la teoría euclidiana sobre semejanza de figuras planas y la generalización de la teoría arquimediana sobre semejanza en la disposición de centros de gravedad en figuras planas semejantes, con lo que Galileo procuró demostrar su proposición sobre centros de gravedad, así que, me es pertinente como lector, ponerme en el papel del autor para entender los razonamientos científicos que lo llevaron a demostrar sus teorías.

Teniendo en cuenta las intenciones formativas de la HM reseñadas anteriormente, considero primordial contar la relación con el texto de Palmieri (2003), en cuanto a cómo su estudio me dotó de visiones y artefactos.

En una primera instancia del estudio, me fue necesario realizar una investigación del contexto histórico en el que vivió Galileo para así entender aspectos socioculturales que influyeron notoriamente en el proceder de este personaje tan influyente en la historia de las Ciencias. Estos aspectos tienen que ver con las características del Renacimiento de los *siglos XVI* y *XVII* que refieren al tránsito de creencias religiosas e intereses particulares de algunos sectores de la Iglesia, pues durante esta época generó en el mundo un cambio de pensamiento entre la teoría teocéntrica, es decir, la creencia de que Dios es el centro de todo, y la antropocéntrica, la creencia de que el ser humano debe ser el centro de todo; por ello, se muestra la fuerte oposición hacia las teorías de Galileo que contradicen al aristotelismo (escuela afín con el pensamiento de Aristóteles, autor filosófico dominante en el pensamiento eclesiástico), respecto a verdades que se consideraban absolutas, que se sustentaban con *La Biblia* y la Iglesia católica; como por ejemplo, la teoría de la Tierra plana, la cual fue cuestionada por Nicolás Copérnico en su teoría heliocéntrica (aunque ya tiempo atrás filósofos griegos habían demostrado mediante experimentación empírica que la tierra es esférica) y que fue adoptada por Galileo, lo que lo llevó a ser juzgado por la Santa Inquisición, pues en esta época se consideraba un delito contradecir las posturas de la Iglesia, debido a que esto era contradecir a Dios, también entendiendo que Galileo usó sus conocimientos en heliocentrismo y astronomía, entre otras cosas, para mofarse de la postura de personalidades como el Papa Urbano VIII.

Por lo tanto, el conocimiento adquirido al investigar la historia de Galileo da una visión más amplia de los problemas con los que los científicos debían enfrentarse en su época, además de entender el coraje de Galileo al desafiar, aunque posteriormente se retractara, a la Iglesia católica. Asimismo, las relaciones académicas que tuvo Galileo con académicos como Clavius, Mazzoni o Torricelli, que compartían su interés por la ciencia, le ayudaron a enriquecer su discurso para la matematización del mundo físico; esto me permite reconocer la importancia de la interacción humana en la comunidad científica para la construcción de nuevo conocimiento y enriquecer el discurso científico, así como validar o debatir posturas académicas. Todo este proceso no solo me permitió valorar los aportes de Galileo sino también reconocer su papel como artífice en la revolución y evolución del pensamiento científico.

Por otra parte, teniendo en cuenta la visión de las Matemáticas, evidencio concretamente la estrecha relación entre las Matemáticas y la Física, y la manera como ambas ciencias se interrelacionan para el desarrollo científico ya que, Galileo hace uso de conceptos matemáticos para dar explicación a los fenómenos físicos referentes al movimiento y equilibrio de cuerpos matematizándolos, para esto, él hace uso de objetos geométricos a los que les atribuye propiedades físicas y con los que busca dar explicación a fenómenos naturales mediante representaciones gráficas de estructuras geométricas, dichas representaciones geométricas le permiten construir teoría matemática nueva, como en el caso de disposiciones semejantes de pesos iguales en balanzas semejantes, los cuales implican centros de gravedad dispuestos de manera semejante, y con esto concluye proporcionalidad entre longitud de los brazos de las balanzas respecto a la disposición de pesos por lo que el sistema se mantiene en equilibrio. Lo anterior, me ayuda a ampliar la visión de las Matemáticas y su uso específico, además de generar en mí, un discurso, conocimiento, apropiación y aprendizaje interdisciplinar de estas, debido a su uso complejo en sistemas físicos que hacen una relación entre los fenómenos y las Matemáticas.

En concordancia con lo mencionado por Guacaneme (2016) en tanto al conocimiento en HM adquirido con la lectura del documento de Palmieri, Ahora estoy en la capacidad de hablar con propiedad respecto a la vida y parte de la obra de Galileo, y de aspectos de suma importancia en su matematización física temprana, así como soy consciente de la evolución del pensamiento de Galileo dada su necesidad de utilizar teoría matemática y transformarla de acuerdo con sus necesidades científicas para la creación de teoría que describiese algunos fenómenos físicos.

Del mismo modo, el estudio del documento me permitió ampliar sustancialmente la visión de los objetos matemáticos tratados en el artículo, tales como, la noción de proporcionalidad, equilibrio arquimediano, centro de gravedad, semejanza o equimúltiplo. En efecto, tuve la oportunidad de estudiar y visualizar el equilibrio arquimediano de tal forma que, ahora, me permiten observar estos problemas sin que estén expresos mediante sistemas de balanzas explícitas como los casos del plano en equilibrio y el cilindro en equilibrio ilustrados en el documento de Palmieri. También luego de la lectura, considero posible y coherente representar algunas magnitudes físicas mediante objetos geométricos y establecer relaciones entre ellos como por ejemplo la representación de magnitudes físicas homogéneas mediante segmentos, o visualizar problemas de proporcionalidad equimúltiple en algunos casos de la vida cotidiana. Por lo tanto, respecto a los objetos tratados en el documento, ahora mi visión no se limita a verlos como únicamente objetos matemáticos para cálculos, sino también reconozco su estado evolutivo para poder construir un nuevo conocimiento, por ejemplo, soy consciente que al ampliarse y popularizarse el estudio de los fenómenos naturales, la humanidad desarrolló un lenguaje verbal y simbólico para hacer referencia a fenómenos concretos, como en el caso de las magnitudes físicas (longitud, tiempo, etc.) y las relaciones entre estas (velocidad, aceleración, etc.)

Igualmente esta experiencia logra “dotarme de artefactos” puesto que después de la lectura del texto de Palmieri, el documento de estudio me aportó una visión evolutiva del conocimiento matemático inmerso en él, ya que me fue necesario ampliar conocimientos previos sobre la vida y obra de Galileo Galilei así como del conocimiento matemático utilizado por este, pero no solo el pensamiento de Galileo sino también lo que ocurría socialmente en el Renacimiento con las ciencias y el poder de la Iglesia en las creencias científicas, con lo que develé aspectos fundamentales en su razonamiento personal para comprender el proceso cognitivo mediante el cual Galileo pudo, en palabras de Palmieri (2003) “gobernar el equilibrio arquimediano” .

En cuanto a las competencias personales y profesionales, en coincidencia con lo que menciona Guacaneme (2016), adicional a las habilidades de lectura, escritura, escucha y habla que ayuda a desarrollar el estudio de un documento histórico, el haber estudiado puntualmente el documento de Palmieri ha ampliado mi repertorio de conocimientos utilizado, no solo respecto al estudio que hizo Galileo para la temprana matematización del mundo natural (el cual suele obviarse o ignorarse por ejemplo en documentales audio-visuales, ya que estos mayormente se centran en la vida y obra de Galileo más no en el análisis cognitivo de su proceder científico), sino que también logró enriquecer conocimientos respecto a las competencias matemáticas involucradas en la teoría inmersa en el documento, y que a partir de una perspectiva de historia cognitiva salen a la luz, conocimientos tales como: la proporcionalidad equimúltiple, la semejanza en la disposición de centros de gravedad en figuras planas semejantes o el equilibrio arquimediano; artefactos que inevitablemente se convertirán en herramientas (Guacaneme, 2016, pág. 222) en el momento de poder aplicar estos conocimientos en el aula de clases, pues me dotan como profesor de insumos para el aula, ya sea para contextualizar a los estudiantes al ilustrarles la vida y obra de Galileo desde una perspectiva humana la cual los motive a trabajar en la adquisición de un conocimiento relacionado a él, o para considerar la propuesta de Galileo respecto a sistemas de balanzas con pesos semejantes en equilibrio como ejemplos durante una situación en clase sobre equilibrio arquimediano.

Así mismo, el estudio del documento amplió mi visión sobre los objetos matemáticos y la colaboración interdisciplinar entre las matemáticas con otras áreas del conocimiento, ya que ahora he adquirido conciencia respecto a que no siempre se aplica directamente la teoría matemática en la resolución de un problema en otra disciplina, sino que también de manera conjunta se puede llegar a transformar la teoría matemática o crear una nueva teoría para la resolución de dicho problema, tal como la reversión que hizo Galileo de la teoría euclidiana sobre semejanza de figuras planas y la generalización de la teoría arquimediana sobre semejanza en la disposición de centros de gravedad en figuras planas semejantes, para demostrar su proposición 1 sobre centros de gravedad; herramientas que permitirán acercar la visión que tienen los estudiantes de las matemáticas a un factor mucho más humano.

Como he mencionado en los párrafos anteriores, es importante que los profesores de matemáticas se apropien del conocimiento histórico porque ayuda a construir un profesional más capacitado y con un mayor conocimiento de su área de especialidad. recalco que desde la postura que manejo en este trabajo, “la educación histórica para los profesores de matemáticas debe ser esencial y un requerimiento primordial en los currículos de las licenciaturas, puesto que ayuda a la formación docente en cuatro ámbitos: interés en la materia, generar un valor social del profesor de matemáticas, cornucopia de visiones y herramienta docente que impulse una didáctica para las matemáticas” (Guacaneme, 2016).

Parte de los objetivos que tiene la profundización en la Historia por parte del profesor de matemáticas son las herramientas y recursos que obtendrán los docentes en formación al conocer de este campo específico, esto con el fin de generar un mejor desempeño en las clases y en la academia, por lo que pude observar durante clases de matemáticas en mis prácticas profesionales, la historia ayudó a la construcción de mi didáctica docente, ya que noté que los estudiantes son curiosos de las particularidades que rodearon a los personajes históricos matemáticos, dicho proceder, el de narrar la historias de los personalidades matemáticas genera en el alumno un acercamiento a la humanidad de las matemáticas como un campo de potenciación de la sociedad occidental, también contribuye en la desmitificación de la creencia en la cual, los matemáticos son genios dotados especialmente para esta área perdiendo con ello el carácter humano que los rodeaba, por lo tanto al hablarle a los estudiantes no solo sobre la obra de los personajes históricos, sino también de su vida, los problemas cotidianos en los que se veían envueltos, y la forma como ellos se desenvolvían socialmente, se genera en los estudiantes una nueva visión de las personas que al final son quienes desarrollaron las teorías matemáticas, impulsándolos y motivándolos a estudiarlas más exhaustivamente.

De acuerdo con lo anterior, el estudio minucioso del artículo de Palmieri me llena de artefactos, que para el caso particular de Galileo, me permitirán hacer uso de los conocimientos adquiridos en el aula de clases, ya sea como factor humanizador o motivador en los estudiantes, entendiendo que Galileo como cualquier otro ser humano, tuvo inconvenientes con la ley establecida, que se atrevió a defender sus ideas, a trabajar por ellas y tuvo éxitos y fracasos; así mismo dicho texto dota de una perspectiva en donde se debe ver más allá de una producción científica y motiva a investigar posibles factores inmersos en el desarrollo de dicha producción, e incluso, dota de experiencia para analizar el proceder cognitivo de los estudiantes.

Al hablar de la inclusión de la HM como herramienta para ser utilizada en la Didáctica de las matemáticas, no solo como una forma de llamar la atención de los estudiantes, o de generar curiosidad, sino de construcción de conocimientos interdisciplinares apoyados, (invitación que hace Guacaneme) en profesionales de historia (2016 p. 117). Esta Didáctica generaría en los profesores una forma de investigación de su práctica, en temas de profundización histórica para la generación de nuevos conocimientos que puedan aportar a la pedagogía de esta ciencia, por lo tanto, es necesario ver las implicaciones que tiene la investigación en el campo histórico de las matemáticas, por ejemplo, en el campo de la visión histórica del currículo de matemáticas, para mirar sus cambios y permanencias, y así potenciar la actualización de los procesos educativos de los estudiantes (Guacaneme, 2016 p. 119), un tema puede ser considerado vital para la actualización de las políticas, actividades y experiencias que se llevan a cabo en el aula de clases actualmente.

Pero no solo se podría ayudar en el ámbito didáctico con el estudio de HM, sino que también esta historia ayudaría a la promulgación de una Filosofía de las Matemáticas, es decir, a darle un peso epistemológico que permita entender el desarrollo humano y social de las matemáticas, sobre todo de la formación de los profesores de matemáticas.

Con lo anterior, al otorgarle a la HM una mayor importancia en los currículos de los profesores de matemáticas, y con esto, ofrecerle gran variedad de artefactos al maestro, no solo se conseguirá un profesor enriquecido en conocimientos histórico-matemáticos, sino que también, se le ofrecerá, la posibilidad de contar con un marco fenomenológico amplio, desde el cual podrá abordar distintas temáticas de clase, a partir de contextualizaciones apropiadas de distintos temas abordados en clase, y ejemplos de aplicaciones de dichas temáticas en la vida cotidiana, teniendo en cuenta que, las matemáticas a través de la historia han ido evolucionando a en parte, para satisfacer necesidades de la humanidad.

A propósito de lo anterior, contar con un marco de referencia histórico, también le permitirá al profesor utilizar sus conocimientos matemáticos e históricos sobre el tema a impartir, de manera tal que, le posibilitará reorientar su discurso de acuerdo con las necesidades de la población estudiantil con la que esté trabajando, enriqueciendo de esta manera, la capacidad adaptativa del profesor, para abordar de distintas maneras, problemáticas presentadas en el aula en torno al aprendizaje de un concepto matemático.

Así mismo, se le otorgará al profesor de matemáticas herramientas que le permitan "descentrar" su pensamiento, como aseveran Arcavi & Isoda (2007) citados por Guacaneme (2016), de manera tal que, él (el profesor) podrá adoptar la perspectiva del estudiante, con esto, entender lo que él piensa o hace, y así, lograr comprender el razonamiento de este, de manera tal que se le posibilite al maestro reorientar los procesos cognitivos vinculados al aprendizaje del estudiante para conducirlo a un aprendizaje esperado.

Para el caso particular del artículo de Palmieri, además de aportarle al profesor de matemáticas los artefactos anteriormente mencionados, evidencia un vínculo entre las matemáticas y las ciencias; reconozco que, aunque para algunas personas el artículo puede no ser considerado como un discurso puramente matemático a la luz de la modernidad, nosotros lo consideramos como un documento histórico científico-matemático, ya que, el proceso de matematización es netamente matemático, y fue desarrollado en una época en donde las matemáticas eran usadas como herramienta para intentar explicar fenómenos naturales, además, la matematización del ambiente físico reconoce una actividad legítimamente matemática, en el cual se hace uso de elementos matemáticos como la ley de las palancas en donde se cuelgan objetos y el peso no está dado por el peso físico del objeto sino por el tamaño de la magnitud volumen del objeto, en donde se reconocen magnitudes aparentemente físicas pero que realmente son geométricas. Así mismo, he de resaltar que la actividad empleada por Galileo es una actividad legítimamente matemática que podría llegar a ser empleada en la escuela, motivando a los estudiantes para que matematicen fenómenos de la naturaleza, puesto que, las matemáticas muestran un poder que no tienen otras ciencias, pues se convierten en una herramienta y lenguaje para comprender la naturaleza, asunto totalmente deseable en la escuela, las matemáticas en conexión con las ciencias.

En conclusión, este trabajo, que se basa en el análisis documental del artículo de Palmieri sobre los modelos mentales de Galileo Galilei, tiene el valor académico y epistemológico de construir en el profesor de matemáticas y en la comunidad científica, herramientas que promulgaran un mejor entendimiento en razonamientos interdisciplinares de autores históricos que veían el conocimiento desde la complejidad, es decir, que entendían los fenómenos que estudiaban mediante matematización y entendían que las realidades al ser complejas necesitaban del uso y el entendimiento de varias disciplinas para su resolución y entendimiento.

Cabe resaltar que el estudio del documento me genera particular interés por estudiar otros personajes histórico-matemáticos desde una perspectiva cognitiva, lo cual muy seguramente podré aplicar en el aula de clases, no solo para hacer caer en la cuenta a los estudiantes de la importancia de pensar interdisciplinariamente, sino que también me permitirá intentar develar aspectos cognitivos referentes al proceder de los estudiantes, ¿y es que no es acaso eso parte de la labor docente?, ¿tratar de interpretar los escritos, procedimientos algorítmicos y representaciones mentales de los estudiantes?, es de considerar que profesores de matemáticas deban ir más allá de la espera de un resultado acertado y analizar el ingenio de los estudiantes, ya que, incluso podríamos (los profesores) terminar siendo los mentores de la próxima gran mente científica. He de reconocer, que aunque aún queda mucho terreno por recorrer en el estudio de la ciencia cognitiva e historia de la ciencia, estas permitirán no solo realizar un análisis cognitivo de otros personajes histórico-matemáticos a profundidad, sino que también permitirán analizar el proceder cognitivo de los estudiantes de manera análoga a la usada por Palmieri con Galileo, así mismo permitirá identificar el proceso histórico del conocimiento por el cual están atravesando los estudiantes durante su aprendizaje para que el maestro pueda guiarlos a un conocimiento deseado y dotará al profesor de las visiones sobre las Matemáticas enriqueciendo sus competencias.

# 4 Conclusiones

En el presente apartado se procederá a mencionar conclusiones obtenidas del desarrollo del presente Trabajo de grado; para esto, se tendrá en cuenta los objetivos planteados para el desarrollo del documento, así como reflexiones personales a partir de la experiencia que deja la realización de este documento.

Respecto al objetivo de identificar los elementos conceptuales y procedimentales necesarios que exige la lectura comprensiva del artículo guía, así como develar la manera en que estos se emplean, se logró en primera instancia identificar elementos que fue necesario estudiar, tales como: a) la noción de proporcionalidad equimúltiple empleada por Euclides, la cuál, este la empleaba en magnitudes homogéneas (de la misma naturaleza); b) la necesidad de Galileo reemplazar lo que consideraba oscuridad en la noción euclidiana de proporcionalidad equimúltiple por no poder aplicarla eficazmente al mundo de las magnitudes físicas, por lo que se vio motivado a desarrollar una noción de proporcionalidad aplicable al mundo de las cantidades físicas, centrándose en su postulado sobre sistemas de balanzas semejantes con disposiciones semejantes de pesos iguales en equilibrio; c) las definiciones y algunos postulados de los libros 5 y 6 de *Elementos* para dar cuenta de la visión euclidiana respecto a semejanza de figuras planas; d) Parte de la teoría Arquimediana sobre semejanza en la distribución centros de gravedad en figuras planas y en sistemas de balanzas. Estas teorías junto con otras como las del problema del disco móvil, o el problema del plano inclinado de Pappus, permitieron en segunda instancia enlazar las nociones expuestas en el estudio, con la propuesta de Galileo de proporcionalidad en el mundo de las cantidades físicas. De manera análoga ocurrió con la teoría cognitiva abordada como la de la modularidad de la mente de Jerry Fodor, que contribuyó en el entendimiento del proceder cognitivo de Galileo y el uso de modelos mentales para presentar situaciones de modelación matemática que para él (Galileo) eran evidentes e irrefutables, lo que por otro lado lleva a considerar, que los sistemas subyacentes a la fijación de creencias, pueden jugar un papel importante en el desarrollo de teorías científicas, en algunos casos nublando la perspectiva del científico y en otros, impulsándolo a defender su postura a partir de argumentos que pueden o no ser válidos. Con esto, puedo afirmar que se logró eficazmente identificar los elementos de estudio pertinentes para comprender el texto de Palmieri.

En cuanto al objetivo referente a establecer en qué medida el estudio de un documento de Historia de las Matemáticas enriquece, más allá de la erudición, al futuro docente de Matemáticas, en el capítulo 3 del presente trabajo, queda evidenciado que conocer Historia de las Matemáticas me aportó artefactos que potencialmente se podrán convertir en herramientas en el momento de aplicarlos a situaciones de enseñanza, por ejemplo al dotar de un contexto a los estudiantes, exponiendo parte de la vida y obra de distintos personajes históricos que han aportado e influenciado en el desarrollo y evolución de la humanidad y su pensamiento, y también, aportando un factor humanizante a las matemáticas y motivando a los estudiantes a trabajar en sus propias ideas. Por otro lado, he adquirido artefactos relacionados con la ciencia cognitiva que me posibilitarán reorientar situaciones de clase al permitirme “descentrar” mi pensamiento para intentar ponerme en la situación del estudiante y, tratar de comprender su razonamiento, de manera tal que podré no solo guiarlo a un conocimiento deseado, sino también, darle un impulso para que desarrolle sus propias ideas, estimulando la producción propia de su conocimiento.

Por otro lado, esta actividad amplió mi visión sobre las matemáticas, por lo que ahora las valoro como una ciencia vinculada a otras ciencias y otras áreas del conocimiento, situación que puntualmente observo en el caso de Galileo y su matematización física temprana, en donde a partir del uso de objetos geométricos, y atribuyéndole propiedades de esos objetos a magnitudes de carácter natural, intentó explicar fenómenos relacionados con el centro de gravedad de cuerpos y el movimiento de estos; en cuanto a visión de la actividad matemática, ahora valoro de manera más profunda las condiciones y entornos que han propiciado la producción de conocimiento matemático, vinculados a necesidades del ser humano, ya sean de carácter puramente intelectual (como el deseo de Galileo de encontrar explicación a fenómenos físicos vinculados al movimiento de cuerpos), o como factor resolutivo a problemas (como el caso de Arquímedes y la ley del empuje o principio de Arquímedes); así mismo, en cuanto a la visión del conocimiento matemático, reconozco y el valor epistemológico que tiene el estudio de la Historia de las Matemáticas, ya que, por ejemplo para el caso de Galileo y su matematización física temprana, soy consciente de la complejidad y valor de la teoría matemática usada por Galileo para efecto de demostrar sus proposiciones, y la evolución de su proceder y pensar científico a partir del intercambio de ideas con sus colegas, lo que le permitió obtener resultados favorables para su producción académica; además, la visión sobre los objetos matemáticos, me conciencia respecto a la interdisciplinariedad de las matemáticas con otras ciencias y el vínculo entre estas, como en el caso de la relación entre los objetos geométricos con magnitudes físicas, y me incentiva a tratar de identificar situaciones análogas para conceptos de otras ciencias; por otro lado, la actividad me dotó de insumos para el aula, de los cuales he mencionado algunos en el párrafo anterior y, amplió mis competencias personales de lectura, escritura, escucha y habla.

Por otro lado, en lo referente objetivo sobre comprender el texto de Palmieri a partir del análisis profundo de los conceptos y consideraciones planteadas por el autor, es de considerar que, aunque no se abordó en su totalidad el estudio minucioso de la teoría matemática y cognitiva mencionada en el documento, ya que esta es demasiado extensa (hay autores que dedican su vida entera a estudiar el libro *Elementos*), si se abordó la teoría necesaria para comprender el artículo de manera tal que se logró producir un escrito explicativo de autoría propia. De acuerdo con el primer párrafo del presente apartado, se identificó teoría necesaria para comprender la idea que Palmieri expresa en su artículo, sin embargo, fue menester escoger cuidadosamente la teoría puntual a estudiar, dado que, de estudiar a profundidad toda la teoría inmersa en el documento de Palmieri, como ya se ha mencionado, podría tomar toda una vida; luego de aclarar esto, debo decir que, logré elaborar un texto explicativo propio que contiene la esencia de la postura de Palmieri, en donde a grandes rasgos describo los apartados del artículo guía manteniendo la esencia de la idea de Palmieri para cada uno, de manera tal que el lector puede seguir la construcción de los argumentos del autor, desde la teoría de los modelos mentales e historia cognitiva, pasando por el análisis cognitivo del razonamiento de Galileo, y las consideraciones finales de Palmieri en donde concluye que los sistemas no simbólicos de razonamiento vinculados a procesos de visualización, parecen funcionar cognitivamente más profundo que los sistemas proposicionales, e invita a trabajar interdisciplinarmente a académicos en historia y filosofía de la ciencia, así como a científicos y filósofos de las ciencias cognitivas.

En sí, esta actividad fue enriquecedora, no solo desde la perspectiva intelectual histórica, sino que también enriqueció el vocabulario tanto técnico-científico-matemático como literario, por otro lado, me ha dotado de artefactos y potenciales herramientas para mi labor docente futura y potenciaron la mi formación docente en el sentido explicado y desarrollado en el capítulo 3, así como en párrafos anteriores del presente apartado de conclusiones. En general, considero que se logró analizar apropiadamente la utilidad y pertinencia de realizar la lectura comprensiva de un documento histórico-matemático a partir del contraste con las categorías propuestas por Guacaneme (2016) a favor del saber, el hacer y el ser de un futuro profesor de matemáticas.

Luego de culminada la labor realizada con el presente trabajo, me satisface las distintas situaciones de esfuerzo que obligó el desarrollo del mismo: las noches en vela, el trabajar con una lesión que dificultaba el movimiento en uno de mis brazos durante varios meses, la frustración al no dominar el inglés para una óptima traducción inicial del documento, lo que me motivó a dar lo mejor de mí mismo para obtener una traducción técnica, elegante y fluida al español, o al no entender algún aspecto de la teoría a estudiar por lo que debía realizar incontables relecturas de apartados del documento y teorías vinculadas al artículo guía, con lo que propusimos realizar un resumen que inicialmente fue casi una transcripción literal a puño y letra de la versión digital de la traducción, pero en la medida que fui adquiriendo comprensión y dominio de los temas tratados en el artículo de Palmieri, adquirida a partir del estudio de la teoría matemática, cognitiva y filosófica inmersa en el documento, y luego de varias versiones de resumen, logré dar forma a un texto explicativo propio, el cual refleja mi comprensión y dominio del artículo guía.

Por otro lado, las horas dedicadas a comprender los aspectos matemáticos, filosóficos y cognitivos inmersos de manera explícita e implícita en el documento y que en varias ocasiones me conllevaron a aislarme de las personas que amo, ahora todas esas horas invertidas y esfuerzo dado parecen triviales y lejanos en comparación con la satisfacción que siento por el trabajo y producto obtenido del proyecto realizado.

Dejo como sugerencia al Departamento de Matemáticas, destinar mayor atención y recursos a potenciar los elementos referentes al estudio de Historia de las Matemáticas en el plan de estudios de los maestros en formación, ya que, como evidencia el presente informe y otros realizados por distintos estudiantes formados profesionalmente en el Departamento, la HM puede constituir una poderosa arma académica en la labor del profesor de matemáticas tanto a favor del Conocimiento del Profesor de Matemáticas, como para su labor y su ser profesional.

## Referencias


Canal Martínez, I. (2011). *La enseñanza de los números complejos en el Bachillerato*. https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1649/Iván Canal Martínez.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Commandino, F., & Simson, R. (1855). Elementos de Euclides. *Imprensa da Universidade de Coimbra*.

De Santillana, G. (1960). El Crimen De Galileo. In *Antonio Zamora: Vol. 1ra edició* (p. 290).

Educational Foundation, W. (2002). *Galileo Galilei, y sin Embargo se Mueve*. https://academiaplay.es/video-contest/galileo-galilei-y-sin-embargo-se-mueve-vida-obra-inventos/

Fuentes Caucalí, J. T., & Sandoval Mendoza, F. Y. (2017). *Origen musical de las proporciones: un estudio histórico-filológico a favor del conocimiento del profesor de matemáticas.*(Trabajo de grado, Licenciatura en Matemáticas Universidad Pedagógica Nacional)

Guacaneme, E. A. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas* (Doctoral dissertation, Universidad del Valle).

Hernández Alonso, M. (2017). *Elementos de Euclides, Libros V y VI.* (Trabajo fin de grado, Universidad de la Laguna).

Koyre, A. (1988). Estudios de historia del pensamiento científico. In *universidad catolica de cordoba , Argentina sistema de bibliotecas: Vol. 15 ed* (pp. 150–179). www.sidalc.net/cgi-bin/wxis.exe/?IsisScript=UCC.xis&method=post&formato=2cantidad=1&expresion=mfn=099535

Koyré, A. (1980). *Estudios galileanos*. Siglo XXI de España Editores.

Leighton, M., & Wood, R. (2013). *la historia de los humanos 14 Galileo Galilei*. https://www.youtube.com/watch?v=GGMh_M0mow0

Molavoque, M. J., Quintero, A. L., & Guacaneme, E. A. (2012). Diferencia entre semejanza y proporcionalidad geométrica desde una perspectiva histórica. *Revista de Ciencias*, *16*, 75–85.

Palmieri, P. (2001). The Obscurity of the Equimultiples. *Archive for History of Exact Sciences*, *55(6)*, 555–597.

Palmieri, P. (2003). Mental models in Galileo’s early mathematization of nature. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, *34*(2), 229–264. https://doi.org/10.1016/S0039-3681(03)00025-6

Salcedo, T. P., & Gómez, B. (2005). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. In *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 251-260). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

RTVE. (2018). *Los expedientes Galilei - Ciencia y Fe*. https://www.rtve.es/alacarta/videos/otros-documentales/otros-documentales-expedientes-galilei-ciencia-fe/4044446/

Strathern, P., & Corriente, A. (1999). *Arquímedes y la palanca: Vol. I*. Siglo XXI de España Editores. http://www.librosmaravillosos.com/arquimedes/pdf/Arquimedes y la palanca - Paul Strathern.pdf

Urbaneja, P. M. G. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, *45*, 17–28.

# Anexos

## 4.1 Anexo 1. Mental models in Galileo’s early mathematization of nature

Esta traducción se hace con fines académicos sin ánimo de lucro comercial para el desarrollo del presente Trabajo de grado. Dado que no es una traducción autorizada, se sugiere no citar esta traducción sino la fuente original.

**Nota:** para la traducción del presente documento usamos el término “Experimentos de pensamiento” en lugar “Experimentos mentales” ya que junto con mi asesor el doctor Guacaneme, determinamos que da un sentido al documento mucho más cercano a la tesis de Palmieri.

Stud. Hist. Phil. Sci. 34 (2003) 229–264

www.elsevier.com/locate/shpsa

# Mental models in Galileo’s early mathematization of nature

Paolo Palmieri

*UCL London, Department of Science and Technology Studies, Gower Street, London WC1E 6BT, UK*

Received 21 June 2001; received in revised form 7 May 2002

_

## 1. Introducción: la cuestión de la temprana matematización de la naturaleza de Galileo.

Para distinguir entre los seguidores matemáticos de Arquímedes, especialmente Galileo, y los seguidores de Aristóteles de finales del siglo XVI, el punto de vista de William R. Shea, afirmó que ha consultado Matemáticos, bajo la guía de Euclides y Arquímedes, vieron el mundo en términos de formas geométricas que obedecen a leyes expresables matemáticamente”.[9] En mi opinión, debería aceptarse la opinión de Shea, aunque no solo fuera Euclides y Arquímedes que escoltaron a Galileo a nuevos territorios como, por ejemplo, ***Dos Las nuevas ciencias***, o ***el discurso sobre la flotabilidad***. Una imagen más compleja ha ido surgido gracias a una serie de estudios que han examinado en detalle la aceptación de Galileo de la teoría euclidiana de proporciones (o razonamiento proporcional) como el lenguaje de la matematización física temprana.[10]

[9] Shea (1972), p. 5.

[10] Véase Drake (1973, 1974a, 1974b, 1987); Giusti (1986, 1992, 1993); Palladino (1991); Palmieri (2001). Para un tratamiento general de la teoría euclidiana de proporciones me he basado en: Grattan-Guinness (1996); Sasaki (1985); Saito (1986, 1993). Rose (1975) es la encuesta más detallada de las matemáticas italianas del Renacimiento. Desde un punto de vista no técnico. Ver también Sylla (1984), pp. 11-43.

Hasta hora, ninguna investigación se ha dedicado a los mecanismos cognitivos subyacentes de La matematización de la naturaleza hecha por Galileo. Este documento aborda algunas preguntas relacionadas con este tema mediante la adopción de una perspectiva de la historia cognitiva que se basa en la teoría de modelos mentales (sobre los modelos mentales, ver Sección 2, Pt. I; sobre la historia cognitiva, ver Sect.2, Pt. II). además, a través de una discusión sobre el supuesto uso de experimentos de pensamiento de Galileo El artículo sugiere cómo una perspectiva de la historia cognitiva podría complementar enfoques historiográficos actuales, apelando así a un público más amplio e interdisciplinario.

Las matemáticas del Renacimiento tardío que Galileo asimiló se enfocaron generalmente en lenguaje natural. Ese tipo de matemáticas estaba en parte sujeto a las mismas reglas cognitivas que gobiernan los lenguajes naturales. Hacer matemáticas, especialmente las euclidianas y arquimedianas, significa construir argumentos matemáticos en la forma de pruebas verbales. Por lo tanto, para apreciar la importancia de esa práctica hay que respetar su carácter lingüístico. Además, el discurso matemático fue concertado con diversas construcciones visuales, como los diagramas de *Elementos* de Euclides y las representaciones de balanzas y pesos de la tradición arquimediana. Esas construcciones interactúan con la construcción lingüística de pruebas en el proceso creativo de la producción de nuevo conocimiento matemático. La mayoría de los estudiosos de Galileo han tendido a subestimar la importancia de estos factores, a veces debido a la tendencia anacrónica de reescribir (o repensar inconscientemente) esa forma de las matemáticas en simbolismos algebraicos.

Alrededor de los últimos treinta años, algunos estudios han abordado varias preguntas referentes a la temprana matematización de la naturaleza hecha por Galileo.[11] En particular, las contribuciones de Winifred Wisan y Enrico Giusti, las cuales son las más relevantes para el presente proyecto. Ambos académicos han aumentado dramáticamente nuestra conciencia de los problemas relativos al lenguaje de la filosofía natural matemática hecha por Galileo.[12] Ahora deseo revisar brevemente los resultados de Wisan y Giusti, a fin de indicar cómo este documento contribuirá a lo que creo que son cuestiones importantes aún no resueltas.

El documento de Wisan es a la fecha el análisis más detallado del corpus de publicaciones y Materiales inéditos sobre la teoría de Galileo sobre del movimiento acelerado y del movimiento de los proyectiles. Wisan tuvo en cuenta numerosas fuentes antiguas, medievales y renacentistas en las que Galileo parece haberse basado, pero llegó a la conclusión de que el trabajo de Galileo en el movimiento fue “novedoso en su concepción y ejecución”.[13] Bajo mi punto de vista, la falla metodológica que desestima la fuerza del enfoque de Wisan es la traducción del lenguaje matemático de Galileo a una notación algebraica que fue bastante ajena al renacimiento tardío. Por ejemplo, en su análisis de la prueba de Galileo en la ley de equilibrio, Wisan proporciona una reconstrucción que tiene poco que ver con el original de Galileo, simplemente afirma que el método de Galileo está “en la tradición euclideo-arquimediana”.[14] Sin embargo, la traducción de los argumentos matemáticos verbales a la notación simbólica conlleva inevitablemente al riesgo

[11] Drake (1970, 1973, 1974b, 1987); Wisan (1974); Koyre´ (1978); Galluzzi (1979); Giusti (1986, 1992, 1993, 1994, 2001); De Gandt (1995); Machamer (1998); Remmert (1998), Di Girolamo (1999); Wallace (2000); De Groot (2000).
[12] Wisan (1974) y Giusti (1993).
[13] Wisan (1974), pág. 110.
[14] Wisan (1974), pág. 158.

de perder importantes Aspectos que están inextricablemente vinculados con el lenguaje original. Es difícil encontrar cualquier cosa dentro de la tradición arquimediana que se parezca a cómo Galileo en realidad remodeló el equilibrio arquimediano (una piedra angular de su estudio temprano de Máquinas simples y estáticas). En efecto, Wisan no proporciona ninguna pista de por qué deberíamos suponer que la prueba de Galileo pertenece a esa tradición. Sus conclusiones dependen de los efectos históricamente borrosos inducidos por la notación algebraica.

No hay duda de que Galileo sabía algo de la tradición arquimediana, especialmente de sus desarrollos en el renacimiento tardío, tales como el comentario de Guido Ubaldo dal Monte sobre la obra de Arquímedes "*Sobre el equilibrio de los planos*". Pero el tratamiento del equilibrio de Arquímedes es completamente diferente al de Galileo, y nada en los comentarios de Guido Ubaldo sugiere Cualquier influencia en Galileo. Por lo tanto, nos quedamos sin respuesta a la pregunta de cómo Galileo matematizó el equilibrio arquimediano. además, la importancia de este aspecto de la ciencia Galileana no puede ser negada ya que fue eventualmente publicada por Galileo en ***Dos nuevas ciencias*** como la base misma de su "*nueva ciencia*" sobre la resistencia de materiales. Como veremos, necesitamos un acercamiento cognitivo al lenguaje del razonamiento proporcional para comprender cómo Galileo matematizó el equilibrio Arquimediano.

Desde mi punto de vista, un gran avance en nuestra comprensión del lenguaje temprano fisicomatemático de Galileo ha sido posible gracias a la investigación de Giusti sobre la teoría euclidiana de las proporciones tanto en galileo como en la escuela galileana. En primer lugar, Giusti ha contribuido a aclarar el significado galileano de proporción como una relación de semejanza entre dos razones formados por cantidades homogéneas. Desde la perspectiva de

Galileo, no es posible que existan razones entre cantidades heterogéneas.[15] En segundo lugar, Giusti ha mostrado que la noción de proporcionalidad de Galileo no se puede separar de la noción de Euclides sobre proporcionalidad equimúltiple, y que el uso Galileo de la técnica de equimúltiples está basada en la teoría de las proporciones de Euclides (más sobre esto en la Sección 3).[16] Finalmente, Giusti ha iluminado el complejo desarrollo que tuvo la teoría de la proporción dentro de la escuela de Galileo y el proceso a través del cual otros galileanos, como Evangelista Torricelli y Giovanni Alfonso Borelli, llegaron a asemejar las formas de pensamiento tardío de Galileo sobre la teoría de Euclides. La investigación de Giusti nos ha permitido hacer importantes progresos hacia la comprensión del lenguaje técnico de la matematización de Galileo del mundo natural. Sin embargo, como veremos, Galileo procedió más allá de la teoría de las proporciones de Euclides. Por ejemplo, tal como se explicará en relación con los teoremas tempranos de Galileo sobre centros de gravedad, él apela a recursos cognitivos que no son descriptibles en el lenguaje euclidiano, pero que salen a la luz desde una perspectiva cognitiva. Un notable desacuerdo estalló entre Galileo y Christoph Clavius Sobre la legitimidad de las construcciones visuales en pruebas matemáticas que nos permite aclarar los mecanismos cognitivos subyacentes a la extensión del razonamiento proporcional de Galileo.

[15] Giusti (1993), pp. 57ff. Wallace (2000, pp. 104-105), basa su tesis en que Galileo aplicó el método de una regresión demostrativa de la reconstrucción de una de las pruebas *De Motu* de Galileo en las que cuestionablemente asume relaciones entre pesos y velocidades. Para una visión diferente sobre las matemáticas vs. Paduan Aristotelianism, ver Ventrice (1989), pp. 163–195. Lennox (1986, p. 51) sostiene que Aristóteles insistió sobre el uso de las matemáticas en la óptica, mecánica, astronomía y armónicos y que "no parece haber nada en la apelación de Galileo en su nueva ciencia para demostrar matemáticamente que Aristóteles no ha sido respaldado plenamente ". Esto puede ser cierto en el caso de Aristóteles, el filósofo griego, pero no logra explicar por qué los aristotélicos del siglo XVI nunca produjeron algo como *el Discurso sobre la flotabilidad* (ferozmente opuestos por el aristotelismo) o Dos nuevas ciencias.

[16] Giusti (1986, 1992).

Además, existe una pregunta aún no resuelta sobre el supuesto uso de Galileo de experimentos de pensamiento, especialmente en sus primeros trabajos. Al concluir ***los estudios galileanos.*** (1939), Alexandre Koyré presentó su tesis seminal con respecto al platonismo de Galileo, retratando la matematización de la naturaleza de Galileo como la reivindicación de un enfoque platónico al estudio del mundo natural.[17] Como es bien sabido, la visión de Koyré de un Galileo platónico tiene un correlato; un Galileo como “usuario y abusador” de experimentos de pensamiento[18] Muchos estudiosos, como es bien sabido, han seguido la tesis de Koyré sobre el uso de experimentos de pensamiento. Argumentaré que los modelos mentales y la historia cognitiva ofrecen un mejor marco para entender el presunto uso de la experimentación de pensamiento de Galileo. Esto sugiere que los modelos mentales y, en general, los problemas relacionados con el estudio de los mecanismos cognitivos deberían ser de interés para una audiencia de académicos en historia y filosofía de la ciencia, así como a científicos y filósofos de las ciencias cognitivas.

## 2. Modelos mentales e historia cognitiva.

Esta sección está dividida en dos partes. La primera parte presentará la teoría de modelos mentales. La segunda parte discutirá lo que veo como los asuntos más polémicos relativos tanto a la noción de modelo mental como su relación con el análisis histórico.

### *2.1. Parte I*

[17] Koyre´ (1978, 1943)
[18] Koyre´ (1973), pp. 224–271

Quizás la mejor manera de abordar los muchos temas relacionados con la teoría de modelos mentales es comenzar con una pregunta planteada por el científico cognitivo, Philip Johnson-Laird, el principal defensor de los modelos mentales: “¿cuántos tipos de representación mental hay?'[19] Según Johnson-Laird, hay tres tipos de representaciones mentales: a) representaciones proposicionales; b) imágenes mentales; c) modelos mentales. Johnson-Laird se refiere a esta hipótesis como la hipótesis del “código triple”.[20] Veamos ahora En qué se diferencian los modelos mentales de las otras dos formas de representación mental. Acorde al punto de vista de las representaciones proposicionales, la mente tiene “un sistema unitario de representaciones mentales basadas en un lenguaje de pensamiento”.[21] Johnson-Laird proporciona Un ejemplo simple de cómo podrían trabajar las representaciones proposicionales. Suponga que la siguiente descripción se presenta a los individuos:

La cuchara está a la izquierda del cuchillo.

El plato está a la derecha del cuchillo.

entonces será codificado por sus mentes en representaciones proposicionales. Tal representación proposicional toma una forma de predicado-argumento, como:

(izquierda-de cuchara cuchillo)

(derecha-de plato cuchillo).

[19] Johnson-Laird (1996), p. 90; (1983), pp. 146–166.
[20] Johnson-Laird (1996), p. 92.
[21] Johnson-Laird (1996), p. 93.

Posteriormente, los individuos podrían inferir que: la cuchara está a la izquierda del plato. Johnson-Laird afirma que la “teoría proposicional explica esta capacidad en términos de una lógica mental que contiene reglas formales de inferencia “.[22] Es importante tener en cuenta que la sintaxis y el léxico del lenguaje mental que se supone codifica representaciones proposicionales son desconocidos. Si la mente usa tal sistema, entonces hará tareas deductivas correspondientes a las de lógica formal. ¿Pero son las representaciones proposicionales y las reglas formales de inferencia suficientes para explicar cómo la mente funciona en todas las situaciones? Los hallazgos empíricos sugieren que no.

En un experimento, a los individuos se les presentó una descripción determinada (que es precisamente uno que corresponde a un solo estado de eventos). Después de escuchar la descripción, los participantes tenían que decidir si la descripción de un diagrama particular que representa todos los objetos relevantes era verdadera o falsa. Se repitió la misma tarea, presentando a los participantes una descripción indeterminada (es decir, una correspondiente a más de un estado de eventos). La descripción indeterminada fue consistente tanto con el primer diagrama como con el segundo en el que se habían distribuido los objetos de manera sutilmente diferente. Después de clasificar las descripciones, los participantes fueron inesperadamente invitados a ordenar ‘las cuatro versiones de la descripción a su semejanza con la descripción real’.[23] Las dos primeras versiones fueron consistentes con el diseño. Las dos segundas fueron fallidas. Para las descripciones determinadas los participantes calificaron confiablemente las dos

[22] Johnson-Laird (1996), p. 93.
[23] Johnson-Laird (1996), p. 96.

primeras descripciones más altas que las dos segundas. Para las descripciones indeterminadas ellos clasificaron de manera confiable la descripción real más alta que la consistente con el diseño, pero teniendo un significado diferente. Según Johnson-Laird, una interpretación plausible de estos sorprendentes hallazgos son los siguientes: cuando se enfrentaron con determinadas descripciones los participantes intentaron construir una imagen o más del Modelo abstracto de la situación. Pero cuando fueron confrontados con las descripciones indeterminadas ellos abandonaron la estrategia anterior y trataron de aferrarse a las representaciones proposicionales. ¿Por qué? Porque las imágenes o modelos llevan a una buena memoria para el diseño, pero a una mala memoria para los detalles textuales. Lo contrario es cierto para las representaciones proposicionales.[24]

En resumen, según Johnson-Laird, estos resultados sugieren fuertemente una "disociación" entre dos tipos de representación, es decir, una preferencia por modelos o Imágenes para descripciones espacialmente determinadas, y una preferencia por representaciones proposicionales para descripciones espacialmente indeterminadas ».[25]

Hasta ahora se ha establecido una distinción entre representaciones proposicionales e imágenes mentales (o más modelos abstractos).[26] Pero ¿hay una diferencia real entre imágenes mentales y modelos mentales? Según los teóricos de los modelos mentales, los hay.

[24] Van der Henst (1999) explora factores pragmáticos que podrían iluminar aún más cómo las indeterminaciones Afectan el razonamiento deductivo.

[25] Johnson-Laird (1996), p. 97.

[26] Bonatti (1994a, b) presenta una crítica interesante de la teoría del modelo mental y sugiere que hasta ahora no hay evidencia convincente para abandonar la hipótesis de una lógica mental basada en reglas de inferencia.

En primer lugar, una imagen mental simplemente representa los "aspectos perceptibles de una situación desde el punto de vista de un observador.[27] Por otro lado, 'un modelo mental representa individuos por fichas mentales; Representa las propiedades entre los individuos por la relación con esas fichas y representa las relaciones entre individuos con las relaciones entre estas fichas'.[28] Por lo tanto, el "modelo mental más simple tiene una estructura analógica que corresponde a la estructura de la situación que representa… como diagramas, estos modelos simples son isomorfos, o al menos homomorfos, aquello que representan.[29] Lo que es interesante para nuestros propósitos actuales es que los modelos mentales realmente parecen constituir un tercer tipo de representación mental distinta de imágenes mentales. Los últimos comparten con los anteriores la estructura analógica con los estados de eventos. Las imágenes y los modelos mentales son isomorfos con los estados de cosas que ellos representan. Pero los modelos mentales pueden incorporar elementos abstractos que por definición escapan a la "imagenhabilidad" (habilidad de crear imágenes).[30] En resumen, es importante darse cuenta de que los modelos mentales son construcciones cognitivas completamente generales, no limitadas a

[27] Johnson-Laird (1996), p. 93.

[28] Johnson-Laird (1996), p. 102

[29] Johnson-Laird (1996), p. 102. Según Johnson-Laird y Byrne (2000), "los modelos mentales son representaciones en la mente de situaciones reales o imaginarias. Los científicos a veces usan el término "modelo mental "como sinónimo de" representación mental ", pero tiene un referente más estrecho en el caso de la teoría de pensamiento y razonamiento ". Vale la pena señalar que la teoría del modelo mental tiene una base empírica fuerte y muchas ramificaciones en las ciencias cognitivas. Una extensa lista bibliográfica que recoge datos muy recientes. El trabajo sobre modelos mentales se encuentra en Johnson-Laird y Byrne (2000).

[30] Algunos hallazgos sugieren que la negación, por ejemplo, puede ser uno de estos elementos abstractos. Experimentos llevado a cabo con el cuantificador "solo" mostró que los modelos mentales pueden representar negación, lo cual es obviamente una relación abstracta (Johnson-Laird, 1996, pp. 114-120). Otros aspectos relativos a los mecanismos de pensamiento han sido estudiadas en el marco de la teoría de los modelos mentales. Una teoría de la deducción fue presentada por Johnson-Laird y Byrne (1991) hace una década. (Véase también Johnson-Laird, 1996, pp. 102-111.) Más recientemente una cuenta del significado de NAI¨ve la causalidad ha sido propuesta totalmente dentro del marco conceptual de los modelos mentales (Goldvarg &Amp; Johnson-Laird, 2001).

tareas de razonamiento, tales como Razonamiento silogístico. Pueden ser tridimensionales, cinemáticos y dinámicos. . . Los [modelos] pueden incorporar clases de situaciones de una manera parsimoniosa. Por lo tanto, pueden representar cualquier situación, y las operaciones en ellos pueden ser puramente conceptuales.[31] existe ahora un creciente cuerpo de investigación que sugiere que muchas formas de razonamiento espacial en los humanos están en gran medida basados en modelos.[32] Aunque las imágenes mentales pueden ser manipuladas mentalmente (por ejemplo, rotadas), no pueden capturar clases de situaciones.[33]

En definitiva, según la teoría de los modelos mentales, se pueden distinguir tres tipos de representaciones mentales: 1) representaciones proposicionales; 2) imágenes mentales; y 3) modelos mentales. Cada uno de ellos parecen ser usados por humanos bajo diferentes circunstancias. Las representaciones proposicionales funcionan de acuerdo con las reglas lógicas de inferencia. La característica más interesante tanto de las imágenes mentales como de los modelos mentales es su isomorfismo con los estados de eventos que estos representan. Pero los modelos mentales son capaces de codificar elementos abstractos que, por definición, escapan a la imagenhabilidad. Además, Los modelos mentales pueden representar clases enteras de situaciones y ser tanto cinemáticos como dinámicos.

[31] Johnson-Laird (1996), p. 124.

[32] En particular, ver Glasgow y Malton (1999), quienes desarrollan una semántica formal para el razonamiento espacial basada en la teoría de los modelos mentales de Johnson-Laird.

[33] Richardson (1999), pp. 41ff.

*2.2. Parte II*

En mi opinión, tres problemas metodológicos enfrentan al historiador que ha adoptado un marco cognitivo. El primer problema se refiere a la noción de *representación mental* en general. Es una cuestión de la filosofía de las ciencias cognitivas. El segundo Se refiere al *conexionismo* y la teoría general de la cognición. El tercero y más urgente es la *aplicabilidad* de la ciencia cognitiva a la historia de la ciencia. En esta segunda parte de la Sección, los dos primeros problemas solo serán discutidos en la medida en que se apoyan en el tercero, que puede ser articulado de la siguiente manera. ¿Hasta qué punto los constructos son estudiados por la ciencia cognitiva de hoy, tales como modelos mentales, mecanismos cognitivos metahistóricos? En otras palabras, ¿en qué medida aquellos constructos definen las características cognitivas de los humanos modernos (suponga provisionalmente que *moderno* significa los últimos cinco o seis milenios)? Tratemos de responder estas preguntas.

Se ha acumulado una literatura compleja sobre lo que Robert Cummins denomina *El problema de la representación mental*, es decir, el problema de la función explicativa asignado a la noción de representación mental por la ciencia cognitiva empírica. [34] yo, por lo tanto, tendré que ser extremadamente selectivo y enuclear los asuntos más importantes desde la perspectiva de un historiador.

Como vimos en la Parte I, aquello que es una representación mental y cómo funciona en la cognición humana sigue siendo una cuestión empíricamente abierta.[35] Sin embargo, de acuerdo

[34] Cummins (1991), pp. 1–2.
[35] Cummins (1991), p. 1, and, en general, Richardson (1999).

con Cummins, la noción de representación mental per se no se puede disociar del marco conceptual más amplio de una teoría de la cognición. Desde la perspectiva de Cummins es que, si asumimos una teoría *computacional* de la cognición, es decir, una según la cual "La cognición está disciplinada por la manipulación de símbolos", entonces debemos comprometernos con una noción ahistórica de la representación mental.[36] A primera vista esto parece ir en contra de muchas investigaciones en la historia y la filosofía de la ciencia, que ha insistido en la historicidad y acotación cultural del desarrollo científico. En el contexto de la teoría computacional de la cognición, sin embargo, "ahistórica" tiene una gran connotación técnica. Significa que los estados computacionalmente equivalentes son representacionalmente equivalentes, independientemente de la historia del sistema cognitivo que muestra esos estados. En otras palabras, la capacidad de un sistema cognitivo para calcular, es decir, su capacidad para representar y conocer depende solo de su estado actual, no de la historia que condujo a ese estado particular.[37]

En mi opinión, los historiadores no deben preocuparse por esta noción técnica de ahistoricidad, que se relaciona con tales mecanismos cognitivos básicos como los modelos

---

[36] Cummins (1991), pág. 13, págs. 80 y ss. Para demostrar este punto, Cummins propone un experimento mental en el que una maquina hace duplicación de un ser humano copiando molécula por molécula. Entonces él sostiene que la copia físicamente equivalente preserva la identidad cognitiva del original, pero, naturalmente, no puede compartir su historia. De ahí la necesidad de un compromiso y de una noción ahistórica de representación mental.

[37] Un ejemplo familiar de la mecánica clásica ayudará a comprender esta connotación técnica. Supongamos que tienes una ecuación diferencial que describe el movimiento de una partícula en un universo newtoniano. En el momento t y la posición p, el movimiento futuro de la partícula se determinará solo por su estado actual en (p, t); es decir, su posición y velocidad, más las fuerzas que actúan sobre ella en (p, t). El movimiento futuro de la partícula no lo hace, depende de su historial, es decir, de su movimiento desde el instante inicial hasta el tiempo t.

mentales[38]. Las habilidades cognitivas por sí solas no explican la historia intelectual. Necesitamos análisis histórico para desarrollar mecanismos cognitivos metahistóricos con un contenido históricamente significativo. Este último solo puede provenir de marcos de conocimiento culturalmente acotados y la rica diversidad de las culturas históricas[39].

Yo diría que la ciencia cognitiva y la historia de la ciencia tienen mucho que beneficiarse de la colaboración interdisciplinaria. Mientras que la ciencia cognitiva empírica no puede reproducir entornos históricos en un laboratorio, los modelos que tiene para ofrecer pueden ser aplicados a la historia, *siempre que los historiadores puedan historizar esos modelos*. Reviel Netz ha usado recientemente la expresión "historia cognitiva" para referirse a la posibilidad de describir aquellos mecanismos cognitivos que solo existen 'históricamente, en contextos específicos.[40] Sin embargo, sobre la base de la concepción modular de la mente de Jerry Fodor, Netz ha atacado una nota pesimista que proclama que la ciencia cognitiva no puede tener acceso a mecanismos profundos, tales como la fijación de la creencia, que en última instancia, explicaría el proceso histórico[41]. No soy un científico cognitivo, pero no comparto el pesimismo de Netz. La ciencia cognitiva, como toda ciencia, evoluciona, y no veo en su estado actual algo que sugiera

[38] Recientemente, Turner (2001) ha aprovechado el mecanismo cognitivo básico conocido como "mezcla de espacios conceptuales', o integración conceptual, a fin de proporcionar un marco para un nuevo enfoque cognitivo de la ciencia social. En vista de Turner, la ciencia social está preocupado con el estudio de los seres humanos modernos cognitivamente, donde 'moderna' significa casi los últimos cincuenta mil años. (Turner, 2001, pág. 4).

[39] Se han sugerido diferentes formas de representación mental basados en la teoría evolutiva que no tienen una noción ahistórica de representación mental como consecuencia directa. Sin embargo, en mi opinión, las diferencias son irrelevantes porque, en cualquier caso, la escala de tiempo involucrada en los procesos evolutivos representa los mecanismos cognitivos en los que estamos interesados, las estructuras cognitivas eventualmente estabilizadas de hecho metahistórico. Ver Millikan (1984, 1993, 2001).

[40] Netz (1999), pág. 6.

[41] Fodor (1983); Netz (1999), pág. 6.

que no será capaz de abordar incluso tales procesos profundos y aún misteriosos como la fijación de creencias. Igualmente optimista, yo creo que el estudio histórico de la ciencia tiene mucho que aportar a la ciencia cognitiva, precisamente en la forma de la historia cognitiva de Netz.

Ahora deseo confrontar el desafío que viene del paradigma conexionista en Ciencia cognitiva. Robert Cummins ha proporcionado un análisis exhaustivo de esta pregunta, que seguiré antes de hacer explícitas varias conclusiones relevantes al proyecto de este documento.[42]

En general, dentro del marco de la teoría computacional de la cognición, una capacidad cognitiva, como la de construir modelos mentales, o la de jugar ajedrez, es una "función cuyos argumentos y valores están epistemológicamente relacionados".[43] Por lo tanto, por ejemplo, la capacidad para jugar ajedrez es una capacidad cognitiva. Un programa de ajedrez crea una instancia de una función cognitiva que media entre los argumentos y los valores. En general, sin embargo, las capacidades o funciones cognitivas son muy difíciles de especificar.[44] El conexionismo puede en principio, superar el problema de especificación, porque "es posible "entrenar" una red para tener una capacidad cognitiva sin tener ni siquiera el Inicio de un análisis de la misma. . . ". [45] Esto implicaría que la definición de la capacidad cognitiva como función de inferencia es incompatible con el conexionismo. Para nuestros propósitos actuales, la forma más interesante que toma el desafío conexionista es la *tesis de la inconmensurabilidad* (nótese que

[42] Cummins (1995).

[43] Relacionado epistemológicamente significa que los argumentos y valores deben ser especificables en términos inferenciales del Proceso de razonamiento simbólico (Cummins, 1995, p. 106).

[44] Cummins (1995), pp. 106-107.

[45] Es difícil especificar en qué consiste, por ejemplo, la capacidad de planificar una fiesta con amigos. (Cummins, 1995, p. 107).

esto no tiene nada que ver con la inconmensurabilidad Kuhniana).[46] Ella argumenta que "cuando un sistema conexionista satisface una función cognitiva, calcula sobre representaciones que no tienen interpretación en el dominio en el cual la capacidad cognitiva en mira se especifica.[47] Cummins sugiere el siguiente contraargumento a la tesis de inconmensurabilidad.

No necesitamos rechazar la noción de función cognitiva siempre que ampliemos su significado para incorporar funciones cognitivas representacionales no simbólicas, es decir, Funciones que toman argumentos no simbólicos en valores no simbólicos. Cummins ejemplifica su punto de vista precisamente con el esquema de razonamiento de Galileo basado en la Representación de la velocidad, la distancia y el tiempo, mediante entidades geométricas simples.[48] De hecho, según Cummins, el esquema galileano podría aplicarse a cualquier conjunto de magnitudes que satisfacen las relaciones geométricas entre las entidades geométricas asociadas por Galileo a las cantidades físicas.

Tal esquema, concluye Cummins, obviamente puede usarse para razonar geométricamente.[49] En este sentido, Cummins propuso la teoría de la *imagen* de la representación

---

[46] Se denomina argumento de inconmensurabilidad porque se basa en la idea de que "los sistemas de representación conexionista son inconmesurables (normalmente con los sistemas simbólicos) que debe usarse para especificar funciones cognitivas" (Cummins, 1995, pág. 110).

[47] Cummins (1995), pág. 108. Recordemos que un modelo conexionista se basa en una distribución Arquitectura cuya estructura de red está dada por nodos y rutas de activación intermedias entre un nivel generalmente llamado nivel de entrada y un nivel generalmente llamado nivel de salida. En este caso, la función cognitiva satisfecao por una red conexionista que ha aprendido que tiene sus argumentos y valores especificos en una forma no simbólica, lo que equivale crudamente a decir que no puede especificar cuáles son las representaciones simbólicas en el nivel de entrada, cuáles son en el nivel de salida, para explicar qué deducción se ha realizado entre esas representaciones.

[48] Cummins (1995), pp. 112-113. Si bien el análisis de Cummins puede ser históricamente inexacto, no obstante, da una buena idea, como veremos, de las funciones cognitivas no simbólicas que Galileo usó en sus matematizaciones tempranas, a saber, modelos mentales.

[49] Cummins (1995), pág. 112.

mental, según la cual una representación mental es una relación entre dos estructuras isomorfas.[50] En palabras de Cummins, la idea básica es que "representar algo es tener su estructura".[51] Para concluir, argumentaría que podemos generalizar el punto de vista de Cummins en las siguientes funciones cognitivas. Un modelo mental es una función cognitiva representacional no simbólica que relaciona dos estructuras isomorfas. Toma argumentos no simbólicos con valores no simbólicos. Brevemente:

MODELO MENTAL: (argumento no simbólico) → (valor no simbólico).

### 3. La dimensión visual del razonamiento proporcional de Galileo.

Alrededor de 1588, el joven Galileo circuló un manuscrito que contenía una serie de teoremas sobre los centros de gravedad.[52] Estos teoremas fueron su principal esperanza de establecer su reputación como matemático obtener una cátedra universitaria. El 8 de enero 1588, Galileo le escribió a Christoph Clavius en Roma preguntándole su opinión acerca de algunas dificultades con respecto a sus nuevos teoremas. Galileo le dijo a Clavius que algunas personas en Florencia ya habían examinado sus teoremas, pero no estaba convencido de que su camino de proceder fuese este. Más precisamente, lo que Galileo estaba ansioso por saber era si la prueba de la proposición que sustenta todos los teoremas posteriores fuese capaz "de acallar por completo el intelecto de Clavius".[53] Se produjo un intercambio de cartas que revela cuán profunda fue la

[50] Cummins (1996), especialmente pp. 85-111.
[51] Cummins (1996), pág. 93.
[52] Los teoremas sobre los centros de gravedad fueron finalmente publicados por Galileo en Dos nuevas ciencias. (Galilei, 1974, pp. 261–280; 1890–1909, I, pp. 187ff).
[53] '. . . desidero saper da lei se interly gli quieta l'intelletto '(Galilei, 1890–1909), X, pp. 22–23). Desafortunadamente, muy pocas cartas de la correspondencia de Galileo de este período sobreviven. Otros

diferencia entre las actitudes de Galileo y Clavius hacia procedimientos matemáticos. Pero antes de analizar en detalle la discusión entre Clavius y Galileo en la siguiente sección, debemos pasar a la suposición fundamental qué Constituye la base de los primeros teoremas de Galileo sobre los centros de gravedad.

Galileo publicó el siguiente postulado:

*Suponemos que, de pesos iguales dispuestos de manera semejante en balanzas diferentes, si el centro de gravedad de un compuesto [de pesos] divide su equilibrio en una cierta razón, luego el centro de gravedad del otro compuesto también divide su equilibrio en la misma razón*.[54]

El postulado expresa una proporcionalidad que se refiere a un modelo mental; podemos llamarlo el modelo de equilibrio semejante. Ahora procedo a mostrar cómo podemos reconstruir el modelo mental.

Hay dos puntos planteados por el postulado de Galileo que son relevantes para nuestro propósito. En primer lugar, ¿en qué sentido habla Galileo de la "semejanza" de los arreglos de pesos en diferentes balanzas? En segundo lugar, ¿cuál es el significado de la frase "estar en la misma razón" refiriéndose a las longitudes de las partes de las balanzas divididas por sus centros de gravedad? La mejor manera de responder estas preguntas es comenzar con un ejemplo. Vamos

---

matemáticos quienes participaron en el debate fueron el marqués Guido Ubaldo del Monte (que más tarde jugó un papel fundamental en la obtención de las publicaciones de Galileo en Pisa y en Padua) y Michael Coignet de Amberes. Ninguno de ellos comentó la primera proposición de Galileo (al menos en los documentos sobrevivientes). Ver Galilei (1890–1909), X, pp. 22ss. En ese momento, Guido Ubaldo debe haber estado muy interesado en el trabajo de Galileo sobre los centros de gravedad desde el Marqués estaba a punto de publicar su propia edición y comentario sobre, Arquímedes acerca el equilibrio del avión. (Ver Del Monte, 1589.)

[54] Galilei (1974), p. 261. Di Girolamo (1999) discute la influencia de arquimedianos en el trabajo de Galileo sobre los centros de gravedad, pero tampoco se preocupa por la cuestión de la noción de proporcionalidad

El enfoque de Galileo subyacente o con el desacuerdo Galileo-Clavius.

a referirnos a la Fig. 1 y consideremos, por ejemplo, tres balanzas I, II, III, en las cuales cuatro pesos que cuelgan de hilos están dispuestos en disposiciones “semejantes” (de las cuales, más en un momento). Sean $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B'}$ y $\boldsymbol{A''}$, $\boldsymbol{B''}$ los brazos de las tres balanzas Y que sus centros de gravedad estén representados por el símbolo de estrella ✷ Deje W1,W2, W3, W4 son los cuatro pesos, y $\boldsymbol{D12_I}, \boldsymbol{D23_I}, \boldsymbol{D34_I}, \boldsymbol{D12_{II}}, \boldsymbol{D23_{II}}, \boldsymbol{D34_{II}}, \boldsymbol{D12_{III}}, \boldsymbol{D23_{III}}, \boldsymbol{D34_{III}}$ serán las distancias de los pesos W1, W2, W3, W4 entre sí, en las balanzas I, II, III. Según el postulado de Galileo:

si en balanzas I, II, III,

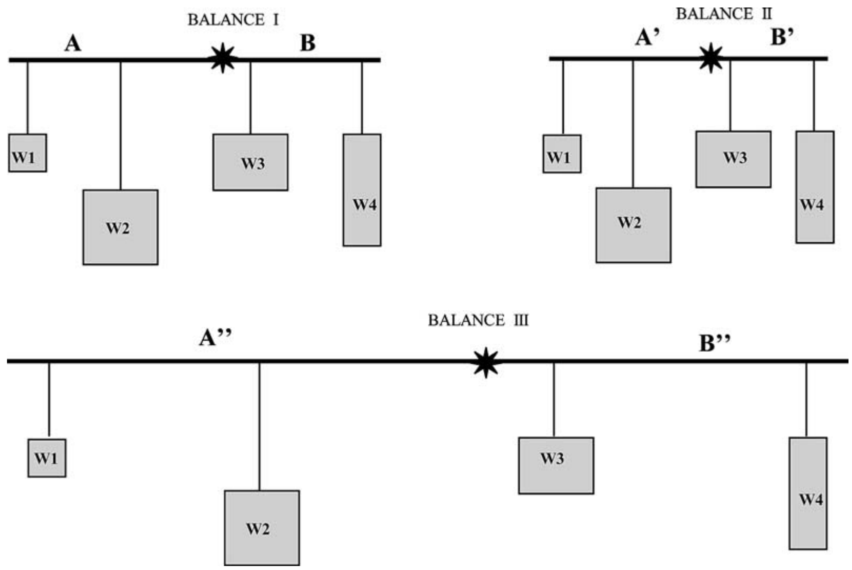
como $D12_I$ es a $D12_{II}$ así que $D23_I$ es a $D23_{II}$,

como $D12_{II}$ es a $D12_{III}$ así que $D23_{II}$ es a $D23_{III}$,

como $D23_I$ es a $D23_{II}$ así que $D34_I$ es a $D34_{II}$,

etc.,

entonces como A es a B, entonces A 'es a B' y A " a B ". Ahora surge la pregunta de si hemos interpretado correctamente la idea de Galileo acerca de la noción de disposiciones de pesos. En las balanzas que se muestran en la Fig. 1, las distancias de los pesos entre sí están en la misma razón. En otras palabras, hemos asignado a la noción de Galileo de la “semejanza” de las disposiciones de pesos un *significado proporcional* es decir, la condición de que como $D12_I$ es a $D23_I$ entonces $D12_{II}$ es a $D23_{II}$, $D12_{III}$ es a $D23_{III}$, etc. Como veremos en la siguiente sección, esta interpretación está confirmada por el propio uso que hizo Galileo del postulado en la demostración de su primera proposición en los centros de gravedad. El significado proporcional es definido por la así llamada técnica de equimúltiplos expuesta por Euclides en el Quinto Libro de *Elementos*.[55]




[55] Vea, por ejemplo, la interpretación de Clavius de la definición de Euclides de la igualdad de proporciones: “Se dice que las magnitudes están en la misma proporción, la primera a la segunda, y la tercera a la cuarta, cuando los equimúltiplos del primero y del tercero, ambos iguales, iguales superan, o no llegan a superar a los equimúltiplos del segundo y el cuarto, cualquiera que sea esta multiplicación, esos equimultiplos se consideran que se corresponden entre sí. [En la misma magnitud se dice que son la primera a la segunda, y la tercera a la cuarta. Con la primera y tercera múltiplos arbitrarios a la segunda y la cuarta. Si múltiplos iguales de lo que sea, puede ser la multiplicación de estas cosas, que son a la vez de la que cada una inició, o están a la misma altura, han de ser iguales, puede ser una, o puede ser una que supere; Si, se toman correspondientes entre sí] (Clavius, 1999, p. 209, mi traducción). Clavius (1999) es una edición facsímil del primer volumen de Clavius (1611-1612).

En la teoría euclidiana de las proporciones, Galileo dependió del análisis de los comentaristas latinos de finales del renacimiento (y posiblemente, según Giusti (1993), sobre Niccolo` Tartaglia y Federico Commandino´s Ediciones italianas de Euclides), probablemente a través del vasto comentario de Clavius sobre *Elementos*, como he sugerido en Palmieri (2001). De Groot (2000, p. 647), evalúa negativamente la reconstrucción de Giusti del razonamiento proporcional de Galileo, pero simplemente critica a Giusti (1992, un breve artículo presentado en un Coloquio), ignorando el tratamiento mucho más articulado en Giusti (1986, 1993), y la Introducción de Giusti a Galilei (1990), especialmente pp. xxixff. ¿Los elementos Eudoxianos de razonamiento proporcional que De Groot encuentra en el texto griego de las preguntas mecánicas pseudo-aristotélicas ha sido accesible para Galileo? Acerbi (2000, p. 20) sugiere que una forma posible para Galileo de acceder indirectamente a fuentes griegas fue Jacopo Mazzoni, profesor y más tarde colega suyo en Pisa. Pero la técnica de Mazzoni en conocimiento de las matemáticas difícilmente le habría permitido detectar influencias eudoxianas en el griego. texto de las preguntas mecánicas (Purnell, 1972; Schmitt, 1972). La pregunta parece destinada a permanecer abierta hasta que descubramos evidencia adicional sobre la capacidad de Galileo para leer matemáticas griegas en su idioma original. Sin embargo, De Groot ha basado su análisis de las preguntas mecánicas en Apelt. (1888), ahora superado por Aristóteles (1982), perdiendo de vista el contexto más rico de los comentarios latinos. Sobre las preguntas mecánicas que Galileo habría leído.

*La fig. 1. El modelo de balanzas semejantes. Disposiciones semejantes de igual peso W1, W2, W3, W4 en tres diferentes balanzas I, II, III.*

Es importante tener en cuenta que Galileo creía que la proporcionalidad equimúltiple fue una noción completamente oscura. De hecho, en 1641, él dictó a Evangelista Torricelli un pequeño tramo en el que propuso reemplazar la proporcionalidad equimúltiple con una nueva definición.[56] La extensión de Galileo de la noción de semejanzas con diversas disposiciones de pesos en diferentes balanzas puede haber sido sugerido por la teoría de la semejanza de figuras planas de Euclides y por la aplicación de Arquímedes de esta teoría al estudio de los centros de gravedad *sobre el equilibrio de los planos*. La preferencia de Galileo para el razonamiento basado en modelos lo llevó a revertir la teoría euclideo-arquimediana, como las siguientes consideraciones deberían dejar en claro.

La teoría de la semejanza de figuras planas es desarrollada por Euclides en el Sexto Libro de *Elementos*.[57] En el caso, por ejemplo, de dos triángulos, si los ángulos del primer triángulo son ordenados iguales a los ángulos del segundo y los lados alrededor de ellos son Proporcionales, entonces se dice que los triángulos son semejantes. Uno de los postulados de Arquímedes en

[56] Giusti (1993). Palmieri (2001) se centra en la compleja relación entre Galileo y Clavius. Análisis de proporcionalidad equimultiples. El análisis de Clavius se publicó en su edición de Euclides (Clavius, 1999, pp. 212ff).

[57] Véase, por ejemplo, Clavius (1999), pp. 242–304. Cf. La siguiente definición: “Figuras rectilíneas semejantes. son aquellas que tienen ángulos iguales entre sí y cuyos lados de ángulos iguales son proporcionales “[símiles figurae rectilineae sunt, quae et angulos singulos singulis aequales habent, atque etiam latera, Quae circum angulos aequales, proporcional] (Clavius, 1999, p. 242; véase también la traducción ligeramente diferente sobre Euclides de Heath, 1956, II, p. 188).

*sobre el equilibrio de los planos* indica que figuras planas semejantes tienen sus centros de gravedad “ubicados de manera semejante” (ver Fig. 2).[58]

Arquímedes no invoca proporcionalidad en la definición de puntos que son ‘colocados de forma semejante’, posiblemente porque solo le preocupan las figuras planas. Él define puntos ‘colocados de manera semejante’ en figuras semejantes considerando ángulos.[59] Galileo, por lo tanto, no pudo extender directamente la definición de Arquímedes de puntos “colocados de manera semejante” Al caso de configuraciones semejantes de pesos sobre balanzas (representadas geométricamente por líneas rectas). Tuvo que proceder generalizando la noción de Arquímedes. Los brazos de las balanzas con pesos dispuestos de manera semejante podrían ser pensados como divididos en segmentos proporcionales por los pesos. Ahora elaboremos esta explicación.

Triángulos semejantes (y, más generalmente, figuras planas semejantes) muestran su semejanza en un sentido fuertemente visual. El mismo tipo de semejanza visual es evidentemente discernible en las disposiciones semejantes de pesos sobre las tres diferentes balanzas de la Fig. 1. ¿Se puede conceptualizar esta semejanza visual de balanzas en términos de proporcionalidad? La Proposición 4 de Euclides, Libro VI, prueba que los lados de los triángulos equiangulares son de hecho proporcionales y por lo tanto los triángulos equiangulares son semejantes.

---

58 Postulado de Arquímedes en Archimedis planorum aequeponderantium inventa, vel centra gravitatis planorum en Arquímedes (1544), p. 125. Esta edición de Arquímedes estaba en la biblioteca personal de Galileo. (Favaro, 1886, p. 264). Los postiles de Galileo a De Sphaera et Cylindro de Arquímedes han sido publicados en Galilei (1890–1909), I, pp. 233–242.

59 Según la definición de Arquímedes, los puntos colocados de manera semejante en figuras semejantes son tales que Las líneas dibujadas desde ellos en ángulos iguales hacia los lados correspondientes forman ángulos iguales [con los correspondientes lados] (Arquímedes, 1544, p. 125. Ver Fig. 2).

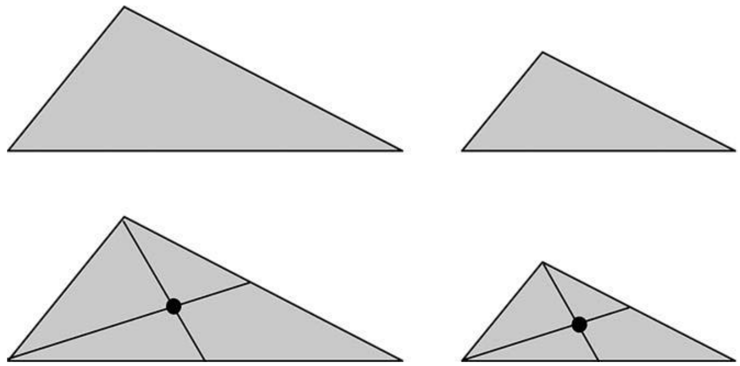


*Fig. 2. Triángulos semejantes (arriba) con sus centros de gravedad (los puntos negros) colocados de manera semejante (abajo).*

Pero la construcción de Euclides de la noción de figuras planas semejantes se basa rigurosamente en la aplicación de la proporcionalidad *equimúltiple*. La Proposición 4, Libro VI, depende de la primera proposición del Libro VI, en la que mediante la técnica *de los equimúltiplos* Euclides muestra que los triángulos (y paralelogramos) que tienen la misma altura son entre sí como sus bases (Fig. 3). Esto nos lleva inmediatamente a la segunda pregunta planteada anteriormente: el significado de la proporcionalidad atribuida a los brazos de las balanzas por el postulado de Galileo.

En lugar de proceder mediante la técnica equimúltiple, Galileo simplemente conjeturó que al colocar pesos iguales en distancias que están uno al otro en la misma razón - es decir, al considerar lo que él llamó configuraciones "semejantes" de Pesos - los centros de gravedad de los diferentes equilibrios deben dividirlos en brazos proporcionales. Primero vio la semejanza de varias configuraciones de pesos en su modelo mental de balanzas semejantes y subsecuentemente formuló la hipótesis que los centros de gravedad deben por consiguiente ser particiones de las balanzas en sus brazos proporcionales. Esta generalización de la noción de puntos “ubicados de manera semejante” de Arquímedes es una reversión de La forma en que Euclides construye figuras semejantes. Euclides primero demostró que los triángulos equiangulares tienen lados proporcionales y luego deducen su semejanza, mientras que Galileo Primero reconoció dentro de su modelo mental la semejanza de configuraciones de pesos y luego conjeturó la proporcionalidad de sus brazos.

Pero la cuestión del significado de la reversión de Galileo es mucho más profunda. De hecho, el postulado de Galileo es, a todos los efectos, equivalente a una conjetura sobre la naturaleza misma de las magnitudes proporcionales, por una razón clara. Galileo no tiene prueba de que la proporcionalidad equimúltiple se puede aplicar con éxito al caso de sus balanzas. Por lo tanto, afirma que las proporcionalidades pueden generarse no solo aplicando directamente la misma técnica, sino también mediante un procedimiento totalmente diferente. Es decir, la construcción de configuraciones visualmente semejantes de magnitudes físicas, tales como pesos que cuelgan de balanzas (Fig. 4).

De este modo, el modelo mental de Galileo de equilibrios semejantes logra hacer homogéneo el mundo de la proporcionalidad euclidiana y el mundo de las cantidades físicas. Este es un paso notable más allá del alcance del razonamiento proporcional, aunque el significado de la proporcionalidad entre los brazos de las balanzas sigue siendo algo ambiguo. Esta ambigüedad se puede ver fácilmente si recordamos el postulado de Galileo y lo reescribimos explícitamente indicando el tipo de proporcionalidad válido en el primer conjunto de relaciones con $Así_{EQ}$ (que significa “proporcionalidad equimúltiple”):

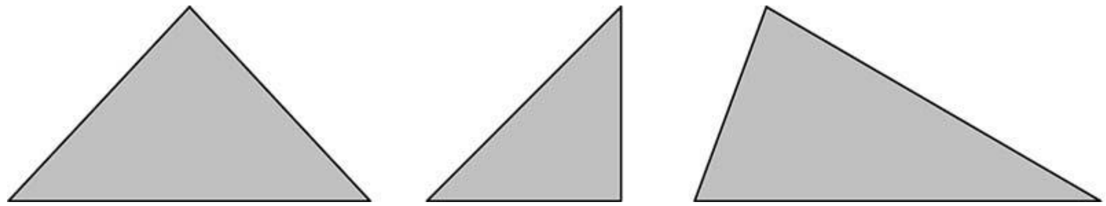


Fig. 3. Los triángulos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

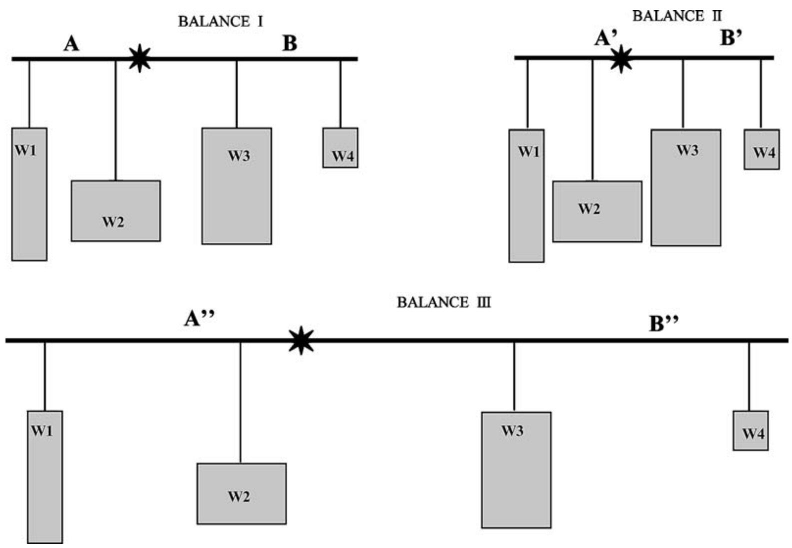



*Fig. 4. Un conjunto de pesos diferente al de la Fig. 2 genera diferentes posiciones de los centros de la gravedad en las balanzas I, II, III, de modo que, nuevamente, como A es a B, A 'es a B' y A '' a B ''.*

Si en las balanzas I, II, III,

Como $D12_I$ es a $D12_{II}$ $Así_{EQ}$ $D23_I$ es a $D23_{II}$,

como $D12_{II}$ es a $D12_{III}$ $Así_{EQ}$ $D23_{II}$ es a $D23_{III}$,

como $D23_I$ es para $D23_{II}$ $Así_{EQ}$ $D34_I$ es a $D34_{II}$, etc., entonces como A es a B, A 'es a B' y A '' a B ''.

Considerando que el significado de la proporcionalidad entre distancias (como $D12_I$ es a $D12_{II}Así_{EQ}$ $D23_I$ es a $D23_I$, etc.) es el de proporcionalidad equivalente, el significado de la proporcionalidad entre los brazos de las balanzas (como A es a B, entonces A 'es a B' y A ’’ a B ’’) se deja abierta, en el sentido de que la conjetura de Galileo podría resultar ser verdad o no.[60]

En conclusión, la conjetura implícita en el postulado de Galileo reemplaza la noción “oscura” de la semejanza *equimúltiple* de distribuciones de pesos con la semejanza visual Embebida en el modelo mental de balanzas semejantes (Fig. 5).

### 4. Pruebas de imagen: objeción constructivista de Clavius a Galileo

James Robert Brown, en su reciente libro sobre la filosofía de las matemáticas, Dedicó todo un capítulo a la cuestión de la validez de las pruebas matemáticas basadas en imágenes.

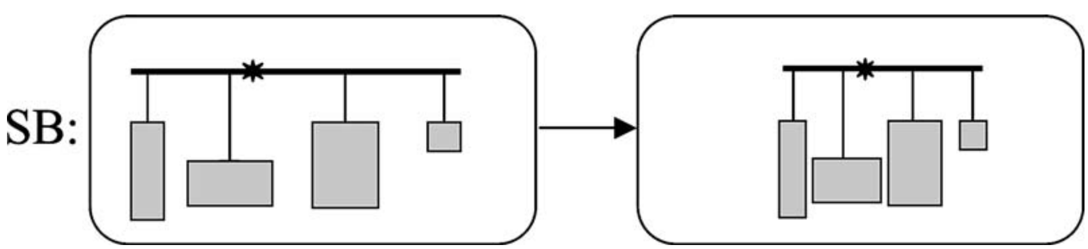



*Fig. 5. Los modelos mentales de equilibrios semejantes (SB). SB es una función cognitiva representacional no simbólica que toma un argumento no simbólico (una*

[60] Cabe señalar que no hay nada en la propuesta de Galileo que impida que uno busque una prueba de que la conjetura de Galileo es cierta (en el sentido de que uno podría demostrarlo demostrando que la proporcionalidad equimultiple se mantiene para los brazos de las balanzas). Pero, igualmente, no hay nada que garantice que la conjetura no es contradictoria.

*balanza con una determinada disposición de pesos) en un valor no simbólico (un equilibrio con una disposición de pesos semejantes).*

Según Brown, "aunque no es universal, la actitud predominante es que las imágenes no son más que dispositivos heurísticos; ellas son psicológicamente sugestivas y pedagógicamente importantes - pero no prueban nada".[61] En contra de esta tendencia filosófica "predominante", Brown afirma que quiere hacer un caso de validación de imágenes "como evidencia y justificación".[62] Galileo y Christoph Clavius debieron compartir una preocupación semejante, entre quienes surgió un desacuerdo sobre la legitimidad del papel de las imágenes en las pruebas.

La esencia del desacuerdo entre Clavius y Galileo con respecto a La Proposición 1 de esta última sobre centros de gravedad dependía del punto crucial de la aceptabilidad de la representación visual como un sustituto para la construcción proposicional. En este sentido me refiero a la objeción de Clavius como "constructivista". Mientras que Galileo implícitamente Invocó el uso de un modelo mental como un medio legítimo de prueba, Clavius insistió que las pruebas deben construirse proposicionalmente.

La Proposición 1 de Galileo sobre centros de gravedad establece que:

> *Si cualquier número de magnitudes exceden igualmente una a la otra, el exceso es igual a la menor de ellas, y están tan dispuestas en una balanza que cuelgan a igual distancia, el centro de gravedad de todos estos divide la balanza*

[61] Brown (1999), p. 25.
[62] Ibid.

*para que la parte en el lado de las [magnitudes] más pequeñas sea el doble de la otra parte.*[63]

Consideremos, pregunta Galileo, cualquier número de magnitudes F, G, H, K, N. Dejemos que cuelgue de la balanza AB a distancias iguales entre sí, luego el centro de gravedad X dividirá la balanza de tal manera que BX sea doble a XA (Fig. 6).

No necesitamos seguir los detalles de la prueba verbal de Galileo.[64] Los pasos intermedios de la demostración se basan en una elegante secuencia de transformaciones realizadas en el modelo mental (fig. 7). Los dos primeros son los siguientes: primera equivalencia: considerar todas las magnitudes llamadas N, entonces su centro de gravedad permanece intacto si se recogen para colgar de D. Segunda equivalencia: considere todas las magnitudes Llamados O, entonces su centro de gravedad permanece inalterado si se recolectan para que cuelguen de I. De la misma manera, uno puede considerar todas las magnitudes restantes y formar nuevos equilibrios correspondientes.

[63] Galilei (1974), pp. 261–262.
[64] El texto complete está en Galilei (1974), 2–263.

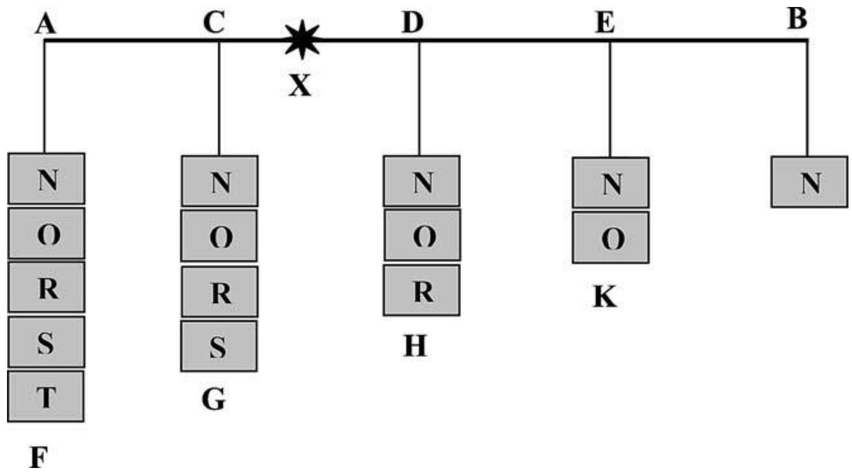



Fig. 6. El balance de la proposición 1 (adaptado de OGG, I, 188).

La situación resultante es la dada en la Fig. 8, donde tanto la balanza inicial como la obtenida después de todas las transformaciones que se han realizado se muestran.

Según Galileo, los equilibrios en la Fig. 8 las balanzas en las cuales pesos iguales están dispuestos de manera semejante. Sus centros de gravedad, por lo tanto, dividen las balanzas en las mismas razones, es decir, como BX es a XA, así AX 'es a X'D. Ya que Galileo ha demostrado fácilmente en un *Lema* anterior, que si la línea AB se biseca en D y se elige un punto X para que BX sea a XA como AX es a XD, entonces BX es el doble de XA, ahora puede concluir que X divide las balanzas de tal manera que BX es el doble de XA.[65] Pero la pregunta crucial es: ¿son X y X' el mismo punto? Según Galileo, son los mismos Puntos ya que en su modelo mental el equilibrio transformado no es más que el Equilibrio original visto de una manera diferente.

[65] Ver el Lemma en Galilei (1974), p. 261.

En enero de 1588, Clavius respondió la solicitud de Galileo de una opinión señalando que para no plantear la cuestión, era necesario demostrar que X y X' coinciden.[66] A finales de febrero, Galileo respondió que "del mismo compuesto, el punto de equilibrio es el mismo ", independientemente de la forma en que las partes del componente hayan sido consideradas.[67] Además, Galileo le envió a Clavius un nuevo dibujo enfatizando que las dos balanzas debían considerarse como una y la misma balanza. En un esfuerzo por aclarar su punto, Galileo volvió a dibujar la balanza original colocando todos los pesos contiguos entre sí y haciendo hincapié en que el punto de equilibrio del mismo compuesto no cambia cuando uno lo considera como si estuviese compuesto de cualquiera de las magnitudes o bien FGHKN o de las magnitudes NORST (Fig. 9).[68]

[66] '. . . El chequee ricerca d'essere dimostrato, altrimente mi pare quod petitur principium "(Galilei,1890–1909, X, pág. 24).
[67] '. . . del medesimo composto uno e `il punto dell'equilibrio '(Galilei, 1890–1909, X, p. 28).
[68] Ibid.

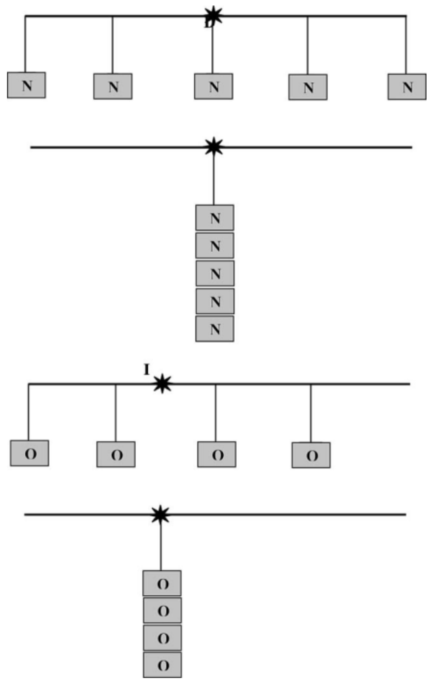



*Fig. 7. Las dos primeras transformaciones con magnitudes N y O.*

Unos días después, Clavius reiteró que al asumir que X y X 'coinciden, Galileo estaba en efecto planteando que como BX es a XA así AX es a XD. Clavius afirmó que, si se supone que el centro de gravedad de la balanza final es, por ejemplo, Y (en lugar de X '), entonces el razonamiento de Galileo llevaría a la conclusión de que como BX es a XA así AY es a YD. En este caso, la afirmación de Galileo de que BX es doble XA no se seguiría.[69] En otras palabras, Clavius objetó que la suposición de que ambos puntos coincidan es equivalente a la proporción que se debe probar (BX es a XA como AX es a XD). En esencia, para Clavius, la visibilidad de la coincidencia de los dos puntos no era inherente al diagrama de Galileo, y por lo tanto la prueba de Galileo fue inválida.

[69] Galilei (1890–1909), X, pp. 29–30.

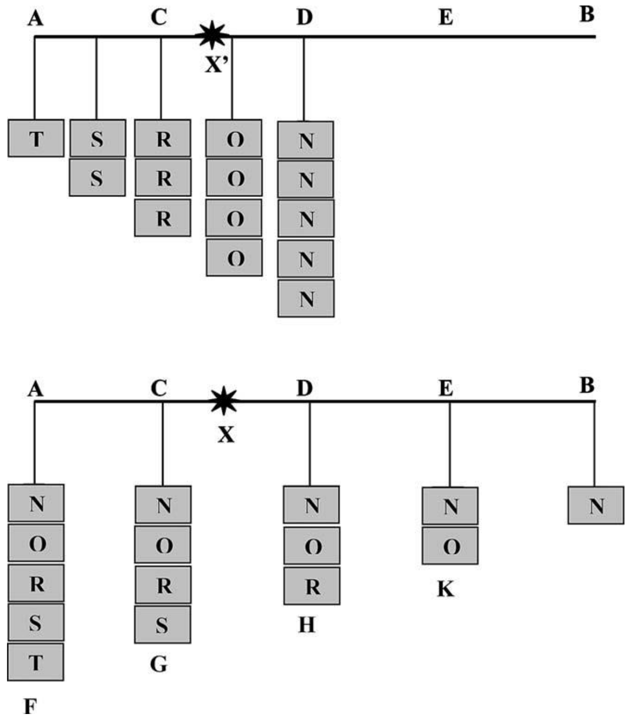



*Fig. 8. La situación final: la balanza transformada y la original.*

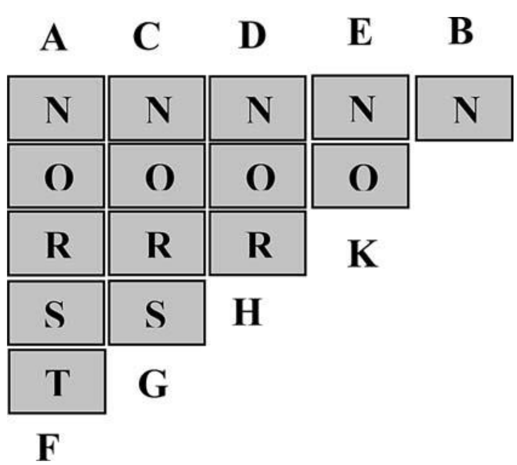



*Fig. 9. Todas las magnitudes contiguas entre sí (adaptadas de la respuesta de Galileo a Clavius).*

Clavius se opuso al reemplazo de Galileo de la construcción proposicional de la proporción: "como BX es a XA así AX es a XD" con un salto (exceso) de fe en la capacidad de su modelo mental para mostrar esa coincidencia mediante sucesivas transformaciones mentales (Fig. 10).

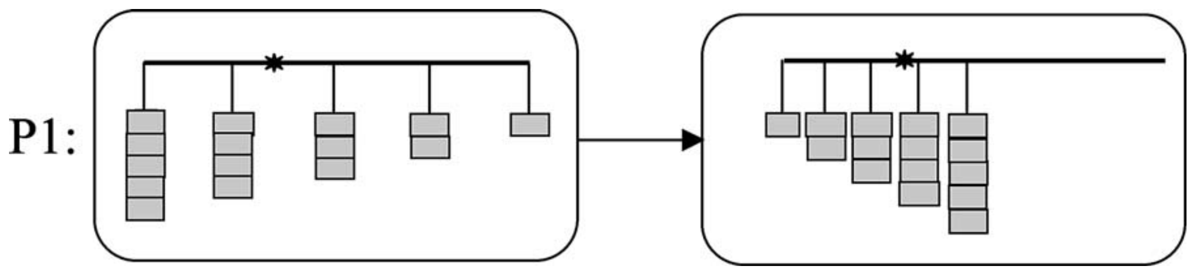



*Fig. 10. El modelo mental de balanzas semejantes utilizado por Galileo en la proposición 1 sobre centros de gravedad, P1. P1 es una función cognitiva representacional no simbólica que toma un argumento no simbólico (una balanza con una determinada disposición de pesos) en un valor no simbólico (una balanza con una disposición semejante de pesos).*

**5. Remodelación de Galileo del equilibrio arquimediano.**

Esta sección está dedicada a analizar cómo Galileo llegó a la proporcionalidad. Gobernando el equilibrio arquimediano mediante un modelo mental. En la parte final, sugiere que el teorema del plano inclinado de Pappus puede haber sido la fuente que inspiró el enfoque basado en modelos de Galileo para este problema.[70] El caso de las balanzas en equilibrio Es extremadamente interesante ya que deja al descubierto otro modo de

[70] Para conocer la importancia del modelo de equilibrio para los mecánicos de Galileo, véase Machamer (1998), Galluzzi (1979), especialmente pp. 261ff., Y Clavelin (1996), pp. 127ff.

funcionamiento de los modelos mentales de Galileo. Además, la prueba de Galileo del balance arquimediano es fundamental porque sustenta todas las otras proposiciones relativas a las maquinas simples de la *Mecánica* (ca. 1600), como la romana, la palanca, el molinete, el cabrestante, la polea, el tornillo y el tornillo de Arquímedes para elevar el agua.[71] En lugar de seguir los pasos de Arquímedes y demostrar la proporcionalidad de la balanza de Arquímedes (uno cuyos brazos son inversamente proporcionales a los pesos y por lo tanto está en equilibrio), Galileo invierte el procedimiento.[72] Veamos cómo.

Tanto en La M*ecánica* y *Dos nuevas ciencias*, Galileo observa un sólido cilíndrico en equilibrio y demuestra su equivalencia con la balanza arquimediana (Fig. 11a)[73]

Consideremos la figura. 11b, que representa un sólido cilíndrico colgante en equilibrio por dos hilos: CA y DB. La prueba que hizo Galileo sobre el equilibrio arquimediano se divide en dos partes. La primera consiste en una serie de transformaciones

---

[71] En 1960, Stillman Drake (en Galilei, 1960, p. 154, n.) Afirmó que "el ingenio (y falacia) de La demostración de Galileo ha sido suficientemente reconocida en otra parte ", refiriéndose a la crítica de Ernst Mach en La ciencia de la mecánica. Posteriormente cambió de opinión, ya que en Galilei (1974, p. 110, n.), refiriéndose a la misma prueba repetida por Galileo en Dos nuevas ciencias, afirmó que la prueba de Galileo es "mucho más fácil de seguir que la de Arquímedes". Sin embargo, Mach (1989), pp. 17ff., Refiriéndose a la prueba de Galileo, también habló de 'una hermosa presentación'. La crítica de Mach es demasiado conocida como para necesitar discusión. Ver una discusión en Goe (1972), Dijksterhuis (1987), págs. 289 y más, y el resumen de Wilbur Knorr del estado quaestionis en Dijksterhuis (1987), pp. 435ff.

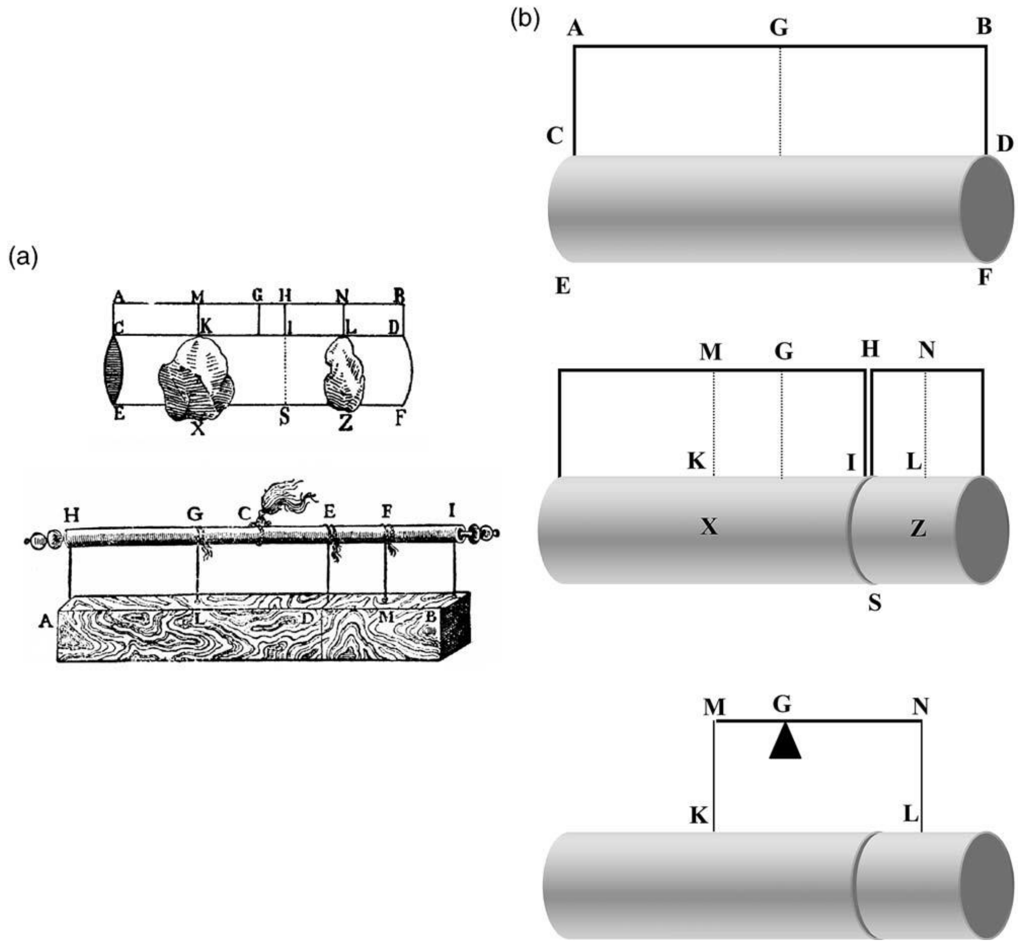
[72] Cf. Arquímedes: la ley del equilibrio en Arquímedes (1554), pág. 127, 'Magnitudines quae fuerint en gravitate commensurabiles, aequeponderabunt, si en distantiis quae secundum gravitatum proporcional

fuerint constitutae, permutatim suspendantur'*(Para magnitudes proporcionales a la gravedad de las cuales es fuerintin, æqueponderabunt, si él es en la relación de las distancias de los cuales son, según la gravedad, la voluntad que se han establecido, se han de suspender, alternativamente,).* La prueba de Arquímedes consta de dos teoremas. Vale la pena teniendo en cuenta que Galileo prueba la proposición inversa, es decir, si la balanza está en equilibrio, entonces los pesos son recíprocamente recíprocos según sus distancias desde el punto de apoyo.

[73] El resto son en Galileo (1890-1909, 2, pp. 149-191). Una traducción al Inglés para Galileo (1960,

pp. 135-186). Como es bien sabido, la Mecaniche es un texto problemático (Galileo no lo publicó). Ver los comentarios de Favaro en los manuscritos conservados de Galileo (1890-1909, 2, pp. 149-154), de Drake Introducción En Galileo (1960), y Galluzzi (1979, pp.179ff).

del sólido cilíndrico en equilibrio que lo llevan a reconocer la presencia de una balanza arquimediana dentro del propio sólido.




*La fig. 11. (a) Las figuras originales de la mecánica de Galileo (Ogg, 2, 161) y dos nuevas ciencias (Ogg,8, 153) que representa un cilíndrico sólido en equilibrio (arriba), y un paralelepípedo en una configuración semejante de equilibrio (abajo). (B) Anatomía del modelo mental de Galileo de un sólido cilíndrico en equilibrio.*

En este nivel de análisis, Galileo simplemente manipula El modelo mental. La segunda parte es una sencilla aplicación del razonamiento proporcional para probar la proporcionalidad inversa de brazos y pesos.

Galileo comienza considerando un sólido CDFE suspendido por los puntos C y D y asumiendo qué si uno es suspendido por el punto medio G, el equilibrio no se ve afectado. Posteriormente él se imagina cortando el sólido en dos partes desiguales, CS y SD y agregando una cuerda HI, para que una vez más el equilibrio no se vea afectado. Finalmente, Se imagina sólidos CS y SD suspendidos por los hilos MK y NL, donde K y L son los puntos medios de CI e ID (el último cilindro en la Fig. 11b). Ya que él ha obtenido la configuración final de la Fig. 11b sin alterar la condición de equilibrio ahora puede pasar a la segunda parte de la prueba y demostrar que los pesos de las partes cilíndricas están entre sí recíprocamente como sus distancias desde el punto de apoyo (MG, GN) .[74] Esta parte de la prueba es irrelevante para nuestros fines.[75] Todo lo que se necesita es el análisis de Galileo del cilindro de acuerdo con los pasos ilustrados en la Fig. 11b al inspeccionar mentalmente las tres etapas del modelo mental él es capaz de ver que tanto el cilindro

[74] Los detalles están en Galilei (1890–1909, II, pp. 162–163; 1960, pp. 153–154).

[75] Básicamente, Galileo muestra que dado que NG es GM, entonces MH es HN, es decir, AH es a HB. Entonces asume que los volúmenes de las porciones cilíndricas son entre sí como AH es para HB y que los pesos de Las porciones cilíndricas son como sus volúmenes. La parte geométrica de la última hipótesis se basa en la Proposición XIII, Libro XII, de *Elementos* de Euclides, lo que demuestra que las partes de un cilindro cortado por un plano paralelo a la bases del cilindro son los unos a los otros como sus ejes. Véase, por ejemplo, Clavius (1999, p. 526). Los La parte física de la hipótesis (los pesos son como volúmenes) es una hipótesis que Galileo cree que es evidente per se. En *De Motu* (ca. 1590), él había probado la última hipótesis por medio de la técnica de los equimultiplos. Ver Galilei (1890–1909, I, pp. 348 y siguientes). El por qué abandonó esa prueba no está del todo claro. Ver Palmieri (2001) para los problemas relacionados con el análisis de Galileo del peso en términos de la técnica equimúltiple.

original, como su transformación en una balanza, corresponden al mismo objeto. Pasamos ahora a la cuestión de la fuente que puede haber inspirado el enfoque de Galileo.

En 1598, Galileo dio una conferencia en la Universidad de Padua sobre las cuestiones mecánicas pseudo-aristotélicas.[76] No hay duda de que Galileo manifestó un interés de por vida en las *Preguntas mecánicas*.[77] Por otra parte, ha sido sugerido por los eruditos de Galileo que las Preguntas mecánicas influyeron en su mecánica.[78]

Según Antonio Favaro, Galileo tuvo en su biblioteca una edición de las Preguntas Mecánicas, que fue editada y comentada por Niccolo Leonico Tomeo, pero él podría también haber estudiado, por ejemplo, el popular parafraseo latino de Alessandro Piccolomini.[79] Un análisis reciente de las estadísticas de Galileo por J. De Groot sugiere que una característica que influencia el tratamiento temprano de Galileo del plano inclinado es el principio pseudo-Aristotélico, según el cual "para distancias cubiertas en el mismo tiempo por puntos a distintas distancias a lo largo de un radio móvil, la razón de lo

---

[76] Ver los rollos universitarios en Galilei (1890–1909) XIX, p. 120.

[77] Ver la discusión de 1593 de Galileo sobre el remo (uno de los problemas de las Preguntas mecánicas) en su Carta al veneciano, Giacomo Contarini (Galilei, 1890–1909, X, pág. 55), y su solución a la paradoja de la rota Aristotelis en Dos Nuevas Ciencias, en Galilei (1974, pp. 29 y s). Además, véase la correspondencia de Galileo. con monseñor Giovanni di Guevara sobre diversos aspectos de las Preguntas mecánicas, en Galilei (1890–1909, XIII, pp. 369, 377–378, 389–390; XIV, pp. 23, 34–35, 44; XVI, pp. 378–379, 390, 515–516) y Rose & Drake (1971) para la historia de ese texto en el Renacimiento. No está claro cómo los dibujos que acompañan el texto desarrollado. Guarino (1573, Dedicación), por ejemplo, dice ". . . toda la figura ch'io ho fatto delle dimostrationi, ho posto i caratteri citati dall'Autore; . . . figura, che sino a questi tempi, si sono desiderate nel testo greco. . ., Sugiriendo que el texto del que tradujo no tiene figuras Sin embargo, su afirmación es algo desconcertante, por la siguiente razón. Antonio guarino Era un ingeniero militar al servicio de Alfonso II d'Este, duque de Ferrara. Un griego del siglo xv El manuscrito de las Preguntas mecánicas se conserva en la Biblioteca Este, que contiene algunos diagramas. (Aristóteles, XV, 134v. – 155v.). Por lo tanto, o Guarino no usó el manuscrito de Este o se refiere a otras figuras Literarias sobre la importancia de los diagramas en las matemáticas y filosofía natural de la El renacimiento. Ver Rider (1993) y Roche (1993).

[78] Rose y Drake (1971), Micheli (1991) y De Groot (2000).

[79] Favaro (1886). Cf. Leonico Tomeo (1530) y Piccolomini (1547), que pasó por una segunda Edición en latín y una en italiano.

tangencial al movimiento centrípeto es proporcional”.[80] Sin embargo, tal principio no está presente en la comprensión de los comentaristas renacentistas de los pasajes relevantes de las *Preguntas mecánicas*. Tanto Leonico Tomeo como Piccolomini, por ejemplo, explican la Pregunta concerniente a ¿Por qué lo que está más alejado del centro y movido por la misma *potencia* se mueve de una manera más rápida? - que es la base del análisis de De Groot - al mostrar que Hay dos tipos de movimiento poseídos por lo que se mueve.[81] Ellos notan que los movimientos *praeter naturam* (es decir, hacia el centro) son mayores para lo que se mueve en un círculo más pequeño, mientras que los movimientos *naturales* (es decir, circunferenciales, para Leonico Tomeo, o tangencial, para Piccolomini) son mayores para lo que se mueve en un círculo mayor. Así, concluyen, lo que está más alejado del centro se ve menos obstaculizado por el movimiento *praeter naturam*.[82] En la proporcionalidad del principio de De Groot, esta diferencia Entre *naturalis* y *praeter naturam* simplemente desaparece. De hecho, Piccolomini utiliza esa proporcionalidad para mostrar que lo que está más lejos del centro debe moverse de manera natural más rápidamente. Él Afirma que, ya que la razón entre el movimiento *praeter naturam* y el movimiento *naturalis* debe ser la misma para los puntos que pertenecen a un radio de giro, entonces, según su definición de “más rápidamente”, cuanto más alejado esté el punto del centro más rápidamente se moverá porque el punto recorrerá una distancia mayor en el

[80] De Groot (2000), pp. 651, 655.
[81] Leonico Tomeo (1530), pp. 28ff., Y Piccolomini (1547), pp. 11v.ff.
[82] Piccolomini (1547), pp. 15v.ff.

mismo tiempo.[83] Tal dualidad de *naturalis* y *praeter naturam* no está en ninguna lugar del análisis temprano de Galileo sobre el plano inclinado.

Yo diría que algunos aspectos clave de la aplicación de Galileo del razonamiento proporcional a problemas mecánicos, especialmente el equilibrio arquimediano y el plano inclinado, han tenido una fuente más directa en el tratamiento de Pappus del plano inclinado.

La edición de Federico Commandino sobre las *Collectiones Mathematicae* de Pappus se publicó en 1588.[84] Galileo conoció muy bien el intento de Pappus de resolver el problema del Plano inclinado. En la *Mecaniche*, lo critica por haber cometido un error. (según Galileo) en el supuesto de que se requiere una fuerza para mover un peso en el plano horizontal y afirma que quiere abordar el mismo problema desde una perspectiva diferente.[85] Sin embargo, no estamos tan interesados en el enfoque diferente de Galileo, ahora bien entendido,[86] como en la explicación basada en el modelo de Pappus del Plano

[83] Piccolomini (1547), pp. 15v. ff. Esto es precisamente lo contrario de lo que De Groot (2000, p. 651) atribuye (quizás correctamente) al autor griego de las Preguntas mecánicas, es decir, que este último no considere los "movimientos a lo largo de los círculos" como "la base de su comparación de más rápido y más lento". Todavía para Piccolomini, a pesar de que los puntos 'tienen la misma proporción de naturales a preamer naturam movimientos, Cuanto más lejos esté el punto del centro, mayor será su movimiento natural y, por lo tanto, más rápido se moverá. Guarino (1573, comentario n. 7) parece interpretar este pasaje de una manera diferente y reconstruye la figura. acompañando la prueba de manera algo diferente de Aristóteles (XV, 138r.), que tiene una figura casi idéntica A la utilizada por Leonico Tomeo y Piccolomini. Por el significado de natural en los comentarios renacentistas. sobre las preguntas mecánicas, ver Micheli (1991), Altieri Biagi (1965, pp. 1–24).

[84] 76 Pappus (1588). Una segunda edición fue publicada en 1602.

[85] ' Pappo Alessandrino todavía intentó la presente especulación [sobre el plano inclinado] en el octavo libro de sus colecciones matemáticas; pero, en mi opinión, no ha tocado el propósito, y es deslumbrado en la suposición de que él hace, donde supuso, que el peso debe ser movido en el plano horizontal por una fuerza dada: lo cual es falso. . . . Es mejor buscarlo, dada la fuerza que mueve el peso hacia arriba una hay perpendicular., lo que debe ser la fuerza que lo mueve en el plano elevado: lo que intentaremos alcanzar con intensión diferente a la de Pappus. (Galilei, 1890–1909, II, p. 181).

[86] Cf. Galluzzi (1979), pp. 191ff., 215ff.

inclinado. Es esta explicación la que Galileo pudo haber elaborado y transformado en una estrategia más general que ya hemos visto en el trabajo de la anatomía del sólido cilíndrico en equilibrio. El problema de Pappus es este: Encontrar la potencia que adquiere un peso a lo largo de un plano inclinado dada la potencia que adquiere en el plano horizontal.[87] Lo que se requiere para que la prueba sea concluyente (de acuerdo con Pappus) es el reconocimiento de que el problema del plano inclinado es, en efecto, un problema arquimediano de equilibrio (fig. 12).[88]

Sea el peso A representado por una esfera en el plano inclinado. Sea el peso de la esfera el mismo que A y sea peso B al A, como EF lo es para FG. En esencia el razonamiento de Pappus se reduce a imaginar el peso B colocado en el punto G[89], de modo que se puede construir un equilibrio angular que esté en equilibrio alrededor del punto de apoyo L. Esto es Prácticamente un equilibrio arquimediano (fig. 13). En estas circunstancias, Pappus Concluye: la esfera no puede rodar hacia abajo en el plano, y permanece estable exactamente como si fuesen colocados en un plano horizontal.[90]

En resumen, precisamente como Pappus había visto un equilibrio arquimediano dentro de la esfera en equilibrio en el plano inclinado (como en la Fig. 12), Galileo vio un equilibrio arquimediano dentro del sólido cilíndrico en equilibrio. El procedimiento de

---

[87] ‘Dato pondere a data potentia ducto in plano horizonti parallelo, et altero plano inclinato, quod ad subjectum planum datum angulum efficiat, invenire potentiam, a qua pondus in plano inclinato ducatur’
(Pappus, 1588, p. 313r.).

[88] Pappus (1588), pp. 313r., V.

[89] ‘. . . Si pondera AB circa centra EG ponantur. . . '(Pappus, 1588, p. 313r.).

[90] Pappus (1588), p. 313r.

Pappus puede haber proporcionado un marco conceptual para la remodelación mental de Galileo del Equilibrio arquimediano (fig. 13).

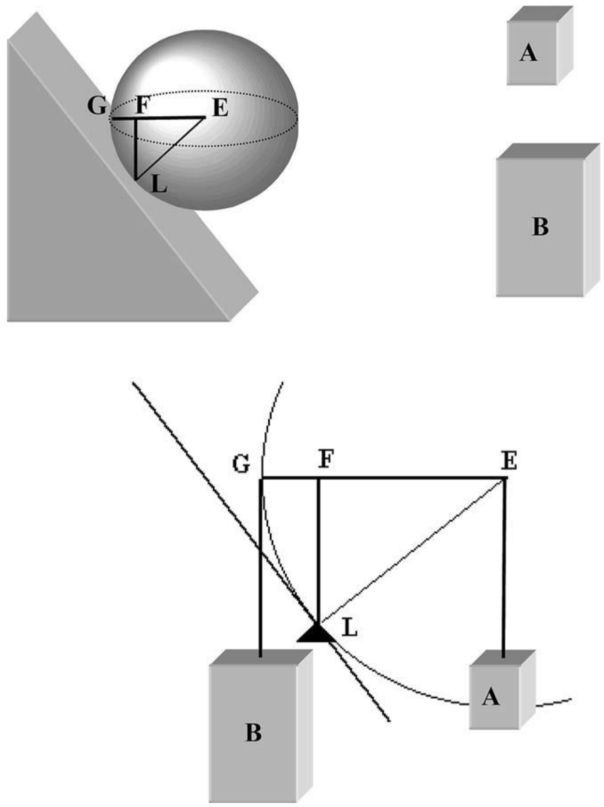



*Fig. 12. Arriba: construcción de Pappus para el problema del plano inclinado. LE es perpendicular al plano inclinado, GE es horizontal y FL vertical (adaptado de Pappus, 1588). Abajo: El equilibrio arquimediano del teorema de Pappus (mi visualización).*

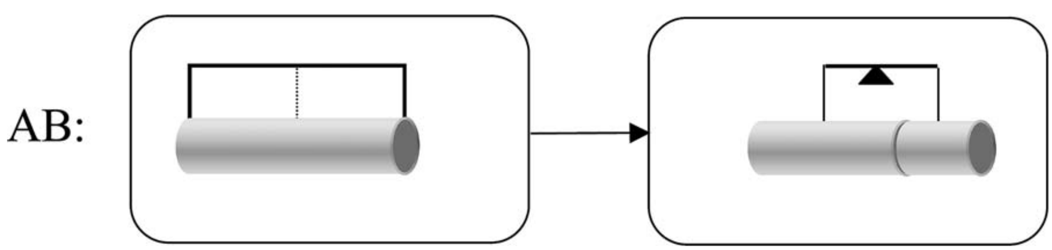


*Fig. 13. El modelo mental de equilibrio arquimediano, AB. AB es una función cognitiva representacional no simbólica que toma un argumento no simbólico (un cilindro en equilibrio) en un valor no simbólico (un balance en equilibrio).*

## 6. Conclusión: modelos mentales, experimentos de pensamiento y la historia de la ciencia

En esta sección final, a la luz de la teoría de los modelos mentales, deseo desarrollar una nueva perspectiva sobre la irritante pregunta historiográfica sobre el uso de Galileo de experimentos de pensamiento, y más en general sobre la importancia de un acercamiento cognitivo a la experimentación de pensamiento. En primer lugar, resumamos los resultados obtenidos en las Secciones anteriores. Después de presentar una introducción elemental a la investigación sobre modelos mentales y de discutir su aplicabilidad para, y potencial importancia en, la historia de la ciencia, yo he sugerido que algunos aspectos de la matematización de Galileo eran cognitivamente dependientes de modelos mentales no simbólicos. El kit de herramientas de deducción (parafernalia deductiva) de la teoría de proporciones de Euclides simplemente proporcionó la estructura simbólica de la matematización de Galileo. De hecho, fue el uso de modelos mentales que proporcionó la innovación que permite a Galileo romper la barrera de las tradiciones euclidianas y arquimedianas.[91] Christoph Clavius reconoció este cambio crucial y objetó fuertemente la

[91] Esto plantea una pregunta interesante. ¿Las funciones cognitivas no simbólicas representativas están presentes en Euclides y Arquímedes también? Aunque el caso no se puede discutir aquí, estoy convencido de que son de hecho, y que Galileo, en su innovación, pudo aprovechar los mismos recursos cognitivos básicos que son en la raíz de gran parte de las matemáticas griegas. Aquí sólo puedo proporcionar la siguiente pista: Netz (1999, pp. 12– 88) ha

manera de proceder de Galileo sobre los centros de gravedad. Pasemos ahora a la cuestión de la experimentación de pensamiento.

En un influyente ensayo, Alexandre Koyré presentó la tesis de que las primeras investigaciones *De Motu* de Galileo en realidad no se basaban en experimentos reales sino en experimentos de pensamiento.[92] Se ha dedicado mucho trabajo académico a esta pregunta, pero, en mi opinión, el tema que persigue el debate es la noción misma del experimento mental.[93] ¿Qué constituye un experimento de pensamiento? ¿Es un experimento del pensamiento solo una especie de actividad mental Imitando lo que podría pasar en una situación real? Koyré no especifica qué está entendiendo por experimento del pensamiento. Recientemente, se han proporcionado seis explicaciones diferentes relevantes para nuestros propósitos de en qué podría consistir en un experimento de pensamiento.[94] Muy brevemente voy a revisarlos.

1) James Robert Brown ha sugerido que los experimentos de pensamiento son difíciles de Definir con precisión, aunque podamos reconocerlos fácilmente. Un experimento mental puede ser destructivo, constructivo, o tanto destructivo como

---

discutido la práctica griega del diagrama con letras y la "pragmática de las letras", sugiriendo que el diagrama no era la representación de otra cosa sino una entidad en sí misma. Una mirada rápida a cómo Galileo puso letras a sus diagramas revela que hay patrones recurrentes de letras secuenciales que reflejan la forma en que se escriben las secuencias de sus pruebas verbales. Esto a su vez sugiere que el los diagramas pueden verse no solo como dispositivos auxiliares sino también como vestigios materiales de modelos no simbólicos, basados en modelos de razonamiento. ¿Podría la práctica griega del diagrama con letras confiarse en funciones cognitivas no simbólicas?

[92] El ensayo se publicó originalmente en 1960. Se ha reproducido en Koyre´ (1973, pp. 224–271).

[93] Budden (1998), Gendler (1998), McAllister (1996), Sorensen (1992), Brown (1991), Prudovsky (1989), Geymonat y Carugo (1981), y Kuhn (1977).

[94]Brown (1991), Norton (1991, 1996), Irvine (1991) y Laymon (1991). El modelo de Sorensen, según a lo que un experimento mental es simplemente un experimento que "pretende lograr su objetivo sin el beneficio de la ejecución ", es demasiado genérico para nuestros propósitos actuales (Sorensen, 1992, p. 205).

constructivo al mismo tiempo. Lo último es lo que Brown llama un "experimento de pensamiento platónico". Un experimento de pensamiento platónico tanto destruye una vieja teoría y proporciona evidencia de apoyo para una nueva teoría.[95]

2) Según John Norton, los experimentos de pensamiento son simplemente argumentos que a) postulan estados de cosas hipotéticas o contrafactuales, y b) invocan datos irrelevantes para la generalidad de una conclusión.[96]

3) Desde la perspectiva de Ronald Laymon, los experimentos de pensamiento a veces pueden entenderse como Límites ideales de la experimentación real. Un experimento de pensamiento de este tipo sería una situación imaginada, donde un presentador o una audiencia creen que ciertas leyes o principios científicos les permiten llegar a una cierta conclusión acerca de una descripción idealizada de algún estado de los asuntos.[97]

4) Para Andrew Irvine, los experimentos de pensamiento son simplemente <<Argumentos relativos a eventos particulares o estados de los asuntos de una naturaleza hipotética (y a menudo contrafactual) que lleva a conclusiones sobre la naturaleza del mundo que nos rodea>>.[98]

---

[95] Brown (1991), pp. 122–124.

[96] Los detalles irrelevantes para la generalidad de la conclusión son los que hacen que los "experimentos de pensamiento" semejante a un experimento (Norton, 1991, p. 130). Por ejemplo, un particular irrelevante en este sentido sería la Presencia imaginada de una audiencia. Estos datos deben ser eliminables, para que cualquier conclusión alcanzada mediante un buen experimento mental también se pueda acceder mediante un argumento que no contenga estos detalles. (Norton, 1991, pp. 129ff).

[97] Laymon (1991), pp. 167ff.

[98] Irvine (1991), p. 150.

5) De acuerdo con Tamar Gendler, “para esbozar una conclusión sobre la base de un experimento del pensamiento hay que hacer un juicio sobre lo que pasaría si el estado particular de los asuntos descritos en algún escenario imaginario en realidad se puede obtener”[99]. Por lo tanto, al “centrarse en escenarios imaginarios y hacer referencia a detalles, Los experimentos de pensamiento pueden proporcionar un punto de apoyo para la reorganización de los compromisos conceptuales; esto explica la forma en que nos pueden proporcionar información novedosa sin aportaciones empíricas”.[100]

6) En la visión de Nenad Miščević, los experimentos de pensamiento Son un tipo de razonamiento basado en modelos mentales. Según él, “Los modelos mentales” son un medio ideal para experimentos de pensamiento.[101] Su análisis se basa parcialmente en El concepto de modelo mental de Philip Johnson-Laird.[102]

Finalmente, sin especificar en qué consistiría un experimento de pensamiento, James McAllister ha sugerido que los experimentos de pensamiento *per se* no poseen ningún significado evidente, un carácter que ellos adquieren solo bajo ciertos supuestos. En el caso de Galileo, los experimentos de pensamiento serían evidentemente no inertes solo bajo el supuesto de lo que McAllister llama la “doctrina galileana de los fenómenos”, según el cual los sucesos naturales, como las caídas naturales, pueden reconocerse como ocurrencias del mismo tipo de fenómeno “caída libre”.[103] Bajo suposiciones alternativas

---

[99] Gendler (2000), p. 35. Gendler (2000, pp. 33–63) es una reimpresión de Gendler (1998).
[100] Gendler (2000), pp. 55–56.
[101] Miščević (1992), p. 221.
[102] Miščević (1992), pp. 220ff., Johnson-Laird (1983).
[103] McAllister (1996), p. 239.

tales como, por ejemplo, los de los aristotélicos, la experimentación del pensamiento sería 'evidentemente inerte'.[104]

McAllister, sin embargo, ha basado su conclusión de que los aristotélicos habrían rechazado la experimentación de pensamiento de Galileo en una problemática crítica dirigida contra Galileo por un solo filósofo aristotélico, por lo tanto, atribuyendo aparentemente a todo el aristotelismo el rechazo generalizado del modo de argumentación de Galileo.[105]

Ahora deseo exponer mi interpretación de un ejemplo bien conocido de los experimentos de pensamiento Galileano - la caída libre de cuerpos pesados- mientras discutían si se ajusta a las explicaciones propuestas hasta el momento. Posteriormente examinaré la evidencia relacionada con el argumento de McAllister.

Este experimento del pensamiento fue proporcionado por primera vez por Galileo en *De Motu* (ca. 1590), y casi cincuenta años más tarde se publicó en una versión modificada en “*Dos nuevas ciencias*”. En la primera parte de su argumento *De Motu*, el único representado en *Dos Nuevas Ciencias*, Galileo propone el siguiente contraargumento de la afirmación de Aristóteles de que los cuerpos más pesados caen más rápido que los más ligeros. Si nos imaginamos una pesada bola de cañón y una bola de mosquete que se

---

[104] McAllister (1996), p. 233.

[105] La evidencia que McAllister ha aducido se basa en Shea (1972), pág. 11, n. 10, que cita a Giorgio. Las afirmaciones de Coresio de haber repetido los experimentos de caída libre desde la torre inclinada de Pisa. Cf. Galilei (1890–1909), IV, p. 242. Sin embargo, lejos de rechazar el modo de argumentación de Galileo, el aristotélico Coresio presentó una magnífica demostración de contra-argumentación totalmente “conmensurable” con la de Galileo. Ver la discusión más detallada a continuación.

unieron entre sí, entonces tenemos un cuerpo más pesado que debería caer más rápido que la bola de mosquete o la bola de cañón. Sin embargo, al mismo tiempo, el cuerpo más pesado combinado debe ser más lento que la bola de cañón, ya que se desacelera por la bola más ligera actuando como una especie de resistencia. Por lo tanto, una contradicción destruye la posición aristotélica. En opinión de Miščević, Galileo está aquí basándose en modelos mentales. Para Miščević, Galileo construye dos modelos mentales separados, uno de los Cuerpo lentos y uno de los cuerpos rápidos. Luego trata de combinar los dos modelos, por lo que descubre que un modelo integrado es imposible.[106] Sin embargo, estoy de acuerdo con el punto de vista de Norton de esta parte del experimento de pensamiento a ser reducible a una prueba de reducción al absurdo, porque Galileo ya ha tenido la garantía de Simplicio aristotélico que si cuerpos diferentes están unidos entre sí, entonces la velocidad de caída del cuerpo combinado debe ser una intermedia.[107] En la segunda parte de su argumento Galileo plantea Una pregunta crucial para la relación experimento de pensamiento vs. modelo mental: imaginemos dos cuerpos idénticos próximos entre sí cayendo a la misma velocidad ¿Qué pasaría si se combinan para llegar a ser un solo cuerpo con el doble de tamaño de cada componente (fig. 14)?

Galileo pregunta, ¿por qué debería duplicarse la velocidad del cuerpo recién formado, como la teoría del movimiento de Aristóteles parece sugerir? [108] En la

[106] Miščević (1992), p. 222.
[107] Ver Galilei (1974), pp. 66 y siguientes, y Galilei (1960), pp. 28ff. El análisis más articulado de Norton sobre esto. el ejemplo está en Norton (1996), pp. 340–345.
[108] Galilei (1960), pp. 29–30.

terminología de Gendler, Galileo aquí estaría proponiendo un experimento de "pensamiento fáctico", que es uno que debería responder a la pregunta: "¿Qué pasaría?"[109] Pero, de hecho, Galileo no proporciona respuesta a esa pregunta, tenga en cuenta que al terminar su argumento con una pregunta retórica, Galileo parece admitir (al menos implícitamente) que no hay nada absurdo en pensar que una discontinuidad de la velocidad pueda ocurrir en el momento de la unión de los dos cuerpos el uno al otro.

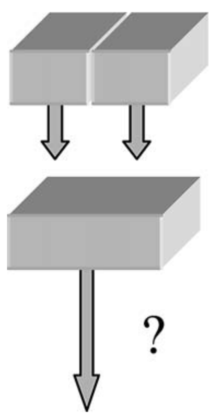



*Fig. 14. El modelo mental de caída libre (en aras de la claridad, he representado anacrónicamente velocidades con flechas). ¿Se duplica la velocidad del cuerpo unido?*

No olvidemos que a lo largo de *De Motu*, Galileo mismo está muy preocupado por numerosas preguntas de continuidad / discontinuidad.[110] Por lo tanto, deseo sugerir que

[109] Gendler (2000), p. xii.

[110] *De Motu*, de hecho, está dominado por preguntas de continuidad / discontinuidad en gran parte de la discusión de Galileo, él se basa en el movimiento dentro de un medio, especialmente en el problema de movimiento frente a descanso en la interfaz entre diferentes medios, como el aire y el agua. En uno de los ejemplos más fascinantes, en que intenta responder a la pregunta ¿qué sucedería?, Galileo imagina una viga y un chip hecho de la misma madera y flotando sobre el agua, luego imagina mentalmente disminuir el peso (específico) del medio. ¿Qué sucederá cuando el peso (específico) del agua sea menor que el de la madera? (Galilei, 1960, pp. 27ff., Y el original en latín 1890–1909, I, pp. 264ff., 348–349).

Galileo está aquí tratando de dar sentido a una situación física por medio de un modelo mental, que toma un argumento no simbólico (dos cuerpos idénticos se cierran entre sí cayendo a la misma velocidad) en un valor no simbólico (el cuerpo formado imaginando los dos cuerpos que caen finalmente siendo soldados juntos). Tenga en cuenta que Galileo no tiene una racionalidad simbólica para negar la posibilidad de una discontinuidad de velocidad ocurriendo en el momento de la unión de los dos cuerpos. Los modelos mentales (en el sentido definido en la Sección 2, Parte II) son funciones cognitivas demasiado básicas -y probablemente demasiado recientes en nuestra historia evolutiva- para permitirnos resolver problemas dinámicos a priori. Es de suponer que no evolucionamos intentando esquivar cuerpos caídos en la Sabana africana.

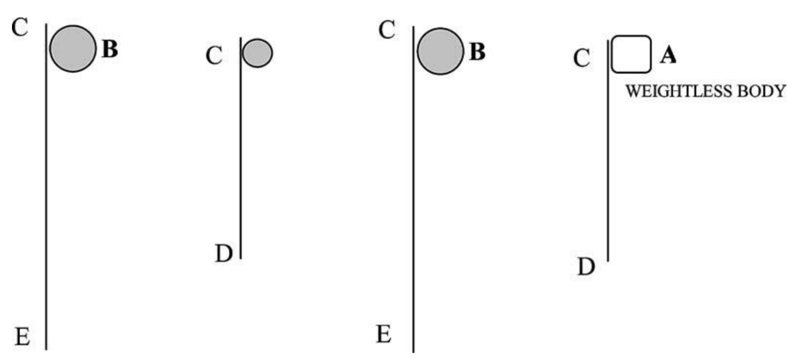
¿Qué sugiere este ejemplo y cómo se ajusta a las explicaciones teóricas examinadas anteriormente? no se puede negar la inventiva de la objeción de Galileo a Aristóteles. Pero, ¿pero es esta cualidad vaga suficiente para que el modelo mental califique como experimento de pensamiento? Yo creo que no. El cuerpo que cae no puede ser un experimento mental: a) en el sentido muy amplio de los experimentos de pensamiento platónico de Brown, ya que el acertijo de Galileo de continuidad / discontinuidad no es destructivo ni constructivo; b) en el sentido de Norton y de Irvine, ya que de ninguna manera es un argumento; c) en el sentido del límite ideal de Laymon, ya que es muy difícil encontrar lo que las “leyes y principios científicos” son aquello que una audiencia habría aceptado como una prueba de la afirmación de Galileo sobre la caída de cuerpos. Así, el experimento de pensamiento de Galileo hace uso de un modelo mental, pero no en la primera parte del argumento como Miščević ha sugerido.

Pasamos ahora a la evidencia escasa, pero reveladora que tenemos en relación con el argumento de McAllister sobre la recepción aristotélica del modo de argumentación de Galileo sobre la caída de los cuerpos. En primer lugar, el aristotélico (citado indirectamente en el argumento de McAllister) que en 1612 discutió algo de la primera crítica de Galileo a Aristóteles fue Giorgio Coresio, un profesor griego en la universidad de Pisa. Coresio no criticó los primeros *De Motu* de Galileo – en ese entonces aún no publicado– pero la opinión de Jacopo Mazzoni, la cual, Coresio reclamó, había sido compartida por Galileo a fines de los años 1580.[111] Coresio afirmó que Mazzoni, al referirse a *De Caelo*, 301 a – b, había argumentado que la experiencia contradice la postura de Aristóteles disputa según la cual uno podría dividir un cuerpo pesado como la razón de línea CE a línea CD, de modo que si todo el cuerpo se mueve a lo largo de la línea CE, entonces la parte Tendría que moverse a lo largo de la línea CD al mismo tiempo.[112] Coresio objetó que Mazzoni–Galileo había fallado en comprender la esencia del argumento de Aristóteles, que tenía como objetivo demostrar que ningún cuerpo de luz podría descender. Según Coresio, La interpretación correcta del argumento de Aristóteles es la siguiente.

[111] El argumento de Coresio se encuentra en su Opereta intorno al galleggiare de ’corpi solidi, reproducida en Galilei (1890–1909, IV, pp. 197–244). En la opereta de Coresio, ver De Ceglia (2000).

[112] Tenga en cuenta que esta experiencia no tiene nada que ver con la caída de cuerpos y la torre inclinada de Pisa, pero se refiere al comportamiento de los cuerpos dentro de un medio como el aire o el agua. (Mazzoni, 1597, pp. 192ff.)

Primero, suponga que lo pesado se mueve más rápido que lo no pesado (Fig. 15). Sea A un cuerpo ingrávido y B un cuerpo pesado. Segundo, supongamos que A se mueve a lo largo de CD y B a lo largo de CE, es decir, a lo largo de la ruta más rápida (como se ha supuesto). Ahora sea el cuerpo pesado, B, se divide como ya se ha estipulado. Si todo el cuerpo se mueve a lo largo de CE (la ruta más rápida) entonces la parte tendrá que moverse a lo largo de CD, a lo largo de la misma línea en la que el cuerpo ingrávido A se mueve. Así se moverán tanto los pesados como los ingrávidos al mismo tiempo, lo cual es imposible según el supuesto inicial.[113] Pero, Coresio insiste, para entender correctamente el argumento de Aristóteles en contra de la idea de que un cuerpo ligero posiblemente pueda descender, debemos atribuir a la noción de aristotélica de "pesado" en el contexto de *De Caelo*, 301 a – b, el significado de un mínimo de pesadez idealizado, es decir, de una pesadez que es menor que cualquier pesadez posible.




[113] Galilei (1890-1909), IV, pp. 240–241.

*Fig. 15. Reconstrucción de Coresio del argumento de Aristóteles. Para ayudar al lector he añadido provisionalmente. Las figuras, que no están en el texto de Coresio ni en las de Mazzoni.*

Coresio argumenta que si nosotros no Interpretamos *De Caelo*, 301 a – b, de esta manera, entonces es realmente posible llegar a una contradicción.[114] La implicación de Coresio parece ser que el argumento original de Aristóteles (según el cual, recordemos, uno podría dividir un cuerpo pesado como la razón de la línea CE a la línea CD, de modo que si todo el cuerpo se mueve a lo largo de la línea CE, entonces la parte se movería en el mismo tiempo a lo largo de CD) resulta ser correcta si asumimos que Aristóteles previó un cuerpo cuya pesadez es menor que cualquier pesadez posible. En este caso, la velocidad más pequeña posible corresponde al peso más pequeño posible, ningún cuerpo de luz descenderá jamás. Coresio parece implícitamente dispuesto a aceptar que hay un sentido de "pesado" que es *tanto* compatible con la proporcionalidad de Aristóteles en *De Caelo*, 301 a – b, *como* acorde con que todos los cuerpos pesados se podrían en el límite caer (o más bien dejar de caer) a la misma razón, una proposición que no viola el dictamen fundamental Aristotélico de que ningún cuerpo de luz puede descender.[115] Es claro que, en opinión de Coresio, la línea de razonamiento de Aristóteles en *De Caelo*, 301 a – b, debe entenderse

[114] Supongamos que la parte elegida del cuerpo pesado es tal que puede elegirse otra parte que es menos pesada. Ahora, ya que se ha concluido que tanto la parte como la ingravidez se mueven al mismo tiempo, luego se deduce que la ingravidez tendrá que moverse más rápido que cualquier parte más pequeña que la parte, y por lo tanto, el cuerpo ingrávido se moverá más rápido que el pesado, lo que está en contra de la estipulación inicial. que el cuerpo pesado se mueve más rápido que el ingrávido (Galilei, 1890–1909, IV, p. 241).

[115] El alumno de Galileo Benedetto Castelli compiló una lista de "errores" contenidos en la opereta de Coresio, pero significativamente no tenía nada que decir sobre el contraargumento de este último a la crítica de Mazzoni-Galileo de Aristóteles (Galilei, 1890–1909, IV, pp. 246–285).

*bajo* condiciones idealizadas, si verdaderamente consecuencias absurdas como la del descenso de los cuerpos de luz no se siguen. Aunque estoy de acuerdo con la opinión de McAllister de que las explicaciones teóricas dadas de lejos de los supuestos experimentos de pensamiento de Galileo no prueban que poseen evidencia intrínsecamente significativa, no veo nada sustancial en la argumentación circunstancial de Coresio contraria a la doctrina de los fenómenos naturales atribuida por McAllister a Galileo. Lo moral, creo, es claro. La cuestión de si el razonamiento de Galileo basado en modelos y la idealización de Coresio eran evidentemente inertes o no, no parece depender únicamente, como ha argumentado McAllister, de los diferentes supuestos atribuidos a Galileo y al aristotélico Coresio. Ambos desplegaron estrategias de razonamiento homogéneas y estaban bastante dispuestos a participar en modos de Argumentación que implicaban alguna forma de abstracción. Es cierto que en el análisis de Coresio no encontramos modelos mentales, sino una creencia fija de que el descenso de cuerpos ligeros es imposible. Es igualmente cierto que en *De Motu* encontramos razonamiento basado en modelos y posiblemente una creencia ya fijada de que todos los cuerpos pesados caen a la misma razón [116]. Sin embargo, La técnica lógica de Coresio de reductio ad absurdum es la misma adoptada por Galileo en la primera parte del argumento sobre la caída de los cuerpos. Sostendría que la pregunta de McAllister sobre, si los experimentos de pensamiento son evidentemente inertes, podría ser reformulado en términos de los procesos cognitivos subyacentes a la *fijación de creencias*.

[116] Es extremadamente difícil saber si antes de escribir *De Motu* Galileo ya había llegado al Conclusión de que todos los cuerpos pesados caen a la misma razón. Es posible que un estudio en profundidad de *Motu* revelará si a finales de la década de 1580 Galileo ya estaba en posesión de esa creencia fija o si *De Motu* refleja el proceso por el cual se logró la fijación de la creencia.

Esta es una pregunta muy difícil que concierne no tanto a los contenidos de las creencias fijas—tales como la imposibilidad del descenso de cuerpos de luz o la razón de caída igual de cuerpos pesados— sino a los mismos procesos subyacentes a la fijación de creencias, en el sentido Explicado por Jerry Fodor en su teoría de la modularidad de la mente.[117] ¿Cómo se fijan las creencias? Ninguna respuesta parece estar disponible en la actualidad. Además, si coincidimos con la conclusión de Fodor de que la fijación de creencias no es un fenómeno cognitivo superficial, sino uno profundo que ocurre a nivel de los llamados mecanismos *centrales* que funcionan difusamente a través de subsistemas modulares, y como tal, según él, más allá de la comprensión de la ciencia cognitiva de hoy, entonces esa pregunta podría resultar intratable.[118] Sin embargo, los modelos mentales, la idealización y, en general, los esquemas no simbólicos del razonamiento, especialmente cuando involucran procesos de visualización, parecen funcionar cognitivamente más profundamente que la lógica verbal y las reglas para la manipulación de símbolos.[119] Podrían, por lo tanto, jugar un papel decisivo en los procesos que subyacen a la fijación de creencias. En otras palabras, estoy convencido de que los conjuntos de supuestos poco conectados deben tener alguna relación con la fijación de creencias. La pregunta sigue siendo una de las futuras exploraciones profundas dinámicas subyacentes a los paquetes de suposiciones que enmarcaban las actitudes hacia El mundo natural de Galileo y el renacimiento aristotélico.

[117] Fodor (1983).
[118] Fodor (1983), pp. 101ff.
[119] Cummins (1995, p. 120) califica el uso de símbolos en los seres humanos como “un pedacito asombroso de cultura tecnológica”. La explicación completa de la representación mental dada en Cummins (1996) sugiere que los niveles más profundos de cognición se basan en esquemas no simbólicos de razonamiento.

Para ponerlo en pocas palabras, la pregunta sigue siendo la de perseguir un enfoque interdisciplinario a los procesos que rigen la fijación de creencias.

Para concluir, la historia cognitiva podría tener el potencial de sacar a la luz todo un espectro de casos en los que se han aplicado estructuras y mecanismos cognitivos Más o menos exitosamente durante el desarrollo científico de los últimos milenios. Además, sugiere un nuevo contexto para plantear preguntas sobre por qué ciertos mecanismos cognitivos parecen haber sido más o menos exitosos, tanto en diferentes casos individuales como en diferentes tradiciones históricas. Por un lado, si los humanos son dotados con un conjunto de herramientas cognitivas básicas evolucionado bajo ciertas circunstancias, entonces es probable que ciertas herramientas específicas se encuentren trabajando en muchas circunstancias diferentes. Por otro lado, los procesos como la fijación de creencias pueden depender en gran medida de la dinámica profunda subyacente a los sistemas difusos de supuestos. En el caso de Galileo, hemos visto que herramientas cognitivas específicas como los modelos mentales se aplicaron a la matematización del mundo natural. Si uno considera ciertos modelos mentales, u otras Formas de idealización, más o menos exitosas, evidentemente inertes o no, y según a qué criterios, en última instancia, puede ser irrelevante desde un punto de vista puramente histórico. Sin embargo, la historia cognitiva puede contribuir al estudio *tanto* de la evolución y estabilización de los mecanismos cognitivos *como* a las dinámicas de fijación subyacentes a los sistemas de creencias difusas, justo en la intersección de las áreas de interés de los historiadores, Filósofos y científicos cognitivos.

#### Reconomientos

Deseo agradecer al Dr. A. Gregory, al Dr. H. Chang, al Prof. N. Guicciardini, al Prof. P. Machamer, el Prof. J. Norton y dos evaluadores anónimos por sus comentarios estimulantes a versiones anteriores de este artículo.

#### Referencias

Los manuscritos Estense Library, Modena, MS 76 a. T. 9. 21, siglo XV, en griego. Entre otras obras de Aristóteles, contiene las preguntas mecánicas. Lo he citado como 'Aristóteles (XV)'.

#### Literatura impresa

Acerbi, F. (2000). Le fonti del mito platonico di Galileo. Preprint of the Dipartimento di Matematica, Universita` di Roma 'Tor Vergata', Rome. *Physis*, Forthcoming.

Altieri Biagi, M. L. (1965). *Galileo e la terminologia tecnico-scientifica*. Florence: Olschki.

Apelt, O. (Ed.). (1888). *Aristotelis de plantis, de mirabilibus auscultationibus, mechanica, de lineis insecabilibus, ventorum situs et nomina, de Melisso Xenophane Gorgia*. Leipzig: Teubner.

Archimedes (1544). *Archimedis syracusani philosophi ac geometrae excellentissimi Opera*. Basileae: Ioannes Hervagius.

Aristotle. (1982). *MHXANIKA. Tradizione manoscritta, testo critico e scolii* (M. E. Bottecchia, Ed.). Padova: Antenore.

Bonatti, L. (1994a). Propostional reasoning by model? *Psychological Review*, *101*, 725–733.

Bonatti, L. (1994b). Why should we abandon the mental logic hypothesis? *Cognition*, *50*, 17–39.

Brown, J. R. (1991). Thought experiments: A Platonic account. In T. Horovitz, & G. J. Massey (Eds.), *Thoughts experiments in science and philosophy* (pp. 119–128). Savage, Maryland: Rowman & Littlefield.

Brown, J. R. (1999). *Philosophy of mathematics. An introduction to the world of proofs and pictures*. London and New York: Routledge.

Budden, T. (1998). Galileo's ship thought experiment and relativity principles. *Endeavour*, *22*, 54–56.

Clavelin, M. (1996). *La philosophie naturelle de Galile´e*. Paris: Albin Michel. First published 1968.

Clavius, C. (1611–1612). *Christophori Clauii Bambergensis e Societate Iesu opera mathematica V tomis distributa. Ab auctore nunc denuo correcta et plurimis locis aucta* (5 vols.). Mainz: Sumptibus Antonij Hierat excudebat Reinhard Eltz.

Clavius, C. (1999). *Commentaria in Euclidis elementa geometrica*. Hildesheim: Olms-Weidmann. Facsimile edition of the commentary on Euclid in the first volume of Clavius 1611–1612.

Cummins, R. (1991). *Meaning and mental representation*. Cambridge, Massachusetts and London, England: The MIT Press.

Cummins, R. (1995). Connectionism and the rationale constraint on cognitive explanation. *Philosophical Perspectives*, *9*, 105–125.

Cummins, R. (1996). *Representations, targets, and attitudes*. Cambridge, Massachusetts and London, England: The MIT Press.

De Ceglia, F. P. (2000). Giorgio Coresio: Note in merito a un difensore dell'opinione di Aristotele. *Physis, 37*, 393–437.

De Gandt, F. (1995). *Force and geometry in Newton's Principia* (Curtis Wilson, Trans.). Princeton: Princeton University Press. 262 *P. Palmieri / Stud. Hist. Phil. Sci. 34 (2003) 229–264*

De Groot, J. (2000). Aspects of Aristotelian statics in Galileo's dynamics. *Studies in History and Philosophy of Science, 31A*, 645–664.

Del Monte, G. U. (1589). *In duos Archimedis aequeponderantium libros: Paraphrasis scholiis illustrata*. Pesaro: Apud Hieronymum Concordiam.

Di Girolamo, G. (1999). L' influenza Archimedea nei 'Theoremata' di Galilei. *Physis*, *36*, 21–54.

Dijksterhuis, E. J. (1987). *Archimedes*. Princeton: Princeton University Press. First published 1956.

Drake, S. (1970). *Galileo studies: Personality, tradition and revolution*. Ann Arbor: The University of Michigan Press.

Drake, S. (1973). Velocity and Eudoxian proportion theory. *Physis*, *15*, 49–64.

Drake, S. (1974a). Galileo's work on free fall in 1604. *Physis*, *16*, 309–322.

Drake, S. (1974b). Mathematics and discovery in Galileo's physics. *Historia Mathematica*, *1*, 129–150.

Drake, S. (1987). Euclid Book V from Eudoxus to Dedekind. *Cahiers d' histoire et de philosophie des sciences, n.s. 21*, 52–64. Reprinted in S. Drake (1999), *Essays on Galileo and the history and philosophy of science* (3 vols.) (III, pp. 61–75). Toronto: University of Toronto Press.

Euclid (1956). *The thirteen books of the Elements* (T. Heath, Trans. with an introduction and commentary) (2nd ed.) (3 vols.). New York: Dover Publications.

Favaro, A. (1886). La libreria di Galileo Galilei. *Bollettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, *19*, 219–290.

Fodor, J. (1983). *The modularity of mind*. Cambridge, Massachusetts and London, England: The MIT Press.

Galilei, G. (1890–1909). *Le opere di Galileo Galilei (Edizione nazionale)* (A. Favaro, Ed.) (20 vols.). Florence: Barbera.

Galilei, G. (1960). In S. Drake, & I. E. Drabkin (Eds.), *On motion and on mechanics*. Madison: The University of Wisconsin Press.

Galilei, G. (1974). In S. Drake (Ed.), *Two new sciences: Including centres of gravity and force of percussion*. Madison: The University of Wisconsin Press.

Galilei, G. (1990). In E. Giusti (Ed.), *Dicorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica ed i movimenti locali*. Turin: Einaudi.

Galluzzi, P. (1976). A proposito di un errore dei traduttori di Vitruvio nel ’500. *Annali dell’ Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze*, *1*, 71–88.

Galluzzi, P. (1979). *Momento: Studi galileiani*. Rome: Edizioni dell’ Ateneo & Bizzarri.

Gendler, T. S. (1998). Galileo and the indispensability of scientific thought experiment. *The British Journal for the Philsophy of Science*, *49*, 397–424.

Gendler, T. S. (2000). *Thought experiment: On the powers and limits of imaginary cases*. New York and London: Garland Publishing.

Geymonat, L., & Carugo, A. (1981). I cosiddetti esperimenti mentali nei Discorsi Galileiani e i loro legami con la tecnica. In L. Geymonat (Ed.), *Per Galileo* (pp. 81–98). Verona: Bertani Editore.

Giusti, E. (1986). Ricerche Galileiane: Il trattato ‘De motu equabili’ come modello della teoria delle proporzioni. *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, *6*, 89–108.

Giusti, E. (1992). La teoria galileiana delle proporzioni. In L. Conti (Ed.), *La matematizzazione dell’ universo* (pp. 207–222). Perugia: Edizioni Porziuncola.

Giusti, E. (1993). *Euclides reformatus: La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana*. Turin: Bollati-Boringhieri.

Giusti, E. (1994). Il filosofo geometra. Matematica e filosofia naturale in Galileo. *Nuncius*, *9*, 485–498.

Giusti, E. (2001). Los discursos sobre dos nuevas ciencias. In J. L. Montesinos (Ed.), *Galileo y la gestación de la ciencia moderna* (pp. 245–266). La Orotava, Canary Islands: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.

Glasgow, J., & Malton, A. (1999). A semantics for model-based spatial reasoning. In G. Rickheit, & C. Habel (Eds.), *Mental models in discourse processing and reasoning*. Amsterdam: Elsevier.

Goe, G. (1972). Archimedes’ theory of the lever and Mach’s critique. *Studies in History and Philosophy of Science*, *2*, 329–345.

Goldward, E., & Johnson-Laird, N. P. (2001). Naı¨ve causality: a mental model theory of causal meaning and reasoning. *Cognitive Science*, *25*, 565–610.



Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid’s *Elements*: How did he handle them? *Historia Mathematica*, *23*, 355–375.

Guarino, A. (1573). *Le mechanice d’ Aristotele trasportate di greco in volgare idioma: Con le sue dechiarationi nel fine, con l’ ordine de numeri de capitoli, in particolar volume da se*. Modena: Andrea Gadalino.

Irvine, A. D. (1991). On the nature of thought experiments in scientific reasoning. In T. Horovitz, & G.J. Massey (Eds.), *Thoughts experiments in science and philosophy* (pp. 149–166). Savage, Maryland: Rowman & Littlefield, Inc.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*. Cambridge: Cambridge University Press.

Johnson-Laird, P. N. (1996). Images, models and propositional representations. In M. de Vega (Ed.), *Models of visuo-spatial cognition* (pp. 90–127). Oxford and New York: Oxford University Press.

Johnson-Laird, N. P., & Byrne, R. (1991). *Deduction*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Johnson-Laird, N. P., & Byrne, R. (2000). Mental models website http://www.tcd.ie/Psychology/RuthFByrne/mentalFmodels/index.html.

Koyré, A. (1943). Galileo and Plato. *Journal of the History of Ideas*, *4*, 400–428.

Koyré, A. (1973). *É tudes d' histoire de la pensée scientifique*. Paris: Éditions Gallimard. First published 1966.

Koyré, A. (1978). *Galileo studies* (J. Mepham, trans.). Hassocks, Sussex: The Harvester Press Limited. First published 1939.

Kuhn, T. S. (1977). In A function for thought experiments. *The essential tension* (pp. 240–265). Chicago & London: The University of Chicago Press.

Laymon, R. (1991). Thought experiments of Stevin Mach and Gouy: Thought experiments as ideal limits and as semantic domains. In T. Horovitz, & G. J. Massey (Eds.), *Thoughts experiments in science and philosophy* (pp. 167–192). Savage, Maryland: Rowman & Littlefield, Inc.

Lennox, J. J. (1986). Aristotle, Galileo, and 'mixed sciences'. In W. Wallace (Ed.), *Reinterpreting Galileo* (pp. 29–52). Washington, DC: The Catholic University of America Press.

Leonico Tomeo, N. (1530). *Opuscula*. Paris: Apud Simonem Colinaeum.

Mach, E. (1989). *The science of mechanics* (6th ed.) (T. J. McKormach, Trans.). La Salle: Open Court.

Machamer, P. (1998). Galileo's machines, his experiments, and his mathematics. In P. Machamer (Ed.), *The Cambridge companion to Galileo* (pp. 53–79). Cambridge: Cambridge University Press.

Mazzoni, J. (1597). *In universam Platonis, et Aristotelis philosophiam praeludia, sive de comparatione Platonis, et Aristotelis*. Venice: Apud Ioannem Guerilium.

McAllister, J. W. (1996). The evidential significance of thought experiment in science. *Studies in History and Philosophy of Science*, *27*, 233–250.

Micheli, G. (1991). Le *Questioni meccaniche* e Galileo. In P. Casini (Ed.), *Alle origini della rivoluzione scientifica* (pp. 69–89). Rome: Istituto dell'Enciclopedia Italiana.

Millikan, R. G. (1984). *Language, thought, and other biological categories*. Cambridge, Massachusetts and London, England: The MIT Press.

Millikan, R. G. (1993). *White Queen psychology and other essays for Alice*. Cambridge, Massachusetts and London, England: The MIT Press.

Millikan, R. G. (2001). The language–thought partnership: A bird's eye view. *Language & Communication*, *21*, 157–166.

Miščević, N. (1992). Mental models and thought experiments. *International Studies in the Philosophy of Science*, *6*, 215–226.

Netz, Reviel (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Norton, J. (1991). Thought experiments in Einstein's work. In T. Horovitz, & G. J. Massey (Eds.), *Thoughts experiments in science and philosophy* (pp. 129–148). Savage, Maryland: Rowman & Littlefield, Inc.

Norton, J. (1996). Are thought experiments just what you thought? *Canadian Journal of Philosophy, 26*, 333–366.

Palladino, F. (1991). La teoria delle proporzioni nel Seicento. *Nuncius*, *6*, 33–81.

Palmieri, P. (2001). The obscurity of the equimultiples. Clavius' and Galileo's foundational studies of Euclid's theory of proportions. *Archive for History of Exact Sciences, 55*, 555–597.

Pappus (1588). *Federici Commandini mathematici celeberrimi exactissima commentaria in libros octo Mathematicarum Collectionum Pappi Alexandrini e graeco in latinum a se accuratissime conversos*. Pesaro: Apud Hieronimum Concordiam.

Piccolomini, A. (1547). *In mechanicas quaestiones Aristotelis, paraphrasis paulo quidem plenior*. Rome: Apud Antonium Bladum Asulanum.

Prudovsky, G. (1989). The confirmation of the superposition principle: On the role of a constructive thought experiment in Galileo's Discorsi. *Studies in History and Philsophy of Science*, *20*, 453–468.

Purnell, F. (1972). Jacopo Mazzoni and Galileo. *Physis*, *14*, 273–294.

Remmert, V. R. (1998). *Ariadnefa¨den im Wissenschaftslabyrinth: Stiudien zu Galilei: Historiographie – Mathematik – Wirkung*. Bern: Lang.

Richardson, J. T. E. (1999). *Imagery*. Hove, East Sussex: Psychology Press.

Rider, R. E. (1993). Early modern mathematics in print. In G. Mazzolini (Ed.), *Non-verbal communication in science prior to 1900* (pp. 91–113). Florence: Leo S. Olschki.

Roche, J. J. (1993). The semantics of graphics in mathematical natural philsophy. In G. Mazzolini (Ed.), *Non-verbal communication in science prior to 1900* (pp. 197–233). Florence: Leo S. Olschki.

Rose, P. L. (1975). *The Italian renaissance of mathematics. Studies on humanists and mathematicians from Petrarch to Galileo*. Gene`ve: Librarie Droz.

Rose, P. L., & Drake, S. (1971). The pseudo-Aristotelian *Questions of Mechanics* in Renaissance culture. *Studies in the Renaissance*, *18*, 65–104.

Saito, K. (1986). Compounded ratio in Euclid and Apollonius. *Historia Scientiarum, 31*, 25–59.

Sasaki, C. (1985). The acceptance of the theory of proportions in the sixteenth and seventeenth centuries. *Historia Scientarum*, *29*, 83–116.

Saito, K. (1993). Duplicate ratio in Book VI of Euclid's Elements. *Historia Scientiarum*, *50*, 115–135.

Schmitt, C. (1972). The faculty of arts at Pisa at the time of Galileo. *Physis*, *14*, 243–272.

Shea, W. R. (1972). *Galileo's intellectual revoution*. New York: Science History Publications.

Sorensen, T. A. (1992). *Thought experiments*. New York, Oxford: Oxford University Press.

Sylla, E. (1984). Compounding ratios: Bradwardine, Oresme, and the first edition of Newton's *Principia*. In E. Mendelsohn (Ed.), *Transformation and tradition in the sciences: Essays in honor of I. Bernard Cohen* (pp. 11–43). Cambridge, New York and Melbourne: Cambridge University Press.

Turner, Mark (2001). *Cognitive dimensions of social science*. Oxford and New York: Oxford University Press.

Van der Henst, J. B. (1999). The mental model theory of spatial reasoning re-examined: The role of relevance in premise order. *British Journal of Psychology, 90,* 73–84.

Ventrice, P. (1989). *La discussione sulle maree tra astronomia, meccanica e filosofia nella cultura venetopadovana del Cinquecento*. Venice: Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.

Wallace, W. (2000). Dialectics, experiments, and mathematics in Galileo. In P. Machamer, M. Pera, & A. Baltas (Eds.), *Scientific controversies* (pp. 100–124). New York and Oxford: Oxford University Press.

Wisan, W. (1974). The new science of motion: A study of Galileo's *De motu locali*. *Archive for History of Exact Sciences*, *13*, 102–306.

## 4.2 Anexo 2 Biografía de Galileo Galilei[120]

*"Este gran libro, el universo, solo puede ser entendido si se aprende y se comprende el lenguaje y el alfabeto con el que está escrito, es decir: el lenguaje de las matemáticas, triángulos, círculos y figuras geométricas, figuras sin las que sería humanamente imposible entender una sola palabra, sin ellas, deambularíamos por un oscuro laberinto"*

Galileo Galilei nació en Pisa Italia en 1564, hijo de Giulia Ammannati y Florentino Vicenzo Galilei, su nombre proviene de una tradición de la toscana que consistía en duplicar el apellido del hijo primogénito, su padre, más conocido como Vicenzo era un matemático, músico y compositor reconocido por retar las convenciones establecidas para la composición musical (las armónicas pitagóricas) para crear sonetos únicos en su elaboración y melodía, fue precisamente esa rebeldía, la de Vicenzo, la que más acérrimamente heredó Galileo, la que lo catapultaría a la fama, a su inmortalidad histórica pero también, la que lo condenaría en un mundo cerrado de pensamiento y reacio a ideas innovadoras capaces de revolucionar la concepción del mundo tal y como estaba establecido.

---

[120] Esta biografía de Galileo Galilei no es de autoría propia, ha sido tomada principalmente el discurso del documental de Leighton, M., & Wood, R. (2013). *la historia de los humanos 14 Galileo Galilei*. Publicado History Channel, y es nutrida con algunos aportes del texto de De Santillana (1960) y otros videos consultados que han sido referenciados en la bibliografía.

De niño Galileo estuvo a cargo de un monje Jesuita amigo de la familia llamado Jacobo Borhini, quién educó a Galileo en principios fundamentalmente religiosos, en 1581 Galileo ingresó a la universidad de Pisa para estudiar medicina, matemáticas y filosofía, sin embargo no terminó su carrera y se retiró en 1585 de la universidad, se enfocó en lo que más le apasionó, las matemáticas y se dice que en para los 19 años de edad ya había descubierto el isocronismo del péndulo y a los 22 años inventó la balanza hidrostática.

Aproximadamente por esa época se publicó la traducción completa al Latín de la obra de Arquímedes para la estática de los cuerpos, la cual Galileo como apasionado matemático leyó y estudió, esta obra incentivó ese espíritu de rebeldía heredado de su padre Vicenzo salió a flote para motivarlo a escribir sus propias teorías sobre el movimiento de los cuerpos. En el año de 1591 Galileo obtiene una cátedra en la universidad de Padua gracias a sus estudios sobre la gravedad y flotación, y en donde trabajó hasta 1610 aunque con un salario no muy bien remunerado.

Galileo era un seguidor de la obra de Copérnico que era opuesta a la de Aristóteles y la postura de la Iglesia, la cual proponía, que era la tierra la que giraba en torno al sol y no viceversa. Fue aproximadamente en el año de 1609 que apareció un invento novedoso, el catalejo, el cuál permitía al usuario ver a distancias algo lejanas; pronto, Galileo se interesó por este invento y se hizo con la descripción del mismo para crear sus propios catalejos, sabiendo que el senado quería hacerse con uno de estos artefactos, Galileo aprovechó la oportunidad para presentarse ante ellos y ofrecerles un catalejo diseñado por el mismo cuya eficiencia era muy superior, el senado aceptó y Galileo les entregó uno con nueve aumentos y el senado quedó satisfecho frente a los resultados del catalejo de Galileo, fue entonces que Galileo se animó a inventar uno muy poderoso, uno de 30 aumentos y el cual se preserva en el museo Galileo o antiguo instituto y museo de Storia della scienza en Florencia Italia, este artefacto fue bautizado como Telescopio y le abrió a Galileo las puertas del firmamento en 1610 año de su invento, gracias a él pudo corroborar con sus propios ojos lo que en su corazón sabía que era cierto, "Copérnico estaba en lo correcto", esto lo determinó al observar las cuatro lunas de Júpiter orbitando al gigantesco astro de nuestro sistema solar, y a su vez, al maravilloso planeta girar en torno al sol, además, pudo observar la superficie de la luna la cuál describió de la siguiente manera: *uno puede saber con la certeza que nos proporcionan los sentidos, que la luna, ciertamente no posee una superficie lisa y pulida, al contrario, es rugosa y desigual como la propia superficie de la tierra, está llena de grandes protuberancias, abismos profundos, suaves colinas y profundos valles*. Entonces, Galileo proclamó sus descubrimientos en su libro titulado "sidereus nuncius" (también conocido como mensajero sideral). Por lo anterior Galileo se hizo famoso, recibió un aumento de sueldo y fue nombrado como matemático del gran duque, acontecimiento que fue aprovechado por este para viajar a Roma y presentar sus descubrimientos a los monjes jesuitas, así como su gran invento, por lo que algunos monjes quedaron fascinados y Galileo regresó a Florencia con la alegría de su éxito.

Galileo, continuó trabajando en teorías revolucionarias, como la de átomos de fuego que eran capaces de atravesar a los cuerpos, y en la descripción de los cuerpos celestes que observaba en el firmamento con su telescopio, fue una de esas mismas descripciones la que lo llevó a atacar a Christoph Swagger diciendo *"hay personas que intentan privarme de mi gloria fingiendo no* *haber leído mis tratados”* ya que este último afirmó que el sol tiene manchas negras, manchas que Galileo ya había manifestado haber visto. Posterior a esto Galileo inició una serie de enfrentamientos en los que se veían envueltas creencias de la Iglesia, por lo que en 1615 fue requerido en Roma para que, por orden del papa, realizara correcciones en su documento coperniconiano en dónde afirmaba que el sol estaba estático y los planetas giraban en torno a él. Se dice que sus detractores alteraron el documento de la entrevista entre Galileo y el papa anexando que Galileo no podía sostener, enseñar ni defender la teoría copernicana en ninguna forma y guardaron dicho documento entre los registros del vaticano, para que, en un futuro, dicho documento se pudiese usar en contra de Galileo por desacato y herejía.

Pasado un tiempo se proclamó un nuevo papa quién se hizo llamar Urbano VIII un buen amigo de Galileo, por lo que éste se sintió con la libertad de continuar con su arremetida hacia los Aristotélicos, en el año de 1638 publicó su dialogo sobre los máximos sistemas del mundo, una disertación sobre todos los puntos que Galileo había querido presentarle al mundo, pero este generó la ira del papa ya que fue convencido de que Galileo se burlaba de él mediante un personaje presentado como un torpe que defendía ciertos argumentos, argumentos que habitualmente defendía el mismo papa; a causa de esto, Galileo fue solicitado por la santa inquisición, el texto falsificado fue sacado a relucir por algunos monjes jesuitas quienes esperaban la oportunidad para deshacerse de él; a pesar de que Galileo argumentó que ese documento no recogía los hechos entre su entrevista con el papa correctamente, fue humillado y amenazado por la Iglesia ya que los diálogos iban evidentemente en contra de la orden dada a él por el vaticano en el documento, entonces, Galileo se retractó de sus ideas para así evitar la pena de muerte por herejía *"mi error ha sido, lo confieso, la verdad, la ambición de gloria, la pura ignorancia y el descuido, y me confirmo en mi aseveración. No he sostenido ni sostengo, como verdadera la opinión que ha sido condenada, del movimiento de la tierra y la inmovilidad del sol, si me concedieran como deseo los medios y el tiempo para dar una clara demostración de ello, estoy listo para hacerlo"*. A pesar de eso se dio una sentencia severa y se prohibió la distribución de su libro: *"Yo, Galileo, hijo del finado Vincenzo Galilei Florentino, de 70 años de edad, he sido declarado por el santo oficio, culpable de ser sospechoso de reiterada y vehemente herejía, eso es como decir que he sostenido y creído que el sol era el centro inamovible del universo y que la tierra no era el centro y se mueve, con sincero corazón y una fe ciega, abjuro, maldigo y aborrezco los errores y herejías anteriormente mencionados"*. Por si fuera poco, y para completar las desgracias de Galileo, en la siguiente primavera su amada hija, la madre María Celeste, su soporte espiritual y con quien Galileo mantenía constante correspondencia, murió. Lejos de ser abatido, a sus 74 años de edad, Galileo lanza su libro "dos nuevas ciencias", donde aborda temas de su más apasionado interés, el movimiento, la mecánica y la filosofía de la ciencia. Se lanzó a la guerra contra Aristóteles con una de sus frases más recordadas entre los físicos *"cuando una fuerza es imprimida a un objeto, hará que dicho objeto mantenga un movimiento uniforme"* y hoy día permanece esta frase como uno de los pilares de la física.

En 1642 antes de completar su calculadora de satélites, con la que pretendía marcar las posiciones presentes y futuras de los cuerpos celestes murió Galileo, pero sus descubrimientos, sus teorías e inventos, han sido y serán inspiración de científicos. Tanta es la admiración y respeto que despierta en la comunidad científica, que en 1989 la agencia espacial NASA, lanzó la sonda espacial Galileo, en una misión para orbitar Júpiter y así poder estudiar el gigante de nuestro sistema solar y otros cuerpos celestes; en 2003 la sonda se quedó sin combustible y se dirigió a la atmosfera del planeta para evitar que ésta colisionara con Europa (uno de los satélites de Júpiter) y llegase a contaminarla con partículas terrestres. Galileo, impetuoso, rebelde, impertinente y apasionado científico, tu nombre inmortal vagará por siempre en la historia de la humanidad.

## 4.3 Anexo 3. Sentencia del Tribunal de la Inquisición, 22 de junio de 1633

"Visto, que tú, Galileo, hijo de Vincenzo Galilei, florentino, de setenta años de edad, fuiste denunciado en el año 1615 a este Santo Oficio, por sostener como verdadera la falsa doctrina que algunos enseñan de que el Sol es el centro del mundo y está inmóvil y la Tierra se mueve, y también con un movimiento diario; por tener discípulos a quienes enseñaste la misma doctrina; por mantener correspondencia con ciertos matemáticos de Alemania respecto de las mismas; por publicar ciertas cartas tituladas Sobre las manchas solares en las que desarrollaste la misma doctrina considerándola verdadera; y por oponerte a las objeciones de las Santas Escrituras que de cuando en cuando hablan contra tal doctrina, al glosar las dichas Escrituras de acuerdo con la significación que tú le das; y visto que luego se presentó la copia de un documento bajo la forma de una carta en que se dice que tú la escribiste a un ex discípulo tuyo y en la que hay diferentes proposiciones que siguen la doctrina de Copérnico y que contrarían al verdadero sentido y la autoridad de las Sagradas Escrituras.

Este Santo Tribunal, teniendo, pues, la intención de proceder contra el desorden y daño resultantes, que fueron en creciente detrimento de la santa fe, por mandato de Su Santidad y de los eminentísimos señores cardenales de esta suprema y universal Inquisición, los calificadores teológicos calificaron del modo siguiente las dos proposiciones referentes a la estabilidad del Sol y al movimiento de la Tierra:

La proposición de que el Sol es el centro del mundo y no se mueve de su lugar es absurda y falsa filosóficamente, y formalmente herética, porque contradice expresamente las Sagradas Escrituras.

La proposición de que la Tierra no es el centro del mundo y no está inmóvil, sino que se mueve, y también con un movimiento diario, es igualmente absurdo y falsa en cuanto filosofía, y desde el punto de vista de la verdad teológica, es, por lo menos, errónea en la fe. (...)

.... decimos, pronunciamos, sentenciamos y declaramos que tú, el dicho Galileo, en razón de las cuestiones aducidas en el juicio y de lo que confesaste antes, te has hecho, ante el juicio de este Santo Oficio, vehementemente sospechoso de herejía.

Te condenamos a la prisión formal de este Santo Oficio, durante el tiempo que nos parezca y, por vía de saludable penitencia, te mandamos que durante los tres años venideros repitas una vez a la semana los siete salmos de penitencia. Nos reservamos la libertad de moderar, conmutar o anular, en todo o en parte, los mencionados castigos y penas.”

## 4.4 Anexo 4. Abjuración de Galileo, 22 de junio de 1633

"Yo, Galileo Galilei, hijo del difunto Vincenzo Galilei, de Florencia, de setenta años de edad, siendo citado personalmente a juicio y arrodillado ante vosotros, los eminentes y reverendos cardenales, inquisidores generales de la República universal cristiana contra la depravación herética, teniendo ante mí los Sagrados Evangelios, que toco con mis propias manos, juro que siempre he creído y, con la ayuda de Dios, creeré en lo futuro, todos los artículos que la Sagrada Iglesia católica y apostólica de Roma sostiene, enseña y predica. Por haber recibido orden de este Santo Oficio de abandonar para siempre la opinión falsa que sostiene que el Sol es el centro e inmóvil, siendo prohibido el mantener, defender o enseñar de ningún modo dicha falsa doctrina; y puesto que después de habérseme indicado que dicha doctrina es repugnante a la Sagrada Escritura, he escrito y publicado un libro en el que trato de la misma y condenada doctrina y aduzco razones con gran fuerza en apoyo de la misma, sin dar ninguna solución; por eso he sido juzgado como sospechoso de herejía, esto es, que yo sostengo y creo que el Sol es el centro del mundo e inmóvil, y que la Tierra no es el centro y es móvil, deseo apartar de las mentes de vuestras eminencias y de todo católico cristiano esta vehemente sospecha, justamente abrigada contra mi; por eso, con un corazón sincero y fe verdadera, yo abjuro, maldigo y detesto los errores y herejías mencionados, y en general, todo error y sectarismo contrario a la Sagrada Iglesia; y juro que nunca más en el porvenir diré o afirmaré nada, verbalmente o por escrito, que pueda dar lugar a una sospecha similar contra mí; asimismo, si supiese de algún hereje o de alguien sospechoso de herejía, lo denunciaré a este Santo Oficio o al inquisidor y ordinario del lugar en que pueda encontrarme. Juro, además, y prometo que cumpliré y observaré fielmente todas las penitencias que me han sido o me sean impuestas por este Santo Oficio. Pero si sucediese que yo violase algunas de mis promesas dichas, juramentos y protestas (¡que Dios no quiera!), me someto a todas las penas y castigos que han sido decretados y promulgados por los sagrados cánones y otras constituciones generales y particulares contra delincuentes de este tipo. Así, con la ayuda de Dios y de sus Sagrados Evangelios, que toco con mis manos, yo, el antes nombrado Galileo Galilei, he abjurado, prometido y me he ligado a lo antes dicho; y en testimonio de ello, con mi propia mano he suscrito este presente escrito de mi abjuración, que he recitado palabra por palabra.

En Roma, en el convento de la Minerva, 22 de junio de 1633; yo, Galileo Galilei, he abjurado conforme se ha dicho antes por mi propia mano."