

TRISECCIÓN DE ÁNGULOS MEDIANTE CURVAS MECÁNICAS

ANGIE LORENA GARZÓN RODRÍGUEZ

CÓD.: 2009240023

DILZA JUDITH DUARTE

CÓD.: 2009240017

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

NOVIEMBRE DE 2014

TRISECCIÓN DE ÁNGULOS MEDIANTE CURVAS MECÁNICAS

ANGIE LORENA GARZÓN RODRÍGUEZ

CÓD.: 2009240023

DILZA JUDITH DUARTE

CÓD.: 2009240017

Asesor:

JUAN CARLOS ÁVILA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

NOVIEMBRE 2014

AGRADECIMIENTOS

A nuestras familias que han sido un apoyo incondicional en los proyectos que hemos decidido emprender.

A los docentes que han sabido orientarnos para la realización de este trabajo.

El apoyo incondicional de compañeros como lo son Marisol Rengifo, Sandra Gómez y Édgar Delgado que se hicieron evidentes en el estilo de este documento.

1. RESUMEN ANALÍTICO

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Trisección de ángulos mediante curvas mecánicas
Autor(es)	GARZÓN RODRÍGUEZ, Angie Lorena; DUARTE, Dilza Judith
Director	ÁVILA, Juan Carlos
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2014. 73 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas.
Palabras Claves	Trisección de un ángulo, curvas mecánicas, problemas clásicos de la geometría, construcciones con regla y compás.

2. Descripción
En este escrito se complementará el trabajo de grado de Rodriguez, Y. (2008) el cual expone la construcción de algunas curvas mecánicas y su respectivo uso para triseccionar ángulos. Específicamente el aporte del nuestro trabajo de grado consiste en la deducción de una de las ecuaciones de cada curva (polar, cartesiana o paramétrica) y la demostración de la trisección mencionada en la cual se hace uso de alguna curva mecánica.

3. Fuentes
<ul style="list-style-type: none">- Apostol, T. (1973). Cálculo. España: Reverté- Babini, J. (1966). Introducción. En Arquímedes, <i>El Método</i> (pág. 96). Buenos Aires: EUDEBA.- Blanco, C. (2003). La Atenas del siglo V. Los sofistas. <i>Revista de la facultad de educación de Albacete</i>. 18, 11-30. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1031816- Bombal, F. (2012). <i>La cuadratura del círculo: historia de una obsesión</i>. <i>Revista Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales</i>. 2 (105), 241-258. Recuperado de http://www.rac.es/ficheros/doc/01019.pdf- Gomes, F. (1905). Tratado de las curvas especiales notables. Madrid: Gaceta de Madrid. Recuperado de https://archive.org/stream/tratadodelascurv00gome#page/n5/mode/2up- Labarga, E. (2013). La teoría del centro mínimo de José Zaragoza y el teorema de Ceva. España: Universidad de la Rioja. Recuperado de http://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/TFE000324.pdf

- Mitchell, H. (2006). *Raíces de la sabiduría*. México: Thomson
- Morales, L. (2002). La cuadratura. *Revista de Ciencias Universidad Nacional Autónoma de México*. 65, 1-12. Recuperado de <http://www.revistas.unam.mx/index.php/cns/article/view/11812/11134>
- Morán, V. (2013). Implementación de algoritmos para la manipulación de curvas concoides en diseño geométrico. Universidad Politécnica de Madrid. Recuperado de http://oa.upm.es/21271/1/PFC_VALERIO_MORAN_COCO.pdf
- Olalquiaga, P., Olalquiaga, A. (2005). El libro de las curvas. España: Fundación Esteyco. Recuperado de http://www.esteycoenergia.es/ark_Doc/100930174709_El libro de las Curvas.pdf
- Pedreño, A. (2004). Ecuaciones lineales. Didáctica y perspectiva histórica. *Números* 57, 3-18. Recuperado de <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/57/Articulo01.pdf>
- Ruiz de la Rosa, J. (1987). Geometría Fabrorum: o la antítesis de las teorías sofisticadas. Boletín académico. 7, 52-59. Recuperado de http://ruc.udc.es/dspace/bitstream/2183/5149/1/ETSA_7-7.pdf
- Rodríguez, Y. (2008). Algunas curvas famosas: mecanismos y problemas asociados. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

4. Contenidos

El primer capítulo de este documento presenta una breve exposición sobre la imposibilidad de la trisección de ángulos usando regla y compás, justificado a partir del trabajo de Pierre Wantzel (1837) y algunas construcciones para trisecar ángulos especiales con ayuda de polígonos regulares. En el segundo capítulo se presenta métodos de trisección de ángulos mediante curvas mecánicas; para cada uno de tales método se muestra su respectiva construcción, la deducción de una de las ecuaciones (cartesiana, polar o paramétrica) de la respectiva curva mecánica y la demostración de la trisección de un ángulo. Por último se exponen algunas conclusiones resultados del estudio realizado.

5. Metodología

En primer lugar se hizo una consulta del método de Pierre Wantzel sobre la imposibilidad de la trisección de ángulos mediante regla y compás. Posteriormente se muestra un compendio que da cuenta de varios métodos para la trisección de algunos ángulos especiales mediante regla y compás; finalmente, se recopiló información sobre algunas curvas mecánicas que permiten resolver el problema de la trisección de ángulos, aportando con nuestro trabajo, la deducción de alguna de sus ecuaciones (cartesiana, polar o paramétrica) de tales curvas y la demostración de por qué estas trisecan cualquier ángulo.

6. Conclusiones

A partir del desarrollo de este trabajo nos fue posible conocer hechos que dieron lugar a diversos problemas de la geometría, como la cuadratura del círculo, duplicación del cubo y la trisección del ángulo términos, nociones y construcciones utilizados para abordar el problema de la trisección de ángulos mediante curvas mecánicas. Resaltamos entre estos asuntos, aquel método que utiliza polígonos regulares trisecar ángulos especiales, ; la demostración realizada por Wantzel sobre la imposibilidad de resolver este problema con regla y compás; la forma de abordar el problema a lo largo de la historia, conociendo diferentes curvas mecánicas que varios personajes propusieron para solucionarlo y cómo algunas de tales curvas, solucionan otros problemas (e.g. la trisectriz de Hipías que permite resolver la cuadratura del círculo, y con ello, la construcción de $\sqrt{\pi}$).

La elaboración de este estudio nos permitió observar que no son de fácil acceso las investigaciones realizadas o publicadas sobre los problemas clásicos de la geometría que involucran la trisección de ángulos mediante curvas mecánicas; los libros que abordan estos temas se han centrado sobre todo en la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo.

Para finalizar, consideramos que nuestro trabajo constituye una herramienta y fuente de consulta para quienes sientan interés por estudiar temas similares. Además de aportar un material bibliográfico para algunos espacios académicos de la Licenciatura en Matemáticas, como por ejemplo, Geometría Analítica.

Elaborado por:	GARZÓN RODRÍGUEZ, Angie Lorena; DUARTE, Dilza Judith		
Revisado por:	ÁVILA, Juan Carlos		

Fecha de elaboración del Resumen:	6	Noviembre	2014
--	---	-----------	------

TABLA DE CONTENIDO

1. RESUMEN ANALÍTICO	4
2. PRESENTACIÓN.....	9
2.1 INTRODUCCIÓN	9
2.2 JUSTIFICACIÓN	9
2.3 OBJETIVOS	10
2.3.1 Objetivo general:.....	10
2.3.2 Objetivos específicos:	10
2.4 METODOLOGÍA	10
3. CAPÍTULO I: ¿POR QUÉ NO ES POSIBLE TRISECAR UN ÁNGULO CON REGLA Y COMPÁS?.....	12
3.2 IMPOSIBILIDAD DE LA TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO	12
3.3 EL MÉTODO DE WANTZEL EN LA TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO.	22
3.4 TRISECCIÓN DE ÁNGULOS ESPECIALES CON REGLA Y COMPÁS	27
3.4.1 Trisección de un ángulo de 90°	28
3.4.2 Trisección de un ángulo de 72°	29
3.4.3 Trisección de un ángulo α/n donde n es el número de lados de un polígono.....	31
3.4.4 Trisección de ángulos de la forma $\alpha/2n$	34
4. CAPÍTULO II: CURVAS MECÁNICAS USADAS EN LA TRISECCIÓN DE ÁNGULOS	37
4.2 DEDUCCIONES GEOMÉTRICAS	37
4.2.1 La Trisectriz de Hipías.....	37
4.2.2 Caracol de Pascal.....	44
4.2.3 Cicloide de Ceva	48
4.2.4 Concoide de Nicomedes	52
4.2.5 Espiral de Durero.....	57
4.2.6 Hipérbola de Pappus	62
4.2.7 Trisectriz de Delanges	65
4.3 DEDUCCIONES GEOMÉTRICAS (ANALÍTICAS)	69
4.3.1 Espiral de Arquímedes	69
4.3.2 Trisectriz de Maclaurin	76
5. CONCLUSIONES	80

6. REFERENCIAS.....	81
---------------------	----

2. PRESENTACIÓN

2.1 INTRODUCCIÓN

En el marco del espacio académico de Geometría Analítica del Plan Curricular de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, se realizó un trabajo en el que se debía resolver, a partir de la construcción de una curva mecánica, uno de los problemas clásicos de la geometría: la trisección de ángulos.

En la indagación realizada se encontró el trabajo de Rodríguez, Y. (2008), en el que se presentan los pasos para construir curvas mecánicas que resuelven algunos problemas relacionados con la imposibilidad de construcción con regla y compás, entre estos, la trisección de ángulos. Dicho trabajo fue la base para la elaboración de nuestro estudio; Específicamente el aporte de nuestro trabajo de grado consiste en la deducción de una de las ecuaciones de cada curva (polar, cartesiana o paramétrica) y la demostración de la trisección mencionada en la cual se hace uso de alguna curva mecánica.

El presente documento se encuentra organizado de la siguiente manera: El primer capítulo de este documento presenta una breve exposición sobre la imposibilidad de la trisección de ángulos usando regla y compás, justificado a partir del trabajo de Pierre Wantzel (1837) y algunas construcciones para trisecar ángulos especiales con ayuda de polígonos regulares. En el segundo capítulo se presenta métodos de trisección de ángulos mediante curvas mecánicas; para cada uno de tales método se muestra su respectiva construcción, la deducción de una de las ecuaciones (cartesiana, polar o paramétrica) de la respectiva curva mecánica y la demostración de la trisección de un ángulo; vale la pena mencionar que tales deducciones y demostraciones son producciones propias (a excepción de la Espiral de Arquímedes). Por último se exponen algunas conclusiones resultados del estudio realizado.

2.2 JUSTIFICACIÓN

En la antigua Grecia se resolvían problemas de geometría a través del uso de regla y compás, utilizando los métodos expuestos en el libro *Elementos de Euclides*, tales como: encontrar el punto medio de un segmento, dividir un segmento en un número determinado de partes congruentes, bisecar un ángulo, construir ángulos congruentes, etc., por lo cual es natural pensar que si es posible dividir un segmento en el número de partes que se desee usando regla y compás, entonces, también lo es dividir un ángulo¹ cualquiera en un determinado número de partes congruentes, en particular, tres, esto es, trisecar un ángulo.

¹Unión de dos rayos que comparten un su punto extremo u origen.

Es sabido que el problema de la trisección no es posible resolverlo con regla y compás; un argumento de este hecho fue dado en 1837 por el matemático francés Pierre Wantzel quien demostró que la ecuación de tercer grado $4x^3 - 3x + l = 0$, donde l es la medida del ángulo que se quiere trisecar, no tiene todas las raíces construibles en general, razón por la cual es imposible la trisección de un ángulo. A pesar de que se haya demostrado que no es posible resolver este problema, a lo largo de la historia de las matemáticas han surgido otros mecanismos de solución, basados en curvas que se obtienen a partir de agregar movimiento a objetos de la geometría euclíadiana, esto es, las *curvas mecánicas*.

Bajo el conocimiento de la imposibilidad de la resolución de la trisección de un ángulo con regla y compás, y teniendo en cuenta el estudio que se ha realizado para la construcción de este trabajo, el interés de los matemáticos ha estado más centrado en los problemas de la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo (Gómez, 1905) por tanto, nos planteamos la opción de consultar acerca del problema de la trisección de un ángulo; esto, convencidas de que aporta a nuestra formación académica y profesional como futuras Licenciadas en Matemáticas.

2.3 OBJETIVOS

2.3.1 Objetivo general:

- Mostar algunas soluciones de la trisección de ángulos a través de análisis algebraicos y geométricos de diferentes curvas mecánicas.

2.3.2 Objetivos específicos:

- Exponer métodos, que usan polígonos regulares, para la trisección de algunos ángulos especiales.
- Demostrar que las curvas estudiadas solucionan el problema de la trisección de cualquier ángulo.
- Deducir una de las ecuaciones paramétricas, polares o cartesianas de las curvas estudiadas.
- Usar los métodos de Nicómedes e Hipías para construir π y $\sqrt[3]{2}$.

2.4 METODOLOGÍA

En primer lugar se hizo una consulta del método de Pierre Wantzel sobre la imposibilidad de la trisección de ángulos mediante regla y compás. Posteriormente se muestra un compendio que da cuenta de varios métodos para la trisección de algunos ángulos especiales mediante regla y compás; finalmente, se recopiló información sobre algunas curvas mecánicas que permiten resolver el problema de la trisección de ángulos, aportando

con nuestro trabajo, la deducción de alguna de sus ecuaciones (cartesiana, polar o paramétrica) de tales curvas y la demostración de por qué estas trisecan cualquier ángulo.

3. CAPÍTULO I: ¿POR QUÉ NO ES POSIBLE TRISECAR UN ÁNGULO CON REGLA Y COMPÁS?

En este capítulo inicialmente se muestra una breve descripción de cómo en la antigüedad, los matemáticos de la época abordaron el problema de la trisección de ángulos mediante una artefacto que crearon con regla y compás, evidenciando a través de ella, que de forma estática no es posible trisecar un ángulo, siendo necesario incluir movimiento a las construcciones geométricas. Luego se expone el método realizado por Pierre Wantzel (1837), demostrando analíticamente que las soluciones a ecuaciones de la forma $x_n^{2^n} + Px_n^{2^{n-1}} + Qx_n^{2^{n-2}} + \dots + S = 0$ son construibles con regla y compás. Seguido de esto se presenta la aplicación de este método, mostrando que es imposible trisecar un ángulo cualquiera, mediante regla y compás.

Para finalizar el capítulo, se exponen ejemplos de algunos ángulos especiales que se pueden trisecar con regla y compás a través de polígonos regulares, y a partir de ellos, trisecar los ángulos de la forma $\frac{\alpha}{2^n}$, donde α es un ángulo que se puede trisecar con regla y compás y n un número natural mayor que uno.

3.1 IMPOSIBILIDAD DE LA TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO

En la antigua Grecia se resolvían problemas de geometría, como dividir un segmento en un número determinado de partes iguales, bisecar un ángulo, construir polígonos regulares, entre otros, todos ellos basados en los *Elementos de Euclides*, en los cuales solo se permitía usar regla sin marcas y compás, condición que genera el surgimiento de los problemas clásicos, esto es, problemas que no se podían resolver mediante este método. Estos problemas son la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo y la trisección de un ángulo, razón por la cual se crearon diferentes instrumentos que permitieron dar solución a estos problemas, pero agregando movimiento a los objetos geométricos.

En el caso de la trisección de un ángulo, los matemáticos griegos crearon un artefacto en forma de L que guardaba ciertas proporciones como se muestra en la figura 1, donde $\overline{MN} \cong \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{CE}$ y DE es un arco de circunferencia con centro en C y radio CE . (Rochera, J. 2005)

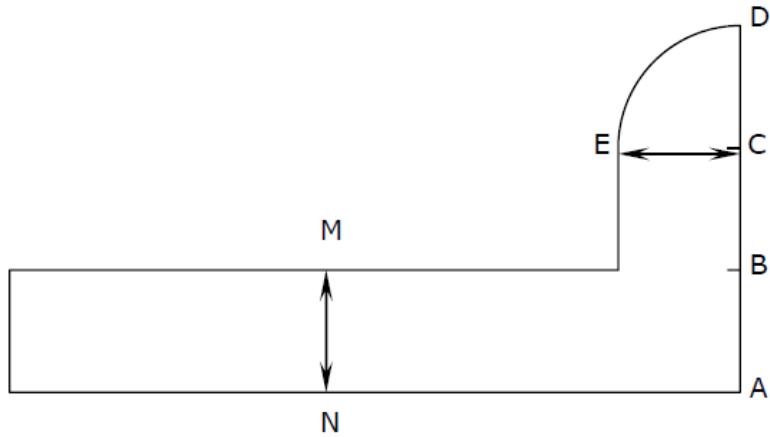


Figura1: Artefacto creado por los griegos para trisecar un ángulo

Se utilizaba de la siguiente manera:

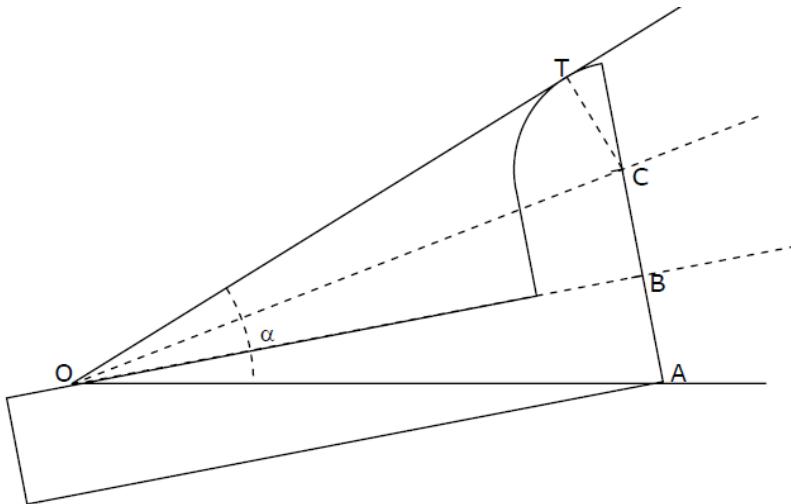


Figura2: Uso del artefacto para trisecar ángulos

Para trisecar el $\angle TOA$ (figura 2) uno de sus lados debe contener el punto A y el otro debe ser tangente al \widehat{DE} en el punto T , el punto O debe quedar ubicado en la parte superior del instrumento como lo muestra la figura 2. De esta manera los \overline{OB} y \overline{OC} trisecan el $\angle TOA$ ya que los triángulos rectángulos OBA , OBC son congruentes pues $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, los $\angle OBA$, $\angle OBC$ son rectos y el \overline{OB} es común a los dos; igualmente los triángulos rectángulos OBC y OTC son congruentes ya que $\overline{CT} \cong \overline{BC}$, por ser \overline{CT} radio de la circunferencia con centro en C y radio CE , los $\angle OBC$, $\angle OTC$ son rectos y el \overline{OC} , es común a los dos, entonces el $\Delta OBA \cong \Delta OTC$.

Aunque este instrumento les permitió a los griegos trisecar un ángulo, no fue aceptado en cuanto era una solución técnica que requería movimiento, por lo que continuaron realizando diferentes procedimientos con el objetivo de solucionar este problema mediante

el uso de regla y compás, pero solo obtuvieron aproximaciones. Es así como diversos matemáticos, pusieron sus esfuerzos en solucionar este tipo de problemas, hasta que en 1837 el matemático francés Pierre Wantzel demostró la imposibilidad de solucionar los problemas clásicos de la geometría con regla y compás, mostrando que estos no cumplían las siguientes condiciones. En primer lugar, las construcciones debían ser resultado de:

- 1) Intersección de dos rectas
- 2) Intersección de una recta y una circunferencia
- 3) Intersección de dos circunferencias

Todas estas, en un número finito de pasos.

Al estudiar (desde un punto de vista analítico) tales casos se tiene:

- 1) **Intersección de dos rectas:** Dadas dos rectas cuyas ecuaciones son $y = ax + by$ $y = cx + d$, al igualarlas se obtiene el punto de intersección (x, y) representados por $\left(-\frac{b-d}{a-c}, \frac{ad-bc}{a-c}\right)$.
- 2) **Intersección de una recta y una circunferencia:** Dada una recta y una circunferencia con ecuaciones $y = ax + b$ y $(y - h)^2 + (x - k)^2 = r^2$ respectivamente, al sustituir y por $ax + b$ en la ecuación de la circunferencia, se obtiene:

$$(ax + b - h)^2 + (x - k)^2 = r^2$$

es decir, una ecuación de segundo grado de la forma

$$x^2 + Ax + B = 0$$

$$\text{donde } A = \frac{2ab - 2ah - 2k}{a^2 + 1} \quad \text{y} \quad B = \frac{b^2 - 2bh + h^2 - k^2 - r^2}{a^2 + 1}$$

- 3) **Intersección de dos circunferencias:** Dadas dos circunferencias con ecuaciones

$$(y - h)^2 + (x - k)^2 = r^2 \quad (1)$$

$$(y - p)^2 + (x - q)^2 = s^2 \quad (2)$$

Al resolver las ecuaciones (1) y (2) e igualando se obtiene:

$$2x(q - k) + 2y(p - h) + h^2 - p^2 + k^2 - q^2 + s^2 - r^2 = 0$$

Es decir una ecuación de primer grado de la forma $Ax + B = y$.

$$\text{Donde } A = \frac{k - q}{p - h} \quad \text{y} \quad B = \frac{p^2 - h^2 - k^2 + q^2 - s^2 + r^2}{2(p - h)}$$

Al encontrar las soluciones de dos cualesquiera de las ecuaciones resultantes en los tres casos anteriores, se obtiene o una ecuación de primer grado o una de segundo grado de la

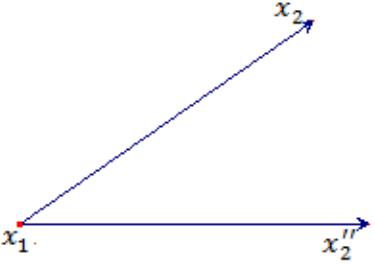
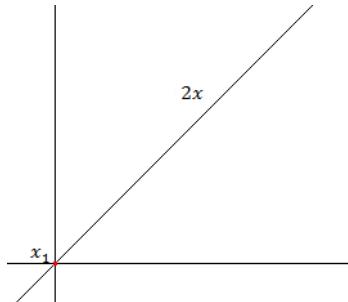
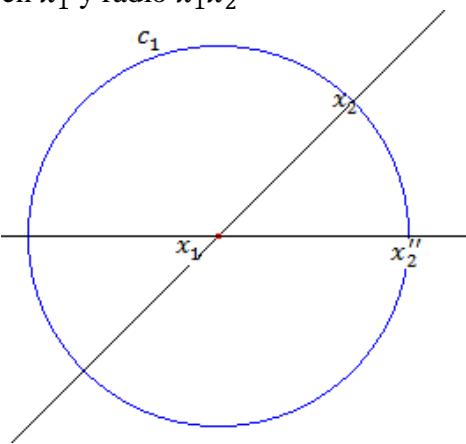
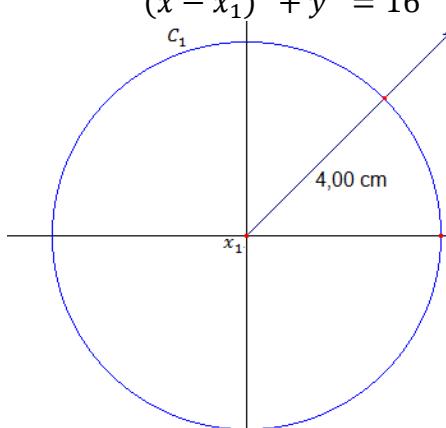
forma $x^2 + Ax + B = 0$, cuyos coeficientes A y B resultan de las construcciones realizadas previamente y son funciones racionales.

A continuación se presentan dos problemas que se pueden resolver con regla y compás con su respectiva solución, que ayudan a entender el método de Wantzel, el cual se muestra posteriormente.

Problema 1: Bisectar el ángulo que forma los rayos:

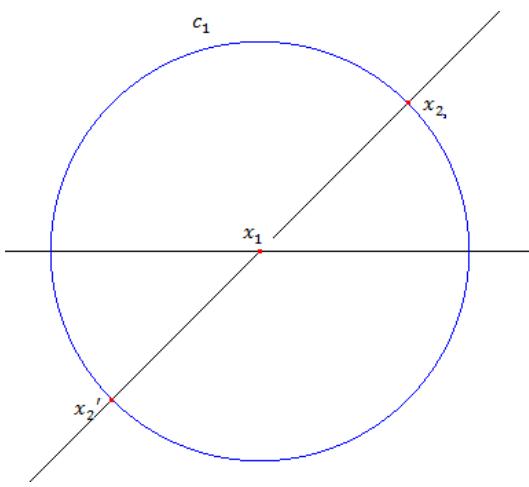
$$\{(x, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: x \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: x \geq 0 \wedge y = 2x\}$$

Para hallar la bisectriz de un ángulo cualquiera con regla y compás se realiza lo siguiente

Solución con regla y compás	Solución desde el método de Wantzel
<p>Dado el $\angle x_2 x_1 x_2''$</p> 	<p>Sean las rectas² con ecuaciones $y = 0$ y $y = 2x$ que se intersecan en el punto $x_1 = (0,0)$, siendo $x_1 = 0$ y $y_1 = 0$</p> 
<p>se traza la circunferencia c_1 con centro en x_1 y radio $x_1 x_2$</p> 	<p>Sea la circunferencia C_1 con centro en $(x_1, 0)$ y radio arbitrario 4, cuya ecuación es:</p> $(x - x_1)^2 + y^2 = 16 \quad [1]$ 

²Estas rectas contienen a los lados del ángulo dado.

Se traza $\overleftrightarrow{x_1x_2}$, donde
 $\overleftrightarrow{x_1x_2} \cap c_1 = \{x_2'\}$



Al intersecar la recta $y = 2x$ con c_1 , se obtiene:

$$5x^2 - 2x_1x + (x_1^2 - 16) = 0$$

$$\text{Si } A_1 = -\frac{2}{5}x_1 \text{ y } B_1 = \frac{x_1^2 - 16}{5}$$

La anterior ecuación puede escribirse como:

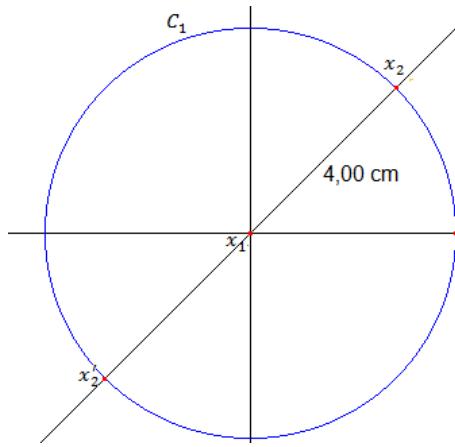
$$x^2 + A_1x + B_1 = 0 \quad [2]$$

Al resolver [2], se obtienen las soluciones x_2 y x_2' , las cuales tiene el siguiente sistema

$$x_2^2 + A_1x_2 + B_1 = 0$$

$$(x_2')^2 + A_1x_2' + B_1 = 0$$

De la cual se tomará la solución x_2



Se traza $\overleftrightarrow{x_1x_2''}$, donde
 $\overleftrightarrow{x_1x_2''} \cap c_1 = \{x_2''\}$ y $\{x_2'''\}$

Al intersecar $y = 0$ y [1], se obtiene

$$x^2 - (2x_1)x + (x_1^2 - 16) = 0$$

$$\text{si } A'_1 = -2x_1 \text{ y } B'_1 = x_1^2 - 16$$

la anterior ecuación queda de la forma

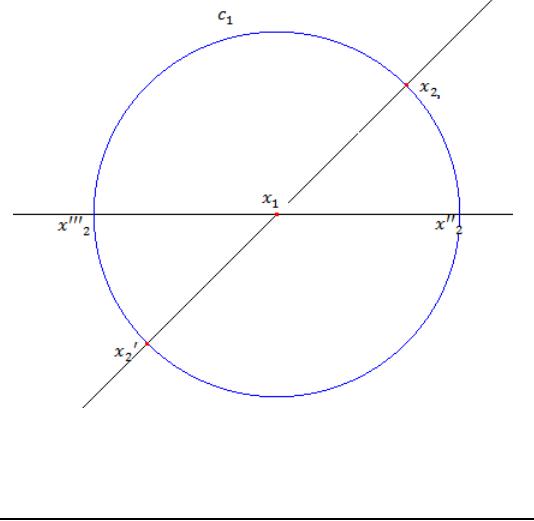
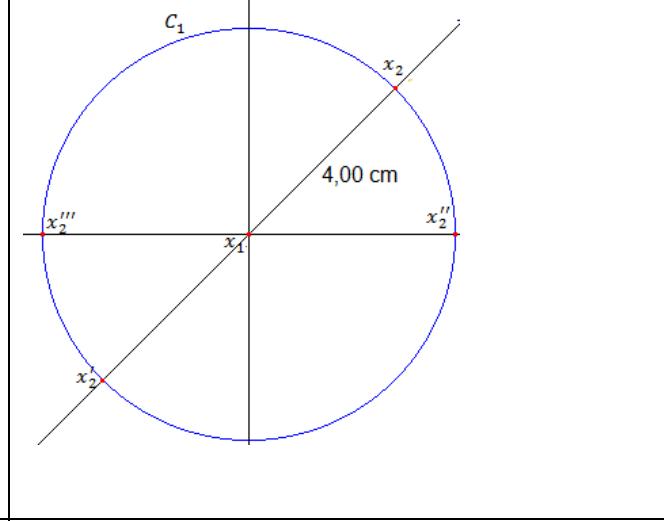
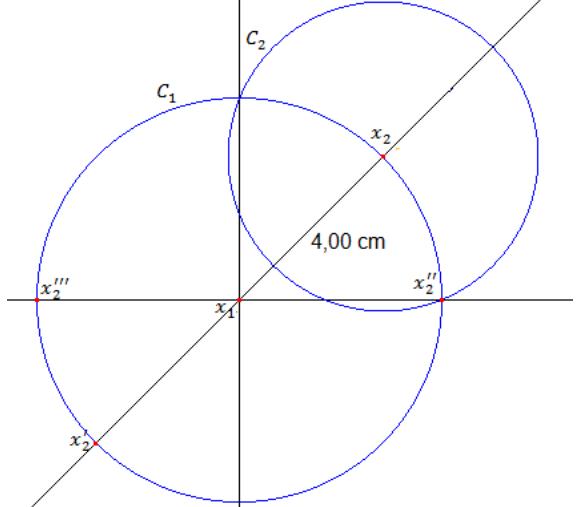
$$x^2 + A'_1x + B'_1 = 0 \quad [3]$$

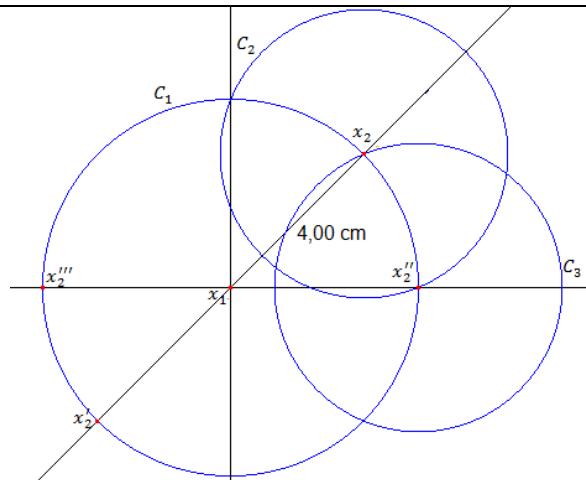
Al resolver [3], se obtienen las soluciones x_2'' y x_2''' , las cuales tiene el siguiente sistema

$$(x_2'')^2 + A'_1(x_2'') + B'_1 = 0$$

$$(x_2''')^2 + A'_1(x_2''') + B'_1 = 0$$

De la cual se tomará la solución x_2''

	
<p>se traza la circunferencia C_2 con centro en x_2 y radio x_2x_2''</p>	<p>sea la circunferencia C_2 con centro en $(x_2, 2x_2)$ y que pase por el punto $(x_2'', 0)$, cuya ecuación es:</p> $(x - x_2)^2 + (y - 2x_2)^2 = (x_2 - x_2'')^2 + 4x_2^2$ 
<p>sea la circunferencia C_3 con centro en x_2'' y radio x_2x_2'',</p>	<p>Sea la circunferencia C_3 con centro en $(x_2'', 0)$ y que pase por el punto $(x_2, 2x_2)$, cuya ecuación es:</p> $(x - x_2'')^2 + y^2 = (x_2 - x_2'')^2 + 4x_2^2$



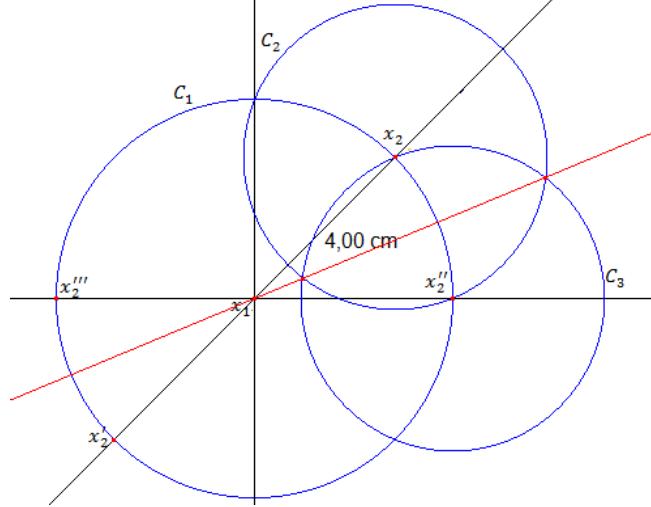
Sean s y j los puntos de intersección de C_2 y C_3 . Sea l la recta que pasa por los puntos s y j , la cual es la bisectriz del $\angle x_2 x_1 x_2''$

Al intersecar C_2 con C_3 se obtiene la ecuación:

$$(2x_2'' - 2x_2)x + (x_2^2 + 4x_2^2 - (x_2'')^2) = 4x_2y$$
Si $A_2 = \frac{x_2'' - x_2}{2x_2}$ y $B_2 = \frac{5x_2^2 - (x_2'')^2}{4x_2}$, entonces la anterior ecuación se puede escribir como:

$$A_2 x + B_2 = y$$

La cual contiene la bisectriz del ángulo dado y resuelve el problema planteado.



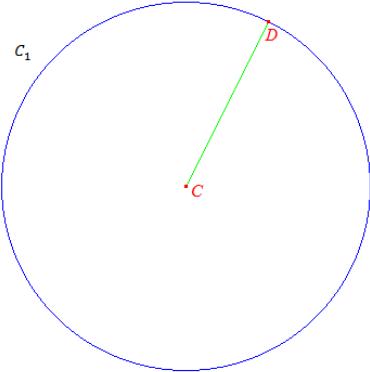
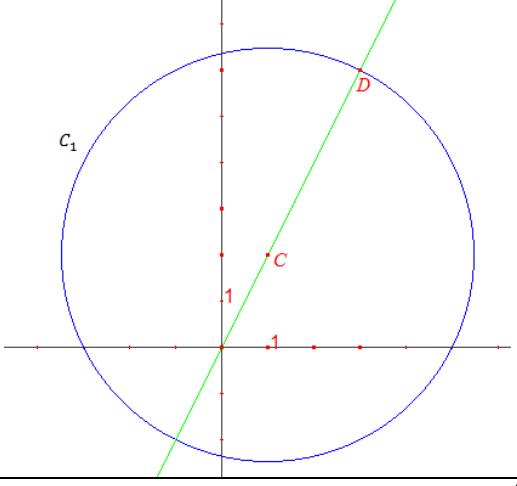
Por lo tanto el sistema que resuelve este problema es:

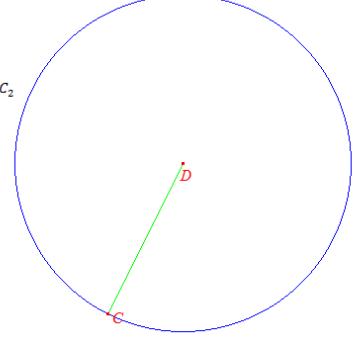
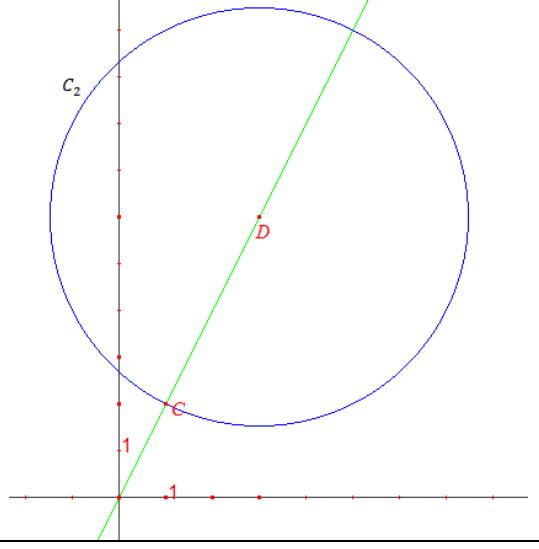
$$\left. \begin{array}{l} x^2 + A_1x + B_1 = 0 \\ x^2 + A'_1x + B'_1 = 0 \\ A_2x + B_2 = y \end{array} \right\}$$

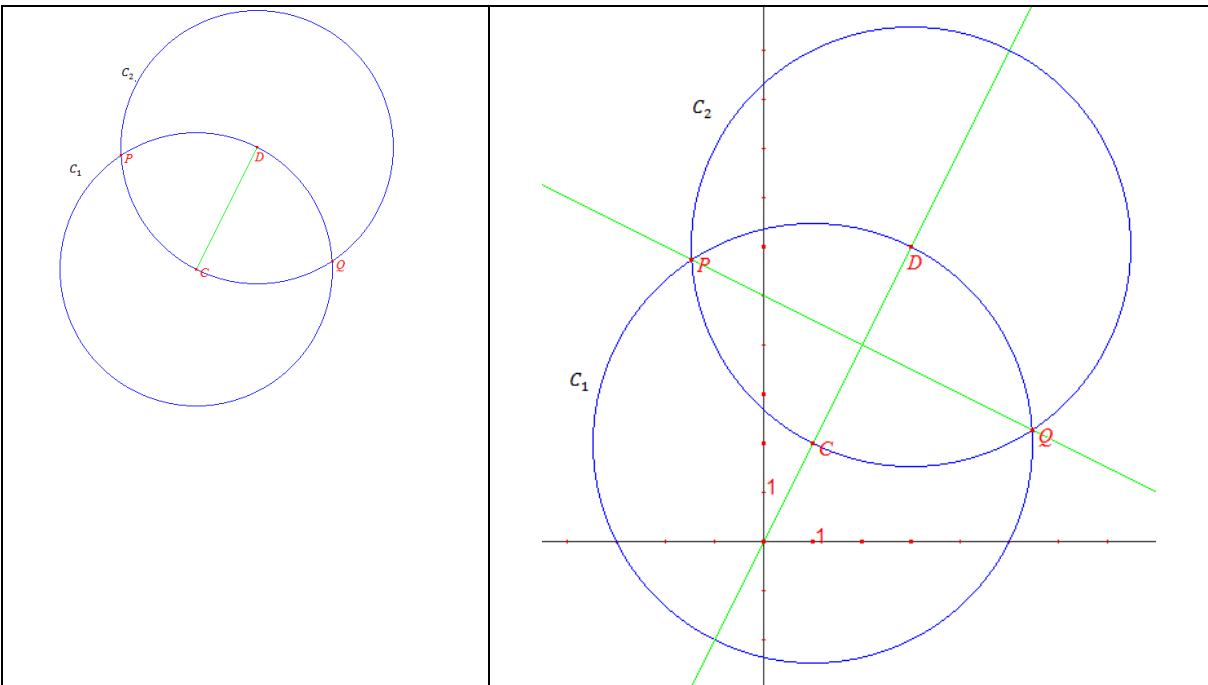
Sistema del problema 1

Problema 2: dividir un segmento en dos partes iguales cuyos extremos son $A = (1,2)$ y $B = (3,6)$.

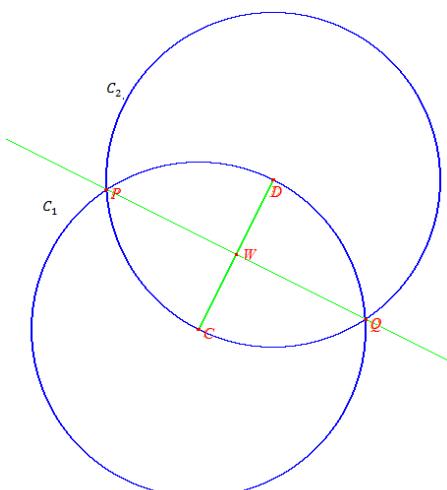
Para hallar la bisectriz de un ángulo cualquiera con regla y compás se realiza lo siguiente:

Solución con regla y compás	Solución desde el método de Wantzel
<p>Sea el \overline{CD} se traza la circunferencia C_1 con centro en C y radio CD</p> 	<p>Dados $C = (x_1, y_1)$ y $D = (x'_1, y'_1)$, la recta que contiene a \overline{CD}, es</p>
<p>$y = x \left(\frac{x'_1 - x_1}{y'_1 - y_1} \right) + x_1 \left(\frac{x'_1 - x_1}{y'_1 - y_1} \right) + y_1$ [1]</p> <p>si en [1]</p> $A = \frac{x'_1 - x_1}{y'_1 - y_1} \text{ y } B = x_1 \left(\frac{x'_1 - x_1}{y'_1 - y_1} \right) + y_1$ <p>Entonces [1], queda de la forma</p> $y = Ax + B$ <p>sea C_1 circunferencia con centro en $C = (x_1, y_1)$ y pasa por el $D = (x'_1, y'_1)$ cuya ecuación es</p> $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x'_1 - x_1)^2 + (y'_1 - y_1)^2$ 	<p>la circunferencia C_2 con centro en</p> <p>Sea la C_2 circunferencia con centro en $D = (x'_1, y'_1)$ y</p>

<p><i>D</i> y radio <i>DC</i></p> 	<p>pasa por el punto $C = (x_1, y_1)$ cuya ecuación es $(x - x'_1)^2 + (y - y'_1)^2 = (x'_1 - x_1)^2 + (y'_1 - y_1)^2$</p> 
<p>Sean los puntos P y Q los puntos de intersección de C_2 y C_1</p>	<p>Al igualar las ecuaciones de las circunferencias C_1 y C_2 se obtiene la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (x_2, y_2)$ y $Q = (x'_2, y'_2)$ los cuales dependen de $C = (x_1, y_1)$ y $D = (x'_1, y'_1)$, Siendo esta</p> $y = x \left(\frac{x'_2 - x_2}{y'_2 - y_2} \right) + x_2 \left(\frac{x'_2 - x_2}{y'_2 - y_2} \right) + y_2 \quad [2]$ <p>si en [2]</p> $A_1 = \frac{x'_2 - x_2}{y'_2 - y_2} \text{ y } B_1 = x_2 \left(\frac{x'_2 - x_2}{y'_2 - y_2} \right) + y_2$ <p>Entonces [2], queda de la forma</p> $y = A_1 x + B_1$

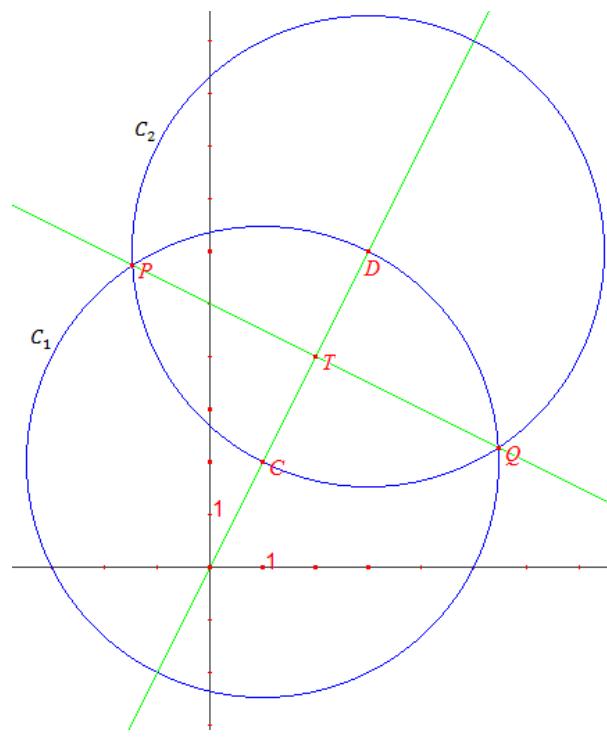


la intersección de \overleftrightarrow{PQ} y \overleftrightarrow{CD} es el punto medio de \overleftrightarrow{CD}



Al igualar [1] y [2] se obtiene el punto medio de \overleftrightarrow{CD} , el cual es $T = (x, y)$, siendo

$$x = \frac{B - B_1}{A_1 - A} \text{ y } y = A \left(\frac{B - B_1}{A_1 - A} \right) + B$$



Cómo se advirtió antes, la solución de los dos problemas planteados están basados en el método de Wantzel, el cual permite demostrar cuándo un problema de geometría se puede resolver con regla y compás, así, en general para dar solución a cualquier problema (que se puede resolver con regla y compás) empleando el método de wantzel se tiene que:

El primer punto x_1 es solución de la primera ecuación cuadrática resultante del problema, la cual es:

$$x_1^2 + Ax_1 + B = 0$$

Donde A y B son funciones racionales. El segundo punto x_2 se determinará por la ecuación

$$x_2^2 + A_1x_2 + B_1 = 0$$

Donde A_1 y B_1 son funciones racionales y dependerán de las incógnitas anteriores, es decir x_1 .

En general un punto x_n se determinará por una ecuación de la forma

$$x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = 0$$

Donde A_{n-1} y B_{n-1} son funciones racionales y dependerán de las incógnitas anteriores, esto es, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} .

Concluyendo de esta manera que todo problema que puede resolverse con regla y compás conduce un conjunto de ecuaciones de segundo grado en el que cada una de ellas depende de la anterior. En resumen, se obtiene el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x_1^2 + Ax_1 + B = 0 \\ x_2^2 + A_1x_2 + B_1 = 0 \\ x_3^2 + A_2x_3 + B_2 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1}^2 + A_{n-2}x_{n-1} + B_{n-2} = 0 \\ x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Donde cada una de estas no se puede reducir a un menor número de ecuaciones.

Basado en los resultados anteriores Wantzel enunció tres teoremas³ en los cuales sintetiza su método

Teorema 1: una de las ecuaciones del sistema (1), sea esta

$$x_{m+1}^2 + A_m x_{m+1} + B_m = 0 \quad (2)$$

³ La explicación previa, es un resumen del método de Wantzel que se sintetiza en los tres teoremas que Siguen, pueden ser consultadas en Echegaray, J. (1887).

no puede ser resuelta por una función racional f , es decir, no existe f racional tal que:

$$f^2 + A_m f + B_m = 0.$$

Demostración:

Supongamos que hay un valor racional que satisface la ecuación (2), este valor es

$$x_{m+1} = f(p, q, r, \dots, x_1, \dots, x_m)$$

Donde $p, q, r, \dots, x_1, \dots, x_m$ por lo tanto al reemplazar este valor en (2) se tiene

$$f^2 + A_m f + B_m = 0$$

Como esta función satisface la ecuación se tiene que

$$A'_{m-1}x_m + B'_{m-1} = 0$$

Siendo A'_{m-1} y B'_{m-1} funciones racionales de los datos anteriores $p, q, r, \dots, x_1, \dots, x_{m-1}$

Este valor de x_m , sustituido en

$$x_m^2 + A_{m-1}x_m + B_{m-1} = 0$$

Daría $A'_{m-2}x_{m-1} + B'_{m-2} = 0$ al sustituir este valor en la siguiente ecuación

$$x_{m-1}^2 + A_{m-2}x_{m-1} + B_{m-2} = 0$$

Daría $A'_{m-3}x_{m-2} + B'_{m-3} = 0$. Así sucesivamente hasta $A'x_1 + B' = 0$, por lo tanto

$$x_1 = -\frac{B'}{A'}$$

Al sustituir este valor en las ecuaciones del sistema (1) este se reduce a un número de $n - 1$ ecuaciones, lo cual contradice la hipótesis.

Wantzel demuestra este teorema por reducción al absurdo, suponiendo que hay una función racional que satisface la ecuación $x_{m+1}^2 + A_m x_{m+1} + B_m = 0$, reduciéndola a una de la forma $Ax + B = 0$, cuya solución es $x = -\frac{B}{A}$, lo que quiere decir que el sistema (1) se puede reducir a un menor número de ecuaciones, contradiciendo la hipótesis de no poder reducir a menor número de ecuaciones el sistema (1).

Teorema 2: toda ecuación x_n resultante de eliminar las incógnitas anteriores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ del sistema (1), es de grado 2^n .

Demostración

Para la primera ecuación del sistema (1) $x_1^2 + Ax_1 + B = 0$ se obtienen dos soluciones x_1' y x_1'' al sustituir estos valores en A_1 y B_1 en la segunda ecuación del sistema (1) $x_2^2 + A_1x_2 + B_1 = 0$ se obtienen dos soluciones para cada x_1 , continuando con este proceso al sustituir estos valores en A_2 y B_2 de la ecuación $x_3^2 + A_2x_3 + B_2 = 0$ se obtienen 2 soluciones por cada x_2 . En el siguiente esquema se ilustra el procedimiento:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' \left\{ \begin{array}{l} x_2' \left\{ \begin{array}{l} x_3' \\ x_3'' \end{array} \right. \\ x_2'' \left\{ \begin{array}{l} x_3''' \\ x_3^4 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ x_1'' \left\{ \begin{array}{l} x_2''' \left\{ \begin{array}{l} x_3^5 \\ x_3^6 \end{array} \right. \\ x_2^4 \left\{ \begin{array}{l} x_3^7 \\ x_3^8 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Por lo tanto, en la primera ecuación se obtienen 2 soluciones, en la segunda se obtienen 2^2 soluciones en la tercera 2^3 , es decir, al solucionar la última ecuación $x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = 0$ se obtendrá 2^n soluciones para x_n . De esta manera, solo se podrá resolver por recta y compás los problemas que den una ecuación de grado 2^n .

Teorema 3: la ecuación en x_n del sistema (1) de grado 2^n puede descomponerse en n ecuaciones de segundo grado irreducibles, las cuales pueden resolverse por intersección de rectas y circunferencias por ser de segundo grado, siendo las raíces de una ecuación de grado menor diferentes a una de grado mayor.

Al suponer que las ecuaciones $x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = 0$ y $F(x_n) = 0$ (con coeficientes racionales) tienen una raíz en común, siendo esta x_n , sucede que:

Al sustituir los valores x_1, x_2, x_3, x_{n-1} en $x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = 0$ forman uno de los 2^n sistemas, al reducir a menor número de potencias x_n , se obtiene una ecuación lineal, de la forma $A'_{n-1}x_n + B'_{n-1} = 0$, donde A'_{n-1} y B'_{n-1} serán funciones racionales de x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , siendo estos los únicos valores que con x_n , forman uno de los sistemas a la cuál x_n pertenece

Se tiene que en lugar de $F(x_n) = 0$ y $A'_{n-1}x_n + B'_{n-1} = 0$, $A'_{n-1}x_n + B'_{n-1}$ sean nulas, es decir que la ecuaciones anterior es idéntica.

si la ecuación $x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = 0$ queda satisfecha por $x_n = -\frac{B'_{n-1}}{A'_{n-1}}$, es decir por una función racional de $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$, lo cual por el teorema 1, es imposible, se tiene que $A'_{n-1} = 0$ y $+B'_{n-1} = 0$

En conclusión estos teoremas indican que todo problema que pueda ser expresado como una ecuación de la forma

$$x_n^{2^n} + Px_n^{2^{n-1}} + Qx_n^{2^{n-2}} + \dots + S = 0$$

Puede ser resuelto por regla y compás. Donde, P, Q, \dots, S son coeficientes racionales.

3.2 EL MÉTODO DE WANTZEL EN LA TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO.

En esta sección se explica a partir del método de Wantzel, por qué la trisección de un ángulo (en general) no es posible usando regla y compás.

Encontrar la tercera parte de un ángulo 3θ , es equivalente a hallar el ángulo cuya medida sea θ o de igual manera encontrar $\sin(\theta)$, conociendo $\sin(3\theta)$. Con base en esto y utilizando la identidad trigonométrica de un ángulo triple, se tiene lo siguiente:

$$\sin(3\theta) = -4\sin^3(\theta) + 3\sin(\theta)$$

Igualando la ecuación a 0, se obtiene:

$$\sin^3(\theta) - \frac{3}{4}\sin(\theta) + \frac{1}{4}\sin(3\theta) = 0$$

Haciendo $x = \sin(\theta)$ y $P = \sin(3\theta)$, resulta la ecuación:

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}P = 0 \quad (2)$$

Con el fin de expresar dicha ecuación con coeficientes enteros se realizará

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 - \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}P = 0$$

Obteniendo de esta manera la siguiente ecuación

$$x^3 - 3x + 2P = 0 \quad (3)$$

Desde el método de Wantzel para que esta ecuación (3) sea reducible, sus coeficientes deben ser racionales, por lo tanto las raíces de esta ecuación polinómica solo pueden ser $\pm 2, \pm P$ y $\pm 2P$.

Al ensayar cada uno de estos valores en la ecuación (3) se obtiene lo siguiente:

- Con $x = 2$

$$\begin{aligned} 2^3 - 32 + 2p &= 0 \\ p &= -1 \end{aligned}$$

- Con $x = p$

$$\begin{aligned} p^3 - 3p + 2p &= 0 \\ p(p^2 - 1) &= 0 \\ p = 0; p &= \pm 1 \end{aligned}$$

- Con $x = 2p$

$$\begin{aligned} 8p^3 - 6p + 2p &= 0 \\ 8p\left(p^2 - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ p = 0; p &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

De igual manera para los valores negativos.

Luego, los únicos valores que puede tomar p son $0, \pm 1, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como $p = \sin(3\theta)$, entonces algunos ángulos que se pueden trisecar mediante regla y compás son aquellos cuyo valor de $\sin(3\theta)$ den como resultado alguno de estos valores, es decir los siguientes ángulos:

- Cuando $p = 0$ se tiene que $\sin(3\theta) = 0$ donde 3θ es 180° o 360° . Al resolver la ecuación (2) para este valor se obtiene

$$\begin{aligned} x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}p &= 0 \\ x^3 - \frac{3}{4}x &= 0 \\ x\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) &= 0 \\ x = 0; \quad x &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Como $x = \sin(\theta)$ se tiene que $\theta = 60^\circ$, ó $\theta = 120^\circ$ siendo estas las trisecciones de los ángulos 180° y 360° respectivamente.

- Cuando $p = \pm 1$ al tomar el valor positivo se tiene que $\sin(3\theta) = 1$, donde el ángulo 3θ es 90° o -270° . Al resolver la ecuación (1) para este valor se obtiene

$$\begin{aligned} x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}p &= 0 \\ (x + 1)\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$x = -1; \quad x = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $\theta = -90^\circ$, y $\theta = 30^\circ$ siendo estas las trisecciones de los ángulos 90° y -270° respectivamente.

Al tomar el valor negativo obtenemos $x = 1$ y $x = -\frac{1}{2}$ por lo tanto $\theta = 90^\circ$ y $\theta = -30^\circ$ siendo estas las trisecciones de los ángulos 270° y -90° respectivamente.

- Cuando $p = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ al tomar el valor positivo se tiene que $\sin(3\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donde el ángulo 3θ es 45° o -315° , al resolver la ecuación (2) para este valor se obtiene

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{8} = 0$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\left(x^2 + \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)x - \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Por lo tanto $\theta = 15^\circ$ y $\theta = -105^\circ$ siendo estas las trisecciones de los ángulos 45° y -315° respectivamente.

Al tomar el valor negativo obtenemos $x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; $x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ por lo tanto $\theta = -15^\circ$ y $\theta = 105^\circ$ siendo estas las trisecciones de los ángulos -45° y 315° respectivamente.

Por lo tanto algunos ángulos que podemos trisecar mediante regla y compás son: $360^\circ, 315^\circ, 270^\circ, 180^\circ, 90^\circ, 45^\circ$, es decir, bajo el método de Wantzel, en general, un ángulo cualquiera no se puede trisecar con regla y compás.

3.3 TRISECCIÓN DE ÁNGULOS ESPECIALES CON REGLA Y COMPÁS

Si bien no todos los ángulos pueden trisecarse mediante regla y compás, como se mostró anteriormente, se ha visto que ciertos ángulos especiales si pueden ser trisecados. A continuación se mostrará la trisección de los ángulos de 90° y 45° a partir de dos polígonos regulares inscritos en una circunferencia, y un método para trisecar los ángulos de la forma $\alpha/2^{2n}$, donde α es un ángulo que se puede trisecar con regla y compás.

3.3.1 Trisección de un ángulo de 90°

- Sea C_1 una circunferencia con centro en O y radio r .
- Sean los polígonos regulares de tres y cuatro lados PQW y $PRST$ respectivamente inscritos en C_1 , como se muestra continuación.

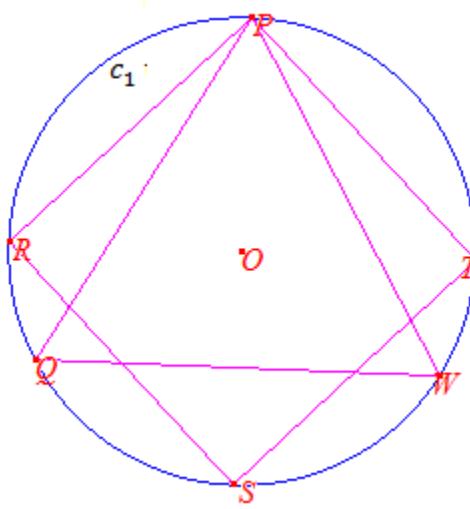


Figura3: polígonos de 3 y 4 lados inscritos en una circunferencia

Los polígonos regulares PQW y $PRST$ construibles con regla y compás dividen la circunferencia C_1 en 3 y 4 partes iguales respectivamente, es decir:

$$m(\widehat{PQ}) = \frac{1}{3} C_1$$

$$m(\widehat{PR}) = m(\widehat{RS}) = \frac{1}{4} C_1$$

Por otro lado, en el (\widehat{PRQ})

$$m(\widehat{PQ}) - m(\widehat{PR}) = m(\widehat{RQ})$$

Con lo que:

$$m(\widehat{PQ}) - m(\widehat{PR}) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) C_1 = \frac{1}{12} C_1 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) C_1$$

luego

$$m(\widehat{RQ}) = \frac{1}{3} m(\widehat{RS})$$

Como la circunferencia comprende un ángulo de 360° , el ángulo central que subtiende el $\widehat{RS} = 90^\circ$ por lo tanto el $\widehat{RQ} = 30^\circ$

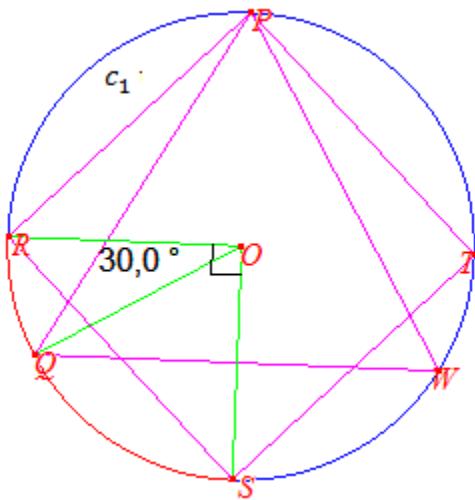


Figura 4: trisección de un ángulo de 90°

Finalmente se traza la bisectriz del $\angle QOS$ obteniendo el \overrightarrow{OM} , por lo tanto los \overrightarrow{OQ} y \overrightarrow{OM} trisecan el $\angle ROS = 90^\circ$

3.3.2 Trisección de un ángulo de 72°

- Sea C_1 una circunferencia con centro en O y radio r .
 - Sean los polígonos regulares de tres y cinco lados PQW y $PRSTX$ construibles con regla y compás respectivamente inscritos en C_1 , como se muestra continuación.

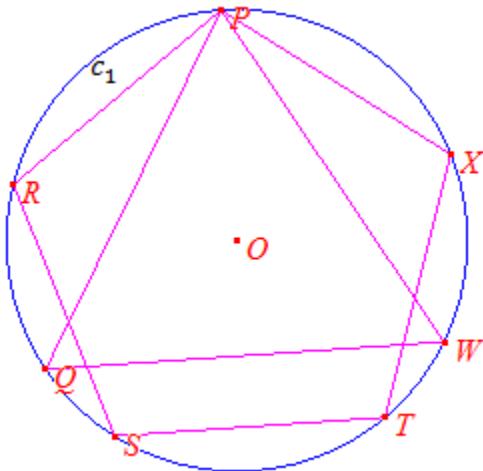


Figura 5: polígonos de 3 y 5 lados inscritos en una circunferencia

Los polígonos PQW y $PRSTX$ dividen a c_1 en 3 y 5 partes iguales respectivamente, es decir

$$m(\widehat{PQ}) = \frac{1}{3}c_1$$

$$m(\widehat{PR}) = m(\widehat{RS}) = \frac{1}{5}c_1$$

De otro lado:

$$m(\widehat{PQ}) - m(\widehat{PR}) = m(\widehat{RQ})$$

Luego:

$$m(\widehat{PQ}) - m(\widehat{PR}) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)C_1 = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)C_1 = \frac{2}{3} m(\widehat{RS})$$

Y por lo tanto

$$m(\widehat{RQ}) = \frac{2}{3} m(\widehat{RS})$$

así

$$m(\widehat{QS}) = \frac{1}{3} m(\widehat{RS})$$

Como la circunferencia comprende un ángulo de 360° , el ángulo central que subtiende el arco $\widehat{RS} = 72^\circ$ por lo tanto el $\widehat{QS} = 24^\circ$

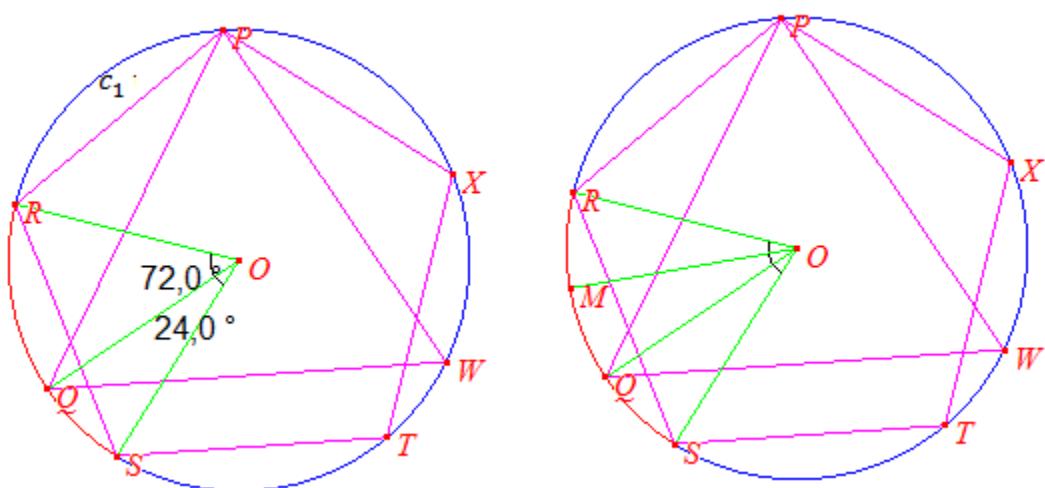


Figura 6: trisección de un ángulo de 72°

Finalmente se traza la bisectriz del $\angle ROQ$ obteniendo el \overrightarrow{OM} , por lo tanto los \overrightarrow{OQ} y \overrightarrow{OM} trisecan el $m \angle ROS = 72^\circ$ (Ver figura 7).

3.3.3 Trisección de un ángulo α/n donde n es el número de lados de un polígono

Como se observa en los ejemplos anteriores se pueden trisecar algunos ángulos a partir de la construcción de polígonos regulares, los cuales deben cumplir algunas de las siguientes condiciones para ser construibles con regla y compás:

- Desde lo expuesto por Wantzel, son construibles con regla y compás los polígonos regulares cuyo número de lados es una potencia de 2.
- Según Gauss para que un polígono sea construible con regla y compás se debe tener en cuenta que
 - El número de lados del polígono debe ser un primo de Fermat, es decir, un número de la forma $2^{2^n} + 1$.
 - El número de lados del polígono debe ser producto de varios primos de Fermat.

Teniendo en cuenta lo expuesto por Gauss y Fermat, también es posible construir polígonos regulares con regla y compás si:

- El número de lados del polígono es producto de una potencia de dos y varios primos de Fermat distintos.

De estos polígonos regulares, trisecan el ángulo aquellos que tienen un número n de lados que no es múltiplo de 3, ya que en caso de serlo, los vértices del triángulo equilátero y del polígono regular coincidirían.

En conclusión se pueden trisecar los ángulos de la forma $360^\circ/n$ donde n es el número de lados del polígono regular que no es múltiplo de 3.

- Sea $c + C_1$ una circunferencia con centro en O y radio r .
- Sean los polígonos de tres y n lados PQW y $PRS \dots Z_n$ respectivamente inscritos en c_1 , como se muestra continuación.
- El ángulo comprendido entre los \overrightarrow{OR} y \overrightarrow{OS} es el ángulo a trisecar, cuya medida es $360^\circ/n$.

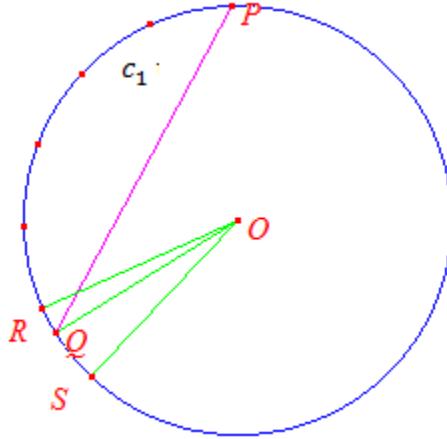


Figura 7: polígonos de 3 y n lados inscritos en una circunferencia

Para saber cuántos vértices del polígono de n lados quedan inscritos en un tercio de circunferencia se divide n en tres donde se obtiene un cociente t y un residuo r que solo podrá tomar valores de 1 o 2. Por el algoritmo de la división se tiene que

$$3c + r = n$$

Por lo tanto del polígono de n lados se toman t lados, es decir

$$\widehat{PR} = \frac{t}{n}$$

Los polígonos PQW y $PRS \dots Z_n$ dividen a C_1 en 3 y n partes iguales respectivamente, es decir:

$$m(\widehat{PQ}) = \frac{1}{3}C_1$$

$$m(\widehat{RS}) = \frac{1}{n}C_1$$

Como en los ejemplos previos:

$$m(\widehat{PQ}) - m(\widehat{PR}) = m(\widehat{RQ})$$

Con lo que:

$$m(\widehat{PQ}) - m(\widehat{PR}) = \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{n}\right)C_1 = \frac{n - 3t}{3n}C_1$$

Como

$$n - 3t = r$$

Entonces

$$m(\widehat{PQ}) - m(\widehat{PR}) = \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{n}\right) C_1 = \left(\frac{r}{3}\right) \left(\frac{1}{n}\right) C_1$$

Como $\left(\frac{1}{n}\right) C_1 = m(\widehat{RS})$ y entonces $m(\widehat{PQ}) - m(\widehat{PR}) = m(\widehat{RQ})$

$$m(\widehat{RQ}) = \left(\frac{r}{3}\right) m(\widehat{RS})$$

Como r toma valores de 1 y 2 se tienen dos casos

- Cuando $r = 1$

$$m(\widehat{RQ}) = \left(\frac{1}{3}\right) m(\widehat{RS})$$

es decir la $m \angle ROQ = \frac{1}{3} m \angle ROS$

- Cuando $r = 2$

$$m(\widehat{RQ}) = \left(\frac{2}{3}\right) m(\widehat{RS})$$

Por lo cual

$$m(\widehat{QS}) = \frac{1}{3} m(\widehat{RS})$$

es decir el $m \angle QOS = \frac{1}{3} m \angle ROS$

A continuación se muestra una tabla de algunos ángulos que se puede trisecar mediante este método.

Numero de lados del polígono regular	Ángulo para trisecar
$2^2 = 4$	90°
$(2^{2^1} + 1) = 5$	72°
$2^3 = 8$	45°
$2(2^{2^1} + 1) = 10$	36°
$2^4 = 16$	22.5°
$(2^{2^2} + 1) = 17$	$360^\circ/17$

$(2^{2^1} + 1)(2^{2^1} + 1) = 25$	14.4°
$2^5 = 32$	11.25°
$2(2^{2^2} + 1) = 34$	$360^\circ/34$
$2^6 = 64$	5.625°
$(2^{2^1} + 1)(2^{2^2} + 1) = 85$	$360^\circ/85$
$(2^{2^3} + 1) = 257$	$360^\circ/257$
\vdots	\vdots

Se pueden hallar otros ángulos que se logran trisecar mediante regla y compás partiendo de un ángulo ya trisecado de la siguiente manera.

3.3.4 Trisección de ángulos de la forma $\alpha/2^n$

Si tenemos un ángulo de 90° (anteriormente trisecado), por el teorema del ángulo central⁴ se puede trisecar el ángulo de $90^\circ/2 = 45^\circ$, de la siguiente manera (ver figura 9):

- Dado $\angle ROS = 90^\circ$ con los \overrightarrow{OQ} y \overrightarrow{OM} que lo trisecan.
- Trazar una circunferencia C_1 de radio cualquiera y centro en O .
- Desde un punto Y de C_1 que no esté en el interior del $\angle ROS$, se trazan los \overrightarrow{YR} , \overrightarrow{YQ} , \overrightarrow{YM} , y \overrightarrow{YS} (ver figura 9).
- Los \overrightarrow{YQ} , \overrightarrow{YM} trisecan el ángulo $\angle RYS$.

⁴ Teorema del ángulo central: la medida del ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del arco comprendido entre sus lados

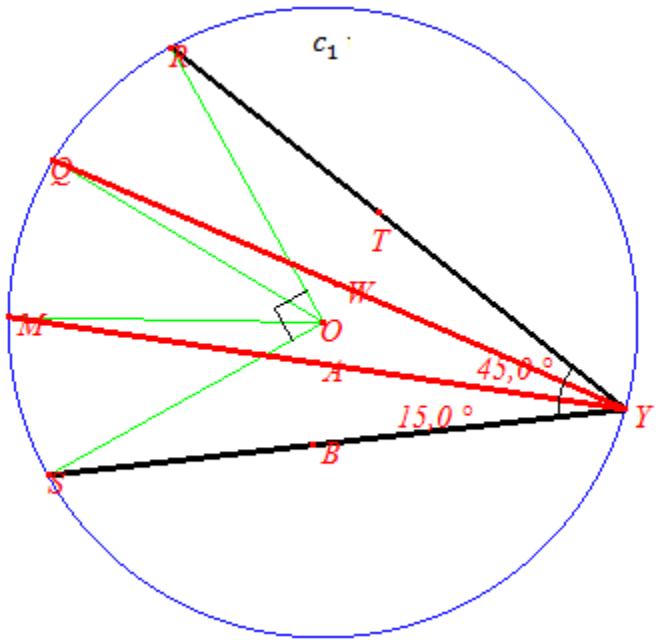


Figura 8: trisección ángulo de 45°

Demostración:

Dado que la el $m\angle ROS = 90^\circ$ con los \overrightarrow{OQ} y \overrightarrow{OM} que lo trisecan, es decir $\frac{1}{3}m(\widehat{RS}) = m(\widehat{RQ})$. Por el teorema del ángulo central se tiene que $m\angle RYS = 45^\circ$, por lo tanto el \widehat{RS} subtiende un ángulo central de 90° y un ángulo inscrito de 45° . Una vez más, por el teorema del ángulo central

$$m \angle RYQ = \frac{1}{2} m (\widehat{RQ}) = \frac{1}{2} (30^\circ) = 15^\circ = \frac{1}{3} m \angle RYS$$

Entonces los \overrightarrow{OQ} y \overrightarrow{OM} trisecan el $\angle RYS$

Siguiendo con este procedimiento se obtiene otro ángulo trisecable, en este caso, un ángulo de $22.5^\circ = 90^\circ/2^2$.

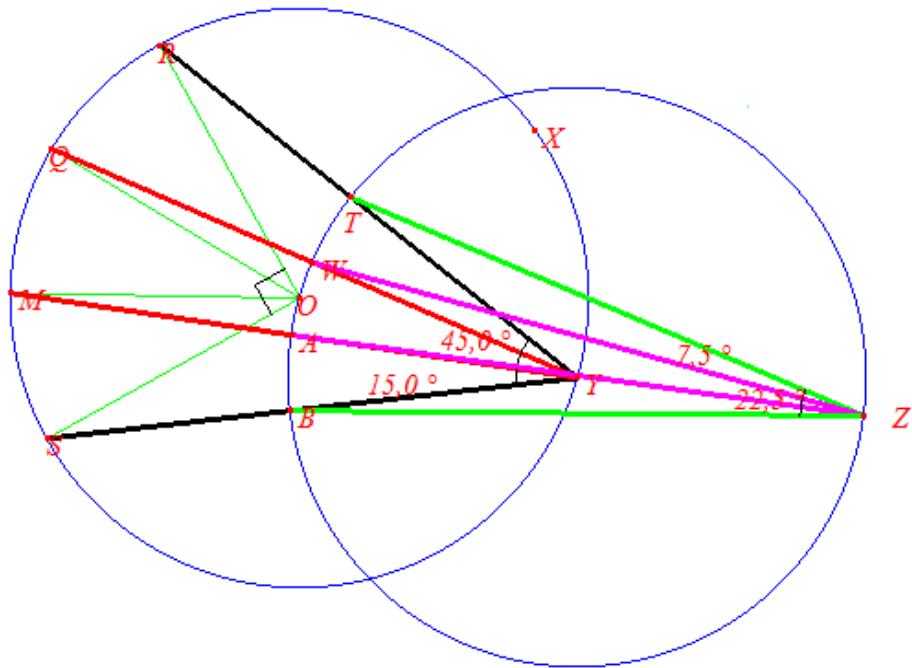


Figura 9: trisección ángulo de $22,5^\circ$

De esta manera se pueden seguir trisecando los ángulos de la forma $90^\circ/2^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

En general se pueden encontrar más ángulos que se pueden trisecar mediante regla y compás partiendo de un ángulo α ya trisecado, es decir, si α es un ángulo trisecable, entonces los ángulos de la forma $\alpha/2^n$ con $n \in \mathbb{N}$, se pueden trisecar.

4. CAPÍTULO II: CURVAS MECÁNICAS USADAS EN LA TRISECCIÓN DE ÁNGULOS

En este capítulo se muestra una selección de nueve curvas mecánicas que solucionan el problema de la trisección de ángulos; para algunas una de estas se expone un breve contexto histórico y la construcción de la curva basada en Rodriguez, Y. (2008), la deducción de una de las ecuaciones(polar, cartesiana o paramétrica) y las otras dos tomada de Rodriguez, Y. (2008), la demostración de forma analítica (geométrica) o geométrica de la trisección de un ángulo a través de la curva mecánica respectiva, aunque algunas de estas se expongan en otras fuentes de consulta, las demostraciones realizadas en este trabajo fueron deducidas sin tener en cuenta dichas fuentes, a excepción de la Espiral de Arquímedes la cual estuvo basada en Melgarejo, N.(2011).

Las curvas a trabajar en este capítulo son: La trisectriz de Hipías, el Caracol de Pascal, la Cicloide de Ceva, la Concoide de Nicomedes, la Espiral de Durero, la Hipérbola de Pappus, la Trisectriz de Delanges, la Espiral de Arquímedes y la Trisectriz de Maclaurin. Estas curvas se clasificaron de acuerdo a la demostración realizada (geométrica o analítica) para dar solución al problema de la trisección del ángulo.

4.1 DEDUCCIONES GEOMÉTRICAS

4.1.1 La Trisectriz de Hipías

Hipías vivió hacia finales del siglo V, a. C., en Atenas y era un sofista, es decir, “un sabio” que sabía o simulaba saber de todo. Es considerado un enciclopedista pues se dedicó a organizar y sistematizar el conocimiento y los datos. Hipías enseñó poesía, gramática, arqueología, historia, política, matemáticas y astronomía; adicionalmente se le asigna un trabajo sobre Homero, colecciones de literatura griega y extranjera y tratados de arqueología. (Blanco, 2003, p. 29)

Para resolver el problema de la trisección de ángulos, Hipías inventó una curva denominada *trisectriz*, es considerada como *la primera curva que se define cinemáticamente, es decir, con un movimiento de rotación uniforme alrededor de algún eje* (Morales, 2002, p. 7); Tal curva, construida con métodos mecánicos fue criticada por suponer como conocida la propiedad buscada, pues era necesario conocer la relación entre una recta y un arco de circunferencia, sin embargo es la primer curva diferente al círculo que fue reconocida por los geómetras griegos.

Posteriormente Hipías y Dinostrato trabajaron en un método para cuadrar el círculo, fue Dinostrato el primero en resolver dicho problema por medio de la trisectriz de Hipías,

desde entonces dicha curva se conoce como *cuadratriz*. Posteriormente Nicómedes usó también la *cuadratriz* para cuadrar el círculo (Bombal, 2012, p. 249).

4.2.1.1 Construcción de la Trisectriz de Hipías

Para la construcción de la trisectriz de Hipías se realiza lo siguiente:

Dado el cuadrado con vértices O, A, B y C , se traza el arco de circunferencia centrado en O y con extremos en C y A , sea D un punto que pertenece a dicho arco. Se traza el \widehat{AD} y el \overrightarrow{OD} . Sea E un punto sobre \overline{OC} tal que $(OE) = m \left(\frac{\widehat{AD}}{\widehat{AC}} OC \right)$. Se traza la recta h que pasa por E tal que $h \perp \overline{OC}$. Sea P el punto de intersección de h con \overrightarrow{OD} . El lugar geométrico generado por P cuando se mueve *Des la trisectriz de Hipías*.

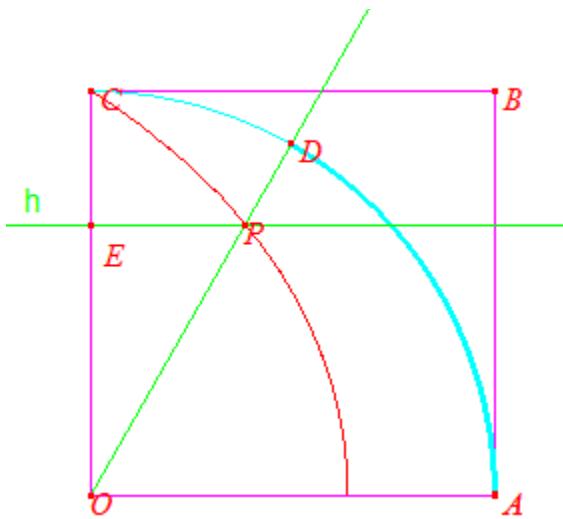


Figura 10: Trisectriz de Hipías

4.2.1.2 Deducción de la ecuación polar

Se debe hallar la distancia del $\overline{OP} = \rho$. Tomamos O como el polo

La construcción proporciona la siguiente relación:

$$\frac{(OE)}{(OC)} = \frac{m(\widehat{AD})}{m(\widehat{CA})} \quad (1),$$

donde $m(\widehat{AD}) = (OD)\theta$, siendo $\theta = m \angle DOA$. Como $\overline{OD} \cong \overline{OC}$ por ser radios de la circunferencia se tiene que:

$$m(\widehat{AD}) = (OC)\theta$$

y

$$m(\widehat{CA}) = \frac{\pi}{2} (OC)$$

Al reemplazar en (1) se tiene

$$\frac{(OE)}{(OC)} = \frac{(OC) \theta}{\frac{\pi}{2} (OC)}$$

Por lo tanto

$$(OE) = \frac{2\theta (OC)}{\pi}$$

La medida del $\overline{OC} = k$, es decir, una constante, así que:

$$(OE) = \frac{2k \theta}{\pi}$$

En el ΔOPT de la figura 12, se tiene que:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{(OE)}{\rho}$$

al despejar ρ y reemplazar \overline{OE} se tiene la ecuación polar de la curva:

$$\rho = \frac{2k \theta}{\pi \operatorname{sen} \theta}.$$

Por otro lado, la ecuación cartesiana de la trisectriz es:

$$y = x \cot\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

Y sus ecuaciones paramétricas, con $t \in [0,1]$, son:

$$\begin{cases} x = (1-t) \tan\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\ y = 1-t \end{cases}$$

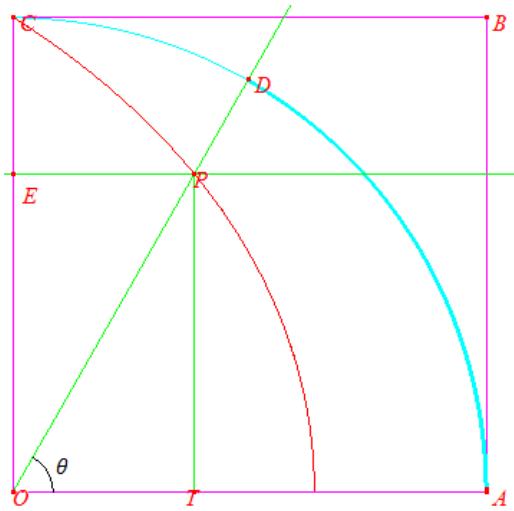


Figura 11: Trisectriz de Hipías (ecuación polar)

4.2.1.3 Aplicación para la trisección de un ángulo

Con esta curva no solo se puede trisecar un ángulo cualquiera, se puede dividir en el número de partes congruentes que se deseen. Para el caso de tres, tenemos:

Se divide el \overline{OE} en tres partes congruentes obteniendo los puntos F y G , por estos se trazan las rectas m y n paralelas a h . Sean U y W las intersecciones de las rectas m y n con la curva. Finalmente se trazan los $\overrightarrow{OW}, \overrightarrow{OU}$. La medida del $\angle AOU$ es un tercio de la medida del $\angle AOD$ (figura 13). La demostración de este hecho se realiza a continuación:

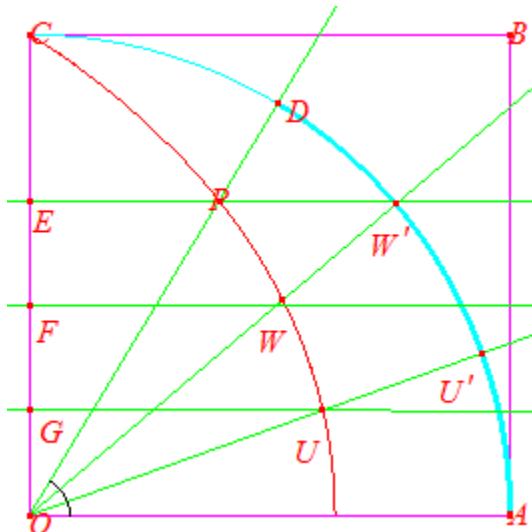


Figura 12: Trisectriz de Hipías (trisección del ángulo)

Por la construcción de la curva se tienen las siguientes relaciones:

$$\frac{(OE)}{(OC)} = \frac{m(\widehat{AD})}{m(\widehat{CA})} \quad (1),$$

$$\frac{(OG)}{(OC)} = \frac{m(\widehat{AU'})}{m(\widehat{CA})} \quad (2),$$

$$(OE) = 3(OG) \quad (3),$$

$$\frac{(OF)}{(OC)} = \frac{m(\widehat{AW'})}{m(\widehat{CA})} \quad (4),$$

$$(OE) = \frac{3}{2}(OF) \quad (5).$$

De (1) y (3) se tiene que

$$\frac{3(OG)}{(OC)} = \frac{m(\widehat{AD})}{m(\widehat{CA})}$$

$$(OG) = \frac{1}{3} \frac{m(\widehat{AD})}{m(\widehat{CA})} OC$$

De (2) se tiene que

$$(OG) = \frac{m(\widehat{AU'})}{m(\widehat{CA})} (OC)$$

Por tanto, al igualar estas expresiones se obtiene

$$\frac{1}{3} m(\widehat{AD}) = m(\widehat{AU'})$$

es decir

$$\frac{1}{3} m \angle AOD = m \angle AOU'.$$

De (1) y (5) se tiene

$$\frac{\frac{3}{2}(OF)}{(OC)} = \frac{m(\widehat{AD})}{m(\widehat{CA})}$$

Así que:

$$(OF) = \frac{2 \widehat{AD}}{3 \widehat{CA}} (OC)$$

Se despeja \overline{OF} de (4)

$$(OF) = \frac{m(\widehat{AW'})}{m(\widehat{CA})} (OC)$$

Al igualar estas expresiones se obtiene

$$m(\widehat{AD}) = \frac{3}{2} m(\widehat{AW'})$$

Por otro lado vemos que:

$$m(\widehat{AW'}) = m(\widehat{AU'}) + m(\widehat{W'U'})$$

Por tanto,

$$\frac{2}{3} m(\widehat{AD}) = m(\widehat{AU'}) + m(\widehat{W'U'})$$

Como

$$\frac{1}{3} m(\widehat{AD}) = \widehat{AU'}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} m(\widehat{AD}) &= \frac{1}{3} m(\widehat{AD}) + m(\widehat{W'U'}) \\ \frac{1}{3} m(\widehat{AD}) &= (\widehat{W'U'}) \end{aligned}$$

Es decir

$$\frac{1}{3} m \angle AOD = m \angle U'OW'$$

De igual manera se tiene que

$$\frac{1}{3} m \angle AOD = m \angle W'OD.$$

4.2.1.4 Construcción de $\sqrt{\pi}$

Con la trisectriz de Hipías también se puede construir $\sqrt{\pi}$ de la siguiente manera:

Se toma la curva de Hipías donde el $(OC) = 1$, sea M el punto de intersección de esta curva con \overrightarrow{OA} . El $m \angle AOG = \theta$, de la construcción de esta curva se tienen las siguientes relaciones:

$$\frac{\frac{(CK)}{\pi}}{\frac{\pi}{2} - \theta} = \frac{(OC)}{\pi} \quad (1)$$

$$\frac{(OK)}{\theta} = \frac{(OC)}{\frac{\pi}{2}} \quad (2)$$

En el ΔEKO se tiene que el $\operatorname{sen}\theta = \frac{(OK)}{(OE)}$, por lo tanto $(OK) = (OE)\operatorname{sen}\theta$, el $(OC) = (CK) + (OK)$, entonces $(CK) = (OC) - (OK)$, es decir $(CK) = (OC) - (OE)\operatorname{sen}\theta$ (ver figura 14). Al sustituir el \overrightarrow{OK} en la ecuación (2) se tiene que:

$$\frac{(OE)\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \frac{2(OC)}{\pi}$$

$$2(OC) = \frac{\pi(OE)\operatorname{sen}\theta}{\theta}$$

Cuando θ tienda a 0 el \overrightarrow{OE} tiende al \overrightarrow{OM} y $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$, por lo tanto

$$2(OC) = \pi(OM)$$

$$(OM) = \frac{2(OC)}{\pi}$$

Como $(OC) = 1$, entonces

$$(OM) = \frac{2}{\pi}$$

Se trazan las rectas s y l de tal manera que $s \perp \overrightarrow{OA}$ por M y $l \perp \overrightarrow{OA}$ por A . Sea R la intersección entre la recta s y la circunferencia C_1 . Se traza \overrightarrow{OR} y sea Q la intersección entre la recta l y \overrightarrow{OR} . Como $\Delta OMR \sim \Delta OAQ$ se tiene que

$$\frac{(OM)}{(OA)} = \frac{(OR)}{(OQ)}$$

Como $(OA) = 1$ y $(OR) = 1$, entonces $(OQ) = \pi/2$, se continúa trazando la circunferencia C_2 con centro en O y radio \overrightarrow{OQ} . Sea T la intersección entre C_2 y \overrightarrow{OA} , se traza la circunferencia C_3 con centro en T y radio 2. Sea H la intersección entre C_3 y \overrightarrow{OA} , sea N el punto medio de \overrightarrow{OH} se traza la circunferencia C_4 con centro en N y radio \overrightarrow{NH} . Se traza la

recta $j \perp \overrightarrow{OA}$, por T , sea Z el punto de intersección de la recta j y C_4 (figura 14). Por lo tanto el $(TZ) = \sqrt{\pi}$, ya que $(OT) = \pi/2$, $(TM) = 2$ y \overline{TZ} es la media geométrica entre \overline{OT} y \overline{TM} .

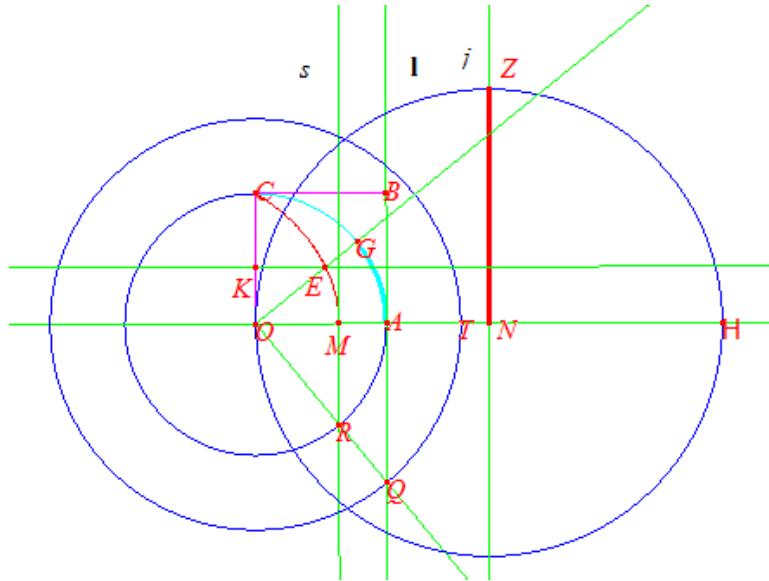


Figura 13: Construcción de $\sqrt{\pi}$

4.1.2 Caracol de Pascal

Etienne Pascal nació en Francia (1588 – 1651), jurista y matemático, desempeño altos cargos administrativos en el gobierno, este geómetra es el padre de Blaise Pascal (1623-1662), tras pocos años de matrimonio y con tres hijos pequeños queda viudo, por lo cual se traslada a Paris y decide encargarse de la educación de sus hijos. (Gomes, F. 1905).

Crea una curva a la que Gilles Personne de Roberval llama *El caracol de Pascal (Limacón)*, por su evidente parecido al caparazón de un caracol, posteriormente Roberval analizó su modo de generación, algunas propiedades de la curva, estableció el procedimiento para trazar sus tangentes y en su libro *Traité des Indivisibles*, expuso una técnica para determinar las áreas limitadas por arcos de la misma curva (Gomes, F. 1905).

El Caracol de Pascal se puede definir como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a los puntos de una circunferencia es una constante, estando la distancia medida en las cuerdas trazadas desde un punto fijo de la propia circunferencia (Morán, V. 2013).

4.2.2.1 Construcción del Caracol de Pascal

La construcción de esta curva se realiza de la siguiente manera:

Se trazan los ejes coordenados donde $O = (0,0)$, sea k un número real positivo. Se trazan dos circunferencias C_1 y C_2 concéntricas con centro en O y radios k y $2k$ respectivamente. Sean A y B los puntos de intersección de la circunferencia C_1 y el eje x , donde se cumple que $A = O = B$. Sean los puntos C y D las intersecciones de C_2 con el eje x , de tal manera que $C = O = D$. Sea E un punto sobre C_1 , se traza \overrightarrow{OE} y la recta m tangente a C_1 por el punto E . Se traza la recta n que pasa por C tal que $n \perp m$, donde sea P el punto de intersección de las rectas n y m . Entonces el lugar geométrico generado por el punto P cuando se mueve E sobre C_1 es el Caracol de Pascal (figura 15).

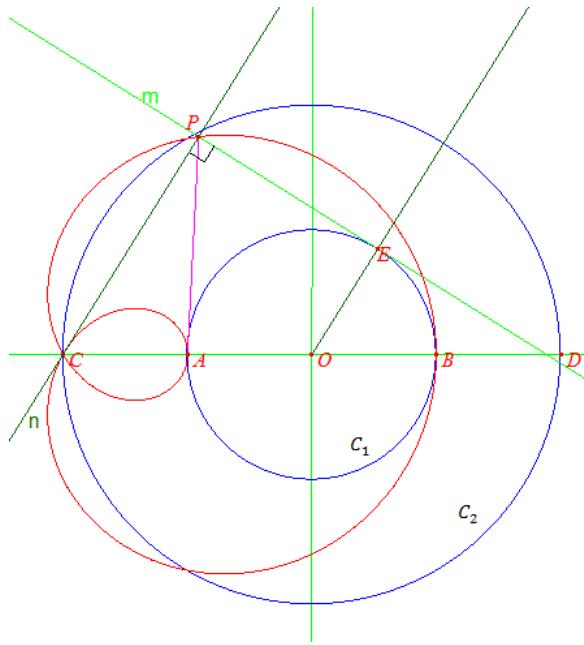


Figura 14: Caracol de Pascal

4.2.2.2 Deducción de la ecuación polar

La ecuación polar de esta curva la hallamos de la siguiente manera:

Sea $a = (OB)$ y $b = (CO)$, como \overleftrightarrow{OE} y \overleftrightarrow{CP} son perpendiculares a \overleftrightarrow{PD} , entonces

$$\angle TOE \cong \angle TCP.$$

En el ΔEOT rectángulo se tiene que

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{(OT)}$$

$$(OT) = \frac{a}{\cos(\alpha)}$$

$(CT) = (CO) + (OT)$, por lo tanto:

$$(CT) = \frac{a}{\cos(\alpha)} + b$$

En el ΔPCT rectángulo se tiene que

$$\cos(\alpha) = \frac{(CP)}{\frac{a}{\cos(\alpha)} + b}$$

$$a + b\cos(\alpha) = (CP)$$

Por lo tanto la ecuación polar de la curva es

$$\rho = a + b\cos(\alpha)$$

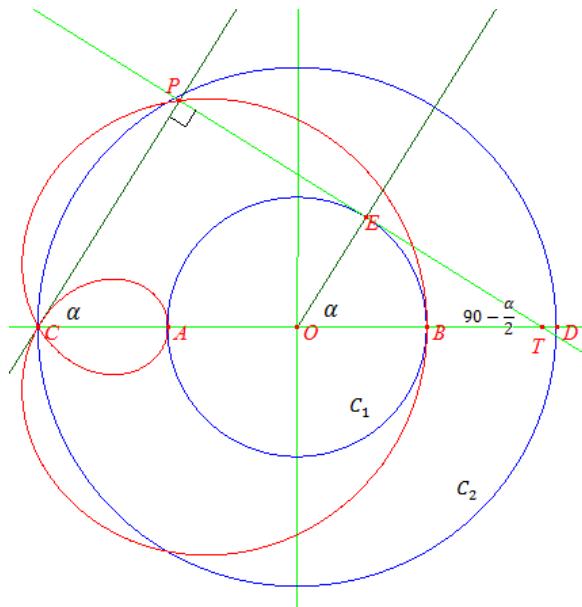


Figura 15: Deducción ecuación polar del Caracol de Pascal

Por otro lado su ecuación cartesiana del Caracol de Pascales:

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)^2, \text{ con } a > 0, b > 0$$

y sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = \frac{(1-t^2)(b+2a+(b-2a)t^2)}{(1+t^2)^2} \\ y = \frac{2t(b+2a+(b-2a)t^2)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

4.2.2.3 Aplicación para la trisección de un ángulo

Para trisecar el $\angle BAP$ mediante esta curva se trazan \overrightarrow{AP} y \overrightarrow{PC} , obteniendo que la medida del $\angle APC$ es la tercera parte del ángulo dado.

Se traza el \overrightarrow{CF} , la \overrightarrow{AG} tal que es paralela con la \overrightarrow{PC} y se traza la \overrightarrow{OH} paralela a la \overrightarrow{PA} (figura17).

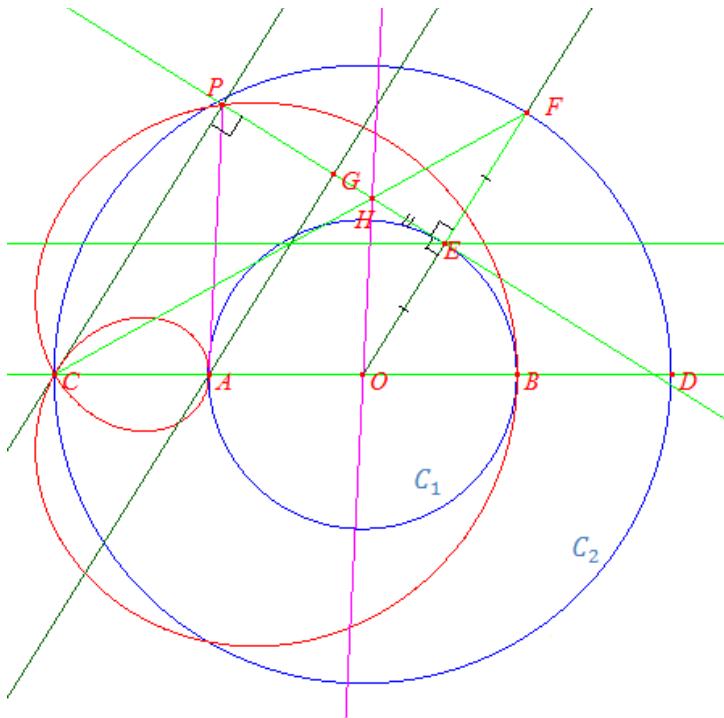


Figura16: trisección de un ángulo con el Caracol de Pascal

Como $\overline{OC} \cong \overline{OF}$ por ser radios de C_2 entonces el ΔCOF es isósceles, por lo tanto se tiene que $\angle FCO \cong \angle CFO$. Por el teorema del ángulo externo el $m \angle FOB = 2 m \angle CFO$.

Como $\overleftrightarrow{OF} \parallel \overleftrightarrow{AG}$ entonces $\angle FOB \cong \angle GAO$, por sustitución se obtiene $m \angle GAO = 2 m \angle CFO$ y como $\overleftrightarrow{AP} \parallel \overleftrightarrow{OH}$ se tiene que $\angle FOH \cong \angle GAP$. Al ser E punto medio de \overline{OF} , $OE \cong EF$.

Se tiene que $\overleftrightarrow{OF} \perp \overleftrightarrow{EH}$ por lo tanto $\angle OEH$ y $\angle FEH$ son rectos, por el criterio de congruencia LAL se tiene que $\Delta OEH \cong \Delta FEH$ y por definición de congruencia de triángulos $\angle OFH \cong \angle FOH$.

Comom $\angle OAP = m \angle OAG + m \angle GAP$, por sustitución se tiene que $m \angle OAP = 3 m \angle GAP$. Se tiene que $\overleftrightarrow{AG} \parallel \overleftrightarrow{CP}$ por lo tanto $\angle GAP \cong \angle APC$. Finalmente, por sustitución, la $m \angle OAP = 3 m \angle APC$, es decir

$$m \angle APC = \frac{1}{3} m \angle BAP$$

4.1.3 Cicloide de Ceva

Giovanni Ceva 1648- 1734, matemático e ingeniero hidráulico italiano, sólo después de su muerte el matemático francés M. Chasles y posteriormente G. Cremona, publicaron en sus obras el Teorema de Ceva, gracias a lo cual se dio a conocer el nombre de este teorema; sin embargo existen publicaciones anteriores tanto del enunciado como de su demostración, por parte del rey Yúsuf Al-mutamán, conocido como Al-mutanín, y por el matemático José Zaragoza (Labarga, 2013).

Este famoso teorema de la geometría clásica es el dual del teorema de Menelao, el enunciado y la demostración se encuentran en el libro *De lineis rectis se invicem secantibus: statica constructio* (Milán, 1678), escrito por Ceva.

Esta trisectriz es una cieloide, se compone de tres movimientos circulares uniformes, como todas las cieloides, esta curva es el lugar de centro de tres movimientos circulares.

4.2.3.1 Construcción de la cieloide de Ceva

Para realizar su construcción se traza una recta h horizontal y se ubica un punto O en esta. Sea k un número real positivo, se traza la circunferencia C_1 con centro en O y radio k . Sea A un punto sobre C_1 , se traza \overleftrightarrow{OA} y se hallan dos puntos B y P sobre las rectas h y \overleftrightarrow{OA} respectivamente de tal manera que $\overline{OA} \cong \overline{AB} \cong \overline{BP}$. El lugar geométrico generado por P cuando se mueve A sobre la circunferencia C_1 es la Cicloide de Ceva.

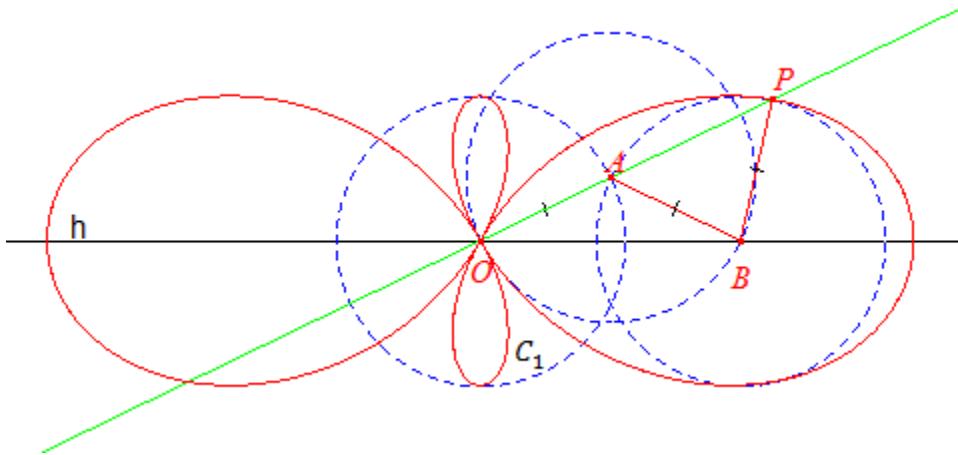


Figura17: Cicloide de Ceva

4.2.3.2 Deducción de la ecuación paramétrica

Su ecuación paramétrica la hallamos de la siguiente manera:

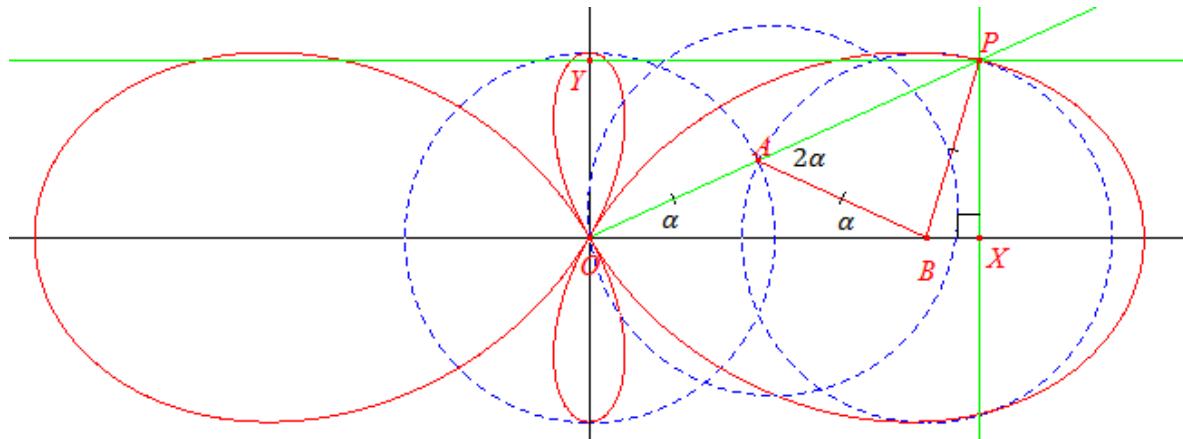


Figura 18: deducción ecuación paramétrica de la Cicloide de Ceva

$$m \angle BOA = \alpha$$

Como $\overline{OA} \cong \overline{BA}$, entonces $m \angle OAB = 180 - 2\alpha$. Por teorema del seno y siendo P la distancia B a P se tiene que

$$\frac{\sin(180 - 2\alpha)}{(OB)} = \frac{\sin(\alpha)}{\rho} \quad (1)$$

$$(OB) = 2\cos(\alpha) \quad (2)$$

Como $\angle OBA$ y $\angle BAP$ forman par lineal, entonces

$$m \angle BAP = 2\alpha$$

$$\overline{BA} \cong \overline{BP}$$

$$\rho = (BP)$$

Los $\angle ABO$, $\angle ABP$ y $\angle PBX$ forman par lineal, por lo tanto

$$m \angle PBX = 3\alpha$$

$$\cos(3\alpha) = \frac{(BX)}{\rho}$$

$$\cos(3\alpha)\rho = (BX)$$

$$(OX) = (OB) + (BX)$$

$$(OX) = 2\cos(\alpha) + \cos(3\alpha)\rho$$

$$x = 2\cos(\alpha) + \cos(3\alpha)\rho$$

$$\operatorname{sen}(3\alpha) = \frac{(PX)}{\rho}$$

$$\rho \operatorname{sen}(3\alpha) = (PX)$$

$$y = \rho \operatorname{sen}(3\alpha)$$

En conclusión las ecuaciones paramétricas de la cicloide de Ceva son:

$$\begin{cases} x = 2\cos(\alpha) + P\cos(3\alpha) \\ y = P\operatorname{sen}(3\alpha) \end{cases}$$

Su ecuación cartesiana es $(x^2 + y^2)^3 = a^2(3x^2 - y^2)^2$, y su ecuación polar es

$$\rho = a + 2a \frac{\operatorname{sen}(k\theta) \cos((k+1)\theta)}{\operatorname{sen}\theta}$$

4.2.3.3 Aplicación para la trisección del ángulo

Con esta curva se puede trisecar cualquier ángulo menor a 90° realizando lo siguiente:

Se traza la recta n paralela a la recta h por A , la intersección de dicha recta y la cicloide de Ceva es el punto P' ; finalmente se traza la $\overleftrightarrow{OP'}$. La medida del $\angle BOP'$ es la tercera parte de la medida del $\angle BOA$.

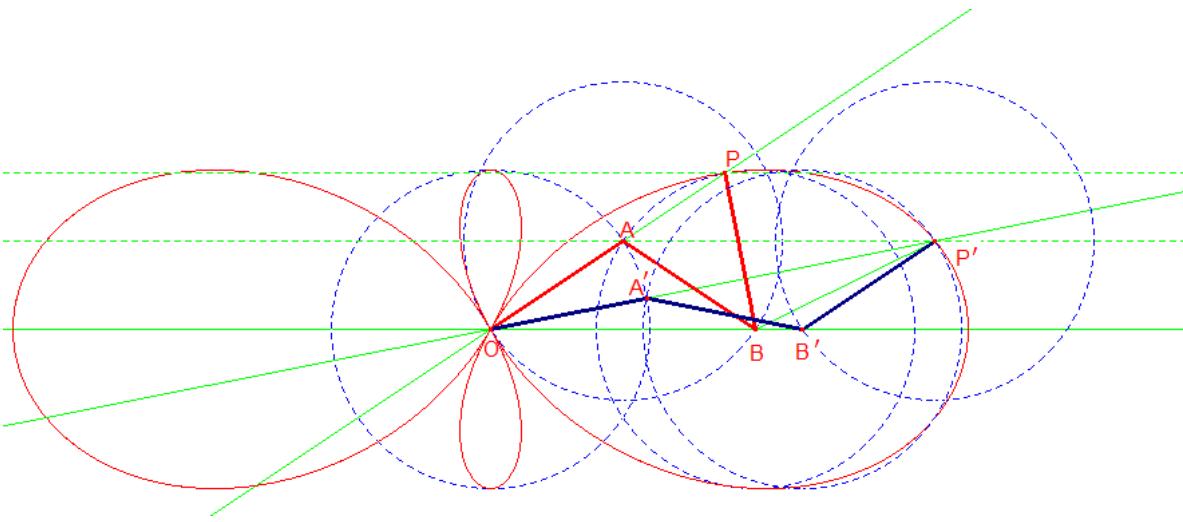


Figura19: trisección de un ángulo con la Cicloide de Ceva

Los ΔOAB , ΔABP , $\Delta OA'B'$, $\Delta A'B'P'$ son isósceles por ser radios de las circunferencias.

$$m \angle BOA = m \angle BOA' + m \angle A'OA$$

Por el teorema del ángulo externo se tiene que

$$m \angle B'A'P' = m \angle B'OA' + m \angle A'B'O$$

Como el $\Delta OA'B'$ es isósceles se tiene que

$$\angle B'OA' \cong \angle A'B'O$$

Por lo tanto

$$m \angle B'A'P' = 2 m \angle B'OA'$$

Sea C el punto intersección de la circunferencia con centro A en y radio r y la circunferencia con centro P' y radio r .

Como todas las circunferencias tienen el mismo radio entonces se obtienen las siguientes congruencias

$$\overline{OA} \cong \overline{B'P'} \quad (1)$$

$$\overline{A'B'} \cong \overline{AC} \quad (2)$$

$$\overline{OC} \cong \overline{P'A'} \quad (3)$$

$$\overline{P'C} \cong \overline{OA'} \quad (4)$$

Por interestancia

$$(OC) = (OA') + (AC')$$

$$(P'A') = (P'C) + (A'C)$$

De (1), (2), (3) y por el criterio de congruencia LLL se tiene que

$$\Delta OAC \cong \Delta P'B'A'$$

y por ende,

$$\angle B'A'P' \cong \angle OCA$$

Como ΔOAC es isósceles se tiene que $\angle COA \cong \angle OCA$

Por lo tanto

$$\angle COA \cong \angle B'A'P'$$

$$m \angle COA = 2 m \angle B'OA'$$

Como

$$m \angle B'OA = m \angle B'OA' + m \angle A'OA$$

Por sustitución se obtiene

$$m \angle B'OA = m \angle B'OA' + 2 m \angle B'OA'$$

Finalmente

$$\frac{1}{3} m \angle B'OA = m \angle BOA'.$$

4.1.4 Concoide de Nicomedes

Nicomedes y Arquímedes vivieron en la misma época, aproximadamente en el 200 a. C. y aunque no se sabe nada de su vida se le atribuye la creación de *La Concoide* y el tratado *Sobre las líneas concoides*, se ha establecido que esta curva “formaliza el proceso de Arquímedes de rotar una regla manteniendo un punto sobre una línea” (Morales, 2002, p. 6), lo anterior es un ejemplo más del progreso que se puede alcanzar al estudiar profundamente las ideas de los grandes matemáticos, pero el estudio de esta curva, sólo pudo retomarse en el siglo XVII, gracias a los trabajos de Pappus y de Eutocio, en los cuales se describe la *Concoide* (Morales, 2002).

Esta curva además de que permite trisecar el ángulo, es muy citada como ejemplo de las curvas mecánicas, en libros de Geometría Analítica, en artículos, en investigaciones y demás, que se ocupan del estudio de estas curvas o del problema de la trisección del ángulo; su nombre se origina del griego “konkhe” que significa concha (Gomes, F. 1905).

4.2.4.1 Construcción de la Concoide de Nicomedes

Para realizar la construcción se debe realizar lo siguiente:

Se toma un numero k real positivo se traza una recta h horizontal y se ubican en esta dos puntos O y T . Se trazan las circunferencia C_1 y C_2 con centro en O y T , respectivamente y radios k y se ubica un punto B sobre esta. Se traza el \overline{OB} y la \overline{TB} ; sean M y N los puntos de intersección de la circunferencia C_2 con la \overline{TB} . El lugar geométrico generado por los puntos M y N cuando se mueve T sobre la recta h es la Concoide de Nicomedes.

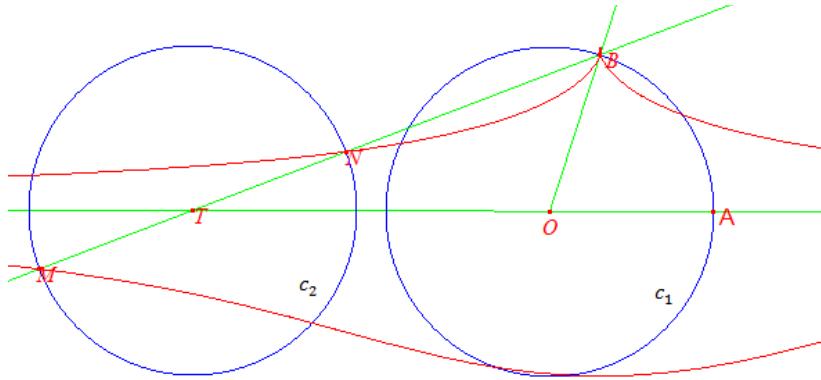


Figura 20: Concoide de Nicomedes

4.2.4.2 Deducción de la ecuación polar

Se debe hallar la distancia de M y N al polo que en este caso es B

En el ΔBLT el $\cos \theta = \frac{(TL)}{(TB)}$; así tenemos que $(TB) = \frac{(TL)}{\cos \theta}$

Por interestancia se tiene que $(TB) = (TN) + (NB)$ y se sabe que $\overline{TN} = k$ entonces

$$(TN) + (NB) = \frac{(TL)}{\cos \theta}$$

$$(NB) = \frac{(TL)}{\cos \theta} - k$$

Como

$$(BM) = (TB) + k$$

$$(TB) = (BM) - k$$

$$(BM) - k = \frac{(TL)}{\cos\theta}$$

$$(BM) = \frac{(TL)}{\cos\theta} + k$$

$$\cos\theta = \frac{(TL)}{(TB)}, \quad \sin\theta = \frac{(BL)}{(TB)}$$

$$(TB) = \frac{(TL)}{\cos\theta}, \quad (TB) = \frac{(BL)}{\sin\theta}$$

Al igualar las expresiones se obtiene

$$\tan\theta = \frac{(BL)}{(TL)}$$

Es decir

$$(TL) = \frac{(BL)}{\tan\theta}$$

Al reemplazar (TL) en

$$\rho = \frac{(TL)}{\cos\theta} \mp k$$

Se obtiene la ecuación polar

$$\rho = \frac{(BL)}{\sin\theta} \mp k$$

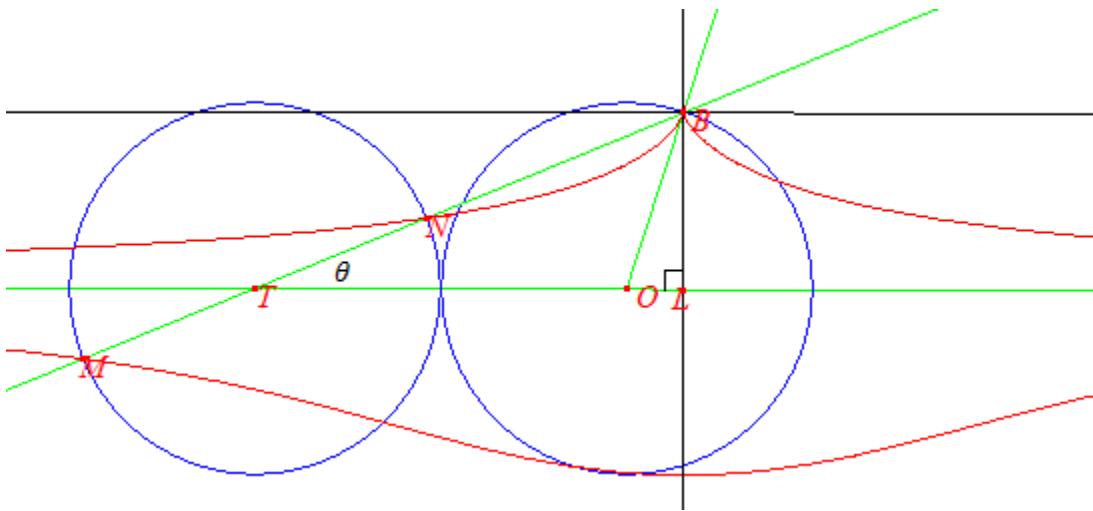


Figura 21: deducción ecuación polar de la Concoide de Nicomedes

Su ecuación cartesiana es: $(x - b)^2(x^2 + y^2) - a^2x^2 = 0$

4.2.4.3 Aplicación para la trisección del ángulo:

Para trisecar un ángulo con la curva Concoide de Nicomedes, se debe realizar lo siguiente:

Sea Q la otra intersección entre la Concoide de Nicomedes y la circunferencia C_2 se traza la \overrightarrow{QB} , sea C el punto de intersección entre la recta h y \overrightarrow{QB} . El $\angle OCB$ es la tercera parte del $\angle AOB$.

El ΔBOQ y el ΔOQC son isósceles ya que $\overline{OB} \cong \overline{OQ}$ y $\overline{CQ} \cong \overline{CO}$ son radios de la circunferencia, por lo tanto $\angle QCO \cong \angle QOC$ y $\angle OQB \cong \angle OBQ$. El $\angle OQB$ es externo al ΔOQC , por lo tanto $m \angle OQB = 2 m \angle OCQ$, por transitividad se tiene que $m \angle OBQ = 2 m \angle OCQ$.

El $\angle AOB$ es externo al ΔBOC , por lo tanto la $m \angle AOB = m \angle OQB + m \angle OCQ$ por lo tanto

$$\frac{1}{3}m \angle AOB = m \angle OCQ$$

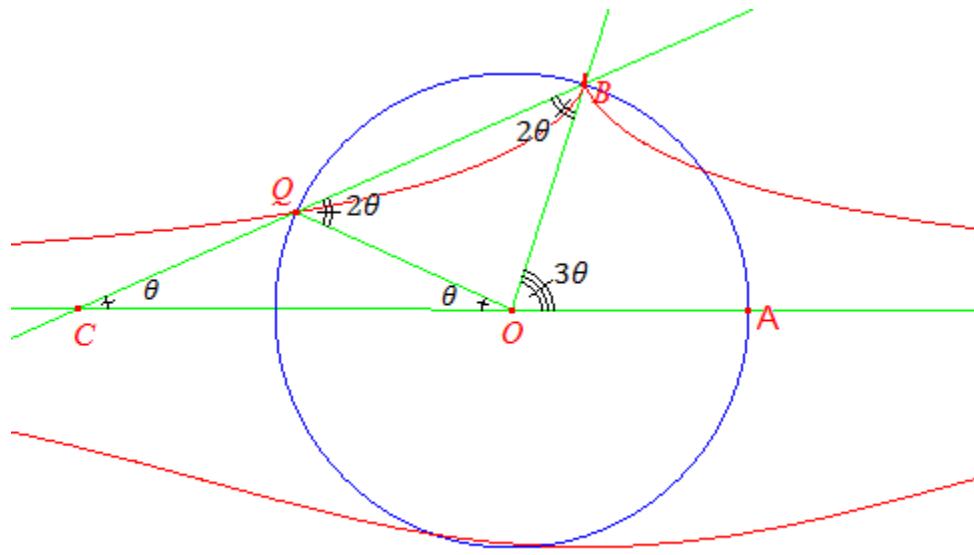


Figura 22: trisección de un ángulo con la Concoide de Nicomedes

4.2.4.4 Construcción de $\sqrt[3]{2}$

Esta curva también permite construir $\sqrt[3]{2}$, que es un número que no es posible construir con regla y compás. Para esto, se debe realizar la siguiente construcción:

El $\angle AOB$ es recto, se ubica un punto D sobre la Concoide de Nicomedes de tal manera que el $\angle DOE = 60^\circ$ y $(DF) = (BO) = 1$, donde E es el punto de intercepción de la recta paralela a \overrightarrow{OA} por el punto D y F es el punto de intersección del \overrightarrow{BD} con la \overrightarrow{OA} . La medida del $(BF) = \sqrt[3]{2}$

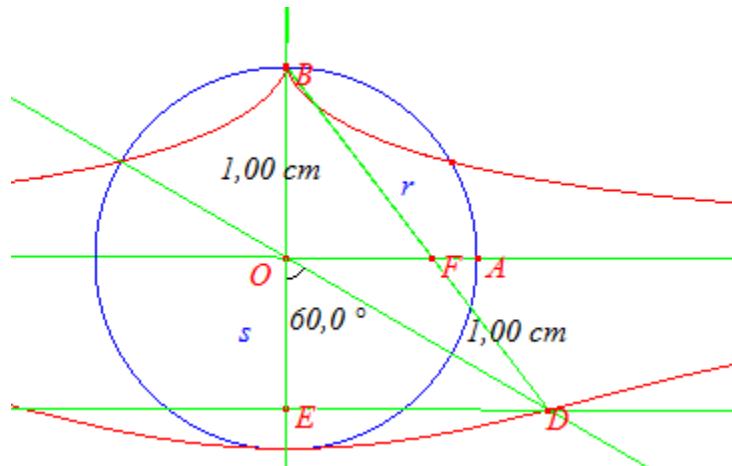


Figura 23: construcción de $\sqrt[3]{2}$

Demostración:

El $\Delta DEB \sim \Delta FOB$, por definición de semejanza se tiene que

$$\frac{r}{r+1} = \frac{1}{1+s} = \frac{(OF)}{(ED)}$$

$$s = \frac{1}{r}$$

En el ΔOED

$$\tan(60^\circ) = \frac{(ED)}{s}$$

Por lo tanto el $(ED) = \sqrt{3}r$

En el ΔDEB se tiene que

$$(r+1)^2 = (1+s)^2 + (\sqrt{3}s)^2$$

$$r^2 + 2r = 2s + 4s^2$$

Por sustitución

$$r^2 + 2r = \frac{2}{r} + \frac{4}{r^2}$$

$$r^3(r^2 + 2r) = 2r^2 + 4r$$

$$r^3(r+2) = 2(r+2)$$

$$r = \sqrt[3]{2}$$

4.1.5 Espiral de Durero

4.1.5.1 Construcción

Para realizar su construcción se debe realizar lo siguiente (figura26).

Se traza una recta horizontal m , sean O y A dos puntos sobre la recta m , se traza la circunferencia C_1 con centro en O y radio OA , sea B un punto sobre C_1 , se traza la \overrightarrow{OB} . Sea R punto medio de \overline{OB} , se traza la circunferencia C_2 con centro en R y radio RB . Sea $n = m \widehat{AB}$. Se transfiere la medida n sobre C_2 tomando B como punto inicial de transferencia y S el punto final. El lugar geométrico generado por S cuando se mueve B sobre la C_1 es la Espiral de Durero.

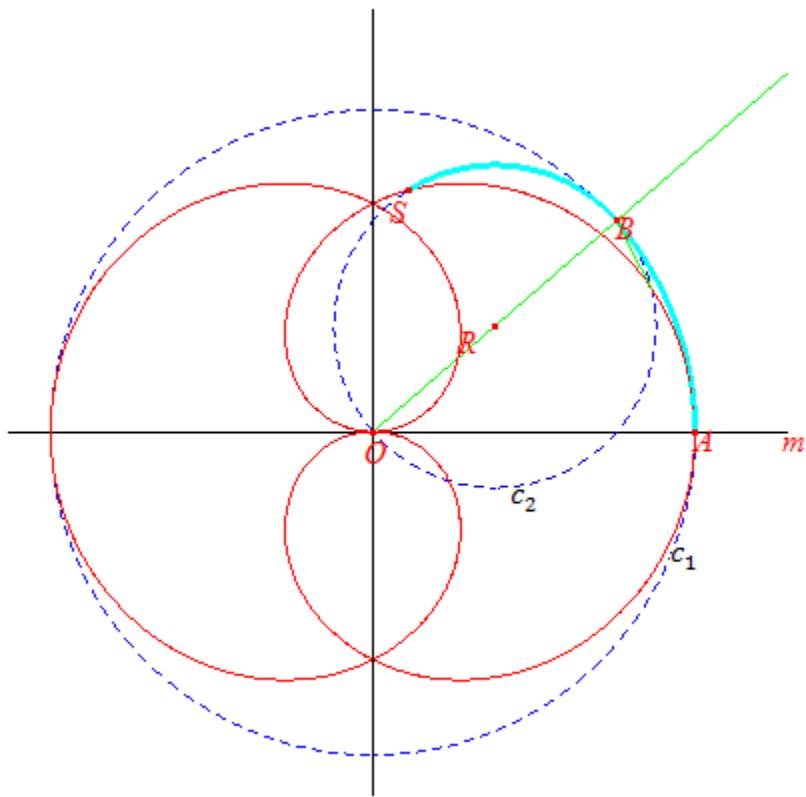


Figura 24: Espiral de Durero

4.2.5.2 Deducción de la ecuación paramétrica

Su ecuación paramétrica la hallamos de la siguiente manera (figura27).

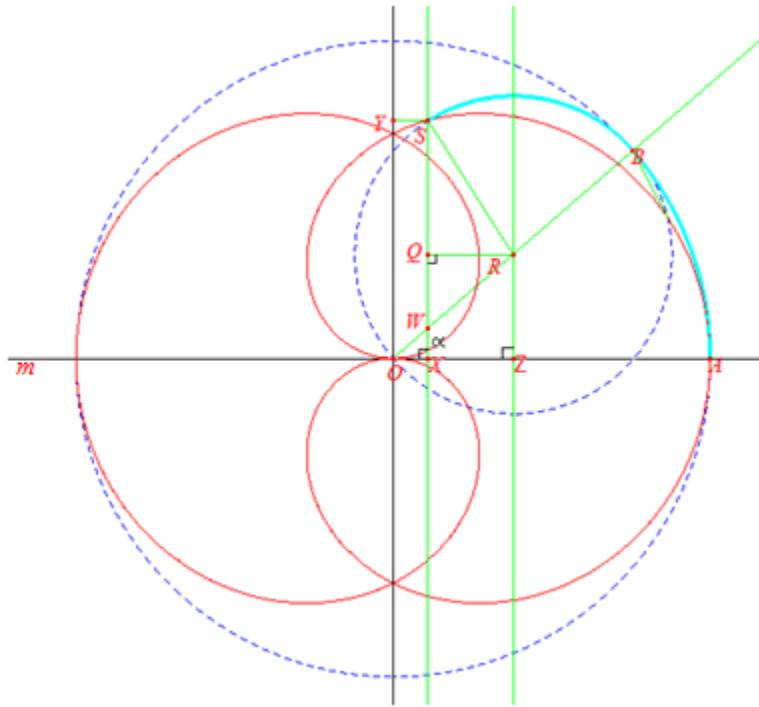


Figura 25: Deducción ecuación polar de la Espiral de Durero

Con base en la figura 27, se dan las siguientes condiciones:

$$\overleftrightarrow{SX} \perp m, \quad X = \overleftrightarrow{SX} \cap m. \quad W = \overleftrightarrow{SX} \cap \overleftrightarrow{OB}, \quad \overleftrightarrow{QR} \parallel m, \quad Q = \overleftrightarrow{SX} \cap \overleftrightarrow{QR} \cap \overleftrightarrow{RZ} \parallel \overleftrightarrow{SX}, \\ Z = \overleftrightarrow{RZ} \cap m, \quad \widehat{AB} = \widehat{BS}, \quad W - R - B \quad m \angle AOB = \infty$$

Por el Teorema del ángulo inscrito en una circunferencia⁵

$$m \angle BRS = 2 \alpha,$$

en los ΔOXW , ΔWQR , ΔSQR

$$m \angle OWX = 90 - \alpha$$

$$m \angle QRW = \alpha$$

$$m \angle QRS = 180 - 3 \alpha,$$

Si $\rho = (OR)$

$$(RZ) = \rho \sin(\alpha)$$

$$(SQ) = \rho \sin(180 - 3\alpha)$$

⁵ Si el $\angle BRS$ es un ángulo inscrito en una circunferencia y $\angle AOB$ es un ángulo del centro en la circunferencia entonces la $m \angle AOB = \frac{1}{2} m \angle BRS$. (Gonzales, H. 2007)

$$(RZ) + (SQ) = \rho \operatorname{sen}(180 - 3\alpha) + \rho \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$(RZ) + (SQ) = \rho(\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(3\alpha))$$

Por lo tanto

$$y = \rho(\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(3\alpha))$$

$$(QR) = \rho \operatorname{cos}(180 - 3\alpha)$$

$$(QR) = -\rho \operatorname{cos}(3\alpha)$$

$$(WR) = \frac{-\rho \operatorname{cos}(3\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha)}$$

$$(OW) = \rho - (WR)$$

$$(OW) = \rho \left(1 + \frac{\operatorname{cos}(3\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha)} \right)$$

$$(OX) = \operatorname{cos}(\alpha) \rho \left(1 + \frac{\operatorname{cos}(3\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha)} \right)$$

Entonces

$$x = \rho(\operatorname{cos}(\alpha) + \operatorname{cos}(3\alpha))$$

En conclusión las ecuaciones paramétricas de la espiral de Durero son

$$\begin{cases} x = \rho(\operatorname{cos}(\alpha) + \operatorname{cos}(3\alpha)) \\ y = \rho(\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(3\alpha)) \end{cases}$$

Su ecuación cartesiana es: $(x^2 + y^2)^2(2(x^2 + y^2) - a^2)^2 = a^4 x^2$

y su ecuación polar es: $\rho = a \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

4.2.5.3 Aplicación para la trisección del ángulo

Sea P la otra intersección entre la circunferencia C_2 y la Espiral de Durero, se traza la \overrightarrow{OP} y se tiene que la medida del $\angle POB$ es un tercio de la medida del $\angle AOB$, siempre que el $\angle AOB$ mida a lo más 135° (figura28).

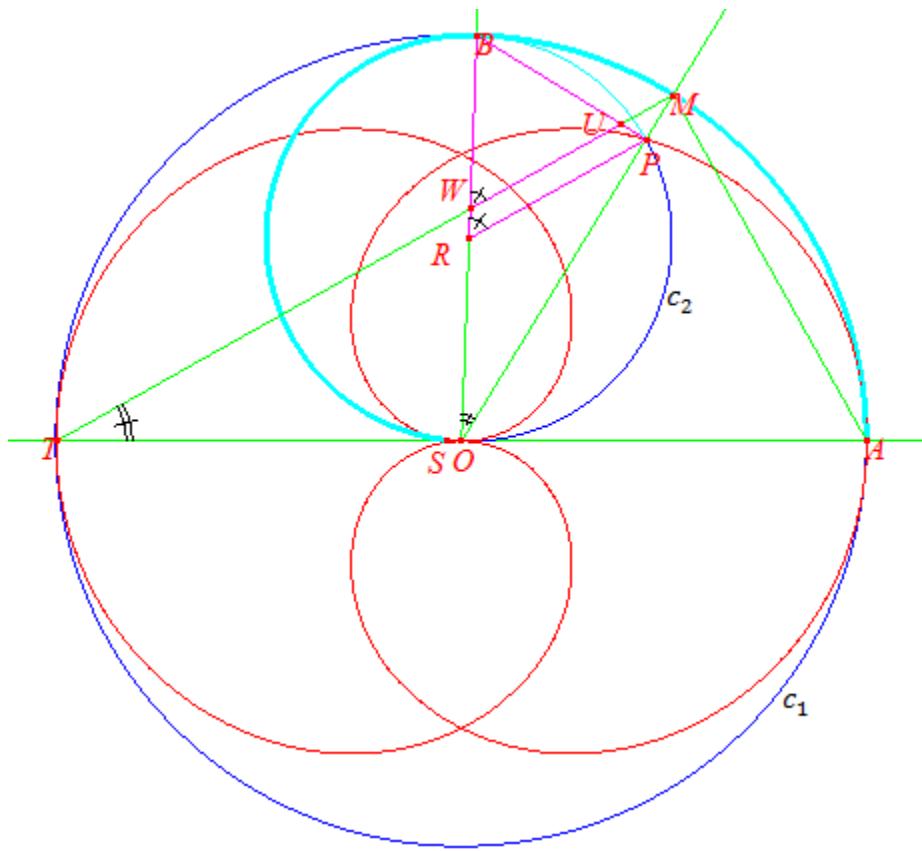


Figura 26: trisección de un ángulo con la Espiral de Durero

Sean $\{M\} = C_1 \cap \overline{OP}$, $\{T\} = C_1 \cap m$. $\{W\} = \overline{OB} \cap \overline{TM}$, $\{U\} = \overline{TM} \cap \overline{BP}$, \overline{TM} y \overline{RP} .

El $\widehat{BM} \cong \widehat{BP}$, por lo tanto el $\angle BWM \cong \angle BRP$, por la interestancia $W - U - M$ se tiene que el $\angle BWU \cong \angle BRP$. Por el criterio de semejanza de triángulos AA el $\Delta RBP \sim \Delta WBU$, por teorema de ángulos correspondientes se tiene que $\overleftrightarrow{RP} \parallel \overleftrightarrow{WU}$, es decir, $\overleftrightarrow{RP} \parallel \overleftrightarrow{MT}$ por lo tanto $\angle RPO \cong \angle TMO$.

El $\overline{OM} \cong \overline{OT}$ y $\overline{RO} \cong \overline{RP}$ por ser radios de las circunferencias c_1 y c_2 respectivamente; luego los ΔMOT y ΔORP son isósceles. Por lo tanto $\angle TMO \cong \angle OTM$ y $\angle ROP \cong \angle RPO$ se tiene que $\angle RPO \cong \angle TMO$ y por transitividad $\angle OTM \cong \angle ROP$.

Por el teorema del ángulo inscrito en una circunferencia se tiene que $2m\angle ATM = m\angle MOA$ es decir, $2m\angle OTM = m\angle MOA$; por transitividad $2m\angle ROP = m\angle MOA$.

Lam $\angle AOB = m \angle BOM + m \angle MOA$ que significa quem $\angle AOB = m \angle ROP + 2 m \angle ROP$. Porlo tanto

$$\frac{1}{3}m\angle AOB = m\angle ROP.$$

4.1.6 Hipérbola de Pappus

Vivió en Alejandría, en su obra “*Sinagogemazematique*” sintetiza gran parte de los conocimientos matemáticos que se tenían hasta finales del siglo IV, aproximadamente, esta colección de geometría griega que tuvo gran reconocimiento, en aquella época, consta de 8 libros (el primero y una parte del segundo figuran perdidos) que tratan temas como aritmética, proporción, poliedros (regulares y semirregulares), análisis geométrico y mecánica (Ruiz de la rosa, 1987).

Entre los aportes personales de Pappus, los cuales incluye en su obra, se puede mencionar la distinción que hace entre la mecánica teórica y la práctica, la explicación de la solución al problema de trisecar un ángulo, propuesta por Apolonio, quien utiliza para ello las cónicas y las dos soluciones que propone para trisecar al ángulo, valiéndose de una hipérbola. Pappus al trabajar con las secciones cónicas da un paso adelante en comparación con los adelantos que se tenían, seguramente porque la construcción de una cónica es mucho más sencilla y por las propiedades de estas curvas. (Morales, 2002)

En los estudios realizados por este griego, descubre propiedades de los centroides, entre ellas “*la relación del centroide de una región plana con el volumen del sólido de revolución obtenido por la rotación de la citada región alrededor de una recta de su plano*” (Apostol, 1973, p. 459), también formula dos teoremas que son de gran utilidad en las aplicaciones de las integrales dobles. El primero establece que el volumen del sólido de revolución, obtenido por la rotación, es igual al producto de la longitud de esa circunferencia multiplicada por el área de la región plana; este teorema sirve entre otras cosas, para determinar el centroide de una región plana y el segundo proporciona la manera de encontrar el centroide de la reunión de varias regiones planas (Apostol, 1973).

4.2.6.1 Construcción

Su construcción se realiza de la siguiente manera (figura 29).

Trazar el \overline{AB} y la recta m mediatrix de \overline{AB} , donde M es el punto de intersección de \overline{AB} con la recta m . Se traza la circunferencia C_1 con centro en A y radio AM y la circunferencia C_2 con centro en A y radio BM . Sea C un punto sobre C_1 , se traza la circunferencia C_3 con centro en C y radio CM , Sea D la otra intersección de C_1 y C_3 , E el simétrico de D respecto a la recta m , se trazan las \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{BE} y sea P la intersección entre estas semirrectas y Q el

simétrico del punto P respecto a la recta m . El lugar geométrico generado por los puntos P y Q cuando se mueve C sobre la circunferencia C_3 es la Hipérbola de Pappus.

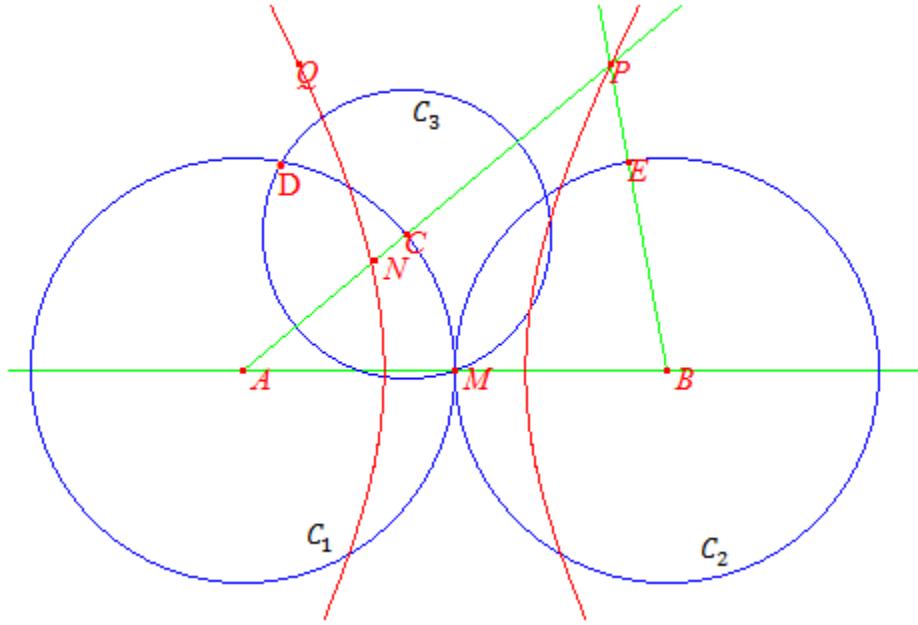


Figura27: Hipérbola de Pappus

4.2.6.2 Deducción de la ecuación polar

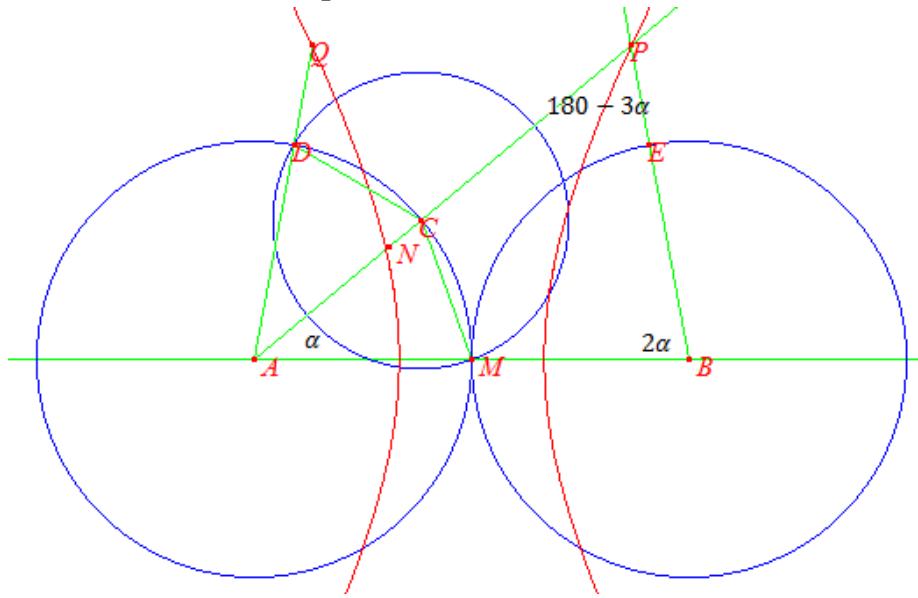


Figura 28: deducción ecuación polar de la Hipérbola de Pappus

El $\overline{DA} \cong \overline{AM}$ por ser radios de la circunferencia con centro en A y radio AM , $\overline{DC} \cong \overline{CM}$ por ser radios de la circunferencia con centro en C y radio CM ; por criterio de

congruencia de triángulos LLL, el $\Delta DAC \cong \Delta CAM$. Y por lo tanto el $\angle DAC \cong \angle CAM$, es decir el $m \angle DAM = 2 m \angle CAM$. (Figura 30)

Como M es punto medio del segmento \overline{AB} , las circunferencias con centro en A y centro en B tienen el mismo radio y el punto E es el simétrico de D , la medida \widehat{DM} es igual a la medida de \widehat{ME} por lo tanto el $\angle DAM \cong \angle EBM$, por transitividad se tiene que $m \angle EBM = 2 m \angle CAM$.

Por ley de senos en el ΔAPB , se tiene:

$$\frac{\sin(180 - 3\alpha)}{2a} = \frac{\sin(2\alpha)}{(AP)}$$

$$(AP) = \frac{2a \sin(2\alpha)}{\sin(3\alpha)}$$

Por lo tanto la ecuación polar de la curva es

$$\rho = 2a \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(3\alpha)}$$

La ecuación cartesiana es: $(3x^2 - y^2) = 4ax$

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = at^2 \\ y = at^3 \end{cases}$

4.2.6.3 Aplicación para la trisección del ángulo

Para trisecar un ángulo con esta curva se realiza la siguiente construcción (figura 31).

Se traza \overline{AP} y \overline{BP} , Sean l y n las mediatrices de dichos segmentos, respectivamente. Sea H la intersección de las mediatrices l y n , se traza las \overrightarrow{HA} , \overrightarrow{HB} y \overrightarrow{HP} . La medida del $\angle BHP$ es un tercio de la medida del $\angle BHA$.

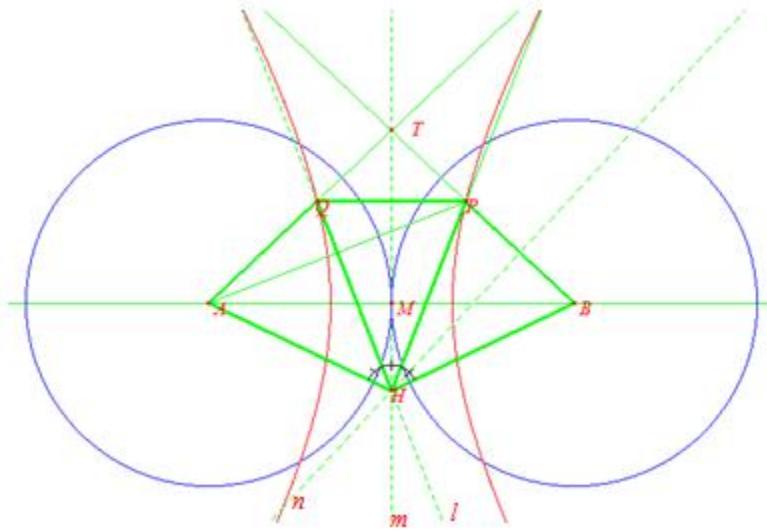


Figura29: trisección de un ángulo con la Hipérbola de Pappus

Como la \overrightarrow{HQ} es mediatrix del \overline{AP} entonces $\overline{AQ} \cong \overline{QP}$ y $\overline{AH} \cong \overline{PH}$, por el criterio de congruencia LLL, $\Delta AHQ \cong \Delta PHQ$. Luego $\angle AHQ \cong \angle PHQ$.

Como la \overrightarrow{HT} es mediatrix del \overline{AB} , se traza \overline{AT} y \overline{BT} , entonces $\overline{AH} \cong \overline{HB}$, $\overline{AT} \cong \overline{BT}$, $\overline{QH} \cong \overline{PH}$, y $\overline{QT} \cong \overline{PT}$, como $(AT) = (AQ) + (QT)$ y $(BT) = (BP) + (PT)$, por sustitución se tiene que $(AQ) + (QT) = (BP) + (PT)$ por lo tanto $\overline{AQ} \cong \overline{BP}$.

Como se tiene que $\overline{AH} \cong \overline{HB}$, $\overline{QH} \cong \overline{PH}$ y $\overline{AQ} \cong \overline{BP}$; el $\Delta AHQ \cong \Delta BHP$ por el criterio de congruencia de triángulos LLL. Así se tiene que $\angle AHQ \cong \angle PHQ \cong \angle BHP$.

L am $\angle BHA = m \angle BHP + m \angle PHQ + m \angle AHQ$ por lo tanto $m \angle BHA = 3 m \angle BHP$, es decir

$$\frac{1}{3} m \angle BHA = m \angle BHP$$

4.1.7 Trisectriz de Delanges

4.2.7.1 Construcción

Su construcción se realiza de la siguiente manera (figura 32):

Se traza una recta horizontal m , sea k un número real positivo y O un punto sobre la recta m .

Se traza la circunferencia C_1 con centro O y radio k los puntos E y A son las intersecciones entre C_1 y la recta m . Sea B un punto sobre la circunferencia C_1 , se traza \overrightarrow{OB} y sea H la otra

intersección entre la \overleftrightarrow{OB} y C_1 se traza la recta b bisectriz del $\angle AOB$, los puntos C y D son las intersecciones entre la recta b y la C_1 , se trazan las rectas l y s paralelas a m que pasan por C y D respectivamente. Sean P y Q los puntos de intersección entre las rectas l y s con la \overleftrightarrow{OB} . El lugar geométrico generado los puntos P y Q cuando se mueve B sobre C_1 se llama trisectriz de Delanges.

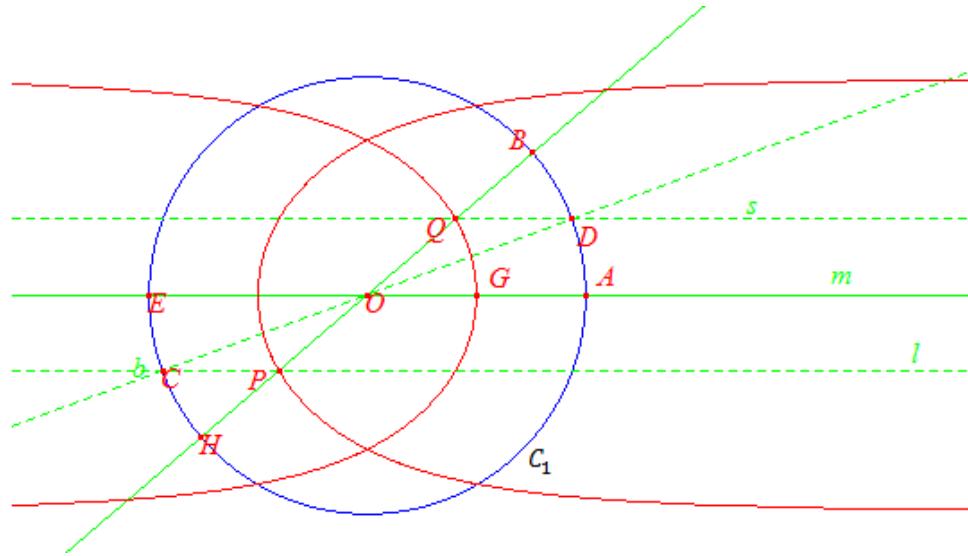


Figura 30: trisectriz de Delanges

4.2.7.2 Deducción de la ecuación polar

Su ecuación polar la hallamos de la siguiente manera (figura 33).

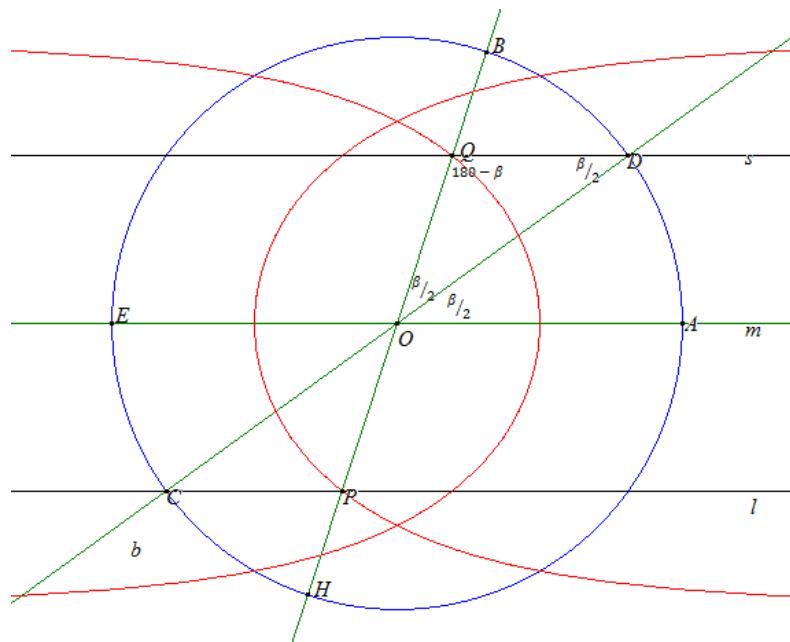


Figura 31: deducción ecuación polar de la trisectriz de Delanges

Se sabe por la construcción que $\angle QOD \cong \angle DOA$ y que $\overleftrightarrow{QD} \parallel \overleftrightarrow{OA}$, por la ley de senos en el $\triangle OQD$, se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}(180 - \beta)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{(OQ)}$$

$$(OQ) = \frac{a \sen\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sen(\beta)}$$

$$(OQ) = \frac{a}{2\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

Por lo tanto la ecuación polar de la curva es

$$\rho = \frac{a}{2\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

Su ecuación cartesiana es:

$$(x^2 + y^2 - 2a^2)^2 = x^2(y^2 + y^2)$$

4.2.7.3 Aplicación para la trisección de ángulos

Para trisecar un ángulo con esta curva se debe realizar la siguiente construcción (figura 34).

Sea G la intersección entre la trisectriz y la recta m . Se traza la circunferencia C_2 con centro en O y radio OG , Sea F un punto sobre la circunferencia C_2 , se traza la \overrightarrow{OF} . Se traza la recta t tangente a la circunferencia C_2 que pasa por F , sea R la intersección entre la trisectriz de Delanges y la recta t . se traza la \overrightarrow{OR} . La medida del $\angle ROF$ es un tercio de la medida del $\angle GOF$.

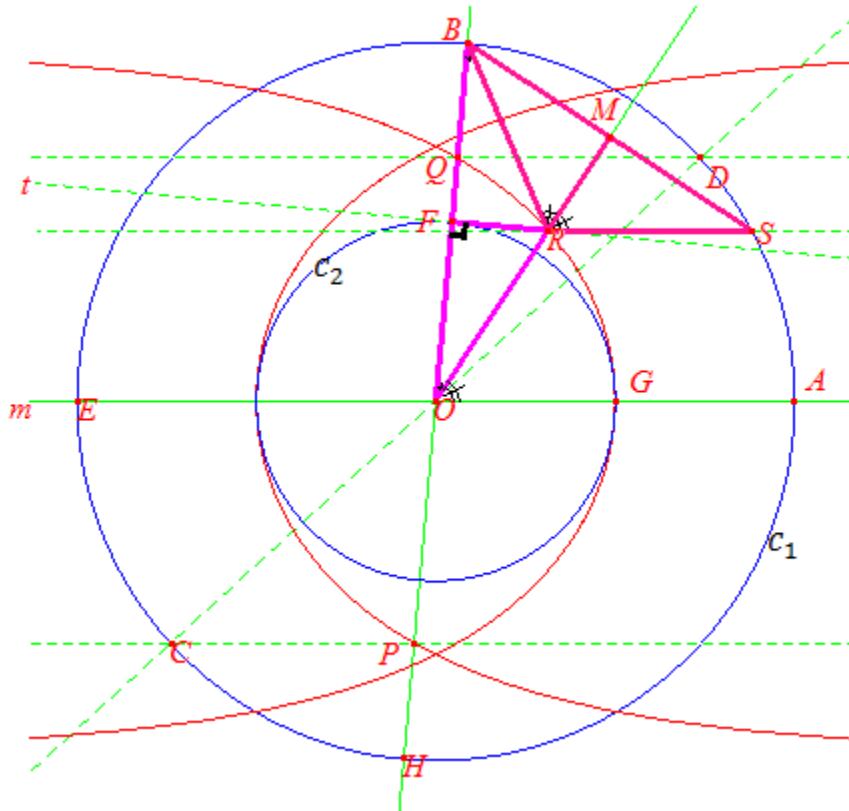


Figura32: trisección de un ángulo con la trisectriz de Delanges

Demostración (figura 34).

De la construcción de la curva se sabe que \overrightarrow{OD} es bisectriz del $\angle AOB$ por lo tanto $\angle AOD \cong \angle DOB$, como $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{QD}$ se tiene que $\angle AOD \cong \angle QDO$ por ser alternos internos, por transitividad los $\angle DOQ \cong \angle QDO$. Por el teorema reciproco de triángulos isósceles, se tiene que $\triangle OQD$ es isósceles, por lo tanto $\overrightarrow{OQ} \cong \overrightarrow{QD}$.

Como el punto Q genera la trisectriz de Delanges entonces cualquier punto que pertenezca a esta curva será equidistante al punto O y al punto de intersección entre la recta paralela a \overrightarrow{OA} por dicho punto y la circunferencia C_1 . Como $\overrightarrow{RS} \parallel \overrightarrow{OA}$ y el punto R pertenece a la curva, se tiene que $\overrightarrow{OR} \cong \overrightarrow{RS}$. Como el punto G también pertenece a la curva y a la \overrightarrow{OA} se

tiene que $\overrightarrow{OG} \cong \overrightarrow{GA}$, es decir la circunferencia c_2 tiene la mitad del radio de la circunferencia c_1 entonces $\overrightarrow{OF} \cong \overrightarrow{FB}$.

Como se tiene que $\overrightarrow{FR} \perp \overrightarrow{OB}$ entonces se cumple que $\angle OFR \cong \angle BFR$, por el teorema de congruencia de triángulos LAL, los $\Delta OFR \cong \Delta BFR$ luego $\overrightarrow{RB} \cong \overrightarrow{RO}$ y $\angle FOR \cong \angle FBR$. Como el $\angle MRB$ es externo al ΔBRO , se tiene que $m \angle MRB = 2 m \angle FOR$.

Como $\overrightarrow{RB} \cong \overrightarrow{RO}$ y $\overrightarrow{OR} \cong \overrightarrow{RS}$, por transitividad $\overrightarrow{BR} \cong \overrightarrow{RS}$ por lo tanto el ΔSRB es isósceles. Se tiene entonces que $\angle BSR \cong \angle SBR$, por el criterio de congruencia de triángulos rectángulos LLA los $\Delta BRM \cong \Delta SRM$ entonces $\angle BRM \cong \angle SRM$ y como $\overrightarrow{RS} \parallel \overrightarrow{OA}$

$\angle SRM \cong \angle AOR$ por ser alternos internos, por transitividad $m \angle SRM = 2 m \angle FOR$, el $m \angle AOB = m \angle AOR + m \angle ROB$ se tiene finalmente por sustitución que $m \angle AOB = 3 m \angle ROB$, es decir

$$\frac{1}{3} m \angle AOB = m \angle ROB$$

4.2 DEDUCCIONES GEOMÉTRICAS (ANALÍTICAS)

A continuación se mostrarán las curvas cuya demostración de la trisección de ángulos, se realizó de forma analítica. Para esto, se tuvo en cuenta que si θ es la medida de un ángulo, entonces $0 < \theta < 180$. Dado que la función $\tan x$ es biyectiva en $(0, 180) - \{90\}$, entonces si $\tan(x) = \tan(y)$, se tiene que $x = y$.

4.2.1 Espiral de Arquímedes

Arquímedes (287 a.C. – 212 a.C.), considerado como uno de los más grandes matemáticos, se muestra en sus obras como “*el investigador*”, pues estas son catalogadas como *memorias científicas* (Babini, 1966, p.7), en ellas retoma lo ya conocido y aporta nuevos elementos.

Cumpliendo con las exigencias de su época, demostró grandes hallazgos matemáticos, de los cuales se conservan doce escritos, cuyo orden no es posible establecer con certeza. Heiberg (citado Babini, 1966) “*propone el siguiente: 1. De la esfera y el cilindro, 2. De la medida del círculo, 3. De los conoides y los esferoides, 4. De las espirales, 5. Del Equilibrio de los planos, 6. El arenario, 7. Cuadratura de la parábola, 8. De los cuerpos flotantes, 9. a 12. Cuatro escritos que comprenden el Método*” (p.7).

Arquímedes con sus investigaciones logra avanzar más que los grandes matemáticos de su época, diseña su propio método, utiliza medios mecánicos para realizar sus conjeturas, trasciende la geometría elemental y se convierte en un experto del “algebra geométrica”,

denominada así por Zeuthen (Babini, 1966, p.13), adicionalmente sus obras fueron muy elaboradas, siguiendo procesos rigurosos. Estudiosos del método de Arquímedes han establecido analogía con los métodos infinitesimales actuales.

En la misma definición de *la espiral* hay un cambio, en cuanto a la geometría de la época, puesto que se involucra el movimiento de un punto a lo largo de una recta, mientras dicha recta también gira alrededor de otro punto fijo, los dos puntos coinciden inicialmente y los movimientos son uniformes. Gomes (1905) menciona que las demostraciones de las propiedades de la espiral parecían largas y complejas a *Libri*, sin embargo Peyrard (traductor de las obras de Arquímedes) explica que si se conocen los antiguos métodos de investigación geométrica, dichas demostraciones no presentan dificultad alguna, es decir son claras y sencillas.

4.3.1.1 Construcción

La espiral de Arquímedes se construye de la siguiente manera (figura 35).

Se trazan los ejes coordenados donde O el origen, se traza la circunferencia C_1 con centro en O y radio k (número real positivo). Sea B la intersección entre la circunferencia C_1 y la recta h , sea A un punto sobre la circunferencia C_1 , se traza \overrightarrow{OA} y \overrightarrow{BA} . Sea m la medida del arco BA , se traza la circunferencia C_2 con centro en O y radio m . Sea P la intersección entre la recta OA y la circunferencia C_2 . El lugar geométrico generado por P cuando se mueve A sobre la circunferencia C_1 es la Espiral de Arquímedes.

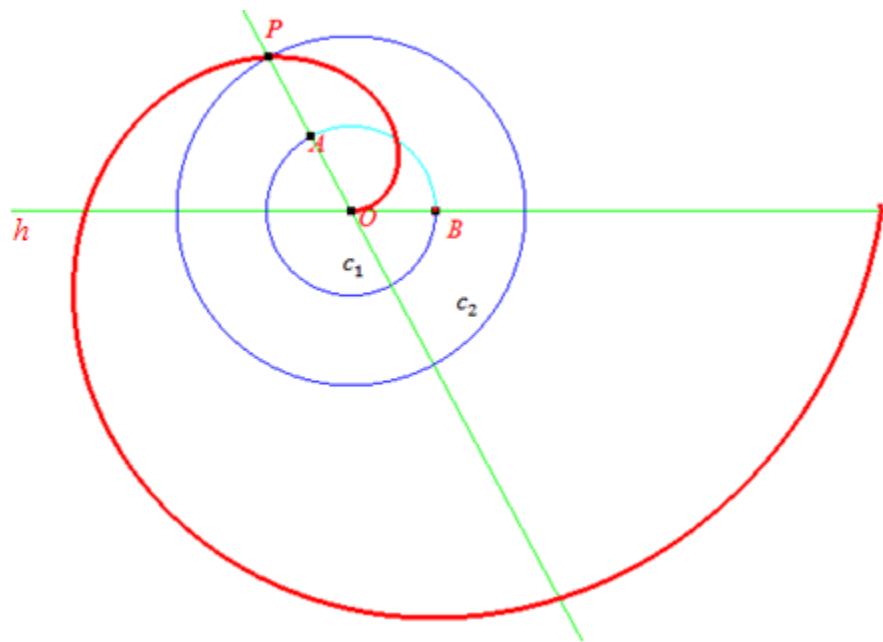


Figura 33: Espiral de Arquímedes

4.3.1.2 Deducción de la ecuación polar

Su ecuación polar se halla de la siguiente manera (figura 36).

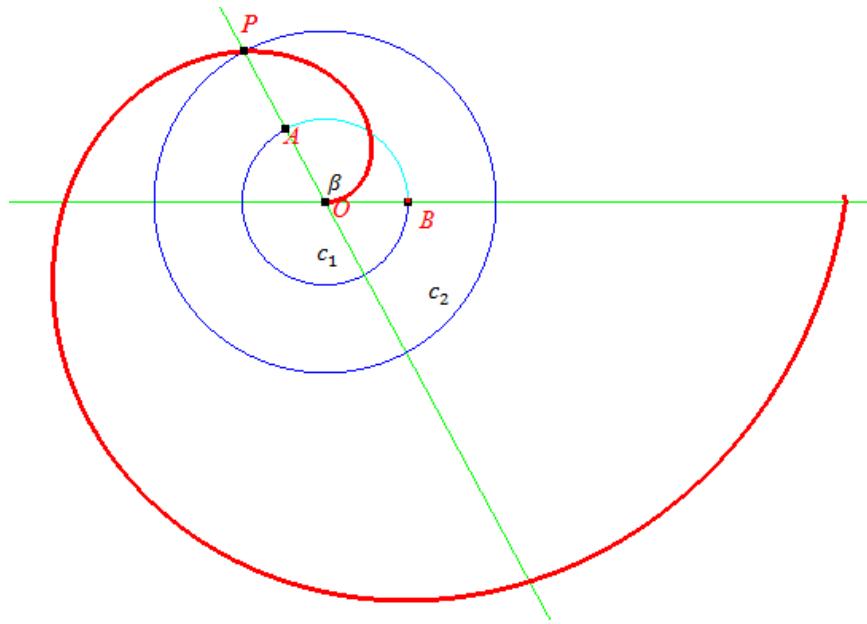


Figura 34: deducción ecuación polar de la Espiral de Arquímedes

$$(OB) = a, \quad m \angle AOB = \beta$$

La medida de $\widehat{AB} = a\beta$, por definición de longitud de arco

Cómo $m(\widehat{AB}) = (OP)$, entonces su ecuación polar es

$$(OP) = a\beta$$

Y su ecuación cartesiana es $\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right)$

4.3.1.3 Aplicación para la trisección del ángulo⁶

Para trisecar un ángulo con esta curva se debe realizar lo siguiente (figura 37).

Se triseca el \overline{OP} y se obtienen los puntos S y R , se trazan las circunferencias C_3 y C_4 concéntricas en O y radios con centro en OS y OR respectivamente. Sean Y y T las intersecciones entre las circunferencias C_4 y C_3 y la Espiral de Arquímedes, finalmente se

⁶La demostración siguiente se basa en la elaborada por Melgarejo, N.(2011).

trazan las \overrightarrow{OT} y \overrightarrow{OY} . La medida del ángulo BOT es la tercera parte de la medida del ángulo BOA .

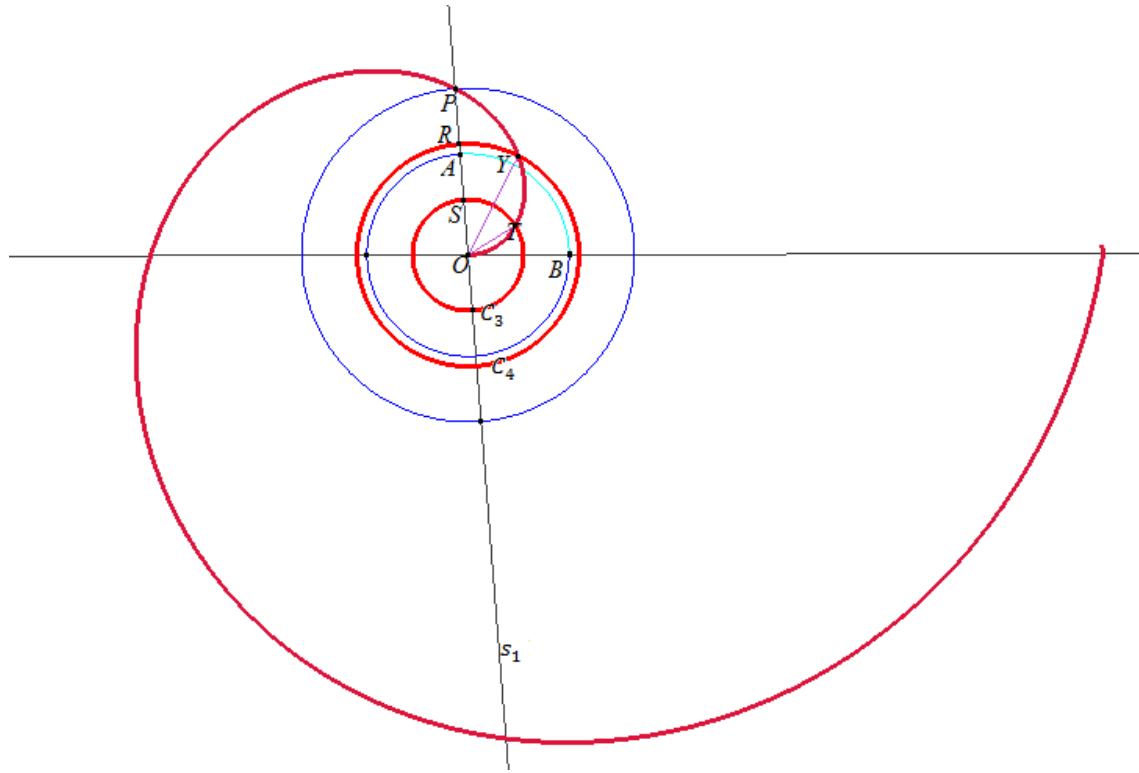


Figura 37: trisección del ángulo con la Espiral de Arquímedes

Dada la ecuación cartesiana de la espiral de Arquímedes (figura 37)

$$x^2 + y^2 = a^2 \arctan^2 \left(\frac{y}{x} \right)$$

Sea s_1 la recta que pasa por el origen y forma un ángulo α con el eje de las abscisas, dicha recta tiene como ecuación $y = m_1 x$, donde $m_1 = \tan(\alpha)$.

Se halla el punto de intersección entre la espiral y la recta de la siguiente manera

$$x^2 + (m_1 x)^2 = a^2 \arctan^2 \left(\frac{m_1 x}{x} \right)$$

Al despejar x^2 se obtiene

$$x^2 = \frac{a^2 \arctan^2(m_1)}{1 + m_1^2}$$

Es decir

$$x = \frac{a \arctan(m_1)}{\sqrt{1 + m_1^2}}$$

Se reemplaza el valor de x para obtener y de la siguiente manera

$$y = m_1 \frac{a \arctan(m_1)}{\sqrt{1 + m_1^2}}$$

Por lo tanto el punto de intersección P tiene como coordenadas

$$P = \left(\frac{a \arctan(m_1)}{\sqrt{1 + m_1^2}}, m_1 \frac{a \arctan(m_1)}{\sqrt{1 + m_1^2}} \right)$$

Se continúa hallando el punto S que es la tercera parte del \overline{OP} , dicho punto tiene como coordenadas:

$$S = \left(\frac{a \arctan(m_1)}{3\sqrt{1 + m_1^2}}, m_1 \frac{a \arctan(m_1)}{3\sqrt{1 + m_1^2}} \right)$$

Por lo tanto la distancia del punto O al punto S será

$$d(O, S) = \sqrt{\left(\frac{a \arctan(m_1)}{3\sqrt{1 + m_1^2}} \right)^2 + \left(m_1 \frac{a \arctan(m_1)}{3\sqrt{1 + m_1^2}} \right)^2}$$

$$d(O, S) = \sqrt{\frac{a^2 \arctan^2(m_1) + m_1^2 a^2 \arctan^2(m_1)}{9(1 + m_1^2)}}$$

$$d(O, S) = \sqrt{\frac{a^2 \arctan^2(m_1)(1 + m_1^2)}{9(1 + m_1^2)}}$$

$$d(O, S) = \frac{a \arctan(m_1)}{3}$$

Sea c_3 la circunferencia con centro en O y radio $\frac{a \arctan(m_1)}{3}$ cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 \arctan^2(m_1)}{9}$$

Al despejar y se tiene que

$$y = \sqrt{\frac{a^2 \arctan^2(m_1)}{9} - x^2}$$

Se halla el punto T de intersección entre c_3 y la espiral de la siguiente manera

$$\frac{a^2 \arctan^2(m_1)}{9} = a^2 \arctan^2\left(\frac{y}{x}\right)$$

Se reemplaza el valor de y obteniendo

$$\frac{a^2 \arctan^2(m_1)}{9} = a^2 \operatorname{arctg}^2\left(\frac{\sqrt{\frac{a^2 \arctan^2(m_1)}{9} - x^2}}{x}\right)$$

Al operar se obtiene

$$\frac{1}{3} \arctan(m_1) = \arctan\left(\frac{\sqrt{\frac{a^2 \arctan^2(m_1)}{9} - x^2}}{x}\right)$$

Como $m_1 = \tan(\alpha)$ se tiene que

$$\frac{1}{3} \alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{\frac{a^2 \alpha^2}{9} - x^2}}{x}\right)$$

Se aplica \tan^2 y se obtiene

$$\tan^2\left(\frac{1}{3} \alpha\right) = \tan^2\left(\arctan\left(\sqrt{\left(\frac{a \alpha}{3x}\right)^2 - 1}\right)\right)$$

$$\tan^2\left(\frac{1}{3} \alpha\right) = \left(\frac{a \alpha}{3x}\right)^2 - 1$$

$$\tan^2\left(\frac{1}{3} \alpha\right) + 1 = \left(\frac{a \alpha}{3x}\right)^2$$

Por lo tanto la coordenada en x es

$$x = \frac{1}{3} \frac{a\alpha}{\sqrt{\tan^2\left(\frac{1}{3}\alpha\right) + 1}}$$

Al reemplazar x en

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 \alpha^2}{9}$$

Se obtiene

$$y = \sqrt{\frac{a^2 \alpha^2}{9} - \frac{a^2 \alpha^2}{9 \tan^2\left(\frac{1}{3}\alpha\right) + 1}}$$

Por lo tanto

$$y = \frac{a\alpha}{3} \tan\left(\frac{1}{3}\alpha\right) \sqrt{\frac{1}{\tan^2\left(\frac{1}{3}\alpha\right) + 1}}$$

Es decir las coordenadas de T son

$$T = \left(\frac{1}{3} \frac{a\alpha}{\sqrt{\tan^2\left(\frac{1}{3}\alpha\right) + 1}}, \frac{a\alpha}{3} \tan\left(\frac{1}{3}\alpha\right) \sqrt{\frac{1}{\tan^2\left(\frac{1}{3}\alpha\right) + 1}} \right)$$

Finalmente se halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos T, O y forma un ángulo θ con el eje de las abscisas.

$$\tan\theta = \frac{\frac{a\alpha}{3} \tan\left(\frac{1}{3}\alpha\right) \sqrt{\frac{1}{\tan^2\left(\frac{1}{3}\alpha\right) + 1}}}{\frac{a\alpha}{3 \sqrt{\tan^2\left(\frac{1}{3}\alpha\right) + 1}}}$$

$$\tan\theta = \frac{3a\alpha \tan\left(\frac{1}{3}\alpha\right) \sqrt{\frac{1}{\tan^2\left(\frac{1}{3}\alpha\right) + 1}} \sqrt{\tan^2\left(\frac{1}{3}\alpha\right) + 1}}{3a\alpha}$$

$$\tan\theta = \tan\left(\frac{1}{3}\alpha\right)$$

Por lo tanto

$$\theta = \frac{1}{3}\alpha$$

De esta manera queda demostrado que la espiral de Arquímedes triseca el ángulo α .

4.2.2 Trisectriz de Maclaurin

Colin Maclaurin, Kilmoden 1698 – Edimburgo 1746, matemático británico, amigo de Newton. En 1740 compartió con Euler y Bernoulli, el premio ofrecido por la Academia de las Ciencias de Paris a un ensayo sobre las mareas. En sus obras *Geometría orgánica* en 1720, expone un método de generación de las cónicas, en *Treatise of fluxions*, estudió la trisectriz, además de sentar la bases para la fundamentación lógica del cálculo y en el Tratado del álgebra, aplicó el método de los determinantes a la resolución de ecuaciones con cuatro incógnitas, descubrió la *Regla de Cramer* hacia 1729,

La trisectriz de Maclaurin hace parte de las curvas denominadas Cúbicas circulares, la cuales son envolventes de círculos, cuyos centros se hallan situados, según los casos, sobre distintas paráolas.

4.3.2.1 Construcción de la Trisectriz de Maclaurin

Se traza el plano cartesiano, sea a un real positivo, se traza la recta $x = -2a$, sea $B(4a, 0)$. Se traza la circunferencia C_1 con centro en B y radio $4a$ y sea P un punto sobre C_1 , se traza \overleftrightarrow{OP} y sea R el punto de intercesión entre las rectas $x = -2a$ y \overleftrightarrow{OP} , sea M el punto medio de \overline{RP} . El lugar geométrico generado por M cuando se mueve P sobre C_1 es la Trisectriz de Maclaurin. (figura 38)

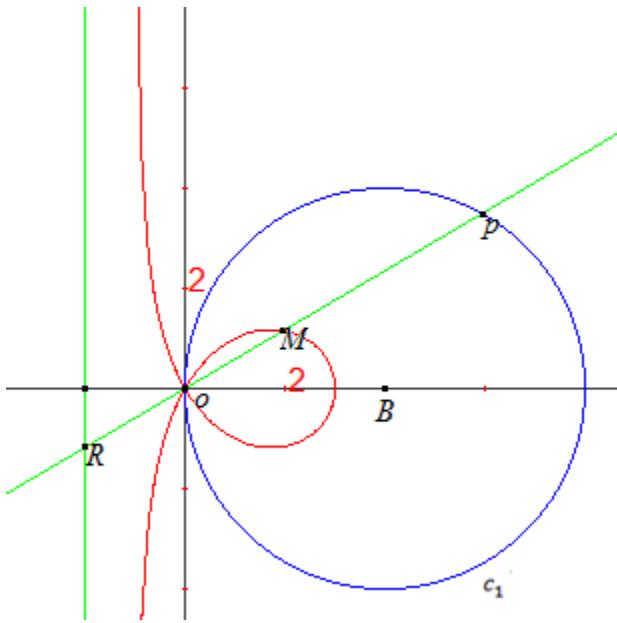


Figura38:Trisectriz de Maclaurin

4.3.2.2 Deducción de la ecuación paramétrica

Sus ecuaciones paramétricas se hallan de la siguiente manera (figura 39)

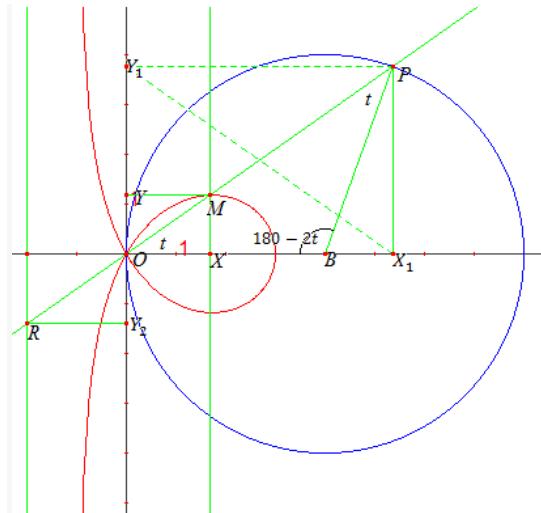


Figura 39: deducción de la ecuación paramétrica de le Trisección de Maclaurin

Se traza $\overrightarrow{PX_1} \perp \overrightarrow{OB}$, \overrightarrow{PB} , $\overrightarrow{MX} \perp \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{PY_1} \parallel \overrightarrow{OBRY_2} \parallel \overrightarrow{OB}$

La medida del $m \angle POB = t$, $(OB) = (BP) = 4a$, el ΔOBP es isósceles por ser \overline{PB} y \overline{OB} radios de C_1

$$\angle POB \cong \angle OPB$$

$$m \angle PBO = 180 - 2t.$$

Por ley de senos en el ΔOBP

$$\frac{\sin(180 - 2t)}{OP} = \frac{\sin t}{4a}$$

$$(OP) = \frac{4a \sin(180 - 2t)}{\sin t}$$

$$\cos t = \frac{(Ox_1)}{(OP)}$$

$$(Ox_1) = \cos t (OP)$$

$$(Ox_1) = \cos t \frac{4a \sin(180 - 2t)}{\sin t}$$

M es punto medio del \overline{RP} , la coordenada para este punto en el eje x es:

$$x = \frac{-2a + OX_1}{2} = \frac{-2a + 4a \cot t \sin(180 - 2t)}{2}$$

$$x = -a(1 - 4(\cos t)^2)$$

Se llamay₁ a la intersección de la recta perpendicular al eje Y por el punto P con el eje Y . El ángulo formado por los puntos P , y_1 y O es recto, por lo tanto:

$$\sin t = \frac{(Oy_1)}{(OP)}$$

$$(Oy_1) = \sin t (OP)$$

$$(Oy_1) = \sin t \frac{4a \sin(180 - 2t)}{\sin t}$$

$$(Oy_1) = 4a \sin(180 - 2t)$$

Como los $\Delta ORC \approx \Delta OPx_1$ entonces.

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{2a}{y_2}$$

$$y_2 = \frac{2aY_1}{X_1} = \frac{2a(4a \sin(180 - 2t))}{4a \sin(180 - 2t) \cot t}$$

$$y_2 = 2a \tan t$$

Pero como y_2 está por debajo del eje x , entonces el punto que le corresponde es $y_2 = -2a \tan t$.

Luego como el punto M es punto medio del \overline{RP} , la coordenada correspondiente para este punto en el eje Y es:

$$y = \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{-2a \tan t + 4a \sin(180 - 2t)}{2}$$

$$y = -a(\tan t - 2 \sin(180 - 2t))$$

$$= -a(\tan t - 2(\sin(2t)))$$

$$= -a(\tan t - 2(2 \sin t \cos t))$$

$$y = -a(\tan t - 4 \sin t \cos t)$$

Por lo tanto las ecuaciones paramétricas son:

$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x = -a(1 - 4(\cos t)^2) \\ y = -a(\tan t - 4 \sin t \cos t) \end{cases}$$

Su ecuación cartesiana es: $y^2(a + x) = x^2(3a - x)^2$

4.3.2.3 Aplicación para la trisección de un ángulo

La medida del ángulo z es igual a la suma de las medidas de los ángulos t y w , esto es:

$$z = t + w \text{ (figura 37)}$$

Se define:

$$\begin{aligned} m_1 &= \tan z = \frac{y}{x - 2a} \\ &= \frac{-a(\tan t - 4 \sin t \cos t)}{-a(1 - 4(\cos t)^2) - 2a} \\ m_1 &= \frac{\tan t - 4 \sin t \cos t}{3 - 4(\cos t)^2} \\ m_2 &= \tan t \end{aligned}$$

La pendiente entre dos rectas está definida como:

$$\tan w = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{\tan t - 4 \sin t \cos t}{3 - 4(\cos t)^2} - \tan t}{1 + \frac{\tan t - 4 \sin t \cos t}{3 - 4(\cos t)^2} \tan t}$$

$$\tan w = \tan(2t)$$

$$\tan w = \tan(2t)$$

$$w = 2t$$

$$z = t + w$$

$$z = t + 2t = 3t$$

$$z = 3t$$

$$t = \frac{1}{3}z$$

5. CONCLUSIONES

A partir del desarrollo de este trabajo nos fue posible conocer hechos que dieron lugar a diversos problemas de la geometría, como la cuadratura del círculo, duplicación del cubo y la trisección del ángulo términos, nociones y construcciones utilizados para abordar el problema de la trisección de ángulos mediante curvas mecánicas. Resaltamos entre estos asuntos, aquel método que utiliza polígonos regulares trisecar ángulos especiales, ; la demostración realizada por Wantzel sobre la imposibilidad de resolver este problema con regla y compás; la forma de abordar el problema a lo largo de la historia, conociendo diferentes curvas mecánicas que varios personajes propusieron para solucionarlo y cómo algunas de tales curvas, solucionan otros problemas (e.g. la trisectriz de Hipás que permite resolver la cuadratura del círculo, y con ello, la construcción de $\sqrt{\pi}$).

La elaboración de este estudio nos permitió observar que no son de fácil acceso las investigaciones realizadas o publicadas sobre los problemas clásicos de la geometría que involucran la trisección de ángulos mediante curvas mecánicas; los libros que abordan estos temas se han centrado sobre todo en la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo.

Para finalizar, consideramos que nuestro trabajo constituye una herramienta y fuente de consulta para quienes sientan interés por estudiar temas similares. Además de aportar un material bibliográfico para algunos espacios académicos de la Licenciatura en Matemáticas, como por ejemplo, Geometría Analítica.

Para finalizar, teniendo en cuenta las consultas realizadas y las demostraciones de la trisección de las nueve curvas mecánicas estudiadas, el uso de las tecnologías y las dificultades presentadas durante el proceso, referentes a las fuentes de información; consideramos que nuestro trabajo constituye una herramienta de apoyo y fuente de consulta para quienes sientan interés por estudiar temas similares. Además de aportar un material bibliográfico para algunos espacios académicos de la Licenciatura en Matemáticas, como por ejemplo, Geometría Analítica.

6. REFERENCIAS

- Apostol, T. (1973). Cálculo. España: Reverté
- Babini, J. (1966). Introducción. En Arquímedes, *El Método* (pág. 96). Buenos Aires: EUDEBA.
- Blanco, C. (2003). La Atenas del siglo V. Los sofistas. *Revista de la facultad de educación de Albacete*. 18, 11-30. Recuperado de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1031816>
- Bombal, F. (2012). *La cuadratura del círculo: historia de una obsesión*. *Revista Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. 2 (105), 241-258. Recuperado de <http://www.rac.es/ficheros/doc/01019.pdf>
- Echegaray, J. (1887). *Disertaciones matemáticas sobre la cuadratura del círculo, el método de Wantzel*. Madrid.
- Gomes, F. (1905). Tratado de las curvas especiales notables. Madrid: Gaceta de Madrid.
- González, H. (2007). Estudio de 16 teoremas matemáticos sobre la circunferencia y sus ángulos. Universidad de Santiago de Chile.
- González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista Suma*. Febrero. No. 45. pp. 17-28.
- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Vol. II. Madrid: Alianza Editorial.
- Labarga, E. (2013). La teoría del centro mínimo de José Zaragoza y el teorema de Ceva. España: Universidad de la Rioja. Recuperado de http://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/TFE000324.pdf
- Melgarejo, N. (2011). Trisección de un ángulo mediante la espiral de Arquímedes. Recuperado de <http://es.scribd.com/doc/48608500/Triseccion-de-un-angulo-mediante-espiral-de-arquimedes>
- Mitchell, H. (2006). *Raíces de la sabiduría*. México: Thomson
- Morales, L. (2002). La cuadratura. *Revista de Ciencias Universidad Nacional Autónoma de México*. 65, 1-12. Recuperado de <http://www.revistas.unam.mx/index.php/cns/article/view/11812/11134>
- Morán, V. (2013). Implementación de algoritmos para la manipulación de curvas concoides en diseño geométrico. Universidad Politécnica de Madrid. Recuperado de http://oa.upm.es/21271/1/PFC_VALERIO_MORAN_COCO.pdf
- Olalquiaga, P., Olalquiaga, A. (2005). El libro de las curvas. España: Fundación Esteyco. Recuperado de http://www.esteycoenergia.es/ark_Doc/100930174709_El_libro_de_las_Curvas.pdf
- Pedreño, A. (2004). Ecuaciones lineales. Didáctica y perspectiva histórica. *Números* 57, 3-18. Recuperado de <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/57/Articulo01.pdf>
- Ramírez, R. (2011). Construcción de polígonos regulares. Universidad Nacional de

Colombia, Bogotá.

- Rochera, J. (2005). Costrucciones Geomeétricas: *Taller de Talentos Matemáticos*, Zaragoza.
- Rodríguez, Y. (2008). Algunas curvas famosas: mecanismos y problemas asociados. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
- Ruiz de la Rosa, J. (1987). Geometría Fabrorum: o la antítesis de las teorías sofisticadas. Boletín académico. 7, 52-59. Recuperado de http://ruc.udc.es/dspace/bitstream/2183/5149/1/ETSA_7-7.pdf