

**ESTUDIO DE LA TOPOLOGÍA GENERADA EN \mathbb{R}^2 POR LA BASE
TOPOLÓGICA (\mathbb{R}^2 , triangulares)**

**EDWIN ANDRÉS ACERO GUTIÉRREZ
DUVAN ALEXIS ZABALA HUERTAS**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2015**

**ESTUDIO DE LA TOPOLOGÍA GENERADA EN \mathbb{R}^2 POR LA BASE
TOPOLÓGICA (\mathbb{R}^2 , triangulares)**

DUVAN ALEXIS ZABALA HUERTAS 2010140092 C.C. 1 023 922 657

EDWIN ANDRÉS ACERO GUTIERREZ 2010140001 C.C. 1 018 454 542

**Trabajo de grado como requisito para obtener el título de
Licenciado en Matemáticas**

Asesor:

GIL ALBERTO DE JESUS DONADO NUÑEZ

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.**

2015

Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura.

Bertrand Russell

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	ESTUDIO DE LA TOPOLOGÍA GENERADA EN \mathbb{R}^2 POR LA BASE TOPOLÓGICA (\mathbb{R}^2 , triangulares)
Autor(es)	Acero Gutiérrez, Edwin Andrés; Zabala Huertas, Duvan Alexis
Director	Donado Núñez, Gil Alberto de Jesús
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 88 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	TOPOLOGÍA, BASE, ELEMENTO, ABIERTO, CERRADO, CONJUNTO, REUNIÓN, INTERIOR, EXTERIOR, FRONTERA, ADHERENCIA, FINURA, COMPARACIÓN, CONEXIDAD, COMPACIDAD, SEPARACIÓN, ENUMERABILIDAD.

2. Descripción
El trabajo es un estudio de la base (\mathbb{R}^2 , triangulares), en el cual se analiza los elementos de la base (abiertos básicos) y reuniones de estos, cerrados, nociones topológicas, tales como interior, exterior, frontera y adherencia. Finalmente, propiedades topológicas, tales como conexidad, compacidad, separación y enumerabilidad.

3. Fuentes
Geogebra (s.f.). Recuperado el 12 de octubre del 2015, de https://www.geogebra.org .
Gonzales, A. (S.f.). “Topología semifinita superior en hiperespacios: desde la topología no Hausdorff a la geometría de los métricos compactos”. Facultad de Ciencias Matemáticas Departamento de geometría y Topología. Tesis, Universidad Complutense. Madrid España.
Lehman, Ch. (1989). “Geometría analítica” Editorial Limusa. México D. F.
Muñoz, J. (2003). “Topología básica”. Academia Colombiana de ciencias exactas, físicas y naturales Colección Julio Carrizosa Valenzuela. Universidad Nacional. Bogotá Colombia.
Neira, C. (2011). “Topología general”. Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional. Bogotá Colombia.

- Rubiano, G. (2002). "Topología general segunda edición". Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional. Bogotá Colombia.
- Sullivan, M. (2006). "Álgebra y trigonometría analítica séptima edición". México: Pearson Education.
- Willard, S. (1968). "General Topology". University of Alberta. EE. UU.

4. Contenidos

Este trabajo está dedicado al estudio de la topología generada por la base denominada (\mathbb{R}^2 , triangulares) cuya definición se encuentra en el libro "*Topología general*" de Gustavo Rubiano de la Universidad Nacional de Colombia.

En el capítulo 1, marco teórico, se plasma una introducción de la teoría que será necesaria para realizar el trabajo; describiendo definiciones y teoremas en los cuáles se basa el estudio a realizar. Además, de una descripción del software Geogebra con el cual se presentaran algunos ejemplos de los temas tratados.

En el capítulo 2, base topológica, se presenta, en primera instancia, la demostración de que (\mathbb{R}^2 , triangulares) corresponde a una base topológica en el plano cartesiano. Además, se muestran algunos ejemplos de abiertos generados por esta topología. También, se realiza un estudio sobre los abiertos básicos, determinando algunas características que cumplen.

En el capítulo 3, se muestra un estudio realizado a los conjuntos cerrados, esta sección está relacionada con el capítulo dos, puesto que se establecen algunos ejemplos de cerrados a partir de algunos abiertos propuestos previamente.

En el capítulo 4, conjuntos asociados, se realiza un estudio de algunas nociones topológicas, como interior, exterior, frontera y adherencia de algunos conjuntos asociados en relación con los abiertos básicos de la topología generada por la base (\mathbb{R}^2 , triangulares).

En el capítulo 5, comparación con otras topologías, se plantea la comparación entre la topología generada por la base (\mathbb{R}^2 , triangulares) y las topologías, usual y del orden lexicográfico, a partir de sus abiertos básicos. La finalidad de este capítulo, es concluir si alguna topología es más fina que otra o si no son comparables.

En el capítulo 6, propiedades topológicas, se realiza un estudio para verificar si la topología propuesta cumple o no algunas propiedades topológicas, tales como, conexidad, compacidad, separación y numerabilidad, los resultados obtenidos se presentan como teoremas.

Además se presenta un compilado de conclusiones que muestra los resultados más sobresalientes del trabajo.

5. Metodología

A partir de un ejercicio planteado en el libro “topología general” (2002) Pág. 16. de Gustavo Rubiano, en el que se plantea demostrar que la colección de regiones infinitas (\mathbb{R}^2 , *triangulares*) es base para una topología, se realiza un estudio para hacer explícitas las propiedades y nociones topológicas que cumple la topología generada por dicha base.

6. Conclusiones

A lo largo de la licenciatura se han trabajado diferentes conceptos matemáticos que enriquecieron y posibilitaron la elaboración del trabajo, esto se evidenció durante su diseño y validación, en particular, cuando se realizaron las demostraciones fue evidente la relación de dichos conceptos y la utilidad de su estudio.

Al realizar el estudio de algunas nociones topológicas, tales como interior, exterior, frontera y adherencia de algunos conjuntos asociados en relación con abiertos básicos de la topología generada por la base (\mathbb{R}^2 , **triangulares**), se observaron algunas regularidades o características, un ejemplo es el teorema 3, que establece una regularidad del interior de los conjuntos acotados.

El uso de Geogebra, ayudó a ampliar la información propuesta, a clarificar algunos temas y a evidenciar visualmente algunos ejemplos que se establecieron durante el desarrollo del trabajo.

Elaborado por:	Edwin Andrés Acero Gutiérrez Duvan Alexis Zabala Huertas
Revisado por:	Gil Alberto de Jesús Donado Núñez

Fecha de elaboración del Resumen:	28	10	2015
------------------------------------------	----	----	------

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN	7
JUSTIFICACIÓN	8
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	9
OBJETIVOS.....	10
OBJETIVO GENERAL.....	10
OBJETIVOS ESPECÍFICOS	10
1. MARCO TEÓRICO	11
1.1 DESCRIPCIÓN DEL SOFTWARE EMPLEADO EN EL ESTUDIO.....	11
1.1.1 DESCRIPCIÓN DE GEOGEBRA	11
1.1.2 BENEFICIOS DE LA UTILIZACIÓN DE GEOGEBRA	11
1.2 DEFINICIONES Y TEOREMAS.....	12
2. BASE TOPOLOGICA (\mathbb{R}^2 , triangulares)	16
2.1 ALGUNOS EJEMPLOS DE ABIERTOS	20
2.2 CARACTERÍSTICAS DE LOS ABIERTOS BÁSICOS	25
2.3 CONTENENCIA ENTRE ABIERTOS	28
3. CONJUNTOS CERRADOS	31
4. CONJUNTOS ASOCIADOS.....	35
4.1 SEMICIRCUNFERENCIA CON INTERIOR	36
4.2 CIRCUNFERENCIA CON INTERIOR.....	42
4.3 ELIPSE CON INTERIOR	47
4.4 ADHERENCIA DE UN CONJUNTO ACOTADO.....	49
4.5 PARÁBOLA CON INTERIOR.....	51
4.6 HIPÉRBOLA CON INTERIOR.....	64
5. COMPARACIÓN CON OTRAS TOPOLOGÍAS	70
5.1 COMPARACIÓN CON LA TOPOLOGÍA USUAL	70
5.2 COMPARACIÓN CON LA TOPOLOGÍA DEL ORDEN LEXICOGRÁFICO	75
6. PROPIEDADES TOPOLOGICAS	7
6.1 CONEXIDAD	:
6.2 SEPARACIÓN.....	:
6.3 COMPACIDAD	81
6.4 ENUMERABILIDAD	81
CONCLUSIONES	83
BIBLIOGRAFÍA	85

TABLA DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Ejemplo abierto $D_{1,1,-3}$.....	9
Gráfico 2. Ejemplo abierto básico $D_{1,1,-3}$.....	16
Gráfico 3. Unión de abierto básico.....	17
Gráfico 4. Intersección entre abiertos básicos.....	20
Gráfico 5. Semiplano como abierto	21
Gráfico 6. Semiplano sin frontera como abierto	23
Gráfico 7. Semiplano sin frontera como abierto	24
Gráfico 8. Ejemplo abierto básico $D_{2, 0, -6}$	26
Gráfico 10. Ejemplo contenencia entre abiertos básicos	28
Gráfico 11. Ejemplo contenencia entre abiertos $a \neq a_1$.....	29
Gráfico 12. Ejemplo contenencia entre abiertos básicos $a \neq a_1$.....	30
Gráfico 13. Conjunto cerrado	32
Gráfico 14. Conjunto cerrado	34
Gráfico 17. Ejemplo conjunto A y abierto $D_{1, -1, 3}$	37
Gráfico 18. Ejemplo exterior semicircunferencia	39
Gráfico 19. Exterior semicircunferencia con interior	39
Gráfico 20. Recta tangente a A en el punto $(a, f(a))$	40
Gráfico 21. Región determinada por la recta tangente a A en el punto $(a, f(a))$	41
Gráfico 22. Exterior semicircunferencia	41
Gráfico 24. Ejemplo conjunto A y abierto $D_{a, b, c}$	44
Gráfico 25. Exterior conjunto circunferencia con interior	44
Gráfico 26. Ejemplo, conjunto A y abierto $D_{5, 10, -20}$.....	45
Gráfico 27. Ejemplo, conjunto A y abierto $D_{0,5, 1, -5}$.....	45
Gráfico 28. Ejemplo, conjunto A y abierto $D_{3, 16, -20}$	46
Gráfico 29. Frontera circunferencia con interior	46
Gráfico 30. Conjunto A_t y abierto $D_{a, b, c}$	48
Gráfico 31. Exterior elipse	48
Gráfico 32. Frontera elipse	49
Gráfico 33. Ejemplo conjunto A, elipse con interior	49
Gráfico 34. Ejemplo, adherencia de un conjunto A	50
Gráfico 35. Ejemplo parábola con interior, caso $A > 0$.....	51
Gráfico 36. Interior parábola, caso $A > 0$	52
Gráfico 37. Ejemplo conjunto A y abierto $D_{1, -4, -1}$.....	55
Gráfico 38. Ejemplo conjunto A y abierto $D_{2, -3, -2}$.....	56
Gráfico 39. Ejemplo conjunto A y abierto $D_{4, -8, 0}$	57
Gráfico 40. Ejemplo conjunto A y abierto $D_{3, -5, 7}$	58
Gráfico 41. Ejemplo conjunto A y abierto $D_{3, -5, 1}$	60
Gráfico 42. Ejemplo conjunto A_b, caso $A < 0$	61

Gráfico 43. Ejemplo conjunto A_t y abierto $D_{2, 10, -11}$	62
Gráfico 44. Ejemplo conjunto A_t y abierto $D_{2.5, -2, 2}$.....	62
Gráfico 45. Exterior conjunto A_t, caso $A < 0$	63
Gráfico 46. Ejemplo conjunto A_t y abierto $D_{1, -1, -5}$	63
Gráfico 47. Frontera conjunto A_t, caso $A < 0$	64
Gráfico 48. Conjunto A_t, hipérbola con interior	65
Gráfico 49. Ejemplo conjunto A_t y abierto $D_{2, -1, -8}$	65
Gráfico 50. Ejemplo conjunto A_t y abierto $D_{3, 3, -9}$.....	66
Gráfico 51. Exterior conjunto A_t, hipérbola con interior	66
Gráfico 52. Región del plano, exterior conjunto A_t.....	67
Gráfico 53. Región del plano, exterior conjunto A_t.....	68
Gráfico 56. Ejemplo de abiertos básicos de las topologías, usual y generada por la base R2, triángulares.....	71
Gráfico 61. Ejemplo abiertos básicos	75
Gráfico 63. Ejemplo de abiertos básicos de las topologías comparadas	76

TABLA DE TEOREMAS

Teorema 1. Cerrado	31
Teorema 2. Conjunto cerrado	33
Teorema 3. Interior conjunto acotado.....	38
Teorema 4. Interior parábola caso $A > 0$.....	52
Teorema 5. Relación con la topología usual en \mathbb{R}^2	72
Teorema 6. Conexidad topología τ_t.....	78
Teorema 7. τ_t es T_0	79
Teorema 8. τ_t no es T_1.....	80
Teorema 9. Enumerabilidad topología τ_t	82

INTRODUCCIÓN

Como el título del documento refleja, éste trabajo esta esencialmente dedicado al estudio de la topología generada a partir de la base denominada (\mathbb{R}^2 , triangulares) cuya definición se encuentra en el libro “*Topología general*”¹ de Gustavo Rubiano de la Universidad Nacional de Colombia.

Nuestro punto de partida será demostrar que la colección de regiones triangulares infinitas denominada (\mathbb{R}^2 , triangulares), corresponde a una base topológica en el plano cartesiano; junto a esto explorar ejemplos de abiertos de la topología generada, proponiendo diversos ejemplos que nos permitan **si es posible** caracterizarlos.

En el capítulo 1, marco teórico, se plasma una introducción de la teoría que será necesaria para realizar el trabajo; describiendo definiciones y teoremas en los cuáles se basa el estudio a realizar. Además, de una descripción del software Geogebra con el cual se presentaran algunos ejemplos de los temas tratados.

En el capítulo 2, base topológica, se presenta en primera instancia la demostración de que (\mathbb{R}^2 , triangulares) corresponde a una base topológica en el plano cartesiano. Además, se muestran algunos ejemplos de abiertos generados por esta topología. También, se realiza un estudio sobre los abiertos básicos, determinando algunas características que cumplen.

En el capítulo 3, se muestra un estudio realizado a los conjuntos cerrados, esta sección está relacionada con el capítulo dos, puesto que se establecen algunos ejemplos de cerrados a partir de algunos abiertos propuestos previamente.

En el capítulo 4, conjuntos asociados, se realiza un estudio de algunas nociones topológicas, como interior, exterior, frontera y adherencia de algunos conjuntos asociados en relación con los abiertos básicos de la topología generada por la base (\mathbb{R}^2 , **triangulares**).

¹ Rubiano, G. (2002). “*Topología general segunda edición*”. Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional. Bogotá Colombia. Pág. 16.

En el capítulo 5, comparación con otras topologías, se plantea la comparación entre la topología generada por la base (\mathbb{R}^2 , **triangulares**) y las topologías, usual y del orden lexicográfico, a partir de sus abiertos básicos. La finalidad de este capítulo, es concluir si alguna topología es más fina que otra o si no son comparables.

En el capítulo 6, propiedades topológicas, se realiza un estudio para verificar si la topología propuesta cumple o no algunas propiedades topológicas, tales como, conexidad, compacidad, separación y numerabilidad, los resultados obtenidos se presentan como teoremas.

Además se presenta un compilado de conclusiones que muestra los resultados más sobresalientes del trabajo.

JUSTIFICACIÓN

La razón principal por la que optamos por este tema para trabajo de grado, es porque consideramos que explorar en un espacio topológico nos permite reforzar en procesos de razonamiento, conjeturación y demostración. Además, es de nuestro interés realizar un estudio de la base (\mathbb{R}^2 , **triangulares**), profundizando en temáticas como abiertos, cerrados, nociones y propiedades topológicas. Finalmente, tenemos altas expectativas de poder caracterizar la topología generada a partir del estudio realizado; de no ser así podemos acercanos a ella con ayuda de diversos ejemplos y la visualización de algunos de estos en un software como Geogebra.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

- $(\mathbb{R}^2, \text{triangulares})$

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, definimos:

$$D_{a,b,c} = \{x, y : y \geq ax + b \wedge y \geq -ax + c\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Sea la colección $\beta = D_{a,b,c} : a > 0, b, c \in \mathbb{R}$ de todas las regiones triangulares infinitas. β es base para una topología.

Por ejemplo, la región que se muestra en el siguiente diagrama está determinada por la intersección entre las regiones $y \geq x + 1$ y $y \geq -x - 3$, por consiguiente, todos los puntos (x, y) que cumplen la definición anterior conforman el elemento $D_{1,1,-3}$ de la base.

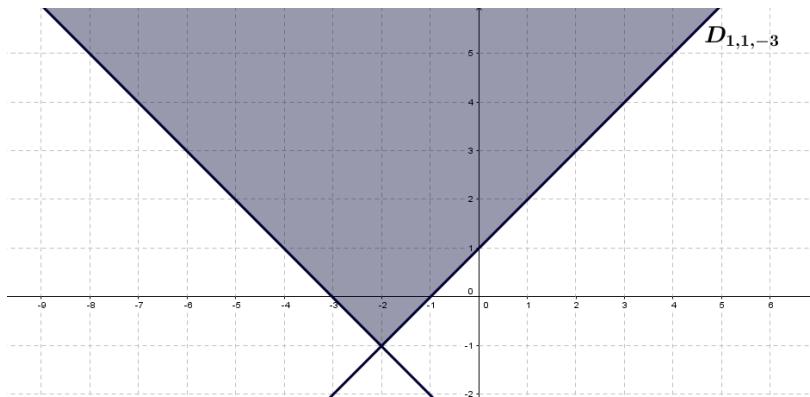


Gráfico 1. Ejemplo abierto $D_{1,1,-3}$

A partir de esta base topológica, se propone realizar un estudio sobre la topología generada, de esta manera enfatizar en nociones topológicas como, interior, exterior y adherencia; Además, identificar y explorar ciertas propiedades topológicas, como compacidad, conexidad y separación, para esto se propondrán diversos ejemplos con el fin de poder caracterizar o generalizar.

OBJETIVOS

A continuación se presenta una breve descripción de lo que se espera obtener durante la realización del trabajo de grado. Se tienen en cuenta aspectos netamente matemáticos y de valor agregado para la formación profesional de sus autores.

OBJETIVO GENERAL

- Realizar un estudio sobre la topología generada por la base denominada $(\mathbb{R}^2, \text{triangulares})$.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Basados en la base topológica: $(\mathbb{R}^2, \text{triangulares})$:

- Demostrar que es una base para una topología, y proponer diversos ejemplos de abiertos de la topología generada.
- Determinar si la topología generada cumple algunas propiedades topológicas, tales como, compacidad, conexidad y separación.
- Estudiar diferentes nociones topológicas como: cerrados, frontera, exterior, interior y adherencia en la topología generada.
- A partir del software Geogebra, presentar ejemplos visuales de abiertos que pertenecen a la topología generada por la base $(\mathbb{R}^2, \text{triangulares})$.

1. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se describen las herramientas utilizadas en la realización del trabajo de grado, herramientas tanto matemáticas (definiciones, axiomas, postulados y teoremas) como virtuales (software Geogebra), en particular para este último se hacen explícitas las características por las cuales se utilizó.

1.1 DESCRIPCIÓN DEL SOFTWARE EMPLEADO EN EL ESTUDIO².

A continuación se realiza una breve descripción del software Geogebra y de las características por las cuales se utilizó durante el desarrollo del trabajo.

1.1.1 DESCRIPCIÓN DE GEOGEBRA

Geogebra es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar. Geogebra es también una comunidad en rápida expansión, con millones de usuarios en casi todos los países. Geogebra se ha convertido en el proveedor líder de software de matemática dinámica, apoyando la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics) y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo.

Datos interesantes

- Conecta geometría, álgebra y hoja de cálculo de forma completamente dinámica.
- Interfaz muy fácil de usar, a pesar de contar con poderosas herramientas.
- Herramienta de autoría para crear materiales de aprendizaje interactivos como páginas web.
- Disponible en varios idiomas.

1.1.2 BENEFICIOS DE LA UTILIZACIÓN DE GEOGEBRA

Son innumerables los beneficios que trae el uso de Geogebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para los profesores y estudiantes de todos los niveles

² Tomado de www.geogebra.org.

educativos, a continuación se describen algunos de ellos:

- Hace tangible la matemática: Geogebra crea una conexión entre la geometría y el álgebra de un modo completamente visual, de esta forma los estudiantes pueden ver y experimentar la matemática.
- Los estudiantes que usan Geogebra demuestran mejores resultados y más interés hacia el estudio de las matemáticas.
- Por medio de la visualización hace que el concepto matemático sea más accesible para el estudiante.

En particular, para la realización del trabajo de grado se tuvo en cuenta que dado el grado de complejidad de los temas tratados, era necesario el uso de gráficas que permitieran una visualización y una mejor lectura del trabajo, además, dadas las características anteriormente descritas de Geogebra y el hecho de que ha sido el software utilizado a lo largo de la carrera se decidió que era el más conveniente para el propósito del trabajo.

1.2 DEFINICIONES Y TEOREMAS

A continuación se describen las herramientas matemáticas que se usaron para la realización del estudio y que lo sustentan como un proceso lógico-matemático estructurado.

Teorema 1.

La recta que pasa por el punto dado $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente dada m , tiene por ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Teorema 2.

La circunferencia cuyo centro es el punto (h, k) y cuyo radio es r , tiene por ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ en la cual $h, k, r \in \mathbb{R}$ y $r > 0$.

Teorema 3.

La elipse de centro el punto (h, k) y eje focal paralelo al eje X tiene por ecuación

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y - k^2}{b^2} = 1$$

en la cual $h, k, a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $b > 0$.

Teorema 4.

La ecuación de una hipérbola de centro el punto (h, k) y eje focal paralelo al eje X , es de la

forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{y-k^2}{b^2} = 1$$

en la cual $h, k, a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $b > 0$.

Teorema 5.

Una ecuación de segundo grado en las variables x, y y que carezca del término en xy puede escribirse en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si $A \neq 0, C = 0$, y $E \neq 0$ la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincide con el eje Y .

Teorema 6. Sea X un conjunto. $\beta \subseteq P(X)$ es base para una topología para X si y solo si se cumple que.

1. $X = \bigcup B$ $B \in \beta$.
2. Dados cualesquiera $U, V \in \beta$ y $x \in U \cap V$ existe B en β tal que $x \in B \subseteq U \cap V$. Esto es, $U \cap V$ es unión de elementos de β para todo par U, V de β .

Definición 1.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ entonces f se llama función parte entera denotada por: $f(x) = x$ donde $x = \max\{z \in \mathbb{Z}: z \leq x\}$.

Definición 2.

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es **acotado** si existe una bola que lo contenga, es decir, existe $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tales que $A \subseteq B(a, r)$.

Definición 3.

Un espacio topológico X es T_0 o Kolmogoroff si para todo par de puntos $x, y \in X$, existe un conjunto abierto que contiene a x y no contiene a y o existe un conjunto abierto que contiene a y y no contiene a x .

Definición 4.

Un espacio topológico (X, G) es un espacio T_1 si para todo par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen dos abiertos U_x, U_y tales que $y \notin U_x$ y $x \notin U_y$.

Definición 5.

Un espacio topológico (X, \mathcal{G}) se dice 2 – contable o que satisface el segundo axioma de enumerabilidad si y solo si entre sus bases existe una con un número contable –finito o infinito- de elementos.

Definición 6.

Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X . Se dice que p es punto interior de A cuando existe un abierto contenido en A y que contiene al punto p .

Definición 7.

Sea X un espacio topológico. Se llama exterior de un conjunto al interior de su complemento. Si $A \subseteq X$ $\text{ext } A = \text{int}(A^c)$.

Definición 8.

Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X . Un punto $x \in X$ es un punto frontera de A si todo abierto de x interseca a A y a A^c . El conjunto de todos los puntos frontera de A se denota por $\text{Fr}(A)$ y se llama la frontera de A .

Definición 9.

Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X . Un punto $x \in X$ es adherente a A si todo abierto de x contiene puntos de A . El conjunto de todos los puntos adherentes a A se denota por \bar{A} y se llama la adherencia de A .

Definición 10.

Sean X un conjunto y T_1, T_2 topologías sobre X . Se dice que T_1 es menos fina que T_2 o que T_2 es más fina que T_1 si $T_1 \subset T_2$.

Definición 11. Dado un espacio topológico (X, τ) , una separación para X la constituye un par A, B de subconjuntos no vacíos, abiertos y tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$.

Definición 12. Un espacio topológico (X, τ) es conexo si y solo si no existe una separación para X .

Definición 13.

Un espacio topológico (X, τ) se llama un espacio de Hausdorff o un espacio T_2 si para todo par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen abiertos disyuntos V y W tales que $x \in V$ y $y \in W$.

Proposición 1.

Sean (X, G) un espacio topológico y $F \subseteq X$. F se llama cerrado si y solo si F^c es un conjunto abierto.

Proposición 2.

Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X . Entonces $A = A \cup Fr(A)$.

Proposición 3.

Lexicográfico. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $a < c$, se define:

$$\beta = \{(a, b), (c, d) : a, b < c, d \subseteq \mathbb{R}^2\}$$

β una base para la topología del orden lexicográfico.

2. BASE TOPOLOGICA (\mathbb{R}^2 , triangulares)

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, definimos:

$$D_{a,b,c} = \{x, y : y \geq ax + b \wedge y \geq -ax + c\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Sea $D = \{D_{a,b,c} : a > 0, b, c \in \mathbb{R}\}$. D es una colección de regiones triangulares infinitas.

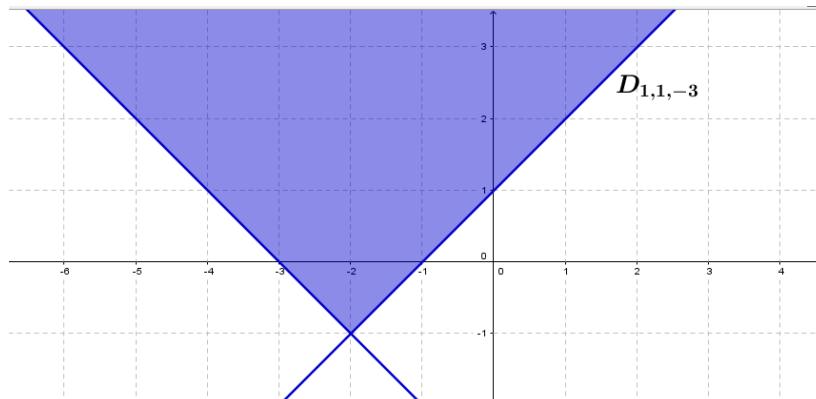


Gráfico 2. Ejemplo abierto básico $D_{1,1,-3}$

Por ejemplo, el grafico anterior muestra las rectas $y = x + 1$ y $y = -x - 3$ en \mathbb{R}^2 , y todos los puntos x, y tales que:

$$y \geq x + 1 \wedge y \geq -x - 3$$

A continuación se muestra que D es base para una topología. Para eso se tiene en cuenta el teorema 6 descrito en el marco teórico.

Demostración

Para el caso de la topología (\mathbb{R}^2 , triangulares) se tiene que: $X = \mathbb{R}^2$ y $\beta = D \subseteq P(\mathbb{R}^2)$.

1. Se definen los siguientes elementos de D :

$$D_{1,0,0} = \{x, y : y \geq x \wedge y \geq -x\}$$

$$D_{1-1,-1} = \{x, y : y \geq x - 1 \wedge y \geq -x - 1\}$$

$$D_{1,-2,-2} = \{x, y : y \geq x - 2 \wedge y \geq -x - 2\}$$

.

.

$$D_{1,-n,-n} = \{x, y : y \geq x - n \wedge y \geq -x - n ; n \in \mathbb{Z}\}$$

Gráficamente, se puede representar de la siguiente manera:

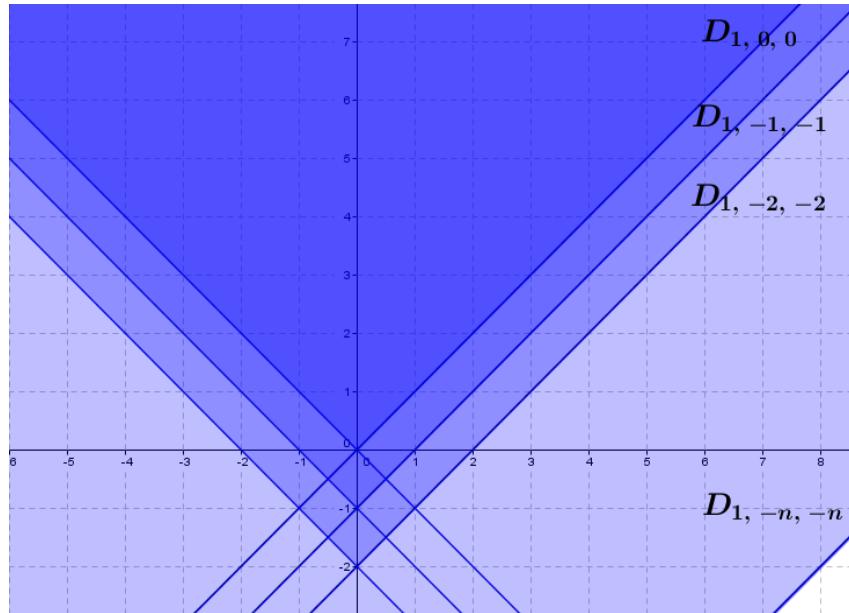


Gráfico 3. Unión de abierto básico

Como los abiertos de la topología se definen como unión de elementos de la base, se supone que:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} D_{1,-n,-n} = \mathbb{R}^2$$

Para demostrar la igualdad anterior se procede a demostrar contenencias:

I. Por la definición de abierto básico se tiene que:

$$D_{1,0,0} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$D_{1,-1,-1} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$D_{1,-2,-2} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$D_{1,-n,-n} \subseteq \mathbb{R}^2$ Para todo $n \in \mathbb{R}$, además como cada uno de estos elementos está contenido en \mathbb{R}^2 la reunión de todos ellos también está contenida en \mathbb{R}^2 , es decir que se tiene la contenencia:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} D_{1,-n,-n} \subseteq \mathbb{R}^2$$

II. Dado un punto cualquiera $w, z \in \mathbb{R}^2$ debemos encontrar un $D_{1,p,p}$ tal que $w, z \in D_{1,p,p}$ y $p \in \mathbb{Z}$, para esto se verifican dos casos:

- a. $w, z \in \mathbb{R}^2$ con $w \geq 0$ para encontrar el $D_{1,p,p}$ debemos encontrar la ecuación de una recta l tal que $w, z \in l$ y cuya pendiente sea $m = 1$, en efecto, pues si conocemos un punto y la pendiente de una recta se tiene la igualdad:

$$y - z = m(x - w)$$

$$y = x - w + z$$

Teniendo en cuenta que $p \in \mathbb{Z}$ se define como:

$$p = z - w$$

Usando la definición 1 plasmada en el marco teórico, se tiene que $p \in \mathbb{Z}$ y además:

$$p \leq z - w$$

Es decir

$$z - w \leq z - w$$

De donde

$$x + z - w \leq x + z - w$$

Luego

$$w, z \in D_{1,p,p}$$

- b. $w, z \in \mathbb{R}^2$ con $w < 0$ para encontrar el $D_{1,p,p}$ debemos encontrar la ecuación de una recta l tal que $w, z \in l$ y cuya pendiente sea $m = -1$, en efecto, si se conoce un punto y la pendiente de una recta se tiene la igualdad:

$$y - z = m(x - w)$$

$$y - z = -(x - w)$$

$$y = -x + w + z$$

Teniendo en cuenta que $p \in \mathbb{Z}$ se define como:

$$p = w + z$$

Usando la definición 1, se tiene que $p \in Z$ y además:

$$p \leq w + z$$

Es decir

$$z + w \leq z + w$$

De donde

$$-x + z + w \leq -x + z + w$$

Luego

$$w, z \in D_{1,p,p}$$

Luego la región triangular $D_{1,p,p}$ contiene al punto w, z . De esta manera se concluye que:

$$\mathbb{R}^2 \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} D_{1,-n,-n}$$

2. Si $U, V \in D$ se tiene que:

$$U = D_{a,b,c} = \{x, y : y \geq ax + b \wedge y \geq -ax + c, a > 0, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$V = D_{d,e,f} = \{x, y : y \geq dx + e \wedge y \geq -dx + f, d > 0, e, f \in \mathbb{R}\}$$

Sea $w, z \in U \cap V$ se define $h = \max\{a, d\}$, usando la ecuación punto pendiente se tiene:

$$\begin{aligned} y - z &= h(x - w) \\ y &= hx - hw + z \quad (1) \end{aligned}$$

La recta que representa la ecuación (1) tiene pendiente h , pasa por el punto w, z y corta al eje y en el punto $0, z - hw$, también se tiene:

$$\begin{aligned} y - z &= -h(x - w) \\ y &= -hx + hw + z \quad (2) \end{aligned}$$

La recta que representa la ecuación (2) tiene pendiente $-h$, pasa por el punto w, z y corta al eje y en el punto $0, z + hw$, por consiguiente se concluye que existe el abierto $D_{h,z-hw,z+hw}$ que contiene al punto w, z .

Si el punto $p, q \in D_{h,z-hw,z+hw}$ se cumple que:

$$\begin{aligned}y &\geq hx + z - hw \wedge y \geq -hx + z + hw \\q &\geq hp + z - hw \wedge q \geq -hp + z + hw\end{aligned}$$

Entonces $p, q \in U \cap V$ con lo que se concluye que $D_{h,z-hw,z+hw} \subset U \cap V$.

Con lo cual queda demostrado que $(\mathbb{R}^2, \text{triangulares})$ es base para una topología.

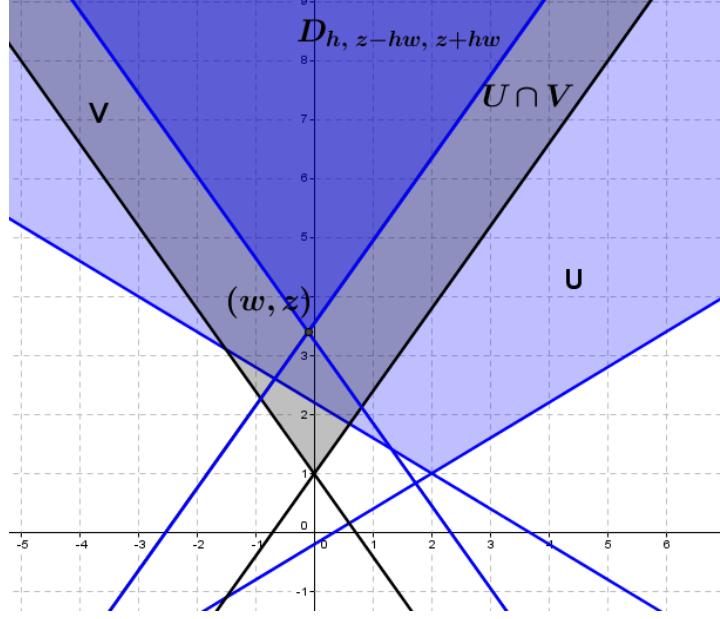


Gráfico 4. Intersección entre abiertos básicos

Como ayuda al desarrollo y lectura del trabajo, además, para abbreviar su escritura, se denotará la topología generada por la base $(\mathbb{R}^2, \text{triangulares})$ como τ_t .

2.1 ALGUNOS EJEMPLOS DE ABIERTOS

En primera instancia, se tomará como punto de partida los elementos de la base de τ_t o abiertos básicos $D_{a,b,c}$. Luego, se generarán reuniones de ellos con la finalidad de determinar nuevos abiertos de la topología. A continuación, se presentan algunos ejemplos de estos abiertos.

1. Consideremos un caso particular:

$$D_{2,3,1} = \{x, y : y \geq 2x + 3 \wedge y \geq -2x + 1\}$$

Si a partir de él se define la región en el plano:

$$A = \{x, y : y \geq 2x + 3\}$$

A es un abierto de τ_t .

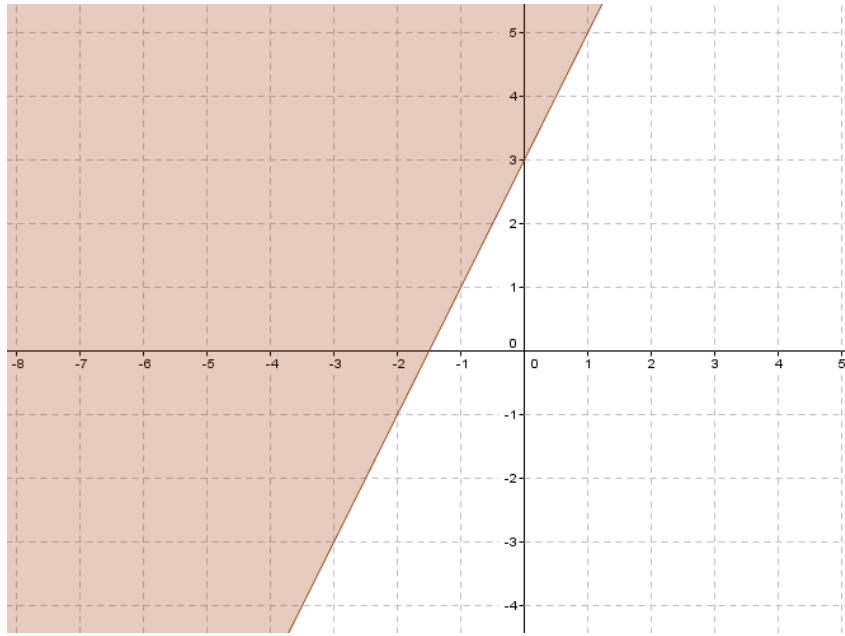


Gráfico 5. Semiplano como abierto

Demostración

Para evidenciar que efectivamente A es un abierto se debe demostrar la siguiente igualdad:

$$A = \{x, y : y \geq 2x + 3\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{2,3,-n}$$

Si $p, q \in A$ se cumple que $q \geq 2p + 3$, se define la región $y \geq -2x + z$, para encontrar z en términos de p y q usamos la ecuación punto pendiente:

$$\begin{aligned} y - q &\geq -2(x - p) \\ y &\geq -2x + 2p + q \end{aligned}$$

Luego se concluye

$$(p, q) \in D_{2,3,2p+q} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{2,3,-n}$$

Entonces

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{2,3,-n}$$

Si $D_{2,3,m} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{2,3,-n}$ por definición se tiene

$$D_{2,3,m} = \{x, y : y \geq 2x + 3 \wedge y \geq -2x + m\}$$

Luego se cumple que

$$y \geq 2x + 3$$

Así

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{2,3,-n} \subseteq A$$

De forma análoga se demuestra que

$$A' = \{x, y : y \geq ax + b, a > 0, b \in \mathbb{R}\}$$

Es un abierto de τ_t .

2. A partir del abierto anterior se puede definir el siguiente. Se considera el abierto

$$A = \{x, y : y \geq ax + b\}$$

Si se toma $b = b' + 1$ se tiene:

$$A = \{x, y : y \geq ax + b' + 1\}$$

Se define la sucesión de abiertos

$$A_n = \{x, y : y \geq ax + b' + \frac{1}{n}\}$$

Luego

$$A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x, y : y > ax + b'\} = T$$

La cual por ser reunión de abiertos también resulta ser un abierto de τ_t .

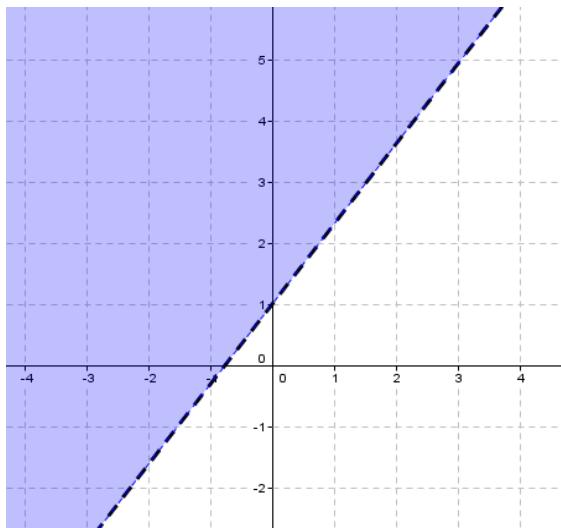


Gráfico 6. Semiplano sin frontera como abierto

Demostración

Si $x, y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ se cumple que $y \geq ax + b + \frac{1}{n}$ como $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\frac{1}{n} > 0$.

Por tanto $y > ax + b$. De esta manera se tiene que $x, y \in T$. Por otro lado, si $x, y \in T$ se cumple que $y > ax + b$; usando la propiedad Arquimediana de los números reales existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(y - ax - b)n > 1$ de donde $y > ax + b + \frac{1}{n}$ lo que implica por propiedad de las desigualdades que $y \geq ax + b + \frac{1}{n}$ es decir $x, y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. En conclusión T es un abierto.

3. Análogamente se tiene que los conjuntos:

$$A = \{x, y : y \geq -mx + c\}$$

$$B = \{x, y : y > -mx + c\}$$

Son abiertos de τ_t .

4. Sea el producto cartesiano $A = \mathbb{R} \times [b, \infty) \cup [a, b]$, A es un abierto de τ_t .

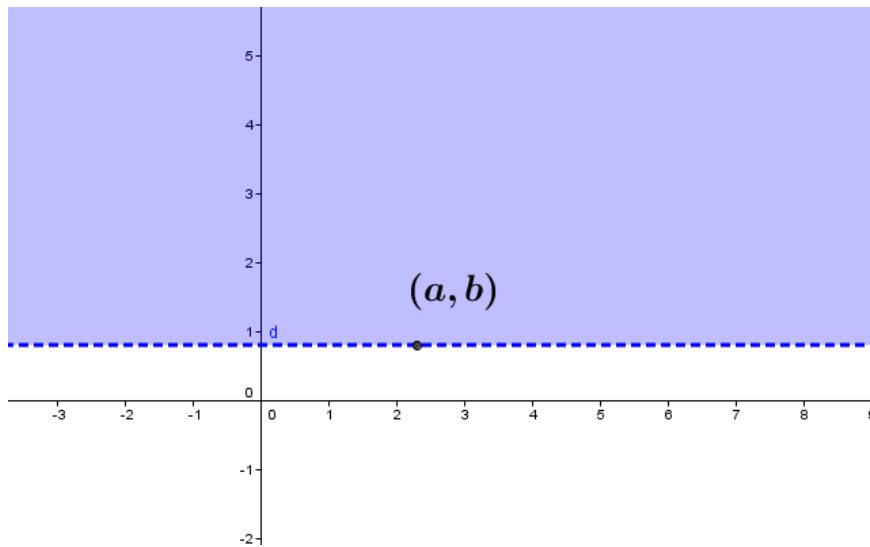


Gráfico 7. Semiplano sin frontera como abierto

Demostración

Sea (a, b) un punto en el plano y m la pendiente de una recta que pasa por dicho punto, se sabe que:

$$y = mx - ma + b$$

Si se toma el inverso aditivo de la pendiente se tiene:

$$y = -mx + ma + b$$

Luego se define el abierto:

$$D_{m, b-ma, b+ma} = \{x, y : y \geq mx - ma + b \wedge y \geq -mx + ma + b\}$$

Se debe demostrar que:

∞

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{m}{n}, b-\frac{ma}{n}, b+\frac{ma}{n}} = A$$

Si $x, y \in A$ entonces $y > b \vee (x = a \wedge y = b)$.

Caso 1 cuando $(x = a \wedge y = b)$

Se tiene que

$$b \geq \frac{m}{n}a - \frac{m}{n}a + b \wedge b \geq -\frac{m}{n}a + \frac{m}{n}a + b$$

$$b \geq b$$

$$\text{Así } x, y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{m}{n}, b-\frac{ma}{n}, b+\frac{ma}{n}}$$

Caso 2 cuando $y > b$

Sea $m \in \mathbb{R}$ tal que $m > 0$ por la propiedad Arquimediana de los números reales existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{y - b}{x - a} n > m ; x, a \in \mathbb{R}$$

$$y > \frac{m}{n}x + b - \frac{ma}{n}$$

Además

$$\frac{y - b}{a - x} n > m$$

$$y > -\frac{m}{n}x + b + \frac{ma}{n}$$

Así $x, y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{m}{n}, b - \frac{ma}{n}, b + \frac{ma}{n}}$

Entonces T es un abierto de τ_t .

5. Por el ejemplo anterior, se tiene que el conjunto $A = \{x, y : y > b\} \cup \{(a, b)\}$ es abierto. Luego, por definición de abierto se tiene que la reunión de todos los abiertos A tal que $a \in \mathbb{R}$ es un abierto, es decir, el conjunto $\{x, y : y \geq b\}$ es un abierto de τ_t .

2.2 CARACTERÍSTICAS DE LOS ABIERTOS BÁSICOS

Algunas características de los abiertos básicos surgen como inquietudes o interrogantes que se generan durante la elaboración del documento. Entre las principales características se encuentran:

- ¿Cómo determinar el vértice de la región triangular generada por el abierto básico $D_{a,b,c}$?

A partir de las ecuaciones de las rectas $y = ax + b$ y $y = -ax + c$, que describen el abierto básico $D_{a,b,c}$ se utiliza el método de igualación, obteniendo:

$$ax + b = -ax + c$$

$$x = \frac{c - b}{2a}$$

Ahora se sustituye el valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones;

$$y = a \frac{c - b}{2a} + b$$

$$y = \frac{c - b}{2} + b$$

$$y = \frac{c + b}{2}$$

De esta manera, el vértice de la región triangular generada por el abierto básico $D_{a,b,c}$, se representa mediante la coordenada:

$$\frac{c - b}{2a}, \frac{c + b}{2}$$

Ejemplo

Sea el abierto $D_{2,0,-6}$, se tiene que:

$$D_{2,0,-6} = \{x, y : y \geq 2x \wedge y \geq -2x - 6\}$$

El vértice de la región triangular es:

$$\begin{aligned} x_1, y_1 &= \frac{(-6) - 0}{2(2)}, \frac{-6 + 0}{2} \\ x_1, y_1 &= -\frac{3}{2}, -3 \end{aligned}$$

En el siguiente gráfico, se observa el abierto $D_{2,0,-6}$ y el vértice de la región triangular generada por el abierto.

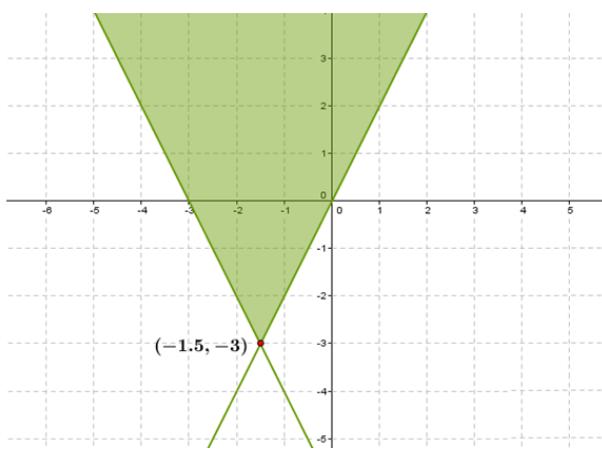


Gráfico 8. Ejemplo abierto básico $D_{2,0,-6}$

- Dado un punto cualquiera x_1, y_1 , ¿cómo determinar un abierto básico $D_{a,b,c}$ que lo contenga?

Para este caso, dado un punto cualquiera x_1, y_1 se pretende determinar el abierto en el cual x_1, y_1 sea el vértice de la región triangular generada por el abierto. Además, dado el punto x_1, y_1 hay infinitos abiertos que lo contienen, dependiendo esto del valor que tome a .

A partir de la ecuación punto pendiente, se obtiene:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

$$y = ax - ax_1 + y_1$$

$$y = ax + (-ax_1 + y_1)$$

De esta manera $b = -ax_1 + y_1$.

De manera análoga, para el caso que la pendiente es negativa, se obtiene:

$$y - y_1 = -a(x - x_1)$$

$$y = -ax + ax_1 + y_1$$

$$y = -ax + (ax_1 + y_1)$$

De esta manera $c = ax_1 + y_1$.

De esta manera dado el punto x_1, y_1 el abierto $D_{a,-ax_1+y_1,ax_1+y_1}$ lo contiene.

Ejemplo

Sea el punto $A = -4, -3$ y $a = \frac{1}{4}$, A está contenido en el abierto:

$$D_{\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}(-4)+(-3), \frac{1}{4}(-4)+(-3)} = D_{\frac{1}{4}, -2, -4}$$

Como se muestra en el siguiente gráfico.

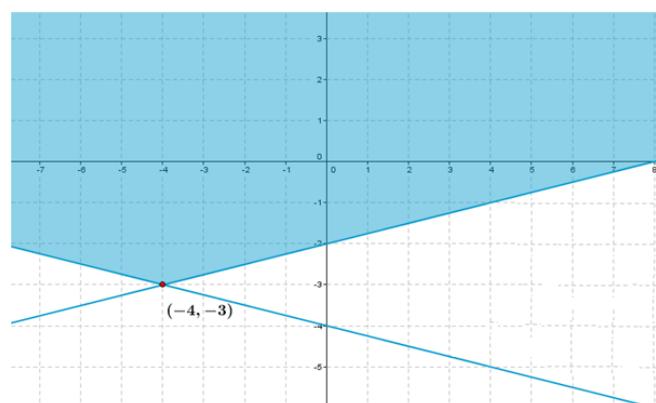


Gráfico 8. Abierto básico a partir del (x_1, y_1)

2.3 CONTENENCIA ENTRE ABIERTOS

Para poder estudiar la contenencia entre dos abiertos básicos $D_{a,b,c}$ y D_{a_1,b_1,c_1} , se deben analizar dos casos; cuando $a = a_1$ y $a \neq a_1$.

- I. Sea el caso en el que $a = a_1$.

Dados los abiertos básicos,

$$D_{a,b,c} = \{x, y : y \geq ax + b \wedge y \geq -ax + c\}$$

$$D_{a_1,b_1,c_1} = \{x, y : y \geq a_1x + b_1 \wedge y \geq -a_1x + c_1\}$$

Si se tiene que $a = a_1$, entonces:

$$D_{a,b,c} = \{x, y : y \geq ax + b \wedge y \geq -ax + c\}$$

$$D_{a,b_1,c_1} = \{x, y : y \geq ax + b_1 \wedge y \geq -ax + c_1\}$$

Para conocer si el abierto D_{a,b_1,c_1} está contenido en el abierto $D_{a,b,c}$, se deben analizar los valores b, b_1, c y c_1 .

En el siguiente gráfico se muestran los abiertos, $D_{1,3,-3}$ y $D_{1,-1,-4}$, en el cual se puede observar que el abierto $D_{1,3,-3} \subseteq D_{1,-1,-4}$.

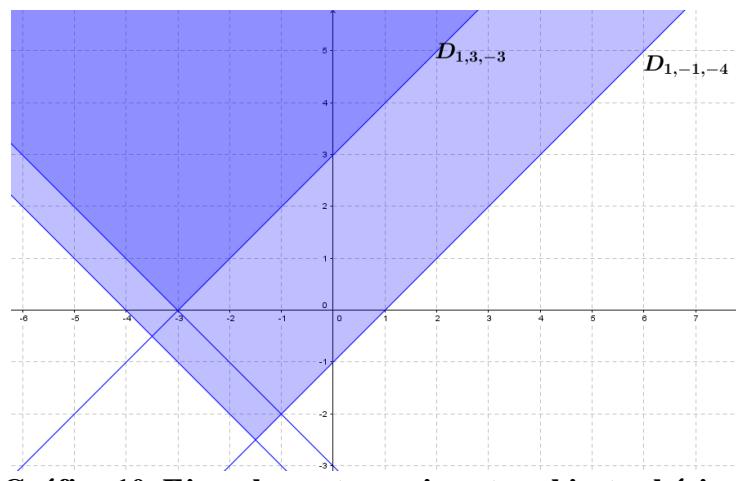


Gráfico 10. Ejemplo contenencia entre abiertos básicos

Además, en el gráfico se puede observar que, $b_1 > b$ y $c_1 > c$.

A partir del ejemplo, y de manera general, se establece:

- Sean D_{a_1, b_1, c_1} y $D_{a, b, c}$, dos abiertos básicos de τ_t y $a = a_1$, el abierto D_{a_1, b_1, c_1} está contenido en el abierto $D_{a, b, c}$, sí y sólo sí $b_1 > b$ y $c_1 > c$.

II. Sea el caso en el que $a \neq a_1$.

Dados los abiertos básicos,

$$D_{a, b, c} = \{x, y : y \geq ax + b \wedge y \geq -ax + c\}$$

$$D_{a_1, b_1, c_1} = \{x, y : y \geq a_1x + b_1 \wedge y \geq -a_1x + c_1\}$$

Si se tiene que $a \neq a_1$, entonces, no se puede establecer una generalización para conocer si el abierto D_{a_1, b_1, c_1} está contenido en el abierto $D_{a, b, c}$.

En primera instancia, se puede realizar un estudio sobre el comportamiento de los valores de a y a_1 . Si $a_1 > a$, existen algunos casos en los que el abierto D_{a_1, b_1, c_1} está contenido en el abierto $D_{a, b, c}$.

Por ejemplo, en el siguiente gráfico se representan los abiertos, $D_{\frac{1}{2}, -1}$ y $D_{\frac{1}{2}, 0, -2}$, en

el cual se puede observar que el abierto $D_{\frac{1}{2}, -1} \subseteq D_{\frac{1}{2}, 0, -2}$.

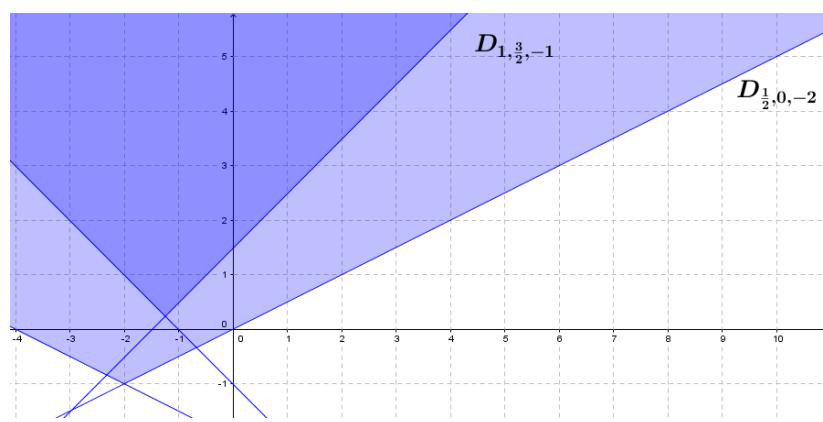


Gráfico 11. Ejemplo contenencia entre abiertos $a \neq a_1$

Además, en el gráfico se puede observar que, $b_1 > b$ y $c_1 > c$.

Sin embargo, con estas mismas condiciones $a_1 > a$, $b_1 > b$, y $c_1 > c$. Existen casos en el cual el abierto D_{a_1,b_1,c_1} no está contenido en el abierto $D_{a,b,c}$. Por ejemplo, en el siguiente gráfico se observan los abiertos, $D_{\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}$ y $D_{\frac{1}{2},1,-2}$, en el cual $D_{\frac{1}{2},-\frac{3}{2}} \not\subseteq D_{\frac{1}{2},1,-2}$.

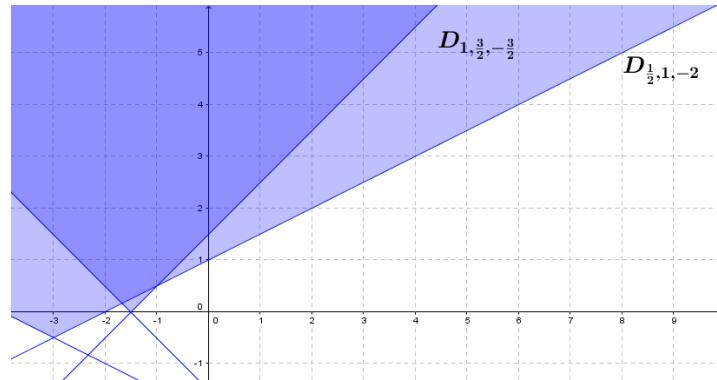


Gráfico 12. Ejemplo contenencia entre abiertos básicos $a \neq a_1$

3. CONJUNTOS CERRADOS

En este capítulo se realiza un estudio de los conjuntos cerrados de τ_t , esta sección está relacionada con el capítulo dos, puesto que se establecen algunos ejemplos de cerrados a partir de los abiertos propuestos previamente.

Los complementos de los abiertos se pueden caracterizar de la siguiente forma:

Teorema 1. Cerrado básico

Sea τ_t , el conjunto $A = \{x, y : y < ax + b \vee y < -ax + c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ es cerrado.

Demostración

Para demostrar que el conjunto A es un cerrado, se debe verificar que A^c es abierto.

Para esto se tendrá en cuenta que, $F = \{x, y : y < ax + b\}$ y $K = \{x, y : y < -ax + c\}$

$$A = F \cap K \quad \text{Definición de disyunción } \vee .$$

$$A^c = F^c \cup K^c \quad \text{Complemento de un conjunto.}$$

$$F^c \cup K^c = F^c \cap K^c \quad \text{Leyes de Morgan}$$

$$F^c = \{x, y : y \geq ax + b\} \wedge K^c = \{x, y : y \geq -ax + c\} \quad \text{Propiedades de los números reales y desigualdades.}$$

$$A^c = \{x, y : y \geq ax + b \wedge y \geq -ax + c\} \quad \text{Definición de conjunción } \wedge .$$

$$\{x, y : y \geq ax + b \wedge y \geq -ax + c\} = D_{a,b,c} \quad \text{Definición de abierto básico.}$$

Finalmente, como $D_{a,b,c}$ es un abierto de τ_t se tiene que A^c es un abierto. Entonces, A es un cerrado.

En el siguiente gráfico, se representa el conjunto

$$A = \{x, y : y < ax + b \vee y < -ax + c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

denominado cerrado básico de τ_t .

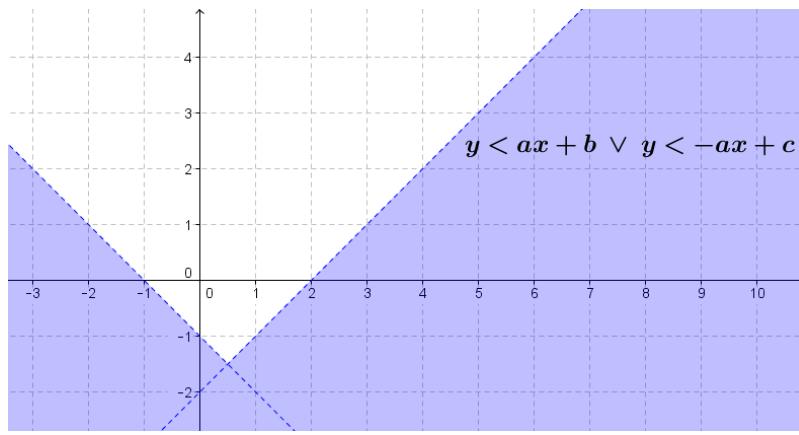


Gráfico 13. Conjunto cerrado

El siguiente esquema describe el conjunto cerrado asociado a cada uno de los abiertos anteriormente mencionados.

Abierto	Cerrado
$A^c = x, y : y \geq ax + b$	$A = x, y : y < ax + b$
$A^c = x, y : y > ax + b$	$A = x, y : y \leq ax + b$
$A^c = x, y : y \geq -ax + b$	$A = x, y : y < -ax + b$
$A^c = x, y : y > -ax + b$	$A = x, y : y \leq -ax + b$
$A^c = x, y : y > b \cup \{(a, b)\}$	$A = x, y : y \leq b - \{(a, b)\}$

$A^c = \{x, y : y \geq b\}$	$A = \{x, y : y < b\}$
-----------------------------	------------------------

Teorema 2. Conjunto cerrado

En la topología τ_t el conjunto $P = \{x, y : y < Ax^2 + Bx + C, A, B \in \mathbb{R} \text{ y } C \in \mathbb{R} \text{ y } A < 0\}$ es cerrado.

Demostración

Para esto basta con verificar que $P^c = \{x, y : y \geq Ax^2 + Bx + C\}$ es un abierto de la topología. Si

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$f'(x) = 2Ax + B$$

La pendiente de la recta tangente a f en el punto $z, f(z)$ esta dada por:

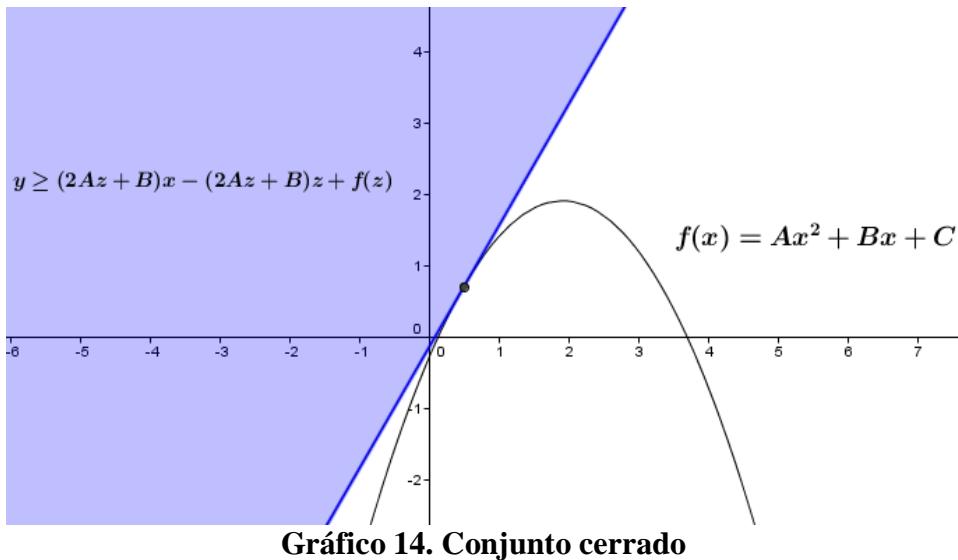
$$f'(z) = 2Az + B$$

Por consiguiente la ecuación de la recta tangente a f que pasa por el punto $z, f(z)$ es:

$$y - f(z) = (2Az + B)(x - z)$$

$$y = 2Az + Bx - 2Az + Bz + f(z)$$

Como se mostró en el capítulo 2, apartado 2.1, ejemplo 1. Se tiene que el conjunto $C' = \{x, y : y \geq 2Az + Bx - 2Az + Bz + f(z)\}$ es un abierto de la topología como lo muestra el siguiente gráfico:



Para el caso en que

$$z = -\frac{B}{2A}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} y &= 2A - \frac{B}{2A} + B x - 2A - \frac{B}{2A} + B - \frac{B}{2A} + f - \frac{B}{2A} \\ y &= f - \frac{B}{2A} \end{aligned}$$

Del cual también se demostró que el conjunto

$$x, y : y > f - \frac{B}{2A} \cup -\frac{B}{2A}, f - \frac{B}{2A}$$

Es un abierto. Por consiguiente C' es un abierto de la topología para todo $z \in \mathbb{R}$, finalmente, se tiene que la reunión de todos los abiertos tal que $z \in \mathbb{R}$ es un abierto, es decir, el conjunto $P^c = \{x, y : y \geq Ax^2 + Bx + C\}$ es un abierto y por tanto P es un cerrado.

4. CONJUNTOS ASOCIADOS

En este capítulo del trabajo, se pretende realizar un estudio de algunas nociones topológicas, como interior, exterior, frontera y puntos de adherencia de algunos conjuntos asociados en relación con abiertos básicos de τ_t . Recordando que los abiertos básicos son elementos de la forma:

$$D_{a,b,c} = \{x, y : y \geq ax + b \wedge y \geq -ax + c\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

En primera instancia, se realizará un estudio con conjuntos acotados tales como, semicircunferencia, circunferencia y elipse. Luego, se abordaran otros conjuntos como, parábola e hipérbola. Cabe aclarar que los conjuntos a estudiar son la unión entre la curva generada y los puntos de su interior. Teniendo en cuenta que estos puntos son aquellos $P(x, y)$ que pertenecen a la región del plano determinada por la desigualdad planteada, y son diferentes a los puntos interiores de la noción topológica. Por ejemplo, sea la elipse con centro (h, k) , representada mediante la expresión algebraica:

$$\frac{(x-h)^2}{A^2} + \frac{(y-k)^2}{B^2} = 1$$

En la que A, B, h y $k \in \mathbb{R}$ y $A, B > 0$. El conjunto A_t está formado por los $P(x, y)$ tal que

$$\frac{(x-h)^2}{A^2} + \frac{(y-k)^2}{B^2} \leq 1$$

Este conjunto, se denominará elipse con interior. En el siguiente gráfico se representa el conjunto A_t .

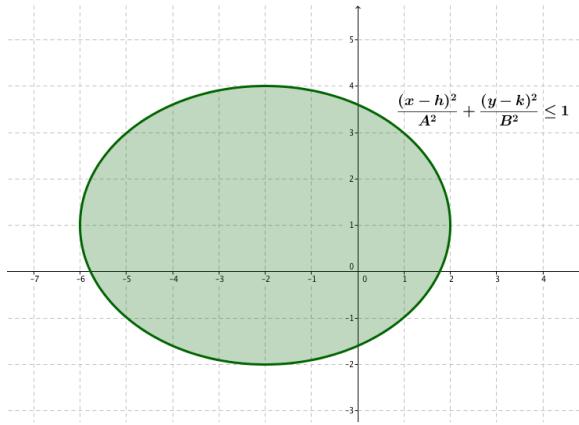


Gráfico 15. Conjunto A_t , elipse con interior

De manera análoga, se definen los demás conjuntos que se estudiaran en este capítulo.

4.1 SEMICIRCUNFERENCIA CON INTERIOR

Sea una semicircunferencia definida mediante la expresión algebraica $y = \sqrt{r^2 - (x - h)^2} + k$, en la que r, h y $k \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, en donde el número r representa el radio de la semicircunferencia, h el desplazamiento horizontal y k el desplazamiento vertical; El conjunto A está formado por los $P(x, y)$ tal que,

$$y \leq \sqrt{r^2 - (x - h)^2} + k \cap y > k$$

Este conjunto, se denominará semicircunferencia con interior. En el siguiente gráfico se representa el conjunto A .

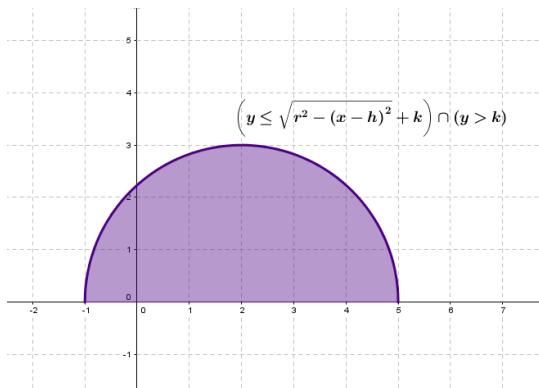


Gráfico 16. Semicircunferencia con interior

INTERIOR

En esta parte del trabajo se realiza un estudio sobre el interior del conjunto A . En otras palabras, se determinará si existe o no un punto p interior del conjunto A , de tal manera que exista un abierto contenido en A y que contiene al punto p .

Para esto, se propone el siguiente ejemplo, en el cual se tiene el conjunto

$$A = (x, y) / y \leq \overline{9 - (x - 2)^2} \cap y > 0$$

Y el abierto de τ_t $D_{1,-1,3}$, como se muestra en el siguiente gráfico.

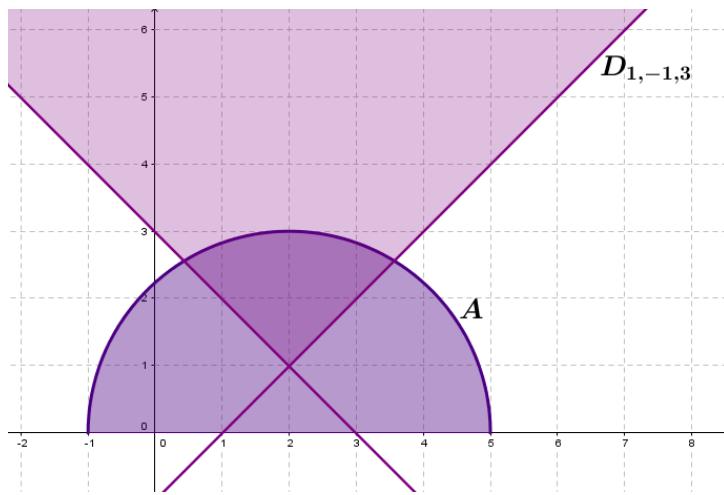


Gráfico 17. Ejemplo conjunto A y abierto $D_{1,-1,3}$

En el ejemplo anterior se puede observar que $D_{1,-1,3} \not\subseteq A$. Además, con base en el ejemplo y el estudio realizado hasta el momento, se puede inferir que no existe un abierto básico $D_{a,b,c}$ de τ_t contenido en el conjunto A . De esta manera, no existe un punto p que pertenezca a A , tal que existe un abierto contenido en A y que contiene al punto p . Finalmente, se puede deducir que $\text{int } A = \emptyset$.

De manera análoga y ampliando esta afirmación a otros conjuntos acotados, se plantea el siguiente teorema.

Teorema 3. Interior conjunto acotado

Sea la topología τ_t . Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ talque A es acotado, entonces $\text{int } A = \emptyset$.

Demostración

Sí A es acotado quiere decir que existe $a \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$ de modo que $A \subseteq B(a, r)$ donde $B(a, r)$ es una bola con centro en $a = [a_1, a_2]$ y radio r .

Si consideramos cualquier punto $Q = [x_1, y_1] \in A$, un abierto básico que contiene al punto Q esta dado por:

$$D_{mx, y_1 - mx_1, mx_1 + y_1} = \{x, y : y \geq mx + y_1 - mx_1 \wedge y \geq -mx + mx_1 + y_1, m > 0\}.$$

Se tiene que:

$$r > 0$$

De donde

$$0 < r < r + 1$$

el punto $x_1, y_1 + r + 1 \in D_{mx, y_1 - mx_1, mx_1 + y_1}$, en efecto pues se tiene que:

$$y_1 < y_1 + r + 1$$

De donde

$$mx + y_1 - mx_1 < mx + y_1 + r + 1 - mx_1$$

y

$$-mx + y_1 + mx_1 < -mx + y_1 + r + 1 + mx_1$$

Además

$$a_2 - y_1^2 + a_1 - x_1^2 \frac{1}{2} < a_2 - y_1 + r + 1^2 + a_1 - x_1^2 \frac{1}{2}$$

Es decir

$$d[x_1, y_1, a_1, a_2] < d[x_1, y_1 + r + 1, a_1, a_2]$$

Se concluye que $x_1, y_1 + r + 1 \notin B(a, r)$, de este modo podemos concluir que:

$$D_{mx, y_1 - mx_1, mx_1 + y_1} \not\subseteq B(a, r)$$

Lo que quiere decir que no existe un abierto que esté contenido en la bola $B(a, r)$, por tanto $\text{int } A = \emptyset$.

EXTERIOR

Antes de estudiar el exterior del conjunto A , se muestra el siguiente gráfico, en el cuál se observa que existe mínimo un abierto básico $D_{a,b,c}$ de la topología τ_t que está contenido en el complemento del conjunto A .

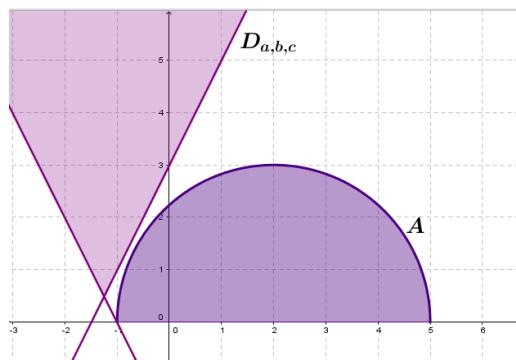


Gráfico 18. Ejemplo exterior semicircunferencia

A partir del gráfico anterior y del estudio realizado hasta el momento, se puede inferir que el exterior del conjunto A o $ext(A)$ esta representado por la parte sombreada del siguiente gráfico. En éste, también se muestra un abierto $D_{a,b,c}$ el cuál está contenido en la región mencionada.

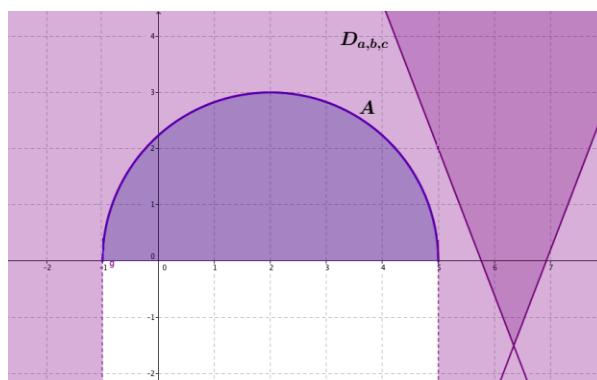


Gráfico 19. Exterior semicircunferencia con interior

Sin embargo, la imagen anterior representa un ejemplo del exterior de un conjunto A específico, quedó la duda o inquietud, de cómo expresar el $ext(A)$.

Para esto se tomará como ayuda algunos contenidos matemáticos tales como, recta

tangente, pendiente, derivada de una función en un punto, ecuación punto pendiente, entre otros.

Sea el conjunto A , y $(a, f(a))$ un punto cualquiera que pertenece al conjunto A , se sabe que la pendiente de la recta tangente a A en el punto $(a, f(a))$ es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Ahora, utilizando la ecuación punto pendiente $y = m(x - x_1) + y_1$, y sabiendo que $x_1, y_1 = (a, f(a))$ y $m = f'(a)$ se tiene que:

$$y = f'(a)x - a + f(a)$$

En conclusión, la pendiente de la recta tangente a A en el punto $(a, f(a))$ es $f'(a)$ siempre que este valor exista y la ecuación de la recta tangente es $y = f'(a)x - a + f(a)$, como se muestra en la siguiente gráfica.

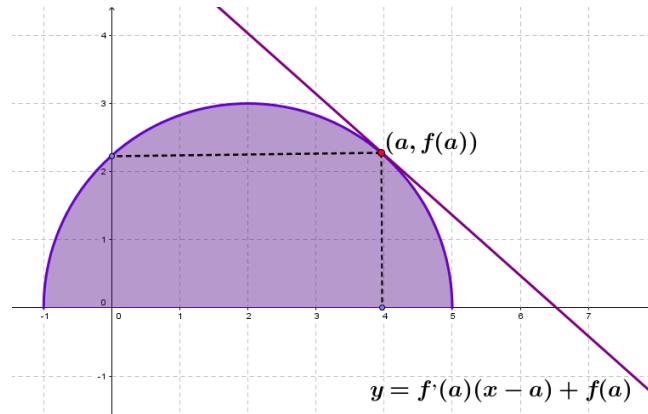


Gráfico 20. Recta tangente a A en el punto $(a, f(a))$

A partir de la ecuación de la recta tangente a A en el punto $(a, f(a))$, se determina la región del plano descrita por la expresión $y > f'(a)x - a + f(a)$, como se muestra en el siguiente gráfico.

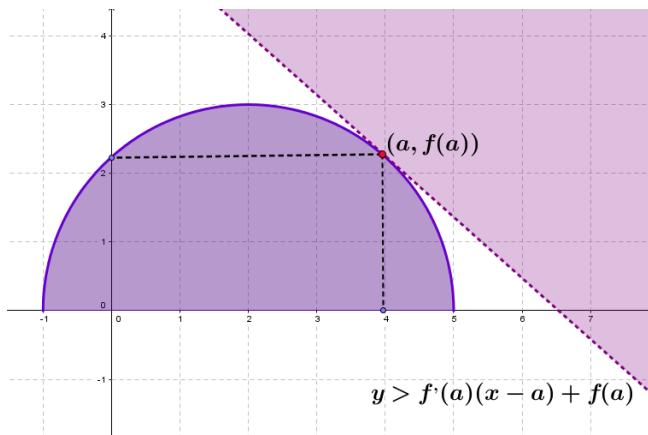


Gráfico 21. Región determinada por la recta tangente a A en el punto $(a, f(a))$

Finalmente, si se varía el punto $(a, f(a))$ sobre la curva que representa el conjunto A , se obtiene que la unión de todas las regiones $y > f'(a)x - a + f(a)$ conforman el exterior del conjunto A o $\text{ext}(A)$.

En la siguiente imagen, se muestra la unión de algunas regiones del plano descritas por la expresión $y > f'(a)x - a + f(a)$, se puede observar que a medida que se varía el punto $(a, f(a))$ se va conformando la región del plano buscada inicialmente.

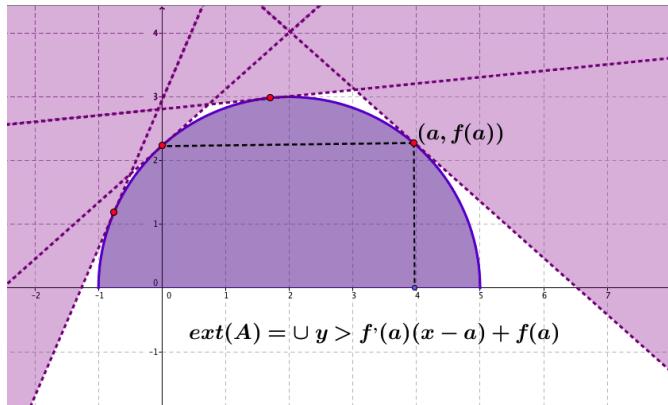


Gráfico 22. Exterior semicircunferencia

Ahora, para expresar el exterior del conjunto A o $\text{ext}(A)$ a partir de la unión de abiertos $D_{a,b,c}$ de la topología τ_t , se deben determinar los valores de a , b y c .

En primera instancia, se conoce que:

$a = f'(a)$, teniendo en cuenta que en el primer miembro de la igualdad $a \in \mathbb{R}$, y $a > 0$.

Mientras, que en el segundo miembro de la igualdad, a es un punto cualquiera de la circunferencia que determina el conjunto A .

Para conocer el valor de b , se determinar el intersecto con el eje y de la ecuación de la recta tangente $y = f'(a)x - a + f(a)$, de la siguiente manera:

$$y = f'(a)x - a + f(a)$$

$y = f'(a)x - f'(a)a + f(a)$ *Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación.*

$$y = f'(a)x + -f'(a)a + f(a) \quad \text{Se agrupan los términos } -f'(a)a \text{ y } f(a).$$

$$\text{De esta manera } b = -f'(a)a + f(a).$$

De manera análoga al procedimiento anterior, y tomando $m = -f'(a)$, se obtiene que $c = f'(a)a + f(a)$.

Finalmente, se puede deducir que:

$$\text{ext } A = D_{f'(a), -f'(a)a + f(a), f'(a)a + f(a)}, \forall a \in A.$$

4.2 CIRCUNFERENCIA CON INTERIOR

Sea una circunferencia definida mediante la expresión $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, en la que $h, k \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. En donde, el número r representa el radio de la circunferencia y $P(h, k)$ el centro de la misma; El conjunto A está formado por los $P(x, y)$ tal que,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 \leq r^2$$

Este conjunto, se denominará circunferencia con interior. En el siguiente gráfico se representa el conjunto A .

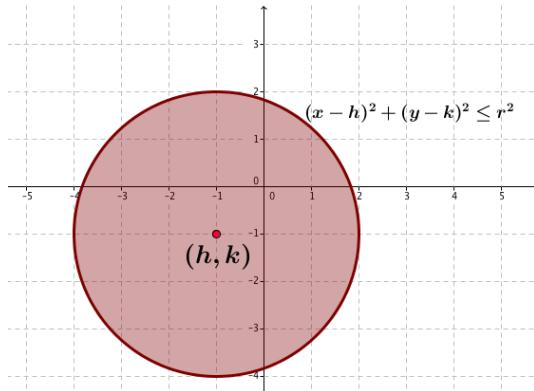


Gráfico 23. Circunferencia con interior

INTERIOR

El estudio del interior del conjunto A , es análogo al de la semicircunferencia con interior. De ante mano se conoce que el conjunto A es acotado. De esta manera, se infiere la siguiente afirmación:

- Sea la topología τ_t . Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ talque $A = \{x, y : (x - h)^2 + (y - k)^2 \leq r^2\}$ en la que $h, k \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. Entonces $\text{int } A = \emptyset$.

EXTERIOR

Antes de estudiar el exterior del conjunto A , se presenta el siguiente gráfico, en el cuál se observa el conjunto A y un abierto básico $D_{a,b,c}$ de la topología τ_t . También, se puede visualizar que el abierto $D_{a,b,c}$ está contenido en el complemento del conjunto A . Por tal motivo se puede inferir que $\text{ext } (A) \neq \emptyset$.

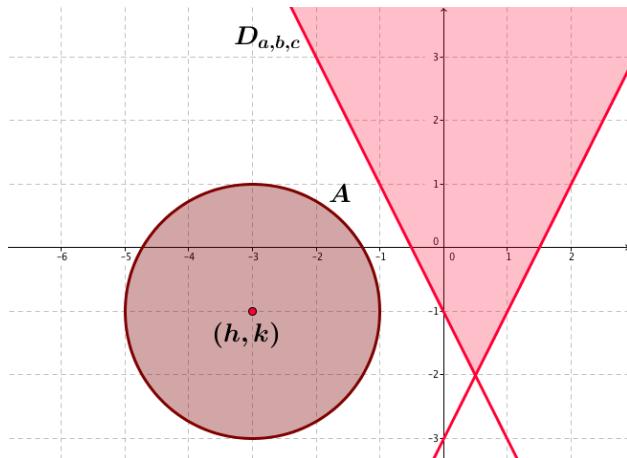


Gráfico 24. Ejemplo conjunto A y abierto $D_{a,b,c}$

De manera general y con ayuda del siguiente gráfico, se puede inferir que el exterior del conjunto A está determinado por la zona sombreada. De esta manera, para todo $P(x, y)$ que pertenezca a esta zona, existe un abierto $D_{a,b,c}$ de la topología τ_t , tal que, $P \in D_{a,b,c}$ y $D_{a,b,c} \subseteq A^c$.

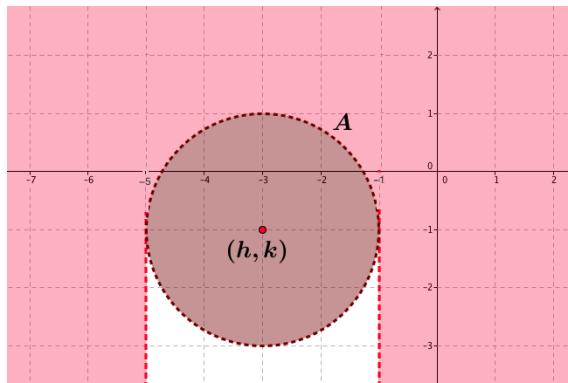


Gráfico 25. Exterior conjunto circunferencia con interior

FRONTERA

Para realizar el estudio de la frontera del conjunto A se sabe de antemano que el espacio topológico es igual a la unión entre el interior, exterior y frontera del conjunto A . En otras palabras; $\mathbb{R}^2 = int(A) \cup ext(A) \cup Fr(A)$ de esta manera, si se conoce tanto el exterior como el interior de un conjunto se puede determinar su frontera. No obstante, el estudio que se presenta a continuación tiene como finalidad visualizar algunos ejemplos específicos de la topología estudiada.

- Sea el conjunto $A = \{x, y : (x + 3)^2 + (y + 1)^2 \leq 2^2\}$, el abierto $D_{5,10,-20}$ contiene puntos tanto del interior como del exterior de A . Como se visualiza en el siguiente gráfico.

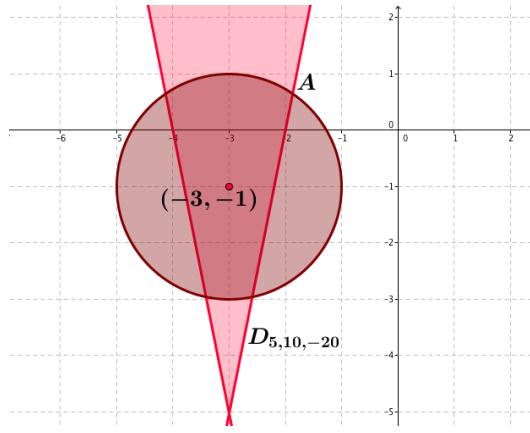


Gráfico 26. Ejemplo, conjunto A y abierto $D_{5,10,-20}$

De acuerdo con el gráfico, se puede inferir que existe un punto p , tal que $p \in D_{5,10,-20}$, y $D_{5,10,-20} \cap A \neq \emptyset$ y $D_{5,10,-20} \cap A^c \neq \emptyset$. Este punto p , se denomina punto frontera de A .

- Existen algunos abiertos $D_{a,b,c}$ particulares, los cuales contienen puntos tanto del interior como del exterior del conjunto A y el vértice $\frac{c-b}{2a}, \frac{c+b}{2}$ de la región triangular generada por el abierto, pertenece a la región del plano denotada como exterior del conjunto A . Por ejemplo, el abierto $D_{\frac{1}{2},1,-5}$, el cual se muestra en el siguiente gráfico. Teniendo en cuenta que el conjunto A , es el mismo del ejemplo anterior.

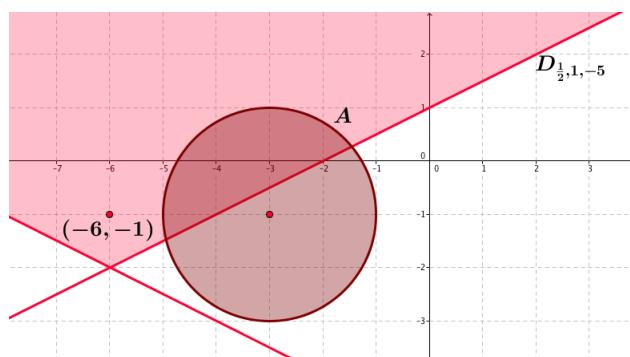


Gráfico 27. Ejemplo, conjunto A y abierto $D_{\frac{1}{2},1,-5}$

Del gráfico se puede inferir que el punto $P = -6, -1$ es un punto frontera del conjunto A . Sin embargo, se debe tener cuidado de que exista un abierto $D_{a,b,c}$ que contenga a P , y no interseque al conjunto A . En el siguiente gráfico, se muestra lo establecido anteriormente, se representa el conjunto A y el abierto $D_{3,16,-20}$, el cuál contiene a P y $D_{3,16,-20} \cap A = \emptyset$.

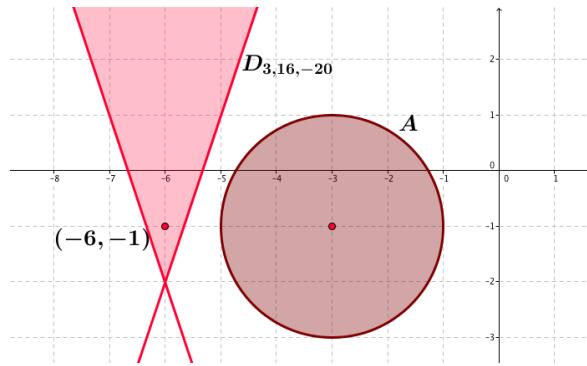


Gráfico 28. Ejemplo, conjunto A y abierto $D_{3,16,-20}$

De acuerdo con el gráfico anterior, se concluye que el punto $P = -6, -1$ NO es un punto frontera del conjunto A . De esta manera y con ayuda de los ejemplos previos, además, conociendo de antemano cómo se determina tanto el interior como el exterior de A , se deduce que la frontera del conjunto está determinada por la parte sombreada del siguiente gráfico.

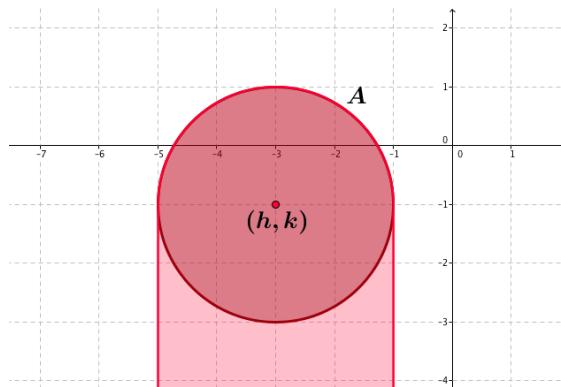


Gráfico 29. Frontera circunferencia con interior

Resaltando que el conjunto A está contenido en la región del plano denotada como la frontera de A . Que es equivalente a escribir $A \subseteq Fr(A)$.

Una posible manera, de expresar la región que determina la frontera de A es:

- Sea el conjunto $A = \{x, y : (x - h)^2 + (y - k)^2 \leq r^2\}$. Entonces:

$$Fr A = \{x, y : y \leq \sqrt{r^2 - (x - h)^2} + k\}.$$

En otras palabras, se concluye que, sea un $P(x, y)$ que pertenezca a la región determinada por la expresión $y \leq \sqrt{r^2 - (x - h)^2} + k$, Todo abierto $D_{a,b,c}$ de la topología τ_t tal que $P \in D_{a,b,c}$, se cumple que:

$$D_{a,b,c} \cap A \neq \emptyset \text{ y } D_{a,b,c} \cap A^c \neq \emptyset.$$

4.3 ELIPSE CON INTERIOR

En el caso que el conjunto A_t es una elipse con interior, el estudio que se realiza es análogo al caso en el que el conjunto A_t es acotado.

Sea la elipse con centro (h, k) , representada mediante la expresión algebraica:

$$\frac{(x - h)^2}{A^2} + \frac{(y - k)^2}{B^2} = 1$$

En la que A, B, h y $k \in \mathbb{R}$ y $A, B > 0$. El conjunto A_t está formado por los $P(x, y)$ tal que

$$\frac{(x - h)^2}{A^2} + \frac{(y - k)^2}{B^2} \leq 1$$

En primera instancia se conoce que el conjunto A_t es acotado, por tanto se infiere que:

- Sea la topología τ_t . Si $A_t \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $A_t = \{x, y : \frac{(x - h)^2}{A^2} + \frac{(y - k)^2}{B^2} \leq 1\}$ en la que A, B, h y $k \in \mathbb{R}$ y $A, B > 0$. Entonces $int A_t = \emptyset$.

EXTERIOR

Para realizar el estudio del exterior del conjunto A_t , se presentan el siguiente ejemplo.

- Sea el conjunto $A_t = \{x, y : \frac{(x-h)^2}{A^2} + \frac{(y-k)^2}{B^2} \leq 1\}$ una elipse con interior y centro (h, k) . Existe un abierto básico $D_{a,b,c}$ de la topología τ_t , tal que $D_{a,b,c} \subseteq A_t^c$. Cómo se muestra en el siguiente gráfico.

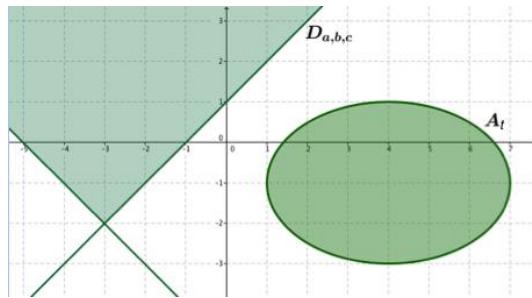


Gráfico 30. Conjunto A_t y abierto $D_{a,b,c}$

De manera general y con ayuda del siguiente gráfico, se puede inferir que el exterior de A_t está determinado por la zona sombreada.

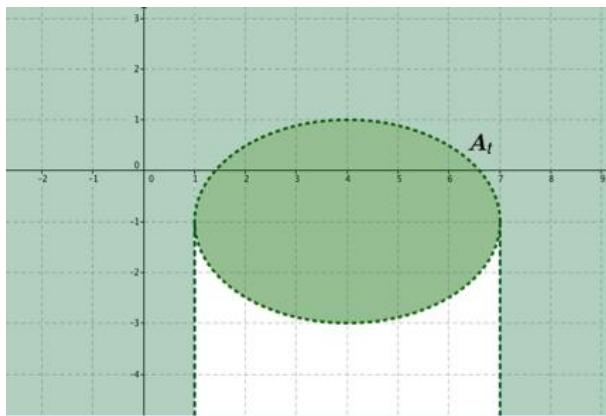


Gráfico 31. Exterior elipse

En otras palabras, el conjunto de los puntos exteriores de A_t , se puede determinar mediante la unión de regiones en el plano, como se muestra a continuación:

$$\overline{\text{ext } A_t} = y > B^2 - 1 - \frac{(x-h)^2}{A^2} + k \cup x > h + A \cup x < h - A$$

FRONTERA

A partir de las definiciones de interior y exterior del conjunto A_t , cuando esté es una elipse con interior, se infiere que la frontera del conjunto A_t está determinada por la parte

sombreada del siguiente gráfico.

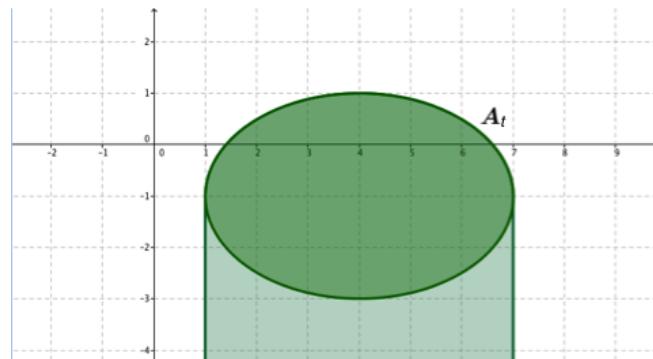


Gráfico 32. Frontera elipse

Resaltando que el conjunto A_t está contenido en la región del plano denotada como la frontera de A_t . En otras palabras $A_t \subseteq Fr(A_t)$.

Una manera de expresar la región que determina la frontera de A es:

$$Fr\ A_t = \overline{x, y : y \leq B^2 \sqrt{1 - \frac{(x-h)^2}{A^2}} + k} .$$

4.4 ADHERENCIA DE UN CONJUNTO ACOTADO

A partir de la definición de adherencia que se presenta en el marco teórico, se proponen los siguientes ejemplos en relación con los conjuntos estudiados hasta el momento.

- Sea el conjunto $A = \overline{x, y : \frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} \leq 1}$, una elipse con interior, como se muestra en el siguiente gráfico.

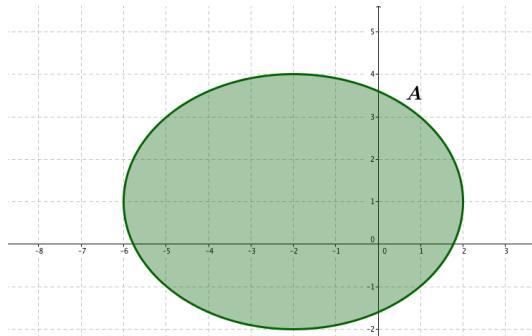


Gráfico 33. Ejemplo conjunto A, elipse con interior

El conjunto de todos los puntos adherentes a A está determinado por la expresión:

$$y \leq 1 + \sqrt{9 - 1 - \frac{(x+2)^2}{16}}$$

De esta manera, cualquier $P(x, y)$ que pertenezca a la región determinada por la desigualdad anterior, es un punto adherente a A . En el siguiente gráfico se muestra

la región del plano determinada por la expresión $y \leq 1 + \sqrt{9 - 1 - \frac{(x+2)^2}{16}}$ y el $P(-4, -1)$, el cuál es un punto adherente al conjunto A .

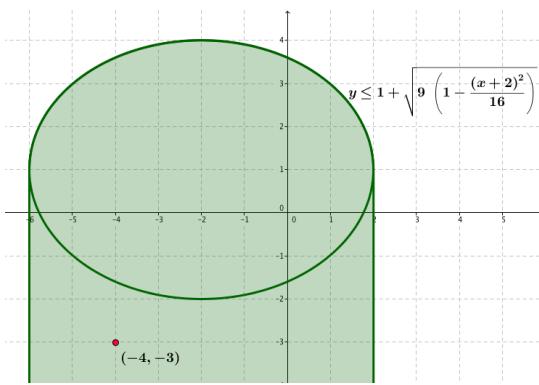


Gráfico 34. Ejemplo, adherencia de un conjunto A

Además, en el gráfico se puede observar que la región sombreada determina también la frontera del conjunto A .

- Sea el conjunto $A = (x - h)^2 + (y - k)^2 \leq r^2$, en la que $h, k \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. La región en el plano representada mediante la expresión $y \leq \sqrt{r^2 - (x - h)^2} + k$, determina el conjunto de todos los puntos adherentes a A . Esta región denota también la frontera del conjunto A , como se estableció en la sesión de frontera de una circunferencia con interior.

De acuerdo con los ejemplos propuestos y la proposición 2 plasmada en el marco teórico, además, como se estableció en los conjuntos estudiados, que $A \subseteq Fr(A)$, se concluye que:

- Sea la topología τ_t . Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ y A es un conjunto acotado. Entonces $A = Fr(A)$.

De esta manera, se concluye que todo punto x que pertenezca a la $Fr(A)$ es un punto

adherente a A .

4.5 PARÁBOLA CON INTERIOR

Sea una parábola representada mediante la expresión algebraica $y = Ax^2 + Bx + C$, en la que A, B y $C \in \mathbb{R}$ y $A \neq 0$; se presentan dos conjuntos, el primero cuando $A > 0$, se determina el conjunto $A_t = \{x, y : y \geq Ax^2 + Bx + C\}$ y el segundo caso, cuando $A < 0$, se determina el conjunto $A_t = \{x, y : y \leq Ax^2 + Bx + C\}$.

PRIMER CASO $A > 0$.

Sea el conjunto $A_t = \{x, y : y \geq Ax^2 + Bx + C\}$ en la que A, B y $C \in \mathbb{R}$ y $A > 0$, una parábola con interior.

En el siguiente gráfico se representa el conjunto $A = \{x, y : y \geq x^2 - 2x + 1\}$.

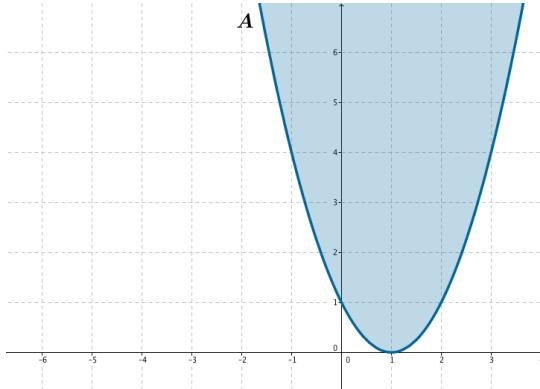


Gráfico 35. Ejemplo parábola con interior, caso $A > 0$

INTERIOR Y EXTERIOR

Primero, se presentan el siguiente ejemplo, en el cuál se puede observar un abierto básico $D_{a,b,c}$ y un conjunto A .

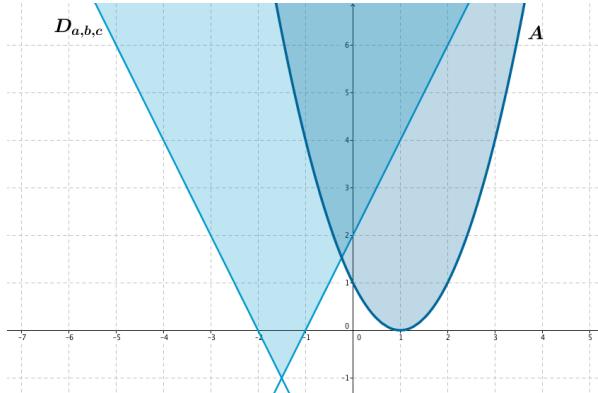


Gráfico 36. Interior parábola, caso $A > 0$

En el ejemplo se puede observar que el abierto $D_{a,b,c}$ contiene puntos tanto del conjunto A como de A^c .

En base al ejemplo anterior y del estudio realizado, se infiere que dado un $P(x,y) \in \mathbb{R}^2$ todo abierto $D_{a,b,c}$ de la topología τ_t que contiene a P , se cumple que $D_{a,b,c} \cap A \neq \emptyset$ y $D_{a,b,c} \cap A^c \neq \emptyset$. Planteando el siguiente teorema.

Teorema 4. Interior parábola caso $A > 0$

Sea la topología τ_t . Si $A_t \subseteq \mathbb{R}^2$ talque $A_t = \{x,y : y \geq Ax^2 + Bx + C\}$ en la que A, B y $C \in \mathbb{R}$ y $A > 0$. Entonces $\text{int } A_t = \emptyset$.

Demostración

Sea $D_{a,b,c}$, un abierto básico de la topología τ_t y $A_t = \{x,y : y \geq Ax^2 + Bx + C\}$ una parábola con interior. Se determinan los puntos de corte de la parábola que determina al conjunto A_t con las rectas descritas por las expresiones $y = ax + b$ y $y = -ax + c$.

Primero, se igualan las expresiones $y = Ax^2 + Bx + C$ y $y = ax + b$.

$$Ax^2 + Bx + C = ax + b \quad \text{Se igualan las expresiones.}$$

$$Ax^2 + Bx - ax + C - b = 0 \quad \begin{aligned} &\text{Se suma y se resta en ambos miembros de la} \\ &\text{igualdad por } (-b) \text{ y por } -ax. \end{aligned}$$

$$Ax^2 + x(B - a) + (C - b) = 0 \quad \text{Se aplica la propiedad distributiva de la}$$

multiplicación y agrupación de términos.

Ahora, se soluciona la ecuación cuadrática $Ax^2 + xB - a + C - b = 0$, obteniendo:

$$x = \frac{-(B-a) \pm \sqrt{B-a^2 - 4AC - b}}{2A}$$

De esta manera existen dos posibles soluciones a la ecuación cuadrática, que son:

$$x_1 = \frac{-B-a + \sqrt{B-a^2 - 4AC - b}}{2A} \text{ y } x_2 = \frac{-B-a - \sqrt{B-a^2 - 4AC - b}}{2A}$$

Ahora, se reemplaza el valor de x_1 y x_2 en la expresión $y = ax + b$, se verifica que las expresiones $y = Ax^2 + Bx + C$ y $y = ax + b$ tienen 2 posibles puntos de intersección, descritos de la forma:

$$x_1, y_1 = \frac{-B-a + \sqrt{B-a^2 - 4AC - b}}{2A}, a \frac{-B-a + \sqrt{B-a^2 - 4AC - b}}{2A} + b$$

$$x_2, y_2 = \frac{-B-a - \sqrt{B-a^2 - 4AC - b}}{2A}, a \frac{-B-a - \sqrt{B-a^2 - 4AC - b}}{2A} + b$$

De manera análoga se obtienen dos posibles puntos de intersección entre las expresiones $y = Ax^2 + Bx + C$ y $y = -ax + c$, los cuales se representan de la forma:

$$x_3, y_3 = \frac{-B+a + \sqrt{B+a^2 - 4AC - c}}{2A}, -a \frac{-B+a + \sqrt{B+a^2 - 4AC - c}}{2A} + c$$

$$x_4, y_4 = \frac{-B+a - \sqrt{B+a^2 - 4AC - c}}{2A}, -a \frac{-B+a - \sqrt{B+a^2 - 4AC - c}}{2A} + c$$

Los puntos x_1, y_1 , x_2, y_2 , x_3, y_3 y x_4, y_4 son los posibles puntos de intersección entre la parábola que determina el conjunto A_t y las rectas descritas por las expresiones $y = ax + b$ y $y = -ax + c$. Como $D_{a,b,c} = \{x, y : y \geq ax + b \wedge y \geq -ax + c\} \subseteq \mathbb{R}^2$, se presentan los siguientes casos:

- Si la parábola que determina el conjunto A_t se interseca en mínimo un punto con las rectas descritas por las expresiones $y = ax + b$ y $y = -ax + c$, entonces el abierto $D_{a,b,c} \subseteq Fr(A_t)$.
- Si la parábola que determina el conjunto A_t NO interseca a las rectas descritas por las expresiones $y = ax + b$ y $y = -ax + c$. Entonces, la parábola está contenida en el abierto $D_{a,b,c}$. De esta manera $D_{a,b,c} \subseteq Fr(A_t)$.

Finalmente, se muestra que en todos los casos posibles, el abierto básico $D_{a,b,c}$ está contenido en la frontera del conjunto A_t . De esta manera se deduce que $\text{int } A_t = \emptyset$.

En base al teorema anterior, se puede inferir que:

- Sea la topología τ_t . Si $A_t \subseteq \mathbb{R}^2$ talque $A_t = \{x, y : y \geq Ax^2 + Bx + C\}$ en la que A, B y $C \in \mathbb{R}$ y $A > 0$. Entonces $\text{ext } A_t = \emptyset$.

FRONTERA

Para estudiar y proponer algunos ejemplos de abiertos básicos que están contenidos en la frontera del conjunto A_t , se utilizaran los posibles puntos de intersección x_1, y_1 , x_2, y_2 , x_3, y_3 y x_4, y_4 entre la parábola que determina el conjunto A_t y las rectas descritas por las expresiones $y = ax + b$ y $y = -ax + c$.

Existen cinco casos de posiciones relativas de una parábola y las rectas $y = ax + b$ y $y = -ax + c$. El primer caso es cuando no existe un punto de intersección entre la parábola y las rectas, el segundo caso es cuando existe un único punto de intersección y así sucesivamente.

Para abordar estos 5 casos, se deben determinar los discriminantes de las ecuaciones de segundo grado que resultan al igualar la expresión $y = Ax^2 + Bx + C$, con las expresiones $y = ax + b$ y $y = -ax + c$. Estos discriminantes se expresan de la forma:

$$d_1 = B - a^2 - 4A \quad C - b \quad y \quad d_2 = B + a^2 - 4A \quad C - c$$

De esta manera, los cinco casos de posiciones relativas de una parábola, y las rectas $y = ax + b$ y $y = -ax + c$ son los que se presentan a continuación.

I. NO existe un punto de intersección entre la parábola y las rectas $y = ax + b$ y $y = -ax + c$.

Este caso se presenta cuando $d_1 < 0$ y $d_2 < 0$. De esta manera, ambas ecuaciones de segundo grado NO tienen soluciones dentro del conjunto de los números reales.

Ejemplo

Sea la parábola, representada mediante la expresión algebraica $y = x^2 - 2x + 1$ y las rectas $y = x - 4$ y $y = -x - 1$, no tienen algún punto de intersección entre ellos. Sin embargo, el abierto $D_{1,-4,-1}$ y el conjunto $A = \{x, y : y \geq x^2 - 2x + 1\}$ tienen infinitos puntos de intersección, como se muestra en la siguiente gráfica.

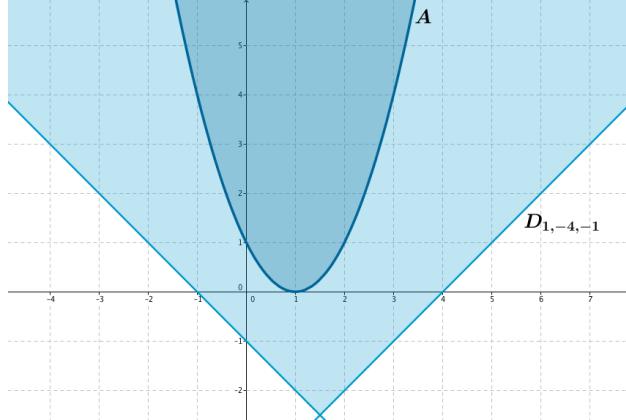


Gráfico 37. Ejemplo conjunto A y abierto $D_{1,-4,-1}$

Para comprobar que las rectas y la parábola no tienen ningún punto de intersección, se determinan los valores de los discriminantes.

$$d_1 = B - a^2 - 4A \quad C - b = -2 - 1^2 - 4 \quad 1 \quad 1 - -4 = -11$$

$$d_2 = B + a^2 - 4A \quad C - c = -2 + 1^2 - 4 \quad 1 \quad 1 - -1 = -7$$

Finalmente, se puede observar en el gráfico que el abierto $D_{1,-4,-1} \subseteq Fr(A)$.

II. Intersección de una parábola y las rectas $y = ax + b$ y $y = -ax + c$ en un único punto.

Este caso se presenta cuando $d_1 < 0$ y $d_2 = 0$, o cuando $d_1 = 0$ y $d_2 < 0$. De esta manera, una de las dos ecuaciones de segundo grado NO tiene solución dentro del conjunto de los números reales y la otra tiene sólo una solución real.

Ejemplo

Sea la parábola, representada mediante la expresión algebraica $y = x^2 - 2x + 1$ y las rectas $y = 2x - 3$ y $y = -2x - 2$ tienen un único punto de intersección entre ellas. Sin embargo, el abierto $D_{2,-3,-2}$ y el conjunto $A = \{(x, y) / y \geq x^2 - 2x + 1\}$ tienen infinitos puntos de intersección, como se muestra en la siguiente gráfica.

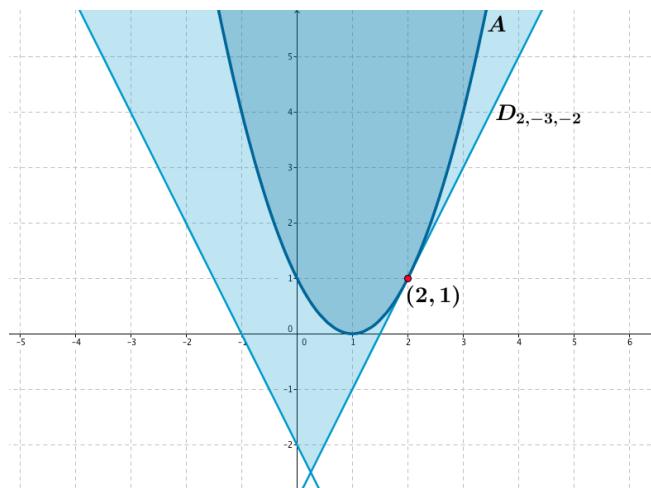


Gráfico 38. Ejemplo conjunto A y abierto $D_{2,-3,-2}$

Para comprobar que las rectas y la parábola tienen un único punto de intersección, se determinan los valores de los discriminantes.

$$d_1 = B - a^2 - 4A C - b = -2 - 2^2 - 4(1)(1) - (-3) = 0$$

$$d_2 = B + a^2 - 4A C - c = -2 + 2^2 - 4(1)(1) - (-2) = -12$$

Finalmente, se puede observar en el gráfico que el abierto $D_{2,-3,-2} \subseteq Fr(A)$.

III. Intersección de una parábola y las rectas $y = ax + b$ y $y = -ax + c$ en dos puntos.

Este caso se presenta cuando $d_1 = 0$ y $d_2 = 0$, o $d_1 < 0$ y $d_2 > 0$, o cuando $d_1 > 0$ y $d_2 < 0$. En el caso que $d_1 = 0$ y $d_2 = 0$ ambas ecuaciones de segundo grado tienen una única solución dentro del conjunto de los números reales. Para los otros dos casos una de las dos ecuaciones de segundo grado NO tiene soluciones reales mientras, la otra tiene dos soluciones reales.

Ejemplo

Sea la parábola, representada mediante la expresión algebraica $y = x^2 - 2x + 1$ y las rectas $y = 4x - 8$ y $y = -4x$ tienen dos puntos de intersección entre ellas. Sin embargo, el abierto $D_{4,-8,0}$ y el conjunto $A = \{(x, y) / y \geq x^2 - 2x + 1\}$ tienen infinitos puntos de intersección, como se muestra en la siguiente gráfica.

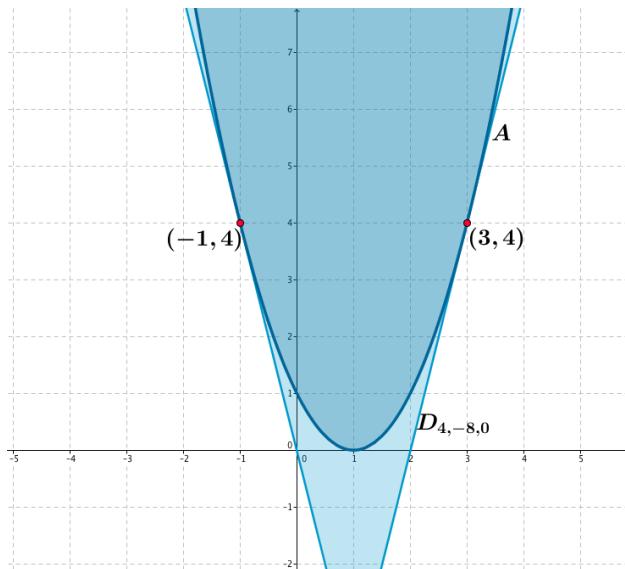


Gráfico 39. Ejemplo conjunto A y abierto $D_{4,-8,0}$

Para comprobar que las rectas y la parábola tienen dos puntos de intersección, se determinan los valores de los discriminantes.

$$d_1 = B - a^2 - 4A C - b = -2 - 4^2 - 4(1)(1) - -8 = 0$$

$$d_2 = B + a^2 - 4A C - c = -2 + 4^2 - 4(1)(1) - 0 = 0$$

Finalmente, se puede observar en el gráfico que el abierto $D_{4,-8,0} \subseteq Fr(A)$.

IV. Intersección de una parábola y las rectas $y = ax + b$ y $y = -ax + c$ en tres puntos.

Este caso se presenta cuando $d_1 = 0$ y $d_2 > 0$, o $d_1 > 0$ y $d_2 = 0$. Para ambos casos una de las dos ecuaciones de segundo grado tiene una única solución real mientras, la otra tiene dos soluciones reales.

En este parte se presenta un caso particular, es cuando $d_1 > 0$ y $d_2 > 0$, pero el punto de intersección de la región triangular se ubica sobre la parábola. En otras palabras, cuando $x_2, y_2 = x_3, y_3$, siendo x_2, y_2 y x_3, y_3 dos puntos de intersección entre una parábola y las rectas $y = ax + b$ y $y = -ax + c$.

Ejemplo

Sea la parábola, representada mediante la expresión algebraica $y = x^2 - 2x + 1$ y las rectas $y = 3x - 5$ y $y = -3x + 7$ tienen tres puntos de intersección entre ellas. Sin embargo, el abierto $D_{3,-5,7}$ y el conjunto $A = \{x, y : y \geq x^2 - 2x + 1\}$ tienen infinitos puntos de intersección, como se muestra en la siguiente gráfica.

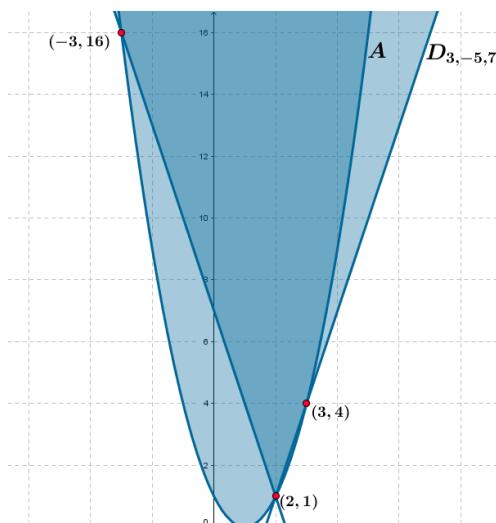


Gráfico 40. Ejemplo conjunto A y abierto $D_{3,-5,7}$

Para comprobar que las rectas y la parábola tienen tres puntos de intersección, se determinan los valores de los discriminantes.

$$d_1 = B - a^2 - 4A C - b = -2 - 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - -5 = 1$$

$$d_2 = B + a^2 - 4A C - c = -2 + 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 7 = 25$$

Ahora, se determinan los cuatro puntos de intersección entre las rectas $y = 3x - 5$ y $y = -3x + 7$ y la parábola.

$$x_1, y_1 = \frac{-(-5+1)}{2}, 3 \frac{-(-5+1)}{2} - 5 = (3, 4)$$

$$x_2, y_2 = \frac{-(-5-1)}{2}, 3 \frac{-(-5-1)}{2} - 5 = (2, 1)$$

$$x_3, y_3 = \frac{-1+5}{2}, -3 \frac{-1+5}{2} + 7 = (2, 1)$$

$$x_4, y_4 = \frac{-(1)-5}{2}, -3 \frac{-(1)-5}{2} + 7 = (-3, 16)$$

Como $x_2, y_2 = x_3, y_3$, se comprueba que la parábola interseca a las rectas $y = 3x - 5$ y $y = -3x + 7$ en tres puntos. Finalmente, se puede observar en el gráfico que el abierto $D_{3,-5,7} \subseteq Fr(A)$.

V. Intersección de una parábola y las rectas $y = ax + b$ y $y = -ax + c$ en cuatro puntos.

Este caso se presenta cuando $d_1 > 0$ y $d_2 > 0$. En ambos casos las ecuaciones de segundo grado tienen dos soluciones dentro del conjunto de los números reales.

Ejemplo

Sea la parábola, representada mediante la expresión algebraica $y = x^2 - 2x + 1$ y las rectas $y = 3x - 5$ y $y = -3x + 1$ tienen cuatro puntos de intersección entre ellas. Sin embargo, el abierto $D_{3,-5,1}$ y el conjunto $A = (x, y) / y \geq x^2 - 2x + 1$ tienen infinitos puntos de intersección, como se muestra en la siguiente gráfica.

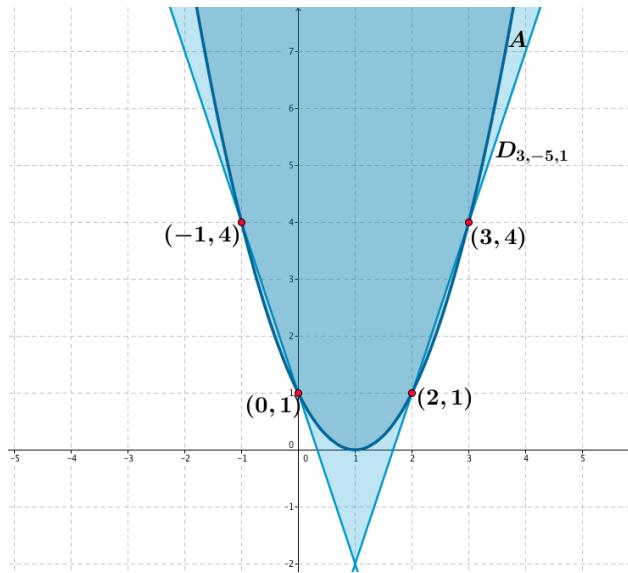


Gráfico 41. Ejemplo conjunto A y abierto $D_{3,-5,1}$

Para comprobar que las rectas y la parábola tienen dos puntos de intersección, se determinan los valores de los discriminantes.

$$d_1 = B - a^2 - 4A C - b = -2 - 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - -5 = 1$$

$$d_2 = B + a^2 - 4A C - c = -2 + 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 1 = 1$$

Finalmente, se puede observar en el gráfico que el abierto $D_{3,-5,1} \subseteq Fr(A)$.

En base a los casos propuestos y al estudio realizado, se realiza la siguiente afirmación.

- Sea la topología τ_t . Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ talque $A = \{x, y : y \geq Ax^2 + Bx + C\}$ en la que A, B y $C \in \mathbb{R}$ y $A > 0$. Entonces $Fr(A) = \mathbb{R}^2$.

ADHERENCIA PARÁBOLA, CASO $A > 0$.

A partir de la definición de adherencia establecida en el marco teórico y al teorema 14 citado en el marco teórico, se puede inferir que:

- Sea la topología τ_t . Si $A_t \subseteq \mathbb{R}^2$ talque $A_t = \{x, y : y \geq Ax^2 + Bx + C\}$ en la que A, B y $C \in \mathbb{R}$ y $A > 0$. Entonces $A_t = \mathbb{R}^2$.

En otras palabras, para todo $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cualquier abierto $D_{a,b,c}$, tal que $P \in D_{a,b,c}$, se cumple que $D_{a,b,c} \cap A_t \neq \emptyset$.

A continuación, se presenta el estudio del conjunto A_t , cuando es una parábola con interior y $A < 0$.

SEGUNDO CASO $A < 0$.

Sea el conjunto $A_t = \{x, y : y \leq Ax^2 + Bx + C\}$ en la que A, B y $C \in \mathbb{R}$ y $A < 0$, una parábola con interior.

En el siguiente gráfico se representa el conjunto $A_t = \{x, y : y \leq -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\}$.

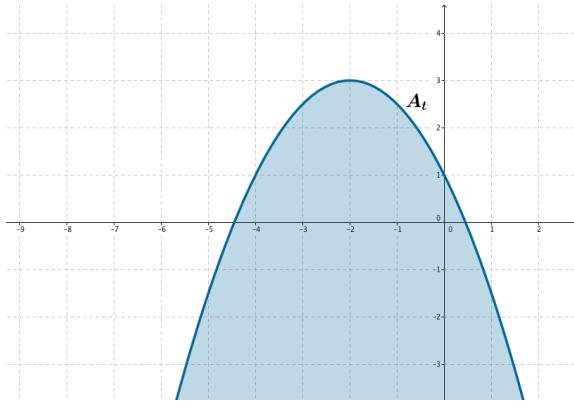


Gráfico 42. Ejemplo conjunto A_t , caso $A < 0$

INTERIOR

Para examinar el interior del conjunto $A_t = \{x, y : y \leq Ax^2 + Bx + C\}$, se debe tener en cuenta que es un conjunto acotado superiormente. De esta manera, NO existe un abierto $D_{a,b,c}$ que esté contenido en el interior del conjunto A_t . Por consiguiente, se afirma que:

- Sea la topología τ_t . Si $A_t \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $A_t = \{x, y : y \leq Ax^2 + Bx + C\}$ en la que A, B y $C \in \mathbb{R}$ y $A < 0$. Entonces $\text{int } A_t = \emptyset$.

EXTERIOR

Para iniciar el estudio del exterior del conjunto A_t , se presentan los siguientes ejemplos.

- Sea el conjunto $A_t = \{x, y : y \leq -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\}$ una parábola con interior, el abierto $D_{2,10,-11} \subseteq ext(A_t)$. Como se muestra en el siguiente gráfico.

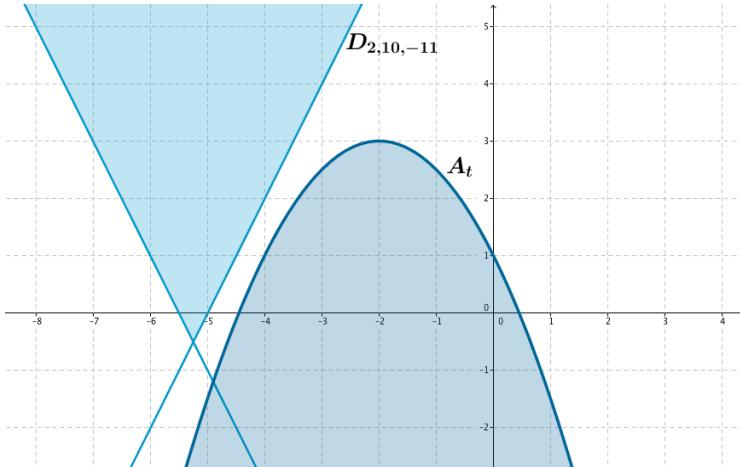


Gráfico 43. Ejemplo conjunto A_t y abierto $D_{2,10,-11}$

- Sea el conjunto $A_t = \{x, y : y \leq -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\}$ y el abierto $D_{\frac{5}{2}, -2, 2}$, se cumple que $D_{\frac{5}{2}, -2, 2} \subseteq ext(A)$. Como se muestra en el siguiente gráfico.

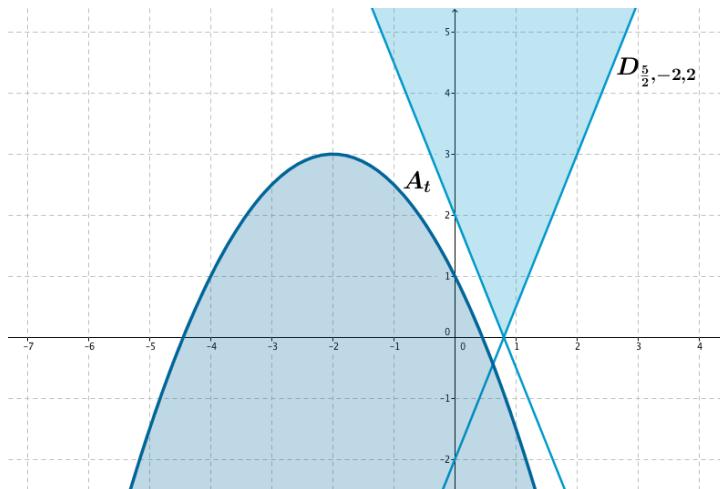


Gráfico 44. Ejemplo conjunto A_t y abierto $D_{\frac{5}{2}, -2, 2}$

De acuerdo con los ejemplos previos y al estudio realizado, se puede deducir que $ext(A_t) \neq \emptyset$.

De manera general, se puede inferir que el exterior del conjunto A_t está determinado por la zona sombreada en la siguiente gráfica.

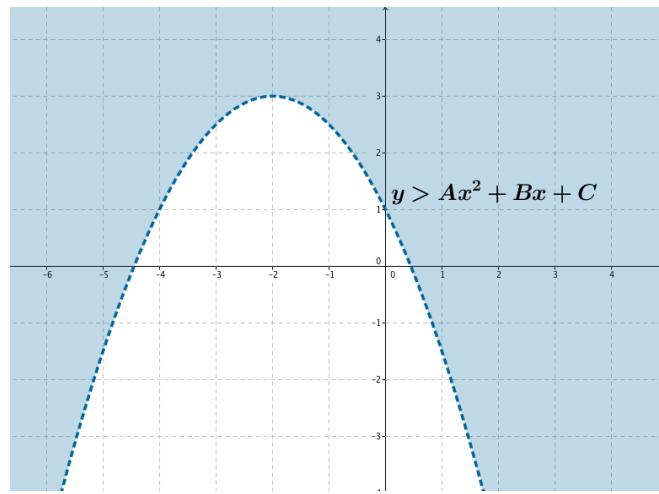


Gráfico 45. Exterior conjunto A_t , caso $A < 0$

De esta manera, para todo $P(x, y)$ que pertenezca a la región en el plano representada por la expresión $y > Ax^2 + Bx + C$, en la que A, B y $C \in \mathbb{R}$ y $A < 0$, existe un abierto $D_{a,b,c}$ de la topología τ_t , tal que, $P \in D_{a,b,c}$ y $D_{a,b,c} \subseteq A_t^c$. En otras palabras

$$\text{ext } A_t = y > Ax^2 + Bx + C.$$

FRONTERA

A continuación, se presenta un gráfico en el cuál se observa el abierto básico $D_{1,-1,-5}$ y el conjunto $A_t = \{x, y : y \leq -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\}$.

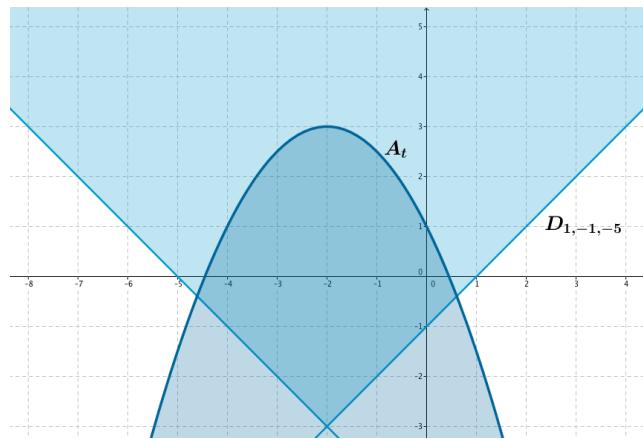


Gráfico 46. Ejemplo conjunto A_t y abierto $D_{1,-1,-5}$

En el gráfico se observa que el abierto $D_{1,-1,-5}$ contiene puntos tanto de A_t como de A_t^c .

A partir del ejemplo anterior y del estudio realizado, se puede inferir que:

- Sea la topología τ_t . Si $A_t \subseteq \mathbb{R}^2$ talque $A_t = \{x, y : y \leq Ax^2 + Bx + C\}$ en la que A, B y $C \in \mathbb{R}$ y $A < 0$. Entonces $Fr A_t = y \leq Ax^2 + Bx + C$.

Finalmente, como $A_t = \{(x, y) / y \leq Ax^2 + Bx + C\}$ entonces $Fr A_t = A_t$.

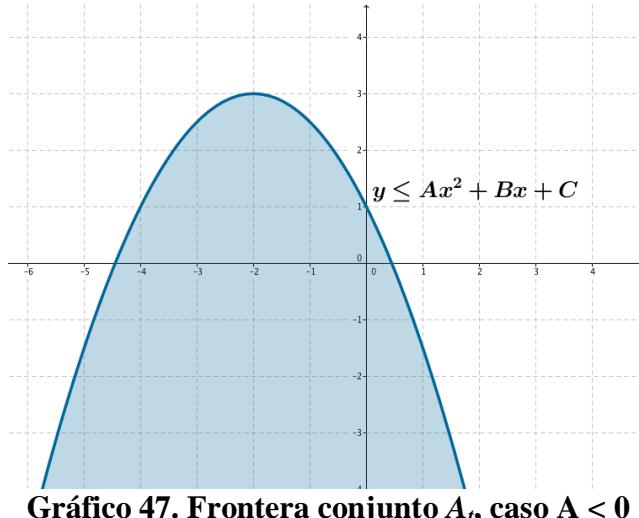


Gráfico 47. Frontera conjunto A_t , caso $A < 0$

En otras palabras, se concluye que, sea un $p \in A_t$, cualquier abierto $D_{a,b,c}$ tal que $p \in D_{a,b,c}$, se cumple que $D_{a,b,c} \cap A_t \neq \emptyset$ y $D_{a,b,c} \cap A_t^c \neq \emptyset$.

4.6 HIPÉRBOLA CON INTERIOR

Sea una hipérbola con centro (h, k) , representada mediante la expresión algebraica:

$$\frac{(x-h)^2}{A^2} - \frac{y-k^2}{B^2} = 1$$

En la que A, B, h y $k \in \mathbb{R}$ y $A, B > 0$; El conjunto A_t está formado por los $P(x, y)$ tal que,

$$\frac{(x-h)^2}{A^2} - \frac{y-k^2}{B^2} \geq 1$$

Este conjunto, se denominará hipérbola con interior. En el siguiente gráfico se representa el conjunto A_t .

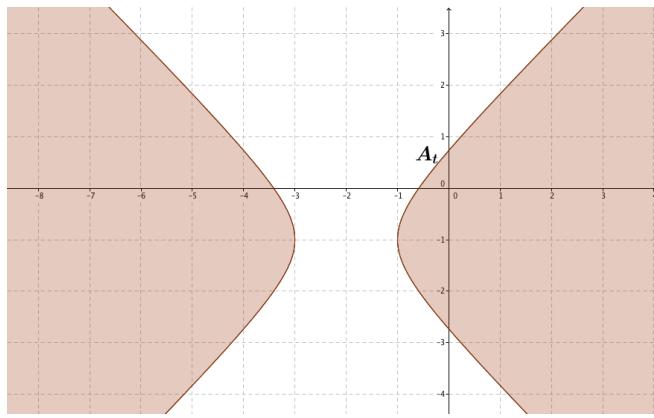


Gráfico 48. Conjunto A_t , hipérbola con interior

INTERIOR

En el siguiente gráfico, se representa un conjunto A_t y el abierto $D_{2,-1,-8}$.

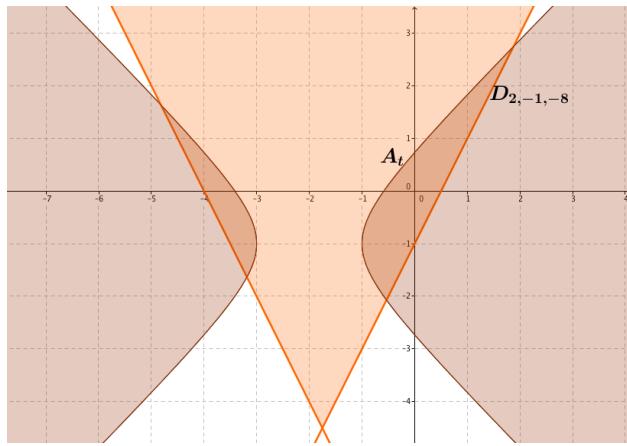


Gráfico 49. Ejemplo conjunto A_t y abierto $D_{2,-1,-8}$

En el ejemplo se puede observar que el abierto $D_{2,-1,-8}$ contiene punto tanto de A_t como de A_t^c .

Con ayuda del ejemplo anterior y el estudio realizado, se puede inferir que:

- Sea la topología τ_t . Si $A_t \subseteq \mathbb{R}^2$ talque $A_t = \{x, y : \frac{(x-h)^2}{A^2} - \frac{y-k}{B^2} \geq 1\}$ en la que A, B, h y $k \in \mathbb{R}$ y $A, B > 0$, entonces $\text{int } A_t = \emptyset$.

EXTERIOR

A continuación, se presenta un ejemplo donde se muestra que existen $P(x, y)$, tales que,

existe un abierto básico $D_{a,b,c}$ en los cuales se cumple que $P \in D_{a,b,c}$ y $D_{a,b,c} \subseteq A_t^c$.

- Sea el conjunto $A_t = \{(x, y) / \frac{(x+2)^2}{1} - \frac{y+1}{1} \geq 1\}$ una hipérbola con interior y el abierto $D_{3,3,-9}$, se cumple que $D_{3,3,-9} \subseteq ext(A_t)$. Como se muestra en el siguiente gráfico.

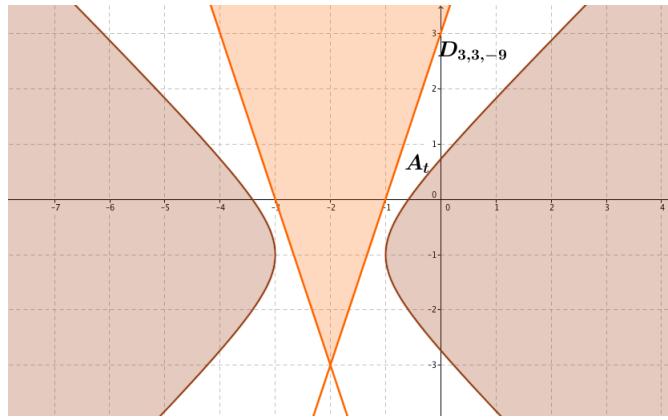


Gráfico 50. Ejemplo conjunto A_t y abierto $D_{3,3,-9}$

Con base al ejemplo anterior y al estudio realizado, se puede inferir que el exterior del conjunto A_t está determinado por la zona sombreada en la siguiente gráfica.

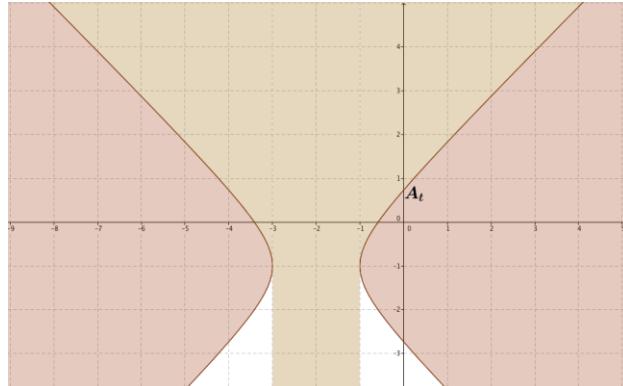


Gráfico 51. Exterior conjunto A_t , hipérbola con interior

Ahora, se busca una expresión que represente la zona sombreada a la cual se ha determinado como el exterior del conjunto A_t . Para esto, se despeja la variable y de la expresión:

$$\frac{(x-h)^2}{A^2} - \frac{y-k^2}{B^2} = 1$$

Obteniendo:

$$y = \pm \sqrt{B^2 \frac{(x-h)^2}{A^2} - 1} + k$$

Luego, se toma la parte positiva de la igualdad, y se determina la región del plano representada por la expresión:

$$y > \sqrt{B^2 \frac{(x-h)^2}{A^2} - 1} + k$$

La cuál se puede observar en el siguiente gráfico.

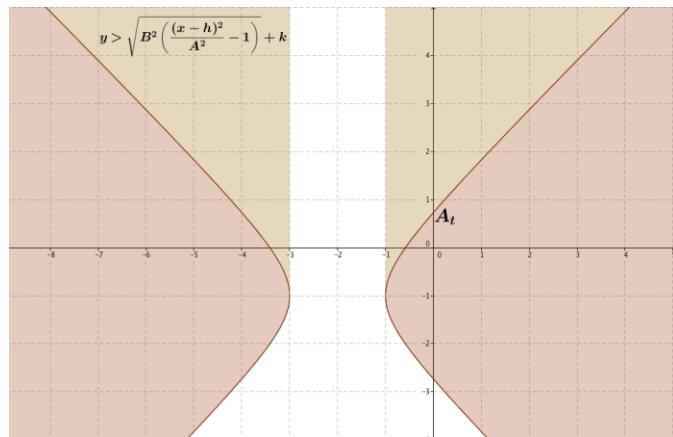


Gráfico 52. Región del plano, exterior conjunto A_t

De igual manera, se determina sobre el plano cartesiano la región descrita por la expresión:

$$x > h - A \quad \wedge \quad x < h + A$$

La cuál se puede observar en el siguiente gráfico.

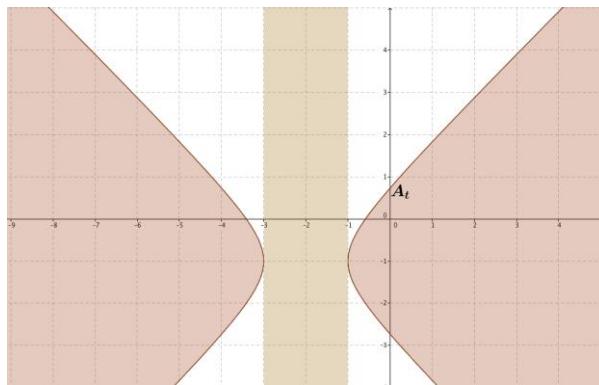


Gráfico 53. Región del plano, exterior conjunto A_t

De esta manera se puede deducir que:

- Sea la topología τ_t . Si $A_t \subseteq \mathbb{R}^2$ talque $A_t = \{x, y : \frac{(x-h)^2}{A^2} - \frac{y-k^2}{B^2} \geq 1\}$ en la que A, B, h y $k \in \mathbb{R}$ y $A, B > 0$, entonces

$$\overline{\text{ext } A_t} = y > \overline{B^2 - \frac{x-h^2}{A^2} - 1 + k} \quad x > h - A \wedge x < h + A$$

FRONTERA

Conociendo como se determina el interior y el exterior del conjunto A_t , se puede deducir la siguiente afirmación.

- Sea la topología τ_t . Si $A_t \subseteq \mathbb{R}^2$ talque $A_t = \{x, y : \frac{(x-h)^2}{A^2} - \frac{y-k^2}{B^2} \geq 1\}$ en la que A, B, h y $k \in \mathbb{R}$ y $A, B > 0$, entonces $\overline{\text{Fr } A_t} = y \leq \overline{B^2 - \frac{x-h^2}{A^2} - 1 + k}$.

En el siguiente gráfico se representa la frontera del conjunto A_t .

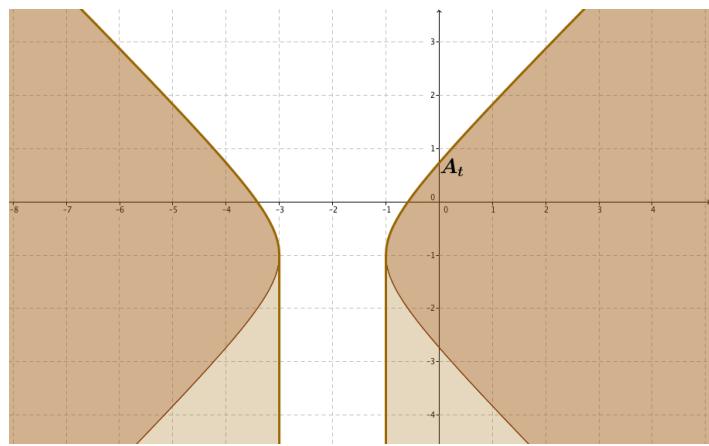


Gráfico 54. Frontera conjunto A_t , hipérbola con interior

5. COMPARACIÓN CON OTRAS TOPOLOGÍAS

En el siguiente capítulo se presenta un análisis de la comparación entre los abiertos básicos de la topología τ_t y otras topologías sobre \mathbb{R}^2 , la finalidad es especificar la finura entre las topologías comparadas o si no son comparables.

5.1 COMPARACIÓN CON LA TOPOLOGÍA USUAL

Si se denomina, topología usual: τ_{usual}

Para realizar una comparación entre la topología τ_{usual} y la topología τ_t , se deben examinar dos casos, primero si $\tau_t \subset \tau_{\text{usual}}$ y segundo si $\tau_{\text{usual}} \subset \tau_t$.

PRIMER CASO $\tau_t \subset \tau_{\text{usual}}$.

Dado un abierto en τ_{usual} :

$$C = \{x, y : \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} < \varepsilon, \varepsilon > 0, (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2\}, \text{ y un punto } A \in C.$$

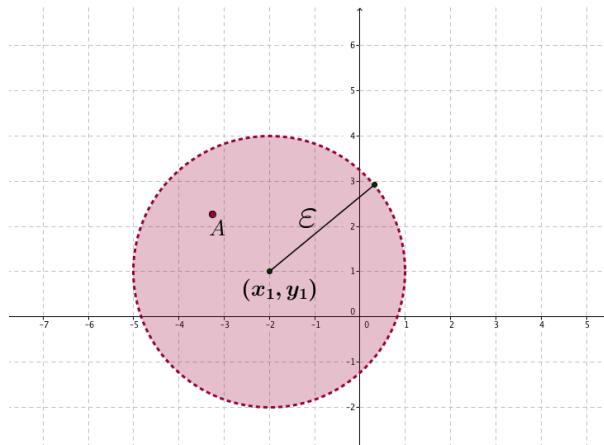


Gráfico 55. Ejemplo, abierto básico de la topología usual

Se puede observar en el siguiente gráfico que NO existe un abierto en τ_t que contenga al punto A y esté contenido en el abierto de la topología usual.

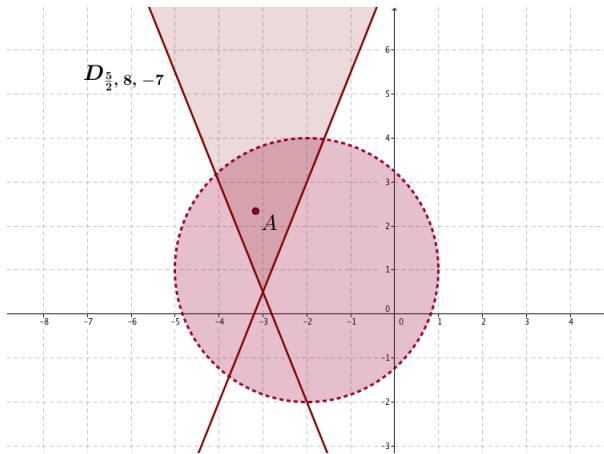


Gráfico 56. Ejemplo de abiertos básicos de las topologías, usual y generada por la base \mathbb{R}^2 , triángulares

De esta manera, se puede concluir que $\tau_t \not\subset \tau_{\text{usual}}$.

SEGUNDO CASO $\tau_{\text{usual}} \subset \tau_t$.

Dado un abierto en τ_t :

$$D_{a,b,c} = \{x, y : y \geq ax + b \wedge y \geq -ax + c, a > 0, b, c \in \mathbb{R}\} \text{ y un punto } A \in D_{a,b,c}.$$

Se puede observar en el siguiente gráfico que existe un abierto en τ_{usual} que contiene al punto A y está contenido en el abierto de τ_t como se muestra en el siguiente gráfico.

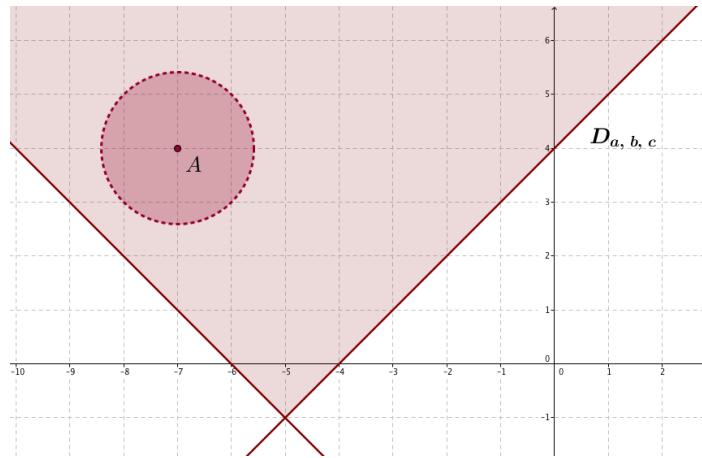


Gráfico 57. Ejemplo de contenencia entre abiertos básicos

Sin embargo, si se toma un punto $A \in D_{a,b,c}$, de tal manera que A pertenezca a una de las rectas descritas por la expresiones $y = ax + b$ o $y = -ax + c$ se puede observar que NO

existe un abierto en τ_{usual} que contenga al punto A y esté contenido en el abierto de τ_t .

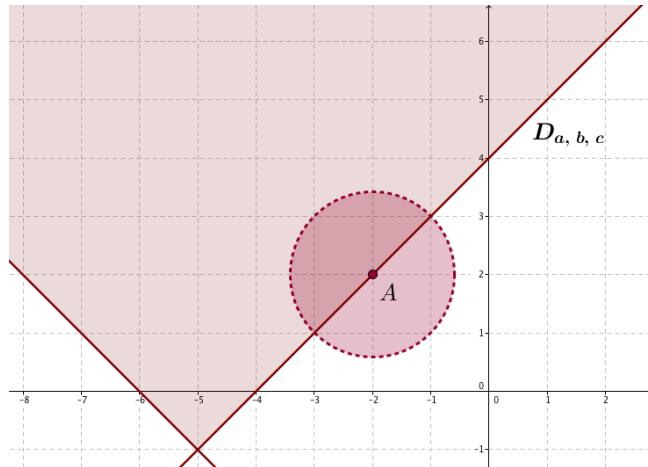


Gráfico 58. Ejemplo, abierto básico

De esta manera, se puede concluir que $\tau_{\text{usual}} \not\subset \tau_t$.

Finalmente, como $\tau_t \not\subset \tau_{\text{usual}}$ y $\tau_{\text{usual}} \not\subset \tau_t$, se concluye que las topologías usual y τ_t NO son comparables.

Teorema 5. Relación con la topología usual en \mathbb{R}^2

Dado un abierto básico en τ_{usual} existe mínimo un abierto en τ_t que lo contiene.

Demostración

En primera instancia, se encontrará un abierto básico $D_{a,b,c}$, con $a = 1$, el cual se denominará abierto tangencial, puesto que las rectas que describen al elemento, $y = ax + b$ y $y = -ax + c$ intersecan cada una en un único punto al abierto básico de la topología usual.

Sea $C = \{x, y : \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} < \varepsilon, \varepsilon > 0, (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2\}$, se tiene el abierto de radio ε y centro (x_1, y_1) . Se busca inicialmente las coordenadas del punto (x_2, y_2) el cuál es vértice de la región triangular generada por el abierto básico $D_{1,b,c}$. Se conoce que $x_1 = x_2$ y $y_2 = y_1 - z$, se debe determinar el valor de z .

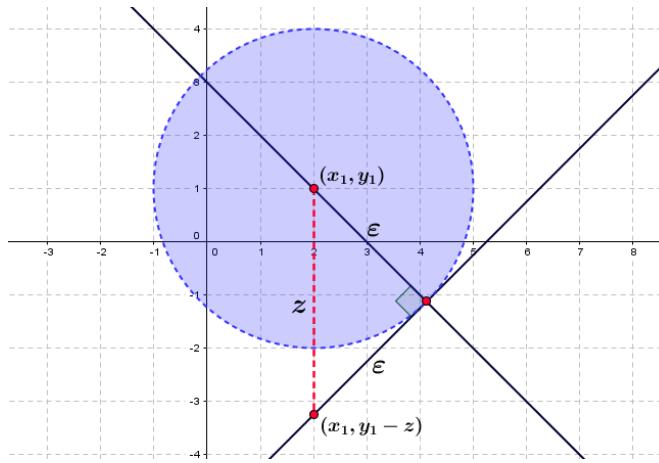


Gráfico 59. Abierto básico topología usual

De acuerdo con la imagen anterior, se puede conocer el valor de z .

$$\varepsilon^2 + \varepsilon^2 = z^2 \quad \text{Se utiliza el teorema de Pitágoras.}$$

$$2\varepsilon^2 = z^2 \quad \text{Se suman términos semejantes.}$$

$$\overline{2}\varepsilon = z \quad \text{Se despeja el valor de } z.$$

De esta manera, las coordenadas del punto (x_2, y_2) son $x_1, y_1 - \overline{2}\varepsilon$.

Ahora, conociendo el valor del punto y la pendiente, se utiliza la ecuación punto pendiente.

$$y - y_1 - \overline{2}\varepsilon = a(x - x_1) \quad \text{Caso para } a > 0$$

$$y = x - x_1 + y_1 - \overline{2}\varepsilon$$

$$y - y_1 - \overline{2}\varepsilon = -a(x - x_1) \quad \text{Caso para } a < 0$$

$$y = -x + x_1 + y_1 - \overline{2}\varepsilon$$

De esta manera, el abierto

$$D_{1,b,c} = \{x, y : y \geq x - x_1 + y_1 - \overline{2}\varepsilon \wedge y \geq -x + x_1 + y_1 - \overline{2}\varepsilon\}$$

En el que $b = -x_1 + y_1 - \overline{2}\varepsilon$ y $c = x_1 + y_1 - \overline{2}\varepsilon$.

Finalmente, se concluye que el abierto básico $D_{1,-x_1+y_1-\varepsilon} \bar{,} x_1+y_1-\varepsilon \bar{,} 2}$ contiene al abierto $C = x, y : \overline{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} < \varepsilon$.

En el siguiente gráfico, se muestra un abierto básico de la topología usual, y el correspondiente abierto tangencial de la topología τ_t $D_{1,-x_1+y_1-\varepsilon} \bar{,} x_1+y_1-\varepsilon \bar{,} 2$ que lo contiene.

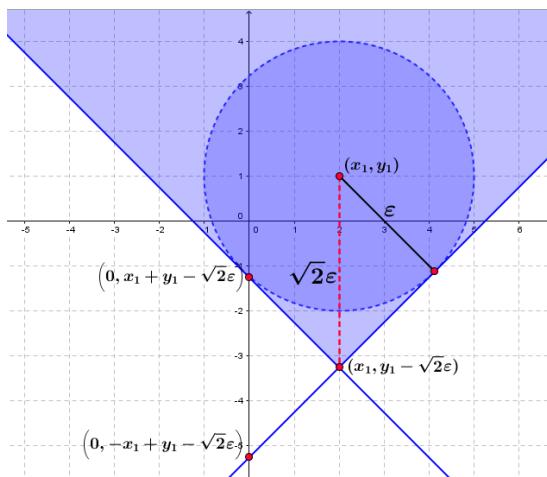


Gráfico 60. Abiertos básicos topologías comparadas

De acuerdo con el teorema anterior, se propone el siguiente ejemplo.

Sea el abierto, $C = x, y : \overline{(x+4)^2 + y + \frac{3}{2}}^2 < 2$ de la topología usual, el abierto

básico $D_{1,-2} \bar{,} -4 + \frac{-3}{2}, -2 \bar{,} -4 + \frac{-3}{2}$ lo contiene.

Simplificando, se obtiene que el abierto $D_{1,4-\frac{3}{2}-2} \bar{,} -4-\frac{3}{2}-2 \bar{,} 2$ contiene al abierto de la topología usual, resultado que se puede observar en el siguiente gráfico.

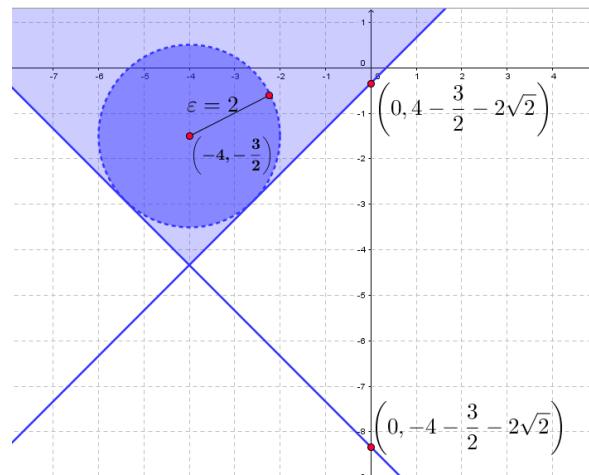


Gráfico 61. Ejemplo abiertos básicos

5.2 COMPARACIÓN CON LA TOPOLOGÍA DEL ORDEN LEXICOGRÁFICO

Si se denomina:

Topología del orden lexicográfico: τ_{orden}

Para realizar una comparación entre la topología τ_{orden} y la topología τ_t , se deben examinar dos casos, primero si $\tau_t \subset \tau_{orden}$ y segundo si $\tau_{orden} \subset \tau_t$.

PRIMER CASO $\tau_t \subset \tau_{orden}$.

En este primer caso, se debe examinar si la topología del orden lexicográfico es más fina que τ_t .

Dado un abierto en τ_{orden} :

$$C = (a, b), c, d : a, b < c, d \quad a < c; a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ y un punto } A \in C.$$

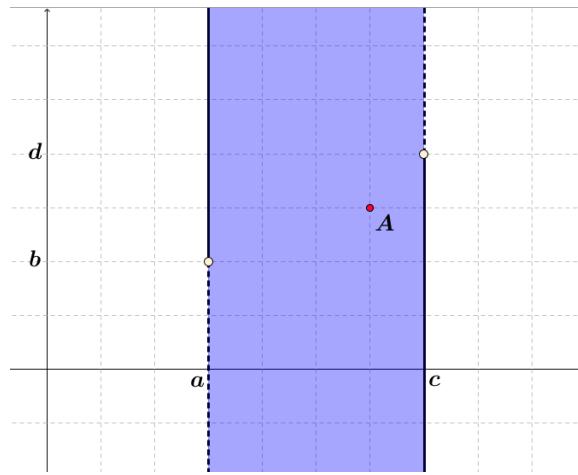


Gráfico 62. Ejemplo, abierto básico de la topología del orden lexicográfico

Se puede observar en el siguiente gráfico que NO existe un abierto en τ_t que contenga al punto A y esté contenido en el abierto de τ_{orden} .

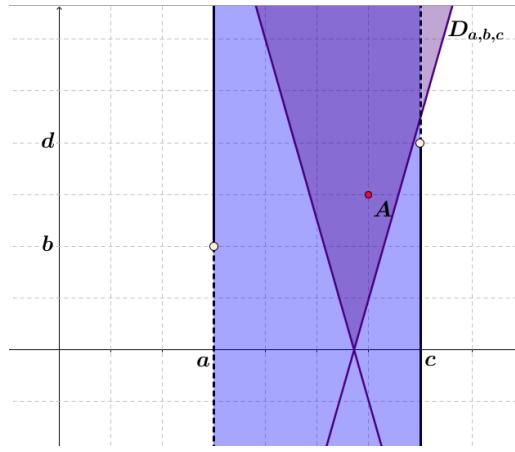


Gráfico 63. Ejemplo de abiertos básicos de las topologías comparadas

De esta manera, se puede concluir que $\tau_t \not\subset \tau_{orden}$.

SEGUNDO CASO $\tau_{orden} \subset \tau_t$.

Dado un abierto en τ_t , $D_{a,b,c}$ y un punto $A \in D_{a,b,c}$.

Se puede observar en el siguiente gráfico que no existe un abierto en τ_{orden} que contiene al punto A y está contenido en el abierto de τ_t .

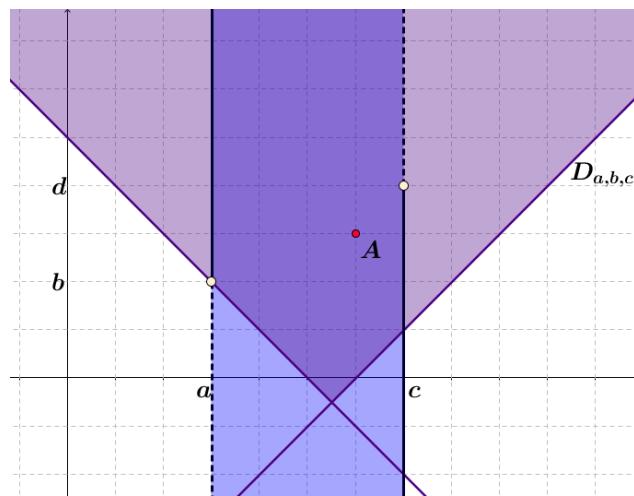


Gráfico 64. Ejemplo de abiertos de las topologías comparadas

De esta manera, se puede concluir que $\tau_{orden} \not\subseteq \tau_t$.

Finalmente, como $\tau_t \not\subseteq \tau_{orden}$ y $\tau_{orden} \not\subseteq \tau_t$, se concluye que las topologías τ_{orden} y τ_t NO son comparables.

6. PROPIEDADES TOPOLOGÍCAS

A continuación se estudia si la topología τ_t cumple con algunas propiedades topológicas.

6.1 CONEXIDAD

En la siguiente parte del trabajo se analizara si la topología τ_t se puede desconectar por abiertos básicos, se debe aclarar que como todo abierto de la topología está constituido por reuniones de abiertos básicos basta con analizar dichos abiertos, esto se hace evidente en el siguiente teorema.

Teorema 6. Conexidad topología τ_t

La topología τ_t es conexa.

Demostración

Para ver esto, basta con demostrar que no existen dos abiertos diferentes de vacío y disyuntos en la topología τ_t es decir.

Dados

$$D_{a,b,c} = \{x, y : y \geq ax + b \wedge y \geq -ax + c\} \subseteq \mathbb{R}^2; a > 0$$

$$D_{a_1,b_1,c_1} = \{x, y : y \geq a_1x + b_1 \wedge y \geq -a_1x + c_1\} \subseteq \mathbb{R}^2; a_1 > 0$$

Tomamos las rectas

$$y = -a_1x + c_1$$

$$y = ax + b$$

Igualando y despejando el valor de x , se obtiene:

$$x = \frac{c_1 - b}{a_1 + a}$$

Dado que $a_1 > 0$ y $a > 0$ se tiene que $a_1 + a > 0$ y el valor x está definido para cualquier par de abiertos, reemplazando el valor de x se tiene el punto de intersección de las rectas:

$$\frac{c_1 - b}{a_1 + a}, \frac{a(c_1 - b)}{a_1 + a} + b$$

En general, Para cualquier par de abiertos $D_{a,b,c}$ y D_{a_1,b_1,c_1} se tiene:

$$D_{a,b,c} \cap D_{a_1,b_1,c_1} \neq \emptyset$$

6.2 SEPARACIÓN

En esta parte del trabajo se estudiará la manera como los abiertos están `distribuidos' sobre el espacio topológico. Para esto, se analizará cuáles axiomas de separación cumple la topología τ_t . Estos axiomas, denominados T_0 , T_1 y T_2 nos muestran básicamente la manera como dos puntos pueden separarse por medio de conjuntos abiertos.

En primera instancia, se plantea el siguiente teorema.

Teorema 7. τ_t es T_0

La topología τ_t es T_0 o de Kolmogoroff.

Demostración.

Sean $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ dos puntos en \mathbb{R}^2 tal que $a_1 \neq b_1 \vee a_2 \neq b_2$, como se demostró en el capítulo 2, existe el abierto $D_{a,-aa_1+a_2,aa_1+a_2}$ que contiene al punto A , y el abierto $D_{a,-ab_1+b_2,ab_1+b_2}$, para abordar la demostración se debe analizar los siguientes casos

- I. Si $a_2 = b_2$ entonces $a_1 > b_1$ o $a_1 < b_1$. Si $a_1 > b_1$ se tiene que $B \notin D_{a,-aa_1+a_2,aa_1+a_2}$ pues no se cumple que $b_1 \geq -ab_2 + aa_1 + a_2$, si $a_1 < b_1$ entonces $B \notin D_{a,-aa_1+a_2,aa_1+a_2}$ pues no se cumple la siguiente desigualdad $b_1 \geq ab_2 - aa_1 + a_2$
- II. Si $a_1 = b_1$ entonces $a_2 > b_2$ o $a_2 < b_2$. Si $a_2 > b_2$ se tiene que $B \notin D_{a,-aa_1+a_2,aa_1+a_2}$ pues $b_1 < ab_2 - aa_1 + a_2$ y $b_1 < ab_2 + aa_1 + a_2$, si $a_2 < b_2$ se tiene que $A \notin D_{a,-ab_1+b_2,ab_1+b_2}$ pues $a_1 < aa_2 - ab_1 + b_2$ y $a_1 < aa_2 + aa_1 + b_2$.

III. Si $a_1 > b_1 \wedge a_2 > b_2$, se tiene que $B \notin D_{\frac{b_2-a_2}{b_1-b_1}, -\frac{b_2-a_2}{b_1-b_1} a_1+a_2, \frac{b_2-a_2}{b_1-b_1} a_1+a_2}$

Continuando con el estudio de separación, se propone el siguiente teorema.

Teorema 8. τ_t no es T_1 o accesible

La topología τ_t NO es T_1 .

Demostración

Para demostrar que τ_t NO es T_1 , basta con encontrar dos puntos A y B tales que, cualquier abierto $D_{a,b,c}$ que contenga al punto A o al punto B , contenga al otro punto.

De acuerdo con la información anterior y sean los puntos $A = (x, y)$, $B = (x, z)$, cualquier abierto $D_{a,b,c}$ que contenga al punto B contiene al punto A , para el caso en que $y > z$.

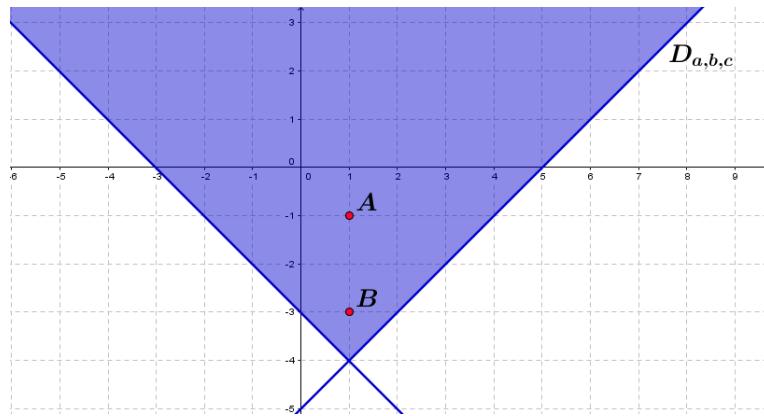


Gráfico 65. Ejemplo abierto básico

Es decir, no existen dos abiertos $D_{a,b,c}$ y D_{a_1,b_1,c_1} tal que $A \in D_{a,b,c}$ pero $B \notin D_{a,b,c}$ y $B \in D_{a_1,b_1,c_1}$ pero $A \notin D_{a_1,b_1,c_1}$.

En consecuencia del teorema anterior y conociendo de antemano que si un espacio topológico no es T_1 entonces no es T_2 ; se puede establecer que τ_t NO es T_2 .

La afirmación anterior se puede corroborar puesto que no existen dos abiertos $D_{a,b,c}$ y D_{a_1,b_1,c_1} tal que $D_{a,b,c} \cap D_{a_1,b_1,c_1} = \emptyset$. Esto se verificó en la sección de conexidad, al concluir que para cualquier par de abiertos $D_{a,b,c}$ y D_{a_1,b_1,c_1} se tiene $D_{a,b,c} \cap D_{a_1,b_1,c_1} \neq \emptyset$.

6.3 COMPACIDAD

En este apartado se estudia si \mathbb{R}^2 es compacto con la topología τ_t

Retomando lo descrito en el capítulo 2 para demostrar que \mathbb{R}^2 , **triangulares** es base para una topología se quería ver que la reunión de abiertos básicos es igual a \mathbb{R}^2 , para ello se planteó el cubrimiento:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} D_{1,-n,-n} = \mathbb{R}^2$$

De esta forma se puede verificar que \mathbb{R}^2 no es compacto con la topología τ_t pues no es posible cubrirlo con un número finito de abiertos de la forma:

$$D_{1,-n,-n} = \{x, y : y \geq x - n \wedge y \geq -x - n\}.$$

6.4 ENUMERABILIDAD

A partir de la topología generada por la base $(\mathbb{R}^2, \text{triangulares})$ se puede extraer la siguiente subfamilia enumerable.

Consideremos el conjunto:

$$D_{a,b,c} = \{x, y : y \geq ax + b \wedge y \geq -ax + c\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{H} = \{D_{a,b,c} : a > 0 ; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

\mathcal{H} es también una base y es enumerable pues su cardinal es $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. La prueba de que es enumerable, se plasma en el teorema 3.28 del archivo: *Curso de topología general*, el cuál se referencia en la bibliografía de este documento.

Continuando con el estudio de enumerabilidad, se propone el siguiente teorema.

Teorema 9. Enumerabilidad topología τ_t

La topología τ_t es 2 – contable.

Demostración

La demostración de que el conjunto \mathcal{B} es base para una topología es análoga a la demostración para $D = \{D_{a,b,c} : a > 0, b, c \in \mathbb{R}\}$ la cual se presenta en el capítulo 2 de este documento.

CONCLUSIONES

En el siguiente apartado se plasman los resultados sobresalientes que se obtuvieron durante el desarrollo del trabajo. En primera instancia, se presentan las conclusiones generales, es decir, aquellas relacionadas con la formación profesional de los autores. A continuación, se presentan las conclusiones específicas del objeto matemático estudiado.

CONCLUSIONES GENERALES

- A lo largo de la licenciatura se han trabajado diferentes conceptos matemáticos que enriquecieron y posibilitaron la elaboración del trabajo, esto se evidenció durante su diseño y validación, en particular, cuando se realizaron las demostraciones fue evidente la relación de dichos conceptos y la utilidad de su estudio.
- Al realizar el estudio de algunas nociones topológicas, tales como interior, exterior, frontera y adherencia de algunos conjuntos asociados en relación con abiertos básicos de la topología generada por la base $(\mathbb{R}^2, \text{triangulares})$, se observaron algunas regularidades o características, un ejemplo es el teorema 3, que establece que sea un conjunto acotado, el interior es vacío.
- El uso de Geogebra, ayudó a ampliar la información propuesta, a clarificar algunos temas y a evidenciar visualmente algunos ejemplos que se establecieron durante el desarrollo del trabajo.

CONCLUSIONES ESPECÍFICAS

- Sea τ_t , el conjunto $A = \{x, y : y < ax + b \vee y < -ax + c\}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ es cerrado.
- Sea τ_t , el conjunto $C = \{x, y : y < Ax^2 + Bx + C\}$ tal que A, B y $C \in \mathbb{R}$ y $A < 0$ es cerrado.
- Sea la topología τ_t . Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ talque A es acotado, entonces $\text{int } A = \emptyset$.
- Sea la topología τ_t . Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ talque

$$A = \{x, y : (x - h)^2 + (y - k)^2 \leq r^2, h, k \in \mathbb{R}\} \text{ y } r > 0$$
 entonces $\text{int } A = \emptyset$.

- Sea la topología τ_t . Si $A_t \subseteq \mathbb{R}^2$ talque $A_t = \{x, y : \frac{(x-h)^2}{A^2} + \frac{(y-k)^2}{B^2} \leq 1\}$ en la que A, B, h y $k \in \mathbb{R}$ y $A, B > 0$. Entonces $\text{int } A_t = \emptyset$.
- Sea la topología τ_t . Si $A_t \subseteq \mathbb{R}^2$ talque $A_t = \{x, y : y \geq Ax^2 + Bx + C\}$ en la que A, B y $C \in \mathbb{R}$ y $A > 0$. Entonces $\text{int } A_t = \emptyset$.
- Dado un abierto básico en τ_{usual} existe mínimo un abierto en τ_t que lo contiene.
- La topología τ_t es conexa.
- La topología τ_t es T_0 .
- La topología τ_t no es T_1 .
- La topología τ_t es 2 – contable.

BIBLIOGRAFÍA

Curso de topología general (s.f.). Capítulo 3. *Conjuntos infinitos y cardinales*. Lección 2.

Conjuntos contables. Recuperado el 15 de octubre de:
http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2000944/lecciones/setcap03/s03_02_01.pdf.

Geogebra (s.f.). Recuperado el 12 de octubre del 2015, de <https://www.geogebra.org>.

Gonzales, A. (S.f.). “Topología semifinita superior en hiperespacios: desde la topología no Hausdorff a la geometría de los métricos compactos”. Facultad de Ciencias Matemáticas Departamento de geometría y Topología. Tesis, Universidad Complutense. Madrid España.

Lehman, Ch. (1989). “Geometría analítica” Editorial Limusa. México D. F.

Muñoz, J. (2003). “Topología básica”. Academia Colombiana de ciencias exactas, físicas y naturales Colección Julio Carrizosa Valenzuela. Universidad Nacional. Bogotá Colombia.

Neira, C. (2011). “Topología general”. Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional. Bogotá Colombia.

Rubiano, G. (2002). “Topología general segunda edición”. Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional. Bogotá Colombia.

Sullivan, M. (2006). “Álgebra y trigonometría analítica séptima edición”. México: Pearson Education.

Willard, S. (1968). “General Topology”. University of Alberta. EE. UU.