FORMULACIÓN DE UNIDADES DIDÁCTICAS, UN PROPÓSITO DE ENSEÑANZA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

ALGUNAS CONSIDERACIONES A PARTIR DE UN ESTUDIO DE CASO

AUTORES

ANDRÉS ANÍBAL GUERRA GONZÁLEZ

2001140019

ORLANDO RAFAEL BARRIOS BUSTILLO

2001240007

ASESORA

CLAUDIA SALAZAR AMAYA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

PROYECTO CURRICULAR LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, 2006

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN ANALÍTICO

Tipo de Monografía: Monografía asociada a un proyecto de investigación

Nombre: La formulación de unidades didácticas, un propósito de enseñanza en la formación de profesores. *Algunas consideraciones a partir de un estudio de caso*

Autores: Andrés Aníbal Guerra González

Código 2001140019

Orlando Rafael Barrios Bustillo

Código 2001240007

Asesora: Claudia Salazar Amaya

Términos Clave: Formación de Profesores, Unidades Didácticas, Didáctica de las Matemáticas, Análisis Didáctico, Análisis de Contenidos, Organizadores Curriculares, Análisis Fenomenológico, Representaciones, Modelación, Evolución Histórica, Concepto de Función.

Síntesis: La formulación de unidades didácticas desempeña un papel trascendental en el ejercicio docente y, por tanto, su enseñanza en la formación inicial de licenciados debe ser objeto de estudio. Planificar unidades didácticas precisa una reflexión profunda en torno a: el contenido específico dispuesto para la enseñanza, los objetivos de enseñanza y de aprendizajes esperados, las formas de trabajo en el aula, y las herramientas de evaluación de los aprendizajes de los estudiantes así como de la propuesta didáctica. En este documento se presenta una serie de consideraciones conceptuales junto con varias actividades de clase propuestas para los estudiantes de un espacio académico del Proyecto Curricular de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, con miras desarrollar un análisis referido a uno de tales aspectos mencionados: el contenido, a través del análisis fenomenológico de los conceptos implicados, de las representaciones de los objetos matemáticos involucrados, del proceso de modelación en Matemáticas, y del estudio de la evolución histórica de los conceptos que configuran el contenido seleccionado.

1 INTRODUCCIÓN

La planificación de clases de Matemáticas es una competencia fundamental del profesor en el ejercicio de su labor. Como lo manifiesta Gómez (2006) el profesor tiene a su cargo, por lo menos dos tipos de planificación que caracterizarán su actividad: una global a partir de la cual se reflexiona sobre el desarrollo curricular de un curso completo, y una de carácter local con la que el profesor organiza la enseñanza de un tópico particular de la disciplina a partir de una reflexión, tanto disciplinar como didáctica, en torno a los objetos de conocimiento implicados en el proceso.

Las unidades didácticas son los instrumentos por excelencia con los que el profesor puede llevar a cabo la planificación. A partir de su formulación, pueden concretar sus reflexiones en torno a: las formas en que puede presentarse el contenido, la secuencia de actividades que compondrán la gestión en el aula, la forma en que se trabajarán dichas actividades, los instrumentos de evaluación de los aprendizajes, entre otros aspectos.

En Educación Matemática estas reflexiones hacen parte de lo que se denomina análisis didáctico. Uno de sus componentes fundamentales es el análisis del contenido, que básicamente está conformado por el estudio de las representaciones asociadas a los objetos matemáticos que configuran el contenido, de los diferentes fenómenos tanto del mundo físico como del matemático que se asocian a los conceptos matemáticos involucrados, del proceso de modelación de las situaciones relacionadas con los fenómenos identificados, y del análisis de la evolución histórica de los conceptos matemáticos. En la formulación de las unidades didácticas estas actividades aportan conocimiento teórico y práctico referido a la propia gestión de actividades en clase de Matemáticas, a partir de la identificación de aspectos relativos al aprendizaje del conocimiento matemático implicado y, por tanto, relacionados con la forma en que se puede proponer la enseñanza de los contenidos dispuestos.

En este documento se estructura un marco conceptual referido a la formulación de unidades didácticas como propósito de enseñanza en la formación de licenciados en Matemáticas. Esta idea fue seleccionada de una de las cuestiones abiertas que resultaron del proyecto de investigación Rutas Pedagógicas en la formación de licenciados en

Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, y su desarrollo en esta monografía se concreta en la formulación de consideraciones conceptuales acompañadas de un conjunto de actividades de clase, sugeridas para un espacio académico del Proyecto Curricular de Licenciatura en el que el diseño de las unidades didácticas es el objeto principal de estudio, orientadas a ilustrar los beneficios que tiene el estudio de este tópico en la formación de profesores en cuanto a las adquisiciones conceptuales que requiere un educador matemático para ejercer su labor.

2 JUSTIFICACIONES Y ANTECEDENTES

En el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional se ha desarrollado un marco de referencia que regula la práctica educativa en el Proyecto Curricular de Licenciatura en Matemáticas, y que contiene una serie de objetivos, logros, indicadores de logro y actividades para los espacios académicos que la componen, con miras a orientar una ruta de tal manera que el trabajo académico en cada uno sea coherente durante el proceso de formación.

Una de las actividades más significativas en el proceso de formación de los licenciados en Matemáticas consiste en la elaboración de unidades didácticas. A través de ella, los estudiantes concretan sus reflexiones y análisis alrededor de una temática específica del área de matemáticas, y además, tiene lugar en varios momentos de la práctica educativa, siendo así susceptible de una evaluación continua y progresiva que permita su adaptación a nuevos contextos. Varios autores (Brincones, 1993; Furió, 1994; Porlán y Martín, 1994; Jiménez y Sanmartí, 1995; Porlán et. Al., 1996; Kennedy, 1998; citados en Sánchez, 1996) relacionan el ejercicio de formular unidades didácticas con una de las actividades relativas al conocimiento profesional del licenciado en Matemáticas, teniendo como referente una concepción del profesor en formación, en la que trasciende de ser un técnico que aplica instrucciones y se convierte en un constructor que procesa información, toma decisiones, genera rutinas y conocimiento práctico, y posee creencias que influyen en su actividad profesional (Marcelo, 1987 y 1994; citado en Mellado, 1996).

Proyecto de Aula es uno de los espacios académicos definidos para estudiantes de sexto semestre del Proyecto Curricular de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. En él, se contribuye a la generación del conocimiento profesional de los futuros licenciados en matemáticas, en aspectos relacionados con su futuro rol como educadores matemáticos, capaces de reflexionar acerca de su quehacer con miras a mejorar la enseñanza de las matemáticas. Uno de los fines que se han contemplado para este espacio académico está relacionado con el diseño de una unidad didáctica para la enseñanza de algún tópico de la matemática escolar, involucrado en el desarrollo del pensamiento variacional. Así, en el desarrollo del programa de Proyecto de Aula se sitúa el primer momento en el que los estudiantes se enfrentan a la planificación de "propuestas didácticas" en el área de matemáticas.

En el año 2004, este espacio académico fue seleccionado como espacio de observación y estudio de la investigación Rutas Pedagógicas en la Formación de Licenciados en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Salazar, Leguizamón y Andrade, 2004), situada en el campo de la Educación Matemática en la cual participaron los autores de esta monografía en calidad de Monitores de Investigación. En ella se obtuvieron evidencias de cómo se desarrollan algunos procesos de enseñanza y de aprendizaje en la temática correspondiente a la formulación de unidades didácticas, del espacio académico en cuestión. A partir del análisis hecho, las investigadoras enunciaron las siguientes caracterizaciones:

En primer lugar, expresan un cuestionamiento que tiene que ver con una etapa del diseño de la unidad didáctica, en la que se precisa analizar el núcleo conceptual de las matemáticas escolares que ha sido seleccionado:

> "Aunque el profesor intenta problematizar el conocimiento de los estudiantes sobre el tema elegido para la unidad, valdría la pena cuestionar si con la formulación de múltiples preguntas, a las que en ocasiones los estudiantes no tienen respuesta o tienen una respuesta sobre la que no se promueve la discusión, se consigue realmente cuestionar este conocimiento, mostrarlo insuficiente y promover su reconstrucción, profundización y complejización. Desde los planteamientos de Bachelard, mientras no se presente una situación desequilibrante que permita reconocer la inoperancia o insuficiencia del conocimiento no es posible superar el error (Cantoral, 2003)".

En segundo lugar, formulan un interrogante en relación con el análisis que, en la misma etapa del diseño de la unidad didáctica, debe hacerse de algunos contenidos propios de la Didáctica de las Matemáticas, entre otros, el análisis didáctico:

> "Pareciera que el profesor supone que estos conceptos son ya conocidos por los estudiantes, la pregunta es si estos conocimientos no merecerían ser cuestionados como los objetos matemáticos tratados en el curso, para ser profundizados y reconstruidos. Al igual que con el conocimiento matemático, el conocimiento didáctico debe considerar procesos de validación e institucionalización, de lo contrario, es posible que los significados que se pongan en juego en la clase sean los significados personales y mantengan gran distancia con los significados institucionales (Godino, 1994) pretendidos por el profesor".

En tercer lugar, afirman que

> "Es obvio que el trabajo invertido por los estudiantes en el desarrollo de la unidad didáctica puede aportar a mejorar o ampliar su comprensión acerca de los conceptos involucrados allí, tanto de la didáctica como de matemáticas (…), que han sido estudiados en semestres previos. Sin embargo, las discusiones que se han observado en

> clase al respecto de estos temas son pocas y superficiales, solo hacia el final se pueden caracterizar como discusiones, en las que las preguntas formuladas por el profesor lograron problematizar el conocimiento de los estudiantes".

En resumen, el estado actual de la formulación de unidades didácticas como ejercicio determinante en la formación de licenciados en Matemáticas de la UPN, muestra falencias que se pueden interpretar como el estudio poco profundo de los objetos matemáticos inmersos en la planeación de las unidades. El cuestionamiento que se formula en las clases de Proyecto de Aula con miras a problematizar el conocimiento de los estudiantes en torno a las temáticas en clase, resulta ser insuficiente para reconstruir, profundizar y complejizar el conocimiento que, se presume, tienen los estudiantes. La situación es similar en el caso de los contenidos propios de la Didáctica de las Matemáticas, particularmente, en relación con el análisis didáctico.

El reto consiste en generar un cambio en las prácticas de enseñanza que se llevan a cabo en ese espacio académico para promover un aprovechamiento óptimo de las ventajas que tiene formular dichas unidades en la formación inicial de educadores. Por lo tanto, se determinó relevante desarrollar un estudio acerca del diseño de unidades didácticas, pues mediante esta actividad se motiva una reflexión del quehacer docente que contribuirá al desarrollo de conocimiento profesional del licenciado en Matemáticas en aspectos disciplinares, didácticos y curriculares.

3 OBJETIVOS

3.1 GENERAL

Formular consideraciones, desde la Educación Matemática, sobre el diseño de unidades didácticas en la formación de licenciados en matemáticas, a partir del estudio de caso del espacio académico Proyecto de Aula del Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

3.2 ESPECÍFICOS

- Realizar una consulta bibliográfica acerca de distintos tópicos del diseño de unidades didácticas que inciden en la formación de licenciados en Matemáticas.
- A partir de la revisión bibliográfica y del estudio de caso, desarrollar un marco conceptual que permita dar cuenta de aspectos didácticos que contribuyan a la formación de los futuros licenciados en matemáticas en el diseño de unidades didácticas.
- A partir de planteamientos hechos desde la Educación Matemática y teniendo en cuenta el marco conceptual desarrollado, elaborar consideraciones que permitan que los futuros licenciados mejoren su comprensión sobre el diseño de unidades didácticas.

4 ASPECTOS RELATIVOS A LA FORMA DE TRABAJO

En este apartado se pretende sintetizar algunos de los aspectos que determinaron el desarrollo de esta monografía; se incluyen aquí tanto los hechos que impulsaron su formulación, como las actividades que han caracterizado el proceso. Un objetivo transversal de esta sección consiste en mostrar una dinámica de trabajo que puede servir de ejemplo para estudios posteriores.

4.1 PRELIMINARES

Desde hace algunos años el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP) ha abierto convocatorias para grupos de profesores y estudiantes que quieran desarrollar proyectos de investigación orientados a la optimización de las prácticas educativas de los miembros de la comunidad pedagógica de la Universidad. En el año 2004 fue aprobado uno de tales proyectos a un grupo de profesoras del Departamento de Matemáticas de la UPN, conformado por Claudia Salazar Amaya, Cecilia Leguizamón de Bernal y Luisa Andrade, y por los estudiantes Ivette Caballero, Andrés Aníbal Guerra, Olimpo Cárdenas Díaz y Orlando Barrios quienes se desempeñaron como monitores de investigación.

El proyecto, titulado Rutas Pedagógicas en la Formación de Licenciados en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, se orientó de acuerdo con las directrices de un estudio cualitativo – etnográfico y tuvo como uno de sus objetivos describir *lo que se hace* en cuatro espacios académicos de Licenciatura en Matemáticas, en relación con los procesos de formación esperados desde las disposiciones académicas de la Universidad.

En el primer periodo de la investigación y luego de haber consultado bibliografía requerida, los monitores se dedicaron a realizar una observación no participante y llevar un diario de campo de cada una de las sesiones programadas en los espacios académicos seleccionados; a saber, Cálculo Diferencial, Aritmética, Algoritmos y Proyecto de Aula. Al tiempo, se realizaban reuniones constantes del grupo en las que se socializaba lo observado, con el objetivo de determinar categorías de análisis de la información recolectada y de articular un marco conceptual para el estudio. El proceso de observación evolucionó conforme los monitores adquirían experiencia y al tiempo que se delimitaban las categorías mencionadas, pues esto permitió centrar un poco más la atención en aquellos rasgos de mayor interés para el equipo.

En el segundo periodo se analizó la información recolectada a partir de los registros de observación de los monitores y de varias entrevistas semiestructuradas que se realizaron a profesores y a estudiantes. El establecimiento de las categorías permitió organizar, analizar y sistematizar la información acopiada acerca de cada espacio académico seleccionado. Al contrastar la información teórica consultada con los presupuestos enunciados en el documento de condiciones iniciales del Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas, se determinaron algunas características del 'deber ser' en la formación de profesionales de la educación matemática deseables para los espacios académicos que cursa el futuro docente.

Específicamente, el trabajo que los monitores de investigación realizaron en este estudio consistió en la lectura de documentos sobre investigación cualitativa; las observaciones de clase que implicaron asistir a todas las clases de un espacio académico, tomar notas de campo de ellas y, en algunos casos, grabarlas en audio y video; la revisión y la digitación de las notas de campo en computador; la participación en las discusiones con los investigadores acerca de tales registros de observación de clase para afinarlos; la transcripción de las grabaciones de clase; la revisión conjunta con los investigadores de los guiones de entrevistas elaborados por estos últimos; el acompañamiento a algunas de las entrevistas y la transcripción de ellas; la colaboración a los investigadores para clasificar y organizar la información en las categorías, y en el análisis e interpretación de dicha información; la lectura comentada de los documentos producidos por los investigadores y la organización del reporte final.

Por último, en el reporte del proyecto de investigación las autoras afirman que

> "A través de su trabajo, los monitores vinculados a esta investigación, tuvieron una experiencia enriquecedora desde el punto de vista del desarrollo profesional ya que conocieron planteamientos y posiciones teóricas de distintos autores que se tuvieron en cuenta en la elaboración del marco teórico; avanzaron en el desarrollo de habilidades en: la recolección, redacción y presentación de información a partir de unos parámetros establecidos, produciendo registros cada vez más precisos y detallados; participaron en las discusiones con los investigadores y se involucraron en la interpretación de los datos;

> colaboraron en la organización de los reportes de investigación con la rigurosidad obligatoria; trabajaron cooperativamente con la responsabilidad de unas tareas específicas que al sumarlas conforman una tarea más amplia. Desde el punto de vista personal, la oportunidad de trabajar con los investigadores de manera cercana, facilitó el estrechar la relación con ellos; además los monitores han vivenciado la satisfacción de ver reconocido su trabajo de varias maneras".

Uno de los autores de este documento fue el monitor de investigación encargado de la observación del espacio académico Proyecto de Aula, mientras que el otro desempeñaba el rol de estudiante en el mismo. Esto permitió que, de forma conjunta, identificaran un aspecto relevante acerca de la formación de los licenciados en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, que ha sido objeto de diferentes discusiones académicas al interior de Departamento de Matemáticas, y que consiste en la formulación de unidades didácticas como ejercicio determinante en las prácticas educativas de los futuros docentes. Por esto último, y debido a que los autores de este trabajo han desarrollado algunas de las prácticas correspondientes al ciclo de profundización de la licenciatura y, por tanto, han estado involucrados en el proceso de elaboración de estas unidades, se ha considerado preciso hacer un estudio relativo a varios elementos de la enseñanza que inciden en la comprensión sobre el diseño de unidades didácticas. En este sentido, este trabajo puede servir como herramienta de apoyo y orientación para los profesores que tengan a cargo el espacio académico Proyecto de Aula.

4.2 DESARROLLO DEL ESTUDIO

Para concretar la intencionalidad expuesta, se definió un conjunto de objetivos que han orientado la dinámica de trabajo. Se inició con una revisión bibliográfica que ayudó a la conceptualización en torno a los aspectos relativos a la formulación de unidades didácticas en la formación de profesores, que se expandió a otros documentos necesarios para concretar la comprensión de los consultados en un principio, lo cual se extendió hasta convertirse en un ejercicio continuo durante el proceso.

A partir de esa constante búsqueda se pudo determinar una aproximación al estado del conocimiento que consistió en el registro de algunos apartados teóricos acompañados de consideraciones de los autores de este documento orientadas a determinar cuáles de tales teorías servirían como base para la consolidación del marco conceptual. Tras la discriminación de varias posturas teóricas y luego de someter lo consultado a discusiones al interior del grupo de trabajo, fue posible desarrollar el marco conceptual de este estudio.

La actividad de elaborar consideraciones que permitan a los futuros licenciados mejorar en su comprensión sobre el diseño de unidades didácticas, se acompañó de una reflexión continua en el grupo de trabajo con respecto a la manera en que se enunciarían. Inicialmente, se optó por emitir aseveraciones en relación con la elaboración de unidades didácticas como actividad loable en la formación de profesores; no obstante, la mera exposición de puntos de vista sustentados en la teoría no son suficientes para motivar un cambio en la concepción de la enseñanza con respecto a este tópico en el espacio académico Proyecto de Aula. En consecuencia, se acordó proponer un conjunto de actividades de clase orientadas a desarrollar, en los docentes en formación, comprensión en torno al ejercicio en cuestión.

Para el diseño de las actividades de clase fue necesario consultar bibliografía relativa a contenidos matemáticos específicos, pues uno de los objetivos transversales de este ejercicio fue ejemplificar algunas de las acciones determinantes en la formulación unidades didácticas en Matemáticas. Además, se consultaron apartes de algunos documentos en los que se estudian estas acciones con el referente matemático que fue seleccionado al interior del grupo de trabajo. Cabe anotar que esta selección fue producto de una concertación en la que se tuvo en cuenta, tanto las propuestas basadas en la cantidad de documentación accesible para la fundamentación conceptual del trabajo, como las sugerencias apoyadas en las disposiciones de la comunidad académica de la Universidad.

Las actividades están compuestas de un conjunto de situaciones que van acompañadas de sugerencias relativas a la forma de trabajo y de tareas complementarias que pretenden concretar la consecución de los objetivos expuestos.

Así, las consideraciones que se formulan desde este documento consisten, tanto en el sustento conceptual relativo al diseño de unidades didácticas en la formación licenciados, que puede servir como referente para el profesor encargado del espacio académico y a los estudiantes como lecturas complementarias, como en la presentación de algunas actividades de clase propuestas para Proyecto de Aula que están orientadas a concretar las aproximaciones conceptuales a través de acciones específicas de los estudiantes que contribuyan al logro de los objetivos de enseñanza y de aprendizaje referidos a la elaboración de las unidades didácticas.

5 APROXIMACIÓN AL ESTADO DEL CONOCIMIENTO

5.1 ¿QUÉ SON LAS UNIDADES DIDÁCTICAS?

Cancelo (2002) presenta algunas definiciones de unidad didáctica enunciadas desde algunos documentos rectores de la educación en España; inicialmente menciona que

> "La unidad didáctica se entiende como una unidad de trabajo relativa a un proceso de enseñanza – aprendizaje, articulado y completo. En ella se deben precisar, por tanto, los contenidos, los objetivos, las actividades de enseñanza – aprendizaje y las actividades para la evaluación. Estos elementos deben tener en cuenta los diferentes niveles de la clase y desarrollar en función de ellos las necesarias adaptaciones curriculares".

Luego, retoma lo establecido en la guía general de primaria donde la unidad didáctica es definida como

> "unidad de programación y actuación docente configurada por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado, para la consecución de unos objetivos didácticos. Una unidad didáctica da respuesta a todas las cuestiones curriculares, al qué enseñar (objetivos y contenidos), cuándo enseñar (secuencia ordenada de actividades y contenidos), cómo enseñar (actividades, organización del espacio y del tiempo, materiales y recursos didácticos) y la evaluación (criterios e instrumentos para la evaluación), todo ello en un tiempo claramente delimitado".

En síntesis, las definiciones retomadas permiten evidenciar una componente curricular en el diseño y aplicación de unidades didácticas pues estas actividades tienen estrecha relación con cuestiones particulares de los procesos de enseñanza y de aprendizaje referidas a qué, cómo, cuándo y a quiénes enseñar, y cómo evaluar, en otras palabras, las unidades didácticas se consolidan en un núcleo de trabajo que encierra un proceso completo de enseñanza y de aprendizaje en la medida en que contemplan, desde la definición de objetivos relativos al trabajo académico en el aula, hasta la consideración de estrategias de evaluación del proceso, pasando por el establecimiento de las actividades propias de la gestión de clases. Aunque se puede notar a través de estás definiciones que existe un afán por prever cualquier tipo de circunstancia que tenga lugar en la escuela, más específicamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje en cualquier disciplina, valdría la pena preguntarse ¿de qué manera esta unidad de programación hace posible dar solución a las situaciones que tengan lugar en tales circunstancias? Y en la misma dirección, si mediante la formulación de unidades didácticas se da cuenta de los objetivos, contenidos, secuencia de actividades de clase, materiales, estrategias de evaluación, entre otros, entonces ¿de qué componentes deben estar equipadas las unidades para que las propuestas de tipo curricular que resulten sean las más pertinentes en relación con los propósitos generales de la formación profesional de licenciados en Matemáticas?

Este tipo de interrogantes permite afirmar que las definiciones retomadas por Cancelo no ilustran de qué forma están ligados los componentes de los, así llamados por él, procesos de enseñanza – aprendizaje, como contenidos, los objetivos, las actividades de enseñanza – aprendizaje y las actividades para la evaluación, pues si bien se postula la existencia de un conjunto de elementos relativos a estos procesos, no se expresan de forma explícita qué acciones deben intervenir en su elaboración para que la unidad didáctica sea precisamente una unidad, en el sentido en que todas sus componentes estén asociadas de forma dependiente.

Una visión ligeramente distinta en lo referente a la concepción de la actividad de diseñar unidades didácticas es presentada por Carratalá, quien afirma que

> "la unidad didáctica surge como método para planificar y sistematizar, en la práctica escolar, las diferentes tareas que un profesor lleva a cabo con un grupo específico de alumnos; lo que implica la determinación de qué se pretende enseñar, cómo hacerlo y cómo y con qué procedimientos evaluarlo".

Se encuentra aquí la consideración de la unidad didáctica como método, como mecanismo, como acción de un profesor para orientar su práctica y, posiblemente, como una actividad que caracterice su labor en el aula. Nuevamente, la mención que se hace de las cuestiones relativas a los procesos de enseñanza y de aprendizaje es apenas suficiente para identificar la necesidad de reflexionar con respecto a ellas, por tanto, ¿qué acciones deben realizarse al diseñar unidades didácticas para suscitar una reflexión profunda en los profesores en formación con respecto a estos cuestionamientos?

Artúnez (1995) menciona que las distintas planificaciones curriculares tienen un último nivel de concreción: las unidades didácticas. El conjunto de las unidades didácticas conforman las programaciones de aula, y constituyen los documentos en los que el profesor concreta, principalmente, los contenidos, objetivos, actividades, recursos, metodología, evaluación y temporalización, para un período determinado de enseñanza y para una serie de conceptos. Este autor sintetiza esta idea de la siguiente manera

> "En resumen, la unidad didáctica es un conjunto articulado de actividades que constituye un proceso completo de enseñanza-aprendizaje susceptible de ser evaluado globalmente (Puigdellívol, 1993), que tiene como elementos básicos: contenidos, objetivos,

> estrategias metodológicas, recursos, actividades de enseñanza y aprendizaje, actividades para la evaluación".

He aquí una consideración explícita de algo que los autores anteriores no habían expresado y tiene que ver con que las unidades didácticas también son objeto de evaluación global; así, no solamente es preciso especificar las estrategias de evaluación de los aprendizajes esperados en los estudiantes en relación con la temática que se esté trabajando en el aula, sino que también es necesario tener en cuenta de qué mecanismos hará uso el profesor para evaluar su propuesta. Esto implica una serie de hipótesis que apuntan incluso a la resolución de las preguntas planteadas anteriormente relacionadas con las acciones que motivan una reflexión acerca de los componentes de las unidades didácticas.

Inicialmente, sugerir la evaluación de una propuesta de aula genera la necesidad de reflexionar continuamente acerca de lo que se pretende lograr con la formulación de una unidad didáctica, de qué sucede al momento de implementarla y de qué se obtuvo una vez puesta en escena; esto seguramente podrá servir de mucho para identificar qué elementos deben ser reconsiderados de la planeación, relacionados con los contenidos, objetivos, acciones en el aula, o estrategias de evaluación, etc. Por lo tanto, al motivar la evaluación de las unidades didácticas posiblemente se esté provocando que éstas se consoliden realmente en una unidad, o como lo mencionaría Artúnez, en un conjunto articulado.

Por su parte, Travieso, González, y Castiñeiras (1997) asumen la unidad didáctica como una forma de planificar el proceso de enseñanza y aprendizaje alrededor de un elemento de contenido que se convierte en eje integrador del proceso, aportándole consistencia y significado. Según los autores, debe considerarse la diversidad de elementos que contextualizan el proceso para regular la práctica de los contenidos, seleccionar los objetivos básicos que se pretende conseguir, las pautas metodológicas con las que se trabajará, y las experiencias de enseñanza y aprendizaje necesarios para perfeccionar dicho proceso, tal y como le menciona Escamilla (1993, citado en Travieso, González y Castiñeiras, 1997). En suma, lo que define a una unidad didáctica es

> "el curso de acción que muestra, la secuencia de tareas en la que se encarnan los contenidos y da sentido a los objetivos. Puede concebirse como núcleo de contenido y acción en sí mismo, que indica una secuencia de aprendizaje susceptible de ser tratada como un todo completo en relación con los procesos de aprendizaje que se ponen en marcha y se desarrollan".

Por último, se resalta la importancia de incluir en la planificación de las unidades didácticas aspectos que van desde la clarificación de los contenidos científicos hasta diseño de actividades, pasando por la discusión de los problemas didácticos que puedan aparecer.

La conceptualización dada por estos autores puede ser usada para concretar las definiciones enunciadas de unidad didáctica. Hasta este punto, es posible afirmar que las unidades didácticas son herramientas que permiten a los profesores organizar su acción en el aula mediante una reflexión constante en torno a los objetivos de enseñanza y de aprendizaje ligados al estudio de contenidos particulares, y que mediante la actividad de formularlas se supone un ejercicio de análisis que, además de reflexivo, debe ser profundo en torno a los conceptos inmersos en su propuesta, a las estrategias de enseñanza y de evaluación del aprendizaje, y a la forma en que la propuesta podrá ser realimentada a partir de su aplicación.

5.2 LA FORMULACIÓN DE UNIDADES DIDÁCTICAS Y LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Chevallard (1998, citado en Espinoza y Azcárate, 2000), establece que todo profesor tiene a su cargo un sistema de tareas didácticas, organizado en dos grandes categorías dependientes entre sí, pero que abarcan distintos aspectos de la actividad del profesor. La primera incluye aquellas tareas relativas a la concepción y organización de los dispositivos de estudio y de gestión de sus respectivos entornos. La segunda está formada por las tareas de ayuda y dirección del estudio y de la enseñanza.

Bajo esta acepción de la actividad del profesor, la formulación de unidades didácticas puede considerarse como una manera óptima de establecer una vía de intercomunicación entre los dos tipos de tareas didácticas atribuidas a su ejercicio pues, en su etapa inicial, permite analizar los así llamados dispositivos de estudio (e.g. contenidos, materiales, representaciones) y, tras la gestión de estas propuestas, se posibilita la reflexión sobre la acción en el aula para reorientar las prácticas pedagógicas. Así, como lo enfatizan Espinoza y Azcárate (2001), una de las primeras cuestiones que encara el profesor es la de reconstruir las organizaciones matemáticas escolares que aparecen propuestas en los programas oficiales y en los manuales para ser enseñadas, con miras a desarrollar el análisis mencionado de los dispositivos de estudio.

En este sentido, la clasificación de Chevallard permite identificar un beneficio del diseño de unidades didácticas en la cualificación del proceso de formación de profesores en lo referido al conocimiento profesional. Dado que esta actividad requiere determinar el tipo de tareas matemáticas que va a contener parte de la organización matemática en la escuela y también precisar hasta qué punto se van a desarrollar las técnicas que permiten realizarlas, se posibilita la adquisición y desarrollo de conocimiento referido a aspectos que van desde la elaboración de actividades de clase hasta la participación activa en el diseño curricular.

Así pues, el diseño o elaboración de unidades didácticas como una de las actividades deseables en el proceso de formación de educadores matemáticos, adquiere un carácter determinante en la medida en que consta de espacios en los que se puede motivar aprendizaje en torno a una diversidad de tópicos relativos a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en contextos reales, que no son accesibles sino hasta cuando el estudiante para profesor se enfrente al quehacer real de su labor.

No obstante, algunos investigadores advierten la mecanización de la actividad docente a la cual puede tenderse con un estilo de trabajo basado en la planificación. Por ejemplo, Fernández y Elortegui (1996), quienes denominan 'tecnológico' al profesor que planifica, exponen que este medio de regulación de la enseñanza "suele estar basado en una programación cerrada, con fuerte arraigo en la secuenciación de los objetivos dirigidos a adquirir conocimientos y capacidades", y citan algunos ejemplos de disposiciones que dejan ver algunas de las concepciones de la tipología de profesores identificada por los autores. A continuación se retoman algunas de ellas.

> "¡Cuanto mejor esté hecha la programación y cuanto más se cumpla, siguiendo todas las actividades en su totalidad, más cerca estará el éxito de la enseñanza! […] Una enseñanza eficaz debe tener en cuenta todas las variables que inciden en el aula. De esta manera todo estará controlado y el rendimiento es el mejor […] Siempre hay alumnos que intentan que pierdas el tiempo en preguntas tontas para que no avances en el programa, pero si estás prevenido y tienes bien planeado lo que quieres, normalmente todo funciona […] Además del libro de texto preparo guiones para que describan el procedimiento de lo que tienen que hacer […] Resolvemos problemas como aplicación de la teoría. Los saco de libros aunque a veces los invento. Lo difícil es redactar bien el enunciado y además es conveniente elegir bien los datos iniciales para que los resultados queden bien".

En contraste, la concepción de educador matemático que se pretende impulsar desde esta propuesta va en la ruta que, particularmente, proponen autores como Marcelo (1987 y 1994, citado en Mellado, 1996) para quien “el profesor no es un técnico que aplica instrucciones, sino un constructivista que procesa información, toma decisiones, genera rutinas y conocimiento práctico, y posee creencias que influyen en su actividad profesional”. En otras palabras, no se trata de planificar la actividad de clase a partir de unidades didácticas pretendiendo hacer mecánica la actividad docente, sino de aprovechar esta tarea para motivar reflexiones en torno a los objetos matemáticos inmersos en la actividad de aula, y acerca de las posibilidades de enseñanza y aprendizaje que son viables para el tratamiento de los mismos en el aula, tal y como lo expone Gómez (2006).

Vale la pena destacar que también puede aprovecharse la formulación de unidades didácticas en la formación de profesionales de la educación, para motivar aproximaciones hacia el estudio en la disciplina matemática, en la historia y la filosofía de la misma. Así, se daría respuesta, entre otras, a las demandas hechas por Moreno y Jiménez (1995, citados en Mellado, 1996) quienes expresan que “la filosofía de la ciencia no se incluye en los programas de formación del profesorado en las ciencias, y que debería abordarse ayudando a los profesores en formación a reflexionar sobre sus propias concepciones epistemológicas”, y que, pese a ser una aseveración que podría catalogarse como transnacional, evidencia el estado actual de dichos programas en nuestro contexto.

Existen varios estudios en los que se proponen acercamientos a la categorización de lo que podría llamarse conocimiento deseable del profesor (Brincones, 1993; Furió, 1994; Porlán y Martín, 1994; Jiménez y Sanmartí, 1995; Porlán et. Al., 1996; Kennedy, 1998; citados en Sánchez, 1996), en los cuales se destacan algunos requerimientos relacionados con tres componentes del conocimiento profesional de la actividad del profesor, a saber: el profesor debería (i) conocer a profundidad la disciplina; (ii) adquirir conocimientos fundamentados sobre el aprendizaje de las ciencias; y (iii) tener criterios para la selección y secuenciación de contenidos de la enseñanza; saber formular en relación con los objetivos y contenidos de enseñanza, una serie de metaconocimientos, un conjunto de procedimientos generales y una serie de valores que sirvan de referente continuo en el proceso enseñanza aprendizaje; y en concreto, elaborar tramas de contenidos que relacionen la información procedente de las disciplinas científicas y problemas relevantes e interesantes para los estudiantes.

Una manera de dar respuesta al último requerimiento listado en el párrafo anterior es presentada por Gómez (2006), para quien el análisis del contenido, como componente del análisis didáctico, se convierte en el escalón inicial pues mediante la determinación y caracterización de relaciones entre los conceptos y los procedimientos que lo configuran, se facilita la definición de una posible secuencia de actividades de clase, así mismo, a través del análisis de los múltiples significados que adquieren los objetos matemáticos implicados se pueden prever algunas de las dificultades de los estudiantes y, por tanto, se podrán definir objetivos y estrategias específicas para superarlas; en concreto, el análisis de contenido posibilita una visión general del proceso de enseñanza que se consolida en acciones específicas y fundamentales en el proceso de planificación.

Estas apreciaciones son consonantes con las disposiciones expuestas desde la Universidad Pedagógica Nacional en donde se ha considerado que el conocimiento profesional del licenciado en Matemáticas emerge de un saber de carácter práctico y uno de carácter teórico y que, particularmente, “el saber de carácter práctico sólo se logra a partir de la implicación personal, la reflexión, la observación y la práctica educativa” (Camargo, et al., 2004). La formulación de unidades didácticas posibilita una articulación entre ambos saberes pues en ella se involucran elementos relacionados con la acción, reflexión en la acción y, reflexión sobre la acción tras su gestión en el aula. Así, el saber de carácter teórico que han adquirido los estudiantes en los distintos espacios académicos puede conllevar al desarrollo de uno de carácter práctico, a través de la planificación reflexiva de clases de matemáticas con unidades didácticas que se lleva a cabo mediante el análisis didáctico. En la otra dirección, un saber de carácter práctico puede derivar uno de carácter teórico si las acciones se convierten en espacio de reflexión académica en el cual se construyen conceptos para describir y explicar las situaciones observadas en el aula.

6 MARCO CONCEPTUAL Y CONSIDERACIONES

En este apartado se da cuenta de las consideraciones tanto conceptuales como prácticas que se emiten con respecto a la formulación de unidades didácticas en la formación de licenciados en Matemáticas. Se retoman aspectos teóricos consolidados a partir de investigaciones en Educación Matemática, que se determinaron necesarios para orientar un posible trabajo en clase de Proyecto de Aula, así como algunas sugerencias relativas a la gestión de las actividades de aula que podrían concretarse en una propuesta didáctica para el espacio académico objeto de interés de este documento. Así, primero se hace una presentación teórica relativa a cada uno de los componentes identificados en el diseño de las unidades didácticas, en la que se enfatizan los elementos conceptuales que se deben discutir con los estudiantes, luego se propone una actividad para cada componente y finalmente se identifican los aspectos sobre los cuales debe centrarse la institucionalización que se lleva a cabo.

En una primera aproximación, la planificación de unidades didácticas precisa una reflexión profunda en torno a: el contenido específico dispuesto para la enseñanza, los objetivos de enseñanza y de aprendizajes esperados, la metodología, y los instrumentos de evaluación de los aprendizajes de los estudiantes y de la propuesta didáctica. No obstante, estudios realizados en este contexto (De Pro Bueno, 1999) aluden la vulgarización a la cual han sido sometidos los cuatro aspectos antes mencionados, pues dejan de ser acciones reflexivas de la labor del educador, para convertirse en registros de 'programaciones administrativas' susceptibles de copia y posterior reproducción.

Esta problemática puede basarse en el carácter superfluo que pueden tener los términos enseñanza, aprendizaje, metodología,…, en el discurso de los profesores y más aún, en la falta de rigurosidad para estudiarlos de acuerdo con las variables específicas de un contexto educativo particular. Una manera posible de contrarrestar situaciones como ésta, consiste en la consideración de unos objetos de estudio particulares de la Didáctica de las Matemáticas, definidos en torno a un marco de referencia teórico, alrededor de los cuales fuera posible fundamentar la planificación de las unidades didácticas. En esta dirección, el trabajo coordinado por Rico (1997) presenta una propuesta para el análisis de varios núcleos conceptuales que permiten articular el diseño, implementación y evaluación de propuestas didácticas para la gestión de clases de matemáticas: los organizadores del currículo.

6.1 LOS ORGANIZADORES CURRICULARES

Rico (1997) afirma que los organizadores curriculares deben: ofrecer un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas; facilitar un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de transmisión y construcción del conocimiento matemático, y proveer criterios para abordar y controlar esa complejidad; permitir la selección entre distintos marcos de estructuración de unidades didácticas, con una base objetiva de interpretación y discusión; ubicar las distintas opciones para la planificación, gestión y evaluación de unidades didácticas; y, tener una base disciplinar adecuada que permita su tratamiento objetivo. Según estas inferencias, el aporte que se hace desde cada organizador debe posibilitar la estructuración de conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo de matemáticas.

Los organizadores curriculares que determina Rico en su trabajo son: (i) los errores y dificultades que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas, así como los obstáculos de aprendizaje que se plantean en cada concepto; (ii) la diversidad de representaciones utilizadas en el estudio de los conceptos implicados, junto con algunas de las modelaciones usuales de los mismos; (iii) la fenomenología de los conocimientos implicados, así como las aplicaciones prácticas de cada bloque de contenido; (iv) la diversidad de materiales y recursos que pueden emplearse en la enseñanza de cada tópico; y (v) la evolución histórica de cada campo, incluso de cada concepto.

No es pretensión de este estudio abarcar todos los organizadores curriculares presentados en Rico (1997), de hecho, se considera que el análisis de sólo algunos de ellos posibilita la identificación de varias directrices para la enseñanza sobre la planificación de unidades didácticas en la formación de profesores. Por tanto, se consideraron los organizadores (ii), (iii) y (v), tomando por separado las representaciones y la modelación. Si bien pretender una disyunción entre los organizadores curriculares tendría consecuencias negativas en la comprensión del carácter sistémico que estos tienen, la elección de los organizadores antes especificados responde a la identificación de aquéllos que más se aproximan o atañen (a modo de ver de los autores de este documento) al estudio matemático propio de los contenidos matemáticos dispuestos para la enseñanza.

De otro lado, el organizador curricular correspondiente a los errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas, se facilita en la medida en que existe un número considerable de recursos bibliográficos con los que se puede abordar su estudio pues este tópico ha sido objeto de muchas investigaciones. A continuación, se proporcionan algunas referencias que pueden ayudar en la enculturación con respecto a este tema, haciendo la aclaración que su lectura o consulta debe orientarse, para efectos de coherencia con este documento, al papel que desempeña el análisis de errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de las Matemáticas, en el ejercicio de elaborar unidades didácticas.

Bachelard, G. (1938). *La Formation de l'Espirit Scientifique*.
Brousseau, G. *Teoría de Situaciones Didácticas.*
Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria*.

Así mismo, el referido a materiales y recursos puede consultarse en la siguiente bibliografía, haciendo la salvedad que este organizador puede ser visto como dependiente del que corresponde a las representaciones y modelación puesto que el análisis de éste puede servir para especificar el tipo de material que se requiere en el desarrollo de una actividad de clase particular.

Coriat, M. *Materiales, recursos y actividades: un panorama*.

6.1.1 Análisis fenomenológico

Según Freudenthal (1983, citado en Puig, 1997) la fenomenología es un método de análisis de los contenidos matemáticos que sienta sus bases en concepciones filosóficas relativas a los términos 'noúmenos' y 'fenómenos' que, en las Matemáticas, Puig (1997) los identifica con los conceptos o estructuras y con los eventos percibibles, respectivamente. Este autor caracteriza los conceptos como medios a partir de los cuales es posible organizar fenómenos; por ejemplo, un conjunto de fenómenos del mundo físico que se relacionen con la descripción de la forma que tienen algunos cuerpos (e.g. la periferia del Sol o de la Luna, el arco iris, las sombras, el borde de un lago,…) puede ser organizado a partir de varios tópicos de la Geometría (e.g. concepto de curva, superficie, sólido,…).

En este sentido, hacer un análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste en describir el conjunto de fenómenos que organiza, y establecer relaciones entre éste y los conceptos asociados. El autor aclara que este conjunto está compuesto por los fenómenos que en la actualidad son organizados por el concepto, los que lo fueron en un principio, así como aquellos a los que se extendió posteriormente. El proceso de organización de fenómenos a partir de conceptos se complejiza en la medida que éstos últimos se convierten en fenómenos que son organizados por nuevos conceptos matemáticos siendo sucesivo el proceso.

Freudental (1983, citado en Puig, 1997) distingue cuatro tipos de fenomenología: fenomenología pura, didáctica, genética e histórica. La primera hace referencia a los fenómenos percibibles tomados de las matemáticas en su estado actual y considerando su uso actual. En el caso de la didáctica intervienen aquellos fenómenos que intervienen en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. En el caso genético se estudian los fenómenos que están involucrados o que resultan del desarrollo cognitivo de los estudiantes. En el último caso se atiende a los fenómenos cuya organización permitió la creación de un concepto determinado y, a la manera como se extendió a otros fenómenos.

En este trabajo se centrará la atención en el estudio de los dos primeros tipos de fenomenología mencionados; con el desarrollo de los demás organizadores curriculares se propenderá por abarcar algunos tópicos que se relacionan en los restantes, así: la fenomenología genética puede ser tratada a partir de la bibliografía recomendada para el estudio de las dificultades, obstáculos y errores pues éste precisa un reconocimiento de las características socio-cognitivas del individuo que estudia matemáticas, mientras que la fenomenología histórica puede tratarse en el organizador referido a la evolución histórica de los contenidos matemáticos. Con respecto a este último tipo de fenomenología, vale la pena resaltar que si bien en la compilación que hace Rico (1997), los aspectos relacionados con el estudio de la evolución histórica de los conceptos matemáticos, se presentan en un organizador (Sierra, 1997), se encuentran muchas coincidencias entre lo desarrollado en éste y lo expuesto por Freudenthal en relación con la fenomenología histórica. Estas relaciones se harán más evidentes en el apartado 6.1.4 de este documento.

A modo de ejemplo, Puig (1997) propone una serie de notas para una fenomenología de los conceptos matemáticos en educación secundaria. Particularmente, se refiere al concepto de función, diciendo que su origen fenomenológico “está en el momento en que se enuncia, se postula, se produce o se reproduce una dependencia entre variables, que se representa en el mundo físico, social o mental, así como entre variables matemáticas que, a su vez, están relacionadas con variables de otros mundos”. De esta consideración puede identificarse un proceso de organización de fenómenos que se desarrolla, por lo menos, en dos niveles, el primero, en el cual los fenómenos pertenecen al mundo físico o social de los individuos, y los conceptos de variable y dependencia los organizan, y el segundo, en donde los conceptos anteriores de variable y dependencia se tratan como fenómenos del mundo mental y se articulan a partir de nuevos conceptos matemáticos, que probablemente se identifican con las variables de otros mundos que menciona el autor.

De otro lado, el mismo autor considera que el análisis fenomenológico, como componente del análisis didáctico en matemáticas, permite identificar la naturaleza tanto de los objetos matemáticos como de la práctica matemática misma y, en consecuencia, la de “la actividad que hay que dar oportunidad a los alumnos que realicen para que puedan tener acceso a genuina experiencia matemática”. Por tanto, las actividades relacionadas por Puig en el párrafo anterior, que corresponden a un análisis fenomenológico inicial del concepto de función, ayudan a la comprensión de este concepto.

Esta acepción se complementa con las formulaciones de Sierpinska (1992), quien establece una serie de ‘actos de comprensión’ del concepto de función y afirma que inicialmente el estudiante debe identificar, inicialmente, cambios en el mundo circundante y relacionarlos con problemas prácticos a resolver, para luego analizar regularidades en las modificaciones que dieron lugar a los cambios. Así mismo, deben ser identificados y discriminados los sujetos que intervienen en los cambios dependiendo de sin son cantidades conocidas o desconocidas, o variables o constantes.

Para concretar el proceso de comprensión del concepto de función la misma autora propone, entre otras, las siguientes consideraciones: “discriminar entre las variables independientes y dependientes, entre la función y las herramientas analíticas que algunas veces se usan para describir su ley, entre definición matemática y las descripciones del objeto; sintetizar el concepto general de función como un objeto; discriminar entre los conceptos de función y relación, entre la noción de función y sucesión, entre diferentes formas de representar funciones y las funciones mismas; y, generalizar el concepto de variable".

Estos actos de compresión permiten identificar un posible camino, por el cual puede orientarse el análisis fenomenológico del concepto en cuestión, en la medida en que describen una serie de fenómenos, en su mayoría del segundo nivel (e.g. concepto de relación, sucesión, variable), que deben ser reconocidos, caracterizados y relacionados con el concepto de función para ser organizados por éste.

A continuación, se propone un ejemplo actividad de clase para el curso Proyecto de Aula orientada a generar comprensión acerca de cómo desarrollar fenomenología de conceptos matemáticos, partiendo del caso particular del concepto de función y se formulan algunas consideraciones acerca de la forma en que ésta puede ser utilizada.

Actividad. Fenomenología del concepto función

El siguiente ejercicio puede ser más productivo si es desarrollado por grupos, pues se motiva un análisis conjunto de las situaciones propuestas y se da cabida a la exposición de diferentes ideas que pueden ser sometidas a discusión. Se hace aquí la salvedad que se trata de una actividad introductoria cuyo manejo posterior permitirá el objetivo buscado de generar comprensión en torno al análisis fenomenológico de los conceptos matemáticos.

Ejercicio A[1]

1. Considere la siguiente pregunta:

¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un cuadrado de lado a?

a. Determine las variables que intervienen en esta situación.
b. ¿Existe alguna relación entre estas variables? Si es así, enúnciela.
c. Formule una situación de la vida cotidiana en donde intervengan las variables que identificó en el literal a.

2. Para cada una de las funciones dadas a continuación, proponga una situación problema que permita ser analizada a partir de las mismas.

a. $g : \{r \in \mathbb{Q}: r = 0{,}035n;\ n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{Q}$

[1] Los numerales 3 y 4 fueron extraídos de Alayo (1990).

$$r \mapsto g(r) = 3r + 1{,}5$$

b. $f: \{n \in \mathbb{N}: 9 < n < 101\} \to \mathbb{Q}$

$$n \mapsto f(n) = \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

c. $m: \{k \in \mathbb{Z}: -35 < k < 50\} \to \mathbb{Q}$

$$k \mapsto m(k) = 3^k$$

d. $h: \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto h(x) = \pi x^2 - 2\pi x + \frac{2\pi + 1}{2}$$

3. Considere cada una de las siguientes situaciones e identifique cuáles y cómo pueden relacionarse con una relación funcional.

a. Los precios están subiendo ahora más despacio que en ningún otro momento en los últimos cinco años.
b. Me gusta bastante la leche fría y la leche caliente, pero ¡detesto la leche templada!
c. Cuanto más pequeñas son las cajas, más podemos cargar en la camioneta.
d. Después del concierto hubo un silencio abrumador. Entonces una persona de la audiencia empezó a aplaudir. Gradualmente, los que estaban alrededor se le unieron y pronto todo el mundo estaba aplaudiendo.
e. Si las entradas a cine son muy baratas, los dueños perderán dinero. Pero si son demasiado caras, irá poca gente poca gente y también perderán. Por lo tanto, un cine debe cobrar un precio moderado para obtener beneficio.

4. Responda las siguientes preguntas utilizando registros verbales, gráficos o simbólicos de representación.

a. ¿Cómo depende el precio de una bolsa de papas fritas de su peso?
b. ¿Cómo varía el diámetro de un globo cuando sale aire lentamente de él?
c. ¿Cómo varía la velocidad de una niña en un columpio?
d. ¿Cómo cambia la velocidad de una pelota cuando rebota?

Con el desarrollo de los numerales contenidos en el ejercicio A se espera que los estudiantes determinen un conjunto de fenómenos, tanto del entorno físico como de las matemáticas que están asociados al concepto de función, o en los términos de Puig, que son organizados por el concepto matemático función. Para introducir el término fenómeno el profesor puede exponer la noción que se proporciona en este escrito, en la que se considera cualquier ente que sea objeto de la experiencia o, en otras palabras, un evento percibible. Seguidamente, se propone el ejercicio B.

Ejercicio B

a. Elabore una clasificación de los fenómenos encontrados en el ejercicio A atendiendo, por ejemplo, a la naturaleza de los mismos, a los tipos de magnitudes involucrados, a las características o propiedades de las funciones asociadas, o de acuerdo con algún criterio que usted establezca.

b. Determine *qué* elementos del concepto función organizan *cuáles* características de los fenómenos.

c. Proponga ejemplos de otros fenómenos que puedan incluirse en los conjuntos que determinó en el literal a. y justifique su pertenencia al conjunto.

La intención principal de este ejercicio es que los estudiantes asocien primero cuáles características del objeto matemático modelan las de un fenómeno, por ejemplo: el carácter creciente de una función puede asociarse con un fenómeno de variación en la que los cambios que afectan a las variables crecen de manera conjunta (e.g. la relación entre el precio de un producto con respecto a su peso); el tipo de dominio de una función (e.g. si el dominio es un subconjunto de los números naturales, es discreto, se puede asociar con un fenómeno de mundo físico relacionado con la comercialización de ciertos productos). En este sentido, los estudiantes presentarán una caracterización de objetos matemáticos asociados al concepto de función a partir de la identificación de los fenómenos asociados, y, en consonancia con lo expuesto por Janvier (1983, citado en Azcárate, 1990) podrán construir una red conceptual del concepto de función con respecto a la comprensión que logren de dependencia, variabilidad, cambio, etc., teniendo como base el estudio de las características de los fenómenos que estos objetos organizan.

Así, cuando los estudiantes desarrollen por completo el ejercicio B, se sugiere que el profesor proponga la socialización del trabajo hecho, en la que se privilegie un análisis crítico de la clasificación hecha, de las relaciones que formulen entre los fenómenos y el concepto de función, para luego formular justificaciones de la importancia del análisis fenomenológico en la planeación de clases de Matemáticas.

Por último, se recomienda que los estudiantes hagan una lectura del artículo de Puig (1997) que se referencia aquí. Con ello, se espera que los estudiantes establezcan una conexión entre lo instituido con la solución de la actividad y lo estudiado en la lectura recomendada, generando así una comprensión de lo que es un análisis fenomenológico de un concepto matemático, en particular, de la función. Una vez los estudiantes hayan concretado estas tareas, el profesor en conjunto con sus estudiantes, socializarán e institucionalizarán lo correspondiente a este organizador curricular. La identificación de la relevancia que tiene el desarrollo de esta actividad en la planificación de las unidades didácticas debe ser considerada tema de discusión para la clase, en términos de las adquisiciones conceptuales que requiere un profesional de la educación matemática para ejercer su labor en el aula.

6.1.2 Representaciones

Duval (1999) ubica la aparición de la noción de representación en tres momentos históricos en los que adquiere distintas connotaciones. En el primer momento, entre los años 1924 y 1926, esta noción se encuentra inmersa en los trabajos de Piaget acerca de la representación del mundo del niño, en los que se considera como un proceso mental a partir del cual los niños pueden apropiarse de su entorno, describirlo o explicar algunos de los fenómenos que se dan en su interior. En el segundo momento, treinta años más tarde, la representación es tratada en un contexto computacional en el que se privilegia el estudio de la transformación que sufren las informaciones que recibe un sistema para producir una determinada respuesta; en este sentido, la representación es vista como una forma de codificar un conjunto de informaciones para que pueda ingresar a un sistema y ser transformado. Y en el tercer momento, que inició alrededor de 1985, la representación adquiere un carácter semiótico resultante de los trabajos sobre la adquisición de conocimientos en Matemáticas, en los cuales se consideran los diferentes sistemas de signos (e.g. el lenguaje, la escritura algebraica) y la operación de conversión de las representaciones de un sistema a otro, como elementos fundamentales en el aprendizaje de las Matemáticas.

De las tres connotaciones nombradas por Duval, Rivière y Hiebert y Carpenter (1986 y 1992, citados en Castro y Castro, 1997) diferencian las representaciones de un concepto que están presentes en los procesos de pensar y razonar, llamadas representaciones internas, de las que intervienen en el proceso de comunicar ideas en torno a dicho concepto, llamadas representaciones externas. Estas últimas, son estímulos que facilitan la construcción de imágenes mentales que se consolidan en representaciones internas de un objeto matemático, y a su vez son necesarias para la constitución de nuevas representaciones externas de los mismos objetos.

Para concretar la distinción que hacen Rivière, Hiebert y Carpenter, Duval aclara que desde un punto de vista genético las representaciones mentales y las representaciones externas no pueden verse como dos dominios diferentes, pues el desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones externas, y en el otro sentido, las estrategias o caminos que un sujeto utilice para representar externamente un concepto sirven para mostrar, generalmente, cómo es la información que posee sobre él. Así, las representaciones externas juegan una doble función: actúan como estímulos para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales, y permiten la expresión de conceptos e ideas de los sujetos que las utilizan, lo que las aleja de ser medios de comunicación de ideas en torno a un concepto, por lo tanto, se consideró preciso realizar el estudio de este tipo de representaciones.

La acepción encontrada en el tercer momento de aparición de la noción de representación identificado por Duval en el que se privilegia la perspectiva semiótica, puede ser leída a partir de los trabajos de Castro y Castro (1997) para quienes las representaciones externas son "las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes… las notaciones simbólicas se basan, por lo general, en signos alfanuméricos estructurados; las gráficas en combinaciones de figuras o íconos, también estructuradas"..

Así mismo, Rico (1995) distingue dos familias de representaciones externas: las simbólicas y las gráficas. En la primera familia, la sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimientos y se distinguen las representaciones digitales, discretas, de carácter alfanumérico, además de aquellas que se pueden simular mediante programas informáticos. En la segunda, la sintaxis viene descrita principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación; hacen parte de ella las representaciones analógicas, continuas, de tipo gráfico o figurativo.

Según Azcárate (1990) "la adquisición de un concepto depende en gran parte de la capacidad de reconocer e interpretar una representación [externa] del mismo", sin embargo, vale la pena precisar que un concepto matemático es una construcción abstracta hecha por un individuo a partir de la comprensión que tenga acerca de un objeto matemático y que, en consecuencia, es el objeto matemático lo que se representa. Debido a que esta representación se expresa a través de un conjunto de símbolos, gráficos y reglas que se caracteriza por su carácter sistémico, se hará referencia a sistemas semióticos de representación de objetos matemáticos en lugar de meras representaciones.

Ahora bien, se reconoce la multiplicidad de sistemas de representaciones para un mismo concepto, por ejemplo, en el caso del concepto de función real de variable real, es posible considerar cuatro: enunciado verbal, tabla de valores, ley algebraica y gráfico de la función, resaltados también por Azcárate (1990) quien los caracteriza de la siguiente manera: en el primero se establece una visión descriptiva de la relación funcional utilizando un lenguaje natural; en el segundo se presenta un enfoque cuantitativo en la que se identifica pares de valores parciales; y las dos últimas son caracterizadas como lenguajes de mayor abstracción que las primeras, pues brindan mayor información que los lenguajes anteriores y por tanto muestran una visión general de las funciones a estudiar, que relaciona los visiones cualitativo y cuantitativo.

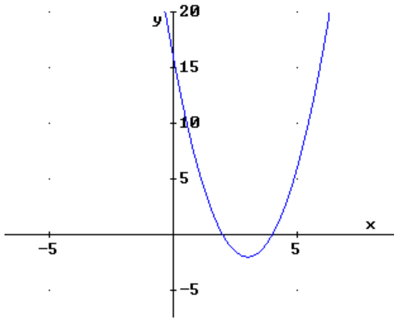
Dominar un concepto matemático es, por tanto, equivalente a conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también consiste en convertir o en traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con sus propiedades (Castro y Castro, 1997). La comprensión de los conceptos matemáticos está, por tanto, supeditada a la facultad de emplear más de un registro de representación semiótica de los objetos matemáticos asociados al concepto, inicialmente, al representarlos en algún registro, al tratar tales representaciones al interior de un mismo registro, y finalmente, al traducirlas de un determinado registro en otro diferente al registro inicial (D' Amore, 2002).

Duval (1999) especifica un poco más las actividades cognitivas que están involucradas en el proceso de representar y que son fundamentales a la hora de hablar sobre comprensión en torno a este proceso, a saber: formación, tratamiento y conversión. La primera, formación de representaciones, se refiere a la expresión de las representaciones mentales, a la forma de exteriorizar el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que le está asociado. Por su parte, las otras dos actividades están ligadas con la manipulación y transformación que se puede hacer de una representación teniendo como referencia uno a más sistemas semióticos: la actividad tipo tratamiento se da cuando la transformación de representaciones tiene lugar en el mismo registro donde fueron creadas, en otras palabras las representaciones se mueven dentro de un mismo registro; y la conversión, por el contrario, se presenta una vez que la transformación produce una representación en un registro diferente al de la representación inicial.

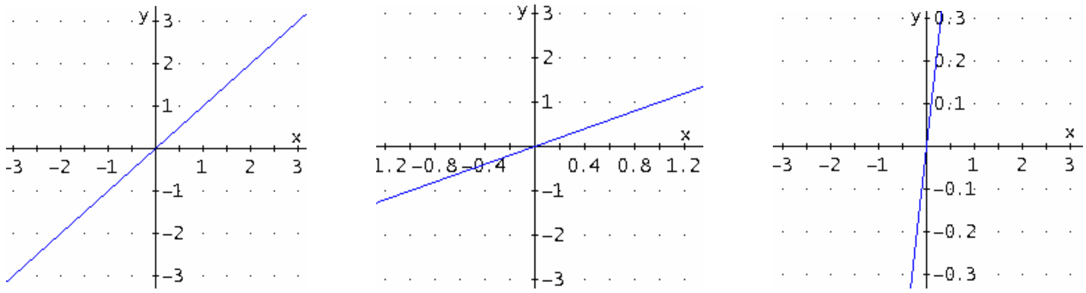
Así, por ejemplo, para el objeto función, una transformación de tratamiento para $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ conduce a la representación $f(x) = 2(x - 3)^2 - 2$, mientras que con una transformación de conversión puede obtenerse la siguiente tabla.

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	48	30	16	6	0	–2	0	6	16	30	48

O también una operación de conversión está en la traducción de información tabular sobre una función en una gráfica.



En conclusión, no basta identificar el conjunto de sistemas de representación asociados al estudio de un objeto matemático en particular, o identificar el objeto matemático a través de varias de sus representaciones; el énfasis también debe hacerse en el análisis, primero, de los elementos constitutivos de cada sistema, llamados unidades significantes por Duval, para luego establecer las implicaciones que tienen éstos en la representación hecha del objeto matemático. Por ejemplo, la función representada analíticamente por $y = x$ puede representarse gráficamente de las tres maneras siguientes:



La comprensión que tenga el estudiante de la escala de medida como elemento significante del sistema de representación gráfico (cartesiano) le sirve para establecer la equivalencia entre las tres representaciones. Así pueden superarse algunos obstáculos relacionados con el estudio de propiedades de la función como la variación, que en este caso, podría verse afectada si se estudia a partir de la gráfica de la recta sólo a partir de su posición con respecto a los ejes coordenados sin referencia a la escala numérica seleccionada.

En consecuencia, las características particulares de tales unidades serán influyentes en las características percibibles del objeto representado y, por tanto, en la comprensión que se logre del mismo. Además, de esta forma, las actividades de transformación de representaciones pueden ser vistas en términos de la correspondencia que pueda establecerse entre los elementos de cada sistema y, consecuentemente, en términos de los cambios que originan estas transformaciones en las características percibibles del objeto matemático y de los fenómenos que, en uno u otro caso, puedan asociarse a él con mayor fidelidad.

A continuación se presenta una actividad sugerida para el estudio de las representaciones como organizador curricular dispuesta para la consolidación de una unidad didáctica.

Actividad. Representaciones del objeto matemático función

Con el desarrollo de los numerales del ejercicio siguiente se pretende, por una parte, que los estudiantes pongan a prueba sus conocimientos acerca del concepto de función, y por otra, ilustrar los sistemas semióticos de representación asociados al objeto matemático función, relacionándolos con las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, propuestas por Duval, sin dejar de lado el análisis que deben hacer los estudiantes de Proyecto de Aula con respecto a la importancia del estudio de las representaciones de un objeto matemático para la formulación de unidades didácticas.

Ejercicio
1. Considere los siguientes conjuntos que corresponden a relaciones funcionales y, para cada uno, resuelva los literales a, b y c. i. El conjunto de puntos del plano cuya ordenada es el cuadrado de la abscisa aumentado en una unidad. ii. El conjunto de puntos del plano cuya ordenada es el cuadrado del doble de la abscisa.

iii. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: 5y^2 = x\}$

a. Complete la siguiente tabla colocando el valor de la variable dependiente que corresponde al valor dado de la variable independiente.

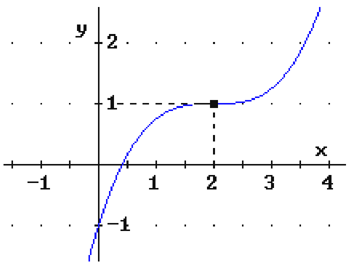
Variable Independiente	Variable Dependiente
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

b. Halle las diferencias entre los valores consecutivos de la variable dependiente que registró en la tabla. ¿Qué regularidad encuentra en la secuencia de las diferencias obtenidas?

c. Elabore la gráfica de la relación funcional y determine qué relación existe entre la regularidad encontrada en el literal anterior y las características de la gráfica.

2. La siguiente gráfica corresponde a una relación funcional cuya expresión analítica es de la forma

$$y - k = a(x - h)^3$$



a. Haga una lista de las características de la relación funcional, que pueden ser colegidas de la gráfica (concavidad, crecimiento, continuidad,…).

b. Describa un conjunto de situaciones que puedan ser asociadas a la relación funcional descrita, teniendo en cuenta las características encontradas en el literal anterior.

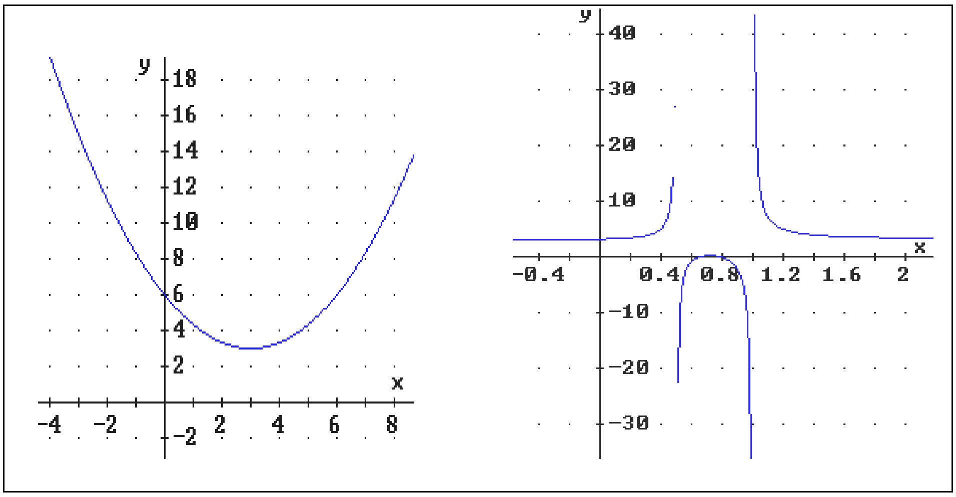
c. Formule y resuelva una de tales situaciones.

3. A continuación se representan dos funciones en el sistema algebraico y en el gráfico. Para cada una determine:

a. ¿Qué elementos de la expresión algebraica (sumandos, factores, potencias, etc.) se corresponden con cuáles características de la gráfica (concavidad, crecimiento, continuidad, etc.)?

b. ¿Existirá otra manera de representar algebraicamente la relación funcional de modo que la correspondencia entre características de ambas representaciones sea más evidente? De ser así, enúnciela e ilustre tal correspondencia.

$$0 = x^2 - 6x - 3y + 18 \qquad\qquad y = \frac{e^x}{12x^2 - 18x + 6} + 3$$



Hasta este punto se debe promover una socialización de los trabajos realizados por los estudiantes en la que el profesor haga énfasis en los aspectos matemáticos que están involucrados en la resolución del ejercicio, de modo que el conocimiento que los estudiantes manifiesten sea problematizado y las respuestas que propongan sean rigurosas y exhaustivas.

La intención principal es mostrar que el énfasis en el trabajo con las representaciones de un objeto matemático, no debe hacerse sólo en la identificación del objeto matemático representado a través de ellas, sino que debe darse suma importancia tanto a los significados que adquieren los elementos constitutivos del objeto matemático, de acuerdo con las unidades significantes del sistema en que se encuentra, como a las relaciones que pueden establecerse entre las unidades correspondientes a varios sistemas que inciden en la representación de un mismo aspecto del objeto.

De esta forma, se pretende motivar una reflexión en torno a la pertinencia de una u otra representación de un objeto matemático en situaciones que impliquen la consideración de propiedades particulares del objeto, y que sean fielmente representadas en el sistema seleccionado. Así mismo, pueden formularse preguntas complementarias que orienten la discusión en clase hacia la identificación de ventajas y desventajas de utilizar una representación determinada, con respecto a la transformación que sufre la interpretación que pueda darse de los tópicos particulares que atañen al concepto y, por tanto, que inciden en la comprensión acerca del objeto matemático.

Para complementar la actividad, la discusión debe guiarse hacia la consideración del estudio de las representaciones de un objeto matemático como componente del análisis de contenido. Por lo tanto, debe hacerse explícito un cuestionamiento con respecto a las incidencias que tienen las características de las representaciones asociadas a un concepto matemático y las operaciones cognitivas que puedan hacerse sobre dichas representaciones, en aspectos relativos a la planificación de clases de Matemáticas, como la definición de una secuencia de actividades de aula, la selección de material, e inclusive, los instrumentos de evaluación de los aprendizajes; de tal forma que los estudiantes de Proyecto de Aula concreten reflexiones conceptuales correspondientes a este organizador curricular.

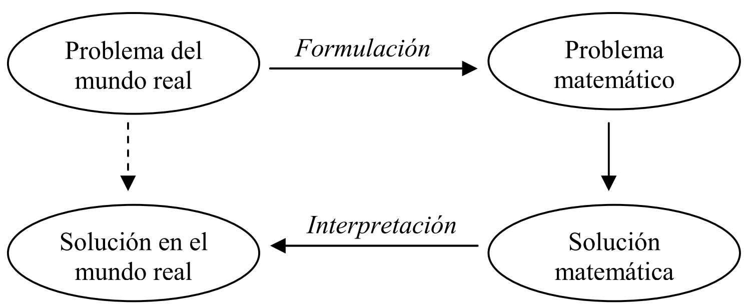
6.1.3 Modelación

Los modelos son "esquemas o materiales estructurados, conectados mediante leyes o reglas que ofrecen una imagen isomorfa de un determinado concepto respecto a determinadas relaciones o propiedades […] se trata de una relación entre un fenómeno, material o esquema y un concepto, estructura o procedimiento matemático" (Castro y Castro, 1997). La modelación, como el proceso que permite la creación de modelos, no se da solamente entre objetos matemáticos, pues al establecer la relación expresada entre fenómenos y estructuras matemáticas se posibilita la interacción entre cualquier tipo de eventos percibibles, particularmente los fenómenos físicos, y los objetos matemáticos. Esta interacción debida al proceso de modelación puede darse en ambos sentidos, por ejemplo, un material estructurado puede modelar determinado concepto matemático, y a su vez, una ecuación matemática puede modelar un fenómeno físico.

Sanloz (2000) distingue tres tipos de modelos: icónicos, analógicos y analíticos. Para él, los primeros consisten en versiones a escala del objeto real conservando sus propiedades relevantes más o menos representadas; los segundos son modelos con apariencia física distinta al original, pero con comportamiento representativo, es decir, conservan algunas características del objeto representado; y los terceros se definen a partir de relaciones matemáticas o lógicas que representan leyes físicas que se cree gobiernan el comportamiento de la situación bajo investigación. Si bien la generación de modelos icónicos, analógicos o analíticos involucra algún tipo de actividad matemática, en este estudio de da prelación a los modelos analíticos por ser los que involucran esta actividad de forma un poco más directa.

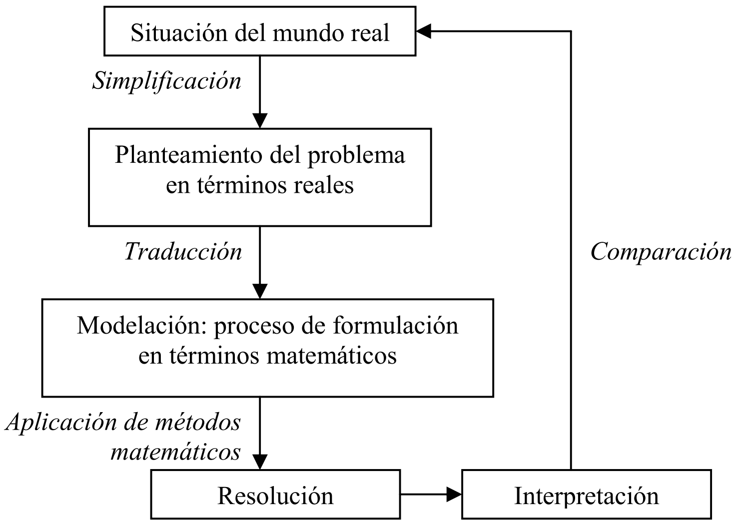
En esta dirección, Wattenberg (1999) señala que en general la construcción de modelos matemáticos puede compararse con la de modelos visuales, verbales o tridimensionales. Expresa que al detallar, por ejemplo, el trabajo de un artista puede observarse que su atención se mueve atrás, adelante, antes y después de la escena en frente de él en su lienzo, lo cual se consolida en una actividad dinámica que, para este autor, determina un ciclo de modelación que se describe de la siguiente manera: se inicia con percepciones del objeto a modelar (visuales, auditivas, dactilares,…), con base en ellas se construye una imagen mental o modelo, luego se usa el modelo para hacer predicciones y ponerlas a prueba por medio de la experimentación, por último se verifica el modelo, se cambia o se complementa repitiendo la ruta descrita.

Keng (2001) contextualiza un poco más el proceso de modelación como actividad matemática, al asumirlo como un proceso de representación de los problemas del mundo real en términos matemáticos con el objetivo de encontrar soluciones a tales problemas. Agrega que un modelo matemático puede ser considerado como una simplificación o abstracción de un problema o situación (compleja) del mundo real en una forma matemática, de modo que el problema o situación del mundo real se convierte en un problema matemático. Así, este problema puede ser resuelto usando todas las técnicas conocidas para obtener una solución matemática y luego esta solución ser interpretada o traducida en términos reales. La autora propone el siguiente esquema para ilustrar el proceso descrito en líneas anteriores.



Crouch y Haines (2004) complejizan este esquema agregando etapas que especifican un poco más la actividad de modelar. Para ellos, el proceso se efectúa en los siguientes pasos: (i) consideración del problema en el mundo real; (ii) formulación del modelo; (iii) interpretación de resultados; (iv) validación de la solución; (v) refinación del modelo; y (vi) replanteamiento del problema en el mundo real. Modelar no consiste solamente en formular un modelo con el que sea posible resolver una situación, debe además interpretarse y validarse el proceso con el que se generó el modelo de modo que sea posible hacer una reformulación del problema en el mundo real, para identificar de manera más precisa las relaciones del modelo con los aspectos particulares de la situación modelada.

Gómez (2003) aporta un esquema que puede servir de ayuda para resumir las ideas anteriores con respecto al proceso de modelación.



Además de las etapas enmarcadas en el esquema, el autor identifica cuatro operaciones que median el avance en el proceso. Inicialmente, la *simplificación* se refiere a la manipulación de la situación para conseguir un modelo real mediante la discriminación de la información dada y la formulación de conjeturas. La *traducción* es aquella actividad mediante la cual se "sustituyen naturalmente palabras por símbolos"; en esta fase intervienen sistemas semióticos de representación como el algebraico, el gráfico o el tabular que permiten expresar matemáticamente el problema y, más aún, ilustrar los elementos constitutivos de la situación. A partir de la selección del sistema semiótico para construir el modelo, se escogen y *aplican* los *métodos matemáticos* como conceptos, procedimientos, técnicas o herramientas para dar solución matemática al problema. Por último, la *comparación* permite validar el modelo para reajustarlo o perfeccionarlo, reformular la situación en términos matemáticos y contextualizar la respuesta.

El autor afirma que este proceso refuerza habilidades relacionadas con la matematización, entendida como la "transformación mental en términos matemáticos de la realidad" (Lange, 1993; citado en Gómez, 2003). Freudenthal (1980, citado en Planchart, 2005) comparte esta consideración cuando expone que

> "La perspectiva correcta se da principalmente a partir del medio ambiente hacia las matemáticas y no en la otra dirección. No primero hacer las matemáticas y después regresar al mundo real, sino el mundo real primero, y después la matematización. […] Al enseñar a matematizar el mundo real está representado por un contexto significativo que involucra un problema matemático […] Las matemáticas deberían ser enseñadas dentro de contextos […]"

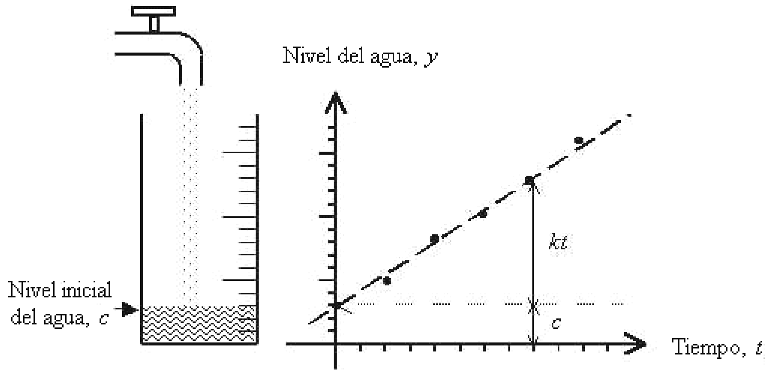
El estudio de los modelos matemáticos es considerado como una actividad de vital importancia en el desarrollo de la ciencia y de algunas habilidades de pensamiento. Por ejemplo, Matos (1998, citado en Crouch y Haines, 2004) expone que "la modelación es una actividad en la cual los estudiantes dan significado a las ideas, problemas y conceptos de las matemáticas y de otras ciencias". Así mismo, Guzmán (2000?), quien considera la actividad científica, en general, como una exploración de ciertas estructuras de la realidad física o mental, plantea que las estructuras que son objeto de estudio desde la actividad matemática se enfrentan a unos modos particulares de tratamiento, a saber: una simbolización adecuada que permite presentar eficazmente, desde el punto de vista operativo, las entidades que maneja; una manipulación racional rigurosa; y un dominio efectivo de la realidad a la que se dirige, primero racional, del modelo mental que se construye, y luego, si se pretende, de la realidad exterior modelada.

Para concretar un poco más las consideraciones conceptuales que se han expuesto hasta el momento relativas al proceso de modelación, se presenta un análisis sucinto de cómo tiene lugar éste en el estudio del concepto matemático tomado a modo de ejemplo en este trabajo: la función. Inicialmente, Hitt (2000, citado en Planchart, 2005) deja ver la importancia que tiene estudiar la modelación de funciones en Matemáticas pues "a través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno [fenómenos] de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo".

Keng (2001) propone el estudio de varios ejemplos en los que ilustra algunas alternativas de modelación de situaciones reales en las que está involucrado el concepto de función indicando algunas etapas del proceso. A continuación se retoma uno de ellos como complemento del tratamiento conceptual que se ha hecho hasta el momento.

Ejemplo: Funciones lineales y afines

Considere la siguiente situación en la que el agua fluye desde un grifo hasta un recipiente cilíndrico graduado con radio constante. Suponga que se desea construir un modelo para mostrar cómo cambia el nivel del agua con respecto al tiempo, de modo que sea posible predecir cuánto tiempo tardaría en llenarse todo el recipiente. El nivel del agua en diferentes instantes puede leerse utilizando la escala impresa en el cilindro. Los datos se registran utilizando un gráfico como se ilustra a continuación.



Utilizando los datos se puede deducir la relación entre el nivel del agua, y, y el tiempo transcurrido desde que se abrió el grifo, t, asumiendo que el nivel inicial del agua es c. No es difícil ver que el nivel del agua en cualquier tiempo t es c sumado con un número positivo que depende de t. Finalmente, el modelo obtenido sería algo como $y = c + kt$.

En la modelación de esta situación real simple, la relación lineal o afín puede nacer como resultado del proceso. Generalmente, este tipo de funciones se trabajan en contextos en los que la gráfica representa sucesos reales o físicos. Además, el proceso de modelar permite estudiar conceptos relacionados, por ejemplo, de la situación anterior se puede inferir que se consigue una pendiente más grande cuando se aumenta el flujo del agua.

En este ejemplo, la modelación se hace a partir de la consideración de una situación real que es formulada en términos matemáticos a partir de la utilización de varios sistemas semióticos de representación. Es pertinente incluir el sistema tabular, el gráfico y el algebraico, como medios en los que el problema toma cada vez connotaciones distintas y complementarias, debido a los elementos propios de cada sistema que determinan un modelo que describe la situación, y permite hacer predicciones acerca del comportamiento de las variables que intervienen en ella. La concreción se logra cuando, en palabras de Keng, se completa el ciclo y el problema puede ser entonces resuelto en el mundo real.

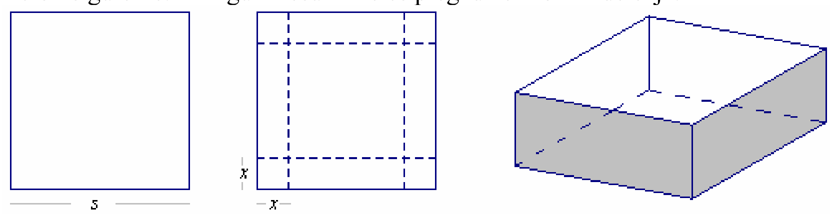
Actividad. Modelación del concepto función

A continuación, se propone una actividad orientada a generar comprensión en torno al proceso de modelación de un objeto matemático como componente del análisis de los contenidos en Matemáticas, que complementa la exposición hecha en torno a este organizador curricular. Se requiere que los ejemplos extraídos de Keng (2001) sean presentados previamente a los estudiantes como actividad introductoria para desarrollar las tareas específicas que se plantean en el ejercicio correspondiente.

Ejercicio A

1. Problema de la caja de capacidad máxima[2]

Se pretende elaborar una caja abierta usando un cuadrado de cartón de lado s cortando un cuadrado de lado x en cada esquina del cuadrado inicial, como se muestra en la ilustración siguiente. La figura resultante es plegada en forma de caja.



¿Qué valor debe tomar x si se pretende diseñar la caja de mayor volumen?

a. Resuelva el problema construyendo varias cajas y tomando las medidas para aproximar un modelo sin utilizar expresiones algebraicas.
b. Resuélvalo ahora hallando una expresión analítica que permita modelar la variación del volumen con respecto a la longitud x.
c. ¿Qué dificultades u obstáculos identifica en la resolución del problema empíricamente? ¿Cuáles en el estilo de trabajo analítico?
d. Determine un conjunto de etapas para el proceso de modelación del problema a partir de la aproximación empírica y otro a partir de la aproximación analítica. En cada caso, especifique qué operaciones (e.g. medición, manipulación algebraica, etc.) se efectuaron para pasar de una etapa a la otra.

[2] Tomado de Keng (2001).

Las dos aproximaciones a la solución de la situación planteada en este ejercicio implican, por supuesto, la utilización de elementos de las Matemáticas pertenecientes a sistemas de representación semióticos particulares. Esto puede ser utilizado para que los estudiantes muestren que hay sistemas que se adaptan más a un tipo de trabajo determinado, en este caso, el tabular y gráfico a lo empírico o experimental, el algebraico y analítico a lo abstracto. En ambas vías el resultado es válido pues se generan modelos que cumplen con la función de facilitar la descripción y formulación de hipótesis sustentadas con respecto a una situación particular, o más específicamente, con respecto a los elementos que intervienen en ella.

Una vez los estudiantes hayan concretado el ejercicio, el profesor debe proponer una socialización del trabajo hecho en la que se privilegie la exposición y discusión en torno a las dificultades y obstáculos que los estudiantes identifican en el proceso, orientándola hacia la previsión de situaciones que puedan tener lugar en el aula de clase en donde los estudiantes para profesor se desempeñen. Como tarea complementaria se propone el ejercicio B, para el cual el profesor debe presentar a los estudiantes el ejemplo de Keng (2001) retomado en este documento.

Ejercicio B.

1. Con base en el ejercicio A y el ejemplo dado, determine un conjunto de etapas que, en general, debe incluir el proceso de modelación en Matemáticas.

2. Resuelva las siguientes situaciones[3]:

i. Dos postes de alumbrado están distanciados uno del otro por 30 metros. Los postes miden 12 y 28 metros de altura, respectivamente. Se pretende tender un cable fijo en un punto P en el suelo, entre los extremos de los postes. ¿A qué distancia x del poste más pequeño se debe fijar el cable para que la longitud del cable que une a los dos postes sea mínima?

ii. Un alambre se corta en dos piezas. Una pieza se usa para construir un círculo y la otra para formar un cuadrado. Exprese la suma de las áreas como una función de la longitud x cortada para formar el círculo.

a. Identifique las etapas del proceso de modelación obtenidas en el numeral 1.
b. Relacione los elementos de cada representación matemática que obtiene con los elementos de la situación e interprete tales representaciones.
c. Bajo qué condiciones son válidas las representaciones obtenidas para modelar la situación.

---

[3] Tomadas de Planchart (2005).

d. Describa un conjunto de situaciones que pueden resolverse a partir de un proceso de modelación similar al usado en este numeral.

Cuando los estudiantes desarrollen el ejercicio B, nuevamente el profesor debe proponer la socialización del trabajo hecho, haciendo énfasis en que se analice de forma crítica, tanto las etapas que cada uno (o cada grupo) haya formulado para describir el proceso de modelación, como de las relaciones que establezcan entre los elementos de cada representación que componen el modelo y la situación propuesta. Se espera que los estudiantes concreten, a partir de la socialización de su trabajo, una idea más general del proceso de modelación en Matemáticas.

Es importante que el profesor oriente la discusión en clase hacia la formulación de relaciones entre el proceso en cuestión, el análisis fenomenológico y la representación de objetos matemáticos que han sido estudiados con anticipación. Para ello puede hacer notar que a partir del estudio de las *representaciones* se establece el rol que desempeñan las unidades significantes de los sistemas semióticos de representación en la formulación y validez del modelo, así como el *análisis fenomenológico* interviene en la medida en que las situaciones planteadas hacen parte del conjunto de fenómenos que organiza el concepto matemático de función y, por tanto, las características de los componentes de la situación se corresponden con unas características particulares de la función, que son expresadas a través del modelo.

Como actividad adicional puede proponerse la lectura del Grupo Construir Matemáticas (2002) en la que se presenta una situación matemática que es modelada a partir de varios instrumentos. Sobre éstos debe recaer el análisis que se haga en términos de las implicaciones didácticas que tenga su utilización en el aula.

Una vez los estudiantes hayan concretado estas tareas, el profesor en conjunto con sus estudiantes, socializarán e institucionalizarán lo correspondiente a este organizador curricular. La relevancia que tiene el análisis del proceso de modelación en Matemáticas en la planificación de las unidades didácticas debe ser considerada tema de discusión para la clase, orientada hacia la identificación de: dificultades y obstáculos que pueden presentarse en el aula de clase, materiales que faciliten el trabajo en clase, e incluso, la definición de una secuencia de actividades. En conjunto, esta socialización ha de orientarse en términos de las adquisiciones conceptuales que requiere un profesional de la educación matemática para ejercer su labor en el aula.

6.1.4 Evolución histórica

Según Mazarío (1999) la historia de las ciencias y el conocimiento de ella aportan los datos y reflexiones sobre la naturaleza, el alcance y los límites del conocimiento humano en su forma más rigurosa y sistemática. Así, el conocimiento de la historia de las matemáticas contribuye a comprender de manera profunda los conceptos y métodos matemáticos, al presentar sus orígenes, evolución y relaciones. Así mismo, permite a los implicados en estudiarla descubrir, aclarar y consolidar ideas relativas a la génesis de los objetos matemáticos, como las definiciones, teoremas y métodos, posibilitando reconocerlos como producto de la incesante búsqueda de soluciones a problemas que surgen, en algunos casos, por las necesidades presentadas en cada una de las épocas, en otros, por la indagación de fenómenos físicos y sociales, y por supuesto de la perfección de los métodos de la propia matemática.

Nolla (2001, citado en González, 2004) expresa que "el conocimiento de los problemas que dieron origen tanto a las ideas matemáticas que se tratan en la enseñanza como a las mismas formas de enseñanza, así como el estudio de la evolución de su tratamiento y de los nuevos problemas que han generado, proporciona los fundamentos para la comprensión de las ideas y conceptos que de ellos han resultado". Por lo tanto, el estudio de la historia de los conceptos matemáticos se convierte en una fuente muy fructífera para los profesores, y más para aquellos en formación, en la medida en que les provee información tanto disciplinar como relativa las formas en las que el conocimiento matemático puede ser aproximado a los estudiantes de una forma natural. Por ejemplo, Sánchez (1997) sostiene que el análisis de la evolución histórica de las matemáticas proporciona algunos principios sobre cómo ha de enseñarse y aprenderse esta ciencia. Naturalmente, estos principios son completados y matizados desde otras fuentes como la psicología del aprendizaje o la reflexión sobre la práctica docente.

Por su parte Mazarío (1999) sustenta que es importante concebir la enseñanza de las matemáticas integrada en la historia y en la cultura, porque puede constituir un valioso aporte a fin de proporcionar motivación e interés al analizar las dificultades por las que ha transitado el pensamiento humano hasta llegar a las formas actuales de presentación matemática. También Guzmán (1992, citado en González, 2004) aporta una idea significativa cuando menciona que "si conocemos la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos, sabremos perfectamente el lugar que ocupan en las distintas consecuencias, aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir, la situación reciente de las teorías que de ellas se han derivado, etc."

Algunos investigadores se oponen a una enseñanza de las ciencias desligada de sus orígenes (Maza, 1994; Houzel, 1977; Courant, 1974; Lakatos, 1978; Kline, 1978; Droeven, 1978; citados en González, 2004). Los argumentos más frecuentes con los cuales defienden la inclusión de la historia de las Matemáticas en el currículo escolar, tienen que ver con los resultados poco productivos que arroja un estilo de trabajo basado en la lógica deductivista, en el que las matemáticas son vistas como un sistema de verdades acabado y ordenado. Según los autores, esta actitud introvertida en el campo de la ciencia, no es adecuada para los estudiantes que buscan independencia intelectual más que adoctrinamiento. Droeven (1978, citado en González, 2004) especifica un poco más este pensamiento cuando dice

> "El esquema de exposición de la enseñanza: definiciones teoremas, pruebas, sufre de una amnesia histórica, pues al ignorar las génesis históricas de los conceptos matemáticos que involucra, induce a una amnesia conceptual en el alumno, el cual no puede reencontrar los obstáculos del conocimiento matemático que han tenido que vencer esos conceptos para presentarse de manera tan racional y aséptica".

González (2004) afirma que no parece difícil demostrar que la perspectiva histórica permite, por una parte, dar una visión más panorámica de los problemas matemáticos para calibrar con mayor precisión la importancia de los diversos temas que quedan así mejor articulados dentro de un contexto general. Análogamente, Kline (1992, citado por González, 2004) expresa que "la historia puede dar la perspectiva global de un tema y relacionar las materias, no sólo unas con otras sino también con las líneas centrales de pensamiento matemático".

Según González (2004), la historia de las Matemáticas también puede verse como fuente de vocación, motivación, orientación, inspiración y autoformación del profesor de Matemáticas, entre otras cosas, porque: el conocimiento de la historia favorece la comprensión profunda de los problemas matemáticos; las Matemáticas tienen una fuerza creativa interna que se manifiesta en el devenir histórico en los múltiples actos de creación continuada ligados un vasto despliegue intuitivo; la historia de las Matemáticas revela los enormes esfuerzos desplegados por generaciones de matemáticos en la formación de algún concepto nuevo o en la resolución de algún problema importante; la historia de las Matemáticas puede proveer al profesor un campo inagotable de estímulos para mantener su interés en la autoformación continuada para perseverar en el estudio de la ciencia; la historia de las Matemáticas subvierte la extendida creencia que el rigor es el supremo valor de las Matemáticas, que debe imponer una vía única de razonamiento para llegar a los resultados; la historia de las Matemáticas sirven para desdogmatizar y enriquecer culturalmente la enseñanza de las Matemáticas.

El aumento de investigadores en el campo de la Didáctica de las Matemáticas que sugieren la inclusión de aspectos históricos de las matemáticas en la enseñanza de esta disciplina y en la reflexión sobre ella, ha sido notable, y se puede evidenciar en las ponencias y comunicaciones presentadas en congresos nacionales e internacionales, así como en artículos, monografías entre otros.

Si bien, no es intención principal del currículo escolar fundamentar la formación de los estudiantes hacia la construcción o estudio profundo de las matemáticas a partir de la exploración de la historia; se pretende, en cierta medida, orientar a los estudiantes al reconocimiento de la evolución de los conceptos, las vidas de quienes fueron los protagonistas del proceso de construcción de tales conceptos, evitando que este análisis se reduzca a una mera relatoría de anécdotas, y los errores cometidos por los propios matemáticos que en repetidas ocasiones se reproducen en los estudiantes. De esta forma, es posible generar una visión de la actividad matemática, ante todo como actividad humana, con sus éxitos y regocijos, fracasos y miserias, de modo que estos hechos aporten en los estudiantes valores formativos para una educación integral.

Se puede concretar la apreciación del párrafo anterior retomando a Fauvel (1991, citado en Sierra, 1997) quien propone algunas formas de uso de la historia de las matemáticas en el aula. Entre ellas, hay varias que se relacionan de forma directa con la gestión de clases de Matemáticas, a saber: mencionar anécdotas matemáticas del pasado; presentar introducciones históricas de los conceptos que son nuevos para los alumnos; usar ejemplos del pasado para ilustrar técnicas o métodos; que también ayudan a dotar de cierto carácter cultural y humano a la actividad matemática. Y hay otras que pueden considerarse como directrices para la planificación de clases de Matemáticas, como: explorar errores del pasado para ayudar a comprender y resolver dificultades de aprendizaje; idear aproximaciones pedagógicas al tópico de acuerdo con su desarrollo histórico; idear el orden y estructura de los temas dentro del programa de acuerdo con su desarrollo histórico.

Está visto que el estudio de la evolución histórica de los conceptos matemáticos aporta significativamente a los procesos de enseñanza y de aprendizaje asociados a ellos, en la medida en que se acompañe de una reflexión continua en torno a: su análisis fenomenológico (en el que se especifiquen los fenómenos del mundo real y de las Matemáticas que fueron organizados en un principio por el concepto matemático, la correspondencia entre las características de esos fenómenos y las propiedades del objeto matemático, y los fenómenos a los cuales se extendió posteriormente), sus principales representaciones (en el que se especifiquen los sistemas semióticos que se usaron y aquellos que se desarrollaron conforme se avanzaba en el estudio, la correspondencia entre las unidades significativas de cada sistema y los elementos propios del concepto y su evolución), y los obstáculos que aparecieron en el proceso de formalización del concepto matemático.

Para concretar un poco más las consideraciones conceptuales que se han presentado, relativas a la manera en que debe el estudio de la evolución histórica de los conceptos matemáticos para aprovechar todas las ventajas y contrarrestar las dificultades que puedan aparecer en la enseñanza y en el aprendizaje de las Matemáticas, que se han expuesto anteriormente, se presenta un análisis sucinto de cómo puede desarrollarse tomando nuevamente el concepto de función. Así, Puig (1997) resume varios momentos en la consolidación del concepto de función que permiten describir una fenomenología histórica para el mismo:

(i) Las funciones hicieron su aparición como relaciones entre magnitudes variables cuya variabilidad se comparaba en términos infinitesimales.

(ii) La libertad de cambiar las variables de dependiente a independiente y entre independientes condujo a un nuevo tipo de operación con funciones: la composición y la inversión. Es esta nueva riqueza operatoria la que ha causado el éxito del concepto de función.

(iii) La necesidad de distinguir entre las variables dependientes e independientes condujo a poner en un primer plano las funciones en vez de las relaciones. A pesar de lo que sugieren las expresiones algebraicas y analíticas, el desarrollo tendió hacia las funciones univalentes.

(iv) Un cambio de perspectiva condujo de la descripción de datos visuales mediante funciones expresadas analíticamente a la visualización de funciones mediante gráficas.

(v) La función arbitraria hace su aparición con el cálculo variacional y la resolución de ecuaciones diferenciales. Esta 'arbitrariedad' no sólo atañe al carácter de la dependencia funcional, sino a la naturaleza de las variables, que pueden ser, número, puntos, curvas, funciones, elementos de conjuntos arbitrarios.

(vi) Las funciones de análisis, las transformaciones geométricas, las permutaciones de los conjuntos finitos, las aplicaciones entre conjuntos arbitrarios confluyen para generar el concepto general de función.

(vii) Ese concepto se usa a su vez para organizar una gran variedad de objetos: desde las operaciones algebraicas hasta los predicados lógicos.

Actividad. Evolución histórica del concepto función

Para abordar el siguiente ejercicio se sugiere que se trabaje en grupos integrados por cuatro estudiantes, debido a la cantidad de tareas que contiene. Las tareas propuestas se orientan a la luz de una búsqueda en varias fuentes bibliográficas acerca de la historia de las Matemáticas, particularmente aquellas que se refieran al concepto de función, de modo que puedan identificar los momentos históricos destacados anteriormente por Puig y caracterizar este concepto a partir de los diferentes contextos en los que aparece a través del tiempo. Es deber del profesor sugerir libros de historia de las Matemáticas que crea conveniente para desarrollar esta actividad, no obstante se considera que el libro de Morris Kline y el de Karl Boyer trabajan en una perspectiva consonante con los argumentos expuestos acerca de la necesidad de incluir el análisis histórico como actividad que orienta la enseñanza de las Matemáticas.

Ejercicio.

a. Identifique el periodo histórico en que tuvo lugar cada uno de los momentos enunciados por Puig y nombre algunos de los aportes de los matemáticos de cada época.
b. Describa un conjunto de fenómenos (e.g. situaciones del mundo real o matemáticas) organizado por el concepto de función en cada momento y asocie las características de tales fenómenos a las propiedades y otros conceptos asociados a la función.
c. Complete la siguiente tabla teniendo en cuenta las representaciones que aparecieron en cada uno de los momentos históricos destacados por Puig, asociándolas con las propiedades del concepto que se hacen visibles a través de ellas y con algunos fenómenos del mundo real que pueden ser modelados con cada una de ellas.

Representación	Propiedades del concepto función	Fenómenos del mundo real

d. Reelabore una lista de los momentos históricos que a su parecer determinaron la consolidación del concepto matemático función y justifíquela.

Una vez los estudiantes concluyan el ejercicio, debe promoverse una discusión en el aula en la que se recree el contexto matemático relativo a cada momento histórico, especificando qué desarrollo se dio en la ciencia, particularmente con respecto al concepto de función, y se formulen aproximaciones a la manera en que estos momentos se relacionan para posibilitar la evolución y consolidación de este concepto. El interés también debe recaer en la evaluación crítica de las situaciones que los estudiantes propongan, de acuerdo con su adecuación a cada momento histórico y con la posible secuenciación que pueda hacerse de ellas como actividades en el aula de Matemáticas.

Debido a que se retoman aspectos, tanto del *análisis fenomenológico* de la función como de las *representaciones* asociadas a este objeto matemático, el espacio de institucionalización del conocimiento relativo al estudio de la evolución histórica de los conceptos matemáticos, puede servir para retomar y precisar algunas de las cuestiones planteadas como objeto de análisis en el tratamiento de tales organizadores.

Principalmente, se pretende que los estudiantes para profesor reconozcan la utilidad del material histórico en el análisis de los contenidos matemáticos dispuestos para la enseñanza, en tanto aspecto fundamental del ejercicio reflexivo asociado a la formulación de unidades didácticas.

7 REFLEXIONES FINALES

Pese a haber sido parte de un grupo de investigación en donde la labor desempeñada como monitores permitió a los autores de este documento desarrollar y fortalecer algunas competencias relativas al trabajo académico, como la lectura crítica de documentos teóricos, la participación activa en discusiones grupales y el análisis de información acopiada, el desarrollo de esta monografía significó un gran reto porque, además de ser la producción de mayor categoría que formulan los estudiantes de pregrado, se trató de un trabajo independiente elaborado con un rigor similar al que caracterizó la forma de trabajo al interior de la investigación. Por tal motivo, las ganancias que se generaron a partir del desarrollo de esta monografía se encuentran ligadas tanto a adquisiciones conceptuales referidas a los tópicos que fueron objeto de estudio, ya que se conocieron planteamientos y posiciones teóricas de distintos autores que se tuvieron en cuenta en el desarrollo del marco teórico, como al fomento de una disciplina de trabajo en Educación Matemática.

Elaborar consideraciones con respecto a algún tópico en la formación de licenciados en matemáticas, motiva indudablemente una reflexión en torno a varios tópicos relativos al saber deseable del profesor, a la concepción de la actividad matemática y, por tanto, a la de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Particularmente, el estudio del diseño de unidades didácticas hizo posible determinar la incidencia que tiene el análisis de los contenidos matemáticos como componente del análisis didáctico, en la actividad reflexiva que desarrolla el estudiante para profesor con miras a generar un saber de carácter práctico que lo prepare para su futura labor.

A través de las discusiones al interior del grupo de trabajo se consiguió cuestionar el conocimiento que se tenía con respecto a estos tópicos, al punto de mostrarlo insuficiente, y así promover su reconstrucción, profundización y complejización, en la medida en que además de desarrollar saber teórico se optó por plasmar en actividades específicas las consideraciones que se lograron y que a su vez se constituyeron en adquisiciones conceptuales de los autores de este documento. Así, aunque no fue un objetivo explícitamente expresado, el conjunto de actividades presentado se constituye en una buena aproximación a una propuesta didáctica para el estudio de la formulación de unidades didácticas en el espacio académico Proyecto de Aula, dispuesta para su posterior aplicación, análisis y realimentación.

Así pues, queda abierta la posibilidad de utilizar este estudio como base para la formulación de trabajos posteriores, en los que ojalá se promueva un análisis de la propuesta que permita, con el pasar del tiempo, consolidar la planificación del espacio académico Proyecto de Aula. Por supuesto, también pueden proponerse otros estudios en los que la reflexión realizada en esta monografía de los objetos matemáticos y de la Didáctica de las Matemáticas, sea complementada y complejizada para expandir, en un futuro el impacto que tengan trabajos de esta índole en la formación de licenciados en Matemáticas.

8 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alayo, F. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Traducido del original *The Language of Functions and Graphs*. Ministerio de Eduación y Ciencia. Servicio Editorial Universidad del País Vasco.

Azcárate, C., y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.

Bagni, G. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. En, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7, 1, 5-24.

Cancelo, J. (2002). Un diseño formal posible de la unidad didáctica en función de las capacidades. En prensa.

Camargo, L. et al. (2004). *Práctica Docente. La Práctica Pedagógica y Didáctica en el Departamento de Matemáticas*. Facultad de Ciencia y Tecnología. Universidad Pedagógica Nacional.

Carratalá, F. Guía práctica para la elaboración de unidades didácticas. En prensa.

Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización, en Rico, L. (coord.). La educación matemática en la enseñanza secundaria, pp. 95-124. Barcelona: ICE. Universidad de Barcelona - Horsori.

Crouch, R., y Haines, C. (2004) Mathematical modelling: transitions between the real world and the mathematical model. *International Journal of Mathematical education in Science and technology*. Vol. 35. No. 2.

De Pro Bueno, A. (1999). Planificación de unidades didácticas por los profesores: análisis de tipos de actividades de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 17 (3), pp. 411 – 429.

Duval, R (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle

Espinoza, L., y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de límite de función: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las ciencias*, 18 (3), pp. 355-368.

Fernández, J., y Elortegui, N. (1996). Qué piensan los profesores los profesores acerca de cómo se debe enseñar. *Enseñanza de las ciencias*, 14 (3), pp. 331-342

Font, V., y Acevedo, J. (2003). Fenómenos asociados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las ciencias*, 21 (3), pp. 405-418.

Gómez, J. (2003) La modelización matemática: una herramienta válida en la enseñanza de las Matemáticas universitarias. *Suma*. No. 42 pp. 37 – 46.

Gómez, P. (2006) La planificación: una competencia fundamental del profesor. En, *Palabra Maestra*. Año 6. No. 12

González, A., y Hernández, E. (2004). Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas. Universidad de Salamanca. En prensa.

González, P. (2004). La historia de las Matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente la enseñanza. *Suma*, 45, pp. 17 – 28.

Grupo Construir Matemáticas (2002) . Isoperímetros: Resolución del problema de los isoperímetros mediante la función cuadrática. *Suma*. No. 40 pp. 113 - 117

Guzmán de, M. (2000?) Enseñanza de las ciencias y la Matemática. Matemáticas. En prensa.

Keng, A. (2001) Teaching Mathematical Modelling in Singapore Schools en *The Mathematics Educator*, Vol. 6, No. 1.

Leinhardt, G., Zaslavsky, Orit., y Stein, M. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*. Vol. 60, No. 1, pp. 1 – 64.

Mazarío, I. (1999). La historia de la matemática y de la ciencia como estrategia en la didáctica de resolución de problemas. En *Educación universitaria.* Nº 2 . pp. 195-203

Mellado, V. (1996). Concepciones y prácticas de aula de profesores de ciencias en formación inicial de primaria y secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 14 (3), pp. 289-302

Meznik, I. (2002) *Modelling as a support in teaching of Mathematics*. En prensa

Moreno, M. (2004). Asignaturas de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Almería. Seminario: 'Itinerario Educativo de la Licenciatura de Matemáticas' Granada. En prensa.

Planchart, O. (2005) La Modelación Matemática: alternativa didáctica en la enseñanza de Precálculo. *Revista de investigación 360 en Ciencias y Matemáticas*. Vol. 1 No. 1. En Internet, http://cremc.ponce.inter.edu/360/index.htm

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico, en Rico, L. (coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, pp. 61-94. Barcelona: ICE. Universidad de Barcelona - Horsori.

Rico, L. (1995). *Conocimiento numérico y formación del profesorado.* Granada: Universidad de Granada.

(1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE. Universidad de Barcelona - Horsori.

Salazar, C., Andrade, L., y Leguizamón, C. (2004). Rutas Pedagógicas en la Formación del Licenciado en Matemáticas de las Universidad Pedagógica Nacional.

Sánchez, G., y Valcárcel, M. (1996) ¿Qué tienen en cuenta los profesores cuando seleccionan el contenido de enseñanza? Cambios y dificultades tras los programas en formación. *Enseñanza de las ciencias*. Vol. 14. No. 3.

Sánchez, J. (1997). Historia de la matemática: Implicaciones didácticas. *Suma*. No. 26. pp. 33-38

Sanloz, D. (2000). La Modelación. En prensa.

Sfard, A. (1991) Sobre la naturaleza dual de las concepciones matemáticas: reflexiones sobre procesos y objetos como caras diferentes de la misma moneda. Traducido del original On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22; 1 – 36. Kluwer Academic Publisher.

Sierpinska, A. (1992) Sobre la comprensión de la noción de función. Traducido del original *On Understanding The Notion of Function,* En E. Dubinski y G. Harel (eds.), *The*

Concept of function: Some aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes, Vol 25, pp. 25 – 58. Mathematical Association of America.

Sierra, M. (1997) Notas históricas de las Matemáticas pata el currículo de secundaria, en Rico, L. (coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, pp.179-194

Travieso, N., González, A., y Castiñeiras, N. (1997). La planificación de unidades didácticas: opción para la formación. En prensa.

Vasco, C. (1992). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Memorias del Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas.* Ministerio de Educación Nacional de la República de Colombia. pp. 68-77.

Wattenberg, F. (1999). Modeling. An Introduction. En prensa.