

INTERPRETAR LA GEOMETRÍA DE EUCLIDES CON BASE EN LA MÉTRICA DEL MÁXIMO

Fredy Alexander Chaves Barbosa

Michael Stiven Pinzón Rodriguez

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C

2018

INTERPRETAR LA GEOMETRÍA DE EUCLIDES CON BASE EN LA MÉTRICA DEL MÁXIMO

Fredy Alexander Chaves Barbosa

CC: 1018457614

Código: 2013240016

Michael Stiven Pinzón Rodríguez

CC: 1075676568

Código: 2013240055

Trabajo de grado asociado al interés del estudiante

Para optar al título de:

Licenciado en matemáticas

Asesor: Alberto Donado Nuñez.

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C

2018

Agradecimientos


*A mis padres Fernando y Miryam,
y a mis hermanas, por su cariño,
compañía, apoyo y esfuerzo
incondicional.*
Michael.

*A mis padres Alfonso y Yorma,
por sus consejos, apoyo constante,
motivación y ejemplo de perseverancia
para cumplir las metas propuestas.*
Alexander.

*Al profesor Alberto Donado
por su tiempo, dedicación
y conocimiento, que nos
permitió construir este
trabajo de grado.*

*A Santiago Arias y Rafael Téllez
porque con ellos se inició la
construcción del tema
tratado en este documento.*


Michael y Alexander.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Realizando la Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 4	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Interpretar la geometría de Euclides con base en la métrica del máximo.
Autor(es)	Chaves Barbosa, Fredy Alexander; Pinzón Rodríguez, Michael Stiven.
Director	Donado Núñez, Alberto.
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2018. p.97
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	MÉTRICA, DISTANCIA, MÁXIMO, EXPLORACIÓN Y GEOMETRÍA.

2. Descripción
<p>Este trabajo de grado se dirige a profesores de matemáticas que tengan interés en enseñar, en sus aulas de clase, el concepto de distancia desde una perspectiva distinta a la usual, aquí se encuentran nuevas formas de objetos geométricos, sus definiciones reinterpretadas bajo la métrica del máximo y sus justificaciones pertinentes. Los elementos geométricos abordados en esta monografía son entre otros: interestancia, segmento, rayo, recta, rayo opuesto, punto medio, mediatriz, congruencia entre segmentos. Además, se identifican las propiedades que cada elemento mantiene o modifica, también se encuentran algunos objetos, teoremas o propiedades que no adquieren una particularidad bajo dicha métrica con su debida justificación y que por consiguiente no adquieren una forma fija, sin embargo, se pueden utilizar también en las clases ya que se identificarían características y se lograría conducir a los estudiantes a diseñar y corroborar conjeturas.</p>

3. Fuentes
<p>García, M. Ramírez, T. (S.F). Relaciones de equivalencia. Recuperado de: https://ocw.ehu.eus/file.php/133/algebra/tema1apto3.pdf</p> <p>Ministerio de Educación Nacional., (1998), Lineamientos curriculares de matemáticas. Bogotá D.C, Colombia.</p> <p>Moise, E., (1963). Elementary feometry from an Advanced Standpoint. Estados Unidos de América: The Book Company.</p> <p>Morris, S. (2010). Topología sin dolor. Recuperado de:http://www.topologywithouttears.net/topbookspanish.pdf</p> <p>Samper, C., Molina, O., Echeverry, A., (2013). Elementos de Geometría. Bogotá D.C, Colombia:</p>

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Realizando la Pedagogía</small>	FORMATO	
RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE		
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 4	

Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Molina, O., (2013). Geometría plana, un espacio de aprendizaje. Bogotá D.C, Colombia:

Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. (2012). Matemáticas para el cálculo. Recuperado de: http://190.90.112.209/precalculo_-_matematicas_para_el_calculo-1.pdf

4. Contenidos

El trabajo de grado se divide en cinco capítulos:

En el primero, se seleccionan las definiciones, postulados y teoremas de la geometría Euclidiana, además de algunas propiedades de los números reales necesarios en el desarrollo del trabajo de grado al momento de realizar algunas demostraciones formales. En este capítulo también se encuentra la definición formal de la métrica en cuestión y también la forma de la *bola abierta* encontrada para esta distancia.


En el segundo capítulo se realiza el estudio de los objetos geométricos segmento, rayo, rayo opuesto, recta, ángulo y triángulo, bajo la definición de la métrica del máximo. Cada objeto matemático tiene su respectiva justificación sobre el porqué funciona o por qué no, se pueden abordar bajo la métrica del máximo.

El tercer capítulo consta algunos teoremas y propiedades que se estudian a partir de la definición de la métrica del máximo. Estos teoremas y propiedades son seleccionados principalmente de dos libros de geometría: *Geometría plana* de Carmen Samper y Oscar Molina (2013), y *Elementary feometry from an Advanced Standpoint* de Edwin Moise (1963).

En el cuarto capítulo se realiza el estudio de la congruencia entre segmentos, presentando la justificación correspondiente sobre la relación de equivalencia que debe cumplir la congruencia, el segmento representante, el conjunto cociente y dos teoremas, seleccionados también del libro de Moise, E. (1963).

En el quinto y último capítulo se realiza el estudio de dos definiciones relacionadas con los elementos geométricos ya trabajados en el capítulo 2, estos son, el punto medio y la mediatriz. Dichos elementos se presentan en una sección diferente ya que, en Moise, E. (1963) estas definiciones se encuentran después de abordar la congruencia de segmentos en un capítulo diferente.

Es importante mencionar que, cada situación cuenta con un enlace de GeoGebra en el que el lector puede encontrar la construcción realizada para cada objeto, con el fin de que puede explorar y verificar los resultados presentados para cada uno.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO	
RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE		
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 4	

5. Metodología

El trabajo de grado se realiza, en un primer momento, haciendo una revisión de los conceptos básicos de la geometría, con el fin de comprender las propiedades de cada uno de ellos, y así poder interpretarlas a partir de la definición de métrica del máximo.

La exploración fue la estrategia que se utilizó, para iniciar el reconocimiento de la forma que adquieren los objetos geométricos bajo la definición de la métrica del máximo; dicha exploración permitió que, los nuevos elementos estudiados se determinaran de manera más práctica, ya que en la mayoría de ocasiones se basaron en los elementos previamente construidos. Además, al hacer uso de la herramienta tecnológica GeoGebra, los resultados se obtenían con mayor fiabilidad y así mismo se podían demostrar a partir de teoremas, definiciones y postulados de la geometría usual de manera más exacta. Esta herramienta tecnológica permite evidenciar de manera más precisa la validez de la definición de interestancia, ya que con la opción “vista - hoja de cálculo” se podía verificar dicha propiedad geométrica, ubicando los puntos en diferentes lugares del plano.


Se seleccionaron algunos teoremas y propiedades, por la relación que tienen con los objetos reinterpretados de la geometría Euclidea, en ocasiones no es posible llevar el mismo orden de construcción que se presenta en los libros de esta área, ya que existen elementos, como por ejemplo la recta, que, bajo la métrica del máximo, dependen tanto del segmento como del rayo, en cambio en la geometría usual la recta es un objeto no definido.

Las demostraciones formales de la existencia de elementos y cumplimiento de propiedades son, en algunos casos, extensas. Es por esto que se presenta su debida explicación, justificación formal y además un enlace de GeoGebra que posiblemente ayudará a comprender mejor la demostración.

6. Conclusiones

El estudio del segmento bajo la métrica del máximo, muestra que adquiere dos representaciones (un segmento usual y un cuadrilátero) que dependen de 3 diferentes ubicaciones del punto B , esto muestra una diferencia importante en comparación a la métrica usual, ya que se pasa de tener un solo tipo de representación de segmentos a tener tres; además el hecho de encontrar tres casos de segmentos obligó inmediatamente a los demás objetos geométricos (rayo, rayos opuestos, recta) a tener, también, tres casos distintos.

Al estudiar la congruencia de segmentos generados por la métrica del máximo, se demuestra que la congruencia es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva), a partir de esto se encuentra el representante de todos los segmentos, el conjunto cociente y se elaboran instrucciones que pueden llevar de un segmento en cualquier posición del plano a su representante y del representante al conjunto

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Realizando lo posible</i>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 4 de 4	

de congruencias.

Luego, al estudiar la definición de punto medio y mediatriz de un segmento se encuentra que, como se mencionó anteriormente, en el caso 1 del segmento del máximo, el punto medio y la mediatriz tienen la misma representación de la métrica usual. Ahora, para los casos II y III, en el punto medio se determina un segmento de la métrica usual y para la mediatriz se determina un segmento unido con dos rayos de la geometría usual.

Realizar este tipo de trabajos y explorar las distintas métricas existentes, puede ser de ayuda para comprender de manera más profunda el significado de distancia, ya que, al interpretar las cosas de manera no usual, se genera una motivación y un interés por descubrir las diferentes formas que adquieren los objetos si no se definen de manera convencional.

Se debe observar que, de una definición, bajo dos métricas distintas, se obtienen diferentes objetos geométricos, esto quiere decir que, si a una misma definición se le aplican diferentes métricas, entre las tantas que existen, se pueden obtener una gran cantidad de formas diferentes.

Por último, se debe mencionar y sugerir que, el trabajo de reinterpretar la geometría de Euclides, a partir de la métrica del máximo, abre una nueva ventana para explorar, interpretar y representar los elementos de la geometría del espacio o también identificar cuál sería la representación y las características de las secciones cónicas, que se obtienen a partir de la métrica del máximo.

Elaborado por:	Chaves Barbosa, Fredy Alexander; Pinzón Rodríguez, Michael Stiven.
Revisado por:	Donado Núñez, Alberto.

Fecha de elaboración del Resumen:	27	04	2018
--	----	----	------

Índice

Introducción	1
Justificación	3
Objetivos	4
1. Marco Conceptual	5
1.1. Definiciones	5
1.2. Postulados	7
1.3. Teoremas	8
1.4. Espacios métricos	11
1.5. Métrica del máximo	13
1.6. Bola abierta con respecto a la métrica del máximo	16
2. Definiciones y postulados de la geometría Euclidea estudiados desde la métrica del máximo.	19
2.1. Segmento en la métrica del máximo	19
2.2. Casos de segmento en la métrica del máximo	23
2.3. Rayo en la métrica del máximo	33
2.4. Casos de rayo en la métrica del máximo	35
2.5. Rayo opuesto en la métrica del máximo	44
2.6. Recta en la métrica del máximo	46
2.6.1. Sistema de coordenadas	48
2.7. Ángulo en la métrica del máximo	50
2.8. Triángulo en la métrica del máximo	53
3. Teoremas relacionados con interestancia segmentos, rayos, rectas y ángulos.	56
3.1. Interestancia	56
3.1.1. Teorema A1	56
3.1.2. Teorema A2	57
3.1.3. Teorema A3	58
3.1.4. Teorema A4	59
3.1.5. Teorema A5	60
3.1.6. Propiedades interestancia	60

3.2. Segmentos, rayos y ángulos	63
3.2.1. Teorema A6	63
3.2.2. Propiedad R1	63
3.2.3. Propiedad R2	64
3.3. Rectas	64
3.3.1. Intersección de rectas	64
3.3.2. Rectas perpendiculares	66
3.3.3. Rectas paralelas	66
4. Congruencia de segmentos en la métrica del máximo	69
4.1. Congruencia de segmentos	71
4.2. Representante de la congruencia	73
4.3. Conjunto cociente de la congruencia	74
4.3.1. Del segmento al representante	74
4.3.2. Del representante al conjunto de segmentos congruentes	76
4.4. Teorema adición	77
4.5. Teorema sustracción	79
5. Punto medio y mediatriz	81
5.1. Punto medio en la métrica del máximo	81
5.2. Mediatriz en la métrica del máximo	85
Conclusiones	94
Bibliografía	97

Índice de cuadros

1.	Pasos de la construcción del \overline{AB}_∞	24
2.	Demostración caso i del \overline{AB}_∞	26
3.	Demostración a.1 caso ii del \overline{AB}_∞	29
4.	Demostración a.2 caso ii del \overline{AB}_∞	30
5.	Demostración b caso ii del \overline{AB}_∞	31
6.	Demostración caso iii del \overline{AB}_∞	32
7.	Pasos de la construcción del rayo AB_∞	35
8.	Demostración caso i del del rayo AB_∞	37
9.	Demostración a caso ii del rayo AB_∞	41
10.	Demostración b caso ii del rayo AB_∞	42
11.	Demostración caso iii del rayo AB_∞	43
12.	Demostración intersección rectas paralelas	67
13.	Planteamiento demostración punto medio del máximo	83
14.	Demostración a caso III punto medio del máximo	84
15.	Demostración b caso III punto medio del máximo	84
16.	Demostración c caso III punto medio del máximo	85
17.	Planteamiento demostración parte a mediatriz del máximo.	88
18.	Demostración parte a.1 caso II mediatriz del máximo	90
19.	Demostración parte b.1 caso II mediatriz del máximo	90
20.	Demostración parte c.1 caso II mediatriz del máximo	91
21.	Planteamiento demostracion parte b mediatriz del máximo.	91
22.	Demostración parte b caso II mediatriz del máximo	92

Introducción

El presente trabajo de grado involucra definiciones, postulados y teoremas de la geometría de Euclides abordados, no de la forma usual, sino a partir de la definición de la métrica del máximo. Para su realización, en un primer momento se hace una recolección de los objetos geométricos junto con sus características, y las propiedades fundamentales y básicas de la métrica del máximo. En este trabajo, se tienen en cuenta, principalmente, dos libros, el primero es el utilizado en los cursos de geometría de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional: Geometría Plana de Carmen Samper y Oscar Molina (2013); y el segundo Elementary Geometry from an Advanced Standpoint de Edwin E. Moise (1963).

En un segundo momento se realiza una exploración de los objetos geométricos básicos, como lo son la interestancia y el segmento; luego, teniendo estos objetos geométricos como base, se interpretan de manera formal algunos elementos de la geometría de Euclides bajo la definición de la métrica del máximo. Una herramienta fundamental en el desarrollo de esta monografía es el software GeoGebra, en el cual se exploran y se corroboran los resultados de cada elemento tratado; en la mayoría de secciones se encuentran enlaces de esta aplicación, en los cuales se presentan las construcciones de diferentes objetos trabajados, el lector puede explorar y confirmar las conjeturas que se realizan acerca de dichos objetos.

Para identificar la nueva forma de los objetos, bajo la métrica del máximo, se realiza una exploración detallada siguiendo la definición de distancia del máximo e ir justificando cada particularidad encontrada, esto, con los elementos que proporciona la geometría plana y las propiedades de los números reales. Las exploraciones, en cierto punto dejan de mostrarse, pues los procesos llevados a cabo para encontrar las formas de los objetos geométricos son similares en la mayoría de los casos.

A partir de la definición de interestancia, se realiza la construcción de segmento, obteniendo tres casos diferentes, dependiendo de la ubicación de los puntos A y B , de estos tres casos, dos están justificados formalmente y el tercero se presenta como analogía del segundo. Los rayos y las rectas surgen a partir de la definición de segmento, por lo tanto, también se encuentran tres tipos de rayos y tres de rectas, junto con sus respectivas justificaciones que se presentan de manera similar a las del segmento.

Por el cambio en las representaciones, al hacer la reinterpretación correspondiente de las defini-

ciones, se encuentran elementos geométricos en los cuáles no se cumplen las mismas características y propiedades que en la métrica usual, un ejemplo de ello es el ángulo; para este objeto, no fue posible establecer algún número real, tal que este represente la medida del ángulo. Cuando esto ocurre en la presente monografía, se realiza la respectiva justificación del porqué se considera que no es posible trabajarlo bajo la distancia del máximo.

Moise, E. (1963), en su libro presenta propiedades y teoremas sobre la geometría, de ellos se seleccionan los relacionados con los objetos contruidos por medio de la exploración y se interpretan bajo la métrica del máximo, para establecer si se satisfacen o no dichas conjeturas y porqué. También se tuvieron en cuenta algunas definiciones y teoremas estudiados en el libro Geometría Plana de Samper, C. y Molina, J. (2013) realizando el mismo proceso de verificación de propiedades, determinando si se cumple o no bajo la métrica del máximo.

Justificación

El presente trabajo de grado surge del interés de interpretar la definición de distancia de una manera diferente a la usual, en este caso se abordan los conceptos básicos de la geometría como lo son: interestancia, segmento, rayo recta, rayo opuesto, ángulo, punto medio y mediatriz bajo la métrica del máximo; para realizar la identificación de las propiedades de cada concepto que se mantienen o se modifican al ser abordados de una manera no convencional.

La importancia de este trabajo de grado radica en que no existe documentación suficiente sobre una manera distinta de ver el concepto de distancia; es por esto que la presente monografía proporciona ideas y herramientas a los profesores de matemáticas para que a partir de esta información se indague y se realice probablemente una planeación distinta y novedosa para abordar este tema en el aula.

Además de lo anterior, al tener que ser minuciosos con las definiciones de cada objeto geométrico para abordarlo de manera diferente, se considera que el empeño por comprender cada concepto debe ser mayor, que al ser trabajado de la manera usual, lo cuál genera un mayor entendimiento por parte de los alumnos; ya que se encontrarán distintas representaciones, con diferencias significativas respecto a lo trabajado por ellos a lo largo de su trayecto en la escuela; aportando así al desarrollo de los pensamientos espacial y métrico determinados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

Objetivos

A continuación, se presentan los objetivos para el desarrollo de la presente monografía. Se trabaja bajo un objetivo general y seis objetivos específicos:

Objetivo General

Elaborar un documento en el que se describa y justifique la forma que adquieren algunos de los objetos de la geometría de Euclides junto con las características que se mantienen y se modifican al abordarlos bajo la métrica del máximo.

Objetivos Específicos

- Hacer una revisión conceptual de la geometría de Euclides
- Estudiar la métrica del máximo.
- Interpretar los objetos geométricos usuales desde la perspectiva de la métrica del máximo.
- Determinar conjeturas acerca de los objetos geométricos construidos.
- Demostrar las conjeturas que surjan del objeto matemático.
- Generar representaciones gráficas y simbólicas de los objetos geométricos construidos

1. Marco Conceptual

La siguiente lista de objetos matemáticos corresponde a los elementos sobre los cuales se trabaja la métrica del máximo en este trabajo de grado. Aquí se presentan, en su mayoría: definiciones, postulados y teoremas abordados en los primeros semestres de la Licenciatura en Matemáticas en la línea de Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional (U.P.N.) La información aquí contenida, proviene principalmente, del libro *Geometría plana, un espacio de aprendizaje* de los profesores Carmen Samper y Oscar Molina (2013) y del libro *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint* de Edwin E. Moise (1963).

1.1. Definiciones

1. **Ángulos congruentes:** Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.
2. **Ángulos opuestos por el vértice:** Dos ángulos son opuestos por el vértice si sus lados determinan dos pares de rayos opuestos.
3. **Circunferencia:** Dado un punto P en un plano β . El conjunto de todos los puntos X del plano β que equidistan del punto P una distancia r recibe el nombre de circunferencia. El punto P es el centro de la circunferencia. Para referirnos a la circunferencia con centro P se usará la notación $\odot P$.
4. **Distancia:** El número real asignado a dos puntos (A, B) se llama la distancia entre los puntos $(d(A, B))$.
5. **Interestancia:** El punto B esta entre los puntos A y C si
 - i) A, B y C son colineales
 - ii) $AB + BC = AC$
6. **Mediatriz:** Dado \overline{PQ} . En un plano, la mediatriz del \overline{PQ} es la recta perpendicular al segmento que contiene su punto medio.
7. **Paralelismo:** Dos rectas son paralelas si son coplanares y no se intersecan (no tienen puntos en común).
8. **Punto medio de un segmento:** M es punto medio del \overline{AB} si se cumplen las siguientes condiciones:
 - i) $A - M - B$
 - ii) $AM = MB$

9. **Rayo:** Dados dos puntos de una recta A y B , el rayo AB (que se denota \overrightarrow{AB}) es la unión del \overline{AB} con el conjunto de puntos X de la recta para los cuales B está entre A y X .
10. **Rayo opuesto:** Dados dos rayos \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{BC} , estos son opuestos si y solo si $A - B - C$.
11. **Rectángulo:** Un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos es un rectángulo.
12. **Segmento:** Dados dos puntos A y B , el segmento AB (que se denota con \overline{AB}) es la unión de los puntos A y B con todos los puntos que están entre A y B .
13. **Segmentos congruentes:** Dados \overline{AB} y \overline{CD} , $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ si y solo si $AB = CD$.
14. **Triángulo:** Dados tres puntos no colineales, un triángulo es la unión de los segmentos cuyos extremos son dichos puntos.
15. **Triángulo equilátero:** Un triángulo es equilátero si todos sus lados son congruentes.
16. **Triángulo isósceles:** Un triángulo es isósceles si tiene dos lados congruentes.
17. **Triángulos congruentes:** Dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre los vértices de tal forma que los ángulos y los lados correspondientes son congruentes.

(Samper y Molina, 2013)

(Samper, Echeverry y Molina, 2013)

18. **Ángulo:** Un ángulo es una figura que es la unión de dos rayos que tienen el mismo origen, pero que no están en la misma recta. Si el ángulo es la unión de \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} , entonces estos rayos son llamados, los *lados* del ángulo; el punto A es llamado *vértice* y el ángulo es denotado con el símbolo: $\angle BAC$
19. **Triángulo:** Si A , B y C son tres puntos no colineales, entonces el conjunto $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$ es llamado *triángulo*.
20. **Sistema de coordenadas:** Sea $f : l \leftrightarrow \mathbb{R}$ una correspondencia uno a uno entre la recta l y los números reales. Si para todos los puntos P, Q de l se tiene:

$$PQ = |f(P) - f(Q)|,$$

Entonces f es un sistema de coordenadas de l . Para cada punto P de l , el número $x = f(P)$ es llamado la coordenada de P .

21. **Relación de equivalencia:** Sea A un conjunto. Una relación de equivalencia definida en A es una relación binaria de A que verifica las tres propiedades siguientes:

Reflexiva: $a \sim a$ para todo $a \in A$.

Simétrica: $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$ $a, b \in A$.

Transitiva: $a \sim b$ y $b \sim c \rightarrow a \sim c$ $a, b, c \in A$.

22. **Clase de equivalencia:** Sea A un conjunto y \sim una relación de equivalencia sobre A . Para cada $a \in A$ se llama clase de equivalencia de a , y se denotará por \bar{a} o por $[a]$, al siguiente conjunto:

$$\bar{a} = [a] = \{b \in A \mid a \sim b\}$$

23. **Representantes de la relación:** Sea A un conjunto y \sim una relación de equivalencia en A . un sistema completo de representantes de la relación \sim es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que cualquier elemento de A esta relacionado con exactamente un elemento de X .

24. **Conjunto cociente:** Dado un conjunto A y \sim una relación de equivalencia sobre A , al conjunto A/\sim formado por las clases de equivalencia se le llama conjunto cociente, esto es

$$A/\sim = \bar{A} = \{\bar{a} \mid a \in A\}$$

(García y Ramírez, S.F)

1.2. Postulados

1. **Ángulo - número:** A cada ángulo le corresponde un único número real entre 0 y 180.
2. **Dos puntos - recta:** Si A y B son dos puntos entonces existe una única recta m que los contiene.
3. **Existencia:** Los puntos, las rectas y los planos existen.

4. **Paralelas:** Dada una recta l y un punto P , tal que $P \notin l$. Entonces existe una única recta m tal que $P \in m$ y $m \parallel l$.

(Samper y Molina, 2013)

5. **De la regla:** Cada recta tiene un sistema de coordenadas.

(Moise, 1996)

1.3. Teoremas

1. **Ángulos desiguales - Lados desiguales:** Dado el $\triangle ABC$, si $m\angle ABC > m\angle ACB$ entonces $AC > AB$
2. **Ángulo opuestos por el vértice:** Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son congruentes.
3. **Condiciones para paralelogramo:** Si en un cuadrilátero
 - i) ambos pares de lados opuestos son congruentes, o
 - ii) ambos pares de ángulos opuestos son congruentes, o
 - iii) las diagonales se bisecan, o
 - iv) un par de lados son paralelos y congruentes,entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
4. **Conjunto no vacío:** Los segmentos y los rayos son conjuntos no vacíos de puntos.
5. **T. construcción de ángulos:** Sean un \overrightarrow{AB} en un plano α y un número real r tal que, $0 < r < 180$. Entonces existe un único \overrightarrow{AD} tal que D está en alguno de los semiplanos determinados por \overleftrightarrow{AB} en α y $m\angle DAB = r$.
6. **Cuatro ángulos rectos:** Si dos rectas son perpendiculares, entonces se determinan cuatro ángulos rectos.
7. **Existencia de paralela:** Dada una recta l y un punto P tal que $P \notin l$. Entonces existe una recta m tal que $m \parallel l$ y $P \in m$
8. **Existencia del punto medio:** Todo segmento tiene un punto medio.

9. **Existencia perpendicular punto externo:** Por un punto externo a una recta dada existe una recta perpendicular a dicha recta.
10. **Existencia rayo opuesto:** Dado \overrightarrow{BA} , existe un \overrightarrow{BC} opuesto a \overrightarrow{BA} .
11. **Intersección de rectas:** Si dos rectas distintas, m y l se intersecan entonces su intersección es un único punto.
12. **Perpendicularidad - paralelismo:** Si dos rectas son perpendiculares a una misma recta y son coplanares, entonces estas dos rectas son paralelas entre si.
13. **Punto a un lado:** Sean A y B dos punto. Existe un punto C tal que $A - B - C$.
14. **Punto medio:** Si M es punto medio de \overline{CD} , entonces la mitad de la medida de \overline{CD} es igual a la distancia de C o D a M .
15. **Triángulo isósceles:** si $\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ entonces $\angle A \cong \angle C$
16. **Recíproco del triángulo isósceles:** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes entonces los lados opuestos a ellos son congruentes.
17. **T. Suma de medidas de ángulos en triángulo:** Para todo triángulo se tiene que la suma de las medidas de los ángulos es 180.

(Samper y Molina, 2013)

Propiedades de los números reales

A continuación, se presentan algunas propiedades y definiciones de los números reales que son utilizadas en las demostraciones realizadas en el presente trabajo.

Propiedad conmutativa

1. $a + b = b + a$
2. $ab = ba$

Propiedad asociativa

3. $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. $(ab)c = a(bc)$

Propiedad distributiva

5. $a(b + c) = ab + ac$

6. $(b + c)a = ab + bc$

Valor absoluto

Definición: Si a es un número real, entonces el valor absoluto de a es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Propiedades de valor absoluto

7. $|a| \geq 0$

8. $|a| = |-a|$

9. $|ab| = |a| |b|$

10. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

Desigualdades y valor absoluto

11. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

12. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

13. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ca < cb$.

14. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ca > cb$.

15. Si $a > 0$, entonces

$|x| = a$ significa que $x = a$ o $x = -a$.

$|x| < a$ significa que $-a < x < a$.

$|x| > a$ significa que $x > a$ o $x < -a$

(Stewart et al, 2012)

1.4. Espacios métricos

Distancias y espacios métricos:

Definición de Distancia: Dado un conjunto X , una distancia es una aplicación $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada par $(x, y) \in X \times X$ le asocia un número real $d(x, y)$ que cumple con las siguientes condiciones:

- i) $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$
- ii) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X$
- iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X$

Dicho en otras palabras, cada condición anterior significa:

- i) Las distancias no son negativas y los únicos puntos con distancia cero es cuando los dos puntos son el mismo.
- ii) la distancia es una función simétrica.
- iii) la distancia satisface la desigualdad triangular.

Definición de espacio métrico: Se llama espacio métrico a un par (X, d) , donde X es un conjunto y d , es una distancia definida en X .

A continuación, se presentan algunos ejemplos de espacios métricos:

Ejemplo 1: El espacio métrico de los reales con la métrica del valor absoluto de la diferencia, es decir $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $d(x, y) = |x - y|$

Ejemplo 2: El espacio métrico discreto. Sea X un conjunto no vacío cualquiera; si $x, y \in X$ definimos $d(x, y) = 0$ si $x = y$ y $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. (X, d) es un espacio métrico.

En el libro, Topología Básica de Muñoz (2003) se definen sobre \mathbb{R}^2 dos métricas diferentes a la usual y son las siguientes.

Métrica del taxista: $d_{tax}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_2 - y_1|$.

Métrica del máximo: $d_{Max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_2 - y_1|\}$

A partir de esta definición se realiza el estudio de los elementos de la geometría de Euclides, con el fin de observar el cambio de las representaciones al definir las desde otra métrica distinta

a la usual. En el siguiente item se define y describe con detalle esta métrica.

1.5. Métrica del máximo

Definición de la métrica del máximo: Dados dos puntos A y B , se define la distancia del máximo así:

$$d_{\infty}(A, B) = \max\{ |x_1 - x_2|; |y_1 - y_2| \}$$

A continuación, se listan y se demuestran las condiciones que debe cumplir la métrica del máximo para ser una distancia:

i) $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$

ii) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X$

Demostración

Sean x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 y $y_3 \in R$ y $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ $C = (x_3, y_3)$, con $A, B, C \in R^2$

i) si

$$d_{\infty}(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$$

Al operar x_1 y x_2 dentro del valor absoluto, por la propiedad 1, el resultado será positivo o cero, ocurre lo mismo con y_1 y y_2 , por lo tanto se puede asegurar que:

$$|x_1 - x_2| \geq 0 \quad \text{y} \quad |y_1 - y_2| \geq 0$$

Luego, al aplicar la definición de métrica del máximo de los valores se obtiene:

$$\max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} \geq 0$$

por definición de distancia del máximo se puede concluir que:

$$d_{\infty}(A, B) \geq 0$$

Ahora si se tiene que $d_{\infty}(A, B) = 0$

entonces por definición de distancia entre A y B se tiene que:

$$\text{Max}\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} = 0$$

Para que el máximo de estos valores de igual a cero, se debe cumplir que

$$|x_1 - x_2| = 0 \quad \text{y} \quad |y_1 - y_2| = 0$$

Por propiedad cancelativa de los números reales $x_1 - x_2$ y $y_1 - y_2$ darán cero cuando:

$$x_1 = x_2 \quad , \quad y_1 = y_2$$

Si las componentes resultan ser iguales, se puede concluir que:

$$A = B$$

La demostración de que si $A = B$ entonces $d_\infty(A, B) = 0$ es completamente análoga a lo que se ha hecho previamente

ii) Si

$$d_\infty(A, B) = \text{Max}\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$$

$$d_\infty(B, A) = \text{Max}\{|y_1 - y_2|; |x_1 - x_2|\}$$

Las componentes de los valores absolutos son las mismas y al calcular el máximo entre los dos, no importa la posición de los valores absolutos, entonces se puede decir que:

$$\text{Max}\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} = \text{Max}\{|y_1 - y_2|; |x_1 - x_2|\}$$

Y por definición de distancia del máximo se puede concluir que:

$$d_\infty(A, B) = d_\infty(B, A)$$

iii) Si se tiene que:

$$d_\infty(A, C) = \text{Max}\{|x_1 - x_3|; |y_1 - y_3|\}$$

$$d_{\infty}(A, B) = \text{Max}\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$$

$$d_{\infty}(B, C) = \text{Max}\{|x_2 - x_3|; |y_2 - y_3|\}$$

Por las propiedades de desigualdades y valor absoluto 11 y 12:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_3| &\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| \\ &\leq d_{\infty}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_{\infty}((x_2, y_2), (x_3, y_3)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |y_1 - y_3| &\leq |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| \\ &\leq d_{\infty}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_{\infty}((x_2, y_2), (x_3, y_3)) \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} d_{\infty}((x_1, y_1), (x_3, y_3)) &= \text{Max}\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\} \\ &\leq d_{\infty}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_{\infty}((x_2, y_2), (x_3, y_3)) \end{aligned}$$

se puede concluir que

$$d_{\infty}(A, C) \leq d_{\infty}(A, B) + d_{\infty}(B, C)$$

Queda entonces demostrado que la métrica del máximo cumple las tres propiedades de distancia, por tanto, se procede ahora a estudiar el comportamiento de la Geometría Euclídea bajo la definición de esta métrica.

1.6. Bola abierta con respecto a la métrica del máximo

Una vez definida y demostrada la métrica del máximo, se puede preguntar sobre cómo sería la bola abierta definida desde esta métrica.

La definición de bola abierta para cualquier espacio métrico es la siguiente: Sean X, d un espacio métrico y r un número real positivo cualquiera. Entonces la bola abierta centrada en $a \in X$ y de radio r es el conjunto:

$$B_r(a) = \{x : x \in X \quad \wedge \quad d(a, x) < r\}$$

(Morris, 2010, pp 110).

A partir de esta definición de bola abierta para cualquier métrica, se define ahora la bola abierta para la distancia del máximo, así:

Sean (\mathbb{R}^2, d_∞) la métrica del máximo y r un número real positivo cualquiera. Entonces la bola abierta centrada en $a \in \mathbb{R}^2$ y de radio r es el conjunto:

$$B_r(a) = \{x : x \in \mathbb{R}^2 \quad \wedge \quad d_\infty(a, x) < r\}$$

Partiendo de esta definición podemos determinar cómo se ve gráficamente una bola abierta con base en la métrica que se está trabajando en este documento.

Tenemos que, para la distancia del máximo se debe cumplir:

$$|x_2 - x_1| < r \quad \wedge \quad |y_2 - y_1| < r$$

Primero se observa que con x_2 pasa lo siguiente:

Por propiedades del valor absoluto:

$$-r < x_2 - x_1 < r$$

Despejando x_2 para ver en que lugar del plano se ubicará:

$$-r + x_1 < x_2 < r + x_1$$

Y re ordenando tenemos finalmente que:

$$x_1 - r < x_2 < x_1 + r$$

Lo cuál gráficamente se ve de la siguiente manera:

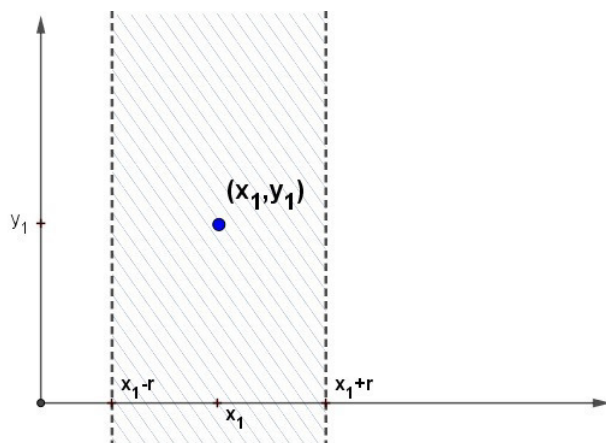


Figura 1: Construcción bola abierta 1.

Para y_2 el proceso es similar: Por propiedades del valor absoluto:

$$-r < y_2 - y_1 < r$$

Despejando y_2 para ver en que lugar del plano se ubicará:

$$-r + y_1 < y_2 < r + y_1$$

Y re ordenando tenemos finalmente que:

$$y_1 - r < y_2 < y_1 + r$$

y al graficar:

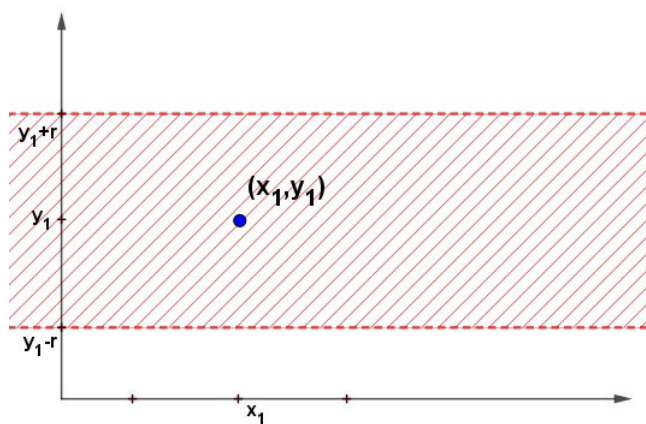


Figura 2: Construcción bola abierta 2

Como se tenía al inicio $|x_2 - x_1| < r \quad \wedge \quad |y_2 - y_1| < r$ la bola abierta con la métrica del máximo será la intersección de las dos regiones construidas anteriormente, esto es:

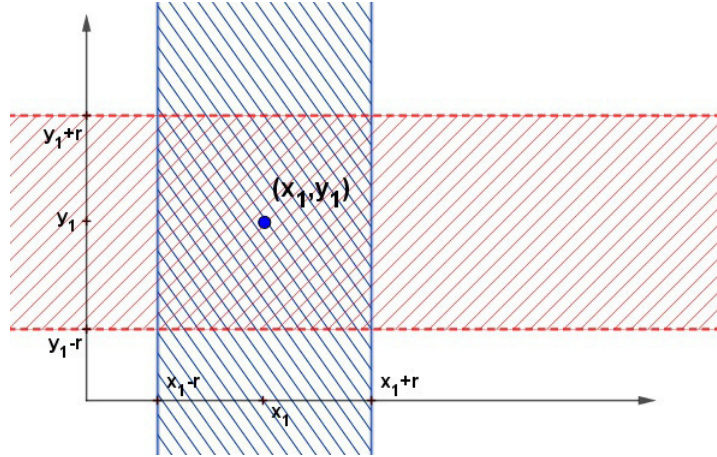


Figura 3: construcción bola abierta 3

Por tanto, se puede afirmar que las bolas abiertas de la métrica del máximo tienen la siguiente forma:

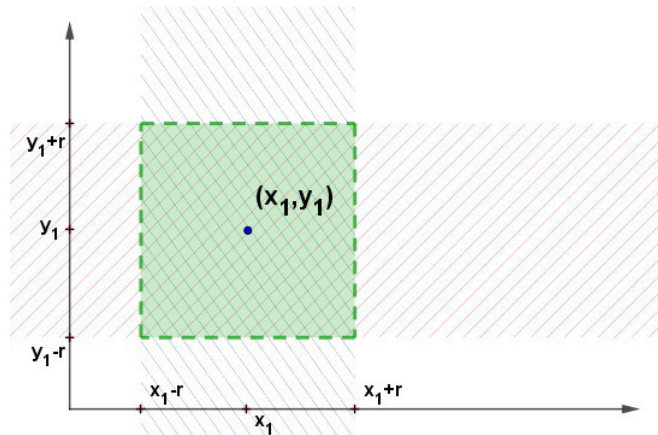


Figura 4: Bola abierta en la métrica del máximo

Lo anterior muestra que no todas las bolas abiertas necesariamente tienen forma circular; en la métrica del máximo se observa que son de forma cuadrada.

2. Definiciones y postulados de la geometría Euclidea estudiados desde la métrica del máximo.

En este capítulo se tienen como guía principal las definiciones y teoremas presentadas en el libro de Moise (1963) en el capítulo 3. Cabe resaltar que el orden en el que se presentan los conceptos trabajados aquí, no es el mismo del libro, ya que en la geometría usual la existencia de las **rectas** es algo que se tiene como punto de partida y en este trabajo de grado, por el contrario, se realiza una construcción de rectas a partir de los segmentos y los rayos.

2.1. Segmento en la métrica del máximo

El segmento bajo la métrica del máximo (que se denota con \overline{AB}_∞), se construirá a partir de las definiciones de interestancia y segmento.

Definición de segmento: Dados dos puntos A y B , el segmento \overline{AB}_∞ es la unión de los puntos A y B con todos los puntos que están entre A y B .

En notación de conjuntos la definición se representa de la siguiente manera:

$$\overline{AB}_\infty = \{A, B\} \cup \{X \in \mathbb{R}^2 \mid A_\infty - X_\infty - B_\infty\}$$

Los puntos que cumplen esta definición se encontraron de la siguiente manera. Primero se determinan puntos al azar, revisando cuándo se cumple la interestancia $A_\infty - X_\infty - B_\infty$, es decir, comprobando en qué ubicación del punto X se cumple que la $d_\infty(A, X) + d_\infty(X, B) = d_\infty(A, B)$, por ejemplo:

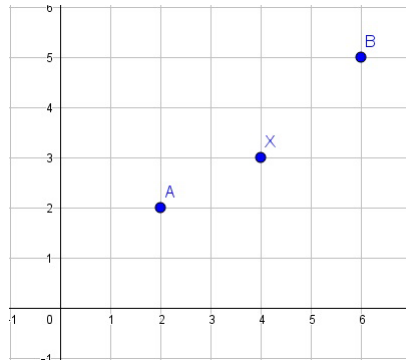


Figura 5: a. Exploración Segmento $_\infty$

En la imagen se muestran los puntos A , X y B , observe que por la definición de métrica del

máximo se tiene que:

$$d_{\infty}(A, X) = 2 \quad , \quad d_{\infty}(X, B) = 2 \quad y \quad d_{\infty}(A, B) = 4$$

Cumplíndose la condición dada: $2 + 2 = 4$

Ahora se presenta un ejemplo de un punto que no cumple con esta condición:

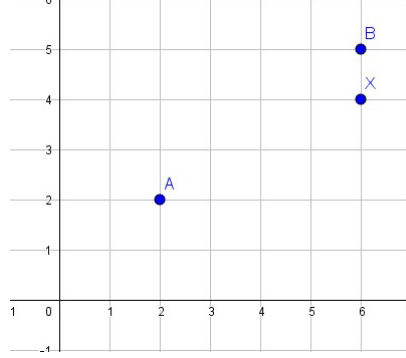


Figura 6: b. Exploración Segmento_{∞}

En este caso se tiene que:

$$d_{\infty}(A, X) = 4 \quad , \quad d_{\infty}(X, B) = 1 \quad y \quad d_{\infty}(A, B) = 4$$

Donde claramente no se cumple la condición, ya que: $4 + 1 \neq 4$

Para seguir encontrando puntos que cumplen la condición, dentro de la exploración se encontró que si se ubican los puntos X_i como se muestra en la figura siguiente, dichos puntos cumplen la condición dada:

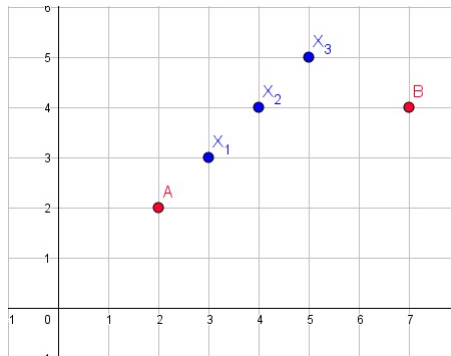


Figura 7: c. Exploración Segmento_{∞}

Al ver esta característica, se optó por determinar una recta que pase por el punto A y que determine un ángulo de 45° con el eje x (trabajando sobre un plano cartesiano). Utilizando el

software GeoGebra se realiza la comprobación de todos los puntos que pertenecen a la recta l que cumplen con la definición de interestancia para construir el segmento.

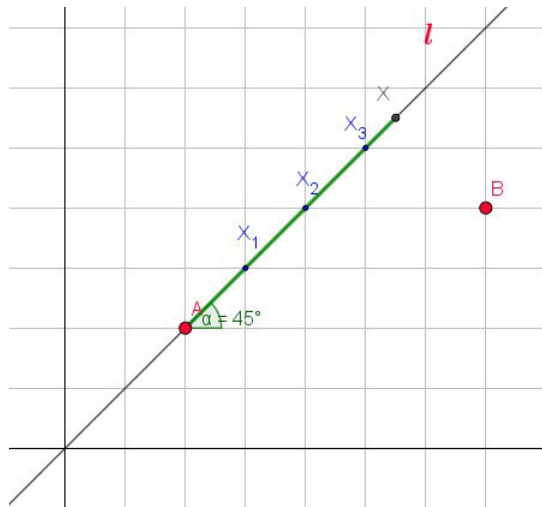


Figura 8: d. Exploración Segmento_∞

Al determinar las medidas de las distancias AX y XB , con todos los puntos X_i pertenecientes a \overline{AX} , se cumple la condición $d_\infty(A, X) + d_\infty(X, B) = d_\infty(A, B)$.

En los demás puntos de la recta, la suma de las distancias es diferente de la $d_\infty(A, B)$.

Siguiendo con el proceso de exploración se observa que el punto X y el punto B determinan una recta que es perpendicular a la recta l , al determinarla se observa que los puntos que pertenecen al segmento XB también cumplen con la definición de interestancia.

De manera análoga a como se ha venido trabajando, con ayuda del software GeoGebra y por medio de la exploración, se obtiene que todos los puntos que pertenecen a la figura geométrica determinada por los puntos A , X , B y Y cumplen con la definición de interestancia para poder obtener el segmento.

Tenemos entonces, que si se mueve el punto X_{11} por todo el interior de la figura, cada punto X_i cumple con la definición de interestancia y por ende la figura geométrica determinada por los puntos A , X , B y Y , junto con su interior son el \overline{AB}_∞

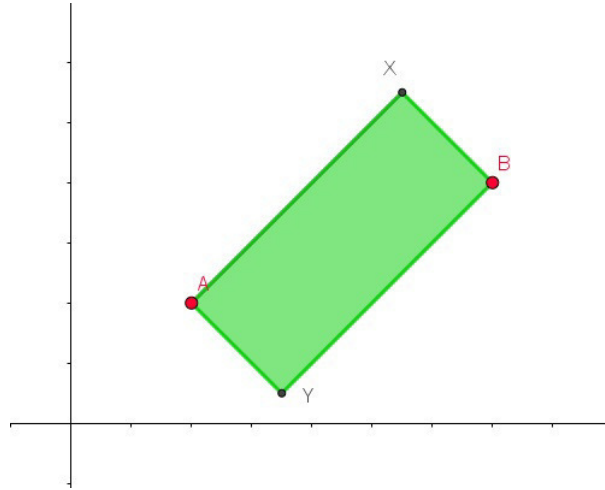


Figura 11: Segmento en la métrica del máximo

2.2. Casos de segmento en la métrica del máximo

A partir de la definición de interestancia trabajada previamente y de la exploración realizada para la construcción del segmento, se generan tres casos de figuras que representan este objeto de la geometría, a continuación se presenta la construcción, la demostración y la representación de cada uno de ellos.

Ahora se presentan los pasos de la construcción geométrica del \overline{AB}_∞ , siguiendo las definiciones, los postulados y los teoremas de la Geometría Plana. Para realizar la construcción del segmento en la métrica del máximo, se asumen como dados los puntos A y B con la condición de que sean diferentes.

El siguiente cuadro se debe tener en cuenta durante todo el documento, pues en adelante las rectas construidas, servirán como referencia en todas las demostraciones.

Construcción Geométrica	
1. A, B diferentes en el plano	Dado
2. $\exists m m$ es paralela al eje x y $A \in m$	P. de las paralelas.
3. Sea $P P \in m \wedge P \neq A$	T. recta infinitos puntos.
4. Sea $r = 45$	P. ángulo número
5. $\exists \overrightarrow{AD} D \notin m$ y $m\angle PAD = r$	T. construcción de ángulos
6. $l = \overleftrightarrow{AD}$	P. dos puntos recta.
7. $\exists n n \perp l$ por B	T. existencia perpendicular por punto externo.
8. $\exists h h \perp n$ por B	T. perpendicular punto de la recta.
9. $\exists k k \perp l$ por A	T. perpendicular punto de la recta.
10. Sea $Z = n \cap l$ y sea $K = h \cap k$	T. intersección de rectas

Cuadro 1: Pasos de la construcción del \overline{AB}_∞

Al realizar la construcción anterior, se encuentran dos figuras geométricas distintas dependiendo de la ubicación inicial del punto B . Si este punto se ubica en la recta l o en la recta k , se obtiene como \overline{AB}_∞ un segmento con la representación de la geometría usual y si el punto B no pertenece a alguna de estas dos rectas, el \overline{AB}_∞ será el cuadrilátero $AZBK$ junto con "su interior"; que, para efectos de la demostración se trabaja como la intersección del interior de ángulos.

El siguiente esquema muestra la estructura sobre la cual se realiza la demostración de los puntos que cumplen estar entre A y B teniendo en cuenta la métrica del máximo.

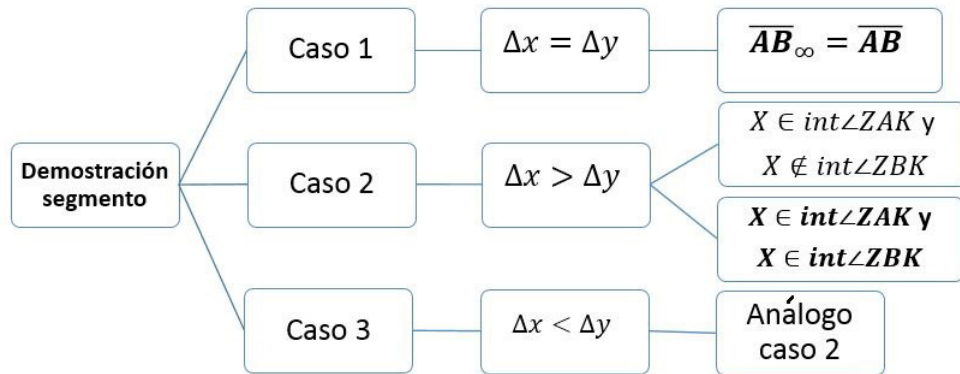


Figura 12: Estructura de la demostración

Caso 1

En este primer caso, el punto B se encuentra ubicado en una recta que determina un ángulo de 45° con la recta m de la construcción del cuadro uno. Se debe probar que todos los puntos X que pertenecen al \overline{AB} de la métrica usual, cumplen la condición de que:

$$d_\infty(A, X) + d_\infty(X, B) = d_\infty(A, B) \quad (1)$$

Para realizar esto, se determinan dos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas son \overline{AX} y \overline{XB} , (triángulos 1 y 2), por como se ha realizado la construcción se puede observar que estos triángulos tienen un ángulo de 45° cada uno, y como son rectángulos, es evidente que los dos son isósceles. Análogo a esto, se construye un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es el \overline{AB} , y bajo los mismos argumentos este triángulo también será isósceles.

Se define luego, $d_\infty(A, X)$, $d_\infty(X, B)$ y $d_\infty(A, B)$ como la medida de uno de los catetos del primer, segundo y tercer triángulo respectivamente. Al ser isósceles, los catetos son congruentes y no importa cual se tome, sin embargo, por conveniencia se trabaja con el cateto que representa la base de los triángulos en cada uno de los casos. Finalmente, por la construcción es evidente que la suma de las medidas de las bases los triángulos 1 y 2 es igual a la medida de la base del triángulo 3, obteniendo lo que se quería probar: $d_\infty(A, X) + d_\infty(X, B) = d_\infty(A, B)$

A continuación, se presenta la demostración formal de lo anteriormente expuesto, cabe resaltar que esta puede parecer extensa, es por ello que se deja al lector el siguiente enlace de Geogebra con los pasos seguidos en la demostración: <https://ggbm.at/Jh62cxbh>

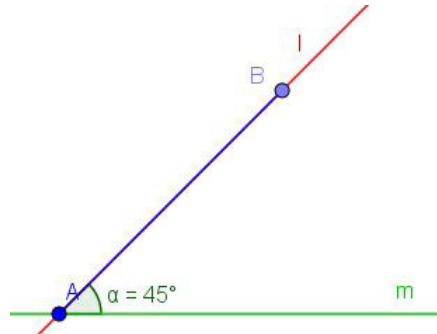


Figura 13: Construcción del segmento cuándo $B \in l$

Demostración caso i	
11. $\exists m' m' \perp m$ por B	T. perpendicular por punto externo.
12. $C = m \cap m'$	T. intersección de rectas.
13. $\triangle ABC$ recto	D. triángulo rectángulo. D. recta perpendicular.
14. $m\angle CAB = 45$	T. suma medidas de ángulos en triángulo.
15. $\overline{AC} \cong \overline{CB}$	T. recíproco del triángulo isósceles.
16. $AC = CB$	D. segmentos congruentes.
17. $d_{\infty}(A, B) = AC = CB$	D. distancia del máximo.
18. Sea $X \in \overline{AB} \mid X \neq A \wedge X \neq B$	T. recta infinitos puntos.
19. $\exists n' \perp m$ por X , $\exists l' \perp n'$ por X .	T. perpendicular por punto externo.
20. $C' = n' \cap m$, $B' = m' \cap l'$	T. intersección de rectas.
21. $\overline{AC'} \cong \overline{C'X} \wedge \overline{XB'} \cong \overline{B'B}$	Análogo pasos 13-15
22. $d_{\infty}(A, X) = AC' = C'X \wedge d_{\infty}(X, B) = XB' = B'B$	D. distancia del máximo.
23. $\square C'CB'X$ Rectángulo	D. rectángulo.
24. $\overline{C'C} \cong \overline{XB'}$	T. rectángulo - paralelogramo. T. condiciones paralelogramo.
25. $AC = AC' + C'C$	D. segmento. D. interestancia.
26. $AC = AC' + XB'$	Sustitución 24, 25.
27. $d_{\infty}(A, B) = d_{\infty}AX + d_{\infty}XB$	Sustitución 17, 22, 27.

Cuadro 2: Demostración caso i del \overline{AB}_{∞}

Por tanto, hasta el momento se ha demostrado que los segmentos bajo la definición de distancia del máximo pueden tener la representación de un segmento de la geometría usual, dependiendo de la ubicación de los puntos A y B . En la figura 14 y 15, Se presentan ejemplos de \overline{AB}_{∞} con las condiciones demostradas anteriormente.

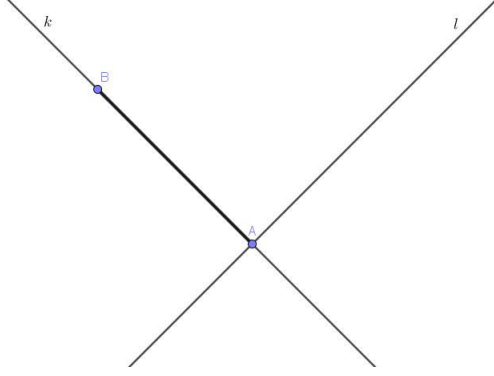


Figura 14: Ejemplo \overline{AB}_∞ caso 1, $B \in k$

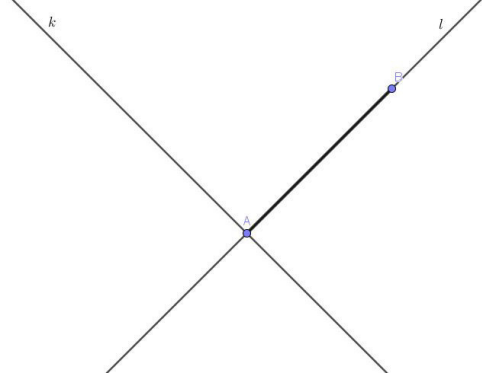


Figura 15: Ejemplo del \overline{AB}_∞ caso 1, $B \in l$

Para continuar con los casos 2 y 3 de segmento se realiza una división del plano, que se determina a partir de las rectas l y k . Se nombra cada división como cuadrantes (I , II , III y IV).

- Si $B \in$ a I o III entonces se determina el \overline{AB}_∞ del caso 2 en el que $\triangle X > \triangle Y$
- Si $B \in$ a II o IV entonces se determina el \overline{AB}_∞ del caso 3 en el que $\triangle X < \triangle Y$

Caso 2

En este caso, el punto B pertenece al cuadrante I o al cuadrante III , se debe probar que todos los puntos X que pertenecen al interior del $\angle ZAK$ y $\angle ZBK$, cumplen la condición de que la $d_\infty(A, B)$ es igual a $d_\infty(A, X) + d_\infty(X, B)$, con el fin de probar que X siempre debe estar en el interior de esos ángulos. Se supone que B no esta en el $\angle ZBK$, mostrando que la $d_\infty(A, B)$ es diferente a $d_\infty(A, X) + d_\infty(X, B)$. Lo anterior teniendo en cuenta que este es el caso número 2, donde $\triangle X > \triangle Y$.

Caso a.1 del caso II: En esta parte de la demostración, se ubicara un X tal que X pertenezca al semiplano determinado por t donde esta A .

La construcción previamente establecida y la ubicación de X permite determinar los siguientes triángulos rectángulos: $\triangle AMX$ y $\triangle XJB$; teniendo en cuenta las medidas de los ángulos de cada triángulo y haciendo uso del *Teorema ángulos desiguales - lados desiguales* y el rectángulo $MCBJ$ con las características que da su definición, se muestra que no es cierto que $d_\infty(A, X) + d_\infty(X, B) = d_\infty(A, B)$, lo que quiere decir que la distancia de A a X mas X a B es diferente de la distancias de A a B .

En la figura 16 se encuentra la construcción que se realiza para la demostración del caso 2

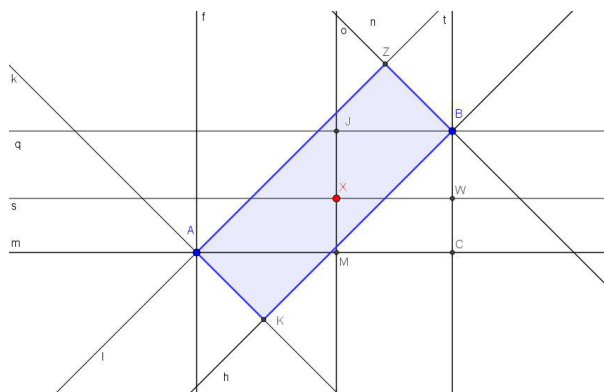


Figura 16: Construcción segmento $B \in$ cuadrante I

Demostración caso ii	
28. $\exists X $ a) $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \notin \text{int}\angle ZBK$ b) $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \in \text{int}\angle ZBK$	P. plano infinitos puntos
29. $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \notin \text{int}\angle ZBK$	Caso a
30. $\exists t t \perp m$ por B	T. recta perpendicular por punto externo.
31. a.1) $X \in \text{semiplano } t, A$ a.2) $X \in \text{semiplano } t, \neg A$	Sub casos, caso a
32. $X \in \text{semiplano } t, A$	Caso a,1.
33. $\exists o o \perp m$ por X y $\exists q q \perp o$ por B	T. recta perpendicular por punto externo.
34. $\exists J J = o \cap q$	T. intersección de rectas.
35. $\exists M M = m \cap o$	T. intersección de rectas.
36. $\exists C C = m \cap t$	T. intersección de rectas.
37. $\triangle ABC$ es rectángulo	D. triángulo rectángulo.
38. $m\angle CAB < 45$	T. adición medida de ángulos. P. de los reales.
39. $CB < AC$	T. ángulos desiguales - lados desiguales.
40. $d_{\infty}(A, B) = \text{Max}\{AC; BC\}$	D. distancia del maximo.

Demostración caso ii	
41. $d_{\infty}(A, B) = AC$	Propiedades de los reales 39 y 40.
42. $\triangle AMX$ y $\triangle XJB$ son rectángulos	D. triángulo rectángulo.
43. $m\angle XAM < 45$ y $m\angle JBX > 45$	T. adición medida de ángulos. Propiedades de los reales.
44. $XM < AM$ y $XJ > JB$	T. ángulos desiguales lados desiguales.
45. $d_{\infty}(A, X) = \text{Max}\{AM; XM\}$	D. distancia del máximo.
46. $d_{\infty}(A, X) = AM$	Propiedades de los reales 44 y 45.
47. $d_{\infty}(X, B) = \text{Max}\{BJ; JX\}$	D. distancia del máximo.
48. $d_{\infty}(B, X) = JX$	Propiedades de los reales 44 y 47.
49. $\exists f f \perp q$ por A	T. recta perpendicular por punto externo.
50. $\square MCBJ$	D. rectángulo.
51. $\overline{MC} \cong \overline{JB}$	T. reciproco paralelogramo. T. condicional paralelogramo.
52. $AC = AM + MC$	D. segmento. D. interestancia.
53. $AC = AM + JB$	Sustitución 51 y 52.
54. $AC < AM + JX$	Propiedades de los reales.
55. $\neg(AC = AM + JX)$	Propiedades de los reales.
56. $\neg(d_{\infty}(A, B) = d_{\infty}(A, X) + d_{\infty}(X, B))$	Conclusión 55.

Cuadro 3: Demostración a.1 caso ii del \overline{AB}_{∞}

Caso a.2 del caso II: En esta parte de la demostración, se ubica un X tal que X pertenezca al semiplano determinado por t donde no esta A .

Se tiene un desarrollo completamente análogo al caso a del caso II, en el que se determinan los triángulos rectángulos: $\triangle AMX$, el $\triangle XJB$ y el rectángulo $MCBJ$, haciendo que nuevamente se pueda concluir que no es cierto que $d_{\infty}(A, X) + d_{\infty}(X, B) = d_{\infty}(A, B)$, lo que quiere decir que la distancia de A a X mas X a B es diferente de la distancias de A a B .

Demostración caso ii	
57. $X \in \text{semitrango } t, \neg A$	Caso a.2
58. $d_\infty(A, X) = AM$	Análogo pasos 42 - 46.
59. $d_\infty(A, B) = AC$	Análogo pasos 37 - 41-
60. $AM = AC + CM$	D. segmento. D. intersección.
61. $d_\infty(A, X) = d_\infty(A, B) + CM$	Sustitución 58, 59 y 60.
62. $d_\infty(A, X) > d_\infty(A, B)$	Propiedades de los reales.
63. $d_\infty(A, X) + d_\infty(X, B) > d_\infty(A, B)$	Propiedades de los reales.
64. $d_\infty(A, B) \neq d_\infty(A, X) + d_\infty(X, B)$	Propiedades de los reales.
65. $\neg(d_\infty(A, B) = d_\infty(A, X) + d_\infty(X, B))$	conclusión 64
66. $\neg(X \in \text{int}\angle ZAK \text{ y } X \notin \text{int}\angle ZBK)$	conclusión 56 y 65

Cuadro 4: Demostración a.2 caso ii del \overline{AB}_∞

Luego de esto se puede concluir que en el caso a del caso 2, donde se propone que X pertenece al interior del $\angle ZAK$ y no pertenece al interior del $\angle ZBK$, no es cierto que:

$$d_\infty(A, X) + d_\infty(X, B) = d_\infty(A, B).$$

Caso b del caso II: En esta parte de la demostración, se ubica un X tal que X pertenece al interior de $\angle ZAK$ y al interior del $\angle ZBK$, se usa una construcción análoga al caso 1 para determinar el $\triangle AMX$, el $\triangle XJB$ los cuales son triángulos rectángulos, teniendo en cuenta las medidas de sus ángulos y usando el Teorema ángulos desiguales - lados desiguales y el rectángulo $MCBJ$ con las características que da su definición, se determina que $d_\infty(A, X) = MA$, $d_\infty(X, B) = BJ$ y $d_\infty(A, B) = AC$, con lo cual se logra establecer que $MA + BJ = AC$, lo cual permite concluir la demostración con que $d_\infty(A, X) + d_\infty(X, B) = d_\infty(A, B)$.

Demostración caso ii	
67. $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \in \text{int}\angle ZBK$	Caso b.
68. Construcción análogo	pasos 33 - 37.
69. $\triangle AMX$ y $\triangle XJB$ son rectángulos	D. triángulo rectángulo.
70. $m\angle ZBK$ recto	D. recta perpendicular. D. ángulo recto.
71. $m\angle ZBK \cong m\angle ZBJ$	T. PAI. T. ángulos opuestos por el vértice.
72. $m\angle ZBJ = 45$	D. segmento. D. interestancia.
73. $m\angle KBJ = 45$ y $m\angle KAM = 45$	T. adición medida de ángulos.
74. $m\angle MAX < 45$ y $m\angle XBJ < 45$	T. adición medida de ángulos.
75. $MX < MA$ y $XJ < BJ$	T. ángulos desiguales lados desiguales.
76. $d_\infty(A, X) = \text{Max}\{MA; MX\}$	D. distancia del máximo.
77. $d_\infty(A, X) = MA$	Propiedades de los reales 75 y 76.
78. $d_\infty(X, B) = \text{Max}\{BJ; XJ\}$	D. distancia del máximo.
79. $d_\infty(X, B) = BJ$	Propiedades de los reales 75 y 78.
80. $d_\infty(A, B) = AC$	Análogo pasos 37 - 40.
81. $AC = AM + MC$	D. segmento. D. interestancia.
82. $\overline{MC} \cong \overline{JB}$	Análogo pasos 50 - 51.
83. $AC = AM + MC$	Sustitución 81 y 82.
84. $d_\infty(A, B) = d_\infty(A, X) + d_\infty(X, B)$	Sustitución 77, 79 y 80.
85. $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \in \text{int}\angle ZBK$	Conclusión 84.

Cuadro 5: Demostración b caso ii del \overline{AB}_∞

Hasta aquí se ha demostrado cuales son los X entre A y B que cumplen la definición de interestancia del máximo, para el segmento del caso 2.

A continuación, se muestra cómo es la representación de los segmentos del caso 2, en la figura 17 con B en el cuadrante I y en la figura 18 con B en el cuadrante III

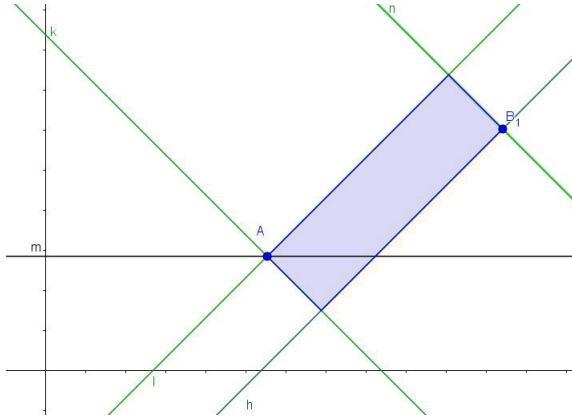


Figura 17: Ejemplo del \overline{AB}_∞ caso 2

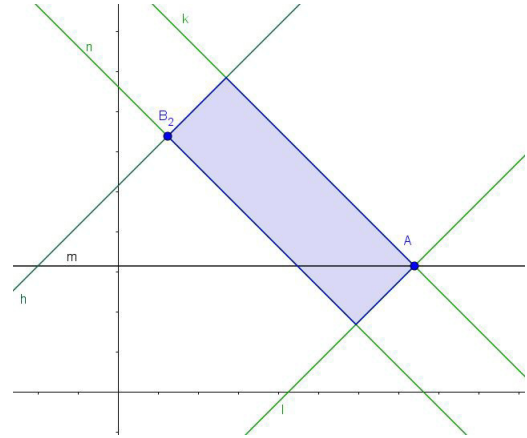


Figura 18: Ejemplo del \overline{AB}_∞ caso 2

En el siguiente enlace de Geogebra se presenta la construcción de los pasos de la demostración del caso 2. <https://ggbm.at/Z9pqSH64>

Caso 3

Para la demostración del caso 3 en el que B pertenece al cuadrante II o al cuadrante IV , se debe probar que X pertenece al interior del $\angle ZAK$ y $\angle ZBK$ para llegar a:

$$d_\infty(A, X) + d_\infty(X, B) = d_\infty(A, B).$$

Teniendo en cuenta que en el caso 3, se cumple $\triangle X < \triangle Y$.

Como se puede observar en el siguiente cuadro, la demostración de este caso, es análoga al caso 2.

Demostración caso iii	
86. $\exists X$ a) $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \notin \text{int}\angle ZBK$ b) $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \in \text{int}\angle ZBK$	P. plano infinitos puntos.
87. $\neg(X \in \text{int}\angle ZAK \text{ y } X \notin \text{int}\angle ZBK)$	Caso a, análogo pasos 30 - 65.
88. $X \in \text{int}\angle ZAK \text{ y } X \in \text{int}\angle ZBK$	caso b, análogo pasos 69 - 83.

Cuadro 6: Demostración caso iii del \overline{AB}_∞

A continuación, se muestra la representación de los segmentos del caso 3, en la figura 19 con un punto B que pertenece al cuadrante II y en la figura 20 con un B que pertenece al cuadrante IV .

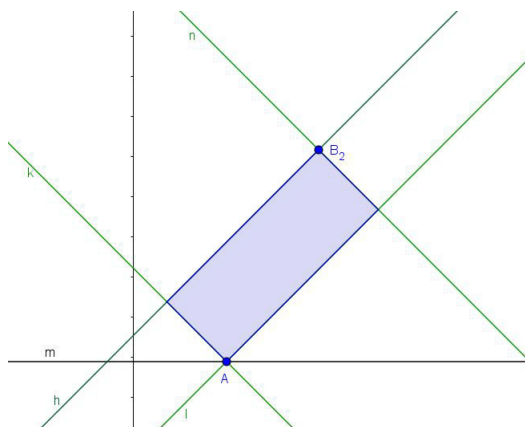


Figura 19: Ejemplo del \overline{AB}_∞ caso 3

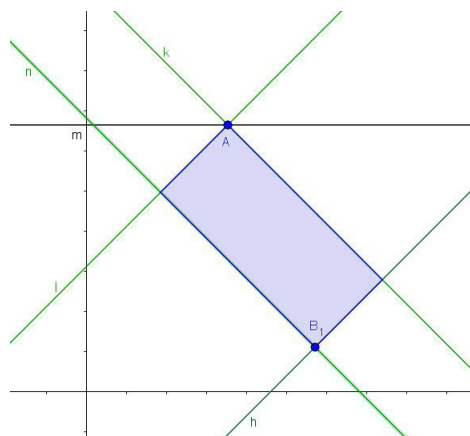


Figura 20: Ejemplo del \overline{AB}_∞ caso 3

En el siguiente enlace de Geogebra, se encuentra la construcción de los pasos de la demostración del caso número 3. <https://ggbm.at/XktXCxJU>

Luego de realizar la demostración de cada uno de los casos que se encontraron de segmento en la métrica del máximo, se puede afirmar con seguridad cuales son los segmentos con sus respectivas representaciones.

En el siguiente enlace de Geogebra se encuentra una construcción en la que se puede mover el punto B por los cuadrantes para observar las diferentes representaciones del \overline{AB}_∞ , además de esto, el lector puede verificar si efectivamente, al tener a X en el segmento del máximo se cumple la definición de distancia del máximo. <https://ggbm.at/bRXekSYn>

2.3. Rayo en la métrica del máximo

La construcción del rayo bajo los parámetros de la métrica del máximo se realiza, al igual que el segmento, por medio de la exploración. Ésta surge de manera natural, pues ya se contaba con una metodología o estrategia, luego de haber construido el segmento.

La definición de rayo, al igual que la del segmento, es determinada a partir de lo trabajado en el curso Geometría plana, de la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Definición de rayo: En notación de conjuntos, la definición de rayo es:

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X \in \mathbb{R}^2 | A - B - X\}$$

Realizando la respectiva exploración para encontrar los puntos que, de acuerdo con la definición, hacen parte del $\overrightarrow{AB}_\infty$ se obtiene lo siguiente.

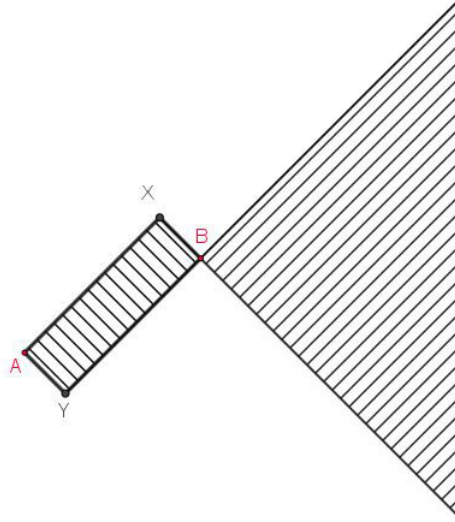


Figura 21: Rayo en la métrica del máximo - Caso 2

Anteriormente se mostró que hay tipos diferentes de segmentos; con el rayo sucede exactamente igual. Se tienen tres casos de rayos que dependen del segmento que se construya. El primero corresponde a: $\triangle X > \triangle Y$ y es el rayo determinado anteriormente, el segundo es cuando $\triangle X = \triangle Y$, que al igual que en el segmento, este tiene la forma de una rayo de la geometría de métrica usual, y el tercero se construye cuando $\triangle X < \triangle Y$. Esta última representación es la siguiente:

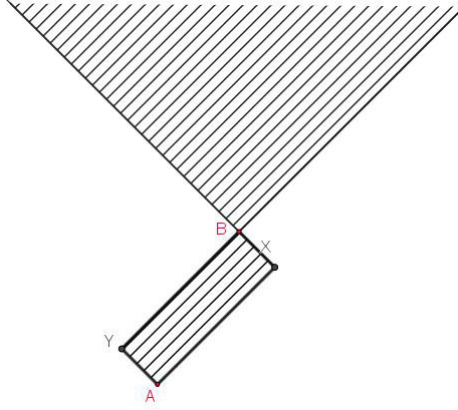


Figura 22: Rayo en la métrica del máximo - Caso 3

2.4. Casos de rayo en la métrica del máximo

Para la demostración de los puntos que cumplen la pertenencia en el rayo, teniendo en cuenta la definición de interestancia en la métrica del máximo, se tendrá como base los casos del \overline{AB}_∞ y el teorema punto a un lado de la geometría de Euclides.

El siguiente cuadro muestra la estructura que tendrán los rayos, que se determinaran en la métrica del máximo.

Construcción Geométrica	
1. A, B diferentes en el plano	Dado.
2. $\exists m m$ es paralela al eje x y $A \in m$	P. de las paralelas.
3. Sea $P P \in m \wedge P \neq A$	T. recta infinitos puntos.
4. Sea $r = 45$	P. ángulo número.
5. $\exists \overrightarrow{AD} D \notin m$ y $m \angle PAD = r$ ¹	T. Construcción de ángulos.
6. $l = \overleftrightarrow{AD}$	P. dos puntos recta.
7. $\exists n n \perp l$ por B	T. existencia perpendicular por punto externo.
8. $\exists h h \perp n$ por B	T. perpendicular punto de la recta.
9. $\exists k k \perp l$ por A	T. perpendicular punto de la recta.
10. Sea $Z = n \cap l$ y sea $K = h \cap k$	T. intersección de rectas.

Cuadro 7: Pasos de la construcción del rayo AB_∞

¹ En el curso de geometría plana de la U.P.N representa el la medida de un ángulo.

De acuerdo con la construcción descrita en la tabla anterior, al desplazar el punto B se obtienen los tres casos mencionados previamente. En el siguiente esquema se muestra la estructura sobre la cual se realiza la demostración de los puntos que cumplen la condición $A_\infty - B_\infty - X_\infty$.

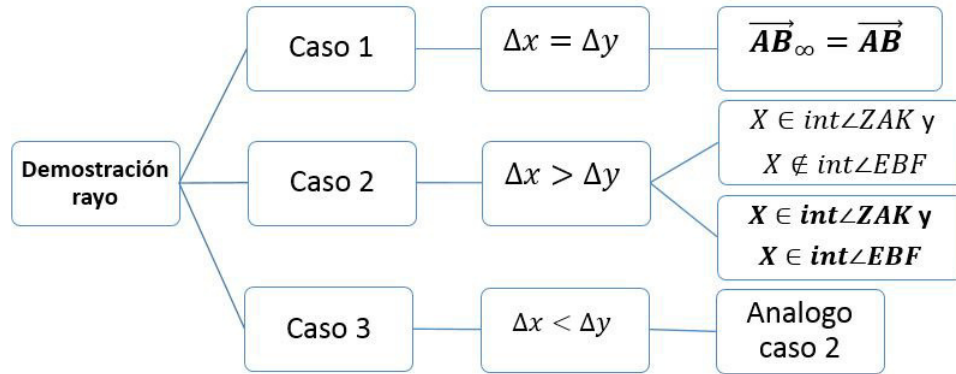


Figura 23: Estructura de la demostración

Caso 1: Se demuestra que si A , B y X pertenecen a la recta l , teniendo en cuenta que la prueba sería la misma si dichos puntos pertenecen a la recta k . De manera similar a como se hizo con el segmento, en el siguiente link, <https://ggbm.at/MSSzv7Gv>, se puede acceder al software GeoGebra donde se encuentra la construcción de lo presentado a continuación.

La demostración de que el caso I del rayo, corresponde a la representación de rayo en la geometría usual es análoga a la del caso I de segmento. Se deben determinar triángulos rectángulos $\triangle ABC$, $\triangle BLX$ y $\triangle ADX$, y concluir que las medidas de sus catetos (por ser triángulos isósceles, no importa cual se tome) son las distancias del máximo de A a B , de B a X y de A a X respectivamente y luego mediante cálculos y propiedades de los reales concluir que $d_\infty(A, X) = d_\infty(A, B) + d_\infty(B, X)$.

La siguiente tabla, muestra la demostración formal de lo mencionado anteriormente.

Demostración caso i	
11. $\exists X A - B - X$	T. punto a un lado.
12. $\exists o o \perp m$ por X	T. existencia Perpendicular por punto externo.
13. $\exists q q \perp m$ por B	T. existencia perpendicular por punto externo.
14. $\exists C C = q \cap m$ y sea $\exists D D = o \cap m$	T. intersección de rectas.
15. $\triangle ABC$ y $\triangle AXD$ son rectángulos	D. triángulo rectángulo. D. recta perpendicular.
16. $m\angle ABC = 45$ y $m\angle AXD = 45$	T. suma de medidas de ángulos de un triángulo.
17. $AC = CB$ y $AD = DX$	T. reciproco triangulo isósceles. D. segmentos congruentes.
18. $d_{\infty}(A, B) = \text{Max}\{AC; CB\}$	D. distancia del máximo.
19. $d_{\infty}(A, B) = AC$	Propiedades de los reales.
20. $d_{\infty}(A, X) = \text{Max}\{AD; DX\}$	D. distancia del máximo.
21. $d_{\infty}(A, X) = AD$	Propiedades de los reales.
22. $\exists s s \perp q$ por B	T. existencia Perpendicular por punto externo.
23. $\exists L L = o \cap s$	T. intersección de rectas.
24. $d_{\infty}(X, B) = BL$	Análogo pasos 15 - 19.
25. $AD = AC + CD$	D. segmento. D. interestancia.
26. $d_{\infty}(A, X) = d_{\infty}(A, B) + d_{\infty}(B, X)$	Sustitución 19, 21 y 24.

Cuadro 8: Demostración caso i del del rayo AB_{∞}

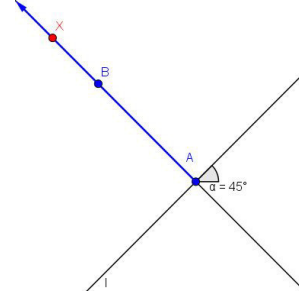
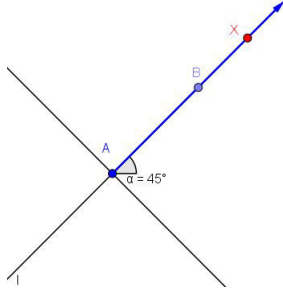


Figura 24: Ejemplo del rayo AB caso 1, $B \in l$ Figura 25: Ejemplo del rayo AB caso 1, $B \in k$

Caso 2 Si se observa el esquema, para el tipo II del rayo, se determinan dos casos para la demostración. Para esto se determina un ángulo y con base en él se describen dichos casos. En el siguiente Link <https://ggbm.at/r2kGWMey> se presenta la construcción de la demostración, allí se puede observar el $\angle EBF$ que es el que sirve como referencia para la demostración.

Hasta el momento y en la mayoría de las demostraciones, el lector podrá observar que se basan en la misma idea, determinar triángulos rectángulos y elegir cuál de los dos catetos representa la distancia del máximo entre dos puntos.

Caso a del caso II: Si se supone que $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \notin \text{int}\angle EBF$, ésta demostración es muy sencilla, ya que para la distancia de A a B ya se tiene que, por ser el caso 2 de segmento, la distancia es la base del triángulo y para la distancia de B a X , resulta ser el cateto que no es la base del triángulo, ya que la ubicación del punto X determina un triángulo rectángulo donde dicho cateto es el mayor de los dos, esto se concluye gracias al teorema *ángulos desiguales - lados desiguales*, luego, al hacer uso de las propiedades de los reales, se obtiene que la suma de las distancias de A a B y de B a X es diferente de la distancia de A a X . Lo anterior se muestra formalmente en la tabla *Demostración caso a del caso II*.

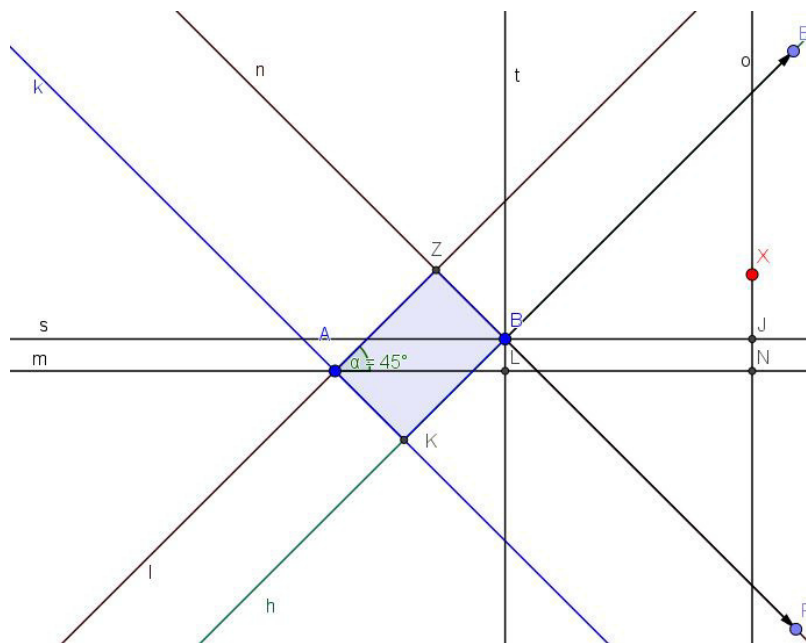


Figura 26: Construcción rayo en la métrica del máximo

Demostración caso a del caso ii	
27. $\exists E K - B - E$ y $\exists F Z - B - F$	T. punto a un lado.
28. $\exists X $ a) $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \notin \text{int}\angle EBF$ b) $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \in \text{int}\angle EBF$	P. plano infinitos puntos.
29. $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \notin \text{int}\angle EBF$	Caso a.
30. $\exists t t \perp m$ por B	T. recta existencia perpendicular por punto externo.
31. $a,1 X \in \text{semitracto } t, \neg A^2$ $a,2 X \in \text{semitracto } t, A$	Sub casos, caso a
32. $X \in \text{semitracto } t, \neg A$	Caso $a,1$
33. $\exists L L = m \cap t$	T. intersección de rectas.
34. $\exists o o \perp m$ por X y $\exists s s \perp o$ por B	T. existencia recta perpendicular por punto externo.
35. $\exists J J = s \cap o$, $\exists N N = m \cap o$	T. intersección de rectas.

² En el curso de geometría plana de la U.P.N representa el X que pertenece al semiplano determinado por t donde no esta A

Demostración caso ii	
36. $\triangle ABL$ rectángulo	D. triángulo rectángulo. D. recta perpendicular.
37. $m\angle BAL < 45$	T. adición medidas de ángulos. Propiedades de los reales.
38. $BL < AL$	T. ángulos desiguales - lados desiguales.
39. $d_{\infty}(A, B) = \text{Max}\{AL; LB\}$	D. distancia del máximo.
40. $d_{\infty}(A, B) = AL$	Propiedades de los reales.
41. $\triangle XAN$ rectángulo	D. triángulo rectángulo. D. recta perpendicular.
42. $m\angle XAN < 45$	T. adición medidas de ángulos. Propiedades de los reales.
43. $XN < AN$	T. ángulos desiguales - lados desiguales.
44. $d_{\infty}(A, X) = \text{Max}\{AN; NX\}$	D. distancia del máximo.
45. $d_{\infty}(A, X) = AN$	Propiedades de los reales.
46. $\triangle XBJ$ rectángulo	D. triángulo rectángulo. D. recta perpendicular.
47. $m\angle XBJ > 45$	T. adición medidas de ángulos. Propiedades de los reales.
48. $XJ > BJ$	T. ángulos desiguales - lados desiguales.
49. $d_{\infty}(B, X) = \text{Max}\{BJ; JX\}$	D. distancia del máximo.
50. $d_{\infty}(A, B) = XJ$	Propiedades de los reales.
51. $\square BJNL$	D. rectángulo.
52. $BJ \cong LN$	T. rectángulo paralelogramo.
53. $BJ = LN$	D. segmentos congruentes.
54. $AN = AL + LN$	D. segmento. D. interestancia.
55. $AN < AL + XJ$	Propiedades de los reales.
56. $\neg(AN = AL + XJ)$	Propiedades de los reales.
57. $\neg(d_{\infty}(A, X) = d_{\infty}(A, B) + d_{\infty}(B, X))$	Conclusión. Sustitución 40, 45 y 50.
58. $X \in \text{semiplano } t, A$	Caso a.2

Demostración caso a del caso ii	
59. $\neg(d_\infty(A, X) = d_\infty(A, B) + d_\infty(B, X))$	Análogo pasos 33 - 56.
60. $\neg(X \in \text{int}\angle ZAK \text{ y } X \notin \text{int}\angle EBF)$	Conclusión 57 y 59.

Cuadro 9: Demostración a caso ii del rayo AB_∞

Caso b del caso II: Si se supone que $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \in \text{int}\angle EBF$, En este momento se demuestra que, en efecto, los puntos encontrados en la exploración cumplen con la definición de interestancia y hacen parte del $\overrightarrow{AB}_\infty$.

Para demostrar esto, basta con determinar los triángulos rectángulos que involucran los puntos A , B y X , estos son: $\triangle ALB$, $\triangle BJX$ y $\triangle ANX$ y mostrar que, si X está en el interior de los ángulos mencionados, se cumple que: $d_\infty(A, X) = AN$, $d_\infty(A, B) = AL$ y $d_\infty(B, X) = BJ$, lo cual es cierto ya que, por la ubicación del punto X y con el teorema *ángulos desiguales - lados desiguales*; AN , AL y BJ son las medidas de los catetos que cumplen con ser el máximo en cada triángulo, así que, con ayuda de las propiedades de los números reales, se concluye que: $d_\infty(A, X) = d_\infty(A, B) + d_\infty(B, X)$.

Demostración caso b del caso ii:	
62. $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \in \text{int}\angle EBF$	Caso b.
63. Construcción análoga	pasos 33 - 35.
64. $\triangle ALB$ rectángulo	D. triángulo rectángulo. D. recta perpendicular.
65. $m\angle BAL < 45$	T. adición medidas de ángulos. Propiedades de los reales.
66. $BL < AL$	T. ángulos desiguales - lados desiguales.
67. $d_\infty(A, B) = \text{Max}\{AL; LB\}$	D. distancia del máximo.
68. $d_\infty(A, B) = AL$	Propiedades de los reales.
69. $\triangle XAN$ rectángulo	D. triángulo rectángulo. D. recta perpendicular.
70. $m\angle XAN < 45$	T. adición medidas de ángulos. Propiedades de los reales.
71. $XN < AN$	T. ángulos desiguales - lados desiguales.

Demostración caso b del caso ii	
72. $d_{\infty}(A, X) = \text{Max}\{AN; NX\}$	D. distancia del máximo.
73. $d_{\infty}(A, X) = AN$	Propiedades de los reales.
74. $\triangle XBJ$ rectángulo	D. triángulo rectángulo. D. recta perpendicular.
75. $m\angle XAN < 45$	T. adición medidas de ángulos. Propiedades de los reales.
76. $BJ < XJ$	T. ángulos desiguales - lados desiguales.
77. $d_{\infty}(B, X) = \text{Max}\{BJ; XJ\}$	D. distancia del máximo.
78. $d_{\infty}(B, X) = BJ$	Propiedades de los reales.
79. $AN = AL + LN$	D. segmento. D. interestancia.
80. $\square BJNL$	D. rectángulo.
82. $BJ \cong LN$	T. rectángulo paralelogramo.
83. $BJ = LN$	D. segmentos congruentes.
84. $AN = AL + BJ$	Sustitucion 78 y 83.
85. $d_{\infty}(A, X) = d_{\infty}(A, B) + d_{\infty}(B, X)$	Sustitución 68, 73, 78 y 84.

Cuadro 10: Demostración b caso ii del rayo AB_{∞}

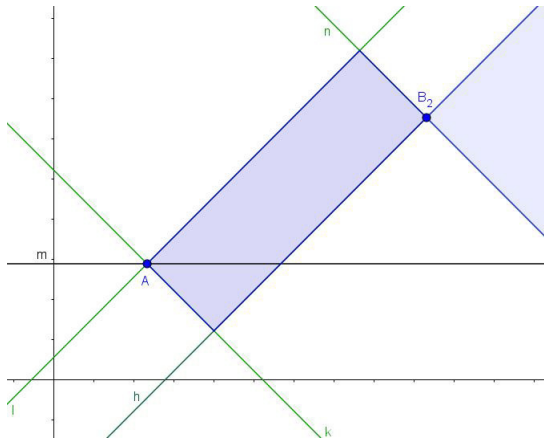


Figura 27: Ejemplo del rayo AB_2 caso 2

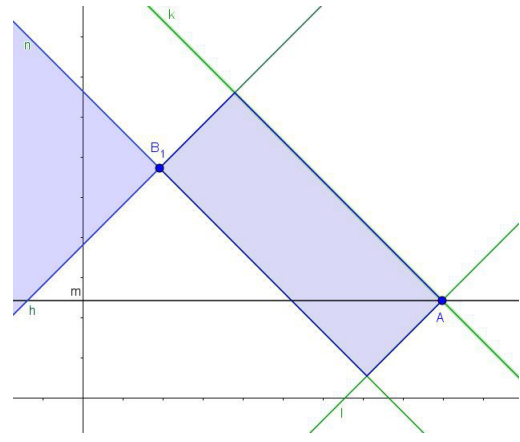


Figura 28: Ejemplo del rayo AB_1 caso 2

Caso 3

Como se describió en el esquema realizado para la demostración de rayo, este caso es análogo al caso II. Por lo cuál se escribe una tabla mencionando los pasos que son análogos a la demostración anterior y se muestran dos ejemplos de rayos de este tipo.

Demostración caso iii	
86. $\exists E K - B - E$ y $\exists F Z - B - F$	T. punto a un lado.
87. $\exists X $ a) $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \notin \text{int}\angle EBF$ b) $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \in \text{int}\angle EBF$	P. plano infinitos puntos.
88. $\neg(X \in \text{int}\angle ZAK \text{ y } X \notin \text{int}\angle EBF)$	Caso a, análogo pasos 30 - 59.
90. $X \in \text{int}\angle ZAK$ y $X \in \text{int}\angle EBF$	Caso c, análogo pasos 63 - 85.

Cuadro 11: Demostración caso iii del rayo AB_∞

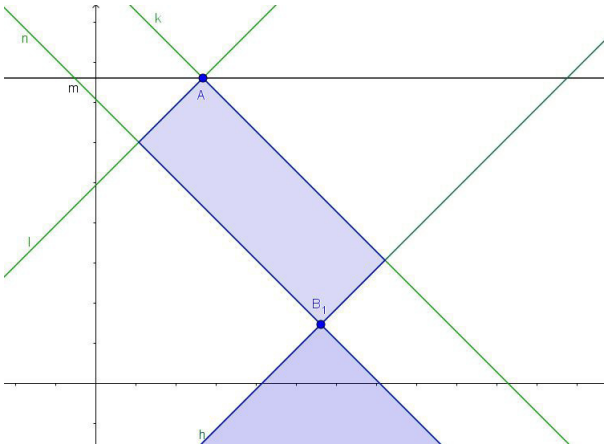


Figura 29: Ejemplo del rayo AB_1 caso 3

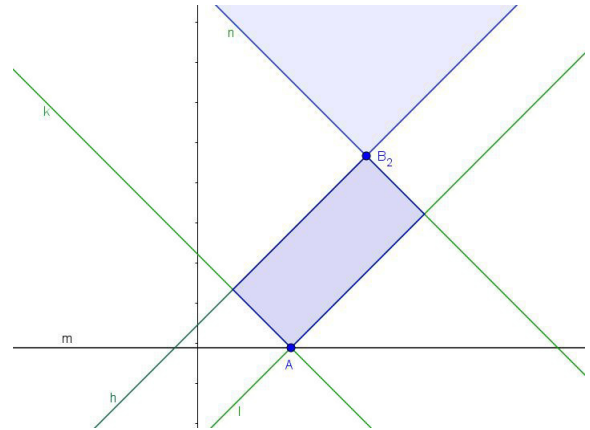


Figura 30: Ejemplo del rayo AB_2 caso 3

Queda demostrado entonces que los rayos bajo la métrica del máximo tienen dos representaciones diferentes, la de rayo usual y la que depende del cuadrilátero que representa el segmento; de esta última se desprenden dos representaciones similares que dependen de la ubicación del punto B .

2.5. Rayo opuesto en la métrica del máximo

Es necesario aclarar que se añade el concepto de rayo opuesto por estar relacionado con los elementos geométricos trabajados en este capítulo, teniendo como referencia el curso de Geometría Plana estudiado en la Universidad Pedagógica Nacional, es decir que esto no se encontrará en el orden establecido del capítulo 3 del libro de Moise (1963).

Definición rayo opuesto: \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{BC} son opuestos si $A - B - C$

Teorema existencia rayo opuesto Dado \overrightarrow{BA} , existe un \overrightarrow{BC} opuesto a \overrightarrow{BA} .

Dado $\overrightarrow{BA}_\infty$ para la demostración de este teorema, haciendo uso del Teorema punto al lado se tendrá la interestancia $D - B - A$ teniendo en cuenta que ya se demostró el Teorema existencia de rayo de la métrica del máximo, al hacer uso de este, en la interestancia $D - B - A$ se pudo afirmar que existe el $\overrightarrow{BC}_\infty$ tal que D pertenece al rayo $\overrightarrow{BC}_\infty$ con lo cual se puede decir que cumple la interestancia $C - B - A$, por Definición de rayo opuesto $\overrightarrow{BC}_\infty$ es opuesto a $\overrightarrow{BA}_\infty$.

Teniendo en cuenta que ya se demostró la existencia del rayo opuesto y se quieren buscar representaciones únicas para cada uno de los tres casos de rayo opuesto.

Si se cumple $A_\infty - B_\infty - C_\infty$ y se quieren representaciones únicas se establecen condiciones para A , B y C

- $A - B - C$
- $AB = BC$

Caso 1

Si se usa el rayo del caso 1 para determinar la $\overrightarrow{BA}_\infty$ opuesto a $\overrightarrow{BC}_\infty$ en el que los puntos A y C cumplen $\triangle X = \triangle Y$ su representación sera:

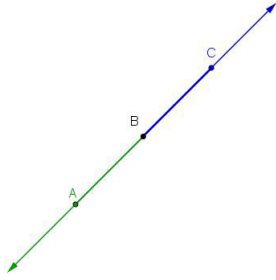


Figura 31: Ejemplo de rayo opuesto caso 1

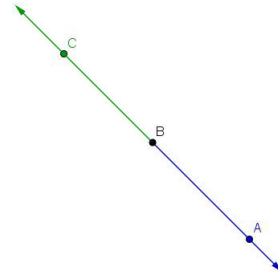


Figura 32: Ejemplo de rayo opuesto caso 1

Caso 2

Si se usa el rayo del caso 2 para determinar la $\overrightarrow{BA}_{\infty}$ opuesto a $\overrightarrow{BC}_{\infty}$ en el que los puntos A y C cumplen $\Delta X > \Delta Y$ su representación sera:

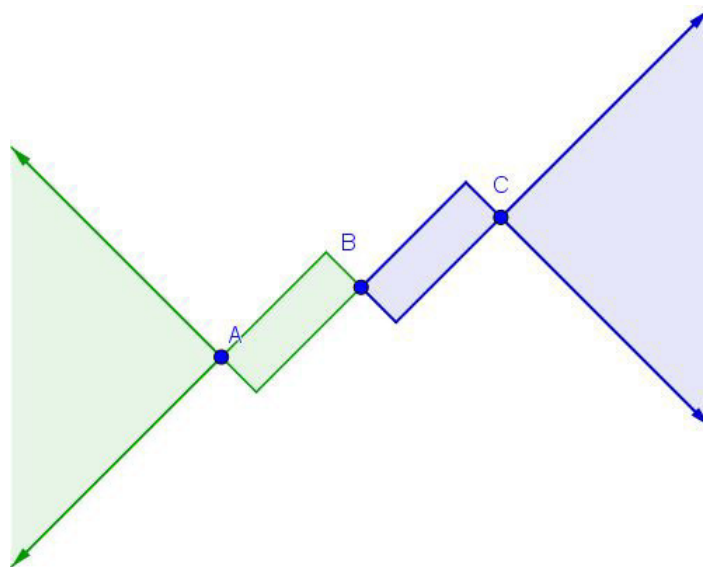


Figura 33: Ejemplo del rayo opuesto caso 2

Caso 3

Si se usa el rayo del caso 3 para determinar la $\overrightarrow{BA}_\infty$ opuesto a $\overrightarrow{BC}_\infty$ en el que los puntos A y C cumplen $\triangle X < \triangle Y$ su representación es la siguiente:

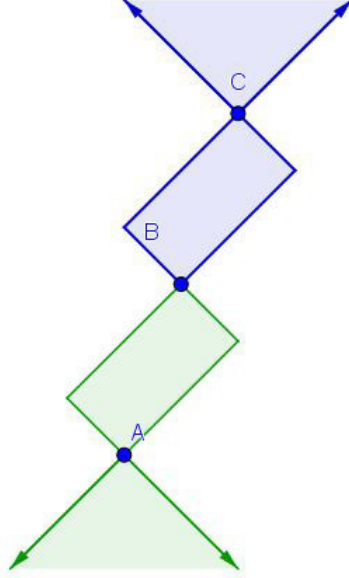


Figura 34: Ejemplo de rayo opuesto caso 2

2.6. Recta en la métrica del máximo

Partiendo de la definición de interestancia, la definición de segmento, la definición de rayo y la definición de rayo opuesto construidos a partir de la métrica del máximo, se realizó la exploración de cuál es la representación gráfica (se debe tener en cuenta que cada uno de los casos de segmento afectarían la apariencia del objeto estudiado) de la recta en la métrica del máximo.

Usando como base, la definición que se aborda en la geometría plana, se determina la siguiente definición para la recta en la métrica del máximo.

$$\overleftrightarrow{AB}_\infty = \{X \in \mathbb{R}^2 | A - X - B\} \cup \{X \in \mathbb{R}^2 | A - B - X\} \cup \{X \in \mathbb{R}^2 | X - A - B\}$$

Lo cual se puede resumir en lo siguiente:

$$\overleftrightarrow{AB}_\infty = \overrightarrow{AB}_\infty \cup \overleftarrow{AB}_\infty$$

Caso 1

Si se usa el segmento del caso 1 para determinar la $\overleftrightarrow{AB}_\infty$, en el que los puntos A y B cumplen $\triangle X = \triangle Y$ su representación será:

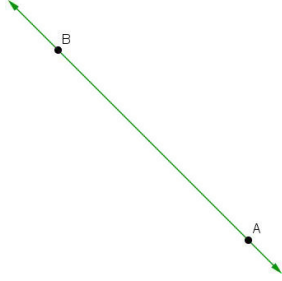


Figura 35: Ejemplo del recta $\overleftrightarrow{AB}_\infty$ caso 1

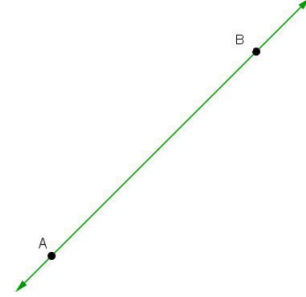


Figura 36: Ejemplo de recta $\overleftrightarrow{AB}_\infty$ caso 1

La cual al igual que el segmento y el rayo del caso 1, determina una recta de la geometría usual.

Caso 2

Si se usa el segmento del caso 2 para determinar la $\overleftrightarrow{AB}_\infty$, en el que los puntos A y B cumplen $\triangle X > \triangle Y$ su representación sera:

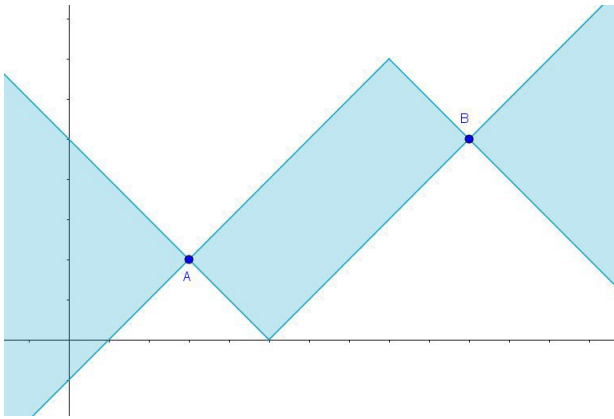


Figura 37: Ejemplo del recta $\overleftrightarrow{AB}_\infty$ caso 2

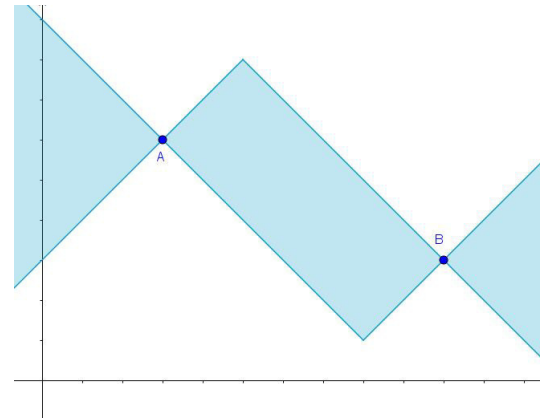


Figura 38: Ejemplo de recta $\overleftrightarrow{AB}_\infty$ caso 2

Caso 3

Si se usa el segmento del caso 3 para determinar la $\overleftrightarrow{AB}_\infty$, en el que los puntos A y B cumplen $\triangle Y > \triangle X$ su representación sera:

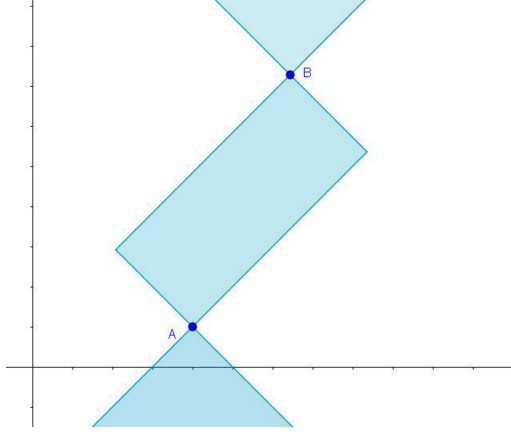


Figura 39: Ejemplo del recta $\overleftrightarrow{AB}_\infty$ caso 3

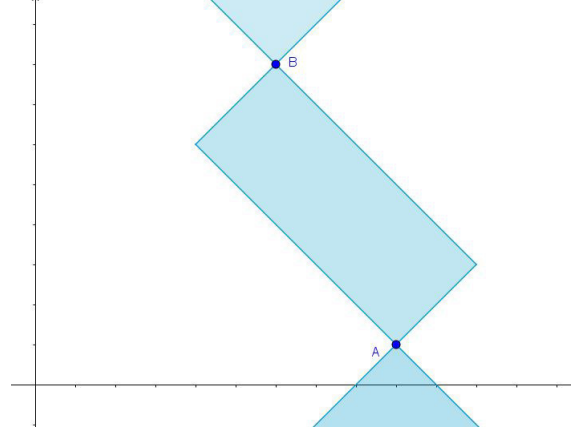


Figura 40: Ejemplo de recta $\overleftrightarrow{AB}_\infty$ caso 3

2.6.1. Sistema de coordenadas

Este concepto se estudia en este momento, ya que como se mencionó anteriormente, la rectas en nuestra métrica tienen una justificación de su existencia a partir de los segmentos y los rayos, a diferencia de la métrica usual y para poder abordar los sistemas de coordenadas era necesario primero tener la recta. El estudio de este objeto matemático, se realiza a partir de la definición.

Sistema de coordenadas: Sea $f : l \leftrightarrow \mathbb{R}$ una correspondencia uno a uno entre la recta l y los números reales. Si para todos los puntos P, Q de l se tiene:

$$PQ = |f(P) - f(Q)|,$$

Entonces f es un sistema de coordenadas de l . Para cada punto P de l , el número $x = f(P)$ es llamado la coordenada de P .

Antes de entrar en el estudio formal de este concepto, es necesario tener en cuenta el siguiente teorema presentado en el libro de Moise (1963), pues se utilizará para construir la justificación que sigue:

Teorema de la colocación de la regla: Sea l una recta, y sean P y Q cualesquiera dos puntos de l . Entonces l tiene un sistema de coordenadas en el cual la coordenada de P es 0 y la coordenada de Q es positiva.

Al tener como referencia la definición de sistema de coordenadas para una recta l y al realizar el análisis correspondiente se determina que, para una recta bajo la métrica del máximo, no se puede asignar una coordenada o un número real para cada punto que pertenezca a ella.

En particular, si determinamos la $\overleftrightarrow{AB}_\infty = l$ donde al punto A le corresponde la coordenada $f(A) = 0$ trabajando bajo un plano cartesiano usual, y al punto B le corresponde la coordenada $f(B) = x$, esto por el teorema mencionado anteriormente; entonces se deben cumplir las siguientes dos condiciones para dos puntos P y Q que pertenezcan a dicha recta:

$$f : l \leftrightarrow R \text{ es 1 a 1}$$

$$d_\infty(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$$

Para mostrar que efectivamente el sistema de coordenadas bajo la métrica del máximo no se cumple, se realiza la prueba en la que si una de las dos condiciones se cumple, la otra no.

En primer lugar si suponemos que la función es 1 a 1, para dos puntos distintos P y Q se tiene que $f(P) \neq f(Q)$, pero se puede observar que si se deja fijo el punto P , existen distintas ubicaciones del punto Q de modo que se cumpla la condición número dos: $d_\infty(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$. Un ejemplo de esto se muestra en la figura 41, donde P tiene coordenadas en $(3, 0)$ y Q inicialmente tiene coordenadas $(4, 1)$; en esta imagen, al ubicar este punto en cualquier segmento del cuadrado determinado, la distancia de P a Q siempre será la misma. Esto quiere decir que existen diferentes Q_i que satisfacen $d_\infty(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$, de esto, inmediatamente se contradice el hecho de que f sea 1 a 1.

Ahora bien, si se parte del supuesto de que se satisface la condición: $d_\infty(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$ se pueden determinar dos puntos P y Q , diferentes, tal que $f(P) = f(Q)$, como dichos puntos son diferentes se tiene por que $d_\infty(P, Q) = |f(P) - f(Q)| = 0$, pero por la definición de distancia, $d_\infty(P, Q)$, es igual a cero solo cuando los puntos son iguales, de esta manera, no se satisface la segunda condición.

Verificando finalmente que bajo la métrica del máximo no es posible determinar un sistema de coordenadas para una recta l_∞ .

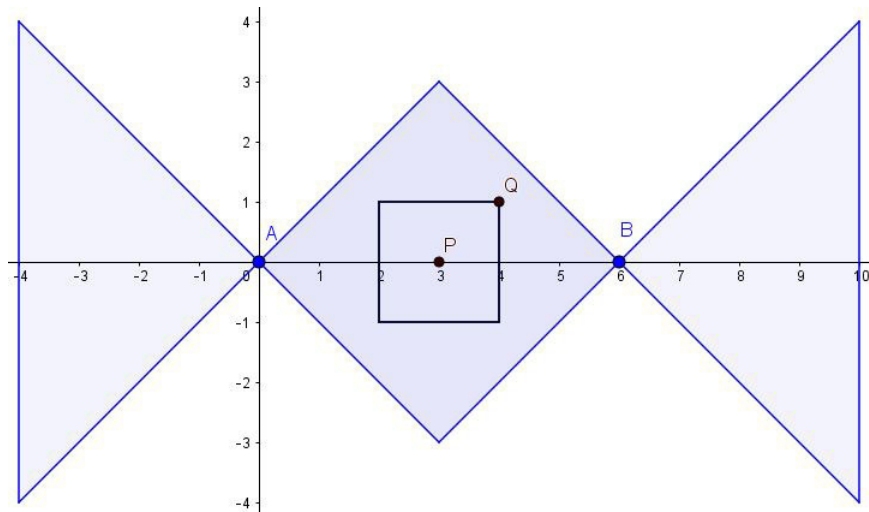


Figura 41: Sistema de coordenadas

Por lo anterior, se puede afirmar que en la métrica del máximo, no es posible utilizar el sistema de coordenadas, de manera que este concepto y los demás que estén relacionados con el, no se tendrán en cuenta en el desarrollo del trabajo de grado.

2.7. Ángulo en la métrica del máximo

A partir de la definición de ángulo, se realiza la exploración de la imagen que representará un ángulo bajo la definición de la métrica del máximo. Para la construcción se inicia con tres puntos distintos que no pertenecen a la misma recta (Recta bajo la métrica del máximo) y se determinan los $\overrightarrow{AB}_\infty$ y $\overrightarrow{AC}_\infty$. Cumpliendo con la definición de ser dos rayos que parten del mismo origen.

Al ubicar los puntos B o C en diferente lugar se evidencian los siguientes tipos de ángulos:

1. Esta representación surge a raíz del caso 1 del segmento $_\infty$ y del rayo $_\infty$, donde $\triangle X$ es igual a $\triangle Y$. Aquí se obtiene por la construcción mostrada en el cuadro 1, que la $m\angle BAC = 90$. Solo cuando los puntos B y C cumplen la condición del caso 1 mencionados anteriormente, se puede determinar la medida de los ángulos bajo la métrica del máximo.

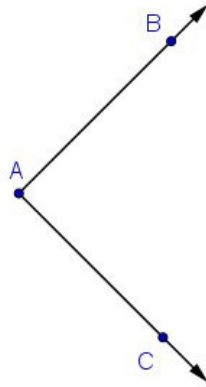


Figura 42: Ángulo caso I

2. En esta representación se puede observar que tanto el $\overrightarrow{BA}_{\infty}$ como el $\overrightarrow{AC}_{\infty}$ corresponden al caso 2 de rayo. En esta representación los rayos se intersecan en más de un punto y además no se puede determinar una medida para el “ángulo” determinado.

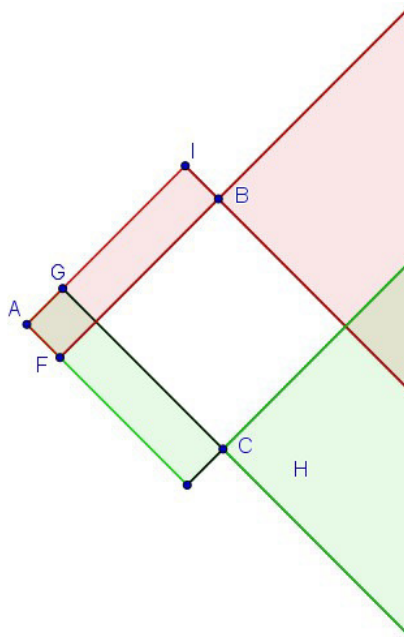


Figura 43: Ejemplo de ángulo no válido

3. Otro de los casos presentados en la búsqueda de la representación que se obtiene al realizar la construcción de los ángulos, bajo la métrica del máximo, es cuando uno de los segmentos es de caso 2 y el otro de caso 3. En este caso tampoco se puede determinar la medida del ángulo y se puede observar que los rayos no se intersecan en un solo punto, en estos la

intersección resulta ser el \overline{AG} . Esto se puede observar en la figura 44

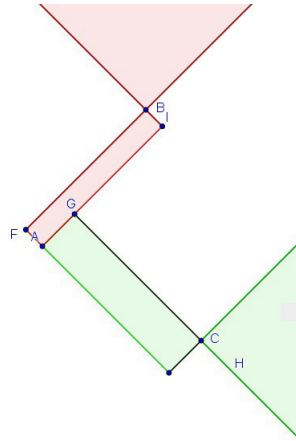


Figura 44: Ejemplo de ángulo no válido 2

4. Por último, en la figura 45 se presenta un ángulo en el que alguno de los rayos sea del caso 1 y el otro sea del caso 3. En este caso los rayos solo se intersecan en el origen, A , sin embargo, determinar la medida del ángulo no tiene sentido, ya que no se puede determinar un punto representativo del $\overrightarrow{AB}_\infty$ que permita hallar un número real que sea la medida del ángulo.

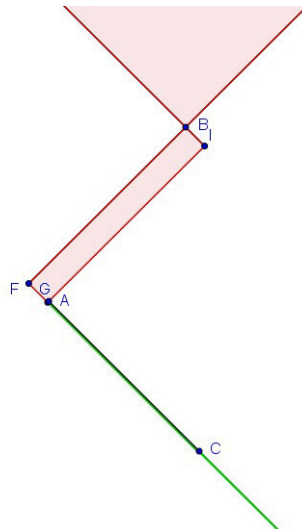


Figura 45: Ejemplo de ángulo no valido 3

De acuerdo con lo anterior, es válido asegurar que bajo la métrica del máximo no es posible asignarle medida a un ángulo, tal como si ocurre en la geometría usual.

2.8. Triángulo en la métrica del máximo

Teniendo como base las dos definiciones para el objeto geométrico *triángulo*, se realiza la respectiva exploración bajo la métrica del máximo. Para realizar esto se tienen en cuenta los 3 tipos de segmento trabajados previamente.

Dados A , B y C no colineales, se obtendrán los siguientes triángulos

1. El \overline{AB}_∞ del caso 1, \overline{AC}_∞ del caso 2 y \overline{BC}_∞ del caso 3.

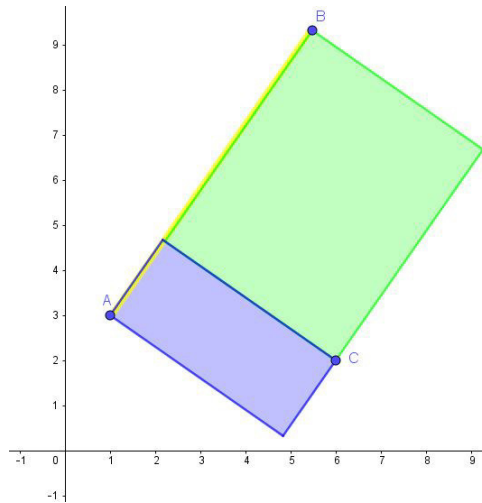


Figura 46: Ejemplo 1 de triángulo del máximo

2. El \overline{AB}_∞ del caso 2, \overline{AC}_∞ del caso 2 y \overline{BC}_∞ del caso 3.

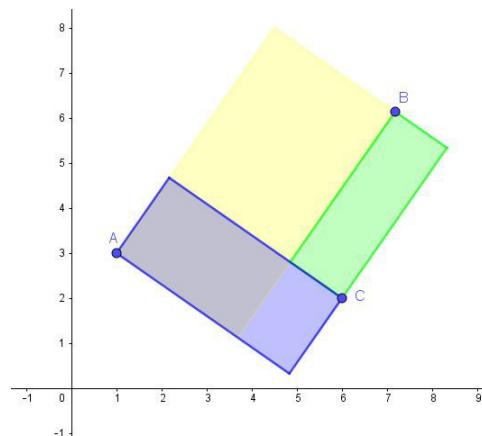


Figura 47: Ejemplo 2 de triángulo del máximo

3. El \overline{AB}_∞ del caso 3, \overline{AC}_∞ del caso 2 y \overline{BC}_∞ del caso 3.

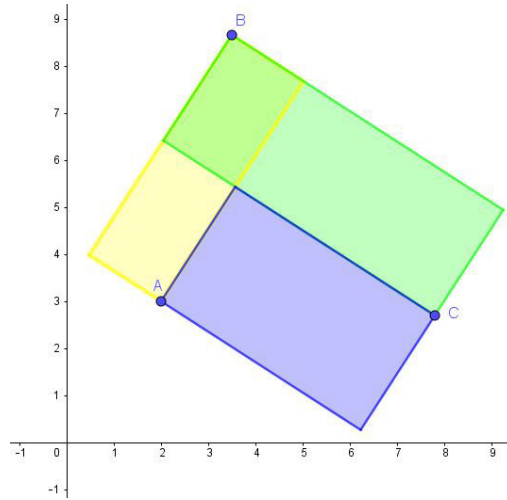


Figura 48: Ejemplo 3 de triángulo del máximo

4. El \overline{AB}_∞ del caso 1, \overline{AC}_∞ del caso 1 y \overline{BC}_∞ del caso 3.

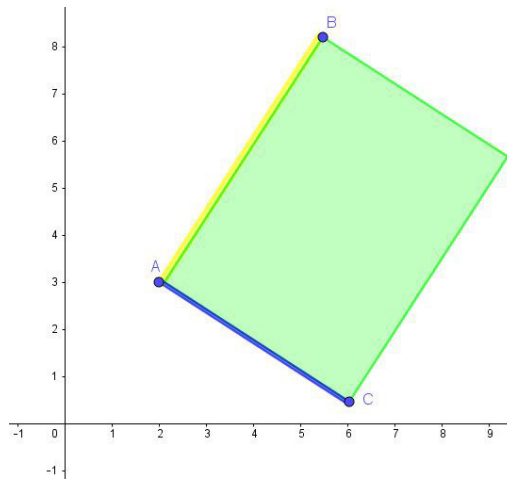


Figura 49: Ejemplo 4 de triángulo del máximo

A partir de las representaciones obtenidas, se puede evidenciar que si A , B y C son no colineales y sin importar los tipos de segmentos que se utilicen, el triángulo bajo la métrica del máximo, tiene la forma de un rectángulo de la geometría usual, esto se demuestra a continuación

Demostración	
1. A, B y C no colineales	Dado.
2. $\overline{AB}_\infty, \overline{AC}_\infty$ y \overline{BC}_∞	D. segmento métrica del máximo.
3. \overline{AB}_∞ sera el $\square ANBM$, \overline{AC}_∞ sera el $\square AJCL$ y \overline{BC}_∞ será el $\square BOCP$	Construcción segmentos. (Cuadros 1 y 2) .
4. $\angle ONA, \angle NAL, \angle ALO$ y $\angle LON$ son rectos	D. rectas perpendiculares.
5. $\square ANOL$ es rectángulo	D. rectángulo.

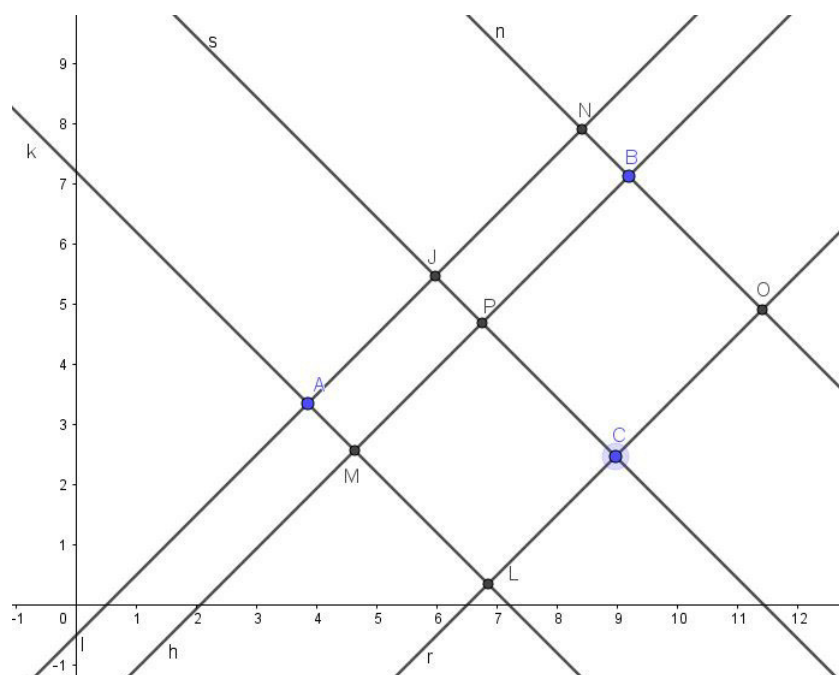


Figura 50: Construcción demostración de triángulo

3. Teoremas relacionados con interestancia segmentos, rayos, rectas y ángulos.

3.1. Interestancia

Definición de interestancia: El punto B esta entre los puntos A y C si la distancia del máximo entre A y B , más la distancia del máximo entre B y C , es igual a la distancia del máximo entre A y C ; lo cual se expresa simbólicamente para la métrica del máximo de la siguiente manera:

$$A_{\infty} - B_{\infty} - C_{\infty} \Leftrightarrow d_{\infty}(AB) + d_{\infty}(BC) = d_{\infty}(AC)$$

A continuación, se presentan algunas propiedades importantes relacionadas con la interestancia, abordadas bajo la métrica del máximo.

3.1.1. Teorema A1

Si $A - B - C$ entonces $C - B - A$

Realizando la respectiva correspondencia con el simbolismo utilizado en nuestra métrica, este teorema queda enunciado de la siguiente manera:

Si $A_{\infty} - B_{\infty} - C_{\infty}$ entonces $C_{\infty} - B_{\infty} - A_{\infty}$

Demostración:

Se tiene dado $A_{\infty} - B_{\infty} - C_{\infty}$ entonces, por definición de interestancia del máximo:

$$d_{\infty}(A, B) + d_{\infty}(B, C) = d_{\infty}(A, C) \quad (2)$$

Luego, por propiedad reflexiva de la métrica

$$d_{\infty}(B, A) + d_{\infty}(C, B) = d_{\infty}(C, A) \quad (3)$$

$$d_{\infty}(C, B) + d_{\infty}(B, A) = d_{\infty}(C, A) \quad (4)$$

Y por definición de interestancia del máximo:

$C_{\infty} - B_{\infty} - A_{\infty}$, lo cual concluye la demostración.

3.1.2. Teorema A2

Sean A , B y C Puntos diferentes entre si, que pertenecen a la misma recta. si se supone que $A - B - C$ entonces no puede ser $B - A - C$ o $A - C - B$

La respectiva correspondencia en la métrica del máximo es:

Sean A , B y C Puntos diferentes entre si, que pertenecen a la misma recta. si se supone que $A_\infty - B_\infty - C_\infty$ entonces no puede ser $B_\infty - A_\infty - C_\infty$ o $A_\infty - C_\infty - B_\infty$

Al realizar una exploración para saber si se cumple este teorema al aplicar la métrica del máximo, se encuentra que dados tres puntos A, B y C que pertenecen a una misma recta, se ven casos en los que no se cumple ninguna de las siguientes interestancias $A - B - C$, $B - C - A$ o $A - C - B$ como se muestra a continuación

Contra-ejemplo

Si se tiene una $\overleftrightarrow{AB}_\infty$ como se muestra en la figura 51 y los puntos $A = (4, 1)$, $B = (6, 1)$ y $C = (6, 2)$

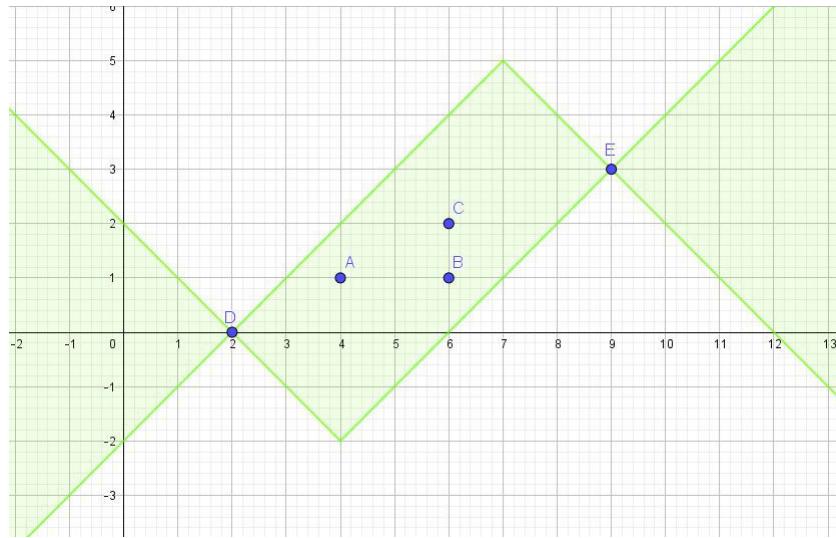


Figura 51: Contra - ejemplo Teorema A2

$$d_\infty(A, C) = 2 \quad (5)$$

$$d_{\infty}(A, B) + d_{\infty}(B, C) = 3 \quad (6)$$

por 4 y 5 se puede concluir que

$$d_{\infty}(A, B) + d_{\infty}(B, C) \neq d_{\infty}(A, C) \quad (7)$$

Así que no se cumple $A - B - C$, de forma análoga se puede concluir que tampoco se cumple $B - C - A$ y $A - C - B$

3.1.3. Teorema A3

Cualquier cuatro puntos en una recta pueden ser nombrados en un orden A, B, C y D de una manera que $A - B - C - D$

La respectiva correspondencia en la métrica del máximo es:

Cualquier cuatro puntos en una recta pueden ser nombrados en un orden A, B, C y D de una manera que $A_{\infty} - B_{\infty} - C_{\infty} - D_{\infty}$

Al igual que en el Teorema A2, se encuentra que no se cumple al aplicar la métrica del máximo, como se muestra a continuación

Contra-ejemplo

si se tiene que la $\overleftrightarrow{EF}_{\infty}$ y los puntos A, B, C y D contenidos en está, con B y C en el punto medio máximo del segmento \overline{AD}_{∞} no se cumplirá $A_{\infty} - B_{\infty} - C_{infty} - D_{\infty}$, como se muestra en la figura 52

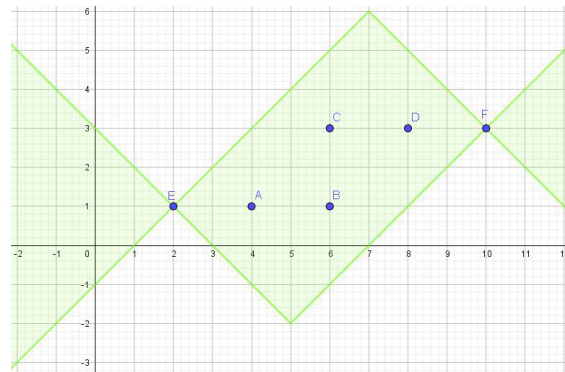


Figura 52: Contra - ejemplo Teorema A3

$$A = (4, 1), B = (6, 1), C = (6, 3) \text{ y } D = (8, 3)$$

$$d_{\infty}(A, D) = 4 \quad (8)$$

$$d_{\infty}(A, B) + d_{\infty}(B, C) + d_{\infty}(C, D) = 6 \quad (9)$$

por 7 y 8 se puede concluir que

$$d_{\infty}(A, D) \neq d_{\infty}(A, B) + d_{\infty}(B, C) + d_{\infty}(C, D) \quad (10)$$

Así que no se cumple $A - B - C - D$

3.1.4. Teorema A4

Si A y B son dos puntos, entonces

1. Existe un punto C tal que $A - B - C$
2. Hay un punto D tal que $A - D - B$

La respectiva correspondencia haciendo uso de la métrica del máximo, el enunciado del teorema queda de la siguiente manera:

Si A y B son dos puntos, entonces

1. Existe un punto C tal que $A_{\infty} - B_{\infty} - C_{\infty}$
2. Hay un punto D tal que $A_{\infty} - D_{\infty} - B_{\infty}$

Al realizar el estudio de este teorema resulta evidente que:

1. Se refiere al teorema punto al lado, el cual se estudio y se demostró para determinar los rayos en la métrica del máximo.
2. Se refiere al teorema punto entre, el cual se estudio y se demostró para determinar los segmentos en la métrica del máximo.

3.1.5. Teorema A5

Si $A - B - C$, entonces A , B y C son tres puntos diferentes de la misma recta.

Enunciado que corresponde al teorema, haciendo uso de la métrica del máximo es:

Si $A_\infty - B_\infty - C_\infty$, entonces A , B y C son tres puntos diferentes de la misma recta.

Al revisar lo que establece este teorema, se encuentra que es una afirmación que se ha estado usando desde el inicio del trabajo, ya que bajo la definición de interestancia, se considera que A , B y C son tres puntos diferentes de la misma recta.

3.1.6. Propiedades interestancia

1. Si $A - B - C$ y $B - C - D$, entonces $A - C - D$

Al realizar la correspondencia, haciendo uso de la métrica del máximo, se obtiene.

Si $A_\infty - B_\infty - C_\infty$ y $B_\infty - C_\infty - D_\infty$, entonces $A_\infty - C_\infty - D_\infty$

Demostración: si se tiene dado $A_\infty - B_\infty - C_\infty$ y $B_\infty - C_\infty - D_\infty$, entonces por definición de interestancia del máximo

$$d_\infty(A, B) + d_\infty(B, C) = d_\infty(A, C) \quad (11)$$

y

$$d_\infty(B, C) + d_\infty(C, D) = d_\infty(B, D) \quad (12)$$

por propiedades de los reales

$$d_\infty(B, C) = d_\infty(B, D) - d_\infty(C, D) \quad (13)$$

sustituyendo 12 en 10

$$d_\infty(A, B) + d_\infty(B, D) - d_\infty(C, D) = d_\infty(A, C) \quad (14)$$

por propiedades de los reales

$$d_{\infty}(A, B) + d_{\infty}(B, D) = d_{\infty}(A, C) + d_{\infty}(C, D) \quad (15)$$

por propiedades de los reales

$$d_{\infty}(A, D) = d_{\infty}(A, C) + d_{\infty}(C, D) \quad (16)$$

por definición de interestancia

$$A - C - D$$

2. si $A - B - C$ y $A - D - C$, entonces $A - B - D - C$, $A - D - B - C$ o $B = D$

La respectiva correspondencia haciendo uso de la métrica del máximo, el enunciado de la propiedad queda de la siguiente forma:

si $A_{\infty} - B_{\infty} - C_{\infty}$ y $A_{\infty} - D_{\infty} - C_{\infty}$, entonces $A_{\infty} - B_{\infty} - D_{\infty} - C_{\infty}$, $A_{\infty} - D_{\infty} - B_{\infty} - C_{\infty}$ o $B = D$

Demostración: si se tiene dado $A_{\infty} - B_{\infty} - C_{\infty}$ y $A_{\infty} - D_{\infty} - C_{\infty}$, entonces por definición de interestancia

$$d_{\infty}(A, B) + d_{\infty}(B, C) = d_{\infty}(A, C) \quad (17)$$

y

$$d_{\infty}(A, D) + d_{\infty}(D, C) = d_{\infty}(A, C) \quad (18)$$

ya que tanto 16 y 17, resultan ser iguales a $d_{\infty}(A, C)$, al igualar las ecuaciones

$$d_{\infty}(A, B) + d_{\infty}(B, C) = d_{\infty}(A, D) + d_{\infty}(D, C) \quad (19)$$

hasta aquí la demostración permitiría decir que B y D están en el \overline{AC}_{∞} , pero no se puede concluir esto, ya que como se muestra en la figura 53

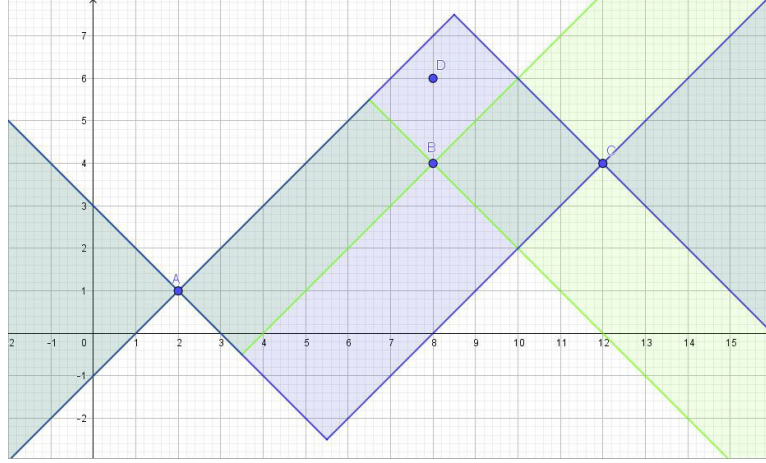


Figura 53: Contra - ejemplo Propiedad 2

$A = (2, 1)$, $B = (8, 4)$, $C = (12, 4)$ y $D = (8, 6)$ los cuales cumplen $A_\infty - B_\infty - C_\infty$ y $A_\infty - D_\infty - C_\infty$

$$d_\infty(A, C) = 10 \quad (20)$$

$$d_\infty(A, B) + d_\infty(B, D) + d_\infty(D, C) = 12 \quad (21)$$

por 19 y 20 se puede concluir que

$$d_\infty(A, B) + d_\infty(B, D) + d_\infty(D, C) \neq d_\infty(A, C) \quad (22)$$

Así que no se cumple $A_\infty - B_\infty - D_\infty - C_\infty$

$$d_\infty(A, D) + d_\infty(D, B) + d_\infty(B, C) = 12 \quad (23)$$

por 19 y 22 se puede concluir que

$$d_\infty(A, D) + d_\infty(D, B) + d_\infty(B, C) \neq d_\infty(A, C) \quad (24)$$

Así que no se cumple $A_\infty - D_\infty - B_\infty - C_\infty$, como B y D tienen diferentes coordenadas también se puede asegurar que $B \neq D$, así que la propiedad 2 en la geometría del máximo no se cumple.

3.2. Segmentos, rayos y ángulos

3.2.1. Teorema A6

Si A y B son dos puntos diferentes, entonces $\overline{AB} = \overline{BA}$

Al realizar la respectiva correspondencia de este teorema, bajo la métrica del máximo, se obtiene:

Si A y B son dos puntos diferentes, entonces $\overline{AB}_\infty = \overline{BA}_\infty$

Demostración: Esta demostración es muy sencilla, y resulta por la definición de la métrica del máximo. Este teorema representa la propiedad reflexiva de la congruencia de segmentos, por tanto la demostración formal, se puede observar mas adelante, en el capítulo de congruencia de segmentos.

3.2.2. Propiedad R1

Si C es un punto del \overrightarrow{AB} diferente de A entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

La interpretación de este teorema bajo la métrica del máximo es la siguiente:

Si C es un punto del $\overrightarrow{AB}_\infty$ diferente de A entonces $\overrightarrow{AB}_\infty = \overrightarrow{AC}_\infty$

Para esta propiedad, se puede afirmar que no siempre se cumple que los rayos sean iguales, a continuación se presenta un contra-ejemplo que muestra que, si hay un punto C diferente de A que pertenece al $\overrightarrow{AB}_\infty$, los rayos no son iguales, en esta imagen se puede observar la intersección de los dos rayos y evidenciar que hay secciones que no comparten:

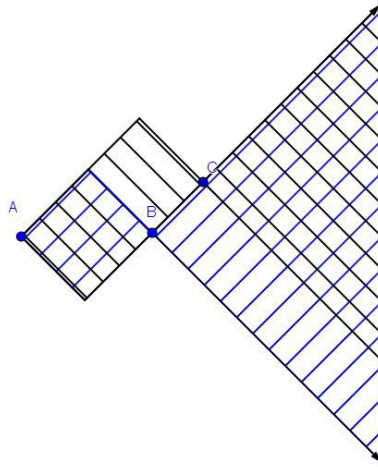


Figura 54: Contraejemplo - Propiedad rayos iguales

3.2.3. Propiedad R2

Si B_1 y C_1 son puntos de \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} diferentes de A , entonces $\angle BAC = \angle B_1AC_1$

Esta propiedad queda completamente igual, bajo la simbología de la métrica del máximo:

Si B_1 y C_1 son puntos de $\overrightarrow{AB}_\infty$ y $\overrightarrow{AC}_\infty$ diferentes de A , entonces $\angle BAC = \angle B_1AC_1$

Justificación: Ya se observó en la propiedad anterior de *Rayos iguales*, que cuando hay un punto C_1 diferente de A , que pertenece al $\overrightarrow{AC}_\infty$, no se cumple que los rayos sean el mismo. Por lo tanto, para este caso tampoco se cumpliría la propiedad.

Además, cabe resaltar que se estudió este teorema de la geometría usual que involucra ángulos, dado que no fue necesario hacer uso de la medida; de lo contrario, inmediatamente se podía descartar.

3.3. Rectas

3.3.1. Intersección de rectas

T. Intersección de rectas: Si dos rectas distintas, m y l se intersecan entonces su intersección es un único punto.

Al realizar la exploración de la intersección de rectas, teniendo en cuenta el teorema anterior y al interpretado bajo las rectas de la métrica del máximo, se puede establecer que dicho teorema no es válido, concluyendo entonces que la intersección de dos rectas, en la métrica del máximo, no siempre es un único punto.

En la figura 55 se puede observar el único caso que se ha encontrado, donde la intersección de dos rectas del caso 1, su resultado es un único punto E

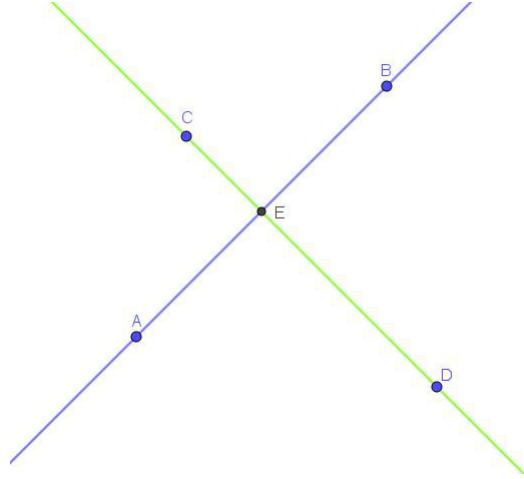


Figura 55: $\overleftrightarrow{AB}_\infty \cap \overleftrightarrow{CD}_\infty$

En la figura 56 se puede observar un claro contra ejemplo del teorema en como la intersección de dos rectas del caso 2 dan como resultado un segmento y dos rayos $(\overrightarrow{CD}_\infty \cup \overrightarrow{CA}_\infty \cup \overrightarrow{DB}_\infty)$

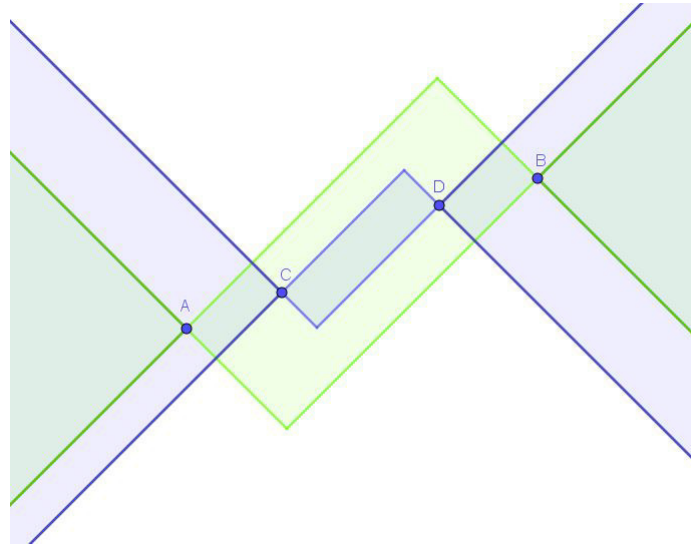


Figura 56: $\overleftrightarrow{AB}_\infty \cap \overleftrightarrow{CD}_\infty$

En la figura 57 se puede observar un contra ejemplo del teorema, aquí se evidencia cómo la intersección de una recta del caso 2 y una recta del caso 3 dan como resultado un \overline{ES}_∞

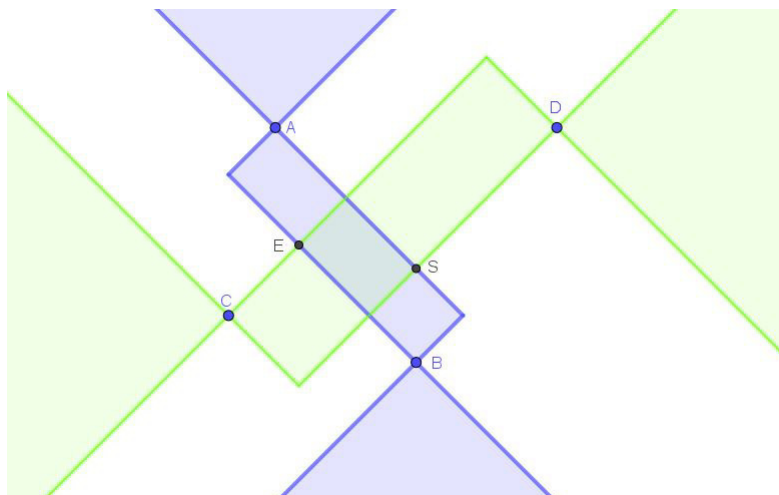


Figura 57: $\overleftrightarrow{AB}_\infty \cap \overleftrightarrow{CD}_\infty$

3.3.2. Rectas perpendiculares

Al realizar la exploración de la existencia de rectas perpendiculares, teniendo en cuenta los siguientes teoremas.

T. Cuatro ángulos rectos: si dos rectas son perpendiculares, entonces se determinan cuatro ángulos rectos.

Se puede concluir que no existen una recta perpendicular a otra, ya que al realizar un trabajo con la métrica del máximo, se encontró que no se le puede asignar un real a un ángulo, por lo tanto no se puede decir que la intersección de dos rectas determinen uno o cuatro ángulos rectos.

T. Existencia perpendicular punto externo: Por un punto externo a una recta dada existe una recta perpendicular a dicha recta.

Por la justificación del teorema anterior, es evidente que no existe una recta perpendicular a otra dada por un punto externo.

3.3.3. Rectas paralelas

Al realizar la exploración de la existencia de rectas paralelas usando la métrica del máximo y teniendo en cuenta el siguiente postulado y definición.

P. Existencia de paralela: Dada una recta l y un punto P tal que $P \notin l$. Entonces existe

una recta m tal que $m \parallel l$ y $P \in m$

En la figura 58 se puede evidenciar que si se tiene una $\overleftrightarrow{AB}_\infty$ que se llamaría la recta l y un punto P tal que $P \notin l$. No se puede encontrar en ninguno de los tres casos de recta, una recta $\overleftrightarrow{CD}_\infty$ que se llamaría recta m tal que $m \parallel l$ y $P \in m$

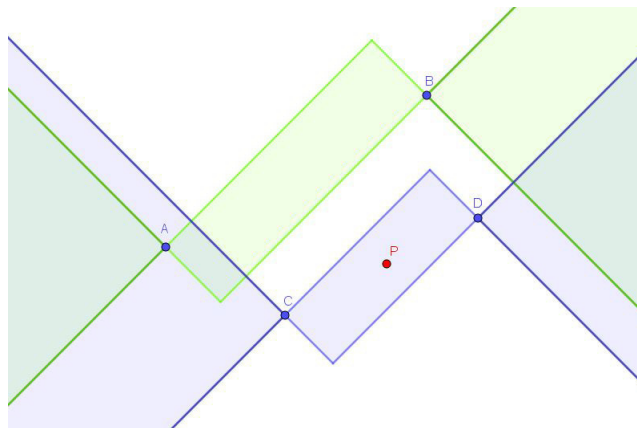


Figura 58: Interpretación del postulado

Para demostrar que dos rectas de la métrica del máximo siempre se intersectan, se debe tener en cuenta que k, n, h y l determinan a la $\overleftrightarrow{AB}_\infty$ y p, i, j y g determinan a la $\overleftrightarrow{CD}_\infty$, como se muestra en la figura 59

Construcción Geométrica	
1. $k \perp l, l \perp n$ y $n \perp h$	Construcción recta del máximo.
2. $g \perp i, i \perp j$ y $j \perp p$	Construcción recta del máximo.
3. l y g estan a 45° del eje x	Construcción recta del máximo.
4. $l \parallel g$	D. rectas paralelas.
5. $p \perp g$	T. paralela perpendicular
6. $\exists E/E = p \cap g$	D. rectas paralelas.

Cuadro 12: Demostración intersección rectas paralelas

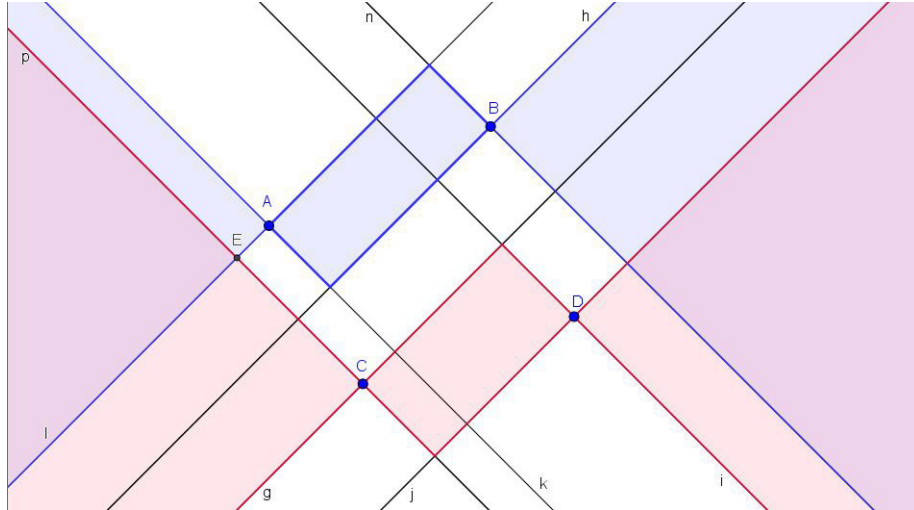


Figura 59: Interpretación del postulado

De esta forma queda demostrado que dos rectas de la métrica del máximo que cumplen el postulado y parecen ser paralelas siempre se intersectan en al menos un punto.

D. Paralelismo: Dos rectas son paralelas si son coplanares y no se interseca (no tienen puntos en común).

Como consecuencia de la interpretación que se hizo del postulado y la demostración donde dos rectas paralelas siempre se intersectan en al menos un punto, al observar la definición de paralelismo, se puede concluir que no existen las rectas paralelas cuando se hace uso de las rectas en la métrica del máximo.

4. Congruencia de segmentos en la métrica del máximo

Para establecer la congruencia de segmentos en la métrica del máximo, se tendrá como base la siguiente definición.

Segmentos congruentes: Dados \overline{AB} y \overline{CD} , $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ si y solo si $AB = CD$.

Partiendo de esto se establece que si la distancia del máximo entre los puntos del \overline{AB}_∞ y \overline{CD}_∞ es:

$$d_\infty(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$$

$$d_\infty(C, D) = \max\{|x_3 - x_4|; |y_3 - y_4|\}$$

así es que por definición de segmentos congruentes \overline{AB}_∞ y \overline{CD}_∞ son congruentes si cumplen

$$\max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} = \max\{|x_3 - x_4|; |y_3 - y_4|\}$$

Para poder identificar cuáles son los segmentos que cumplen la definición de congruencia, se inició la exploración teniendo como base en la idea que se presenta en la Geometría Plana de Euclides, la cual se realiza basándose en una circunferencia (en la métrica del máximo la circunferencia es un cuadrado), así que aquí se hará lo mismo, usando una circunferencia de radio AB^3 , nuevamente se evidencian tres casos, como los elaborados previamente en la representación de los segmentos.

Caso 1

Si se tiene \overline{AB}_∞ , \overline{AC}_∞ , \overline{AD}_∞ y \overline{AE}_∞ son congruentes de tal forma que al calcular la distancia entre cada uno de los puntos la solución indique que $\triangle X = \triangle Y$ se obtiene la siguiente representación de segmentos congruentes.

³ En el curso de geometría plana de la U.P.N es la notación AB

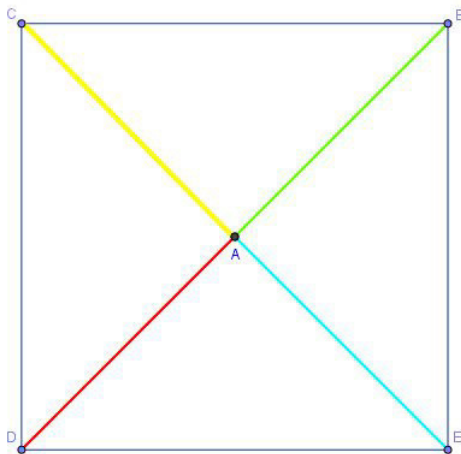


Figura 60: Segmentos congruentes caso 1

Caso 2

Nuevamente \overline{AB}_∞ , \overline{AC}_∞ , \overline{AD}_∞ y \overline{AE}_∞ son congruentes, pero esta vez al calcular la distancia entre cada uno de los puntos la solución indique que $\triangle X > \triangle Y$ se obtiene la siguiente representación de segmentos congruentes

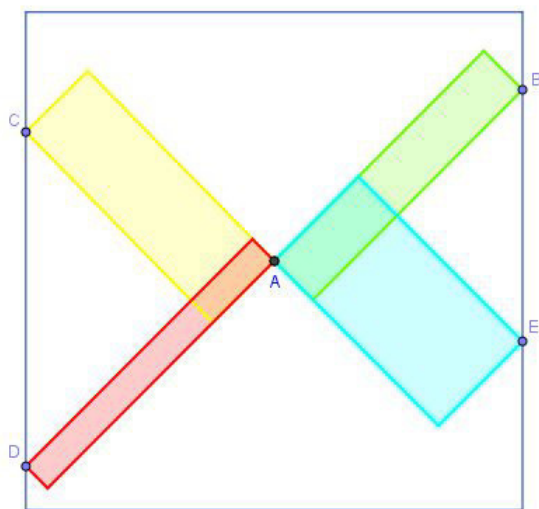


Figura 61: Segmentos congruentes caso 2

Caso 3

por ultimo \overline{AB}_∞ , \overline{AC}_∞ , \overline{AD}_∞ y \overline{AE}_∞ son congruentes, pero esta vez al calcular la distancia entre cada uno la solución indique que $\Delta X > \Delta Y$ se obtiene la siguiente representación de segmentos congruentes

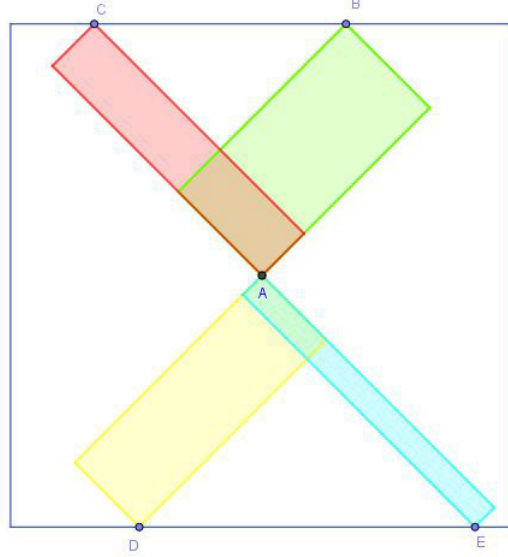


Figura 62: Segmentos congruentes caso 3

4.1. Congruencia de segmentos

i) Propiedad reflexiva: cada segmento es congruente consigo mismo, es decir: $\overline{AB}_\infty \cong \overline{BA}_\infty$ para todo segmento \overline{AB}_∞

ii) Propiedad de simetría: si $\overline{AB}_\infty \cong \overline{CD}_\infty$ entonces $\overline{CD}_\infty \cong \overline{AB}_\infty$

iii) Propiedad transitiva: si $\overline{AB}_\infty \cong \overline{CD}_\infty$ y $\overline{CD}_\infty \cong \overline{EF}_\infty$, entonces $\overline{AB}_\infty \cong \overline{EF}_\infty$

Demostración

Si se tiene que

$$d_\infty(AB) = \text{Max}\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$$

$$d_\infty(CD) = \text{Max}\{|x_3 - x_4|; |y_3 - y_4|\}$$

i) propiedad reflexiva

Por propiedad reflexiva de la igualdad

$$\text{Max}\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} = \text{Max}\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$$

Por propiedades de los reales

$$\text{Max}\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} = \text{Max}\{|x_2 - x_1|; |y_2 - y_1|\}$$

Ahora por definición de congruencia de segmentos

$$\overline{AB}_\infty \cong \overline{BA}_\infty$$

ii) propiedad simétrica

Si se tiene que

$$\overline{AB}_\infty \cong \overline{CD}_\infty$$

Por definición de segmentos congruentes

$$\text{Max}\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} = \text{Max}\{|x_3 - x_4|; |y_3 - y_4|\}$$

Usando la propiedad simétrica de la igualdad

$$\text{Max}\{|x_3 - x_4|; |y_3 - y_4|\} = \text{Max}\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$$

Ahora por definición de congruencia de segmentos se puede concluir que

$$\overline{CD}_\infty \cong \overline{AB}_\infty$$

iii) propiedad transitiva

Si se tiene un segmento \overline{EF}_∞ tal que

$$d_{\infty}(EF) = \text{Max}\{|x_5 - x_6|; |y_5 - y_6|\}$$

Si

$$\overline{AB}_{\infty} \cong \overline{CD}_{\infty}$$

$$\text{Max}\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} = \text{Max}\{|x_3 - x_4|; |y_3 - y_4|\}$$

y

$$\overline{CD}_{\infty} \cong \overline{EF}_{\infty}$$

$$\text{Max}\{|x_3 - x_4|; |y_3 - y_4|\} = \text{Max}\{|x_5 - x_6|; |y_5 - y_6|\}$$

Igualando los mismos valores que son congruentes con el \overline{CD}_{∞} , se tendrá que

$$\text{Max}\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} = \text{Max}\{|x_3 - x_4|; |y_3 - y_4|\} = \text{Max}\{|x_5 - x_6|; |y_5 - y_6|\}$$

Por propiedad transitiva de la igualdad

$$\text{Max}\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\} = \text{Max}\{|x_5 - x_6|; |y_5 - y_6|\}$$

Al sustituir lo que la distancia por su segmento correspondiente se puede concluir que

$$\overline{AB}_{\infty} \cong \overline{EF}_{\infty}$$

Después de demostrar que la congruencia de segmentos en la geometría del máximo cumple las propiedades de ser reflexiva, simétrica y transitiva, se puede concluir que la congruencia es una relación de equivalencia.

4.2. Representante de la congruencia

Después de haber mostrado que los segmentos de la métrica del máximo que llamaremos S con la congruencia, que será \cong , determinan una relación de equivalencia.

Se considera que el representante será un segmento anclado al origen que esta contenido en una recta, que determina un ángulo de 45° respecto del eje X , como se muestra en la figura 63.

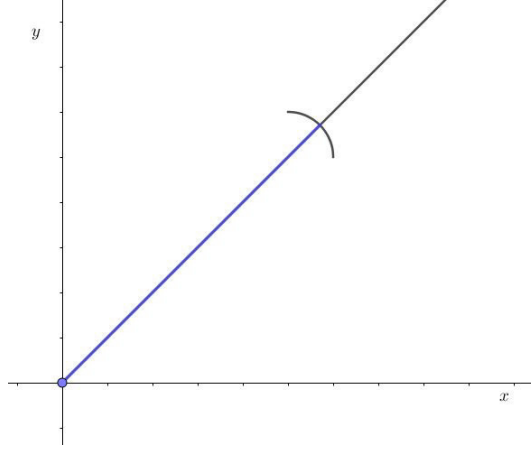


Figura 63: Representante de un segmento de la métrica del máximo

4.3. Conjunto cociente de la congruencia

A partir de la definición de conjunto cociente, se llega a que el conjunto de segmentos S con la congruencia \sim determinan el siguiente conjunto cociente.

$$S / \sim = [0, \infty)$$

4.3.1. Del segmento al representante

La forma de encontrar desde cualquier segmento de la métrica del máximo el representante es:

1. Dado un \overline{AB}_∞ y una recta m que esta a 45 del eje x .
2. Se traza una l tal que $l \perp$ al eje x por B .
3. Se determina un C tal que $C = l \cap m$.
4. Se traza una n tal que $n \perp$ al eje x por A .
5. Se determina un D tal que $D = n \cap m$.
6. Se determina un O tal que O es la intersección del eje x con el eje y .
7. Se traza una $\odot_{O,CD}$.
8. Se determina un P tal que $P = \odot_{O,CD} \cap m$.

El \overline{OP} sera el representante de todos los segmentos congruentes a \overline{AB}_∞ .

Esta construcción muestra el representante si el \overline{AB}_∞ es del caso 1 o 2 , si se quiere encontrar el representante del segmento que cumple caso 3 se deben trazar l y n paralelas al eje x .

Un ejemplo del representante del caso 2, al realizar los anteriores pasos se presenta en la figura 64.

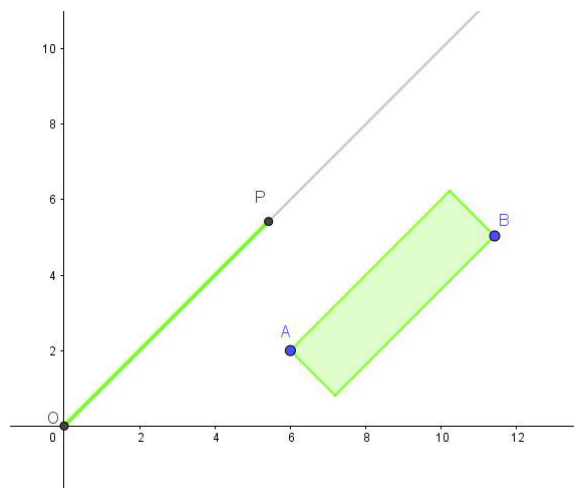


Figura 64: Representante de un segmento de la métrica del máximo

En los siguientes enlaces encuentran construcciones en Geogebra, donde a partir del segmento se muestra el representante.

Segmento caso 2

<https://ggbm.at/VhhHUX7J>

Segmento caso 3

<https://ggbm.at/gKUBTQv3>

4.3.2. Del representante al conjunto de segmentos congruentes

La forma de encontrar desde el representante, el conjunto de segmentos congruentes:

1. Dado un \overline{AB}_∞ y su representante \overline{RS} .
2. Se traza una l tal que $l \perp$ al eje x por S .
3. Se traza una n tal que $n \perp l$ por S .
4. Se determina un I tal que $I = l \cap \text{eje } x$.
5. Se determina un K tal que $K = n \cap \text{eje } y$.
6. Se traza una r tal que $r \parallel \overleftrightarrow{RS}$ por K .
7. Se traza una t tal que $t \parallel \overleftrightarrow{RS}$ por I .
8. Se determina un P tal que $P = r \cap t$.
9. Se determina un O tal que $O = r \cap t$.

El \overline{KS} y \overline{SI} del polígono $RPKSIO$ son el lugar donde se ubicara un punto de tal forma que este y R determinaran el conjunto de segmentos congruentes a \overline{AB}_∞ .

Un ejemplo del conjunto de congruencias del segmento de caso 2, al realizar los anteriores pasos se presenta en la figura 65

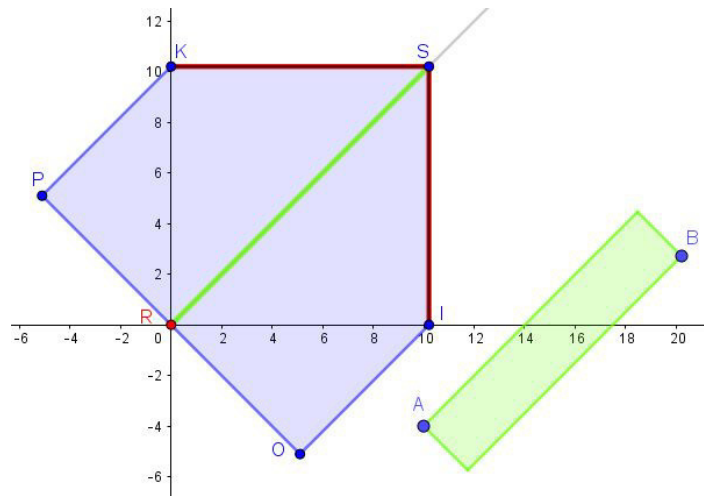


Figura 65: Representante de un segmento de la métrica del máximo

Así es que cada uno de los segmentos determinados por el representante es congruente a cualquier segmento (caso 1, 2 y 3) es congruente a cualquier segmento del plano de la misma medida.

En los siguientes enlaces se encuentran construcciones en Geogebra, donde a partir del segmento se muestra el representante y el conjunto de segmentos congruentes.

Segmento caso 2

<https://ggbm.at/tkUsYTZa>

Segmento caso 3

<https://ggbm.at/Raumj7K6>

4.4. Teorema adición

Si

1. $A - B - C$
2. $A' - B' - C'$
3. $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
4. $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

Entonces $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

Demostración:

Se debe tener en cuenta que se trabajara con la métrica del máximo, 1 y 2 serán $A_\infty - B_\infty - C_\infty$ y $A'_\infty - B'_\infty - C'_\infty$ respectivamente.

Por definición de interestancia y congruencia de segmentos del máximo

$$d_\infty(A, B) + d_\infty(B, C) = d_\infty(A, C) \quad (1)$$

$$d_{\infty}(A', B') + d_{\infty}(B', C') = d_{\infty}(A', C') \quad (2)$$

$$d_{\infty}(A, B) = d_{\infty}(A', B') \quad (3)$$

$$d_{\infty}(B, C) = d_{\infty}(B', C') \quad (4)$$

Sustituyendo 3 y 4 en 1

$$d_{\infty}(A', B') + d_{\infty}(B', C') = d_{\infty}(A, C) \quad (5)$$

con 2 y 5 se tiene que

$$d_{\infty}(A', C') = d_{\infty}(A, C) \quad (6)$$

Por definición de congruencia se segmentos del máximo en 6 se puede concluir que

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$$

A continuación se presenta un ejemplo de este teorema

Si $A = (1, 2)$, $B = (4, 4)$, $C = (6, 5)$, $A' = (4, 1)$, $B' = (7, 3)$, $C' = (9, 4)$

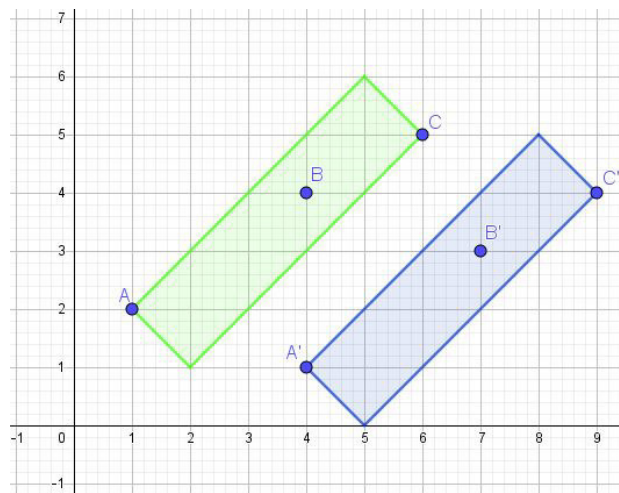


Figura 66: Ejemplo teorema adición

Donde se cumple $A - B - C$, $A' - B' - C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

Como la $d_\infty(A, C) = 5$ y $d_\infty(A', C') = 5$ por lo tanto, por definición de segmentos congruentes se puede concluir que $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

4.5. Teorema sustracción

Si

1. $A - B - C$
2. $A' - B' - C'$
3. $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
4. $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

Entonces $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

Demostración:

Se debe tener en cuenta que se trabajara con la métrica del máximo, 1 y 2 serán $A_\infty - B_\infty - C_\infty$ y $A'_\infty - B'_\infty - C'_\infty$ respectivamente.

Por definición de interestancia y congruencia de segmentos del máximo

$$d_\infty(A, B) + d_\infty(B, C) = d_\infty(A, C) \quad (1)$$

$$d_\infty(A', B') + d_\infty(B', C') = d_\infty(A', C') \quad (2)$$

$$d_\infty(A, B) = d_\infty(A', B') \quad (3)$$

$$d_\infty(A, C) = d_\infty(A', C') \quad (4)$$

Sustituyendo 3 y 4 en 1

$$d_\infty(A', B') + d_\infty(B, C) = d_\infty(A', C') \quad (5)$$

con 2 y 5 se tiene que

$$d_{\infty}(B', C') = d_{\infty}(B, C) \quad (6)$$

por definición de congruencia se segmentos del máximo en 6, se puede concluir que

$$\overline{B'C'} \cong \overline{BC}$$

A continuación se presenta un ejemplo de este teorema

Si $A = (1, 2)$, $B = (8, 1)$, $C = (2, 6)$, $A' = (8, 1)$, $B' = (7, 4)$, $C' = (8, 6)$

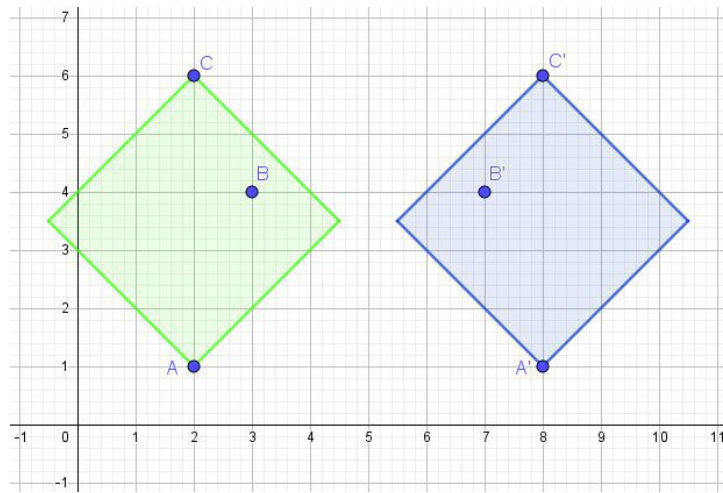


Figura 67: Ejemplo teorema sustracción

Donde se cumple $A - B - C$, $A' - B' - C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

Como la $d_{\infty}(B, C) = 2$ y $d_{\infty}(B', C') = 2$ por lo tanto, por definición de segmentos congruentes se puede concluir que $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

5. Punto medio y mediatriz

5.1. Punto medio en la métrica del máximo

Definición de punto medio: En el \overline{AB} , M es punto medio si se cumplen las siguientes condiciones:

- $A - M - B$
- $d(A, M) = d(M, B)$

Para determinar la forma que adquiere el punto medio de un segmento, al ser trabajado utilizando la métrica del máximo, se reescribirá la definición de la siguiente forma.

En el \overline{AB}_∞ , M es punto medio si se cumplen las siguientes condiciones:

- $A_\infty - M_\infty - B_\infty$
- $d_\infty(A, M) = d_\infty(M, B)$

se obtiene lo siguiente gracias a la exploración realizada. Hay que recordar que anteriormente se concluyó que existen 3 tipos de segmentos, por tanto, para cada uno de ellos se determina un punto medio distinto.

Caso 1: Segmento en el cual $\triangle X = \triangle Y$, en este caso el segmento max tiene la misma representación que en la geometría usual, Por tanto ocurre lo mismo con el punto medio.

Caso 2: El segmento de la figura 68 en el cual $\triangle X > \triangle Y$, la representación del punto medio máximo es:

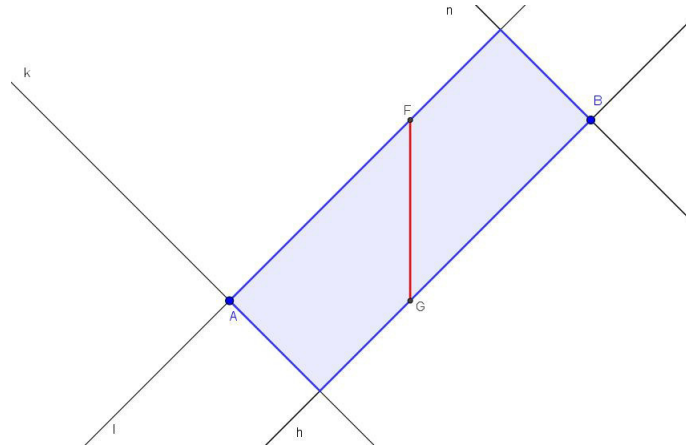


Figura 68: Segmento medio caso máximo 2

En el siguiente enlace se encuentra un \overline{AB}_∞ con el punto medio máximo, en este caso, \overline{FG} en el que se puede mover el punto X y confirmar que se cumple $d_\infty(A, X) = d_\infty(X, B)$.
<https://ggbm.at/cPZZWKFN>

Caso 3. Segmento de la figura 69 en el cual $\triangle Y > \triangle X$, la representación del punto medio máximo es:

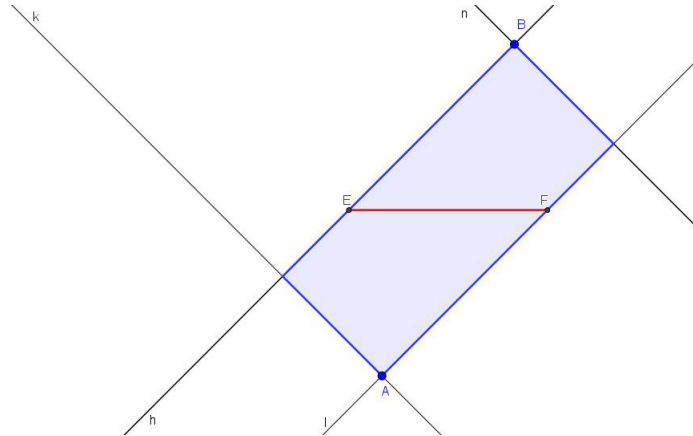


Figura 69: Punto medio máximo caso 3

A continuación, se comprueba que el \overline{FG} representa el punto medio en los segmentos contruidos con base en la métrica del máximo. Se realizará la demostración para el caso 3 en el que $\triangle Y > \triangle X$, ya que son comprobaciones análogas.

Para la demostración del punto medio máximo se presenta el siguiente esquema, el cual muestra la estructura a seguir durante la prueba:

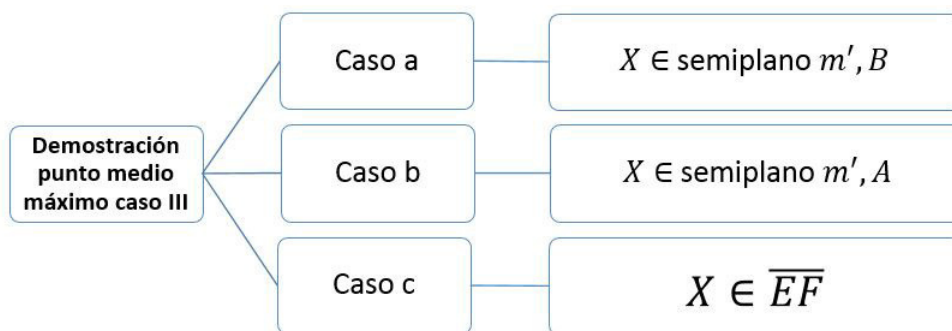


Figura 70: Estructura de la demostración

En la figura 71 se encuentra la construcción con la cual se realiza la demostración del segmento medio que, en la métrica en cuestión, es \overline{FG}

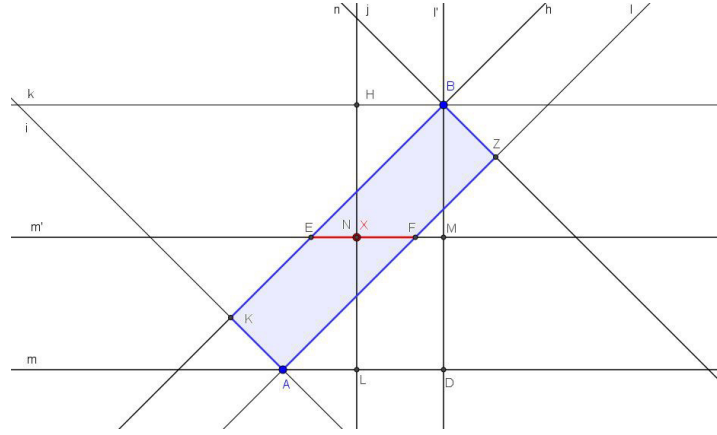


Figura 71: Construcción punto medio máximo caso 3

En primer lugar se ubica X en el \overline{AB}_∞ , lo cual lleva a que dicho punto esté en el \overline{FG} o en los semiplanos que se determinan por la recta FG teniendo en cuenta únicamente las regiones del \overline{AB}_∞ que se determinan, ya que el punto medio, debe ser parte de él.

Demostración	
1. \overline{AB}_∞	Dado.
2. $\square AKBZ$	construcción cuadro 1.
3. $\exists l' l' \perp m$ por B	T. existencia perpendicular por punto externo.
4. $\exists D D = l' \cap m$	T. intersección de rectas.
5. $d_\infty(A, B) = DB$	D. distancia máximo. dado caso 3 ($\triangle Y > \triangle X$).
6. $\exists M M$ punto medio \overline{DB}	T. existencia punto medio.
7. $\exists m' m' \parallel m$ por M	T. existencia paralela.
8. $\exists E, F E = m' \cap h, F = m' \cap l$	T. intersección de rectas.
9. $\exists X X \in \overline{AB}_\infty$ a) $X \in$ semiplano m', B b) $X \in$ semiplano m', A c) $X \in \overline{EF}$	P. plano infinitos puntos.

Cuadro 13: Planteamiento demostración punto medio del máximo

Para el caso a, X se ubica en el semiplano m' donde esta B , permitiendo concluir que no es cierto que la $d_{\infty}(A, X) = d_{\infty}(X, B)$

Demostración	
10. $X \in \text{semitplano } m', B$	caso a.
11. $\exists i i \perp l'$ por B y $\exists j j \perp i$ por X	T. existencia por punto externo. T. existencia perpendicular punto de la recta.
12. $\exists H H = j \cap i$, $\exists L L = m \cap j$ y $\exists N N = m' \cap j$	T. intersección de rectas.
13. $DM = MB$	D. punto medio 5 y 6.
14. $DM + MB = DB$	D. segmento. D. interestancia.
15. $\overline{DM} \cong \overline{NL}$, $\overline{MB} \cong \overline{HN}$ y $\overline{BD} \cong \overline{HL}$	T. rectángulo - paralelogramo. T. condiciones paralelogramo.
16. $HL = LN + NH$	Sustitución 13 y 14.
17. $L - N - X$ y $N - X - H$	D. interestancia.
18. $LX > LN$, $NH > XH$ $LX > NH$, $NH > NX$	Propiedades de los reales.
19. $LX > XH$	Propiedades de los reales.
20. $LX + XH = LH$	D. segmento. D. interestancia.
21. $d_{\infty}(A, B) = LH = BD$	Sustitución 5 y 15
22. $\neg(LX = NX)$	Conclusión 18.

Cuadro 14: Demostración a caso III punto medio del máximo

Para el caso b, X se ubica en el semiplano m' donde esta A , llevando a que es análogo al caso a, se concluye que no es cierto que la $d_{\infty}(A, X) = d_{\infty}(X, B)$.

Demostración	
23. $X \in \text{semitplano } m', A$	Caso b.
24. $L - X - N$ y $X - N - H$	Análogo pasos 11 - 16.
25. $LX < KH$	Análogo pasos 17 - 18.
26. $\neg(LX = XH)$	Conclusión 25.

Cuadro 15: Demostración b caso III punto medio del máximo

Para el caso c, se establece que $X \in \overline{EF}$, a partir de la construcción realizada para el caso a, se concluye que la $d_\infty(A, X) = d_\infty(X, B)$.

Demostración	
27. $X \in \overline{EF}$	Caso c.
28. $N = X$	T. intersección de rectas.
29. $HL = LX + XH$ $DB = LX + XH$	Sustitución 5 y 15.
30. $LX = XH$	Propiedades de los reales 15 y 29.
31. $d_\infty(A, X) = d_\infty(X, B)$	Conclusión 29 y 39.

Cuadro 16: Demostración c caso III punto medio del máximo

En este enlace se encuentra la construcción en Geogebra de la demostración realizada anteriormente <https://ggbm.at/DE6nGZpJ> y en el siguiente se encuentra un \overline{AB}_∞ con el punto medio máximo \overline{FG} en el que se puede mover el punto X y confirmar que cumple $d_\infty(A, X) = d_\infty(X, B)$. <https://ggbm.at/prCuMnmng>

5.2. Mediatriz en la métrica del máximo

Definición de mediatriz: Dado \overline{PQ} . En un plano, la mediatriz del \overline{PQ} es la recta perpendicular al segmento que contiene su punto medio.

Para la construcción de la mediatriz en la métrica del máximo se debe tener en cuenta que cualquier punto H de la mediatriz de un \overline{AB}_∞ debe cumplir la siguiente condición: $d_\infty(A, H) = d_\infty(H, B)$.

Para determinar la forma que adquiere la mediatriz de un segmento, al ser trabajado a partir de la métrica del máximo, se generan las siguientes representaciones. Se debe tener en cuenta que se tienen 3 casos de segmento, por lo tanto, cada uno de ellos determina una representación diferente de mediatriz.

Caso 1: el \overline{AB}_∞ en el cual $\triangle X = \triangle Y$. En este caso el segmento tiene la misma representación que en la geometría usual, por ello la representación de la mediatriz no cambia.

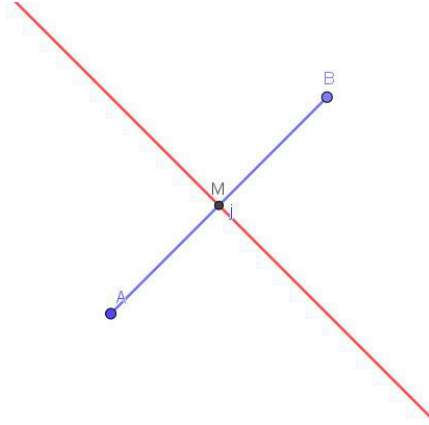


Figura 72: Mediatriz caso 1

Caso 2: el \overline{AB}_∞ en el cual $\triangle X > \triangle Y$, la mediatriz tiene la siguiente representación

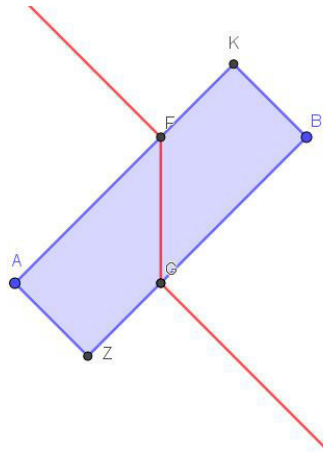


Figura 73: Mediatriz caso 2

A continuación, se demuestra que \overline{FG} unido a los extremos con dos rayos, representan a la mediatriz en los segmentos construidos con base en la métrica del máximo. Se realizará la demostración para el caso 2 en el que $\triangle X > \triangle Y$, ya que, como se ha venido trabajando, la demostración del caso 3 para este concepto geométrico también es análoga.

Para la demostración de mediatriz se presenta el siguiente esquema, en el cual se muestra la estructura a seguir durante la prueba.

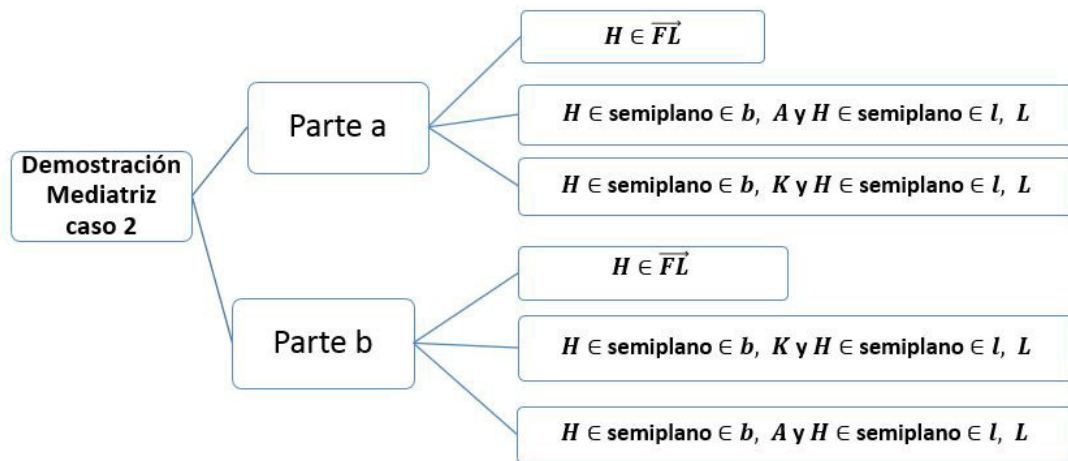


Figura 74: Estructura de la demostración

En la figura 75 se encuentra la construcción, con la que se realiza la demostración de la mediatriz del segmento caso 2

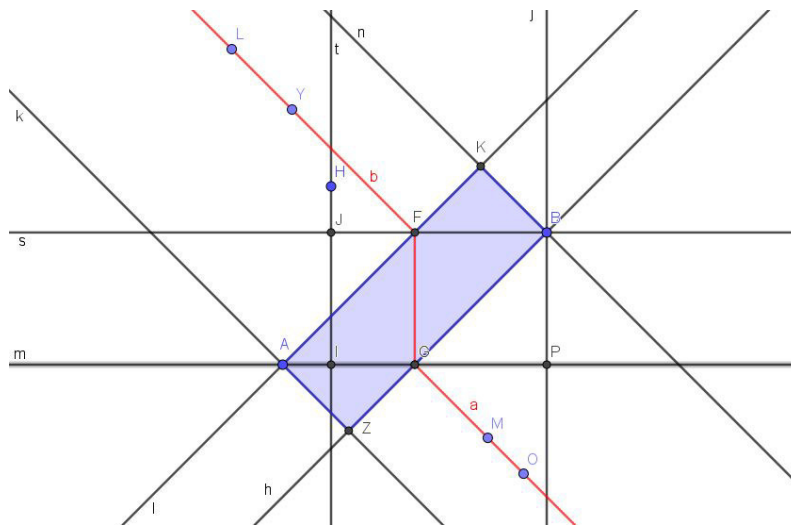


Figura 75: Construcción Mediatriz caso 2

Se inicia ubicando H en tres lugares, en \overline{FL} y en la intersección de dos semiplanos, el primero es b donde esta A y l donde esta L y el segundo b donde esta K y l donde esta L , se debe aclarar que el segmento FG , por ser punto medio en la métrica del máximo, ya cumple la condición de ser parte de la mediatriz en la métrica del máximo. (parte a)

Demostración	
1. \overline{AB}_∞	Dado.
2. $\square AKBZ$	Construcción cuadro 1.
3. \overline{FG}	D. punto medio máximo.
4. $\exists b b \perp s$ por F	T. existencia perpendicular por punto externo.
5. $\exists Y Y \in b$ y $Y \in$ semiplano l, B	T. recta infinitos puntos.
6. $\exists L F - Y - L$	T. Punto al lado.
7. \overrightarrow{FL}	D. rayo.
8. $\exists H $ a.1) $H \in \overrightarrow{FL}$ b.1) $H \in$ semiplano b, A y $H \in$ semiplano l, L c.1) $H \in$ semiplano b, K y $H \in$ semiplano l, L	P. plano infinitos puntos.

Cuadro 17: Planteamiento demostración parte a mediatriz del máximo.

La construcción de las rectas y la intersección de estas que se presentan a continuación servirán como base para la demostración o contradicción de cada uno de los casos de la demostración.

Demostración	
9. $\exists t t \perp m$ por H	T. existencia perpendicular punto externo.
10. $\exists s s \perp t$ por B	T. existencia perpendicular punto externo.
11. $\exists I, J \text{ y } k I = t \cap s, J = m \cap t$ y $P = j \cap m$	T. interseccion de rectas.

Para el caso a.1, se ubica H en el \overrightarrow{FL} , se logra demostrar principalmente a partir de triángulos, el *teorema ángulos desiguales - lados desiguales* y la definición de distancia que al estar H en este lugar cumple que la $d_\infty(A, H) = d_\infty(H, B)$.

Demostración	
12. $H \in \overrightarrow{FL}$	caso a1.
13. $d_{\infty}(A, F) = d_{\infty}(F, B)$	D. punto medio máximo.
14. $k \parallel b$	D. rectas paralelas.
15. $\angle HFI = 45, \angle FIH = 90$	Construcción.
16. $\triangle IHF$	D. de triángulo.
17. $\angle IHF = 45$	T. suma medidas de triángulo.
18. $\triangle IHF$	D. triángulo isósceles.
19. $\overline{HI} \cong \overline{IF}$	T. triángulo isósceles.
20. $HI = IF$	D. segmentos congruentes.
21. $d_{\infty}(F, H) = \{FI; HI\}$	D. distancia del máximo.
22. $d_{\infty}(F, H) = FI = HI$	Propiedades de los reales.
23. $\square IFGJ$ y $\square FBSG$ paralelogramos.	D. paralelogramo.
24. $IJ = FG$	T. paralelogramo, D. segmentos congruentes.
25. $\triangle FBG$	D. triángulo.
26. $\angle FBG = 45, \angle BFG = 90$	Construcción.
27. $\triangle FBG$ isósceles	D. triángulo isósceles.
28. $FG \cong FB$	T. triángulo isósceles.
29. $FG = FB$	D. segmentos congruentes.
30. $FB = IJ$	Sustitución 24 y 29.
31. $JH = HI + IJ$ y $BI = IF + FB$	D. segmento. D. interestancia.
32. $JH = BI$	sustitución 24, 30 y 31.
33. $d_{\infty}(A, H) = \{AJ; JH\}$	D. distancia del máximo.
34. $\angle AJH = 90$	D. rectas paralelas.
35. $\angle HAJ > 45$	construcción cuadro 1.
36. $\triangle FBG$	D. triángulo.
37. $\angle FBG < 45$	T. suma medidas de triángulo.
38. $JH > AJ$	T. ángulos desiguales - lados desiguales.
39. $d_{\infty}(A, H) = JH$	Propiedades de los reales 33 y 38.
40. $d_{\infty}(H, B) = \{IB; HI\}$	D. distancia del máximo,

Demostración	
41. $m\angle HIB = 90$	D. rectas paralelas.
42. $m\angle IBH < 45$	construcción cuadro 1.
43. $m \triangle HIB$	D. triángulo.
44. $m\angle IHB > 45$	T. suma medidas de triángulo.
45. $IB > HI$	T. ángulos desiguales - lados desiguales.
46. $d_{\infty}(H, B) = IB$	Propiedades de los reales 40 y 45.
47. $d_{\infty}(A, H) = d_{\infty}(H, B)$	Sustitución 32, 39 y 46.

Cuadro 18: Demostración parte a.1 caso II mediatriz del máximo

En el caso b1, se ubica H en el semiplano b donde esta A y en el semiplano l donde esta L llegando a la conclusión de que no es cierto $d_{\infty}(A, H) = d_{\infty}(H, B)$.

Demostración	
48. $H \in$ semiplano b, A y $H \in$ semiplano l, L	Caso b.1
49. $d_{\infty}(A, H) = \{AJ; JH\}$	D. distancia del máximo.
50. $d_{\infty}(A, H) = JH$	Análogo pasos 34 - 37.
51. $d_{\infty}(H, B) = \{IB; IH\}$	D. distancia del máximo.
52. $d_{\infty}(H, B) = JH$	Análogo pasos 41 - 45.
53. $JH = JI + HI$ y $IB = IF + FB$	D. segmento D. interestancia.
54. $IF = FB$	Análogo pasos 23 - 29
55. $m\angle HFI < 45$ y $m\angle FIH = 90$	Construcción.
56. $\triangle IHF$	D. triángulo.
57. $m\angle IHF > 45^{\circ}$	T. suma de medidas de triángulo.
58. $IF > HI$	T. ángulos desiguales - lados desiguales.
59. $JH = JI + HI$ y $IB = IF + IJ$	Sustitución 53 y 54.
60. $IH < IB$	Propiedades de los reales.
61. $d_{\infty}(A, H) < d_{\infty}(H, B)$	Propiedades de los reales 50, 52 y 60.

Cuadro 19: Demostración parte b.1 caso II mediatriz del máximo

En el caso c1, se ubica H en el semiplano b donde esta K y en el semiplano l donde esta L llegando a la conclusión de que no es cierto $d_{\infty}(A, H) = d_{\infty}(H, B)$.

Demostración	
62. $H \in$ semiplano b, K y $H \in$ semiplano l, L	Caso c1.
63. $JH > IB$	Análogo pasos 49 - 59.
64. $d_{\infty}(A, H) > d_{\infty}(H, B)$	Propiedades de los reales 63.

Cuadro 20: Demostración parte c.1 caso II mediatriz del máximo

En esta parte se demostró que el \overrightarrow{GO} hace parte de la mediatriz de la métrica del máximo, su justificación es análoga a la que se acaba de presentar. (parte b)

Demostración	
65. $\exists a a \perp h$ por G	T. existencia perpendicular por punto externo.
65. $\exists M M \in a$ y $M \in$ al semiplano determinado por h donde no esta A	T. recta infinitos puntos.
66. $\exists L F - M - O$	T. Punto al lado.
67. \overrightarrow{FO}	D. rayo.
68. $\exists H $ a.2) $H \in \overrightarrow{GO}$ b.2) $H \in$ semiplano a, B y $H \in$ semiplano h, O c.2) $H \in$ semiplano a, Z y $H \in$ semiplano h, O	P. plano infinitos puntos.
69. $\exists t t \perp m$ por H	T. existencia perpendicular punto externo.

Cuadro 21: Planteamiento demostracion parte b mediatriz del máximo.

Demostración	
70. $\exists s s \perp t$ por B	T. existencia perpendicular punto externo.
71. $\exists I, J \text{ Y } P J = t \cap s, I = m \cap t \text{ y } P = j \cap m$	T. interseccion de rectas.
72. $H \in \overrightarrow{GO}$	caso a2.
73. $d_{\infty}(A, H) = d_{\infty}(H, B)$	Análogo pasos 13 - 46.
74. $H \in$ semiplano a, B y $H \in$ semiplano h, O	Caso b2.
75. $d_{\infty}(A, H) < d_{\infty}(H, B)$	Análogo pasos 49 - 60.
76. $H \in$ semiplano a, Z y $H \in$ semiplano h, O	Caso c2.
77. $d_{\infty}(A, H) > d_{\infty}(H, B)$	Análogo paso 62 - 63

Cuadro 22: Demostración parte b caso II mediatriz del máximo

La anterior demostración nos permite concluir que la mediatriz en la métrica del máximo es $\overrightarrow{FL} \cup \overrightarrow{FG} \cup \overrightarrow{GO}$.

En los siguientes enlaces se encuentran las construcciones en Geogebra de la demostración realizada.

En este, <https://ggbm.at/NYhtwNkC>, se evidencia la construccion de los caso a1, b1 y c1.

En este, <https://ggbm.at/d6eHUnJj>, se evidencia la construccion de los caso a2, b2 y c2.

En este enlace, <https://ggbm.at/d6eHUnJj>, se encuentra un \overline{AB}_{∞} con la mediatriz del máximo. Allí se puede mover el punto X para confirmar que cumple $d_{\infty}(A, H) = d_{\infty}(H, B)$, sobre la mediatriz.

Caso 3. El \overline{AB}_∞ en el cual $\triangle Y > \triangle X$, la mediatriz tendrá la siguiente representación.

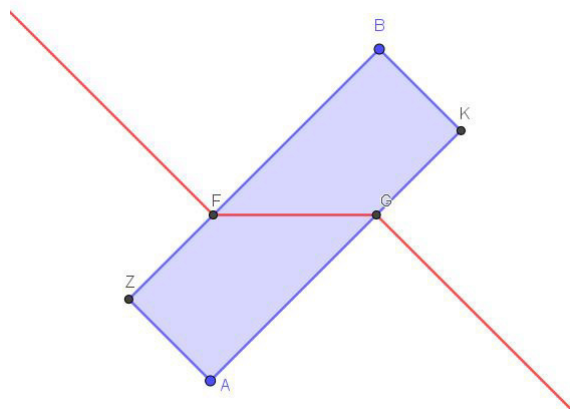


Figura 76: Punto medio caso 3

En este enlace, <https://ggbm.at/ENNJb4WR>, se encuentra un \overline{AB}_∞ con la mediatriz del máximo. Allí se puede mover el punto X para confirmar que cumple $d_\infty(A, H) = d_\infty(H, B)$, sobre la mediatriz.

Conclusiones

El estudio del segmento bajo la métrica del máximo, muestra que adquiere dos representaciones (un segmento usual y un cuadrilátero) que dependen de 3 diferentes ubicaciones del punto B , esto muestra una diferencia importante en comparación a la métrica usual, ya que se pasa de tener un solo tipo de representación de segmentos a tener tres; además el hecho de encontrar tres casos de segmentos obligó inmediatamente a los demás objetos geométricos a tener, también, tres casos distintos.

Es importante resaltar que, en esta métrica, se conserva la usual en todo sentido, cuando el punto B se encuentra en la recta de 45 respecto al eje x , construida y nombrada como recta (l), en este caso particular, (Caso 1), los segmentos, los rayos, las rectas, el punto medio y la mediatriz tenían la misma representación usual, por tanto, si se trabajan los objetos, únicamente con estas condiciones se cumple cada una de las propiedades geométricas de la métrica usual para cada uno de ellos.

Al aplicar la métrica del máximo, a objetos geométricos como el ángulo, se encontró que el combinar los diferentes casos de rayo, generan diferentes representaciones de ángulo, de este objeto se determinó que no se puede asignar un número real que represente su medida. En cuanto al triángulo construido con segmentos de la métrica del máximo, se encontró que sin importar el tipo de segmento que lo determine, el triángulo siempre será un rectángulo de la geometría usual.

En cuanto a los teoremas y propiedades que se estudiaron, asociados con los objetos geométricos reinterpretados, se encuentra que, de los relacionados con el objeto geométrico interesancia, solo se pueden demostrar dos de los cinco teoremas que se encuentran en el libro de Moise, E. (1963); y a los tres restantes se les proporciona un contra ejemplo, que muestra que no siempre cumple la condición estudiada.

Por otra parte de las propiedades relacionados con segmentos, rayos y ángulos, se encontró lo siguiente:

- Los segmentos cumplen la propiedad de ser reflexivos.
- Si existe un punto C que pertenece a un $\overrightarrow{AB}_\infty$, diferente de A y de B , no se cumple que los rayos AB y AC sean el mismo.

- Para determinar el rayo opuesto a uno dado, se establecen dos condiciones de manera que este objeto geométrico sea único, ya que si se elige cualquier punto que cumpla con la definición, se encuentran infinitos rayos opuestos.

Ahora, de los teoremas relacionados con rectas, se muestra que si dos rectas son distintas y se intersecan, su intersección no siempre es un único punto, ya que se pueden determinar dos rayos unidos con un segmento de la métrica del máximo; además también se encontró que no existen rectas perpendiculares pues no se pueden determinar ángulos de 90 y finalmente se muestra que no existen rectas paralelas, ya que cualquier dos rectas que se determinen se intersecan en al menos un punto.

Al estudiar la congruencia de segmentos generados por la métrica del máximo, se demuestra que la congruencia es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva), a partir de esto se encuentra el representante de todos los segmentos, el conjunto cociente y se elaboran instrucciones que pueden llevar de un segmento en cualquier posición del plano a su representante y del representante al conjunto de congruencias.

Luego, al estudiar la definición de punto medio y mediatriz de un segmento se encuentra que, como se mencionó anteriormente, en el caso 1 del segmento del máximo, el punto medio y la mediatriz tienen la misma representación de la métrica usual. Ahora, para los casos 2 y 3, en el caso del punto medio se determina un segmento de la métrica usual y para la mediatriz se determina un segmento unido con dos rayos de la geometría usual.

Realizar este tipo de trabajos y explorar las distintas métricas existentes, pueden ser de ayuda para comprender de manera más profunda el significado de distancia, ya que, al interpretar las cosas de manera no usual, se genera una motivación y un interés por descubrir las diferentes formas que adquieren los objetos si no se definen de manera convencional.

Se debe observar que, de una definición, bajo dos métricas distintas, se obtienen diferentes objetos geométricos, esto quiere decir que, si a una misma definición se le aplican diferentes métricas, entre las tantas que existen, se pueden obtener una gran cantidad de formas diferentes que significan lo mismo.

Por último se debe mencionar y sugerir que, el trabajo de reinterpretar la geometría de Euclides, a partir de la métrica del máximo, abre una nueva ventana para explorar, interpretar y

representar los elementos de la geometría del espacio o también identificar cuál sería la representación y las características de las secciones cónicas, que se obtienen a partir de la métrica del máximo.

Bibliografía

- Garcia, M. Ramirez, T. (S.F). Relaciones de equivalencia. Recuperado de: <https://ocw.ehu.es/file.php/133/algebra/tema1apto3.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional., (1998), Lineamientos curriculares de matemáticas. Bogotá D.C, Colombia.
- Moise, E., (1963). Elementary feometry from an Advanced Standpoint. Estados Unidos de América: The Book Company.
- Morris, S. (2010). Topología sin dolor. Recuperado de:<http://www.topologywithouttears.net/topbookspanish.pdf>
- Samper, C., Molina, O., Echeverry, A., (2013). Elementos de Geometría. Bogotá D.C, Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.
- Samper, C., Molina, O., (2013). Geometría plana, un espacio de aprendizaje. Bogotá D.C, Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.
- Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. (2012). Matemáticas para el cálculo. Recuperado de:http://190.90.112.209/precalculo_-_matematicas_para_el_calculo-1.pdf