

ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL MEDIANTE  
UN APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS: “ARMEMOS LA BICI Y  
APRENDAMOS MATEMÁTICAS”

JAIRO ANDRÉS ROJAS PATARROYO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D. C.

2022

ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL MEDIANTE  
UN APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS: “ARMEMOS LA BICI Y  
APRENDAMOS MATEMÁTICAS”

JAIRO ANDRÉS ROJAS PATARROYO

CÓDIGO: 2015240074

C.C. 1012417815

DIRECTOR

DR. FRANCISCO JAVIER CAMELO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D. C.

2022

## **Dedicatoria**

El presente trabajo está dedicado, principalmente, a Dios; a todas las personas que participaron en mi proceso de formación; y, en especial, a mi mamá, quien estuvo presente durante cada momento que atravesé, en cada alegría, en cada angustia, en cada fracaso y en cada éxito. Sin ella no sería la persona que soy.

## **Agradecimientos**

A mis padres, quienes son el motor de mis sueños y metas, y han estado presentes en los días más oscuros y en los más brillantes. Siempre me han aconsejado de la mejor forma y apoyado en mis decisiones. Muchas gracias por estar a mi lado respaldándome.

A mis hermanos, quienes con su cariño y experiencia me han apoyado de la mejor forma posible, y me han enseñado que la mejor manera de salir adelante es por medio del estudio.

A mi tutor, quien vio en mis ideas un potencial de proyecto y, con sus comentarios y consejos, me guio en cada decisión con respecto al trabajo de grado.

A mi hija que está por llegar a iluminar mi vida y a mi esposa, ellas dos se han convertido en el motor y la motivación para triunfar en la vida y en los proyectos que están por venir.

## Tabla de contenido

|   |    |
|---|----|
| Introducción .....  | 10 |
| Capítulo 1. Presentación del problema .....                               | 12 |
| 1.1 Identificación del problema.....                                      | 12 |
| 1.1.1 Preguntas problema .....  | 18 |
| 1.2 Formulación de objetivos .....  | 18 |
| 1.2.1 Objetivo general .....  | 18 |
| 1.2.2 Objetivos específicos.....  | 18 |
| 1.3 Importancia y alcances del trabajo de grado .....                     | 19 |
| 1.4 Limitaciones del trabajo de grado .....                               | 19 |
| Capítulo 2. Marco de referencia.....                                      | 22 |
| 1.5 Modelación matemática .....   | 22 |
| 1.5.1 Modelación matemática en un contexto internacional .....            | 22 |
| 1.5.2 Diferentes perspectivas de la modelación matemática.....            | 23 |
| 1.5.3 Modelación matemática a nivel nacional .....                        | 26 |
| 1.5.4 Modelación matemática .....   | 27 |
| 1.5.5 Algunas consideraciones acerca de la modelación matemática .....    | 29 |
| 1.6 ABP .....   | 30 |
| 1.7 Concepto de función.....  | 31 |
| 1.7.1 Representaciones del concepto de función.....                       | 35 |
| 1.8 TIC .....   | 37 |
| Capítulo 3. Diseño metodológico .....                                     | 39 |
| 1.9 Diseño y metodología de aplicación de actividades.....                | 39 |
| 1.9.1 Situaciones que se proponen a los estudiantes de noveno grado ..... | 40 |
| 1.10 Diseño de la investigación.....                                      | 41 |

|  |   |    |
|--|---|----|
| 1.10.1                                   | Investigación cualitativa.....                          | 41 |
| 1.10.2                                   | Recolección de información.....                         | 42 |
| 1.10.3                                   | Evaluación.....   | 43 |
| Capítulo 4. Análisis de actividades..... |   | 45 |
| 1.11                                     | Análisis de resultados .....                            | 45 |
| 1.12                                     | Niveles de interpretación.....                          | 45 |
| 1.12.1                                   | Nivel de descripción.....                               | 45 |
| 1.12.2                                   | Nivel de búsqueda y análisis de situaciones clave ..... | 47 |
| Conclusiones.....                        |   | 55 |
| Referencias.....                         |   | 57 |

## Lista de tablas

|   |    |
|---|----|
| Tabla 1. Plantilla de las diferentes perspectivas en la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática ..... | 24 |
| Tabla 2. ....   | 36 |
| Tabla 3. Cronograma de implementación de situaciones .....  | 43 |
| Tabla 4. Evidencia de situación 1: Fase de exploración y observación.....   | 47 |
| Tabla 5. Evidencia de situaciones 2 y 3: Delimitación del problema.....   | 48 |
| Tabla 6. Evidencia de situación 4: Fase de evaluación y validación .....  | 49 |
| Tabla 7. Evidencia de situación 4: Fase de evaluación y validación .....  | 50 |
| Tabla 8. Evidencia de situación 4: Fase de evaluación y validación .....  | 50 |
| Tabla 9. Evidencia de situación 6: Fase de evaluación y modificación del modelo.....  | 51 |
| Tabla 10. Evidencia de situación 6: Fase de evaluación y modificación del modelo.....   | 52 |
| Tabla 11. Evidencia de situación 5: Fase de conexión con otros modelos y situaciones .  | 54 |

## **Lista de figuras**

|  |    |
|--|----|
| Figura 1. Resultados del promedio del puntaje en la prueba de matemáticas, según el calendario académico.....    | 13 |
| Figura 2. Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño en matemáticas según grupo de referencia y año..... | 14 |



## **Lista de anexos**

|   |    |
|---|----|
| Anexo 1. Consentimiento informado.....  | 47 |
| Anexo 2. Ficha técnica situación 1..... | 49 |
| Anexo 3. Ficha técnica situación 2..... | 50 |
| Anexo 4. Ficha técnica situación 3..... | 51 |
| Anexo 5. Ficha técnica situación 4..... | 52 |
| Anexo 6. Ficha técnica situación 5..... | 53 |
| Anexo 7. Ficha técnica situación 6..... | 54 |

## Resumen

El presente trabajo de grado tiene como propósito mostrar las potencialidades y los inconvenientes que se presentan al ejecutar en el aula un ambiente de modelación matemática, con la intención de proponer un acercamiento a la noción de función. El ambiente está mediado por el aprendizaje basado en proyectos (ABP) como metodología para fomentar el trabajo en equipo, lo que posibilita crear espacios de discusión y retroalimentación entre los estudiantes y el docente. Así, se plantean situaciones creadas con base en las características de las fases de modelación matemática, con el objetivo de organizar el proceder del trabajo de grado, el análisis de las situaciones y la creación de los proyectos que se desarrollaron.

Para dar inicio a este trabajo de grado, se hace una revisión bibliográfica en torno al proceso de modelación matemática, donde se observan los estudios nacionales e internacionales; con ello, se realiza una búsqueda de los principales expositores del ABP. Asimismo, se revisa el concepto de función a lo largo de la historia, por lo que se concluye que su desarrollo abarca diferentes representaciones. Para terminar el marco teórico, se da una mirada a la importancia de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en la educación.

Con relación a la metodología, se presenta una adecuación de las fases de modelación matemática para plantear las situaciones por las cuales pasan los estudiantes y el docente, y se realiza una investigación de tipo cualitativa. Esto, con el fin de realizar un análisis basado en la experiencia que atraviesan los estudiantes. Por consiguiente, se recolecta la información de la aplicación de las situaciones y los proyectos para estudiar los momentos clave donde se muestran, aparentemente de forma “natural”, cuestiones relacionadas con el acercamiento del concepto de función lineal.

El trabajo de grado termina con un análisis de la información recolectada, donde se identifican los momentos en los que se muestra relación directa con aspectos propios del concepto de función lineal. A partir de esto, se encuentra que la implementación del ABP, junto con la modelación matemática, aportan de manera significativa al aprendizaje de los estudiantes y, de igual forma, se evidencia que las situaciones planteadas se aproximan naturalmente a la noción de función lineal, con lo que se gana interés en solucionar la pregunta que lleva a plantear el proyecto. Dichas situaciones de aproximación pueden ser utilizadas por el docente para complejizar la apropiación del concepto.

## Introducción

Durante el año 2020 se vivió una de las más grandes crisis sanitarias registradas en la historia mundial a causa de la rápida propagación del virus SARS-CoV-2 o COVID-19, que pronto se catalogó como una pandemia (World Health Organization [WHO], 2020); tal virus fue responsable de una grave enfermedad respiratoria que costó la vida de millones de personas. Las medidas adoptadas por el Gobierno colombiano restringieron la libre circulación de los ciudadanos durante algunos periodos en los años 2020 y 2021, lo que los motivó a utilizar medios alternativos de transporte, como la bicicleta, a fin de evitar las aglomeraciones. Por otra parte, la comunidad científica realizó grandes esfuerzos al modelar el comportamiento del virus y al predecir los picos de la pandemia y lugares con más afectación.

Estas dos situaciones se utilizan en este trabajo de grado como contexto cercano a los estudiantes, con lo que se pretende generar un interés “natural” en estudiar la función lineal a través de la modelación matemática en procesos inmersos en el funcionamiento de una bicicleta. Así, se puede señalar que la educación en Colombia busca desarrollar conocimientos y competencias para que los futuros ciudadanos se desempeñen en diversos aspectos de la vida, de modo que enfoquen sus esfuerzos en el desarrollo de las capacidades propias para desenvolverse en un ambiente laboral, familiar, académico, cultural y social de manera integral.

Para esto, desde la integración de los lineamientos curriculares (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998) y los estándares básicos de competencias, se presentan particular los parámetros que orientan los conocimientos, habilidades, competencias y valores en la búsqueda de la calidad de la educación por parte del sistema educativo. Así, el Estado buscó hacer de estos documentos una herramienta para que los profesores plantearan sus propuestas curriculares a nivel escolar.

Al hacer uso del ABP, entendido como una metodología de enseñanza que pretende alcanzar el aprendizaje al otorgarles la responsabilidad a los estudiantes, se consigue que estos sean capaces de interpretar fenómenos y acontecimientos de la vida real, así como de investigar y cuestionar de manera consciente las situaciones que los guían a solucionar su objetivo final (Segura, 2000). En otras palabras, se utiliza el ABP en el trabajo de grado como guía del proceso de aprendizaje, donde son los profesores los principales orientadores del proceso. Además, con el objetivo de alcanzar interés y motivación en los estudiantes, se implementan espacios de diálogo y reflexión entre grupos de trabajo para fomentar habilidades de comunicación y encontrar

aspectos relacionados con el desarrollo del concepto de función lineal en los proyectos de los estudiantes.

La capacidad de conceptualización y reconocimiento de información es la principal herramienta de los estudiantes, el profesor en formación (PF) y el profesor colaborador (PC) para dirigir los esfuerzos y reconocer aspectos propios del concepto de función lineal: representaciones, usos, interpretaciones y aplicaciones. Para alcanzar de manera satisfactoria lo anterior, es importante mencionar el uso de la modelación matemática como protagonista del desarrollo y la implementación del trabajo de grado, en el sentido de que esta ha de facilitar el acercamiento a dicho concepto.

En suma, las ideas expuestas buscan enlazar la importancia del uso de la bicicleta, la modelación matemática y el ABP para crear un ambiente de aprendizaje que incluya la motivación y el interés por aprender matemáticas, responsabilizar a los estudiantes de su aprendizaje y crear espacios propicios para incorporar conocimientos en prácticas sociales entre estudiantes, PF, PC y todos aquellos que participan en el proceso.

Por eso, se presenta, en un primer capítulo, la formulación del problema y los objetivos del trabajo de grado, al igual que el propósito que este persigue. En un segundo momento, se desarrolla el marco teórico, en el que se da una mirada a la modelación matemática, al ABP, al concepto de función lineal y a las TIC, con el fin de profundizar en las herramientas que fundamentan este trabajo de grado. Luego, se tiene la metodología del trabajo de grado, que modifica las fases de modelación matemática para presentarlas como situaciones por las cuales los estudiantes pasan, a fin de continuar con el desarrollo del ambiente de estudio que se lleva a cabo con los estudiantes. Por último, se muestra el análisis de los resultados del trabajo de grado y se finaliza con la presentación de las conclusiones.

## **Capítulo 1. Presentación del problema**

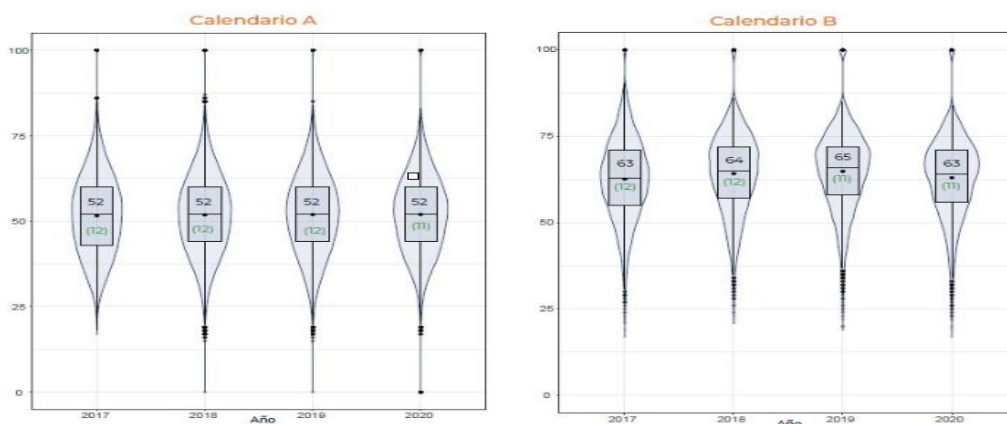
El desarrollo del trabajo de grado data la experiencia de combinar tres elementos principales, el ABP, la modelación matemática y el concepto de función lineal, con el fin de construir un ambiente de modelación que permita establecer espacios de socialización; en los cuales los estudiantes crean y comunican posturas relacionadas entre el tema del proyecto y el concepto de función lineal. Dichos espacios tendrían un único objetivo: posibilitar un trabajo colectivo por medio de la modelación matemática y el ABP que dé cuenta de los acercamientos al concepto de función lineal durante el desarrollo de las situaciones planteadas con el propósito de reflexionar sobre el aprendizaje cuando los estudiantes reconocen, recolectan, experimentan, modifican y analizan información relacionada con el uso de la bicicleta. Esta información sería utilizada para modelar las relaciones que identifican el uso o la modificación de la bicicleta.

Para lograr lo anterior, en el primer capítulo se encuentran cuatro secciones que corresponden a la identificación del problema, la formulación del problema, la formulación de los objetivos y la reflexión sobre la importancia y los alcances del trabajo de grado.

### **1.1 Identificación del problema**

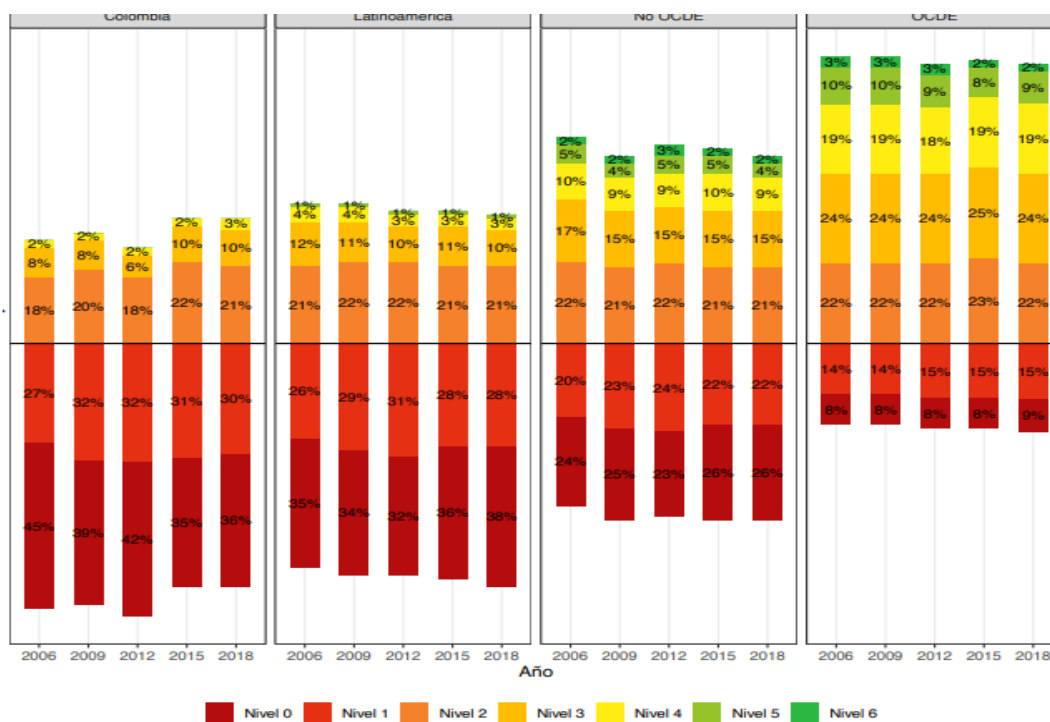
Es importante señalar que en Colombia los estudiantes que aspiren a culminar los estudios de básica media deben presentar una prueba externa denominada Saber 11; esta permite conocer el nivel de conocimiento por competencias generales y específicas en relación con lo propuesto en los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias. La información que se obtiene permite construir indicadores de evaluación. Además, la prueba se utiliza para monitorear la calidad de la educación, comprobar el grado de desarrollo de las competencias de los estudiantes, proporcionar información para el establecimiento de indicadores de valor agregado y ofrecer información que sirva como referente estratégico para proponer políticas educativas, entre otros (informe general ICFES, 2020).

Figura 1. Resultados del promedio del puntaje en la prueba de matemáticas, según el calendario académico



Los resultados de las pruebas Saber 11 para el año 2020 muestran que los participantes están por encima de la media por dos puntos para el calendario A y por trece puntos para el calendario B (Figura 1). El número que se encuentra en la parte superior de la caja es la media de los puntajes obtenidos y el número en la parte inferior encerrada por unos paréntesis es la desviación estándar. El promedio de la prueba es de 50 (Informe Nacional de resultados del examen Saber 11° 2020), lo que indica que Colombia está en un nivel medio. Otra forma de identificar los retos para alcanzar las metas propuestas por el currículo es observar el porcentaje de estudiantes que se encuentran en los niveles 2 y 3, de acuerdo con el desempeño de la prueba de matemáticas. Del mismo modo, estar en la media en Colombia no es alentador, dado que, a nivel general, y en comparación con los países que participan en la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), el país se encuentra en los niveles inferiores en el componente de matemáticas. La Figura 2 muestra el porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño en matemáticas según el grupo de referencia y el año, y este se divide en cuatro grupos: Colombia, Latinoamérica, los países que no participan en la OCDE y los que sí lo hacen.

Figura 2. Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño en matemáticas según grupo de referencia y año



*Nota.* Tomado de Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes [PISA]

De este modo, se recalca que uno de los conceptos que se evalúan en el componente de matemáticas en las pruebas Saber y en las pruebas PISA está relacionado con la lectura y el análisis de enunciados que presentan relaciones directas entre gráficos, contexto y respuestas para ubicar a los participantes en los niveles de desempeño. Tales niveles muestran la competencia que buscan alcanzar las preguntas. Un análisis más detallado se muestra en el Informe Nacional de Resultados del Examen Saber 11 (2020); en este trabajo, basta con mencionar el nivel que se relaciona directamente con las competencias conectadas al pensamiento variacional, en especial al proceso de modelar y a una interpretación del concepto de función. Esto se evidencia claramente en el nivel 5 de los desempeños que evalúa la prueba PISA: “En este nivel de desempeño los estudiantes demuestran: desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos” (Díaz-Pinzón, 2021, p. 1).

Otro desempeño que da cuenta de la implementación de preguntas que buscan observar si se posee conocimiento sobre los modelos y el pensamiento variacional es “formar conceptos,

generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos” (Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes [PISA], 2018, p. 1).

Por otra parte, en las pruebas Saber 11, los estudiantes que se ubican a partir del segundo nivel están en capacidad de comparar y establecer relaciones entre los datos presentados, e identificar y extraer información local y global de manera directa. También se comparan los datos de dos variables presentadas en una misma gráfica: los estudiantes que se ubican en el cuarto nivel son capaces de usar un lenguaje algebraico, al igual que la información dada en lenguaje natural, tablas o representaciones geométricas; y pueden modelar fenómenos variacionales no explícitos.

Teniendo en cuenta los resultados de las pruebas y el carácter de las preguntas que se realizan en estas, hay retos con la conceptualización de la noción de función para los estudiantes que las presentan. Por otra parte, los problemas contextualizados de las pruebas Saber resaltan su carácter aplicativo; es decir, existen dificultades para interpretar la información presentada en las preguntas. Una forma de suplir este inconveniente está en generar espacios de interacción entre los estudiantes para fomentar una mejoría en la interpretación, la socialización y la argumentación de los problemas y contextos. Esto es posible al enfocar el quehacer matemático al desarrollo de habilidades sociales que fomenten este tipo de actividades.

Esta forma de implementar el quehacer matemático ha ganado el interés de más investigadores y ha tomado como objetivo principal presentar el concepto de función a los estudiantes. Por tanto, para este trabajo se plantea una situación mediada por la creación de proyectos, extraída del contexto real de los estudiantes para que participen en un ambiente de diálogo, donde la información recolectada sobre el funcionamiento de la bicicleta esté orientada a descubrir o desarrollar el concepto de función lineal. Lo anterior, por medio del proceso de modelación como herramienta principal, a través de la socialización de diferentes contextos relacionados con la bicicleta, pero propuestos y desarrollados por los estudiantes. Ya que uno de los medios de transporte que más utilizan para llegar al colegio es la bicicleta.

“El concepto de función es uno de los más importantes en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas” (Herrera y Muñoz, 2014, p. 1), este ha evolucionado y sigue en constante desarrollo por parte de la comunidad científica. Díaz y Cuevas (2013) han realizado un recorrido histórico sobre el concepto de función y plantean aspectos importantes para conocer su relevancia e implicaciones en una propuesta didáctica. Estos autores mencionaron que el concepto de función



es recurrente en la enseñanza de las matemáticas para la educación básica, media y universitaria; y, al realizar una lectura del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics - NCTM, 1989-1991) de Estados Unidos se encontró que el concepto de función es unificador dentro de las matemáticas. Más adelante, diversos investigadores, como Ruiz (1993) como se citó en Herera y Muñoz (2014), afirmaron que existen serias dificultades en el aprendizaje del concepto de función, en tanto que hay múltiples interpretaciones de este; con este, es posible apropiarse de conceptos más avanzados, al realizar un desarrollo histórico del concepto.

Igualmente, los lineamientos curriculares de matemáticas proponen su estudio a partir de cinco pensamientos; para el caso de la función, este trabajo grado se enfoca en el pensamiento variacional, directamente relacionado con los procesos de correlación, cambio y variación. No obstante, este no es el único que se ve involucrado en la aplicación del trabajo de grado, dado que también se concibe el pensamiento métrico en relación con los procesos de medida, la toma de datos y la relación entre cantidades. Asimismo, se encuentra el pensamiento geométrico con relación al reconocimiento de figuras geométricas y su proporcionalidad; esto, por mencionar algunos de los procesos que se involucran en el aprendizaje de las matemáticas, pues en muchas ocasiones intervienen de manera integral y complementaria en el aprendizaje y la enseñanza.

#### Formulación del problema

Para los educadores matemáticos es importante estar a la vanguardia con los métodos y estrategias que se plantean para involucrar a los estudiantes en la construcción del conocimiento y la subjetividad. Es una necesidad para los educadores matemáticos diseñar, buscar o implementar propuestas que permitan reivindicar el sentido común de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos. margen de lo anterior, el MEN (1998) ha considerado implementar el proceso de modelación matemática como una estrategia didáctica para conectar las ideas o estrategias de los estudiantes con las matemáticas formales, a fin de promover el uso de las matemáticas en situaciones extraescolares (Henaó y Vanegas, 2012).

Sin embargo, la aplicación de estas estrategias en las prácticas educativas es algo que no se ha dado de manera deseable. Biembengut y Hein (2004), para el caso brasilero, señalaron que la implementación de las matemáticas en la búsqueda de soluciones a problemas sigue siendo un asunto problemático en el aula de clases, lo que no se aleja de la situación de las aulas colombianas.

Por tal motivo, el presente trabajo plantea la necesidad de gestionar un ambiente de modelación matemática que, de alguna manera, satisfaga esa necesidad.

De acuerdo con esto, se suma la importancia del concepto de función lineal y su relación directa con la modelación matemática, por cuanto es un concepto muy utilizado tanto en las matemáticas como en las ciencias, ya sea por su aplicación o porque permite idear situaciones en diferentes contextos. Frente a esto, Ruiz (1993) como se citó en Herrera y Muñoz (2014) mencionó que “el concepto de función tal como se define actualmente en matemáticas, es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas de una evolución de más de 2000 años” (p. 1).

De igual modo, y como se mostró en las páginas precedentes, el ambiente de modelación matemática es complementado con una estrategia de ABP que permitiría un acercamiento al concepto de función lineal, el cual debe ser abordado con actividades que permitan al estudiante adquirir una concepción que vaya más allá de un procedimiento algorítmico de cálculo. Por su parte, Freudenthal y Jaimes (2012) como se citó en Herrera y Muñoz (2014), señalaron que las limitaciones de los estudiantes con el concepto de función se relacionan con el énfasis que se da en el desarrollo algebraico, porque se omite de cierta forma el sentido de variación y cambio dado a la caracterización del concepto a través de la historia.

Este acercamiento parte de identificar una situación del contexto de los estudiantes que permita la producción de información, con el propósito de construir relaciones entre conjuntos de datos; ello, para saber cómo se comporta la relación, predecir o reflexionar sobre la variación que se presenta en dicho contexto, y realizar un acercamiento al concepto de función por medio de las fases de modelación.

De otra parte, un aspecto importante sobre la estrategia basada en la postulación de proyectos es que esta posibilita fomentar espacios de discusión entre los participantes, lo que complejiza las conceptualizaciones que se den. En particular, para este trabajo de grado se espera que tal conceptualización se dé en torno a la función lineal, de forma que se dé un aprendizaje que parta de las dinámicas de socialización entre los estudiantes. Por lo antes expuesto, surge la siguiente pregunta de estudio.

### 1.1.1 Preguntas problema

- ¿Qué aprendizajes alcanzan los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Distrital (IED) Colegio Alejandro Obregón en torno al concepto de función lineal al participar de un ambiente de aula que posibilite el trabajo colectivo por medio de la modelación matemática y el ABP?
- ¿Cuáles son las ventajas y los retos que se evidencian al presentar el concepto de función lineal a través del ambiente de modelación?
- ¿Cuáles son las potencialidades en la conceptualización de los estudiantes que participan en el ambiente en relación con el desarrollo del concepto de función lineal?
- ¿Cuáles son las características del aprendizaje de la función lineal alcanzado por los estudiantes con el desarrollo de los proyectos?

## 1.2 Formulación de objetivos

### 1.2.1 Objetivo general

Implementar un ambiente de aula que posibilite el trabajo colectivo por medio de la modelación matemática y el ABP, de forma que se dé cuenta de los aprendizajes generados en torno al concepto de función lineal.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar las potencialidades y los retos al implementar un ambiente de modelación que genere el aprendizaje del concepto de función lineal.
- Reconocer las ventajas y los desafíos de la institucionalización del concepto de función lineal a través de la participación en un ambiente de modelación mediado por las TIC.

A continuación, y para adentrarse en el planteamiento de situaciones que permitan espacios de socialización y desarrollar habilidades, destrezas y competencias en torno al concepto de función lineal, se aclaran la importancia y los alcances del trabajo de grado. Para ello, se presentan sus limitaciones, con lo que se da paso al planteamiento de una contextualización de las fases de modelación matemática y la estructura del trabajo mediada por la creación de proyectos, al hacer uso de la información recolectada del estudio de la bicicleta.

### **1.3 Importancia y alcances del trabajo de grado**

La implementación del proceso de modelación matemática es considerada una actividad científica que se involucra al obtener modelos de situaciones relacionadas con las demás ciencias (Villa, 2007). Para ello, quienes desarrollan tales procesos de modelación ponen en juego múltiples habilidades, destrezas y competencias que son propias del quehacer matemático. En los últimos años, varias investigaciones han analizado la utilización de la modelación matemática como estrategia didáctica (Biembengut y Hein, 2004), a fin de recalcar la influencia de estos métodos como herramientas en el desarrollo de habilidades propias de la actividad matemática y la posibilidad de generar conceptos matemáticos. Adicionalmente, se deben utilizar estrategias que permitan la apropiación del aprendizaje, lo cual se constituye como uno de los objetivos de los investigadores en la enseñanza de las matemáticas.

Bajo estas dos consideraciones, en el presente trabajo de grado se combinan estas dos necesidades para plantear un ambiente de modelación en el aula, de forma que los estudiantes se apropien de su aprendizaje. Para esto, es importante mencionar que el concepto de función, debido a su naturaleza y relevancia en la enseñanza de las matemáticas, debe ser abordado con situaciones que le faciliten al alumno tener ideas que vayan más allá de un procedimiento netamente algorítmico (Herrera y Muñoz, 2014). Adicionalmente, como lo mencionó Freudenthal como se citó en López y Sosa (2007), las limitaciones de los estudiantes frente al concepto de función recaen, de alguna manera, en el excesivo hincapié que se da al registro algebraico, con lo que se deja de lado la relevancia del sentido de variación, que es la que proporciona la trascendencia al concepto de función en la historia.

De esta manera, la propuesta de trabajo busca construir una serie de situaciones basadas en la modelación matemática para que los estudiantes atraviesen de forma progresiva entre los aspectos relevantes del concepto de función lineal, a fin de conceptualizar las nociones relacionadas con el aprendizaje del concepto de función lineal.

### **1.4 Limitaciones del trabajo de grado**

Con relación a las limitantes que están presentes en el desarrollo de este trabajo de grado, cabe resaltar cuatro aspectos importantes: el momento histórico en que se desarrolla la no coincidencia de calendarios académicos entre los colegios de educación básica y la Universidad

Pedagógica Nacional, la crisis sanitaria y la propuesta de trabajo con los estudiantes en modalidad semipresencial mediada por las TIC.

En cuanto al primer aspecto, debe señalarse que las universidades públicas y privadas, los sindicatos de trabajadores y la mayoría de los ciudadanos colombianos se manifestaron contra las políticas de Estado; esto, en general, se relacionaba con la defensa de la educación pública. En ese sentido, un sector de la universidad pública decidió apoyar el paro y entró a cese de actividades; en consecuencia, y para dar cabida al segundo aspecto, la Universidad Pedagógica Nacional no tuvo normalidad en sus actividades académicas durante ese año, lo que imposibilitó que los calendarios académicos de los colegios y la universidad coincidieran. Este hecho generó un desfase: mientras los colegios estaban en actividades académicas, las universidades públicas se encontraban en dinámicas propias del paro; cuando las universidades retomaron sus actividades, los colegios se encontraban en vacaciones de mitad de año; y, cuando los colegios retomaron actividades, se inició con el planteamiento de este trabajo de grado.

Como un tercer aspecto, se encuentra la crisis sanitaria generada por el COVID-19, la cual tuvo consecuencias en la población de Colombia, debido a que se declaró el estado de cuarentena que se prolongó por más de seis meses. En un primer momento, se declaró que todos los ciudadanos estuvieran en aislamiento preventivo; fue durante esta situación que se llevó a cabo el cese de actividades académicas, mientras que las cifras relacionadas con el contagio masivo iban en aumento. Luego, al ver que el regreso a los centros educativos se estaba prolongando, se declaró el estado de cuarentena indefinida y se procedió a establecer métodos alternativos mediados por las TIC para continuar con la formación de las niñas, los niños y los jóvenes. Este es el cuarto y último aspecto, pues el planteamiento, el desarrollo y la ejecución del trabajo de grado se dieron mediante la interacción virtual. Para esa transición, profesores y estudiantes tuvieron que capacitarse en tiempo récord sobre el manejo de plataformas, con el fin de desarrollar la comunicación y el proceso educativo.

Adicionalmente, se enfrentaron retos importantes: el 40 % de la comunidad estudiantil no contaba con conexión a internet o no poseía equipos para conectarse durante la jornada académica. Por otro lado, cabe mencionar un hecho que llama la atención, dado que muchos hogares ondearon telas de color rojo en sus fachadas, lo que informaba a la comunidad que no tenían recursos para solventar la alimentación. Finalmente, se debe anotar que los niveles de autoestima de los estudiantes empeoraron y que muchos jóvenes se vieron inmersos en la depresión.

Después de contextualizar las condiciones de los jóvenes y el tiempo en que se desarrolla el trabajo de grado en el contexto académico, los colegios buscaron alternativas virtuales, como la educación remota, donde los involucrados se encontraban en sus hogares y realizaban los encuentros académicos por medio de las plataformas tecnológicas. En un principio, debido a la cuarentena estricta, las clases se desarrollaban de forma 100 % virtual, con un profesor que creaba la “sala” para que los estudiantes ingresaran. Por otro lado, aunque estos últimos se conectaban e inicialmente encendían las cámaras, la iniciativa se perdía y el profesor se quedaba solo en medio de la clase a través de una pantalla.

Con el paso del tiempo, la cuarentena dejó de ser estricta y se dio una reactivación gradual, por lo que la mitad de los estudiantes iba de forma presencial al colegio y la otra mitad se quedaba en casa; luego, se cambiaban de roles. Estas clases se transmitían desde el aula con un profesor que interactuaba con los estudiantes presenciales y virtuales, y a esto se le llamó educación híbrida o semipresencial. En este contexto se desarrolló la aplicación de este trabajo de grado, por lo que cabe resaltar el levantamiento progresivo de la cuarentena, dado que cada institución tomaba independientemente las medidas pertinentes para garantizar el bienestar de los estudiantes. Para el caso de la Universidad Pedagógica Nacional, al momento de aplicar las actividades, esta autorizó a los estudiantes a seguir participando en las clases y proyectos de forma virtual.

## **Capítulo 2. Marco de referencia**

En este capítulo se desarrollan, desde un punto de vista teórico, los asuntos relacionados con la modelación matemática en los contextos internacional y nacional; y luego se continúa con una caracterización del ABP, el desarrollo del concepto de función a través de la historia y la reflexión sobre la implementación y el uso de las TIC.

### **1.5 Modelación matemática**

La educación matemática en Colombia establece, desde la postulación de los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias, que la actividad matemática que se debe implementar en las aulas de clase se relaciona con cinco procesos: formulación, tratamiento y resolución de problemas; modelación; comunicación; razonamiento; y formulación y ejercitación de procedimientos. Para los intereses de este trabajo, se desarrolla uno de esos procesos, el de la modelación matemática.

#### **1.5.1 Modelación matemática en un contexto internacional**

En el siglo XX, Félix Klein elaboró un nuevo programa de estudios, el programa Meran, que incluye la modelación matemática y sus aplicaciones en la enseñanza. Los educadores y grandes matemáticos de la época no consideraron relevante este aporte; pero, más adelante, en los años 70 y 80, este tomó importancia para Schukajow et al. (2018), porque surgieron grandes proyectos curriculares en países de habla inglesa, como en los Estados Unidos. Estos se centraban parcial o totalmente en la modelación matemática y sus aplicaciones.

Actualmente, la investigación sobre los efectos de la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática se lleva a cabo con un notable número de estudios, especialmente en Estados Unidos. Schukajow et al. (2018) distinguieron dos grandes campos: cursos experimentales y no experimentales. De estos estudios, surgieron tres tipos de investigación: el primero estaba enfocado en los efectos de los cursos orientados a la aplicación; el segundo, en el desarrollo de informes de la experiencia sobre los cursos de modelado; y el tercero, en el análisis de los cursos de resolución de problemas. Ello dio paso a diferentes campos de investigación.

De esta manera, los principales aportes en el desarrollo de la investigación sobre la enseñanza de la modelación matemática aparecieron fuertemente en los años 80, cuando se llevó

a cabo una serie de conferencias sobre la modelación matemática en la Universidad de Exeter. En 1987, se dio la Conferencia Internacional de la Modelación Matemática y sus Aplicaciones (International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications - ICTMA), y los momentos de la modelación matemática se abordaron en el Congreso Internacional de Educación Matemática (International Congress on Mathematical Education - ICME) y en las conferencias de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática (Conferences of European Society for Research in Mathematics Education - CERME).

### **1.5.2 Diferentes perspectivas de la modelación matemática**

Durante las primeras sesiones, en estos encuentros diseñados para reportar las principales investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática, se muestran los resultados con un enfoque de aspectos cognitivos. Al pensar en las formas de desarrollar habilidades o competencias para modelar, se plantean los criterios para evaluar el proceso de modelación; en ese momento, se distingue la noción de metacognición que, según Tanner y Jones (1995) como se citó en Schukajow et al. (2018) “implica el conocimiento y el control del propio conocimiento” (p. 1).

En cuanto a la investigación en educación matemática, la modelación ha tenido importantes y destacados avances en todos los currículos a nivel internacional. Blomhøj (2018) mencionó que la introducción de la modelación matemática y la tecnología de la información es la característica más destacada en las reformas de los planes de estudio de matemáticas en todo el mundo. Muchos de los planes curriculares de varios países han puesto su mirada en el desarrollo y la implementación de dicha modelación para preparar a los jóvenes que ingresan a la educación superior. En estos tipos de currículos, se desarrolla una teoría global sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática, con lo que se identifica un sistema de puntos de vista diferentes que abarca todos los niveles didácticos. Kaiser, Blomhøj y Sriraman (2006) como se citó en Blomhøj (2018) mencionaron:

[...] Los objetivos de aprendizaje, las razones fundamentales para perseguir estos objetivos en los diferentes niveles de los sistemas educativos, las ideas probadas sobre cómo apoyar a los profesores en la aplicación de los objetivos de aprendizaje y los desafíos y dilemas didácticos reconocidos, relacionados con las diferentes formas de organizar la enseñanza, análisis con base teórica y empírica de las dificultades de aprendizaje relacionadas con la



modelización, e ideas sobre las diferentes formas de evaluar el aprendizaje de los alumnos en las actividades de modelización y los escollos relacionados. Son algunas consideraciones que permiten la enseñanza y aprendizaje de la modelación matemática.

Esta teoría permite reconocer una serie de enfoques y perspectivas en la investigación de la educación matemática sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática, las cuales se presentan en la Tabla 1, cuyos resultados se obtuvieron en una de las conferencias mencionadas (ICME 11) y se denominó TSG21; su intención era “proporcionar un fondo para los debates en profundidad de la base teórica de los diferentes enfoques dentro del campo” (Blomhoj, 2018). Para propósitos prácticos de este trabajo, se cita la plantilla de las diferentes perspectivas en la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática, propuesta en Blomhoj (2018); luego, se desarrollan las interpretaciones de los autores que trabajan la modelación matemática en Colombia; y, finalmente, se amplía la perspectiva educacional.

Plantilla de las diferentes perspectivas en la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática

Tabla 1. Plantilla de las diferentes perspectivas en la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática

| Perspectiva               | Objetivos                           | Antecedentes                             | Documentos del TSG21             | Pregunta u objetivo de la investigación   | Papel del ciclo de modelación   |
|---------------------------|-------------------------------------|--|----------------------------------|---|---|
| Realista                  | Objetivos pragmáticos o utilitarios | Pollak (1969)                            | Kadijevich (Lombardo y Jacobini) | ¿Qué condiciones y apoyos en forma de tecnologías de la información son necesarias para modelar un determinado problema real? | Se utiliza para analizar una situación práctica o problemática de la vida real. |
| Contextual                | Objetivos temáticos y psicológicos  | Lesh y Dorr (2003), Lesh y Caylor (2007) |                                  | ¿Cómo diseñar contextos para que los alumnos realicen actividades significativas de modelación?                               | El proceso de modelación no está enfocado.                                      |
| Educacional - aprendizaje | La modelación como                  | Niss (1987, 1989), Blum y Niss           | Lombardo y Jacobini, vom Hofe et | ¿Cómo desafiar las concepciones matemáticas de los  | Se utiliza para diseñar y analizar las  |

|                                      |  |   |  |  |  |
|--------------------------------------|--|---|--|--|--|
| e de las matemáticas                 | medio de aprendizaje de las matemáticas                                    | (1991), Blum y Leiss (2005), Blum et al. (2006) | al., Ludwig y Xu, Meier Aravena y Barbosa Rodríguez (Kadijevich) | estudiantes y cómo apoyar su aprendizaje matemático?   | tareas de modelación con respecto a determinadas intenciones de aprendizaje de los alumnos.  |
| Educacional - aprendizaje de modelos | Modelar la competencia como objetivo educativo                             |   |  | ¿Qué es una buena tarea de modelación?<br>¿Qué dificultades específicas de aprendizaje pueden detectarse en las diferentes fases de modelación?                              | Se utiliza para definir la competencia de modelación matemática como objetivo de aprendizaje.  |
| Epistemológico                       | Reconstrucción de las matemáticas a través de la modelación                | Freudenthal (1983), Traffers (1987), Chevallard | Lona Andersen Siller   | ¿Cómo se puede utilizar la modelación para reconstruir el concepto de función para el aprendizaje?   | Hacer hincapié en la matematización y la transición modelo de-modelo para. Se utiliza para caracterizar una praxeología de modelación.                         |
| Cognitivo                            | Análisis de los procesos cognitivos implicados en la modelación matemática | Piaget, Skemp, Boromeo, Ferri (2006)            | Lona Ludwig y Xu Gamarena  | ¿Qué estructuras cognitivas intervienen en la competencia de la modelación y qué habilidades cognitivas están relacionadas con las diferentes fases del ciclo de modelación? | Se utiliza para estructurar el proceso de modelación con el fin de identificar las habilidades cognitivas necesarias para modelizar una determinada situación. |
| Sociocrítico                         | Comprensión crítica y reflexiva de la realidad y                           | Skovsmos (1994, 2005), D'Ambrosio (1999)        | Barbosa, Araújo, Caldeira  | Descubrir el poder de la modelación matemática.<br>¿Cómo crear discursos reflexivos entre estudiantes?   | Estructurar la crítica y las reflexiones en relación con el proceso de modelación y el   |

---

el uso de  
la  
modelación  
n  
matemática

---

proceso de  
aplicación.

### 1.5.3 Modelación matemática a nivel nacional

El proceso de modelación matemática es considerado como una actividad científica que se involucra en la obtención de modelos propios de las demás ciencias (Villa, 2007); este hecho abre las puertas para que dicha actividad científica se use en el aula de clases como una estrategia didáctica para abordar conceptos matemáticos. Existen diversas investigaciones que permiten la adaptación de esta actividad científica, de forma que esta se transforma en una estrategia didáctica para abordar conceptos matemáticos en el aula; con respecto a esto, hay una profundización en Biembengut y Hein (2004). Para continuar con el desarrollo del proceso de modelación, es pertinente precisar los conceptos de modelo, modelación y modelización; tales definiciones se recopilan en Villa (2007).

En ese orden de ideas, el modelo matemático se define como una construcción matemática dirigida a estudiar un sistema o fenómeno particular del “mundo real”. Este modelo puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales. Ahora bien, un modelo matemático de un fenómeno o una situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión (Biembengut y Hein, 2004); y dicho modelo se define a partir de un sistema o prototipo  $S$  (físico, biológico, social, químico, etc.) a un completo y consistente sistema de ecuaciones matemáticas. Este es formulado para expresar las leyes de  $S$  y su solución intenta representar algún aspecto de su comportamiento (Rutherford, 1978 como se citó en Villa, 2007).

Desde el punto de vista didáctico, un modelo radica en tener un lenguaje conciso que expresa ideas de manera clara y sin ambigüedades y que, además, aporta gran cantidad de elementos que propician el uso de herramientas computacionales para calcular las soluciones numéricas (Villa, 2007). Con base en estos autores, este trabajo asume un modelo matemático como un fenómeno o una situación problema con un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna forma, el fenómeno en cuestión (Biembengut y Hein, 2004).

Esta idea de modelo puede ser analizada desde una posición científica, en tanto que es de mayor interés estudiar los modelos planteados al averiguar si estos representan la situación problema o no, y no se detienen a estudiar los conceptos matemáticos que emergen a través del proceso de obtención del modelo; en cambio, ellos se presentan generalmente en un proceso propio de la ciencia y externo a factores educativos (Villa, 2007). Por otra parte, desde una perspectiva educacional, es importante enfocar el interés en los procesos que se desarrollan al momento de realizar un modelo.

Desde un punto de vista didáctico, esta definición permite enfocar los esfuerzos al representar un fenómeno o una situación problema con un conjunto de relaciones y símbolos matemáticos y no matemáticos, con el propósito de desarrollar un concepto dotado de significado y despertar el interés por las matemáticas debido a su carácter aplicativo (Villa, 2007). Posteriormente, es importante precisar la definición o el carácter que implica utilizar la palabra *modelización* en este trabajo (Villa, 2007). Asimismo, el proceso que se implementa en la creación de un modelo es llamado modelización matemática, y se desarrolla de dos modos: como actividad científica, donde se utiliza en un sentido formal con unos propósitos diferentes a la enseñanza de las matemáticas; y como la modelización utilizada para el desarrollo en la comprensión de conceptos matemáticos, como herramienta en el aula de clases para alcanzar una apropiada conceptualización de las nociones matemáticas.

A esta segunda forma de utilizar la modelización se le conoce como modelación matemática, por lo que es pertinente mencionar que el proceso utilizado en el aula de clase no es una elementalización, sino una recontextualización y una decodificación, que se piensa con un propósito claro: desarrollar conceptos matemáticos por medio de la modelización matemática (Villa, 2007). Para el desarrollo de este trabajo, se utiliza un enfoque educacional de las múltiples perspectivas que tiene el trabajar con la modelación matemática; a continuación, se desarrollan las ideas que persigue el trabajo con un enfoque educacional.

#### **1.5.4 Modelación matemática enfoque educacional**

Como se mencionó, la perspectiva que persigue este trabajo está relacionada con el uso del proceso de modelación como herramienta para desarrollar un concepto matemático. Este enfoque se utiliza para diseñar y analizar las tareas de modelación con respecto a determinadas intenciones de aprendizaje. En este caso, se utilizan las fases de implementación de la modelación matemática

propuestos por Villa (2007) para plantear las situaciones por las que han de atravesar los grupos durante el desarrollo de los proyectos; ello, al dirigir los esfuerzos para distinguir algunas de las definiciones o nociones relacionadas con el concepto de función.

Es necesario mencionar que hace más de dos décadas los trabajos de Blum y Niss (1990) y Henry (2001), como se citó en Rodríguez y Quiroz (2015) reportaron la importancia de la vinculación de las matemáticas escolares con la “realidad” (contextos extramatemáticos) a través del proceso de modelación matemática. Esta estructura permite dar cuenta de si se utiliza o genera un concepto matemático con el desarrollo o la creación de un modelo. Este enfoque ha sido la razón de muchos trabajos de investigación, que plantean la creación de modelos que representen situaciones de la cotidianidad.

Autores como Niss (1987, 1989) y Blum y Niss (1991, como se citó en Blomhøj (2018) son grandes referentes de esta perspectiva. Igualmente, en consideración con la interpretación de Blomhøj (2018), hay tres argumentos principales que relacionan la perspectiva educativa de modelación matemática en la enseñanza y el aprendizaje. El primero menciona que la modelación ofrece un puente entre las experiencias de la vida de los alumnos y las matemáticas, proporciona una motivación en los primeros hacia su aprendizaje y sitúa a las matemáticas en la cultura como medio para interpretar situaciones. El segundo argumento menciona que, en el desarrollo de sociedades altamente desarrolladas, es prescindible tener las competencias para establecer, analizar y criticar modelos matemáticos. Finalmente, el tercer argumento está relacionado con el segundo, pues se busca que las personas posean cualidades que puedan utilizar al momento de interpretar un modelo y apoyarse en esa lectura para el desarrollo democrático de la sociedad.

De esta forma, Blomhøj (2018) mencionó la idea principal de esta perspectiva: integrar los modelos y la modelación en la enseñanza de las matemáticas, lo que constituye el ciclo de modelación, los conceptos de modelo y modelación, las aplicaciones de la modelación y la competencia relacionada con la modelación; estos son objetos de estudio en esta perspectiva. No obstante, no se deja de lado que las consideraciones sociales también entran en esta perspectiva, por cuanto proporcionan un carácter crítico de las situaciones a modelar. En otras palabras, las situaciones que se plantean para el desarrollo de los proyectos buscan generar espacios de diálogo donde se presenten nociones básicas sobre el concepto de función lineal en cualquiera de sus representaciones.

Por último, para crear un modelo matemático en cada proyecto, los estudiantes deben relacionar su cotidianidad y las matemáticas en situaciones con las que se puedan analizar las asociaciones entre las bicicletas y el modelo matemático. Con la recolección de datos y sus relaciones, se desarrollan las socializaciones de los proyectos, y luego se utiliza la principal herramienta para enlazar la noción de función a los proyectos a través del ambiente de modelación. A continuación, se presentan algunas consideraciones a tener en cuenta para establecer la relación entre los cuatro pilares que forman el cuerpo del trabajo de grado y el currículo escolar colombiano.

### **1.5.5 Algunas consideraciones acerca de la modelación matemática**

Las matemáticas son consideradas esenciales y poderosas en todo el mundo por su repercusión histórica y los infinitos avances que proporcionan a la ciencia y la tecnología. En la actualidad, con la evolución de todos los procesos laborales, los rápidos cambios en algunas vertientes sociales y las indiscutibles transformaciones en los trabajos, es indispensable desarrollar el conocimiento de cada persona como principal medio de producción (Biembengut y Hein, 2004). Por esta razón, se hace necesario estudiar una herramienta que permita establecer una relación directa entre los conceptos matemáticos que se desarrollan en este trabajo de grado, como el de función; y las situaciones o los fenómenos del mundo real, como el estudio del funcionamiento de una bicicleta con la modelación matemática.

La educación matemática se caracteriza por tener varias perspectivas de abordaje en cuanto a su aprendizaje y enseñanza como disciplina científica y como herramienta para potenciar el conocimiento en el aula de clase. Así, esta enseñanza considera diferentes contextos educativos; por ejemplo: en el aula de clase, uno de los elementos que se proporcionan es el estudio de estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Villa, 2007). Por otro lado, una de las apuestas que contemplan los lineamientos curriculares es establecer el aprendizaje de las matemáticas con la relación de tres grandes campos que participan simultáneamente en el desarrollo del conocimiento matemático: a) los diferentes tipos de pensamiento, b) los procesos generales y c) el contexto. Con lo anterior, este trabajo se centra en uno de los procesos generales; sin embargo, cabe mencionar que, durante el desarrollo de la secuencia de actividades, se pueden ver inmersos los demás campos y procesos mencionados. Esto, para relacionar y complementarlos mutuamente.

En complemento de lo anterior, el estudio de los procesos generales planteados en los lineamientos curriculares evidencia el desarrollo del pensamiento matemático a partir de cinco procesos de la actividad matemática: el razonamiento; la comunicación; la elaboración, la comparación y la ejercitación de procedimientos; la resolución y el planteamiento de problemas; y la modelación. Esta última es el pilar fundamental del trabajo de grado. Por otra parte, es importante desarrollar el ABP como metodología educativa para que, en conjunto con la modelación, se logre que los estudiantes realicen una apropiación de su aprendizaje y desarrollen un acercamiento al concepto de función lineal.

## **1.6 ABP**

El ABP es una modalidad educativa con base en el constructivismo que dio comienzo al llamado Project Method, diseñado por William Heard Kilpatrick y luego redefinido entre 1915 y 1935 como ABP. Este puede definirse como una modalidad de enseñanza y aprendizaje centrada en el desarrollo de tareas que tiene como objetivo principal la obtención de un producto final.

Este consiste en un proceso compartido entre los participantes del contrato educativo, donde se negocian aspectos para el desarrollo de proyectos y se ve un proceso interdisciplinar al combinar habilidades de todo tipo para solucionar un problema principal a través de situaciones secundarias; por ello, el trabajo autónomo por parte de los estudiantes es fundamental, porque brinda “libertad y motivación” para su proceso de aprendizaje. De este modo, se acerca una perspectiva de aprendizaje “activo”, donde el estudiante se involucra con la creación de los proyectos al aplicar los conocimientos que posee y concluye los proyectos con la obtención de situaciones reales o con la simulación de problemas donde se observa un avance en la solución del problema que motivó a plantear dicho proyecto.

Existe documentación que expone la relevancia, las ventajas y las desventajas, la evolución y la proyección del ABP, y uno de los principales referentes para la metodología de este es Dino Segura (2021), quien analizó el ABP desde tres líneas: la epistemológica, la pedagógica y la política. Con la primera, hizo una distinción entre la información y el conocimiento, con el propósito de conseguir la atención de los niños al preguntarles si estos deseaban conocer a través de los objetos o a través de lo que hacían otras personas con estos; en ese sentido, desarrolló una reflexión a modo de crítica sobre cómo la escuela hacía daño en cuanto a la manera en que se ejecutaban las clases hoy día en todo el mundo, pues estas se daban de una forma alejada del

mundo real. Con la segunda línea, dio paso al intercambio de contenido desde una persona que ya tiene conocimiento y lo transmite de forma lineal, sin dar relevancia a los intereses, preguntas y motivaciones de los estudiantes. Por último, con la tercera línea, señaló que las escuelas populares son los principales lugares en donde se presta suma creatividad e importancia a la creación de proyectos.

Otros referentes para el ABP son Aristizábal (2015), quien inició su descripción con el aprendizaje activo y lo relacionó con el ABP; Mencionando que uno de los primeros expositores de la metodología es, por una parte, Richaers y Jhon Dewey y por otra Rufus W. Stimson a partir de su trabajo Home Project Plan de 1908, pero como educador se encuentra su gran impulsor William H. Kilpatrick fundamentado en Stimson (Aristizabal, 2015) y autores como Michael Knoll realizaron un recorrido histórico identificando el origen y sus principales momentos.

Al seguir con los propósitos de esta investigación, este método estimula el aprendizaje individual y autónomo de los estudiantes dentro de un plan de trabajo definido por los objetivos de cada proyecto. La investigación educativa consiste en preparar un proyecto relevante y adecuado para el nivel de los estudiantes, a fin de trabajar de manera colaborativa. Los estudiantes se responsabilizan de su propio aprendizaje al descubrir y socializar sus preferencias y planes enfocados en el desarrollo del trabajo final.

En ese sentido, el presente trabajo de grado busca usar los cuatro pilares para hacer protagonistas de su propio aprendizaje a los estudiantes, con el fin de acotar el campo de acción, lo cual se basa en un propósito claro que no es revelado en primera instancia a los participantes. Dicho objetivo es proponer un ambiente de modelación para coordinar los esfuerzos de los grupos de trabajo orientados por el profesor titular, con lo que se buscan posibles reacciones y pensamientos que estimulen y promuevan el uso de la modelación matemática, con el fin de identificar un acercamiento a la noción de función. Para esto, es necesario desarrollar las diferentes interpretaciones del concepto de función y realizar un recorrido por la historia.

## **1.7 Concepto de función**

Tras haber desarrollado el proceso de modelación, cabe interiorizar el concepto de función. A lo largo de la historia de la humanidad, el desarrollo del concepto de función ha ido de la mano con el interés de entender y describir el mundo circundante, el hecho de observar fenómenos y querer descubrir sus causas. Todo ello ha llevado a relacionar información, lo que implica asociar



situaciones que en su trasfondo presentan aspectos de variación; esto, dado que se sabe que el concepto de función no es solo usado en las matemáticas, sino que también es aplicado en múltiples contextos y áreas de conocimiento.

A lo largo de la historia, el concepto de función ha tomado varios caminos, no solo por su nombre, sino también por la forma de entenderlo, lo cual depende de la evolución sociocultural de la humanidad. Para entender el concepto de función, es necesario hacer un breve y conciso recorrido por las diferentes nociones que se han presentado sobre este en la historia, por lo que se debe empezar por la matemática antigua.

De esta forma, la búsqueda a través de la historia pretende señalar la evolución del concepto de función, con la intención de observar una forma eficaz de introducir el concepto en el aula, luego de considerar que el tratamiento que se le da está sujeto a su definición y esto hace que pierda su sentido de variación. Con ayuda del ambiente de modelación y la forma en que este concepto ha evolucionado a través de la historia, se busca lograr un acercamiento al concepto mediante las situaciones a plantear. Al respecto, Posada y Villa como se citó en Herrera y Muñoz (2014) mencionaron:

La variación implica apreciar de qué modo dos o más cantidades covarían, de tal forma que el cambio en una o algunas, determine cambio(s) en la(s) restante(s). Ahora bien, en el caso que esta covariación se pueda expresar a través de un modelo funcional, entonces se dice que las cantidades están correlacionadas. (p. 1)

Esta consideración permite identificar que el concepto de función relaciona cantidades que varían y estudia la manera en que el desarrollo de la matemática es una construcción dialéctica que se implementa a medida que surgen los problemas. Al igual que la comunidad científica, los profesores participan del proceso de enseñanza y aprendizaje para presentar los contenidos de una forma que conduzcan a los alumnos a desarrollar habilidades de manera dinámica y eficiente, por medio de la utilización de múltiples metodologías didácticas para alcanzar dicho concepto. De este modo, la primera descripción del concepto de función se da de forma esquemática según su evolución, y luego se presenta la manera en que se espera identificar el transcurso de la implementación del ambiente de modelación. Cabe mencionar que, para el docente de matemáticas, entender la evolución de este concepto es fundamental, pues se trata de una herramienta que ayuda a la comprensión de los estudiantes, al proponer la capacidad de relacionar sus experiencias dentro del aula para consolidar significativamente el concepto de función.

Entonces, se empieza en la época antigua, donde las civilizaciones egipcia, mesopotámica, china e india apenas indagaban en el campo de las matemáticas. Una de las primeras manifestaciones de la función fue el conteo, pues este requería una correspondencia entre un conjunto de objetos y números para contarlos. Durante los años 1500 a. C. hubo evidencias de que los babilonios organizaban información en tablas y hacían generalizaciones, característica principal de una función, así como la suma de los  $n$  primeros términos de algunas progresiones geométricas. Por último, entre los años 500 y 300 a. C., se encontró una noción de variable, pero sin que esta se viera abstraída.

A lo largo de la Edad Media, El período comprendido desde la caída del imperio Romano hasta la del Bizantino con el desplome de Constantinopla se conoce como Medioevo u oscurantismo (Roldán, 2013). Entre los años 476 y 1382, nacieron las primeras representaciones geométricas de las funciones gracias a personas como Oresme (1320,1382), quien hizo representaciones gráficas sobre cómo varía un fenómeno natural a través de una curva, para lo cual usó variables como la longitud y la latitud. Igualmente, Chuquet (1484), encontró las relaciones entre dos progresiones aritméticas al hacer uso de la suma y la multiplicación. Stifel (1544), por su parte, dijo que los resultados con base en las relaciones se denominarían logaritmos, con lo que generalizó la correspondencia entre variable dependiente e independiente. Finalmente, Napier (1614) presentó los logaritmos mediante el estudio de funciones continuas y enseñó la primera tabla de logaritmos.

Con esta germinación de la dependencia entre variables entre los años 1500 y 1600, llegó Descartes, quien mostró las bases para la noción de función al hacer uso de las coordenadas, con lo que se relacionaron una ecuación y una curva formada por puntos de coordenadas  $(x, y)$ , las cuales eran soluciones a la ecuación. Seguidamente, entre los años 1600 y 1700, surgió la idea de la dependencia entre variables de forma algebraica, donde, al modificar el valor de una, también se modificaba el de la otra. La de Galileo también fue una gran idea, pues la relación entre causa y efecto observada en sus experimentos y experiencias de fenómenos de movimiento tal vez fue la más cercana al concepto de función, en tanto que estudiaba cuantitativamente aquellos fenómenos que hasta esa época solo eran estudiados de forma cualitativa. Estos fueron representados por medio de gráficos de medida y leyes que explicaban la relación entre las variables de estos fenómenos.

Otro de los grandes aportes al concepto de función llegó a finales de los años 1600, con Newton y Leibnitz y su estudio y desarrollo del cálculo infinitesimal. Newton hizo referencia a las funciones con el estudio del comportamiento de una variable en el tiempo, mientras que Leibnitz (1646-1716) fue el primer matemático en utilizar la palabra *función* en 1692, al afirmar que “una tangente es una función de una curva”. De la misma forma, Euler, Bernoulli y Lagrange dieron las primeras nociones de función en forma analítica entre los años 1700 y 1800, al describirla como una expresión de cálculo, una expresión algebraica que se compone de una variable y una constante acompañada de operaciones matemáticas. Por último, a mediados de 1800, el concepto de función fue tomado como una correspondencia por Cauchy y Lobachevsky. El primero estableció que la variable de la expresión podía tomar distintos valores, y el segundo dijo que el valor de  $x$  podía ser desconocido y, aun así, la dependencia existía.

Por otro lado, la expresión  $f(x)$  se vio por primera vez gracias a Fourier, quien representó una sucesión de valores que dieron como resultado una infinidad de estos para la variable  $x$ . Así, Dirichlet retomó la misma expresión y estableció que el nombre que se relacionaba al cambio de la variable  $x$  era  $y$ , lo que daba como resultado que  $f(x) = y$ . En la actualidad, existen diferentes definiciones de función, pero la más conveniente para el planteamiento de este trabajo de grado es el concepto moderno: “Definición de función real de una variable: sean A y B dos conjuntos de números reales. Una función real  $f$  de una variable real  $x$  de A en B es una correspondencia que asigna a cada número  $c$  de A exactamente un número  $y$  de B” (Larson y Hostetler, como se citó en Martínez, 2013).

El breve recorrido por la historia que se expone del concepto de función permite identificar tres pilares o conceptos previos: pareja ordenada, producto cartesiano y relación. La idea intuitiva de pareja ordenada es un par de objetos de índole matemático en los que se reconoce un orden establecido; así se señala un primer elemento y un segundo elemento. (Roldán, 2013). A cada elemento se denomina coordenada  $(x, y)$ . Siendo  $x$  la primera coordena y  $y$  la segunda coordenada.

Una definición que se reconoce como formal es: dados dos conjuntos A y B, una función  $f$  de A en B que se nota  $f: A \rightarrow B$  es una relación en la que todo elemnto de A esta relacionado por  $f$  con un único elemento de B. El conjunto A se llama dominio de  $f$  y el conjunto B codominio o rango de  $f$ . Usualmente al único elemento  $y \in B$  relacionado con algún elemento  $x \in A$  se nota

$f(x)$ . Por consiguiente es habitual escribir  $y = f(x)$ . Es común mencionar que  $y$  es la imagen de  $x$ , o que  $f(x)$  es la imagen de  $x$ .

Debido a la complejidad, el carácter abstracto y el lenguaje simbólico empleado, la definición formal de función resulta inconveniente para el desarrollo del concepto en la educación básica. Se hace necesario encontrar una definición pertinente para estudiantes que se encuentran en noveno grado de la educación básica. El concepto de función generalmente trata de relacionar magnitudes, que en su mayoría de casos proporciona correspondencia entre las mismas. Desde este punto de vista plantear situaciones que en el fondo tratan relaciones de dependencia entre cantidades brinda una aproximación a la noción de función (Roldán, 2013).

Para el caso de la función lineal la expresión analítica es  $y = f(x) = mx + b$ , donde  $m$  y  $b$  son números reales y diferentes de cero.

$m$  es la pendiente o la razón de cambio de  $y$  con respecto a  $x$  y,  $b$  es la intersección de la gráfica con el eje vertical. Otra forma de interpretar la pendiente es observar que esta muestra una proporción entre el cambio horizontal y el cambio vertical. En un contexto ideal se espera que los estudiantes logren llegar a esta interpretación por descubrimiento.

La gráfica de una función lineal se considera como la representación geométrica de la misma, para realizarla se establece una correspondencia entre las magnitudes que se relacionan, los cuales generan coordenadas y se ubican en el plano cartesiano, siendo  $x$  la abscisa y  $y$  la ordenada.

### 1.7.1 Representaciones del concepto de función

Lo expuesto alude a la evolución del concepto de función, y ahora se describen los sistemas de representación y contextos en los cuales se hace visible la importancia de implementarlos en el trabajo de grado. Al respecto, se tiene que el NCTM (2003) planteó el uso de los sistemas de representación como uno de los fundamentos, porque mediante estos los estudiantes tienen la posibilidad de realizar una transposición y esto les permite memorizar y apropiarse de las ideas más fácilmente. Dicha organización también señaló la importancia de estos al momento de modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos (Herera y Muñoz, 2014).

Del mismo modo, es importante mencionar el papel fundamental de los registros de representación semiótica del concepto. Duval (2004) como se citó en Camargo (2013) mencionó

que, para lograr la conceptualización, o lo que se podría considerar “aprendizaje”, el estudiante debe recurrir a varios registros de representación, ya sean gráficos, simbólicos, tablas, expresiones en lenguaje natural, etc. Para este trabajo, se utilizan los diversos tipos de representación, con el fin de identificar si se genera un aprendizaje significativo.

No obstante, aunque se utilizan los diferentes tipos de representación, no se profundiza en la de tipo semiótico, por lo que se sale de los objetivos de este trabajo. Basta con mencionar lo que señaló Pecharromás como se citó en Camargo (2013): “dominar un concepto matemático consiste en conocer sus representaciones [...], operar con las reglas internas de cada sistema, traducir entre los sistemas de representación y conocer qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades”. A continuación, se presenta un cuadro adaptado de Herrera y Muñoz (2014), en el cual se presentan los diferentes tipos de representación del concepto de función lineal.

Tabla 2.

| <b>Representación verbal</b>   | <b>Representación tabular o numérica</b>  | <b>Representación gráfica</b>   | <b>Representación algebraica</b>   |
|--|---|---|--|
| Hace referencia a los enunciados que se hacen en lenguaje natural con el fin de mostrar la relación entre los valores de dos magnitudes o variables. | Se hace una tabla o lista de valores, donde se relacionan datos de la variable independiente con uno solo de la variable dependiente. | Es la presentación de puntos sobre una gráfica de una función en el plano coordenado, con las coordenadas de la forma $(x, f(x))$ . Siendo la gráfica una recta | Se expresa por medio de una ecuación de dos o más variables. Con una expresión algebraica de forma $f(x) = mx + b$ |

Del mismo modo, es importante precisar que el trabajo de grado busca un acercamiento hacia las representaciones del concepto de función; y el desarrollo propuesto busca que los estudiantes, a través de los proyectos, experimenten las fases de modelación y, con ellas, las representaciones del concepto de función. La ejecución de las actividades del trabajo de grado se

desarrolla en el aula virtual, por lo que es necesario precisar la importancia de las TIC en su implementación.

## 1.8 TIC

El proceso de enseñanza y aprendizaje implementado en el siglo XXI está mediado por el uso de las TIC, donde las exigencias del desarrollo tecnológico envuelven a la mayoría de la población. Durante los últimos años, la necesidad de estar conectado ha aumentado; y conviene resaltar que, a causa de la situación de contingencia generada por el COVID-19, se agudizó la inmersión en el uso tecnológico en los hogares.

A medida que evoluciona la tecnología, los métodos educativos también lo hacen, tanto así que se encuentran diferentes *softwares* que contribuyen a los procesos educativos implementados, con lo que se aportan múltiples herramientas que facilitan o refuerzan la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes. Las herramientas computacionales proveen entornos de trabajo que conllevan a nuevas formas metodológicas para el desarrollo de los contenidos de las diferentes asignaturas en los distintos niveles académicos.

En consecuencia, al recurrir a medios didácticos mediados por *softwares*, se transforma el proceso de enseñanza y aprendizaje en función de las posibilidades y variaciones que estos proveen, al igual que con la capacidad del maestro para estructurar metodológicamente los medios (Patrián, s.f., como se citó en Martínez, 2013). De esta manera, el maestro tiene la responsabilidad de actualizar los medios y estrategias didácticas al hacer uso consciente de los recursos tecnológicos. Dicho de otra forma, la “herramienta tecnológica por sí sola no contribuye al mejoramiento del proceso enseñanza aprendizaje” (Martínez, 2013, pp. 5). Es por eso que los maestros enfrentan un reto fundamental que consiste en reflexionar sobre cómo abordar los diferentes conceptos matemáticos con ayuda de las TIC.

De esta manera, para el desarrollo de este trabajo de grado, es fundamental hacer uso de las TIC, con la intención de involucrar los medios de comunicación, establecer el contacto y el desarrollo de las clases, e implementar diferentes aplicaciones que ayuden a los estudiantes a obtener datos que puedan relacionar y plataformas que faciliten su conexión y la obtención de material de estudio para su análisis. Además, para el caso de la educación en Colombia, existen diversos autores que abordan la importancia de utilizar herramientas tecnológicas para el desarrollo del proceso educativo. Para profundizar en este tema, se puede leer a autores como

Muñoz (2012), Ortiz y Romero (2015), quienes hablan el uso de las TIC en la actividad de enseñanza y aprendizaje en relación con las matemáticas.

### **Capítulo 3. Diseño metodológico**

Después de haber desarrollado los componentes teóricos de este trabajo, es el momento de exponer el diseño metodológico donde se describen las herramientas con las cuales se plantea el análisis. Este inicia con el planteamiento y la descripción de las situaciones propuestas a los estudiantes; luego, se encuentra el diseño del trabajo de grado, donde se explica por qué es de tipo cualitativo. Más adelante, se explica cómo se producen los datos a estudiar durante las sesiones de clase, y se presenta el cronograma de implementación de las situaciones. Por último, se propone una valoración de la pertinencia del trabajo de grado desde la perspectiva de lo vivido en el aula de modelación.

#### **1.9 Diseño y metodología de aplicación de actividades**

El desarrollo del ambiente de modelación se lleva a cabo en la IED Colegio Alejandro Obregón con estudiantes de noveno grado, orientados por el profesor Wilson Yesid Perilla, PT, quien brindó su consentimiento y apoyo al hablar con las directivas del colegio para implementar la propuesta de investigación. Seguido de esto, los papás de los estudiantes firmaron el consentimiento informado de la investigación (Anexo 1).

El proceso de observación de lo que acontece en el aula y la toma de evidencias se hicieron por medio de la plataforma Teams, al grabar la transmisión en vivo de la clase del profesor junto con sus estudiantes; para esto, algunos estuvieron presentes en el salón y otros se conectaron a través de internet. Por tal razón, en este trabajo de grado se analizó la interacción de los actores del ambiente de modelación, con lo que se vio un enfoque cualitativo que pretendió mostrar las ventajas y desventajas de implementar un ambiente de este tipo para el desarrollo de un concepto a través de una modalidad semipresencial.

Durante la aplicación de las actividades, se esperaba identificar momentos de discusión entre estudiantes y profesores que pudieran ser utilizados por el PT para fomentar la discusión y la reflexión del concepto por conceptualizar. La diversidad de ideas de los estudiantes en los proyectos permitió al PT ampliar la explicación y gestionar una conversación con los estudiantes, con la intención de observar su participación. Para alcanzar este nivel, se plantearon algunas situaciones, propuestas por el PF y ejecutadas por el PT, las cuales correspondían a adaptaciones realizadas por el PF de las fases de modelación. Esto tuvo la intención de generar una apropiación



del concepto a través de la creación de los proyectos, lo que hizo que los estudiantes se responsabilizaran de su proceso de aprendizaje.

### **1.9.1 Situaciones que se proponen a los estudiantes de noveno grado**

- Situación 1. Presentación de la temática a través de la proyección de una serie de videos que contextualizan a los estudiantes del proyecto. En esta fase se realizó la creación de los grupos y se presentó la temática a implementar en los proyectos. Se adaptó la fase de exploración (Anexo 2).
- Situación 2. Los grupos recolectaron la información sobre el tipo de bicicleta elegida en la primera sesión. Los grupos trabajaron teniendo en cuenta las indicaciones del profesor titular al dividir la sesión en diferentes tareas: elegir el tipo de bicicleta sobre el que se deseaba realizar el proyecto; describir las relaciones que se deseaban estudiar de la bicicleta o mencionar qué parte del funcionamiento de esta llamaba su atención; y, por último, realizar una búsqueda de los datos proporcionados por ese mecanismo. Se adaptó la fase de delimitación del problema (Anexo 3).
- Situación 3. Se les propuso a los estudiantes observar detenidamente los enfoques de los grupos para luego realizar una búsqueda de información y resolver la problemática. Asimismo, los estudiantes socializaron la idea de proyecto que tenían por grupo y mencionaron la relación entre la presentación, la intención y el contexto elegido. Más adelante, ellos plantearon la pregunta problema y buscaron el conjunto de datos para relacionarlo con el proyecto y modelar los datos. Se adaptó la fase de delimitación del problema (Anexo 4).
- Situación 4. Los estudiantes construyeron el modelo, presentaron la primera versión del proyecto, expusieron sus ideas e identificaron los elementos que permitieron el un acercamiento al concepto de función. Se adaptó la fase de evaluación y validación (Anexo 5).
- Situación 5. El PT explicó el concepto de función y estableció la conexión con los proyectos al identificar las ideas potencialmente relacionadas con este. Igualmente, el PT presentó la conexión de los otros modelos con dicho concepto y los proyectos de los estudiantes, realizó una retroalimentación de los componentes que los estudiantes habían

utilizado para presentar sus avances, y los utilizó para presentar el concepto. Se adaptó la fase de conexión con otros modelos y situaciones (Anexo 6).

- Situación 6. Se realizó la segunda presentación de los proyectos, se identificaron los cambios y se contextualizaron los avances a la luz del concepto de función lineal. Por último, se desarrollaron las valoraciones teniendo en cuenta los ajustes hechos. Se adaptó la fase de evaluación y modificación del modelo (Anexo 7).

## **1.10 Diseño de la investigación**

El diseño de investigación apunta a identificar potencialidades en la comprensión de un concepto matemático al crear en la clase un ambiente de modelación matemática, por lo que se propone una serie de situaciones, las cuales abren paso y estructuran la dinámica de las sesiones. En ellas se implementa el ABP para proponer el producto final como un proyecto donde se evidencian las interpretaciones y los manejos de la modelación matemática para institucionalizar el concepto de función. Con el propósito de analizar el desarrollo y los productos, se procuró obtener información sobre los procesos de los estudiantes, considerando que la aplicación se dio bajo un manejo combinado entre las clases presenciales y el uso de las TIC para transmitir y grabar las sesiones. Las evidencias utilizadas para la investigación fueron tales proyectos y grabaciones; ello, con el fin de describir lo que acontecía durante las clases.

De esta forma, se identificaron los beneficios y la manera en que influye la modelación matemática como pilar en el acercamiento al concepto de función lineal a través del ABP; esto, por medio de una reflexión de la aplicación de las situaciones presentadas antes, durante y después de la implementación, con lo que se reconocieron las características en las formas de expresión y comunicación de los estudiantes. Así las cosas, fue indispensable mencionar los tipos de investigación y profundizar en la cualitativa, sin dejar de lado la cuantitativa.

### **1.10.1 Investigación cualitativa**

Durante años, la prioridad de implementar investigaciones cualitativas fue duramente defendida, con lo que se abandonaron las investigaciones de tipo cualitativo; sin embargo, años más tarde, estas últimas aumentaron. Por otro lado, hay quienes utilizan los dos tipos para contextualizar los datos y aterrizarlos a un momento específico y a un grupo social. Así, se deben tener en cuenta las características cualitativas en la investigación, lo que constituye una

herramienta crucial al momento de analizar los datos obtenidos a la luz del planteamiento de la investigación.

A continuación, se presentan los paradigmas, con el propósito de revisar lo que implica una investigación cualitativa. Guba y Lincoln (2002) mencionaron el término *paradigma* para poner en un segundo plano el método de investigación y presentar la relevancia de su definición. Ellos señalaron que este es un “sistema básico de creencias o visión del mundo que guía al investigador ya no solo al elegir los métodos, sino en formas que son ontológicamente y epistemológicamente fundamentales”. De esta forma, se inició una discusión sobre las diferencias de los dos métodos de investigación, al presentar sus ventajas y desventajas.

Durante mucho tiempo, los señalamientos positivos relacionados con la matemática, denominada “reina de las ciencias”, al igual que la física y la química, contribuyeron a estructurar su carácter cuantificable en cuestión de resultados. Esta fue llamada así por su rigurosidad en la interpretación de los resultados; y las ciencias menos cuantificables, como las sociales, fueron duramente cuestionadas por su carácter menos demostrativo y más sujetas a interpretaciones subjetivas.

Por consiguiente, el carácter de este trabajo de grado es cualitativo, por cuanto atiende asuntos menos cuantificables y más de carácter social e interpretativo, con una visión subjetiva de la aplicación; así, se propone la implementación de un ambiente de modelación para identificar las desventajas y potencialidades. Con ello, se entiende de qué tipo es la información obtenida en este trabajo de grado.

### **1.10.2 Recolección de información**

La recolección de la información se dio mediante grabaciones, donde el PT se encontraba en el salón de clases con la mitad de los estudiantes y transmitía en vivo por la plataforma Teams a los demás, quienes estaban en sus casas. En consecuencia, las presentaciones de los estudiantes se sintetizaron en diapositivas y videos. Asimismo, se analizaron las grabaciones y se identificaron momentos cruciales, donde los estudiantes presentaron comentarios que reflejaban un acercamiento al concepto de función lineal o disponían espacios de discusión para dicha socialización de aspectos, relacionados con el concepto de función lineal, teniendo en cuenta el ambiente de modelación para estos espacios de discusión.

### 1.10.3 Evaluación

La evaluación del trabajo de grado fue la misma que la utilizada por el PT para evaluar durante sus clases. Cabe mencionar que la valoración cuantitativa de los proyectos la planteó el profesor Wilson, considerando que el trabajo de grado se centraba en las potencialidades y desventajas de implementar un ambiente de modelación en el aula. Finalmente, el desarrollo y la evolución de los estudiantes fueron aspectos revisados por el PT, donde se tuvo en cuenta la valoración cualitativa del PF de cada proyecto.

Tabla 3. Cronograma de implementación de situaciones

| Día de clase                 | Actividad   |
|------------------------------|---|
| Lunes 23 de julio de 2021    | Presentación de la investigación  |
| Viernes 30 de julio de 2021  | Creación de grupos y propuesta de proyectos                                     |
| Lunes 2 de agosto de 2021    | Presentación de las preguntas problema por cada grupo                           |
| Lunes 9 de agosto de 2021    | Primera exposición de los proyectos   |
| Viernes 13 de agosto de 2021 | Presentación de la evaluación final del trimestre                               |
| Viernes 20 de agosto de 2021 | Ajuste de notas finales del trimestre   |
| Lunes 23 de agosto de 2021   | Contextualización de las razones de la entrega y el desarrollo de los proyectos |
| Viernes 27 de agosto de 2021 | Presentación de los proyectos   |
| Lunes 30 de agosto de 2021   | Presentación de los proyectos de los últimos grupos                             |

---

|                                  |   |
|----------------------------------|---|
| Lunes 13 de septiembre de 2021   | Explicación del PT sobre la noción de función al relacionar las situaciones vistas en los proyectos |
| Lunes 6 de septiembre de 2021    | Explicación del PT sobre la noción de función al relacionar las situaciones vistas en los proyectos |
| Viernes 10 de septiembre de 2021 | Explicación del PT sobre la noción de función al relacionar las situaciones vistas en los proyectos |
| Lunes 13 de septiembre de 2021   | Presentación de la segunda versión de los proyectos   |
| Viernes 17 de septiembre de 2021 | Presentación de la segunda versión de los proyectos   |

---

## **Capítulo 4. Análisis de actividades**

Se presentó un análisis de la información recolectada con miras a identificar los momentos que potenciaran el acercamiento al concepto de función lineal y se realizó una búsqueda por las sesiones grabadas y los proyectos suministrados por parte de los estudiantes con la intención de observar las potencialidades y desventajas que implicaba la implementación del ambiente de modelación matemática junto con el ABP al realizar el acercamiento al concepto de función lineal.

### **1.11 Análisis de resultados**

La evidencia recolectada se analizó a la luz de ciertos niveles de interpretación, por lo que se suministraron un orden y un carácter a lo acontecido en el aula. Esto inició con un nivel de descripción, al mencionar lo ocurrido durante las situaciones por las que atravesaron los participantes del proyecto y finalizó con un nivel de búsqueda de momentos clave donde se expusieron las partes donde los estudiantes mostraban un acercamiento al concepto de función lineal de forma aparentemente natural. Por último, se resaltó la forma en que el docente aprovecha esos momentos para formalizar el concepto.

### **1.12 Niveles de interpretación**

#### **1.12.1 Nivel de descripción**

La idea del trabajo de grado surgió cuando se le planteó al profesor Wilson Perilla (PT) de la IED Colegio Alejandro Obregón la idea de crear un ambiente de modelación donde él y sus alumnos de noveno grado fueran los protagonistas. La intención del trabajo de grado era proponer el desarrollo de un ambiente de modelación matemática basado en una serie de fases de modelación (Villa, 2007), con el objetivo de desarrollar un acercamiento al concepto de función.

En un primer momento, las situaciones fueron pensadas para desarrollarse en un tiempo de dos horas cada una durante seis sesiones, para un total de 12 horas; en estas, la interacción entre los jóvenes fue la principal meta, con el fin de observar el lenguaje y las expresiones con los que se comunicaban. Así, se estableció un registro que fue utilizado en el análisis de las evidencias. Dadas las circunstancias por las que atravesó la institución, se decidió reducir los bloques de dos a una hora, puesto que así lo exigían los protocolos de higiene impuestos por la institución.

Por ese motivo, los minutos con los que se planificó en un principio fueron divididos a la mitad, y se aumentaron las sesiones de clase destinadas a este trabajo. Por otra parte, las situaciones fueron pensadas para posibilitar el desarrollo de cada fase de modelación, con el fin de institucionalizar el concepto de función lineal. Para eso se planteó el trabajo con el propósito de crear proyectos que ayudaran a dar respuesta a una problemática planteada. La situación que se definió se relacionó con las bicicletas, y el PF presentó una serie de videos seleccionados para incentivar la participación de los alumnos al señalar la relación el uso de esta en la sociedad.

En las siguientes sesiones los enfoques de los PT y PF se relacionaron con la descripción de la intención de los proyectos que tenían en mente los grupos de trabajo, conformados mayormente por tres personas. Durante dos sesiones, los estudiantes formaron sus grupos y decidieron el tipo de bicicleta que deseaban estudiar y su relación para comprenderla y revisarla más a profundidad.

Durante el desarrollo de las clases segunda, tercera y cuarta, los grupos tuvieron asesorías para refinar el prototipo del proyecto final; y en las sesiones quinta y sexta, se presentó la primera entrega del producto final y se hizo una presentación de los proyectos por medio de PowerPoint. El PT hizo comentarios para complejizar cada vez más el trabajo, y para direccionarlo hacia el planteamiento de un modelo de la situación escogida. Para las siguientes sesiones, se les pidió una última entrega, con lo que se presentó el proyecto con la información recolectada.

Luego, el PT decidió exponer a profundidad el concepto de función, y para eso tomó dos sesiones: en esta última, el profesor indicó que se debían realizar las modificaciones al proyecto, teniendo en cuenta las características del concepto de función lineal explicado en la quinta clase. Fue entonces cuando se presentó el concepto y se relacionó con modelos diferentes que debían mostrarse en la siguiente sesión.

Para el 13 de septiembre, el profesor, en compañía de sus estudiantes, decidió analizar los avances y modificaciones. Allí se encontró que dos grupos habían aplicado lo compartido en las clases y reconocían las funciones lineales a partir de los datos de su investigación. Un grupo intentó encontrar la ecuación de la función y se aproximó bastante al objetivo. Por tanto, se decidió un plazo (hasta el viernes 17 de septiembre) para entregar los proyectos con las modificaciones pedidas por el profesor. Finalmente, el 17 de septiembre, los estudiantes presentaron los proyectos con las últimas modificaciones y socializaron los proyectos con los demás estudiantes. Así se logró realizar una valoración cualitativa de los grupos que alcanzaron a presentarlos.

### 1.12.2 Nivel de búsqueda y análisis de situaciones clave

La implementación de las situaciones propuestas comenzó el 23 de agosto de 2021. Se observó que, durante la presentación y el desarrollo de las situaciones, los estudiantes se mostraron concentrados e interesados por la metodología utilizada para efectuar el acercamiento al concepto de función a través de la creación de proyectos. Una de las preguntas que surgieron durante esta presentación fue “¿qué es la modelación matemática?”, a lo que el profesor Wilson respondió que era necesario retomar la definición más adelante: “es crear algo una operación matemática o ya sea una función, una ecuación que nos permita saber cómo funcionan las cosas [...]. Cuando crean la ecuación están modelando, dándole sentido a las matemáticas y que nos ayude a predecir comportamientos”.

Tabla 4. Evidencia de situación 1: Fase de exploración y observación

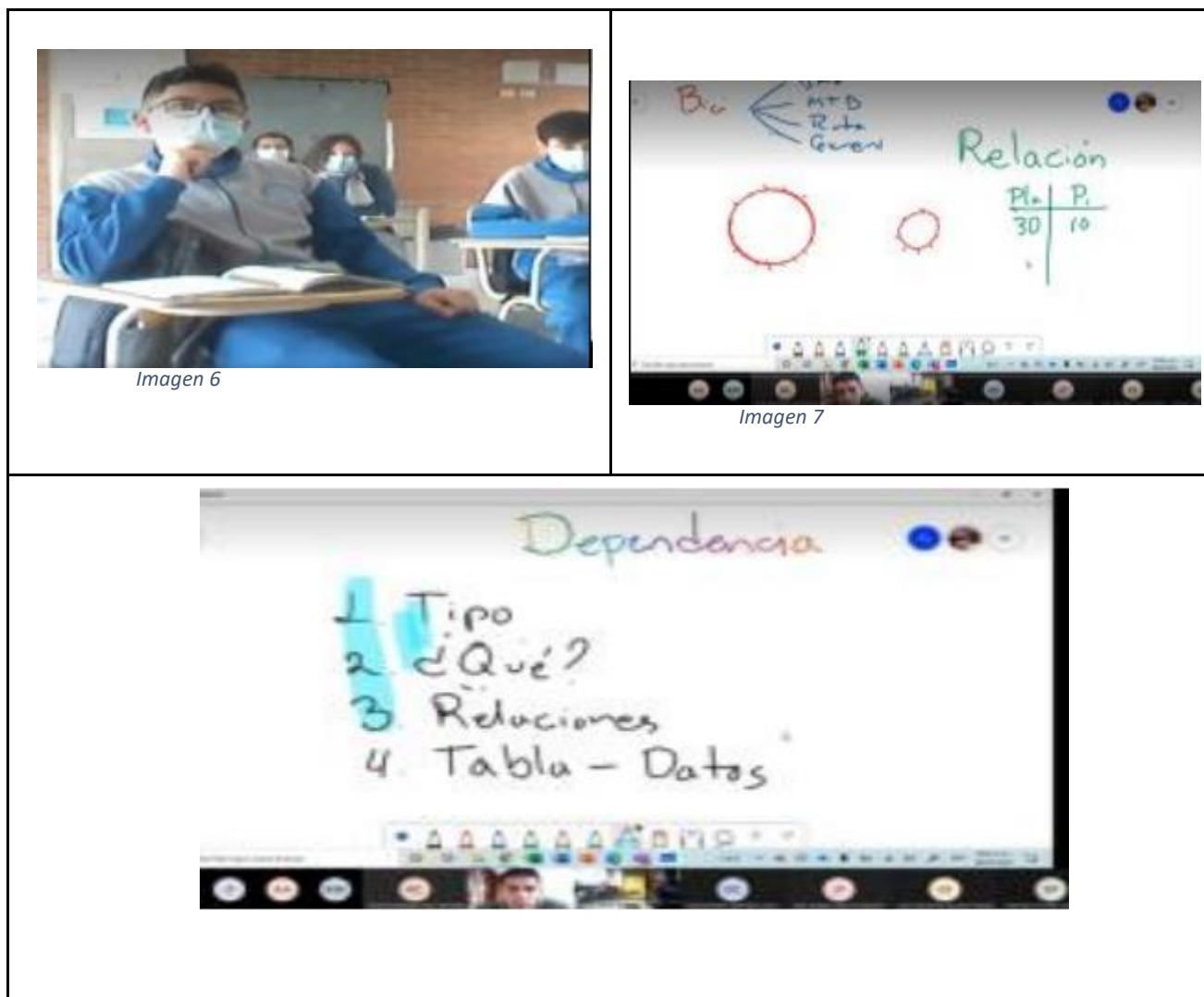


Se identificó que la propuesta de trabajo de grado abría espacios de diálogo para ahondar en los asuntos relacionados con la modelación y el concepto de función lineal. Asimismo, se relacionó el contexto de la pandemia y la conexión de la modelación para predecir los picos de contagio. Durante la segunda sesión, los estudiantes llegaron con los grupos conformados y con una propuesta de problema para abordar, y el profesor inició con la mención de un plan de acción



a seguir, con lo que se explicaron cuatro preguntas clave. Los estudiantes debían responder a un *qué* (¿en qué quieren profundizar sobre la bicicleta?), a un *cuál* (¿qué tipo de bicicleta quieren estudiar?), a unas relaciones (¿qué relaciones se podrían presentar en su idea de proyecto?) y a unos datos (encontrar conjuntos de datos que se pudieran relacionar).

Tabla 5. Evidencia de situaciones 2 y 3: Delimitación del problema



Más adelante, el profesor preguntó por los integrantes de cada uno de los grupos. Dado que estos aún no se habían puesto de acuerdo, se decidió invertir tiempo para terminar de conformarlos. En este momento, surgieron una serie de obstáculos: ¿cómo grabar las conversaciones de los estudiantes presenciales?, ¿cómo establecer el contacto entre los estudiantes presenciales y virtuales?, ¿cómo obtener registro de sus conversaciones? Por último, el profesor decidió que los grupos mencionaran los problemas dispuestos para trabajar en sus proyectos.

Tabla 6. Evidencia de situación 4: Fase de evaluación y validación

|   |   |
|---|---|
|    |                                       |
| <p>“Nosotros vamos a estudiar los discos del freno en una BMX”</p>                  | <p>“Arnold y yo vamos a estudiar cómo los cambios en una bicicleta genérica afectan el rendimiento de las personas”</p> |
|  |                                     |

“Nosotros vamos a investigar sobre la cadena en una bicicleta común, cuánto de largo tiene que tener para que funcione bien”.

“La bicicleta de ruta, cómo influye el diámetro de la rueda en la velocidad y el rendimiento”

En la siguiente clase se presentaron algunas aplicaciones que fueron de utilidad para los estudiantes en sus proyectos, quienes las utilizaron para sacar los datos de cada integrante del grupo y de otras personas externas al proyecto.

Tabla 7. Evidencia de situación 4: Fase de evaluación y validación



El profesor Wilson explicó el objetivo de las próximas sesiones y las razones para utilizar las aplicaciones en sus proyectos, con lo que se hizo énfasis en que los estudiantes buscaran o identificaran las relaciones presentes en su propuesta de proyecto. En las siguientes sesiones, los estudiantes mostraron la primera versión de su proyecto, por lo que se enfocaron en la historia de la bicicleta, sus partes y el desarrollo de las modalidades elegidas; y crearon tablas con los datos obtenidos en su consulta.

Tabla 8. Evidencia de situación 4: Fase de evaluación y validación

|    |    |        |         |         |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |
|---|--|--------|---------|---------|------|-------------|-----|-----|-----|-----|-------------|----|----|----|----|-------------|----|----|----|----|------------|----|----|----|----|--------------|----|----|----|----|---------------------------------|--|--|--|--|--------------------|-------|-------|-------|-------|----------------------|-------|-------|-------|-------|--------------------|-------|-------|-------|-------|------------------------|-------|-------|-------|------|--|----------------------------|--|--|--|--|-------------|-----|-----|-----|-----|----------------------|-------|-------|-------|-------|
|  <table border="1" data-bbox="240 877 782 1020"> <thead> <tr> <th></th> <th>Kevin</th> <th>Andrés</th> <th>Gabriel</th> <th>Niño</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Altura (cm)</td> <td>168</td> <td>173</td> <td>170</td> <td>125</td> </tr> <tr> <td>Tronco (cm)</td> <td>49</td> <td>50</td> <td>50</td> <td>28</td> </tr> <tr> <td>Pierna (cm)</td> <td>80</td> <td>97</td> <td>95</td> <td>59</td> </tr> <tr> <td>Brazo (cm)</td> <td>57</td> <td>58</td> <td>56</td> <td>38</td> </tr> <tr> <td>Hombros (cm)</td> <td>38</td> <td>40</td> <td>39</td> <td>19</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1" data-bbox="240 1041 782 1155"> <thead> <tr> <th colspan="5">Marco BMX a la medida "Bikefit"</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Tubo Vertical (cm)</td> <td>53,13</td> <td>44,11</td> <td>52,57</td> <td>32,27</td> </tr> <tr> <td>Tubo Horizontal (cm)</td> <td>45,96</td> <td>45,11</td> <td>45,11</td> <td>28,09</td> </tr> <tr> <td>Altura Sillin (cm)</td> <td>83,77</td> <td>69,64</td> <td>82,89</td> <td>51,10</td> </tr> <tr> <td>Longitud Potencia (cm)</td> <td>11,64</td> <td>11,45</td> <td>11,45</td> <td>7,70</td> </tr> </tbody> </table> |  | Kevin  | Andrés  | Gabriel | Niño | Altura (cm) | 168 | 173 | 170 | 125 | Tronco (cm) | 49 | 50 | 50 | 28 | Pierna (cm) | 80 | 97 | 95 | 59 | Brazo (cm) | 57 | 58 | 56 | 38 | Hombros (cm) | 38 | 40 | 39 | 19 | Marco BMX a la medida "Bikefit" |  |  |  |  | Tubo Vertical (cm) | 53,13 | 44,11 | 52,57 | 32,27 | Tubo Horizontal (cm) | 45,96 | 45,11 | 45,11 | 28,09 | Altura Sillin (cm) | 83,77 | 69,64 | 82,89 | 51,10 | Longitud Potencia (cm) | 11,64 | 11,45 | 11,45 | 7,70 |  <p>Se encontró que la longitud horizontal del tubo de marco de la bicicleta aumenta o disminuye en relación con el tronco del usuario (deportista, fanático); es decir, entre más alto el usuario de la bicicleta, más largo será el marco de esta.</p> <table border="1" data-bbox="870 1087 1247 1155"> <thead> <tr> <th colspan="5">Altura vs. Tubo horizontal</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Altura (cm)</td> <td>168</td> <td>173</td> <td>170</td> <td>125</td> </tr> <tr> <td>Tubo Horizontal (cm)</td> <td>45,96</td> <td>45,11</td> <td>45,11</td> <td>28,09</td> </tr> </tbody> </table> | Altura vs. Tubo horizontal |  |  |  |  | Altura (cm) | 168 | 173 | 170 | 125 | Tubo Horizontal (cm) | 45,96 | 45,11 | 45,11 | 28,09 |
|   | Kevin  | Andrés | Gabriel | Niño    |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |
| Altura (cm)   | 168  | 173    | 170     | 125     |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |
| Tronco (cm)   | 49   | 50     | 50      | 28      |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |
| Pierna (cm)   | 80   | 97     | 95      | 59      |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |
| Brazo (cm)  | 57   | 58     | 56      | 38      |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |
| Hombros (cm)  | 38   | 40     | 39      | 19      |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |
| Marco BMX a la medida "Bikefit"   |  |        |         |         |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |
| Tubo Vertical (cm)  | 53,13  | 44,11  | 52,57   | 32,27   |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |
| Tubo Horizontal (cm)  | 45,96  | 45,11  | 45,11   | 28,09   |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |
| Altura Sillin (cm)  | 83,77  | 69,64  | 82,89   | 51,10   |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |
| Longitud Potencia (cm)  | 11,64  | 11,45  | 11,45   | 7,70    |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |
| Altura vs. Tubo horizontal  |  |        |         |         |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |
| Altura (cm)   | 168  | 173    | 170     | 125     |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |
| Tubo Horizontal (cm)  | 45,96  | 45,11  | 45,11   | 28,09   |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |
| <p>Los estudiantes sacaron los datos gracias a las aplicaciones, y para ello tomaron las medidas de los tres integrantes del grupo y las de un niño.</p>  | <p>El profesor mencionó que la gráfica estaba bien, pero para el desarrollo del concepto de función era necesario relacionar la altura de las personas y la longitud del tubo horizontal (longitud del marco).</p> |        |         |         |      |             |     |     |     |     |             |    |    |    |    |             |    |    |    |    |            |    |    |    |    |              |    |    |    |    |                                 |  |  |  |  |                    |       |       |       |       |                      |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |                        |       |       |       |      |  |                            |  |  |  |  |             |     |     |     |     |                      |       |       |       |       |

Tabla 9. Evidencia de situación 6: Fase de evaluación y modificación del modelo


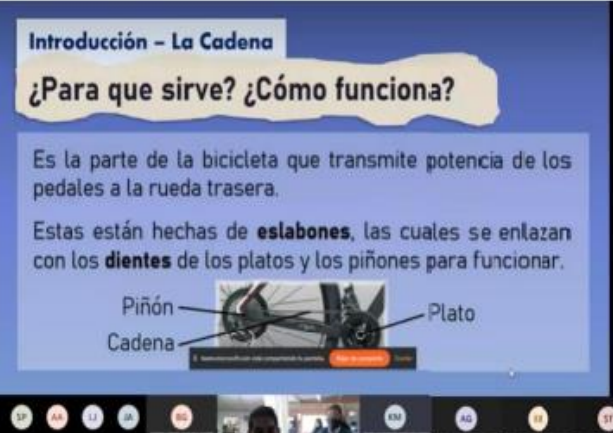
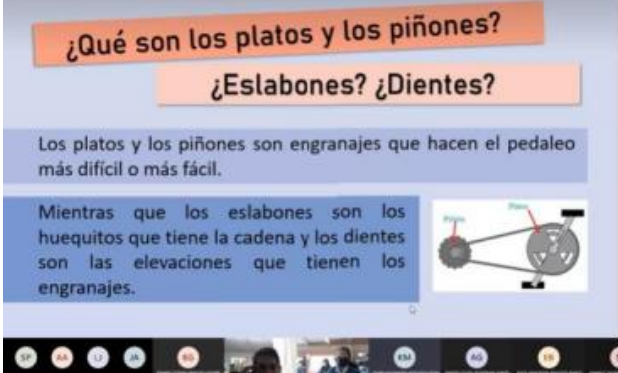
| <p style="text-align: center;"><b>LA CADENA</b></p> <p style="text-align: center;">Por:<br/>Laura Sofía Vásquez<br/>Valentina Medina Martínez<br/>Kevin Alexander Hurtado</p>    | <p><b>Introducción – La Cadena</b></p> <p><b>¿Para que sirve? ¿Cómo funciona?</b></p> <p>Es la parte de la bicicleta que transmite potencia de los pedales a la rueda trasera.</p> <p>Estas están hechas de <b>eslabones</b>, las cuales se enlazan con los <b>dientes</b> de los platos y los piñones para funcionar.</p>    |              |       |           |               |               |   |
|---|---|--------------|-------|-----------|---------------|---------------|---|
| <p><b>¿Qué son los platos y los piñones?</b></p> <p><b>¿Eslabones? ¿Dientes?</b></p> <p>Los platos y los piñones son engranajes que hacen el pedaleo más difícil o más fácil.</p> <p>Mientras que los eslabones son los huequitos que tiene la cadena y los dientes son las elevaciones que tienen los engranajes.</p>  | <p><b>¿Cuál es el problema?</b></p> <p>*Usaremos una bicicleta común sin cambios para esto</p> <p>Si el plato tiene 53 dientes, y hay un solo piñón con 39 dientes ¿Cuántos eslabones tendría que tener la cadena?</p> <table border="1" data-bbox="862 982 1471 1142"> <thead> <tr> <th>Plato Grande</th> <th>Piñón</th> <th>Eslabones</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>53<br/>dientes</td> <td>39<br/>dientes</td> <td>x</td> </tr> </tbody> </table> | Plato Grande | Piñón | Eslabones | 53<br>dientes | 39<br>dientes | x |
| Plato Grande  | Piñón   | Eslabones    |       |           |               |               |   |
| 53<br>dientes   | 39<br>dientes   | x            |       |           |               |               |   |
| <p>La consulta la realizaron sobre una bicicleta genérica, al contar con los dientes del plato y el piñón.</p>  | <p>Se preguntó por la cantidad de eslabones que debía tener la cadena de esta bicicleta.</p>  |              |       |           |               |               |   |

Tabla 10. Evidencia de situación 6: Fase de evaluación y modificación del modelo

**LOS CAMBIOS DE LA BICICLETA CLÁSICA**

AUTORES: JOSE DAVID JARAMILLO AGUIRRE  
PAULA PATRICIA SICHACA LEON  
ARNOLD ORJUELA GONZALES

CURSO: 902

COLEGIO ALEJANDRO OBREGON  
BOGOTÁ D.C.  
2021

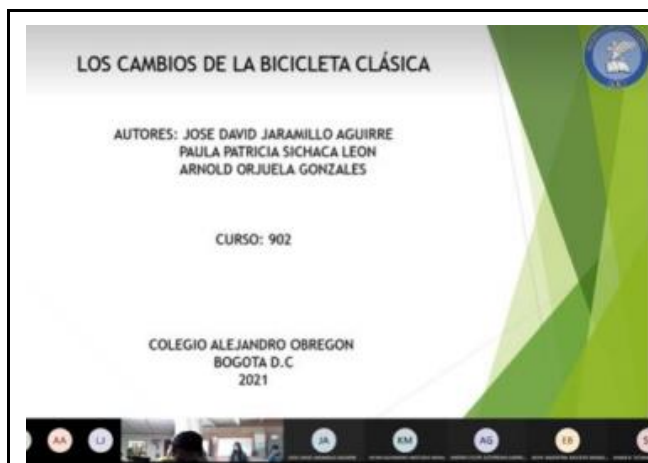


Imagen 23

**Como funcional los cambios?**

Para saber cuantas velocidades tiene una bicicleta común, tiene que hacer una operación: se multiplica la cantidad de platos de adelante y la cantidad de piñones traseros:

Ejemplo: si en la bicicleta tengo 5 piñones atrás y 2 platos adelante:  $5 \times 2 = 10$   
Entonces la bicicleta tiene 10 velocidades.

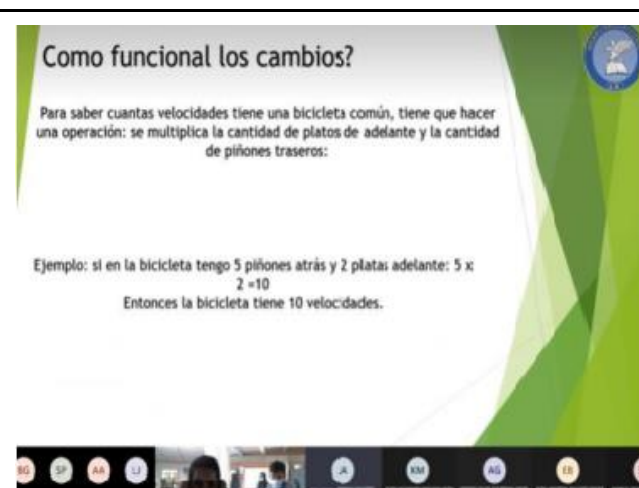
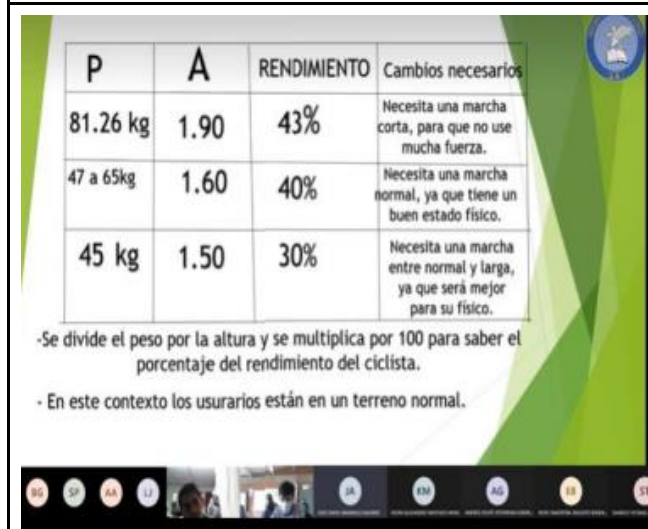


Imagen 24

| P         | A    | RENDIMIENTO | Cambios necesarios  |
|-----------|------|-------------|---|
| 81.26 kg  | 1.90 | 43%         | Necesita una marcha corta, para que no use mucha fuerza.                    |
| 47 a 65kg | 1.60 | 40%         | Necesita una marcha normal, ya que tiene un buen estado físico.             |
| 45 kg     | 1.50 | 30%         | Necesita una marcha entre normal y larga, ya que será mejor para su físico. |

-Se divide el peso por la altura y se multiplica por 100 para saber el porcentaje del rendimiento del ciclista.

- En este contexto los usuarios están en un terreno normal.



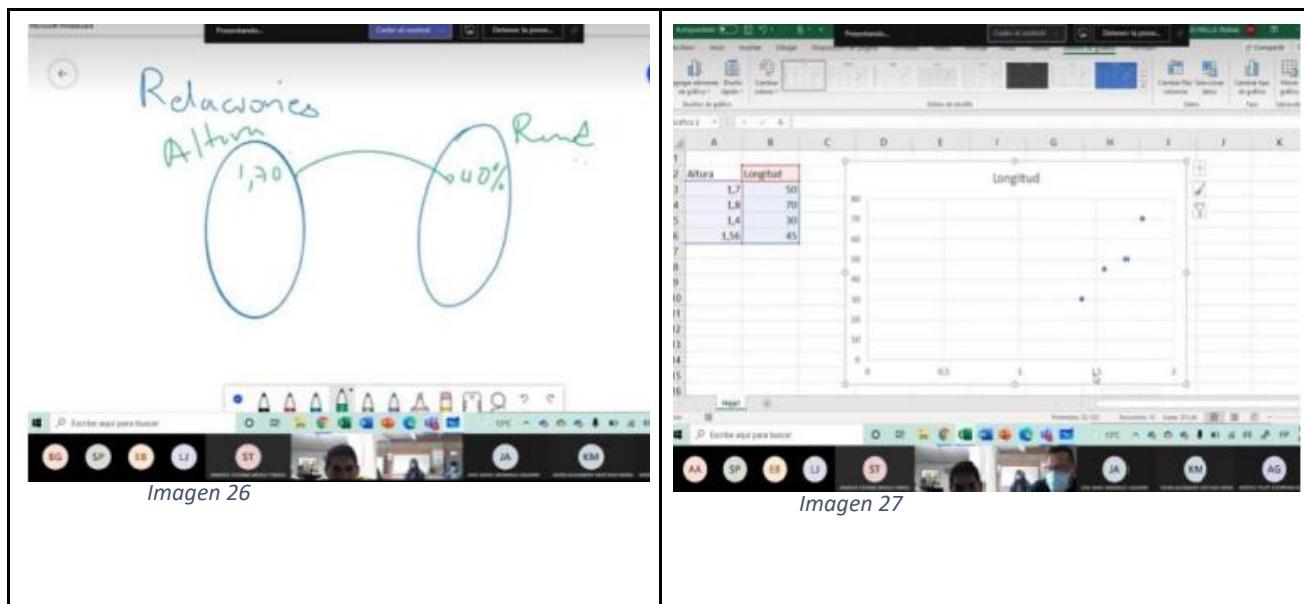
El profesor indicó que la tabla tenía algo especial: “el rendimiento depende de otras dos cosas”, indicó este. Asimismo, les sugirió que sacaran dos tablas de la que tenían: “dejan fijo el peso y ponen a variar la altura y en la otra dejan fijo la altura y ponen a variar el peso. La idea es que dejemos algo que varíe y algo que dependa de los datos recolectados, de esa manera vamos a hacer un ejercicio bien interesante”.

El profesor realizó una observación muy positiva sobre las conclusiones que mencionaron al lado derecho de la tabla.

Luego de esta presentación, se abrió una discusión interesante sobre cómo plantear las relaciones que buscaban todos los grupos y el profesor procedió a ampliar su explicación sobre las

relaciones matemáticas y cómo se podían formar mediante gráficos de conjuntos de datos. Paso seguido, se utilizó el programa de Excel para graficar la relación de los datos.

Tabla 11. Evidencia de situación 5: Fase de conexión con otros modelos y situaciones



En la siguiente sesión, el PF presentó la intención del trabajo de grado para llevar los proyectos a un contexto propio del uso y el conocimiento de los mecanismos de la bicicleta, con el objetivo de que los estudiantes presentaran sintéticamente sus proyectos y que estos mostraran la tabla a un mecánico de bicicletas. Esto último, con la intención de que el mecánico adaptara las características de cada bicicleta para los usuarios cuando lo creyera conveniente.

## Conclusiones

Con respecto al primer objetivo, se observó que la generación de un ambiente de modelación bajo una metodología mediada por proyectos tuvo un impacto positivo, pues permitió el trabajo colectivo y el desarrollo individual. Además, bajo las circunstancias adecuadas, fue posible entablar conversaciones grupales para promover la implementación de conocimientos y habilidades de los estudiantes en busca del desarrollo del concepto de función lineal. Por otra parte, se comprometieron varias competencias, las cuales se pueden desarrollar al máximo si la estimulación es la adecuada; así, uno de los retos más importantes fue la vinculación de las herramientas tecnológicas como principal medio de interacción.

De esta manera, si se ajustan las características, como el aforo de los estudiantes, su medio de comunicación o su resultado final, de forma que los proyectos sean algo tangible o algo que refleje su trabajo, se podría sacar mejor provecho en cuanto al interés de los estudiantes para lograr una comprensión del concepto de función.

En lo que respecta al segundo objetivo, las ventajas de la implementación del ambiente de aula mediado por las TIC fueron la capacidad de recurrir a múltiples contextos en tiempo real y la posibilidad de utilizar las diversas herramientas para desarrollar las diferentes representaciones del concepto de función lineal. En lo que respecta a las dificultades, se encontraron la falta de interacción con los estudiantes que se encontraban en casa y el avance lento del desarrollo de las actividades por los inconvenientes en la comunicación. Por consiguiente, esta propuesta facilitó un acercamiento al concepto de función lineal, por cuanto los estudiantes plantearon la relación a modelar, obtuvieron una base de datos para dar con una representación gráfica y, al final, expusieron la interpretación de su modelo.

Por otro lado, en el análisis de las situaciones 2 y 3 se observó que el ambiente de modelación se prestaba para generar espacios de diálogo entre los estudiantes, donde se trataban factores matemáticos que aparecían durante la ejecución de los proyectos. De otra parte, el ABP y el proceso de modelación fueron una combinación eficaz para proponer el acercamiento en cuestión, pues ambos le permitieron al estudiante la autonomía en la investigación para retroalimentar y complementar sus conocimientos junto con los de sus compañeros y los del docente; ello, con las ideas planteadas durante los proyectos, a fin de dirigir la información de los modelos a la conceptualización de la noción de función.



Para terminar, durante la aplicación del ambiente de aula se retomaron los conceptos previos necesarios para que el docente gestionara el desarrollo de la noción de función formalmente. Igualmente, hacer del uso de la bicicleta un punto de discusión para el desarrollo del ambiente resultó ser de provecho, pues fue una herramienta que, por tener previa relación con los estudiantes, generó interés para la ejecución de la propuesta.

## Referencias

- Aristizábal, C. (2012). *Aprendizaje Basado en Proyectos (A.B.Pr) Como estrategia de Enseñanza y Aprendizaje en la Educación Básica y Media*. Universidad Nacional de Colombia.
- Biembengut, S., & Hein, N. (2004). *Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemáticas*. Grupo Santillana México.
- Blomhøj, M. (2018). *Diferentes perspectivas en la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelación matemática*. .
- Camargo, Ángela Patricia (2013). El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguay (Ed.), VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 1841-1849). Montevideo, Uruguay: SEMUR.
- Díaz-Pinzón, J. (2021). Análisis de los resultados de la prueba PISA 2018 en matemáticas para América. *Revista de Investigaciones Universidad del Quindío*, 33(1), 104-114. DOI: <https://doi.org/10.33975/riuuq.vol33n1.463>.
- Flores-Fuentes, G. y Juárez-Ruiz, E. L. (2017). *Aprendizaje basado en proyectos para el desarrollo de competencias matemáticas en Bachillerato*. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 19(3), 71-91.
- Guba, E., & Lincoln, Y. (2002). *Investigación cualitativa y cuantitativa*.
- Herera, Y., & Muñoz, V. (2014). *Propuesta didáctica para abordar el concepto de función a partir de la modelación matemática*. .  
<http://funes.uniandes.edu.co/12252/1/Herrera2014Propuesta.pdf>
- Henao, S., & Vanegas, J. (2012) La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadráticos.  
<http://funes.uniandes.edu.co/2518/1/Lamodelaci%C3%B3nHenaoAsocolme2012.pdf>
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes). (2021). *Informe nacional de resultados del examen Saber 11° 2020* (vol. I).
- López, J., y Sosa, L. (2007). Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto de función (tesis de pregrado). Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, Yucatán.
- Martínez, J. (2013). *Apropiación del concepto de función por medio de Geogebra*.  
<https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/11914/8411011.2013.pdf?sequence=1&isAlowed=y>

- Muñoz, A., Hernández, A., García & Recamán, A. (2012). *La metodología del aprendizaje colaborativo a través de las TIC: una aproximación a las opiniones de profesores y alumnos*. Revista complutense de educación.
- Ortiz, L., & Romero N. (2015). La implementación de las TIC en el aula de matemáticas: una mirada sobre su concepción en el siglo XXI.
- Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes [PISA]. (2018). *Informe Nacional de Resultados para Colombia*.
- Rodríguez, R., & Quiroz, S. (2015). *Elementos de diseño para una clase de matemáticas a través de modelación matemática*.  
<http://funes.uniandes.edu.co/10888/2/Rodriguez2015Elementos.pdf>
- Roldán Cruz, E. O. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8 y 9 grados de educación básica*. Facultad de Ciencias.
- Schukajow, K., Stillman, S., Kaiser, G., & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM*, 50(1-2), 5- 18. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0933-5>.
- Segura, D. (2000). *¿Es posible pensar otra escuela?*. Escuela Pedagógica Experimental.
- Villa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo. *Revista Tecno-Lógicas*, 19, 63-85.

## Anexos

### Anexo 1. Consentimiento informado

Bogotá D. C.

Señores

**Padres de familia**

**IED Colegio Alejandro Obregón**

Bogotá D. C.

Cordial saludo.

Por medio de la presente me permito solicitar su autorización y consentimiento para la participación del estudiante que usted representa en el proyecto de investigación *Acercamiento al concepto de función por medio del aprendizaje basado en proyectos: armemos la bicicleta y aprendamos matemáticas*, que actualmente está desarrollando Jairo Andrés Rojas Patarroyo en el marco de su trabajo de grado para optar por el título de licenciado en matemáticas. Dicho proyecto está bajo la supervisión del profesor Dr. Francisco Javier Camelo, en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, y su objetivo gira en torno a “generar un ambiente de aula que posibilite el trabajo colectivo, por medio de la modelación matemática y el aprendizaje basado en proyectos, que dé cuenta de las concepciones generadas en el proceso de la noción de función”.

La participación de los estudiantes será voluntaria y se dará en la medida en que se incorporen en la creación de un ambiente de aula que pretende modelar asuntos relacionados con la bicicleta. Los estudiantes que así lo deseen se podrán retirar en cualquier momento sin ninguna dificultad. Durante tal ambiente de aula, se espera que los estudiantes sean filmados y fotografiados; además de participar en algunas entrevistas sobre sus procedimientos en la actividad que se orienta. Sus producciones escritas serán también analizadas con la intención de dar cuenta de asuntos relacionados con el objetivo del proyecto.

Todas las actividades se desarrollarán en el horario de clases previsto por el colegio y en los espacios que habitualmente se asignan para ello. En ningún caso, los estudiantes deberán realizar actividades extracurriculares.

Los videos, fotografías, audios y demás materiales físicos que se recolecten durante el proyecto serán utilizados solo con fines académicos en el informe final del trabajo de grado y en artículos, ponencias y actividades que se deriven de la divulgación del mismo y de sus resultados. En caso de que el material sea usado, se mantendrá la confidencialidad y se presentará de manera anónima para proteger la identidad de los jóvenes.

El proyecto, su desarrollo y sus resultados serán informados al colegio de manera permanente al profesor Wilson Yesid Perilla, quien además estará orientando las actividades que Jairo Andrés Rojas Patarroyo irá diseñando. Se espera que esta información pueda ser usada para complejizar y reflexionar los procesos que sobre el aprendizaje de las matemáticas se desarrollan en el colegio.

En caso de presentarse dudas en cualquier momento de la investigación o requerir información sobre la misma, podrá contarse con Jairo Andrés Rojas Patarroyo, al correo dma\_jrojas815@pedagogica.edu.co, o al móvil 3112590295; asimismo, puede comunicarse con Francisco Javier Camelo al correo fjcamelob@pedagogica.edu.co, o al móvil 315 667 8397; o con los encargados en el colegio a través de los canales que habitualmente se usan.

Agradeciendo su atención,

---

**Jairo Andrés Rojas Patarroyo**

Autor trabajo de grado

Teléfono: 3112590295

dma\_jrojas815@pedagogica.edu.co

---

**Dr. Francisco Javier Camelo**

Supervisor del trabajo de grado

Teléfono: 3156678397

fjcamelob@pedagogica.edu.co

Docente ejecutor de la Institución: Wilson Yesid Perilla Triana

Colegio Alejandro Obregón (IED)

Universidad Pedagógica Nacional

\*Se adjunta formato de consentimiento informado.

Formato de consentimiento informado

Yo \_\_\_\_\_, identificado(a) con la cédula de ciudadanía número \_\_\_\_\_, en calidad de representante legal del estudiante \_\_\_\_\_, identificado con el número de documento \_\_\_\_\_, deseo manifestar a través de este

documento que fuimos informados suficientemente y comprendemos la justificación, los objetivos, los procedimientos y las posibles molestias y beneficios implicados en la participación del estudiante en el proyecto de investigación *Acercamiento al concepto de función por medio del aprendizaje basado en proyectos: armemos la bicicleta y aprendamos matemáticas*, que se describe a continuación:

Equipo de investigación

El equipo lo conforman Jairo Andrés Rojas Patarroyo, de la Universidad Pedagógica Nacional. El docente quien ejecuta el proyecto es Wilson Yesid Perilla.

En constancia de lo anterior, firmamos el presente documento, en la ciudad de \_\_\_\_\_, el día \_\_\_\_\_ del mes \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

**Firma** \_\_\_\_\_  
**Nombre** \_\_\_\_\_ **C. C.**  
**No.** \_\_\_\_\_ **de** \_\_\_\_\_

**Firma:** \_\_\_\_\_  
**Nombre** \_\_\_\_\_ **C. C.**  
**No.** \_\_\_\_\_ **de** \_\_\_\_\_

## Anexo 2. Ficha técnica situación 1

| Situación 1: presentación del proyecto |  |
|--|--|
| Autor: Jairo Andrés Rojas              |  |
| Duración: 120 minutos                  | Número de personas por grupo: 3  |
| Recursos                               | <a href="https://www.youtube.com/watch?v=ZUsavhpMY2Q">https://www.youtube.com/watch?v=ZUsavhpMY2Q</a><br><a href="https://www.youtube.com/watch?v=7XqqIv54hwE">https://www.youtube.com/watch?v=7XqqIv54hwE</a><br><a href="https://www.youtube.com/watch?v=ldhjBCGxSok">https://www.youtube.com/watch?v=ldhjBCGxSok</a><br><a href="https://www.youtube.com/watch?v=UAckkwE15ZA">https://www.youtube.com/watch?v=UAckkwE15ZA</a> |
| Fase de modelación                     | Fase de exploración y observación  |
| Objetivo                               | Creación de grupos y presentación de la temática   |

| <b>Momentos</b> | <b>Duración</b> | <b>Descripción</b>  |
|-----------------|-----------------|---|
| Momento 1       | 10 min          | Presentación del profesor en formación y la dinámica que se llevará a cabo durante las siguientes tres semanas (comienza la clase haciendo una breve socialización del tema a tratar motivándolos a proponer problemas que se puedan trabajar). |
| Momento 2       | 20 min          | Socialización del proyecto, con lo que se busca conectar el “afuera del aula” con el “adentro del aula”.  |

|                         |        |  |
|-------------------------|--------|--|
| Momento 3               | 40 min | Proyección de los videos para fomentar el interés sobre la bicicleta y las modalidades de uso. Durante este momento, tendrán que pensar en quiénes conforman cada grupo. |
| Momento 4               | 30 min | Espacio de socialización de preguntas que problematizan el uso de la bicicleta en diferentes contextos.  |
| Momento 5               | 20 min | Presentación de los grupos.  |
| Criterios de valoración |        | Participación en el espacio de socialización.  |



## Anexo 3. Ficha técnica situación 2

| Situación 2: selección de la modalidad |   |
|--|---|
| Autor: Jairo Andrés Rojas              |   |
| Duración: 120 minutos                  | Número de personas por grupo: 3   |
| Recursos                               | Bike 3D Configurator (aplicación gratuita)  |
| Fase de modelación                     | Delimitación del problema   |
| Objetivo                               | Delimitar el problema y seleccionar la modalidad de lo que cada grupo podría profundizar sobre la bicicleta |

| <b>Momentos</b> | <b>Duración</b> | <b>Descripción</b>   |
|-----------------|-----------------|--|
| Momento 1       | 20 min          | Se socializa la aplicación propuesta por el autor. Se indica que les puede servir para modificar un tipo de bicicleta en algunos grupos (MTB). |
| Momento 2       | 30 min          | Socializar en qué les puede servir el uso de las aplicaciones y en qué temas podrían profundizar si se utilizan las aplicaciones.              |
| Momento 3       | 20 min          | Espacio de socialización de los problemas escogidos por los grupos. Escoger una modalidad de bicicleta y un tipo de problema a estudiar.       |
| Momento 4       | 30 min          | Trabajo grupal dedicado a investigar la modalidad escogida.  |

|                         |        |   |
|-------------------------|--------|---|
| Momento 5               | 20 min | Discusión con cada grupo para enfocar los esfuerzos y obtener una base de datos y un problema que pueda ser modelado. |
| Criterios de evaluación |        | Participación en el espacio de socialización y planteamiento de los proyectos.  |

## Anexo 4. Ficha técnica situación 3

| Situación 3: selección de la modalidad |  |                    |
|--|--|--------------------|
| Autor: Jairo Andrés Rojas              |  |                    |
| Duración: 120 minutos                  | Número de personas por grupo: 3  |                    |
| Recursos                               | Bike Fit (aplicación que permite modificar las medidas de la bicicleta según la talla del usuario) |                    |
| Fase de modelación                     | Delimitación del problema  |                    |
| Objetivo                               | Delimitar el problema y seleccionar la modalidad de lo que podría profundizar sobre la bicicleta   |                    |
| <b>Momentos</b>                        | <b>Duración</b>  | <b>Descripción</b> |

|           |        |   |
|-----------|--------|---|
| Momento 1 | 30 min | Se socializa una segunda aplicación que les puede servir para calcular las medidas adecuadas de una bicicleta según las medidas corporales.         |
| Momento 2 | 20 min | Socializar en qué les puede servir el uso de cada aplicación y en lo que podrían profundizar si se utilizan las aplicaciones.                       |
| Momento 3 | 30 min | Espacio de socialización de los problemas escogidos por los grupos. Verificación de fuentes de información por parte de los docentes en cada grupo. |

|                         |        |  |
|-------------------------|--------|--|
| Momento 4               | 20 min | Trabajo grupal seleccionando la mejor información para construir una base de datos sólida sobre la modalidad escogida. |
| Momento 5               | 20 min | Discusión con cada grupo para socializar el problema a modelar.  |
| Criterios de evaluación |        | Participación en el espacio de socialización y avance en el proyecto.  |

## Anexo 5. Ficha técnica situación 4

| Situación 4: presentación de los modelos |   |             |
|--|---|-------------|
| Autor:                                   |   |             |
| Duración: 120 minutos                    | Número de personas por grupo: 3   |             |
| Recursos                                 | Presentación de la primera versión de los modelos al realizar una exposición grupal           |             |
| Fase de modelación                       | Fase de evaluación y validación   |             |
| Objetivo                                 | Socializar los diferentes enfoques y modelos que están trabajando los grupos en los proyectos |             |
| Momentos                                 | Duración  | Descripción |

|                         |        |  |
|-------------------------|--------|--|
| Momento 1               | 70 min | Se socializa el avance de cada grupo y la propuesta de modelo que tienen en cada proyecto. |
| Momento 2               | 30 min | Espacio de socialización de los problemas escogidos por los grupos.                        |
| Momento 3               | 20 min | Valoración de los proyectos y sugerencias a tener en cuenta.                               |
| Criterios de evaluación |        | Participación en el espacio de socialización.  |

## Anexo 6. Ficha técnica situación 5

| Situación 5: presentación del contenido pragmático |  |  |
|--|--|--|
| Autor:   |  |  |
| Duración: 120 minutos                              | Número de personas por grupo: 3  |  |
| Recursos   | Por medio de los modelos planteados, generar un espacio de discusión donde se perciba la noción de función       |  |
| Fase de modelación                                 | Fase de conexión con otros modelos y situaciones   |  |
| Objetivo   | Identificar las percepciones sobre la noción de función después de trabajar en los proyectos y modelar sus ideas |  |
| Momentos   | Duración   | Descripción  |
| Momento 1  | 20 min   | Presentación de un ejemplo de modelo realizado que involucre el concepto de función. |
| Momento 2  | 20 min   | Socialización de preguntas.  |
| Momento 3  | 30 min   | Espacios para mejoras y avances del modelo de cada grupo acompañado del docente.     |
| Momento 4  | 50 min   | Integrar cada modelo con el concepto de función.                                     |
| Criterios de evaluación                            |  | Participación en el espacio de socialización.  |

## Anexo 7. Ficha técnica situación 6

| Situación 6: exposición de resultados |   |  |
|---------------------------------------|---|--|
| Autor:                                |   |  |
| Duración: 120 minutos                 | Número de personas por grupo: 3   |  |
| Recursos                              | Exponen los proyectos y los alcances de cada grupo de trabajo                           |  |
| Fase de modelación                    | Fase de evaluación y modificación del modelo  |  |
| Objetivo                              | Según los alcances obtenidos por los estudiantes, realizar la valoración de los modelos |  |
| <b>Momentos</b>                       | <b>Duración</b>   | <b>Descripción</b>                     |
| Momento 1                             | 30 min  | Exposición de resultados.              |
| Momento 2                             | 40 min  | Sugerencias en los modelos planteados. |
| Momento 3                             | 50 min  | Valoración de los proyectos.           |
| Criterios de evaluación               | Valoración de cada modelo y el proceso que se llevó a cabo durante las sesiones.        |  |