



Representación gráfica y algebraica de las ecuaciones cuadráticas y secciones cónicas en el *Sistema Seno*

Walter Garzón Gutiérrez
Sergio Andrés Niño Vega

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2019

Representación gráfica y algebraica de las ecuaciones cuadráticas y secciones cónicas en el *Sistema Seno*

Walter Garzón Gutiérrez
Sergio Andrés Niño Vega

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Licenciado en Matemáticas

Directora:
María Nubia Soler Álvarez

Trabajo asociado al interés del estudiante

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2019

Dedicatoria

A Dios por darme la luz, a mi padre por darme la sabiduría e inteligencia, a mi madre por enseñarme a amar, a ser perseverante y fuerte. A mis hermanos por ser siempre un ejemplo a seguir, a mis sobrinos por compartir su inocencia conmigo y a mi perrito por siempre darme de su compañía. A mis guías espirituales el Mestro Yu Wang y la Dra. Mey Ling Wang por acompañarme siempre en mi camino espiritual.

Walter

A Dios por su fidelidad, a mi padre por su ejemplo, disciplina y responsabilidad, a mi madre por su amor dedicación y consejos, a mis hermanos por su apoyo, confianza y cariño.

Sergio

A la profe Nubia por brindarnos su conocimiento, paciencia, amistad y cariño los cuales nos hicieron crecer como matemáticos, docentes y personas.

Walter y Sergio

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 3

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Representación gráfica y algebraica de las ecuaciones cuadráticas y secciones cónicas en el Sistema Seno.
Autor(es)	Garzón Gutiérrez, Walter; Niño Vega, Sergio Andrés
Director	Soler Álvarez, María Nubia
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019, 193 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	GEOMETRÍA ANALÍTICA; CAMBIO DE COORDENADAS; UBICACIÓN DE PUNTOS; SECCIONES CÓNICAS; GEOGEBRA.

2. Descripción
<p>Este trabajo de grado aborda el estudio de las representaciones gráficas de ecuaciones lineales y cuadráticas en el sistema coordenado Seno también se estudian objetos geométricos como las rectas y cónicas ubicados en el Sistema Seno y se determinan las ecuaciones que los representan. También se estudian diferentes definiciones y propiedades de estos objetos en el Sistema Seno contrastándolos con los resultados existentes en el sistema rectangular. Se presentan adicionalmente, applets construidos en el software GeoGebra, los cuales ayudaron a representar los objetos matemáticos estudiados y a explorar propiedades que posteriormente llevaron a resultados.</p>

3. Fuentes
Apóstol, T: <i>Calculus. Vol I.</i> Barcelona: Reverté, 1984
Fernández Sánchez, F. (2011). <i>Un Estudio de las Rectas en Planos Oblicuos Perpendiculares.</i> Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
Filloy, E; Hitt, F: <i>Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum.</i> En: Grupo Editorial Iberoamérica 10 (1998), p. 23–45
Kletenik, D: <i>Problemas de geometría analítica.</i> Moscú: Mir, Moscú, 1968
Kolman, B; Hill, D: <i>Algebra lineal.</i> México D.F: Pearson, 2006
Lehmann, C: <i>Geometría analítica.</i> México D.F: Limusa, 1989
Mendigaño, A: <i>Distancia usual entre dos puntos en diferentes sistemas coordenados del plano y el espacio,</i> Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Tesis de Grado, 2016
Moreno Celeita, L. A; Carreño Gómez, O: <i>Un tratamiento a las cónicas a partir de diferentes sistemas coordenados,</i> Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Tesis de Grado, 2011
Ortiz Puentes, L.A: <i>Representación gráfica y algebraica de la ecuación cuadrática en el sistema PAR,</i> Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Tesis de Grado, 2012

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 3	

Stewart, J; Hernández, R; Sanmiguel, C: *Introducción al Cálculo*. Thomson, 1989

4. Contenidos

En el primer capítulo se presenta cómo y dónde surgió la idea de desarrollar un trabajo de grado relacionado con el tema tratado en este documento, presenta la documentación que se hizo y la manera como se procedió para desarrollarlo. En el segundo capítulo se presentan los preliminares del trabajo. Luego, en el capítulo tres se presenta cómo se ven las rectas de forma algebraica en el Sistema Seno. En el capítulo cuarto se muestra cómo se ven las representaciones gráficas de las s-rectas a partir de la ecuación lineal y se estudian definiciones y propiedades asociadas a las s-rectas y diferentes applets como apoyo a los resultados presentados. En el capítulo siguiente se muestra la traslación y rotación de los ejes; también se presentan ecuaciones de cambios de coordenadas para cada transformación y applets con las cuales el lector puede explorar e indagar en este tema tratado. El capítulo sexto trata las cónicas como solución a la ecuación general de segundo grado mostrando su representación gráfica y el eje de simetría para cada cónica, luego, se muestra cómo se ven algebraicamente las cónicas definidas como lugar geométrico y sus ejes de simetría. Para el primer caso se presentan applets en las cuales se pueden representar cualquier cónica. En el último capítulo se formulan conclusiones y reflexiones con base en los resultados obtenidos a lo largo del documento.

5. Metodología

Para cada objeto geométrico se procedió de la siguiente forma: se tomó la ecuación de ese objeto geométrico y se ubicó el conjunto de puntos solución en el Sistema Seno. Se representaron estos objetos utilizando GeoGebra y se hicieron exploraciones para encontrar propiedades y relaciones. Estas últimas se contrastaron con lo expuesto el libro de Geometría Analítica de Lehmann. Luego, se ubica el objeto geométrico en el Sistema Seno, se determina su ecuación y, utilizando GeoGebra se hicieron exploraciones determinar propiedades. Finalizado este proceso se contrastan los resultados en este sistema con los resultados existentes del sistema cartesiano teniendo como guía el libro de Lenmann mencionado anteriormente.

6. Conclusiones

En el estudio de las rectas se concluyó que: cuando se ubica una línea recta en el Sistema Seno esta no se puede expresar como una ecuación lineal y cuando se ubica el conjunto de puntos solución a la ecuación lineal, la gráfica es una curva. Al contrastar los resultados y definiciones en el sistema rectangular con los obtenidos en el Sistema Seno se observa que: para los ángulos entre rectas se pueden plantear al menos dos definiciones una con la idea de línea y otra con la idea de tangente a una curva. Con la primera definición se cumplen gran parte de los teoremas geométricos asociados al paralelismo y a la perpendicularidad en el sistema rectangular. En relación con la distancia entre un punto y una recta no se cumple que el segmento que determina la longitud mínima es perpendicular a la recta. Se estudió la traslación y rotación de los ejes y para ambos casos se tiene qué si algún objeto geométrico está ubicado en el sistema original y se rota o se traslada, el tipo de ecuación del objeto geométrico en el sistema transformado no es el mismo que el del sistema original luego, no cumple la misma propiedad que el sistema cartesiano en el cual esas transformaciones son lineales. Se estudiaron las cónicas desde dos puntos de vista: como el conjunto de puntos solución a la ecuación general de segundo grado y como la definición usual de sección cónica como lugar geométrico. Se llegó a la conclusión de que no existe una equivalencia entre estas dos definiciones, es decir, para una cónica definida por su ecuación no existe unas directrices ni unos focos que cumplan la definición como lugar geométrico, y recíprocamente tampoco se cumple, es decir, dada una directriz y un foco y la cónica



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Revelando lo oculto

FORMATO

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

Código: FOR020GIB

Versión: 01

Fecha de Aprobación: 10-10-2012

Página 3 de 3

asociada a estos dos no se representa como una ecuación de segundo grado.
Al reflexionar sobre este tipo de estudios en los que se centra la atención en los objetos matemáticos, para nosotros como futuros educadores matemáticos resulta de gran importancia porque nos permiten pensar en que en el aula nuestros estudiantes pueden crear conocimiento matemático.

Elaborado por:

Garzón Gutiérrez, Walter; Niño Vega, Sergio Andrés

Revisado por:

Soler Álvarez, María Nubia

**Fecha de elaboración del
Resumen:**

16

12

2019



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: “**Representación gráfica y algebraica de las ecuaciones cuadráticas y secciones cónicas en el Sistema Seno**”, elaborado por los estudiantes:

Walter Garzón Gutiérrez código 2014140048 y cédula 1033793766.

Sergio Andrés Niño Vega código 2013240047 y cédula 1033787693.

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **46** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna Meritoria Laureada

En constancia se firma a los doce (12) días del mes de marzo de 2020.

Directora del Trabajo: Profesora

MARIA NUBIA SOLER ÁLVAREZ

Jurado:

Profesor

ALBERTO DONADO NUÑEZ

Contenido

Lista de figuras	xI
Lista de tablas	xIV
1. Presentación	1
2. Preliminares	9
2.1. Rectas y ecuaciones lineales en el sistema cartesiano	9
2.1.1. Movimientos de las rectas	9
2.1.2. Inclinación de las rectas	10
2.1.3. Vectores	10
2.1.4. Ángulo entre dos rectas	11
2.1.5. Rectas paralelas	11
2.1.6. Rectas perpendiculares	12
2.1.7. Cortes con los ejes x y y	12
2.1.8. Distancia euclidiana entre dos puntos	13
2.1.9. Coordenadas del punto medio	14
2.1.10. Distancia entre un punto y una recta	14
2.2. Transformación de coordenadas en el sistema cartesiano	15
2.2.1. Traslación	15
2.2.2. Rotación	16
2.3. Cónicas y ecuación cuadrática en el sistema cartesiano	17
2.3.1. Definición como lugar geométrico	17
2.3.1.1. Parábola	17
2.3.1.2. Elipse	18
2.3.1.3. Hipérbola	18
2.3.2. Del lugar geométrico a la ecuación	19
2.3.2.1. Parábola	20
2.3.2.2. Elipse	24
2.3.2.3. Hipérbola	27

2.3.3.	De la ecuación al lugar geométrico	30
2.3.3.1.	Parábola	31
2.3.3.2.	Elipse	33
2.3.3.3.	Hipérbola	36
3.	Ecuaciones que representan líneas ubicadas en el <i>Sistema Seno</i>	40
4.	Soluciones a ecuaciones lineales en el <i>Sistema Seno</i>	43
4.1.	Ejes y Semi-ejes	44
4.2.	Ubicación de puntos	45
4.3.	Cambio de coordenadas entre el <i>Sistema Seno</i> y el sistema cartesiano	46
4.4.	Gráfica de la ecuación $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ y cortes con los ejes	47
4.4.1.	Applet Ecuación lineal	52
4.5.	Cortes con los semi-ejes	53
4.5.1.	Applet Cortes con el semi-eje \bar{x}	53
4.6.	Pendiente de una s-recta	55
4.7.	Cortes entre s-rectas	58
4.8.	Ángulo entre s-rectas	59
4.8.1.	Definición de línea tangente a una s-recta	60
4.8.2.	Definición de línea asociada a una s-recta	61
4.8.3.	Applet Línea tangente a una s-recta	62
4.8.4.	Applet Línea asociada a una s-recta	62
4.8.5.	Ángulo a partir de líneas tangentes	63
4.8.6.	Ángulo a partir de líneas asociadas	65
4.8.7.	Applet Ángulo a partir de líneas tangentes	66
4.8.8.	Applet Ángulo a partir de líneas asociadas	67
4.9.	s-Rectas paralelas	68
4.10.	Resultados de s-rectas paralelas asociados a definiciones de ángulos	68
4.11.	s-Rectas perpendiculares	72
4.12.	Distancia entre dos puntos	74
4.12.1.	Applet Distancia entre dos puntos	74
4.13.	Distancia de un punto a una s-recta	75
4.13.1.	Applet Distancia entre un punto y una recta	78
4.14.	Simetría en el <i>Sistema Seno</i>	78

5. Transformación de coordenadas en el Sistema Seno	81
5.1. Traslación	81
5.1.1. Applet Traslación	82
5.2. Rotación	83
5.2.1. Applet Rotación	85
6. Cónicas y soluciones a ecuaciones cuadráticas en el Sistema Seno	86
6.1. s-Cónicas a partir de la ecuación cuadrática	86
6.1.1. s-Parábola	87
6.1.1.1. Applet s-parábola y eje de simetría	95
6.1.2. s-Elipse	96
6.1.2.1. Applet s-elipse y eje de simetría	102
6.1.3. s-Hipérbola	103
6.1.3.1. Applet s-hipérbola y eje de simetría	109
6.2. gs-Cónicas a partir de la definición por lugar geométrico	110
6.2.1. Lugar Geométrico a partir de suma de distancias	110
6.2.1.1. gs-Elipse	110
6.2.1.2. gs-Hipérbola	113
6.2.2. Lugar geométrico a partir de cociente de distancias	116
6.2.2.1. gs-Parábola	116
6.2.2.2. gs-Elipse	118
6.2.2.3. gs-Hipérbola	119
7. Conclusiones y reflexiones	121
7.1. Conclusiones	121
7.2. Reflexiones y proyecciones	123
Bibliografía	125
A. Anexos capítulo 2	126
B. Anexos capítulo 3	171

Lista de Figuras

1-1. Gráficas de $2x - y = 0$	2
1-2. 1. Ejemplos de sistemas explorados	3
1-3. 2. Ejemplos de sistemas explorados	3
1-4. <i>Sistema Seno</i>	5
2-1. Recorridos de un punto A a un punto B	13
2-2. Distancia euclidiana entre dos puntos	13
2-3. Punto medio	14
2-4. Distancia entre un punto y una recta	14
2-5. Traslación de los ejes	15
2-6. Rotación de los ejes	16
2-7. Parábola por lugar geométrico	17
2-8. Elipse por lugar geométrico	18
2-9. Hipérbola por lugar geométrico	19
2-10. Parábolas con origen en el vértice	20
2-11. Cuando origen coincide con el vértice y la directriz es paralela al eje x	21
2-12. Cuando origen coincide con el vértice y la directriz es paralela al eje y	21
2-13. Parábolas con origen diferente al vértice	22
2-14. Traslaciones cuando la directriz es paralela al eje x	23
2-15. Traslaciones cuando la directriz es paralela al eje y	23
2-16. Rotación de la parábola	24
2-17. Elipses con centro en el origen	25
2-18. Traslaciones de la elipse cuando el centro no está en el origen	26
2-19. Rotación de la elipse.	27
2-20. Hipérbolas con centro en el origen	28
2-21. Traslaciones de la hipérbola	29
2-22. Hipérbola trasladada	30
4-1. Ejes y semi-ejes	45
4-2. Ubicación de puntos en el <i>Sistema Seno</i>	45

4-3. Cambio de coordenadas entre el <i>Sistema Seno</i> y el cartesiano	46
4-4. Ejemplos de cambio de coordenadas entre el <i>Sistema Seno</i> y el cartesiano	47
4-5. Representación al conjunto solución de $a\bar{x} + c = 0$	48
4-6. Ejemplos de s-rectas 1° Caso	49
4-7. Ejemplos de s-rectas 2° Caso	50
4-8. Gráfica de $-2\bar{x} + 3\bar{y} = 0$ y $-3\bar{x} - 7\bar{y} = 0$	50
4-9. Ejemplos de s-rectas 3° caso	51
4-10. Gráfica de $2\bar{x} - \bar{y} + 4 = 0$	51
4-11. Applet Ecuación lineal	53
4-12. Applet Cortes con el semi-eje \bar{x}	54
4-13. Ejemplos de pendiente en el <i>Sistema Seno</i>	56
4-14. Haz de rectas en el <i>Sistema Seno</i>	56
4-15. s-Recta $2\bar{x} + 3\bar{y} = 0$	58
4-16. Casos de cortes entre s-rectas	58
4-17. Línea tangente a l por $(1, -1)$	60
4-18. Línea asociada a la recta $-\bar{x} + 2\bar{y} - 5 = 0$ por $(4, \frac{9}{2})$	61
4-19. Applet Línea tangente a una s-recta	62
4-20. Applet Línea asociada a una s-recta	63
4-21. Ángulo entre l y t	65
4-22. Ángulo entre l y t	66
4-23. Applet Ángulo a partir de líneas tangentes	67
4-24. Applet Ángulo a partir de líneas asociadas	68
4-25. Ángulos correspondientes congruentes	69
4-26. Con la definición de ángulo a partir de líneas tangentes	70
4-27. Con la definición de ángulos a partir de líneas asociadas	71
4-28. Ángulos congruentes para t y k con respecto a k	72
4-29. Casos de los ángulos entre s-rectas	73
4-30. Ángulo entre l y t	74
4-31. Applet Distancia entre dos puntos	75
4-32. Distancia entre un punto y una s-recta	75
4-33. Distancia entre $(4, 3)_S$ y $\bar{x} + \bar{y} + 5 = 0$	77
4-34. Applet Distancia entre dos puntos	78
4-35. Definiciones en el sistema cartesiano	80
5-1. Traslación en el <i>Sistema Seno</i>	81
5-2. Traslación en el <i>Sistema Seno</i>	82
5-3. Applet Traslación	83

5-4. Rotación de la s-recta base	83
5-5. Rotación de los ejes	84
5-6. Cambio de coordenadas de un punto cuando se rotan los ejes	84
5-7. Applet Rotación	85
6-1. Cuando $ae < 0$	88
6-2. Anchura de la s-parábola	88
6-3. Eje de simetría de la s-parábola caso 2.	89
6-4. Eje de simetría y movimientos en el plano de la s-parábola	90
6-5. Eje de simetría y movimientos en el plano de la s-parábola caso 4	91
6-6. Traslación de los ejes	93
6-7. Ejemplo de s-parábolas rotadas	94
6-8. Ejemplo de rotación de ejes para s-parábolas	94
6-9. Ejemplo de eje de simetría para s-parábolas rotadas	95
6-10. Applet s-parábola y eje de simetría	96
6-11. Representaciones de s-elipses	97
6-12. Eje de simetría para s-elipses cuando $-\frac{f}{c} \leq -\frac{f}{a}$	98
6-13. Eje de simetría para s-elipses cuando $-\frac{f}{c} < -\frac{f}{a}$	98
6-14. Movimientos de la s-elipse	99
6-15. Traslación de los ejes en las s-elipses	100
6-16. s-Elipses rotadas	101
6-17. s-Elipses rotadas	102
6-18. s-Elipses rotadas	102
6-19. Applet s-elipse y eje de simetría	103
6-20. s-Hipérbolas con $-\frac{f}{a} < 0$	104
6-21. s-Hipérbolas con $-\frac{f}{c} < 0$	105
6-22. Movimientos de la s-hipérbola	105
6-23. Traslación de los ejes en las s-hipérbolas	106
6-24. s-Hipérbolas rotadas	107
6-25. s-Hipérbolas rotadas	108
6-26. Eje de simetría de s-Hipérbolas rotadas	109
6-27. Applet s-hipérbola y eje de simetría	109
6-28. gs-Elipse por definición de suma de distancias	111
6-29. Ejes de simetría de gs-elipse con centro en el origen	112
6-30. Ejes de simetría de gs-elipses con centro diferente al origen	112
6-31. Ejes de simetría de gs-elipses rotadas	113

6-32.gs-Hipérbola por definición de suma de distancias	113
6-33.Ejes de simetría de gs-Hipérbola con centro en el origen	114
6-34.Ejes de simetría de gs-hipérbolas con centro diferente al origen	115
6-35.Ejes de simetría de gs-hipérbolas rotadas	116
6-36.gs-Parábola como definición de cociente entre distancias	117
6-37.gs-Elipse por definición de excentricidad	118
6-38.gs-Hipérbola por definición de excentricidad	119
A-1. Ubicación de puntos en el plano cartesiano	126
A-2. Gráfica del conjunto solución de $y - x = 0$	127
A-3. Movimiento vertical	127
A-4. Razón de cambio entre puntos sobre una recta	128
A-5. Relación entre pendiente y el ángulo de inclinación	129
A-6. Gráfica de $x^2 + 6xy + 9y^2 - 54x - 62y + 179 = 0$	154
A-7. Gráfica de $42x^2 - 30xy + 59y^2 - 282x - 278y + 543 = 0$	162
A-8. Gráfica de $30,33x^2 - 64xy - 17,67y^2 + 192x + 106,05y - 61,58 = 0$	170

Lista de Tablas

2-1. Ecuaciones de las parábolas con centro en el origen	21
2-2. Ecuaciones de las parábolas con vértice fuera del origen	22
2-3. Ecuaciones de las parábolas en el sistema rotado	24
2-4. Ecuaciones de las elipses con centro en el origen	25
2-5. Ecuaciones de las elipses con centro fuera del origen	26
2-6. Ecuaciones de las elipses en el sistema rotado	26
2-7. Ecuaciones de las hipérbola con centro en origen	28
2-8. Ecuaciones de las hipérbolas con centro fuera del origen	28
2-9. Ecuaciones de las hipérbolas en el sistema rotado	29
2-10. Partes de las parábolas no trasladadas	32
2-11. Partes de las parábolas trasladadas	32
2-12. Ecuaciones generales de las partes de la parábola.	33
2-13. Partes de la elipse cuando el centro está en el origen	34
2-14. Partes de la elipse cuando el centro no está en el origen	35
2-15. Ecuaciones generales de las partes de la elipse	36
2-16. Partes de la hipérbola cuando el centro está en el origen	37
2-17. Partes de la hipérbola cuando el centro no está en el origen	38
2-18. Ecuaciones generales de las partes de la hipérbola	39
3-1. Líneas en el <i>Sistema Seno</i>	41

1. Presentación

El presente trabajo se originó a partir de actividades realizadas en el curso de Geometría Analítica de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en las cuales se estudiaron objetos geométricos a partir de sus representaciones analíticas, geométricas y gráficas en diferentes sistemas coordenados.

Algunas de las actividades para este curso fueron ubicar puntos en sistemas coordenados diferentes al rectangular; representar ecuaciones lineales en los sistemas coordenados Polar¹, oblicuo² y PAR³; estudiar las propiedades de los objetos geométricos obtenidos en dicha representación nos causó gran impacto al ver las diferentes representaciones que tienen los objetos geométricos al cambiar los ejes coordenados o la manera de ubicar los puntos; Estas actividades nos permitieron reconocer la diversidad de representaciones gráficas que puede tener una misma ecuación, por ejemplo, el conjunto solución a la ecuación de la recta definida por la ecuación $2x - y = 0$ en el sistema Polar es una espiral (Figura 1-1 parte (a)), en el oblicuo es una línea recta (Figura 1-1 parte (b)) y en el PAR es un punto (Figura 1-1 parte (c)).

Algunas de las cosas que observamos, gracias al software GeoGebra que fue una herramienta fundamental para representar estos sistemas y las ecuaciones en estos sistemas, fueron, por ejemplo, que en los sistemas oblicuos la pendiente de una recta que representa una ecuación lineal está relacionada con el ángulo determinado por los dos ejes; vimos que en el sistema PAR una ecuación lineal es representada por un punto y que esto podría tener aplicaciones en ecuaciones diferenciales, o que en el sistema polar es más sencillo

¹Para ubicar un punto en el sistema polar se toma una longitud r y un ángulo θ , se ubica un vector de tal manera que tenga longitud r y forme el ángulo θ con la horizontal y la cabeza del vector será la imagen del punto.

²El sistema oblicuo está compuesto por dos rectas que forman un ángulo $\alpha \neq 90$. Para ubicar un punto se toman dos puntos, cada uno sobre un eje, y se traza una recta perpendicular por cada punto al eje en el cual se encuentre el punto, luego el punto de intersección entre las dos rectas será la imagen del punto.

³El sistema PAR está compuesto por dos rectas paralelas las cuales representan los ejes x y y . Para ubicar un punto se ubican dos puntos, cada uno en diferente eje, y se traza una recta que contenga a los dos puntos. Esta recta será la imagen del punto.

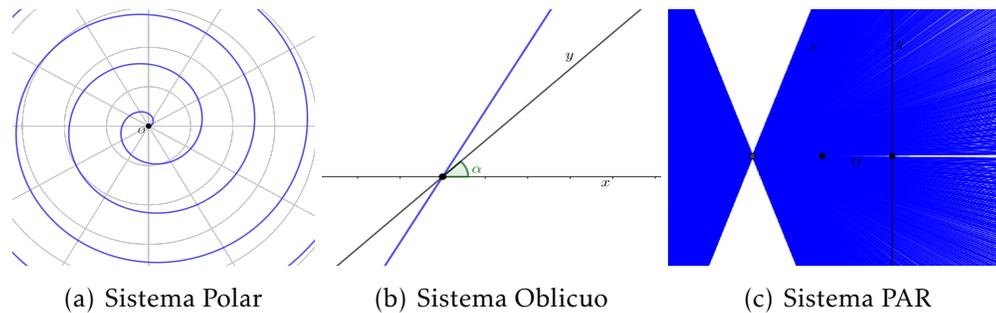


Figura 1-1.: Gráficas de $2x - y = 0$

representar algunas ecuaciones que en el sistema cartesiano. Estos hechos nos llevaron a cuestionarnos sobre aspectos como la forma en que se representan ecuaciones de otro tipo como las cuadráticas en estos y otros sistemas y también acerca de las propiedades de los objetos geométricos que se mantienen en las representaciones de cada sistema. Se formularon diferentes preguntas relacionadas con el cambio de la representación gráfica a la algebraica ¿cómo se ven algebraicamente algunos objetos geométricos ubicados en estos sistemas?, también relacionadas al cambio de sistemas ¿cómo se hace el cambio de coordenadas de un sistema a otro?, o específicamente en la constitución del sistema que se toma para ubicar los puntos ¿los ejes tienen que ser siempre la misma figura geométrica?

Otra de las actividades realizadas en ese curso fue explorar sistemas cuyos ejes eran diferentes figuras geométricas, por ejemplo: 1. estudiamos un sistema conformado por dos circunferencias del mismo radio tangentes donde el origen era su punto de intersección. La distancia entre los puntos sobre una circunferencia era el arco de la circunferencia y para ubicar un punto se tomaba el punto medio entre los puntos sobre cada circunferencia (Ver Figura 1-2 parte (a)), 2. un sistema constituido por dos circunferencias del mismo radio que se intersecan pero no son tangentes, su origen es el punto de intersección entre el segmento que une los puntos de intersección de las circunferencias con el segmento que une los radios. Para ubicar un punto se toma el punto de intersección entre las tangentes a cada circunferencia por el punto sobre la circunferencia (Ver Figura 1-2 parte (b)), 3. se estudiaron los sistemas anteriores pero con las circunferencias de diferente radio, entre otras.

Dos de los sistemas que estudiamos de manera autónoma que más nos llamaron la atención fueron los siguientes: 1. Una circunferencia de radio 1 y una recta horizontal donde

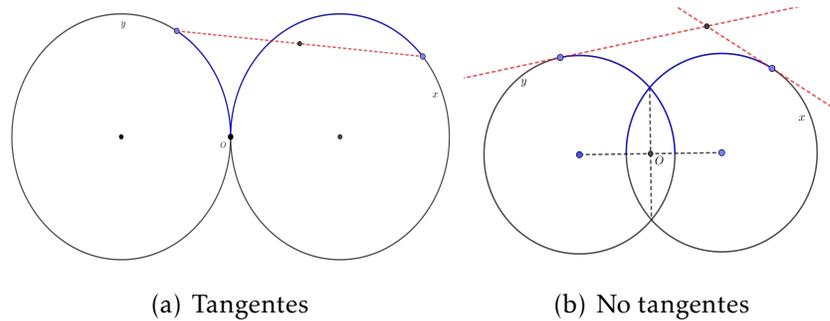


Figura 1-2.: 1. Ejemplos de sistemas explorados

el centro de la circunferencia esta sobre la recta, esta representará el eje x y la circunferencia el eje y . El origen del eje x es el centro de la circunferencia y el origen del eje y es la intersección entre la circunferencia con la parte positiva del eje x . Para ubicar un punto (a, b) en este sistema se toma un punto A en el eje x y un punto B sobre la circunferencia luego, trazando una asíntota a la circunferencia por B y una recta perpendicular al eje x por A , el punto de intersección entre estas dos rectas será la representación de (a, b) (Véase Figura 1-3 parte (a)). 2. Se toma el eje x como la curva Seno y el eje y como una recta vertical y el origen de cada eje coordenado es la intersección entre la curva y la recta. Para ubicar un punto (a, b) se ubica un punto A sobre la curva Seno tal que la longitud de arco del pedazo de curva determinado por el origen y se ubica un punto B sobre la recta vertical luego, la imagen del punto (a, b) sería la intersección de dos rectas: una perpendicular al eje y por A y otra tangente al eje x por B (Véase Figura 1-3 parte (b)).

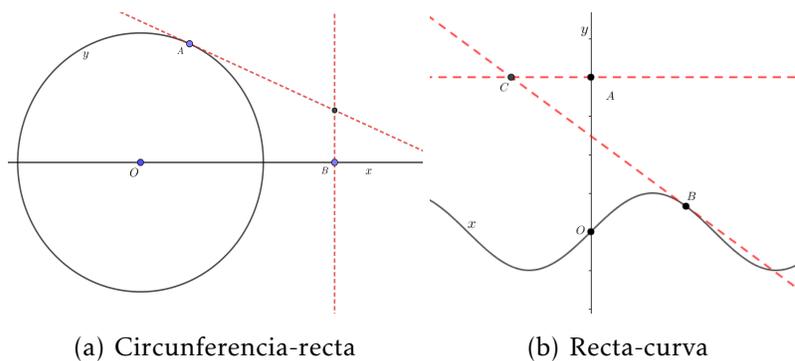


Figura 1-3.: 2. Ejemplos de sistemas explorados

Como se vio anteriormente no es necesario que los ejes tengan la misma forma, por esto,

quisimos seguir estudiando este tipo de sistemas. Por otro lado, gracias a los sistemas estudiados por nuestra cuenta (Véase Figura 1-3) vimos que la manera de ubicar los puntos influye en las representaciones y propiedades que pueden llegar a cumplir algunas figuras definidas de manera geométrica o analítica como lo son la continuidad en todos sus puntos, la definición de función, entre otras. Por esto y, teniendo en cuenta las actividades hechas en el curso de Geometría Analítica, nos surgió la idea de desarrollar un trabajo de grado en el que pudiéramos explorar y resolver algunas de las preguntas que quedaron sin responder tomando un sistema coordenado particular.

Para formular el anteproyecto estudiamos algunos trabajos de grado en los cuales se habían realizado actividades semejantes a las que veníamos haciendo. Encontramos cuatro trabajos de grado de la Licenciatura hechos en los años del 2011 al 2016. Un primer trabajo encontrado fue el de Luz Ángela Moreno y Oscar Carreño [8] en el año 2011 en el cual se toman como referencia los sistemas oblicuos y se formulan diferentes maneras de ubicar un punto las cuales nombran como PePe, PePa, PaPe, PaPa. Por cada manera de ubicar un punto, se estudian las parábolas desde su definición como lugar geométrico encontrando la ecuación de la directriz, las coordenadas del foco y el vértice; este proceso lo realizan ubicando una parábola definida como lugar geométrico sobre el plano y hallan las ecuaciones correspondientes. Se encontró también el trabajo de grado de Fernando Fernandez [2] donde se hace una caracterización de las rectas desde su representación algebraica y gráfica, teniendo en cuenta el ángulo que forman los ejes en el sistema oblicuo; contrastando y tomando como base el sistema cartesiano. Otro trabajo encontrado fue el de Luis Ortiz del año 2012 [9] usó el sistema PAR para representar gráficamente puntos, rectas definidas como la solución a la ecuación lineal y parábolas definidas como la solución a la ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Por último, se encontró un estudio más reciente realizado por Victor Mendigaño[7] del año 2016, en el cual se utilizaron diferentes sistemas coordenados en el espacio para redefinir la ecuación de la distancia usual entre dos puntos cualesquiera. Se utilizaron las coordenadas de los puntos ubicados de diferentes maneras en el plano (PePe, PePa, PaPe, PaPa) y se determinó la distancia entre dos puntos fuera del plano con los datos recolectados y con los diferentes sistemas coordenados estudiados.

Después de la revisión de los trabajos de grado y el desarrollo de las actividades del curso de Geometría Analítica, y para seguir profundizando en este tema, decidimos seguir estudiando las representaciones algebraicas y geométricas en un sistema coordenado diferente al rectangular. El sistema que consideramos para el estudio, al cual denomina-

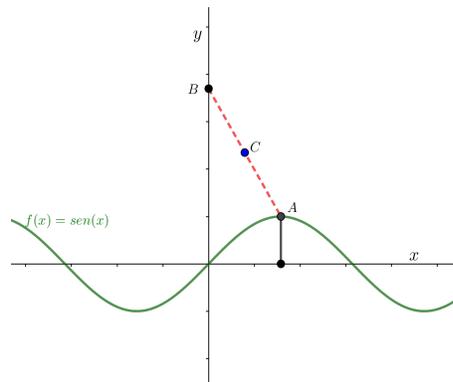


Figura 1-4.: Sistema Seno

mos *Sistema Seno*, está conformado por el eje y del sistema rectangular y la gráfica de la función seno como apoyo para ubicar los puntos. Para ubicar un punto (x_0, y_0) sobre el *Sistema Seno*, tomamos el punto $(x_0, 0)$ en el sistema usual, trazamos una perpendicular por este punto al eje x y la intersección entre la perpendicular y la curva Seno es el punto A luego, ubicamos el punto B con coordenadas $(0, y_0)$ en el sistema usual. Por último, ubicamos el punto medio C entre los puntos A y B y este es la representación de (x_0, y_0) en el *Sistema Seno*. (Véase Figura 1-4).

Teniendo en cuenta los trabajos de grado leídos, los cuales nos fueron de apoyo para guiar nuestras ideas y hacernos un ideal de los temas que se querían tratar y, además, de qué manera abordarlos; se quiso continuar por la misma línea de estudio y se definieron estos propósitos: el primero fue representar de manera gráfica las soluciones a las ecuaciones lineales de la forma $ax + by + c = 0$ en este sistema que consideramos. Quisimos estudiar las definiciones y teoremas asociados a las rectas y los resultados obtenidos contrastarlos con los resultados del sistema cartesiano. Teniendo en cuenta la relación que existe entre las cónicas definidas como lugar geométrico y la solución a la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ se quiso representar gráficamente cada una de ellas y mirar si se mantiene esta relación en el *Sistema Seno*. Por último, cuando hicimos la lectura de los trabajos de grado se nos dificultó la comprensión de los sistemas utilizados, por esto, decidimos crear applets para que el lector pudiera explorar las transformaciones de los objetos geométricos y de las diferentes definiciones tratadas en este sistema.

Luego que nos fue aprobado el anteproyecto empezamos el desarrollo del trabajo de grado. Lo primero que hicimos fue leer las secciones del libro "Geometría Analítica"[6] de

Charles Lehmann, relacionadas con la ubicación de puntos sobre un plano en el cual se encuentra un sistema coordenado, la gráfica de una ecuación, lugares geométricos y cónicas. Este texto se convirtió en nuestro libro guía, para re-alimentarnos teóricamente.

Un primer reto para nosotros fue la ubicación de puntos ya que cuando empezamos el trabajo sabíamos cómo, dadas las coordenadas de un punto, ubicarlo en el *Sistema Seno*, pero el proceso contrario nos resultó complejo resolverlo de manera geométrica así que recurrimos al álgebra y allí nos vimos en la necesidad de realizar cambios de coordenadas del *Sistema Seno* al rectangular y viceversa.

La definición de distancia entre dos puntos también nos resultó retante ya que para las diferentes definiciones de distancia propuestas en el libro "Geometría Analítica"[6], el calculo de estas no era conveniente para estudios posteriores, así pues, decidimos tomar la distancia Euclidiana entre dos puntos.

Luego, al seguir estudiando el libro de Lehmann[6] observamos que las rectas de la geometría euclidiana se representaban con ecuaciones lineales cuando se utilizaba el sistema rectangular pero, cuando representábamos las soluciones de la ecuación lineal en el *Sistema Seno* obteníamos una curva diferente a la línea recta de la geometría euclidiana y estas últimas tenían una ecuación diferente a la ecuación lineal inicial, eso fue lo que nos llevó a pensar cómo podríamos caracterizar o definir una recta en nuestro sistema. La decisión que tomamos fue que las rectas iban a ser el conjunto solución a una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$.

Otras discusión central asociada a las rectas fue cómo definir la distancia de un punto A a una recta l . Esta se quiso abordar como la distancia entre el punto A y el punto intersección entre la recta perpendicular a l por A pero, no fue viable porque no era conveniente para estudios posteriores, así que se definió como la mínima distancia entre el punto A y los puntos sobre la recta. Esta última definición suena muy sencilla pero, fue una de las más retantes de formular y para poder hacerlo tuvimos que recurrir a GeoGebra el cual nos permitió ver y corroborar de manera gráfica el proceso algebraico que estábamos realizando.

En términos de relaciones entre rectas nos tuvimos que detener para definir el ángulo entre rectas de dos maneras ya que, como se mencionó anteriormente, las soluciones a la ecuación lineal en el *Sistema Seno* son curvas por tanto, se tuvo la necesidad de definir

las **líneas** las cuales coinciden con las rectas en el sistema rectangular, y haciendo uso de estas se propusieron las siguientes definiciones: la primera teniendo en cuenta líneas tangentes a cada curva (recta en el *Sistema Seno*) por el punto de intersección donde se calcula el ángulo de apertura (o de barrido) entre las curvas a partir de las líneas. Con la segunda manera se tuvo en cuenta las pendientes de las rectas en el *Sistema Seno* y se construyeron líneas que estaban relacionadas con esta pendiente y el ángulo entre las rectas lo determinan las líneas.

Para dar inicio a el estudio de las cónicas se tuvo en cuenta que en el sistema rectangular si se ubica una cónica definida como lugar geométrico en el plano esta se puede expresar algebraicamente con la ecuación general de segundo grado y, recíprocamente, si construye una cónica como la solución a la ecuación general de segundo grado en un plano se pueden determinar unos focos y unas directrices tal que se cumpla que la cónica coincide con el lugar geométrico determinado por estos objetos geométricos. Teniendo esto claro abordamos de manera análoga el estudio de las cónicas en el *Sistema Seno*. En este, y en los demás procesos, nos fue de mucha ayuda el software GeoGebra ya que gracias a este pudimos representar gráficamente las soluciones a diferentes ecuaciones como, en este caso particular, la ecuación general de segundo grado cuando varían sus diferentes coeficientes.

Cuando empezamos a estudiar las cónicas a partir de la solución a la ecuación general de segundo grado vimos que era de suma importancia tener definidas algunas transformaciones de coordenadas como la rotación y traslación de los ejes y tener un cambio de coordenadas entre el sistema original y el transformado. Esto se abordó teniendo en cuenta las mismas definiciones en el *Sistema Seno*, es decir, para la traslación se tomó el sistema original como referencia y se trasladó a un punto sobre el plano; de manera análoga se hizo con la rotación: se tomó el sistema original y se giró con un ángulo cualquiera con respecto a un eje. Lo que más se nos dificultó en este proceso fue la formulación de las ecuaciones de cambio de coordenadas entre el sistema original y el sistema transformado, en este momento tuvimos que recurrir a GeoGebra para poder visualizar los movimientos que tenía el sistema y a partir de esto formular las ecuaciones.

Por último, no podemos dejar de lado la construcción en GeoGebra de las diferentes applets que se hicieron con el propósito de que le fueran de ayuda al lector para familiarizarse y comprender lo presentado en diferentes partes de este documento. Estas fueron surgiendo en el desarrollo del documento a medida que nos dábamos cuenta que era ne-

cesario tener una herramienta para poder explorar en el tema que se presenta y, además, para familiarizarse con este sistema.

2. Preliminares

Representación Cartesiana

En esta sección se presentarán algunas propiedades de las ecuaciones lineales y cuadráticas que se utilizarán para apoyar y comprender el estudio realizado en relación con el *Sistema Seno*.

2.1. Rectas y ecuaciones lineales en el sistema cartesiano

Dada la ecuación $ax + by + c = 0$ se puede construir un conjunto de parejas ordenadas (x, y) que la satisfaga; con este conjunto se puede realizar una gráfica en el plano cartesiano ubicando los puntos como se muestra en el anexo A.1. En este anexo también se muestra un ejemplo de cómo ubicar los puntos de una ecuación lineal.

La ecuación $ax + by + c = 0$ también se puede ver como $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Esta última representación algebraica generalmente se escribe como:

$$y = mx + b' \quad \text{donde} \quad m = -\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad b' = -\frac{c}{b}$$

generalmente m se denomina pendiente de la recta y b' es el punto de intersección de la recta con el eje y , aunque se usará la primera ecuación ya que si $b = 0$ la segunda ecuación no tendría solución. Más adelante se estudiarán afondo éstas expresiones.

2.1.1. Movimientos de las rectas

Cuando varía el término $-\frac{c}{b}$ en la ecuación $ax + by + c = 0$ de la recta l , se obtiene que la recta se mueve $-\frac{c}{b}$ unidades sobre el eje y . Si se quiere que la gráfica de la recta se mueva en la semirrecta del eje y positivo (arriba) $-\frac{c}{b}$ deberá ser positivo, en caso contrario deberá ser negativo.

En el anexo A.2 se muestra un ejemplo de este movimiento tomando dos rectas y comparando el coeficiente $-\frac{c}{b}$ y viendo cómo se refleja este cambio en la gráfica de cada una.

2.1.2. Inclinación de las rectas

Se considera que la inclinación de una recta es el ángulo θ determinado entre la horizontal (eje x) y la recta, en el sentido contrario de las manecillas del reloj. Este ángulo se podrá encontrar tomando dos puntos sobre la recta y formando un triángulo rectángulo, como se muestra en el anexo A.3, y se encuentra que:

$$\tan(\theta) = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Es decir, que con el ángulo θ se puede determinar la pendiente de la recta y con la ecuación de la recta se puede determinar la pendiente tomando el cociente $-\frac{a}{c}$ y el ángulo que forma con el eje x . El cociente $-\frac{a}{c}$ se puede interpretar como el movimiento de c unidades horizontalmente y en a unidades verticalmente. En A.4 se muestran dos ejemplos en los cuales a partir del ángulo que forma una recta con la horizontal se determina la manera como se mueven los puntos de la recta y teniendo la ecuación de la recta se muestra cómo se mueven los puntos sobre ella y el ángulo que forma con la horizontal.

Tenga en cuenta que en general si se multiplica por una constante $k \neq 0$, los conjuntos solución de $k(ax + by + c) = 0$ y de $ax + by + c = 0$ son iguales.

2.1.3. Vectores

Para este trabajo se tomará la definición en la cual se refiere al vector como una n -pla de coordenadas o componentes del vector que también se le llama *punto n -dimensional* debido a que la cantidad de componentes determina en cuántos planos se está trabajando. En este documento se tendrá en cuenta solo dos dimensiones y el vector d con coordenadas (a, b) se escribirá como $\vec{d} = \langle a, b \rangle$.

Vector director

Este vector, como su nombre lo dice, le da dirección a una recta, la orienta y le da un sentido determinado. El vector director de la recta l con su ecuación $ax + by + c = 0$ es $\vec{d} = \langle -b, a \rangle$.

Las rectas se pueden caracterizar como el rastro de la cabeza de un vector con ciertas condiciones que se pueden escribir en una ecuación como $X(t) = P + t\vec{d}$ con P un punto sobre

la recta, un vector \vec{d} y un parámetro $t \in \mathbb{R}$; ésta ecuación tiene como nombre *Ecuación Vectorial de una recta*. Cabe resaltar que \vec{d} es el vector director de la recta.

Vector normal

El vector normal se define como un vector perpendicular a otro vector y se encuentra de la siguiente manera, sea un vector $\vec{d} = \langle -b, a \rangle$ el vector normal a d será $\vec{n} = \langle a, b \rangle$.

2.1.4. Ángulo entre dos rectas

El ángulo entre dos rectas será el menor ángulo que se forma entre ellas dos y se puede hallar a partir de sus vectores directores usando la ecuación:

$$\cos(\theta_{\vec{d}_1 \vec{d}_2}) = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{\|\vec{d}_1\| \|\vec{d}_2\|} \quad (2-1)$$

siendo los numeradores el producto escalar entre los vectores y el denominador es el producto de la norma de los vectores. También se puede determinar éste el ángulo utilizando la tangente del ángulo que forman las rectas y sus pendientes utilizando la ecuación:

$$\tan(\theta) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \quad (2-2)$$

A manera de ejemplo se mostrará que el vector director \vec{d} y el vector normal \vec{n} de la recta l con ecuación $ax + by + c = 0$ son perpendiculares.

Por definición el vector director de l es $\vec{d} = \langle -b, a \rangle$ y su vector normal es $\vec{n} = \langle a, b \rangle$; reemplazando en la ecuación (2-1) se tiene que:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_{\vec{d}\vec{n}}) &= \frac{\langle -a, b \rangle \cdot \langle a, b \rangle}{\sqrt{a^2 + (-b)^2} \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{-ab + ab}{a^2 b^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

luego $\theta_{\vec{d}\vec{n}} = a \frac{\pi}{2}$ con $a = 2n + 1$ y $n \in \mathbb{Z}$.

En general el ángulo $\theta_{\vec{d}\vec{n}}$ es recto, por tanto los vectores \vec{d} y \vec{n} son perpendiculares.

2.1.5. Rectas paralelas

En esta sección se trabajarán las rectas paralelas desde tres puntos de vista diferentes: analítico, vectorial y geométrico. Se mostrará que teniendo cualquier definición se puede llegar a las otras con ciertos cambios de notación y propiedades que tiene cada sistema.

1. Definición geométrica: dos rectas l y t son paralelas si su intersección es vacía ó si se intersecan en dos o más puntos.
2. Definición analítica: dos rectas l y t con ecuaciones

$$ax + by + c = 0 \quad \text{y} \quad a'x + b'y + c' = 0$$

respectivamente, son paralelas si $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$. Si la ecuación de la recta l se puede escribir como $k(ax + by + c) = 0$ con $k \neq 0$ también son paralelas.

3. Definición vectorial: sean los puntos P y Q con coordenadas (r_1, r_2) y (q_1, q_2) respectivamente, dos vectores

$$\vec{d}_1 = \langle a, b \rangle \quad \text{y} \quad \vec{d}_2 = \langle c, d \rangle$$

y $t \in \mathbb{R}$. Si \vec{d}_2 se puede expresar como $k \langle a, b \rangle$ con $k \neq 0$ entonces, las rectas que determinan las ecuaciones vectoriales

$$X(t) = P + t\vec{d}_1 \quad \text{y} \quad X'(t) = Q + t\vec{d}_2$$

son paralelas. Si $X(t) = X'(t)$ también son paralelas.

En el anexo A.5 se demuestra la equivalencia de las definiciones anteriores. Se empezará usando una definición y se concluirán las otras dos, y así sucesivamente.

2.1.6. Rectas perpendiculares

Se afirmará que las rectas l y t con ecuaciones $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ respectivamente, son perpendiculares si el ángulo formado entre estas es recto (igual a 90) o si $m_1 \cdot m_2 = -1$, siendo m_1 y m_2 las pendientes de las rectas.

En el anexo A.6 se demuestra la siguiente equivalencia:

- Las rectas l y t forman un ángulo θ recto si y solo si $m_1 \cdot m_2 = -1$

2.1.7. Cortes con los ejes x y y

Sea $ax + by + c = 0$ la ecuación de la recta l . Los cortes con los ejes se pueden ver como el punto que pertenece al conjunto de puntos solución y al eje ordenado. El corte con el eje y tendrá coordenadas $(0, y)$, es decir, cuando $x = 0$ se despeja y en la ecuación lineal y se obtiene que $y = -\frac{c}{b}$. De manera análoga el corte con el eje x será en el punto $(-\frac{c}{a}, 0)$.

2.1.8. Distancia euclidiana entre dos puntos

La distancia Euclidiana entre dos puntos A y B se define como el mínimo recorrido que se puede hacer de un punto a otro. En la Figura 2-1 se muestran algunos recorridos (o maneras de llegar) de un punto a otro y la distancia entre ellos dos que será el mínimo recorrido (en rojo) que se puede hacer.

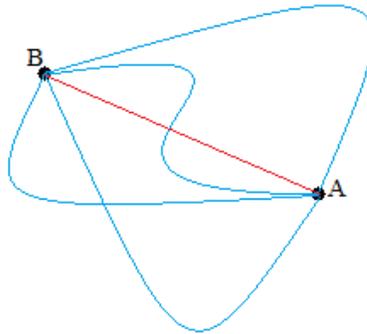


Figura 2-1.: Recorridos de un punto A a un punto B

Si se toman dos puntos P_1 y P_2 con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y se considera el triángulo rectángulo P_1EP_2 . Por el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$d^2 = P_1P_2 = (P_1E)^2 + (P_2E)^2$$

Esto se muestra en la Figura 2-2 para dar una idea de la distancia usual entre dos puntos en el plano cartesiano y la distancia se determina con la siguiente ecuación:

$$d_{P_1, P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (2-3)$$

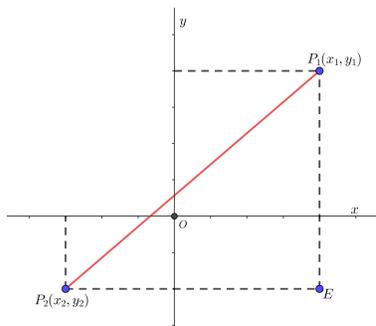


Figura 2-2.: Distancia euclidiana entre dos puntos

2.1.9. Coordenadas del punto medio

Sean dos puntos A y B con coordenadas (x_0, y_0) y (x_1, y_1) respectivamente, el punto medio C entre estos dos tiene coordenadas

$$\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2} \right)$$

Esto se deduce a partir de la semejanza entre los triángulos que se muestran en la Figura 2-3.

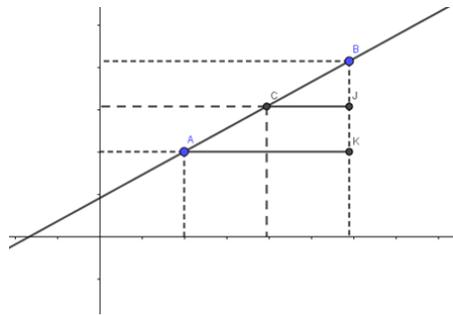


Figura 2-3.: Punto medio

2.1.10. Distancia entre un punto y una recta

Sea un punto P con coordenadas (x_0, y_0) y la recta l con ecuación $Ax + By + C = 0$. La distancia entre éstos se define como la mínima distancia que se pueda encontrar entre el punto A y los puntos L_i que están sobre l . (Ver Figura 2-4)

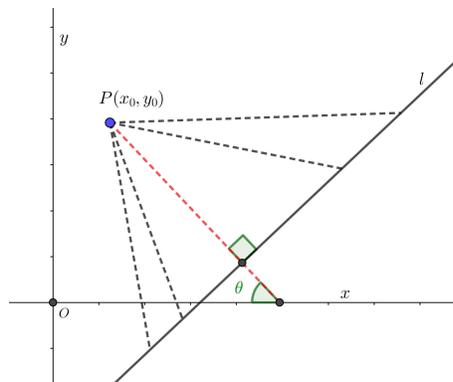


Figura 2-4.: Distancia entre un punto y una recta

El punto sobre l que cumple que su distancia con respecto a A sea mínima, forma un ángulo recto. Para determinar la distancia entre el punto A y la recta l se usa la siguiente fórmula:

$$d_{P,l} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2-4)$$

2.2. Transformación de coordenadas en el sistema cartesiano

En algunos casos para estudiar la forma algebraica de puntos, rectas y curvas se realiza una transformación de coordenadas la cual surge como el cambio o manipulación de los ejes coordenados. En esta sección se analizará la traslación y la rotación de los ejes coordenados ya que más adelante será de utilidad para el desarrollo de las secciones cónicas.

2.2.1. Traslación

Una traslación consiste en mover el sistema coordenado en el plano tantas unidades hacia la derecha ,o izquierda, y/o hacia arriba o hacia abajo con respecto al origen, es decir que, cada punto sobre los ejes coordenados se mueven h unidades hacia la izquierda o derecha (con respecto al eje x) y k unidades hacia arriba o abajo (con respecto al eje y) como se muestra en la Figura 2-5.

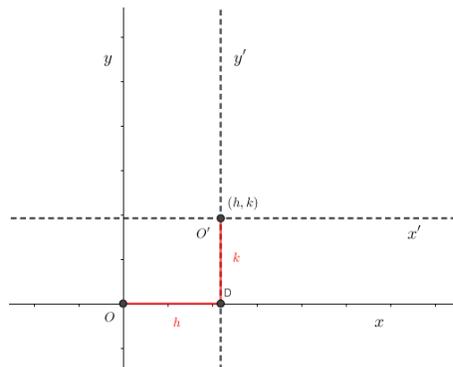


Figura 2-5.: Traslación de los ejes

Para determinar las coordenadas de un punto (x_0, y_0) , que está en el sistema original, en

el sistema trasladado se realiza el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned}x' &= x - h \\y' &= y - k\end{aligned}\tag{2-5}$$

Es decir que el punto (x_0, y_0) tiene coordenadas (x'_0, y'_0) en el sistema trasladado.

Si se tiene la gráfica de la ecuación $f(x, y) = 0$ y se quiere determinar la ecuación en el sistema trasladado se despeja x y y de la ecuación (2-5) y se reemplazan los valores, luego se tendrá la ecuación $f(x', y') = 0$ de la gráfica en el sistema trasladado.

2.2.2. Rotación

Rotación de los ejes se le llama al proceso de girar el eje x y el eje y con un ángulo α teniendo a su origen como eje de rotación. La Figura 2-6 muestra los ejes x y y (en negro) y el resultado de rotar estos ejes con un ángulo α , estos están en rojo y punteados. Además, se muestra un punto en el sistema original y se muestra gráficamente el proceso para determinar las coordenadas de este punto en el sistema rotado.

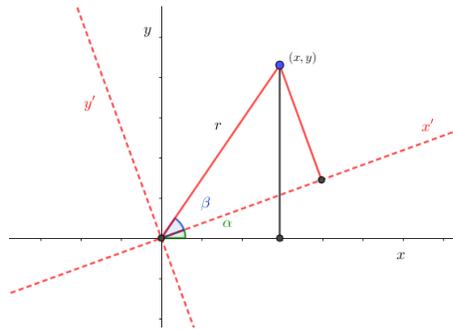


Figura 2-6.: Rotación de los ejes

Si se tiene un punto con coordenadas (x_0, y_0) en el sistema original y se quiere determinar las coordenadas en el sistema rotado, se usa el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos(\alpha) + y \operatorname{sen}(\alpha) \\y' &= -x \operatorname{sen}(\alpha) + y \cos(\alpha)\end{aligned}\tag{2-6}$$

luego el punto (x_0, y_0) tendrá coordenadas (x'_0, y'_0) en el sistema rotado.

Si se tiene la gráfica de una ecuación $f(x, y) = 0$ y se quiere determinar la ecuación en el sistema rotado, se usa las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos(\alpha) - y' \operatorname{sen}(\alpha) \\y &= x' \operatorname{sen}(\alpha) + y' \cos(\alpha)\end{aligned}\tag{2-7}$$

y se determina una ecuación $f(x', y') = 0$ de tal manera que su representación gráfica coincida con $f(x, y) = 0$ en el sistema original.

2.3. Cónicas y ecuación cuadrática en el sistema cartesiano

En esta sección se mostrarán dos diferentes maneras de definir las cónicas: como lugar geométrico y como la solución a la ecuación cuadrática. Se mostrará que una cónica definida como lugar geométrico se puede expresar algebraicamente como una ecuación cuadrática con ciertas condiciones. Luego, se mostrará cómo a partir de la ecuación cuadrática se puede llegar a la definición por lugar geométrico.

2.3.1. Definición como lugar geométrico

En esta sección se mostrará las definiciones de parábola, elipse e hipérbola como lugar geométrico.

2.3.1.1. Parábola

- Sea una recta l fija y un punto fijo F fuera de l . Una parábola es el lugar geométrico que determina un punto C de tal manera que la distancia de C a F es siempre igual que la distancia de C a l .

Esto se puede ver gráficamente en la Figura 2-7.

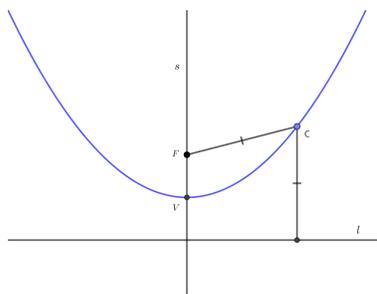


Figura 2-7.: Parábola por lugar geométrico

Fíjese que aparece la recta s la cual es el eje de simetría (o eje de parábola) y el punto V (vértice) que es la intersección de esta recta con el lugar geométrico. También surge un

nuevo término el cual es la excentricidad de una cónica, que se define como el cociente entre la distancia entre el foco y un punto de la curva y la distancia de la directriz al mismo punto de la curva, es decir, sea un punto P sobre la parábola se cumple que:

$$\widehat{e} = \frac{d_{P,F}}{d_{P,l}} = 1$$

2.3.1.2. Elipse

Una definición por lugar geométrico de la elipse es la siguiente:

- Sean dos puntos F_1, F_2 fijos y d_{F_1, F_2} la distancia entre ellos. Una elipse es el lugar geométrico que determina un punto P de tal manera que $d_{P, F_1} + d_{P, F_2} = k$, k una constante y $k > d_{F_1, F_2}$.

En la Figura 2-8 se muestran los puntos que cumplen la condición anterior.

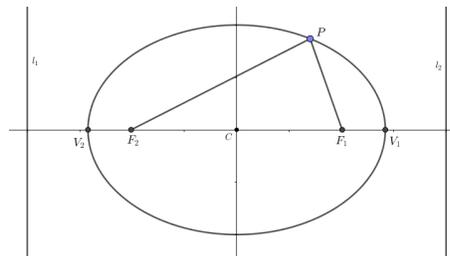


Figura 2-8.: Elipse por lugar geométrico

Fíjese que aparece los puntos V_1 y V_2 que son los vértices, el punto C que es el centro y las rectas l_1 y l_2 directrices de la elipse. Estas últimas cumplen que:

$$\widehat{e} = \frac{d_{P, F_1}}{d_{P, l_1}}$$

siendo \widehat{e} una constante generalmente llamada excentricidad, donde $0 < \widehat{e} < 1$.

2.3.1.3. Hipérbola

La Hipérbola se define como:

- Sean dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados focos y d_{F_1, F_2} la distancia entre ellos. Una hipérbola es el conjunto de puntos que cumplen la condición que $|d_{P, F_1} - d_{P, F_2}| = k$, siendo k una constante positiva que $k < d_{F_1, F_2}$.

En la Figura 2-9 se muestra una representación gráfica de una hipérbola.

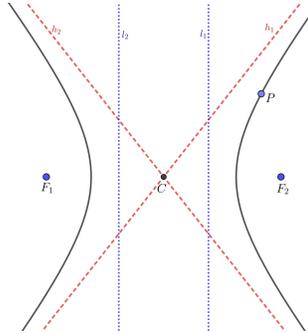


Figura 2-9.: Hipérbola por lugar geométrico

Se observa que aparecen las rectas h_1 y h_2 que son asíntotas a la curva y el punto C que es el centro. También se observan las rectas l_1 y l_2 que son las rectas directrices de la hipérbola y cumplen que:

$$\widehat{e} = \frac{d_{P,F_1}}{d_{P,l_1}}$$

Donde \widehat{e} es la excentricidad de la curva y en este caso $\widehat{e} > 1$.

Mostradas estas definiciones se tomará una cónica cualquiera en el plano, se va a ubicar en un sistema coordenado y a partir de este se va a estudiar la ecuación que representa dicha cónica.

2.3.2. Del lugar geométrico a la ecuación

Para cada uno de los casos se mostrará que cualquier cónica como lugar geométrico se puede expresar algebraicamente como una ecuación cuadrática. Para esto se tomará una cónica con sus directrices, focos y su centro y se pondrán los ejes coordenados sobre el mismo plano en el cual se estudiarán dos casos generales: 1) cuando las directrices son paralelas a algún eje coordenado y 2) cuando las directrices no son paralelas a ningún eje coordenado. Y dos casos particulares 1) cuando el origen cae sobre el centro de la cónica y 2) cuando el origen no es el centro de la cónica. Si las directrices no son paralelas a algún eje coordenado se rotarán los ejes hasta que alguno sea paralelo a las directrices. Si el origen no cae sobre el centro de la cónica se trasladarán los ejes hasta que coincida el origen con el centro.

2.3.2.1. Parábola

Se tomará una parábola cualquiera y se analizarán los posibles casos mencionados.

1. Cuando la directriz es paralela a algún eje coordenado

Como se mencionó anteriormente se pueden analizar dos posibles casos: que el origen de los ejes sea el vértice o que no sea. Para cada uno de los casos se mostrarán dos situaciones diferentes: si la directriz es paralela al eje x o si es paralela al eje y . Cabe resaltar que cuando el origen no coincida con el vértice de la parábola se realizará una traslación de los ejes de h unidades en el eje x y de k unidades en el eje y hasta que coincidan.

Origen en el vértice

Sea una parábola definida como lugar geométrico. Se procederá ubicando un sistema con los ejes x y y de tal manera que el origen del sistema coincida con el vértice de la parábola. Pueden ocurrir dos casos: 1) que la directriz sea paralela al eje x o 2) que sea paralela al eje y . Luego se determina que el foco de la parábola tiene coordenadas $(p, 0)$ ó $(0, p)$ y que la ecuación de la directriz es $y = -p$ ó $x = -p$ como se muestra en la Figura 2-10.

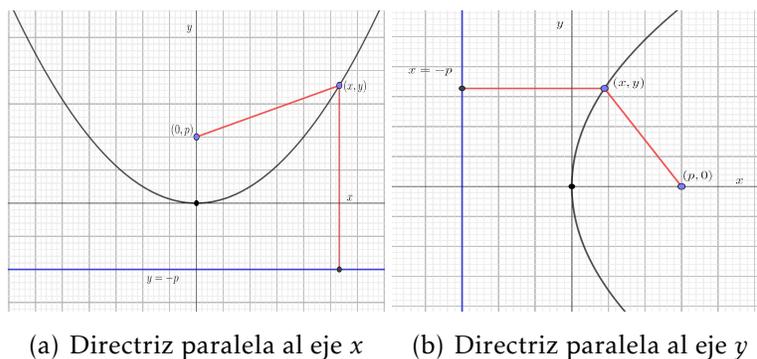


Figura 2-10.: Parábolas con origen en el vértice

Para determinar que la parábola se puede escribir de manera algebraica como una ecuación cuadrática, se usa la definición como lugar geométrico y se concluye que es una ecuación cuadrática. En el anexo A.7 se muestra el proceso para determinar su ecuación canónica y su ecuación general y en la Tabla 2-1 se muestran estas ecuaciones.

Directriz	Ecuación General	Ecuación Canónica	
Paralela al eje x	$ax^2 + ey = 0$	$x^2 = 4py$	$p = -\frac{e}{4a}$
Paralela al eje y	$cy^2 + dx = 0$	$y^2 = 4px$	$p = -\frac{d}{4c}$

Tabla 2-1.: Ecuaciones de las parábolas con centro en el origen

Más adelante se explicará la importancia de la ecuación canónica y el uso que se le dará. En la Figura 2-11 se muestran dos representaciones de dos parábolas que tienen la directriz paralela al eje x y el eje de simetría coincide con el eje y (rectas en rojo). En la parte (a) se muestra una parábola que abre hacia arriba y en la parte (b) una que abre hacia abajo.

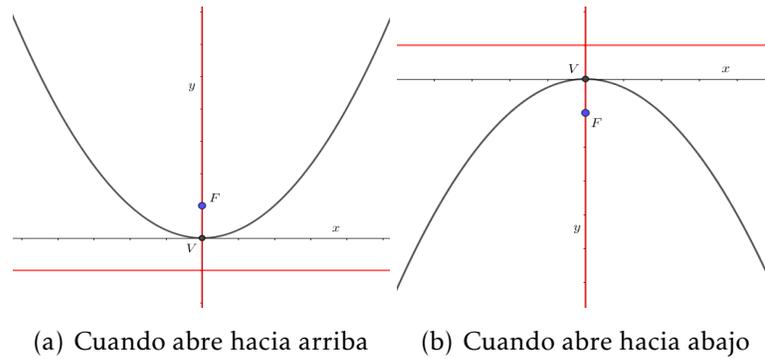


Figura 2-11.: Cuando origen coincide con el vértice y la directriz es paralela al eje x

En la Figura 2-12 se muestra cuando la directriz es paralela a el eje y . En la parte (a) se muestra una parábola que abre hacia la izquierda y en la parte (b) una que abre hacia la derecha.

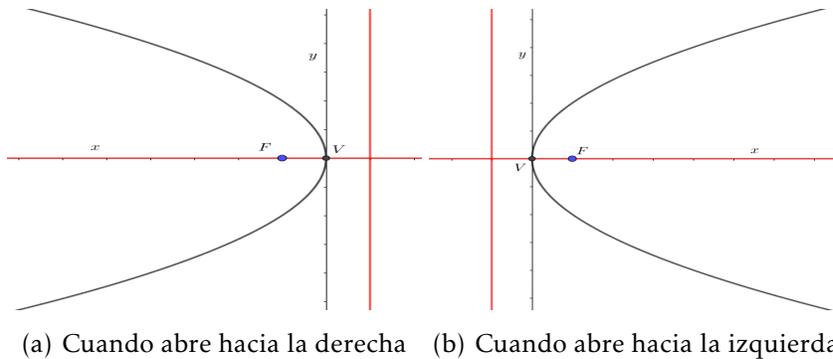


Figura 2-12.: Cuando origen coincide con el vértice y la directriz es paralela al eje y

Origen diferente al vértice

Si el origen de los ejes coordenados no coincide con el vértice de la parábola se puede deducir que el vértice de la parábola tiene coordenadas (h, k) y se puede determinar unos ejes coordenados x' y y' de tal manera que el origen de estos ejes coincida con el vértice de la parábola, luego en este sistema x' , y' la parábola tiene una ecuación cuadrática como se mostró en el 1° Caso, ahora utilizando las ecuaciones de traslación (2-5) para mover los ejes al origen del sistema original, se tienen las ecuaciones presentadas en la Tabla 2-2.

Directriz	Ecuación General	Ecuación Canónica
Paralela al eje x	$ax^2 + dx + ey + f = 0$	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$
Paralela al eje y	$cy^2 + dx + ey + f = 0$	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$

Tabla 2-2.: Ecuaciones de las parábolas con vértice fuera del origen

En el anexo A.8 se muestra el proceso que se desarrolló para determinar estas ecuaciones y en la Figura 2-13 se puede confirmar gráficamente lo dicho anteriormente.

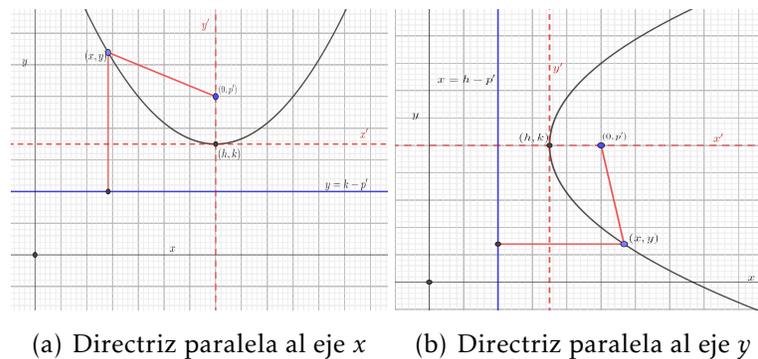


Figura 2-13.: Parábolas con origen diferente al vértice

En la Figura 2-14 se pueden observar los ejes x' y y' (en azul y punteado) los cuales son el resultado de la traslación de los ejes hasta el vértice de la parábola. Fíjese que cuando se hace la traslación el eje de simetría coincide con el eje y' .

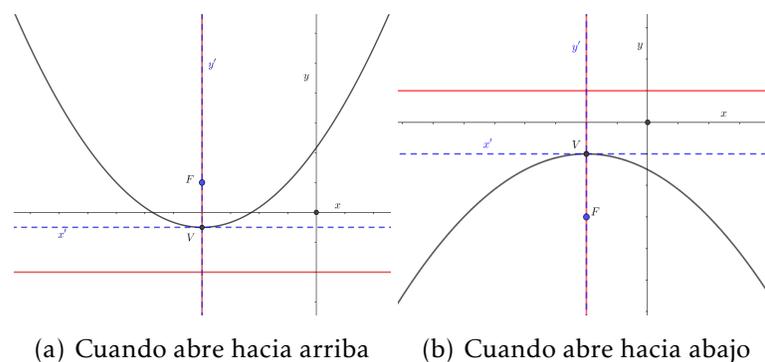


Figura 2-14.: Traslaciones cuando la directriz es paralela al eje x

En la Figura 2-15 se muestran dos parábolas con la directriz paralela al eje y y con el eje de simetría sobre el eje x y además, el resultado de las traslación de los ejes hasta el vértice de la parábola (en azul y punteado).

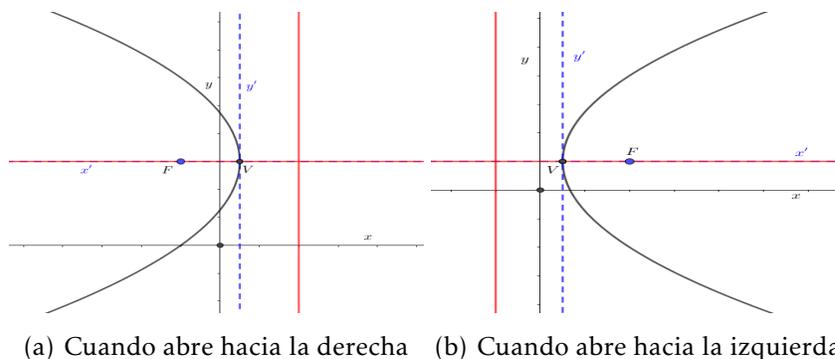


Figura 2-15.: Traslaciones cuando la directriz es paralela al eje y

2. Cuando las directrices no son paralelas a ningún eje coordenado

En este caso se usará las ecuaciones de rotación de los ejes (2-7) girándolos con un ángulo α con respecto al eje x (la horizontal) hasta que algún eje coordenado sea paralelo a la directriz de la parábola. Cuando se hace la rotación surgen nuevas ecuaciones en el sistema original y en el sistema rotado (o primado) las cuales se muestran en la Tabla 2-3. En el anexo A.9 se muestra el proceso que se realizó para determinar las ecuaciones mostradas.

Directriz	Paralela al eje x'	Paralela al eje y'
Ecuación General	$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$	
Ecuación Primada	$a'x'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$	$c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$
Ecuación Canónica	$(x' - h')^2 = 4p(y' - k')$	$(y' - k)^2 = 4p(x' - h)$

Tabla 2-3.: Ecuaciones de las parábolas en el sistema rotado

En la Figura 2-16 se muestran los ejes x' y y' (en azul y punteado) los cuales son el resultado de rotar el sistema original con un ángulo α y la directriz y el eje de simetría (en rojo) de la parábola.

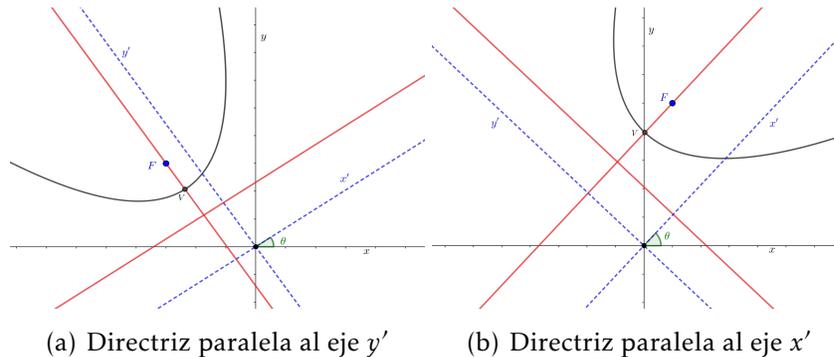


Figura 2-16.: Rotación de la parábola

2.3.2.2. Elipse

Se tomará una elipse cualquiera y, análogo al proceso que se desarrolló en la sección anterior, se analizarán los posibles casos.

1. Cuando las directrices son paralelas a algún eje coordenado

Analizando los dos posibles casos, se tiene que: el centro esté en el origen de los ejes o que no esté. Para cada uno de los casos se mostrarán dos situaciones diferentes: si las directrices son paralelas al eje x o si son paralelas al eje y .

Origen en el centro

Sea una elipse definida como lugar geométrico. Se procederá ubicando un sistema con los ejes x y y de tal manera que el origen del sistema coincida con el centro de la elipse. Pueden ocurrir dos casos: 1) que las directrices sean paralelas al eje x o 2) que sean paralelas

al eje y . Luego se determina que los focos de la elipse tienen coordenadas $(p, 0)$ y $(-p, 0)$ ó $(0, p)$ y $(0, -p)$ como se muestra en la Figura 2-17.

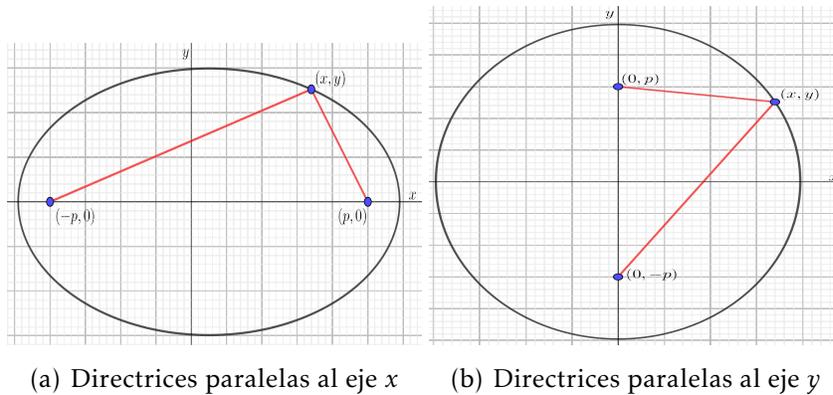


Figura 2-17.: Elipses con centro en el origen

Ahora por definición de elipse como lugar geométrico se determina que la ecuación de estas elipses es una ecuación cuadrática como se muestra en el anexo A.10. En la Tabla 2-4 se muestra las ecuaciones encontradas para cada caso.

Ecuación General	Ecuación Canónica	Directriz	
$ax^2 + cy^2 + f = 0$	$\frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} = 1$	Paralela al eje y si $a' > b'$	con $b' = a,$ $a' = c, f = -a'b'$
		Paralela al eje x si $a' < b'$	

Tabla 2-4.: Ecuaciones de las elipses con centro en el origen

Centro fuera del origen

En este caso se usará las ecuaciones de traslación (2-5) para mover los ejes h unidades en el eje x y k unidades en el eje y hasta que el origen coincida con el centro de la elipse y usando lo visto anteriormente se puede deducir una ecuación en el sistema trasladado, luego “devolviéndose” al sistema original se tiene que la ecuación de la elipse se puede ver de las siguientes formas. (Ver Tabla 2-5). En el anexo A.11 se muestra el proceso algebraico para llegar a estas ecuaciones.

Ecuación	Ecuación Canónica	Directriz
$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$	$\frac{(x-h)^2}{a'} + \frac{(y-k)^2}{b'} = 1$	Paralela al eje y si $a' > b'$ Paralela al eje x si $a' < b'$

Tabla 2-5.: Ecuaciones de las elipses con centro fuera del origen

En la Figura 2-18 se puede observar la traslación de los ejes hasta que el origen coincide con el centro de la elipse, allí se obtiene un sistema nuevo x' y y' (en rojo y punteado), además de las respectivas directrices (en azul).

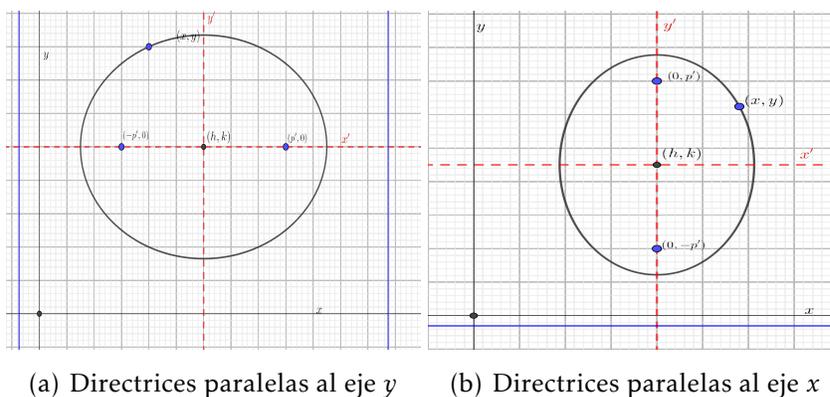


Figura 2-18.: Traslaciones de la elipse cuando el centro no está en el origen

2. Cuando las directrices no son paralelas a ningún eje coordenado

En este caso se usarán las ecuaciones de rotación de los ejes (2-7) girándolos con un ángulo α con respecto al eje x (la horizontal) hasta que las directrices sean paralelas a algún eje coordenado. En el anexo A.12 se muestra el proceso que se realizó para deducir las ecuaciones de la elipse en el sistema original y en el sistema rotado (o primado) y en la Tabla 2-6 se presentan estas ecuaciones.

Directrices	Paralela al eje y si $a' > b'$	Paralela al eje x si $a' < b'$
Ecuación General	$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$	
Ecuación Primada	$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$	
Ecuación Canónica	$\frac{(x' - h')^2}{a''} + \frac{(y' - k')^2}{b''} = 1$	

Tabla 2-6.: Ecuaciones de las elipses en el sistema rotado

En la Figura 2-19 se muestran los ejes x' y y' (en azul y punteado) los cuales son el resultado de la rotación de los ejes x y y con un ángulo α y las directrices de la elipse (en rojo).

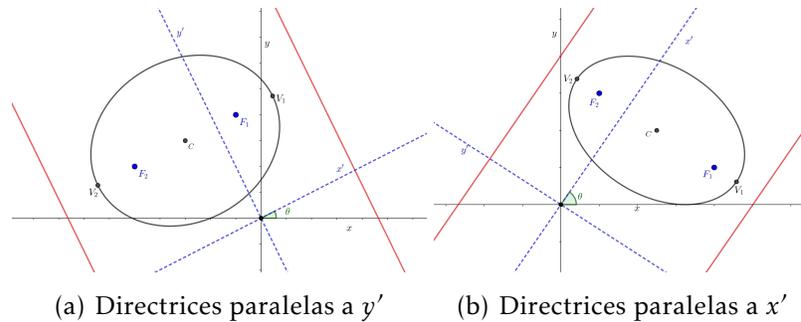


Figura 2-19.: Rotación de la elipse.

2.3.2.3. Hipérbola

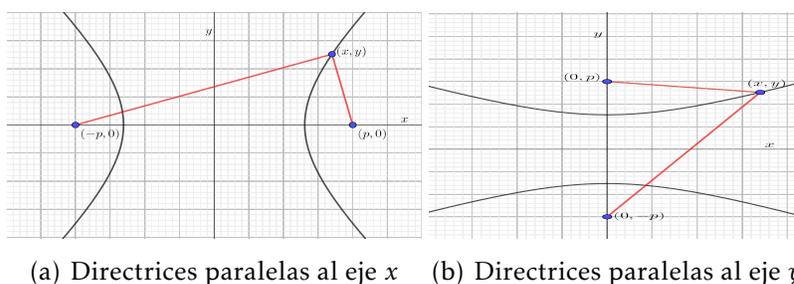
Se tomará una hipérbola cualquiera y se analizarán los posibles casos que se estudiaron anteriormente con las anteriores cónicas.

1. Cuando las directrices son paralelas a algún eje coordenado

Se pueden analizar dos posibles casos: que el origen de los ejes coordenados coincida con el centro de la hipérbola o que no coincidan. Para cada uno de los casos se mostrarán dos situaciones diferentes: si las directrices son paralelas al eje x o si son paralelas al eje y .

Vértice en el origen

Sea una hipérbola definida como lugar geométrico. Se procederá ubicando un sistema con los ejes x y y de tal manera que el origen del sistema coincida con el centro de la hipérbola. Pueden ocurrir dos casos: 1) que las directrices sean paralelas al eje x o 2) que sean paralelas al eje y . Luego se determina que los focos de la hipérbola tienen coordenadas $(p, 0)$ y $(-p, 0)$ ó $(0, p)$ y $(0, -p)$ como se muestra en la Figura 2-20.

(a) Directrices paralelas al eje x (b) Directrices paralelas al eje y **Figura 2-20.:** Hipérbolas con centro en el origen

Ahora por definición de hipérbola como lugar geométrico se tiene que la ecuación de la hipérbola es una ecuación cuadrática como se muestra en el anexo A.13 y estas se presentan en la Tabla 2-7.

Ecuación	Ecuación Canónica	Directriz	
$ax^2 + cy^2 + f = 0$	$\frac{x^2}{a'} - \frac{y^2}{b'} = 1$	Paralela al eje y	$a = b', c = -a', f = -a'b'$
	$\frac{y^2}{a'} - \frac{x^2}{b'} = 1$	Paralela al eje x	$a = -a', c = b', f = -a'b'$

Tabla 2-7.: Ecuaciones de las hipérbola con centro en origen

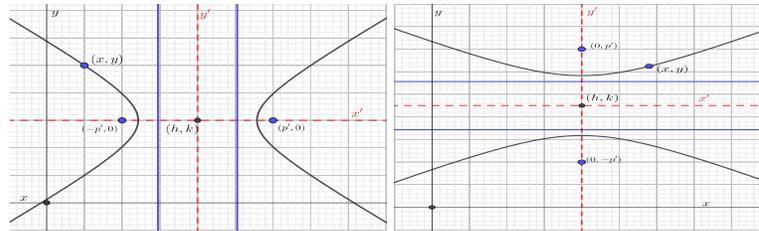
Vértice fuera del origen

Si el origen de los ejes coordenados no coincide con el centro de la hipérbola se puede deducir que el centro tiene coordenadas (h, k) y se puede determinar unos ejes coordenados x' y y' de tal manera que el origen de estos ejes coincida con el centro de la hipérbola, luego en este sistema x', y' se tiene que la ecuación canónica de la hipérbola se puede ver como una ecuación del 1° **Caso** y utilizando las ecuaciones de traslación (2-5) se deduce una ecuación en el sistema original. Este proceso se muestra detalladamente en el anexo A.14 y en la Tabla 2-8 se muestran las ecuaciones resultantes.

Ecuación	Ecuación Canónica	Directriz
$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$	$\frac{(x-h)^2}{a'} - \frac{(y-k)^2}{b'} = 1$	Paralela al eje x
	$\frac{(y-k)^2}{a'} - \frac{(x-h)^2}{b'} = 1$	Paralela al eje y

Tabla 2-8.: Ecuaciones de las hipérbolas con centro fuera del origen

En la Figura 2-21 se puede observar los ejes x' y y' (en azul y punteado) los cuales son el resultado de trasladar los ejes hasta que el origen coincida con el centro de la hipérbola. También se muestran las directrices y las asíntotas (en rojo).



(a) Cuando las directrices son paralelas al eje y (b) Cuando las directrices son paralelas al eje x

Figura 2-21.: Traslaciones de la hipérbola

2. Cuando las directrices no son paralelas a ningún eje coordenado

En este caso se usará las ecuaciones de rotación de los ejes (2-7) girándolos con un ángulo α con respecto al eje x (la horizontal) hasta que las directrices sean paralelas a algún eje coordenado. En el anexo A.15 se muestra el proceso que se realizó para llegar a las ecuaciones que se presentan en la Tabla 2-9 las cuales están en el sistema original y en el sistema rotado (o primado).

Directrices	Paralela al eje y'	Paralela al eje x'
Ecuación General	$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$	
Ecuación Primada	$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$	
Ecuación Canónica	$\frac{(x' - h')^2}{a''} - \frac{(y' - k')^2}{b''} = 1$	$\frac{(y' - k')^2}{a''} - \frac{(x' - h')^2}{b''} = 1$

Tabla 2-9.: Ecuaciones de las hipérbolas en el sistema rotado

En la Figura 2-22 se muestra un ejemplo de una hipérbola rotada y además trasladada, se muestra también los ejes x', y' rotados con sus respectivas directrices y asíntotas.

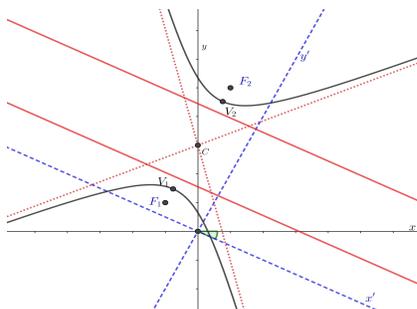


Figura 2-22.: Hipérbola trasladada

De esta sección se puede inferir que el término xy está relacionado con la rotación de las cónicas y los términos x y y se relacionan con la traslación. Ya se mostró que cualquier cónica puede ser expresada algebraicamente como una ecuación cuadrática, ahora con los resultados, se mostrará que la representación gráfica a una ecuación cuadrática coincide con la representación gráfica de una cónica como lugar geométrico. En la siguiente sección se mostrará que a partir de la ecuación cuadrática, en especial de la ecuación canónica, se puede determinar el tipo de cónica que representa y sus partes (vértice, centro, directrices, etc.) a partir de los coeficientes de la ecuación.

2.3.3. De la ecuación al lugar geométrico

Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ se puede construir un conjunto de parejas ordenadas (x, y) de tal manera que la satisfagan. Con este conjunto se puede realizar la gráfica de alguna cónica en el plano cartesiano. Se puede determinar cuál cónica representa la ecuación a partir del discriminante $b^2 - 4ac$ y se indica de la siguiente forma

Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces es parábola.

Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces es elipse

Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces es hipérbola

En lo que sigue se mostrará cómo encontrar, a partir de los coeficientes de la ecuación, las coordenadas del centro y los focos y las ecuaciones de las directrices y del eje de simetría con ayuda de la ecuación canónica. Esto se realizará teniendo en cuenta dos casos generales: 1) cuando está el término xy y 2) cuando no está. Como se mencionó anteriormente, este término está relacionado con la rotación de las cónicas, es decir, que se puede ver como los casos donde la cónica está rotada o no está rotada. También se

estudiarán dos casos particulares: 1) cuando están los términos x y y y 2) cuando no están. Estos términos se relacionan con la traslación de las cónicas, es decir que se puede ver como los casos donde la cónica se trasladada o no se traslada.

2.3.3.1. Parábola

En general, la ecuación de una parábola tiene la siguiente forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (2-8)$$

con las siguientes condiciones:

1. $b^2 - 4ac = 0$
2. $ac \geq 0$
3. a y c diferentes de 0 simultáneamente, además, si a ó c son 0 necesariamente $b = 0$
4. Si $b = 0$ entonces a ó c tienen que ser 0. Además
 - a) Si $a = 0$ entonces $d \neq 0$
 - b) Si $c = 0$ entonces $e \neq 0$

Se verán las coordenadas del vértice y el foco y la ecuación de la directriz y el eje de simetría para cualquier parábola. Para esto se tomarán dos casos generales: cuando no está el término xy y cuando si está. Y dos casos particulares: 1) cuando no están los términos x y y simultáneamente y 2) cuando están simultáneamente.

1. Cuando no está el término xy

Se tendrá en cuenta dos casos particulares: 1) cuando no están simultáneamente los términos x y y y 2) cuando si están y además está el coeficiente f . Los casos anteriores se pueden ver como cuando la parábola no está trasladada y cuando si está trasladada. También se muestran los casos cuando la directriz es paralela al eje x o al eje y .

1° Caso: cuando la parábola no está trasladada

En el A.17 se muestra el proceso que se realiza para determinar la ecuación canónica a partir de la ecuación general, teniendo en cuenta que en la sección 2.3.2.1 se mostró la ecuación general de las parábolas que no están trasladadas. En la Tabla 2-10 se muestran las coordenadas del foco y el vértice y las ecuaciones de la directriz y el eje de simetría

para cada situación, acá se presenta el coeficiente p el cual se determina a partir de los coeficientes de la ecuación general.

	Foco	Vértice	Directriz	Eje de simetría
Paralela al eje x	$(0, p)$	$(0, 0)$	$y = -p$	$x = 0$
Paralela al eje y	$(p, 0)$	$(0, 0)$	$x = -p$	$y = 0$

Tabla 2-10.: Partes de las parábolas no trasladadas

Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba o hacia la derecha, si $p < 0$ abre hacia abajo o hacia la izquierda.

2° Caso: cuando la parábola está trasladada

En la sección 2.3.2.1 se mostró la ecuación general de las parábolas que están trasladadas y en el anexo A.17 se muestra el proceso que se realizó para determinar las ecuaciones canónicas, que coinciden con las presentadas en la Tabla 2-2 pero que varían en los coeficientes. En este anexo se tiene en cuenta que se tiene que trasladar los ejes coordenados h unidades en el eje x y k unidades en el eje y . Las coordenadas del foco y el vértice y las ecuaciones de la directriz y el eje de simetría se deducen de la ecuación canónica y se muestran en la Tabla 2-11.

	Foco	Vértice	Directriz	Eje de simetría
Paralela a x	$(h, k + p)$	(h, k)	$y = k - p$	$x = h$
Paralela a y	$(h + p, k)$	(h, k)	$x = h - p$	$y = k$

Tabla 2-11.: Partes de las parábolas trasladadas

Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba o hacia la derecha, si $p < 0$ abre hacia abajo o hacia la izquierda. Tengase en cuenta que si h y k son 0 la parábola no está trasladada.

2. Cuando está el término xy

En la sección 2.3.2.1 se mostró la ecuación general de las parábolas que están rotadas y/o trasladadas y en el anexo A.18 se muestra el proceso que se realizó para determinar las ecuaciones canónicas con sus respectivas sustituciones, que coinciden con las presentadas en la Tabla 2-3. En este anexo se muestra cómo determinar el ángulo θ , a partir de los coeficientes de la ecuación, para que al rotar los ejes coordenados lleguen a ser alguno paralelo a la directriz. Ahora usando las ecuaciones canónicas mostradas en el anexo

A.18, que coinciden con las que se presentan en la tabla 2-3 pero que varían con los coeficientes, se pueden encontrar las ecuaciones de las partes de la parábola teniendo en cuenta que estas estarán dadas en términos de los ejes primados. Para determinar las ecuaciones en el sistema original se hacen las sustituciones de los coeficientes primados. En la Tabla 2-12 se muestra la forma general que tienen las partes de la parábola.

Si $\theta > 0$ entonces la directriz es paralela al eje x'	
Vértice	$(h' \cos \theta - k' \sin \theta, h' \sin \theta + k' \cos \theta)$
Foco	$(h' \cos \theta - (k' + p') \sin \theta, h' \sin \theta + (k' + p') \cos \theta)$
Directriz	$y = x \tan(\theta) + \frac{k' - p'}{\cos \theta}$
Eje de simetría	$y = -x \cot(\theta) + \frac{h'}{\sin \theta}$
Si $\theta < 0$ entonces la directriz es paralela al eje y'	
Vértice	$(h' \cos \theta - k' \sin \theta, h' \sin \theta + k' \cos \theta)$
Foco	$((h' + p') \cos \theta - k' \sin \theta, (h' + p') \sin \theta + k' \cos \theta)$
Directriz	$y = -x \cot \theta + \frac{h' - p'}{\sin \theta}$
Eje de simetría	$y = x \tan \theta + \frac{k'}{\cos \theta}$

Tabla 2-12.: Ecuaciones generales de las partes de la parábola.

Hay que tener en cuenta que se está trabajando en el sistema rotado y la respuesta está dada en términos de coeficientes primados luego, se tiene que hacer las respectivas sustituciones de esos coeficientes.

Para comprender de mejor manera cómo se hallan las coordenadas del foco y el vértice y las ecuaciones de la directriz y el eje de simetría de una parábola, en el A.19 se presenta un ejemplo en el cual se dan los pasos que se tienen que seguir para encontrar las partes de una parábola teniendo en cuenta el desarrollo presentado en esta sección.

2.3.3.2. Elipse

En general la ecuación de una elipse tiene la siguiente estructura

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

con las siguientes condiciones:

1. $b^2 - 4ac > 0$
2. $ac \geq 0$

3. a y c diferentes de 0 simultáneamente, además, si a ó c son 0 necesariamente $b = 0$
4. Si $b = 0$ entonces a y c tienen que ser diferentes de 0.
5. Si a y c son menores que 0 entonces f tiene que ser mayor que 0. Si a y c son mayores que 0 entonces f tiene que ser menor que 0

Análogo al desarrollo de la parábola se mostrará como encontrar las coordenadas de los focos, los vértices y el centro y las ecuaciones de las directrices y el eje de simetría a partir de los coeficientes de la ecuación cuadrática. Se tomarán dos casos particulares: cuando no están los términos xy y cuando si está. Y dos casos particulares: cuando no están los coeficientes x y y y cuando si están.

1. Cuando no está el término xy

Se tendrá en cuenta dos casos particulares: 1) cuando no están los términos x y y y 2) cuando si están. Los casos anteriores se pueden ver como cuando la elipse no está trasladada y cuando si está trasladada. También se muestran los casos cuando las directrices son paralelas al eje x o al eje y .

1° Caso: si el centro está en el origen

En el anexo A.20 se muestra el proceso que se realiza para determinar la ecuación canónica a partir de la ecuación general, teniendo en cuenta que en la sección 2.3.2.2 se mostró la ecuación general de las elipses que no están trasladadas. En la Tabla 2-13 se muestran las coordenadas de los focos, los vértices y el centro y las ecuaciones de las directrices y el eje de simetría para cada situación, acá se presenta los coeficientes a' y b' los cuales se determinan a partir de los coeficientes de la ecuación general.

	Si $a' > b'$, paralelas a y		Si $a' < b'$, paralelas a x	
Focos	$(c', 0)$	$(-c', 0)$	$(0, c')$	$(0, -c')$
Vértices	$(\sqrt{a'}, 0)$	$(-\sqrt{a'}, 0)$	$(0, \sqrt{b'})$	$(0, -\sqrt{b'})$
Directrices	$x = \frac{a'}{b'}$	$x = -\frac{a'}{b'}$	$y = \frac{b'}{c'}$	$y = -\frac{b'}{c'}$
Eje de simetría	$x = 0$		$y = 0$	

Tabla 2-13.: Partes de la elipse cuando el centro está en el origen

Surge un nuevo coeficiente c' que cuando las directrices sean paralelas al eje y será $\sqrt{a' - b'}$ y cuando sean paralelas al eje x será $\sqrt{b' - a'}$.

2° Caso: si el centro no está en el origen

En la sección 2.3.2.2 se mostró la ecuación general de las elipses que están trasladadas y en el anexo A.21 se muestra el proceso que se realizó para determinar las ecuaciones canónicas, que coinciden con las presentadas en la Tabla 2-5 pero que varían en los coeficientes. En este anexo se tiene en cuenta que se tiene que trasladar los ejes coordenados h unidades en el eje x y k unidades en el eje y . Las coordenadas de los focos, vértices y el centro y las ecuaciones de las directrices y el eje de simetría se deducen de la ecuación canónica y se muestran en la Tabla 2-14.

	Si $a' > b'$, paralelas a y		Si $a' < b'$, paralelas a x	
Focos	$(h + c', k)$	$(h - c', k)$	$(h, k + c')$	$(h, k - c')$
Vértices	$(h + \sqrt{a'}, k)$	$(h - \sqrt{a'}, k)$	$(h, k + \sqrt{b'})$	$(h, k - \sqrt{b'})$
Centro	(h, k)		(h, k)	
Directrices	$x = \frac{a'}{c'} + h$	$x = -\frac{a'}{c'} + h$	$y = \frac{b'}{c'} - k$	$y = -\frac{b'}{c'} - k$
Eje de simetría	$x = k$		$y = h$	

Tabla 2-14.: Partes de la elipse cuando el centro no está en el origen

De la misma manera el coeficiente c' será $\sqrt{a' - b'}$ cuando las directrices son paralelas al eje y y cuando sean paralelas al eje x será $\sqrt{b' - a'}$.

Cuando está el término xy

En la sección 2.3.2.2 se mostró la ecuación general de las elipses que están rotadas y/o trasladadas y en el anexo A.22 se muestra el proceso que se realizó para determinar las ecuaciones canónicas con sus respectivas sustituciones, que coinciden con las presentadas en la Tabla 2-6. En este anexo se muestra cómo determinar un ángulo θ , a partir de los coeficientes de la ecuación, para que al rotar los ejes coordenados lleguen a ser alguno paralelo a las directrices. Ahora usando las ecuaciones canónicas mostradas en el anexo A.22, que coinciden con las que se presentan en la tabla 2-6 pero que varían con los coeficientes, se pueden encontrar las ecuaciones de las partes de la parábola teniendo en cuenta que estas estarán dadas en términos de los ejes primados. Para determinar las ecuaciones en el sistema original se hacen las sustituciones de los coeficientes primados. En la Tabla 2-15 se muestra la forma general que tienen las partes de la parábola.

Si $\theta < 0$ entonces las directrices son paralelas al eje y'	
Centro	$(h' \cos \theta - k' \operatorname{sen} \theta, h' \operatorname{sen} \theta + k' \cos \theta)$
Vértices	$((h' \pm \sqrt{a''}) \cos \theta - k' \operatorname{sen} \theta, (h' \pm \sqrt{a''}) \operatorname{sen} \theta + k' \cos \theta)$
Focos	$((h' \pm c'') \cos \theta - k' \operatorname{sen} \theta, ((h' \pm c'') \operatorname{sen} \theta + k' \cos \theta)$
Directrices	$y = -x \cot \theta + \frac{h'c'' \pm a''}{c'' \cos \theta}$
Eje de simetría	$y = x \tan \theta + \frac{k'}{\cos \theta}$
Si $\theta > 0$ entonces la directriz es paralela al eje x'	
Centro	$(h' \cos \theta - k' \operatorname{sen} \theta, h' \operatorname{sen} \theta + k' \cos \theta)$
Vértices	$((h' \pm \sqrt{a''}) \cos \theta - k' \operatorname{sen} \theta, (h' \pm \sqrt{a''}) \operatorname{sen} \theta + k' \cos \theta)$
Focos	$(h' \cos \theta - (k' \pm c'') \operatorname{sen} \theta, h' \operatorname{sen} \theta + (k' \pm c'') \cos \theta)$
Directrices	$y = x \tan \theta - \frac{k'c'' \pm b''}{\cos \theta}$
Eje de simetría	$y = -x \cot(\theta) + \frac{h'}{\operatorname{sen} \theta}$

Tabla 2-15.: Ecuaciones generales de las partes de la elipse

Hay que tener en cuenta que se está trabajando en el sistema rotado y la respuesta está dada en términos de coeficientes primados luego, se tiene que hacer las respectivas sustituciones de esos coeficientes.

Para comprender de mejor manera cómo se hallan las coordenadas de los focos, los vértices y el centro y las ecuaciones de las directrices y el eje de simetría de una elipse, en A.27 se presenta un ejemplo en el cual se dan los pasos que se tienen que seguir para encontrar las partes de una elipse teniendo en cuenta el desarrollo presentado en esta sección.

2.3.3.3. Hipérbola

En general la ecuación de una elipse tiene la siguiente estructura

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

con las siguientes condiciones:

1. $b^2 - 4ac < 0$
2. Si a y c son 0 simultáneamente, b y f necesariamente serán diferentes de 0
3. Si $b = 0$ entonces a, c y f tienen que ser diferentes de 0.

Análogo al desarrollo de las cónicas anteriores se mostrará como encontrar las coordenadas de los focos, los vértices y el centro y las ecuaciones de las directrices, el eje de

simetría y las asíntotas a partir de los coeficientes de la ecuación cuadrática. Se tomarán dos casos particulares: cuando no están los términos xy y cuando si está. Y dos casos particulares: cuando no están los coeficientes x y y y cuando si están.

1. Cuando no está el término xy

Se tendrá en cuenta dos casos particulares: 1) cuando no están los términos x y y y 2) cuando si están. Los casos anteriores se pueden ver como cuando la hipérbola no está trasladada y cuando si está trasladada. También se muestran los casos cuando las directrices son paralelas al eje x o al eje y .

1° Caso: si el centro está en el origen

En el anexo A.24 se muestra el proceso que se realiza para determinar la ecuación canónica a partir de la ecuación general, teniendo en cuenta que en la sección 2.3.2.3 se mostró la ecuación general de las hipérbolas que no están trasladadas. En la Tabla 2-16 se muestran las coordenadas de los focos, los vértices y el centro y las ecuaciones de las directrices, el eje de simetría y las asíntotas para cada situación, acá se presenta los coeficientes a' y b' los cuales se determinan a partir de los coeficientes de la ecuación general.

	Si $a' > b'$, directrices paralelas a y		Si $a' < b'$, directrices paralelas a x	
Centro	(0,0)		(0,0)	
Focos	$(c', 0)$	$(-c', 0)$	$(0, c')$	$(0, -c')$
Vértices	$(\sqrt{a'}, 0)$	$(-\sqrt{a'}, 0)$	$(0, \sqrt{b'})$	$(0, -\sqrt{b'})$
Directrices	$x = \frac{a'}{b'}$	$x = -\frac{a'}{b'}$	$y = \frac{b'}{c'}$	$y = -\frac{b'}{c'}$
Asíntotas	$y = \pm \sqrt{-\frac{a'}{b'}}x$		$y = \pm \sqrt{-\frac{b'}{a'}}x$	
Eje de simetría	$x = 0$		$y = 0$	

Tabla 2-16.: Partes de la hipérbola cuando el centro está en el origen

Surge un nuevo coeficiente c' que cuando las directrices sean paralelas al eje x será $\sqrt{a' - b'}$ y cuando sean paralelas al eje y será $\sqrt{b' - a'}$.

2° Caso: si el centro no está en el origen

En la sección 2.3.2.3 se mostró la ecuación general de las hipérbolas que están trasladadas y en el anexo A.25 se muestra el proceso que se realizó para determinar las ecuaciones canónicas, que coinciden con las presentadas en la Tabla 2-8 pero que varían en los coeficientes. En este anexo se tiene en cuenta que se tiene que trasladar los ejes coordenados

h unidades en el eje x y k unidades en el eje y . Las coordenadas de los focos, vértices y el centro y las ecuaciones de las directrices, el eje de simetría y las asíntotas se deducen de la ecuación canónica y se muestran en la Tabla 2-17.

	Si $a' > b'$, directrices paralelas a y		Si $a' < b'$, directrices paralelas a x	
Centro	(h, k)		(h, k)	
Focos	$(h + c', k)$	$(h - c', k)$	$(h, k + c')$	$(h, k - c')$
Vértices	$(h + \sqrt{a'}, k)$	$(h - \sqrt{a'}, k)$	$(h, k + \sqrt{b'})$	$(h, k - \sqrt{b'})$
Directrices	$x = \frac{a'}{c'} + h$	$x = -\frac{a'}{c'} + h$	$y = \frac{b'}{c'} - k$	$y = -\frac{b'}{c'} - k$
Asíntotas	$y = \pm \sqrt{-\frac{b'}{a'}}(x - h) + k$		$y = \pm \sqrt{-\frac{a'}{b'}}(x - h) + k$	
Eje de simetría	$x = k$		$y = h$	

Tabla 2-17.: Partes de la hipérbola cuando el centro no está en el origen

Análogo al caso anterior, el coeficiente c' será $\sqrt{a' - b'}$ cuando las directrices sean paralelas al eje x y será $\sqrt{a' + b'}$ cuando sean paralelas al eje y .

Cuando está el término xy

En la sección 2.3.2.3 se mostró la ecuación general de las hipérbolas que están rotadas y/o trasladadas y en el anexo A.26 se muestra el proceso que se realizó para determinar las ecuaciones canónicas con sus respectivas sustituciones, que coinciden con las presentadas en la Tabla 2-9. En este anexo se muestra cómo determinar un ángulo θ , a partir de los coeficientes de la ecuación, para que al rotar los ejes coordenados lleguen a ser alguno paralelo a las directrices. Ahora usando las ecuaciones canónicas mostradas en el ANEXO A.26, que coinciden con las que se presentan en la tabla 2-9 pero que varían con los coeficientes, se pueden encontrar las ecuaciones de las partes de la hipérbola teniendo en cuenta que estas estarán dadas en términos de los ejes primados. Para determinar las ecuaciones en el sistema original se hacen las sustituciones de los coeficientes primados. En la Tabla 2-18 se muestra la forma general que tienen las partes de la hipérbola.

Si $\theta < 0$ entonces las directrices son paralelas al eje y'	
Centro	$(h' \cos \theta - k' \operatorname{sen} \theta, h' \operatorname{sen} \theta + k' \cos \theta)$
Vértices	$((h' \pm \sqrt{a''}) \cos \theta - k' \operatorname{sen} \theta, (h' \pm \sqrt{a''}) \operatorname{sen} \theta + k' \cos \theta)$
Focos	$((h' \pm c'') \cos \theta - k' \operatorname{sen} \theta, ((h' \pm c'') \operatorname{sen} \theta + k' \cos \theta)$
Directrices	$y = -x \cot \theta + \frac{h'c'' \pm a''}{c'' \cos \theta}$
Asíntotas	$y = -\frac{\pm \sqrt{-b''} \cos \theta \pm \sqrt{a''} \operatorname{sen} \theta}{\pm \sqrt{-b''} \operatorname{sen} \theta \pm \sqrt{a''} \cos \theta} x$
Eje de simetría	$y = x \tan \theta + \frac{k'}{\cos \theta}$
Si $\theta > 0$ entonces la directriz es paralela al eje x'	
Centro	$(h' \cos \theta - k' \operatorname{sen} \theta, h' \operatorname{sen} \theta + k' \cos \theta)$
Vértices	$((h' \pm \sqrt{a''}) \cos \theta - k' \operatorname{sen} \theta, (h' \pm \sqrt{a''}) \operatorname{sen} \theta + k' \cos \theta)$
Focos	$(h' \cos \theta - (k' \pm c'') \operatorname{sen} \theta, h' \operatorname{sen} \theta + (k' \pm c'') \cos \theta)$
Directrices	$y = x \tan \theta - \frac{k'c'' \pm b''}{\cos \theta}$
Asíntotas	$y = -\frac{\pm \sqrt{-a''} \cos \theta \pm \sqrt{b''} \operatorname{sen} \theta}{\pm \sqrt{-a''} \operatorname{sen} \theta \pm \sqrt{b''} \cos \theta} x$
Eje de simetría	$y = -x \cot(\theta) + \frac{h'}{\operatorname{sen} \theta}$

Tabla 2-18.: Ecuaciones generales de las partes de la hipérbola

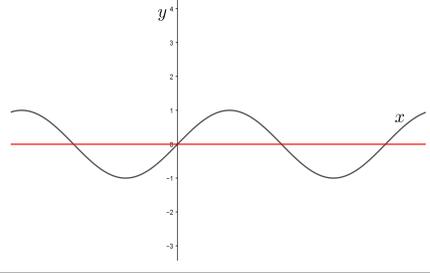
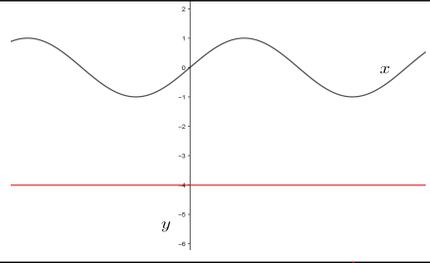
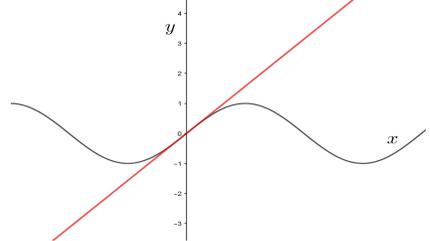
Hay que tener en cuenta que se está trabajando en el sistema rotado y la respuesta está dada en términos de coeficientes primados luego, se tiene que hacer las respectivas sustituciones de esos coeficientes.

Para comprender de mejor manera cómo se hallan las coordenadas de los focos, los vértices y el centro y las ecuaciones de las directrices, el eje de simetría y las asíntotas de una hipérbola, en el A.27 se presenta un ejemplo en el cual se dan los pasos que se tienen que seguir para encontrar las partes de una hipérbola teniendo en cuenta el desarrollo presentado en esta sección.

3. Ecuaciones que representan líneas ubicadas en el *Sistema Seno*

En este capítulo se mostrará cómo se ve algebraicamente una línea que está en el *Sistema Seno* en el sistema cartesiano.

En la tabla 3-1 se muestra en la primera columna la ecuación a representarse en el *Sistema Seno*, en la segunda columna está la representación de su solución (en negro) y en rojo está la representación de la ecuación que le corresponde en el sistema cartesiano.

Ecuación <i>Sistema Seno</i>	Representación <i>Sistema Seno</i>	Ecuación Cartesiana
$\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}) = 0$		$y = 0$
$\bar{y} + 8 + \text{sen}(\bar{x}) = 0$		$y + 4 = 0$
$\bar{x} - \bar{y} + \text{sen}(\bar{x}) = 0$		$x - y = 0$

Sigue en la siguiente página.

Ecuación Sistema Seno	Representación Sistema Seno	Ecuación Cartesiana
$\bar{x} + 4\bar{y} + 10 + 4\text{sen}(\bar{x}) = 0$		$x + 4y + 5 = 0$
$3\bar{x} + 5\bar{y} - 32 + 5\text{sen}(\bar{x}) = 0$		$3x + 5y - 16 = 0$

Tabla 3-1.: Líneas en el *Sistema Seno*

Es decir que las rectas del sistema cartesiano son líneas en el *Sistema Seno* y se presentan algebraicamente de la siguiente forma:

$$a\bar{x} + b\bar{y} + 2c + b\text{sen}(\bar{x}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ax + by + c = 0$$

Cabe aclarar que siempre que se use \bar{x} y \bar{y} se está trabajando en el *Sistema Seno* y cuando se use x y y será en el sistema cartesiano. A continuación se demostrará lo dicho anteriormente.

Sea cualquier línea α con ecuación $a\bar{x} + b\bar{y} + 2c + b\text{sen}(\bar{x}) = 0$, los puntos $(x, y)_S$ sobre α tendrán la siguiente forma

$$\left(\bar{x}, -\frac{a}{b}\bar{x} - \frac{2c}{b} - \text{sen}(\bar{x}) \right)_S$$

Usando el cambio de coordenadas se tiene que estos puntos en el sistema cartesiano tienen coordenadas

$$\left(\frac{\bar{x}}{2}, \frac{-\frac{a}{b}\bar{x} - \frac{2c}{b} - \text{sen}(\bar{x}) + \text{sen}(\bar{x})}{2} \right)_C \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\bar{x}}{2}, -\frac{a}{2b}\bar{x} - \frac{c}{b} \right)_C$$

luego las ecuaciones para x y y están dadas por:

$$x = \frac{\bar{x}}{2}$$

$$y = -\frac{a}{2b}\bar{x} - \frac{c}{b}$$

por tanto, se puede determinar la ecuación $ax + by + c = 0$ en el plano cartesiano la cual la satisfacen los puntos sobre la línea en el *Sistema Seno*.

4. Soluciones a ecuaciones lineales en el *Sistema Seno*

Antes de entrar a estudiar los diferentes objetos geométricos en este sistema, se demostrará que el *Sistema Seno* efectivamente es un sistema coordenado. Para ello se enunciará la siguiente definición:

- Un conjunto de parejas ordenadas \mathbf{A} es un sistema coordenado en un plano α si y solo si existe una función f biyectiva de \mathbf{A} en α .

Una función es biyectiva si y solo si es inyectiva y sobreyectiva, es decir, cumple que:

- Para todo x, y, z, w en \mathbb{R} , si $f(x, y) = f(z, w)$ entonces $(x, y) = (z, w)$
- Sea un punto P en α entonces existen x, y en \mathbb{R} tal que $P = f(x, y)$

Por último, se definirá la función f como:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbf{A} &\longrightarrow \alpha \\ (x, y) &\longrightarrow P \end{aligned}$$

Se tendrá en cuenta el sistema coordenado mencionado anteriormente que está conformado por la curva Seno y por una recta vertical y la manera de ubicar un punto con coordenadas (x_0, y_0) luego, para todo x en \mathbb{R} existe un único punto Q de referencia sobre la curva Seno y para todo y en \mathbb{R} existe un único punto R de referencia sobre la recta vertical. Ahora, se dirá que el punto medio S entre Q y R tiene coordenadas (x, y) , que es lo mismo que $Q = f(x, y)$, y por definición de punto medio S es único. A continuación, se demostrará que la función f es biyectiva.

Se demostrará que f es inyectiva: Sean x, y, z, w en \mathbb{R} , (x, y) y (z, w) en \mathbf{A} y $f(x, y) = f(z, w)$. Como f es una función bien definida se puede decir que $f(x, y) = P$ y $f(z, w) = Q$ con P y Q puntos en α luego, existen A y B puntos de referencia tal que A está sobre la curva Seno y B sobre la recta vertical y P es punto medio entre A y B , por transitividad se tiene

que Q también es punto medio de A y B , por tanto, las coordenadas de Q son (x, y) y por la unicidad de A y B se tiene que $x = z$ y $y = w$ es decir que $(x, y) = (z, w)$ y $Q = P$ luego es único y en conclusión, f es inyectiva.

Ahora se demostrará que f es sobreyectiva: Sea un punto P en α . Como el *Sistema Seno* está sobre el sistema cartesiano, el punto P tendrá coordenadas (m, n) en el sistema cartesiano, luego en el *Sistema seno* el punto P tendrá coordenadas $(2m, 2n - \text{sen}(2m))$; como cada punto sobre el plano tienen una coordenada en el plano cartesiano entonces, tiene una coordenada en el *Sistema Seno*, por ende, a cada punto P se le puede asignar una coordenada (x, y) en el *Sistema Seno* o lo que es equivalente $P = f(x, y)$, en conclusión, la f es sobreyectiva.

Luego queda demostrado que f es una función biyectiva de \mathbf{A} en α y por definición el *Sistema Seno* es un sistema coordenado. ■

4.1. Ejes y Semi-ejes

En esta sección se definirán los ejes en el *Sistema Seno* ya que anteriormente solo se ha mencionado cómo se ubican los puntos en este sistema. Se tendrá en cuenta las siguientes definiciones para los ejes.

- Se llamará eje x al conjunto de puntos tales que su coordenada sea de la forma $(x, 0)$.
- Se llamará eje y al conjunto de puntos tales que su coordenada sea de la forma $(0, y)$.

El sistema cartesiano tiene la particularidad que la recta vertical que se utiliza para ubicar los puntos coincide con el eje y y la recta horizontal coincide con el eje x pero, en este sistema la recta vertical coincide con el eje y pero no ocurre lo mismo con el eje x , más adelante se mostrará el por qué sucede esto. Por ahora se definirá la recta vertical como **Semi-eje \bar{y}** (que también es el eje \bar{y}) y la curva Seno como **Semi-eje \bar{x}** . De ahora en adelante se tomarán los ejes como \bar{y} y \bar{x} en el *Sistema Seno* para diferenciarlos de los ejes x y y del sistema cartesiano. En la Figura 4-1 se muestran los ejes y los semi-ejes.

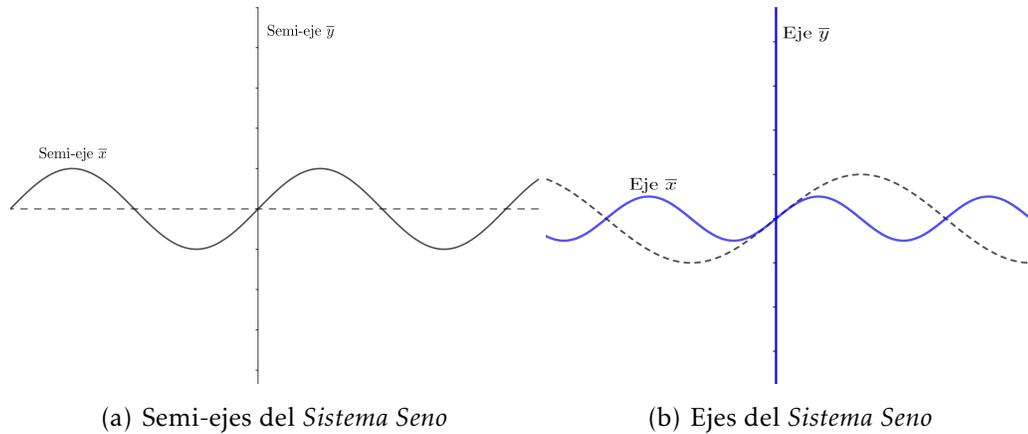


Figura 4-1.: Ejes y semi-ejes

4.2. Ubicación de puntos

Para ubicar cualquier punto C con coordenadas $(x, y)_S$ se tomará el punto medio entre A y B con coordenadas $(0, y)_C$ y $(x, \text{sen}(x))_C$ respectivamente (Ver Figura 4-2). Nótese que se asignaron subíndices a cada punto para distinguir en que sistema coordenado se está trabajando; los puntos que tengan coordenadas con subíndice S estarán en el *Sistema Seno*, si tienen subíndice C estará en el sistema cartesiano. En general se usará \bar{x} y \bar{y} para las ecuaciones y los ejes o semi-ejes, y el subíndice S para los puntos.

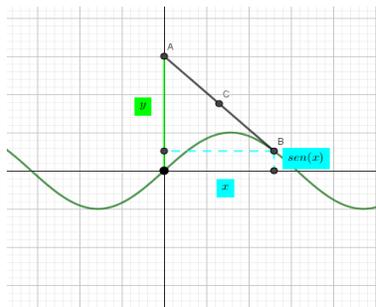


Figura 4-2.: Ubicación de puntos en el *Sistema Seno*

4.3. Cambio de coordenadas entre el *Sistema Seno* y el sistema cartesiano

Para caracterizar el cambio de coordenadas del *Sistema Seno* al sistema cartesiano se dirá que:

- * Dado un punto $(x, y)_S$ en el *Sistema Seno* sus coordenadas en el sistema cartesiano serán $\left(\frac{x}{2}, \frac{y + \text{sen}(x)}{2}\right)_C$.
- * Dado un punto $(x, y)_C$ en el sistema cartesiano sus coordenadas en el *Sistema Seno* serán $(2x, 2y - \text{Sen}(2x))_S$.

En la Figura 4-3 parte (a) se observa el cambio de coordenadas del *Sistema Seno* al cartesiano. En la parte (b) se puede apreciar el cambio de coordenadas del sistema cartesiano al *Sistema Seno*.

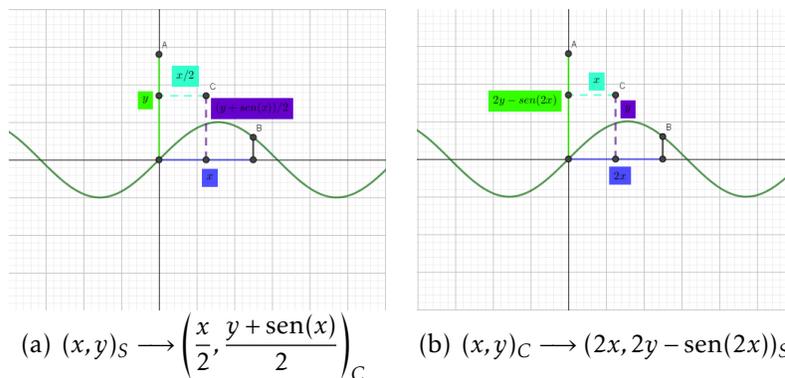


Figura 4-3.: Cambio de coordenadas entre el *Sistema Seno* y el cartesiano

Ejemplo: Se ubicarán los siguientes puntos: $P_1(1, 2)_S$, $P_2(4, -5)_S$ y $P_3(-2, -3)_S$.

Usando el primer cambio de coordenadas para ubicar los puntos se reemplazan de la siguiente manera:

P_1 tendrá coordenadas $\left(\frac{1}{2}, \frac{2 + \text{sen}(1)}{2}\right)_C$, P_2 tendrá coordenadas $\left(2, \frac{-5 + \text{sen}(4)}{2}\right)_C$,
 P_3 tendrá coordenadas $\left(-1, \frac{-3 + \text{sen}(-2)}{2}\right)_C$.

En la Figura 4-4 se observa el gráfico de cada punto con las coordenadas en el sistema

cartesiano; para el eje x el color azul claro y para el eje y color morado. Y en el *Sistema Seno*; para el semi-eje \bar{x} el color azul y para el semi-eje \bar{y} el color verde.

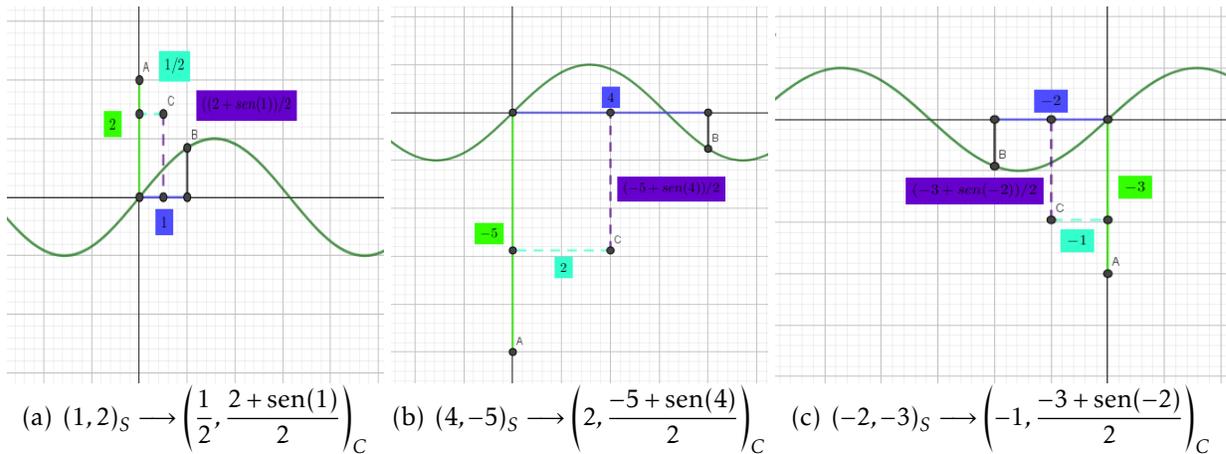


Figura 4-4.: Ejemplos de cambio de coordenadas entre el *Sistema Seno* y el cartesiano

Nota: Téngase en cuenta que la manera de ubicar los puntos en el semi-eje \bar{x} no verifica que, por ejemplo, la distancia de $(0, 0)_S$ a $(a, 0)_S$ sea a en el *Sistema Seno*.

4.4. Gráfica de la ecuación $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ y cortes con los ejes

En lo que sigue se presentarán las representaciones gráficas en el *Sistema Seno* de los conjuntos solución a las ecuaciones de la forma $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ cuando varían las constantes a, b y c . Se realizará a partir de casos en los cuales se le darán valores a las constantes a, b, c y se construirán algunas gráficas de los conjuntos solución los cuales tendrán el nombre de **s-rectas**. Paralelamente se estudiarán los cortes con los ejes \bar{x} y \bar{y} se realizará una fórmula con la cual se pueda encontrar el corte de cualquier recta con los ejes usando los coeficientes a, b y c .

Ejemplo 1: Si $a, b, c = 0$.

En este caso se tiene la ecuación $0\bar{x} + 0\bar{y} + 0 = 0$ y los puntos que la satisfacen serán todos los posibles puntos $(x, y)_S$ con $x, y \in \mathbb{R}$, es decir, todos los puntos del plano.

Ejemplo 2: Si $a, b = 0$ y $c \neq 0$.

Dándole a c valores diferentes de 0 se puede concluir que para cualquiera de estos la

ecuación sería un absurdo ya que la ecuación queda de la forma $c = 0$ y se contradice con la hipótesis.

Ejemplo 3: Si $b = 0$ y $a, c \neq 0$.

En este caso se tiene que la s-recta obtenida por la ecuación $a\bar{x} + c = 0$ no tiene cortes con el eje \bar{y} ó coincide en todos sus puntos con el eje \bar{y} y el eje \bar{x} se da en el punto $(-\frac{c}{a}, 0)_S$ o en el sistema rectangular $(-\frac{c}{2a}, 0)_C$. En la Figura 4-5 se muestra una ilustración de cómo se ven, en general, las gráficas solución a esta ecuación.

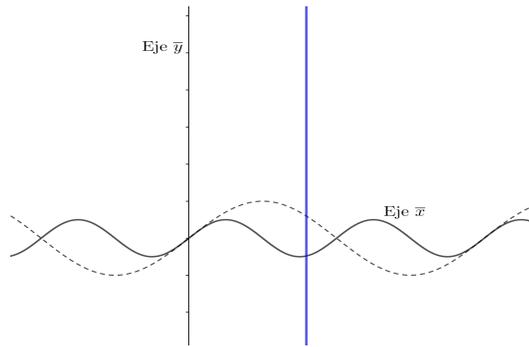


Figura 4-5.: Representación al conjunto solución de $a\bar{x} + c = 0$

1° **Caso:** Si $a = 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

El conjunto solución de la ecuación $\bar{y} = 0$ (eje \bar{x}), tomando a $c = 0$, se puede representar en el *Sistema Seno* como el conjunto de puntos que se caen en la curva morada. Si $c = -2$ el conjunto de puntos solución a la ecuación $\bar{y} - 2 = 0$ se representan en la curva roja, y si $c = 3$ entonces la representación gráfica de $\bar{y} + 3 = 0$ en el *Sistema Seno* se ve en la curva naranja. Estas gráficas se presentan en la parte (a) de la Figura 4-6, en la parte (b) se muestran las gráficas de las siguientes ecuaciones:

$$-\frac{1}{2}\bar{y} + 2 = 0 \text{ curva rosa, } \quad \frac{3}{2}\bar{y} - 3 = 0 \text{ curva azul} \quad \text{y} \quad -3\bar{y} - 15 = 0 \text{ curva salmón.}$$

Si se observa detenidamente los cortes con el eje \bar{y} de las gráficas que se presentan en la parte (a), se tiene que el corte de la recta $\bar{y} = 0$ es en el punto $(0, 0)_S$, el de la recta $\bar{y} - 2 = 0$ es en $(0, 2)_S$, por último, el corte de la recta $\bar{y} + 3 = 0$ es en $(0, 3)_S$. Haciendo el respectivo cambio de coordenadas se dice que $\bar{y} = 0$ en el sistema cartesiano tiene corte en el punto $\left(\frac{0}{2}, \frac{0 + \text{sen}(0)}{2}\right)_C$, resolviendo, $(0, 0)_C$; haciendo el mismo procedimiento con los demás puntos, las rectas $\bar{y} - 2 = 0$ y $\bar{y} + 3 = 0$ tienen corte en $(0, 1)_C$ y en $(0, -1,5)_C$ respectivamente.

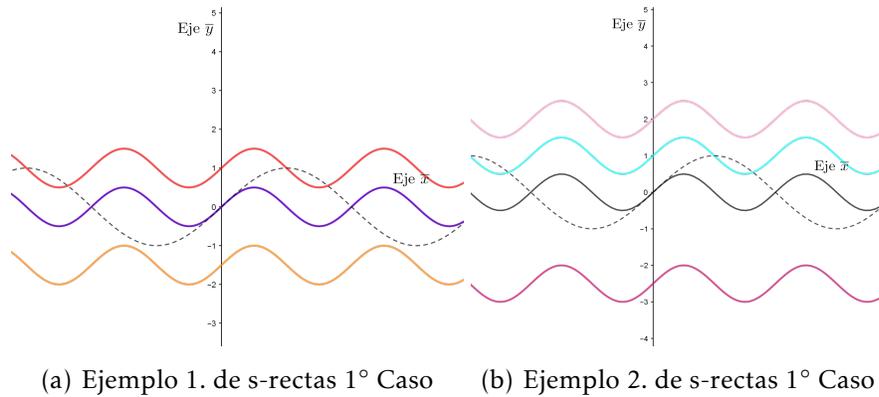


Figura 4-6.: Ejemplos de s-rectas 1° Caso

El corte de cada recta presentada en la parte (b) es en: $(0, 2)_S$, $(0, 1)_S$ y $(0, -5)_S$ respectivamente; estos puntos se determinan despejando \bar{y} de cada ecuación y haciendo la sustitución $\bar{x} = 0$. Los anteriores puntos tienen coordenadas en el sistema cartesiano $(0, 4)_C$, $(0, 2)_C$ y $(0, -5)_C$.

Analizando los cortes con el eje \bar{x} observa que ninguna s-recta lo corta, exceptuando $\bar{y} = 0$ que, por definición, coincide en todos sus puntos.

Analizando las s-rectas de la parte (a) y de la parte (b) se puede observar que las gráficas tienen la misma forma, esto quiere decir, la misma cantidad de ondulaciones.

En general se puede decir que si se tiene una ecuación de la forma $b\bar{y} + c = 0$ su corte con el eje \bar{y} es en $\left(0, -\frac{c}{b}\right)_S$ y ninguna se corta con el eje \bar{x} exceptuando las que son de la forma $b\bar{y} = 0$ que coincide en todos sus puntos. También se puede ver que las rectas se mueven horizontalmente $-\frac{c}{b}$ unidades. Si $-\frac{c}{b} > 0$ entonces la gráfica se traslada hacia arriba según el eje \bar{y} , si $-\frac{c}{b} < 0$ se traslada hacia abajo.

2° Caso: Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c = 0$

Si se toma a $a = -1$ y $b = 1$ se tiene la ecuación $-\bar{x} + \bar{y} = 0$ y el corte con \bar{y} y el eje \bar{x} de la s-recta será en $(0, 0)_S$, estos se encuentran igualando alguno a 0 y despejando el otro. Otro ejemplo, si $a = -3$ y $b = 1$ se tiene la s-recta con ecuación $-3\bar{x} + \bar{y} = 0$ y su corte con el eje \bar{y} es el punto $(0, 0)_S$ al igual que el corte con el eje \bar{x} . (Ver Figura 4-7)

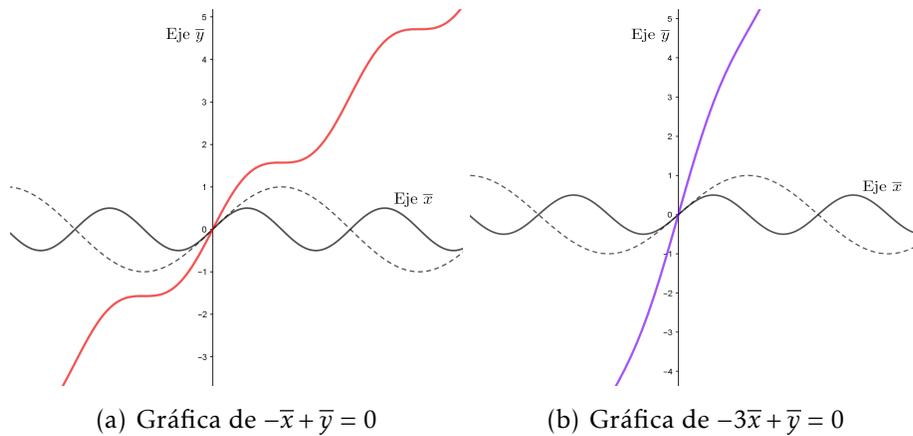


Figura 4-7.: Ejemplos de s-rectas 2° Caso

Tomando a $a = -2$ y $b = 3$ se tiene la ecuación: $-2\bar{x} + 3\bar{y} = 0$ curva azul clara.

Y tomando a $a = -3$ y $b = -7$ se tiene la ecuación: $-3\bar{x} - 7\bar{y} = 0$ curva rosa.

En ambos casos el corte con el eje \bar{y} y con el eje \bar{x} es en el punto $(0,0)_S$. Estas gráficas se muestran en la Figura 4-8.

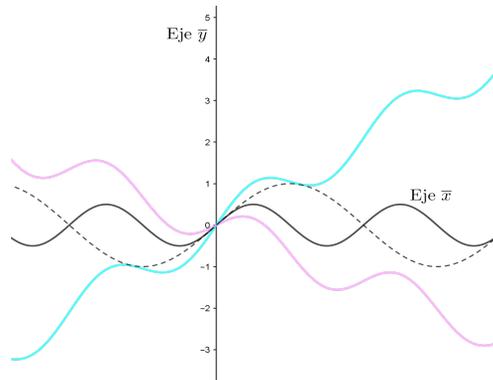


Figura 4-8.: Gráfica de $-2\bar{x} + 3\bar{y} = 0$ y $-3\bar{x} - 7\bar{y} = 0$

En general se puede decir que si se tiene una ecuación de la forma $a\bar{x} + b\bar{y} = 0$ su corte con el eje \bar{y} y el con el eje \bar{x} son en el punto $(0,0)_S$.

3° Caso: Si $a \neq 0, b \neq 0$ y $c \neq 0$

Se iniciará con los valores $a = 1, b = 2$ y $c = 4$, es decir, la ecuación $\bar{x} + 2\bar{y} + 4 = 0$. Su corte con el eje \bar{y} es en el punto $(0, -2)_S$ y con el eje \bar{x} es en $(-4, 0)_S$. En el sistema cartesiano es

en el punto $(0, -1)_C$ y $(-2, 0,38)_C$. Ahora si $a = -1, b = -2$ y $c = 8$ la ecuación de la s-recta es $-\bar{x} - 2\bar{y} + 8 = 0$ y su corte con \bar{y} es en el punto $(0, 4)_S$ que es equivalente a $(0, 2)_C$ y con el eje \bar{x} es en $(8, 0)_S$ que en el plano cartesiano tendrá coordenadas $(4, 0,49)_C$. La representación gráfica de los conjuntos solución se muestran en la Figura 4-9.

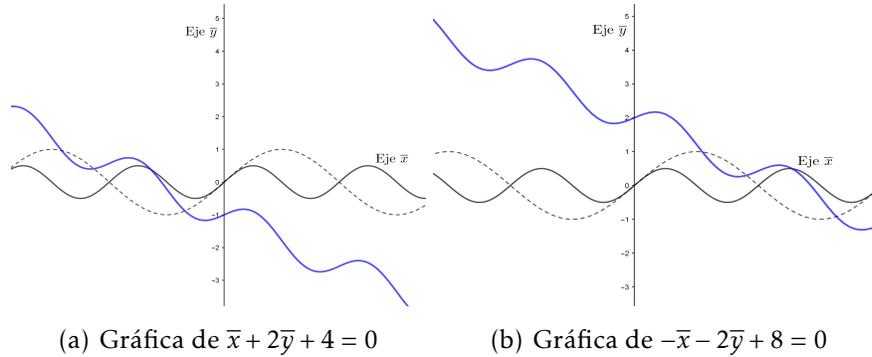


Figura 4-9.: Ejemplos de s-rectas 3° caso

Por último tomando la ecuación: $2\bar{x} - \bar{y} + 4 = 0$ con $a = 2, b = -1, c = 4$.

En su gráfica (Véase Figura 4-10) se observa que el corte con el eje \bar{y} es en el punto $(0, 4)_S$ y con el eje \bar{x} es en $(-2, 0)_S$; que en el plano cartesiano serán los punto $(0, 2)_C$ y $(-1, -0,45)_C$ respectivamente.

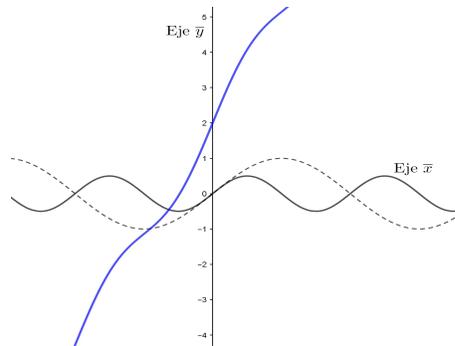


Figura 4-10.: Gráfica de $2\bar{x} - \bar{y} + 4 = 0$

En general si se tiene una ecuación $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ en el *Sistema Seno* con $a, b, c \in \mathbb{R}$ el corte con el eje \bar{y} es en el punto $\left(0, -\frac{c}{b}\right)_S$ y con el eje \bar{x} es en $\left(0, -\frac{c}{a}\right)_S$.

De esta sección se puede concluir que si se tiene la ecuación $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ la intersección de la gráfica con el eje \bar{y} se puede encontrar tomando a $\bar{x} = 0$ y despejando \bar{y} , de manera análoga se encuentra la intersección con el eje \bar{x} . Se pudo observar las transformaciones que tienen las s-rectas según los coeficientes de la ecuación lineal en el *Sistema Seno*. En esta sección solo se analizaron los cortes con los ejes \bar{x} y \bar{y} pero, si observa nuevamente, puede notar que los cortes con el semi-eje \bar{y} coinciden siempre con los del eje \bar{y} pero, en algunos casos hay más de un corte con el semi-eje \bar{x} , esto se analizará más adelante y se explicará el por qué se corta en varios puntos.

Para que el lector pueda explorar este tema en el *Sistema Seno* se crearon applets de apoyo en el software Geogebra, las cuales se describirán y presentarán más adelante. Este applet permite ver la gráfica de cualquier ecuación lineal ingresando los valores de los coeficientes a, b, c . Para ciertas partes del documento se crearon diferentes applets en las cuales el lector puede explorar el tema que se este presentando; estos applets se pueden ver gratuitamente en la página www.geogebra.org, para cada applet se mostrará el link en el cual se puede ingresar. Cabe resaltar que el software Geogebra fue de mucha importancia para la exploración y los resultados que se presentan en este documento.

4.4.1. Applet Ecuación lineal

Este applet cuenta con dos ventanas: la de la derecha (azul claro) en el cual están los botones para ingresar los coeficientes a, b, c y se muestra la ecuación resultante $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$. En la otra ventana se presenta la representación gráfica de la ecuación antes digitada el *Sistema Seno*. Se mostrará un ejemplo del uso del applet.

Link: <https://www.geogebra.org/m/jggssewy>.

Ejemplo: Para mirar la gráfica de la ecuación $4\bar{x} + 9\bar{y} + 5 = 0$ se ingresan los respectivos valores de a, b, c en la ventada del lado derecho y en la otra ventana aparecerá la gráfica que le corresponde a la ecuación en el *Sistema Seno*. (Ver Figura 4-11)

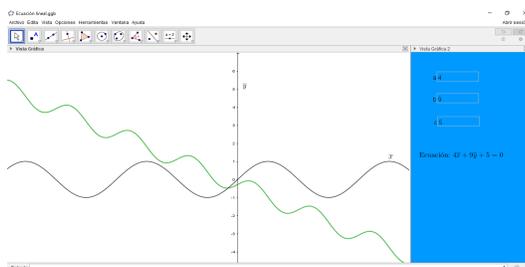


Figura 4-11.: Applet Ecuación lineal

4.5. Cortes con los semi-ejes

Se dedicará una sección al estudio de los cortes con los semi-ejes enfocado particularmente en los cortes con el semi-eje \bar{x} ya que los cortes con el semi-eje \bar{y} son los mismos que lo cortes con el eje \bar{y} . Como se pudo observar en la sección 4.4 los cortes con el semi-eje \bar{x} pueden ser varios dependiendo de la s-recta que se tome. En este caso no se encontraron soluciones generales pero, se encontraron aproximaciones a las soluciones utilizando métodos numéricos. También se construyó un applet en el software Geogebra para encontrar estas aproximaciones.

A continuación se presentará el applet, su funcionamiento y después el sustento teórico con el cual se puede encontrar las aproximaciones.

4.5.1. Applet Cortes con el semi-eje \bar{x}

Esta applet cuenta con dos ventanas: la de la derecha (azul claro) en la cual se encuentran tres botones donde se digitan los coeficientes a, b, c de la ecuación $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$, también se muestra la ecuación resultante y el conjunto de las aproximaciones a los valores de \bar{x} para las cuales la s-recta se interseca con el semi-eje \bar{x} . En la otra ventana se muestra el *Sistema Seno* y la gráfica a la ecuación lineal con los respectivos puntos de corte.

Link: <https://www.geogebra.org/m/jggssewy>

Ejemplo: Se determinará los cortes con el semi-eje \bar{x} y la s-recta l que tiene como ecuación $2\bar{x} + 7\bar{y} + 4 = 0$. Para ello en los botones se digitan los respectivos valores para a, b, c , en este caso serán 2, 7 y 4 respectivamente. Luego, los valores para \bar{x} que satisfacen estar simultáneamente en el eje \bar{x} y la recta l son aproximadamente $\{-4,66, -3,53, -0,62\}$. En la Figura 4-12 se muestra el desarrollo del este ejemplo.

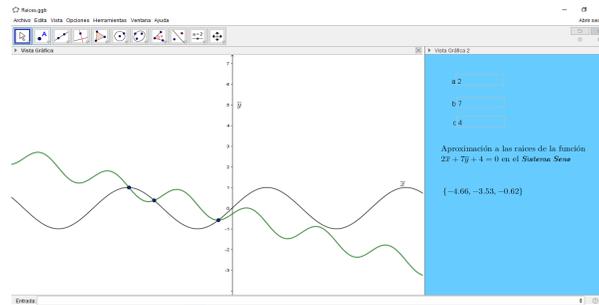


Figura 4-12.: Applet Cortes con el semi-eje \bar{x}

Para justificar este proceso teóricamente lo primero que se tendrá en cuenta será que en *Sistema Seno* el semi-eje \bar{x} no es una s-recta, es decir, su forma algebraica no se puede escribir como $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ por tanto, primero se encontrará la representación algebraica del semi-eje \bar{x} .

Por definición el semi-eje \bar{x} en el sistema rectangular es la función seno que algebraicamente se presenta como $f(x) = \text{sen}(x)$ luego, los puntos que pertenecen a esta función serán de la forma $(x, \text{sen}(x))_C$. Usando el cambio de coordenadas que se presentó en la sección 4.3, estos puntos en el *Sistema Seno* son de la forma:

$$(x, \text{sen}(x))_C \implies (2x, 2\text{sen}(x) - \text{sen}(2x))_S$$

luego, en el *Sistema Seno* el eje \bar{x} tiene como ecuación

$$\bar{y} - 2\text{sen}(\bar{x}/2) + \text{sen}(\bar{x}) = 0$$

Ahora como se quiere encontrar las intersecciones entre el semi-eje \bar{x} y una s-recta cualquiera se despejará \bar{y} de la ecuación lineal y de la ecuación del semi-eje \bar{x} , se igualarán y se obtendrá la siguiente ecuación:

$$a\bar{x} + 2b\text{sen}(\bar{x}/2) - b\text{sen}(\bar{x}) + c = 0$$

Por último, se crea un conjunto en el cual estén las soluciones a la ecuación y estos serán las coordenadas de \bar{x} para los cuales el eje \bar{x} y la recta se encuentren.

Se ha comprobado que si $b = 0$ su intersección es única. A manera de exploración se puede mostrar que si $a \neq 0$ los puntos de intersección son finitos y, además, son un número impar de intersecciones. Si $a = 0$ existen infinitas intersecciones si aproximadamente $-2,63 < \frac{c}{b} < 2,63$; ahora si aproximadamente $\frac{c}{b} < -2,63$ o $\frac{c}{b} > 2,63$ no existe intersección entre la s-recta y el semi-eje \bar{x} .

4.6. Pendiente de una s-recta

Se definirá la pendiente de una s-recta t cuya ecuación es $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ como el cociente entre $-a$ y b y se denotará de la con la letra m .

$$m = -\frac{a}{b} \quad (4-1)$$

La pendiente tiene la propiedad de describir el movimiento de dos puntos que pertenezcan al conjunto solución de la ecuación de alguna s-recta, para ser más específicos si la pendiente es $-\frac{a}{b}$ entonces los puntos de la s-recta se moverán b **s-unidades** hacia la derecha (en el semi-eje \bar{x}) y a **s-unidades** hacia arriba o hacia abajo en el semi-eje \bar{y} dependiendo el signo de $-\frac{a}{b}$; si es positivo “sube”, si es negativo “baja”.

Nota: Fíjese que aparece el término **s-unidad** el cual es la unidad en el *Sistema Seno*. Se diferencia de las unidades en el sistema rectangular ya que ésta no se refiere a la distancia entre los puntos si no al cambio de coordenadas.

Para ejemplificar este concepto se representarán gráficamente algunas s-rectas y se mostrará que los puntos que pertenecen a estas cumplen con la definición de pendiente.

Tomando la s-recta l con ecuación

$$5\bar{x} - 2\bar{y} + 3 = 0$$

se tiene que tiene la pendiente es $m = \frac{5}{2}$ porque los coeficientes a y b son 5 y -2 respectivamente, y reemplazándolos en (4-1) se obtiene m .

El punto $(-3, 6)_S$ está en l porque cumple que $-2(-3) - 3(6) + 5 = 0$, de igual manera los puntos $(-1, -1)_S$ y $(1, 4)_S$; fíjese que los puntos cumplen lo dicho anteriormente, es decir, tomando como referencia a $(-3, -6)_S$ si se mueve 2 s-unidades hacia la derecha y 5 hacia arriba, porque m es positivo, se llega al punto $(-1, -1)_S$. Del mismo modo se obtiene el punto $(1, 4)_S$ tomando a $(-1, -1)_S$ como referencia. Véase gráficamente en la Figura 4-13 parte (a).

Ahora se tomará la s-recta t con ecuación

$$-2\bar{x} - 3\bar{y} + 5 = 0$$

con $a = -2$ y $b = -3$ se tiene que la pendiente de t es $m = -\frac{2}{3}$.

Ahora con el punto $(1, 1)_S$, sumándole 3 en \bar{x} y restándole 2 en \bar{y} se obtiene $(4, -1)_S$ y haciendo el mismo procedimiento con $(4, -1)_S$ se llega al punto $(7, -3)_S$; se resta en \bar{y} por

que $m < 0$ estos puntos están en t porque cumplen $-2\bar{x} - 3\bar{y} + 5 = 0$. Acá se muestra otra manera de encontrar puntos sobre la recta a partir de la pendiente. Estos movimientos se pueden ver en la Figura 4-13 parte (b).

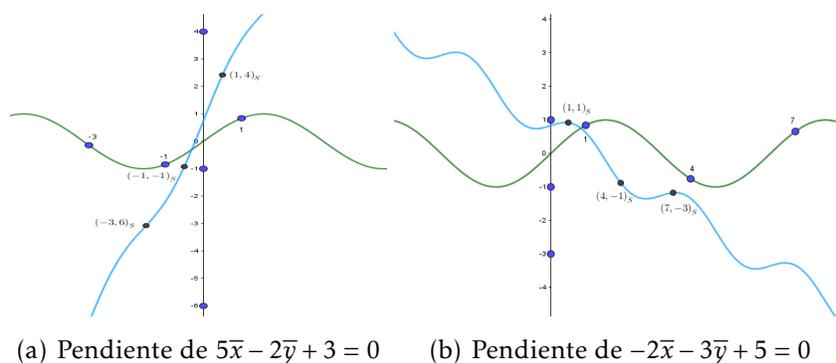


Figura 4-13.: Ejemplos de pendiente en el *Sistema Seno*

En la Figura 4-14 se puede observar varias s-rectas con diferente pendiente. Se puede observar que por un punto cualquiera en el *Sistema Seno* pasan infinitas s-rectas, esto se debe a que para cada número que pertenece al conjunto de los números reales se puede construir una recta con esta pendiente.

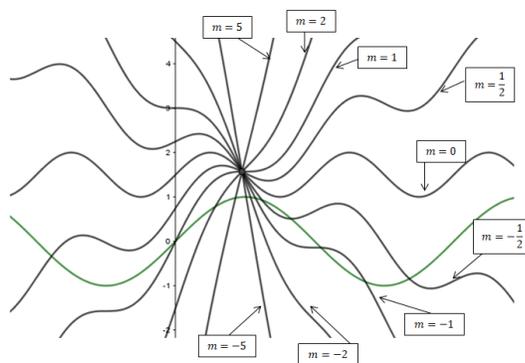


Figura 4-14.: Haz de rectas en el *Sistema Seno*

Con este término definido podemos entrar a estudiar ciertos teoremas que suponemos se cumplen en el *Sistema Seno* como lo son el *Teorema Punto-Pendiente* y *Dos puntos-Pendiente*.

Teorema Dos Puntos Pendiente

Este teorema dice que dados dos puntos con coordenadas $(x_1, y_1)_S$ y $(x_2, y_2)_S$ la pendiente de la recta que pasa por estos puntos esta determinada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (4-2)$$

Para ejemplificar este teorema se tomarán los puntos $P(3, 5)_S$ con $Q(6, 1)_S$ y $H(10, 4)_S$ con $F(9, 3)_S$ entonces, usando 4-2 se tiene que

$$m_1 = \frac{5 - 1}{3 - 6} = -\frac{4}{3}$$

$$m_2 = \frac{4 - 3}{10 - 9} = 1$$

y por la definición de pendiente, se cumple.

Teorema Punto Pendiente

Este teorema pide tener dos cosas: un punto con coordenadas $(x_1, y_1)_S$ y una pendiente m ; con estos elementos se puede encontrar la ecuación de la s-recta que pasa por ese punto y tiene como pendiente m usando la siguiente ecuación:

$$(\bar{y} - y_1) = m(\bar{x} - x_1) \quad (4-3)$$

Ejemplo: Encuentre la ecuación de la s-recta que tiene como pendiente $m_1 = -\frac{2}{3}$ y pasa por el punto $\left(1, -\frac{2}{3}\right)_S$.

Solución: Usando el *Teorema Punto Pendiente* se tiene que la ecuación de la recta es

$$\left(\bar{y} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = -\frac{2}{3}(\bar{x} - 1)$$

$$\bar{y} = -\frac{2}{3}\bar{x} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\bar{y} = -\frac{2}{3}\bar{x}$$

$$\frac{2}{3}\bar{x} + \bar{y} = 0 \quad (4-4)$$

Es decir que la gráfica de (4-4) contiene al punto $\left(1, -\frac{2}{3}\right)_S$ y tiene pendiente m_1 . Se puede confirmar esto gráficamente viendo la Figura 4-15.

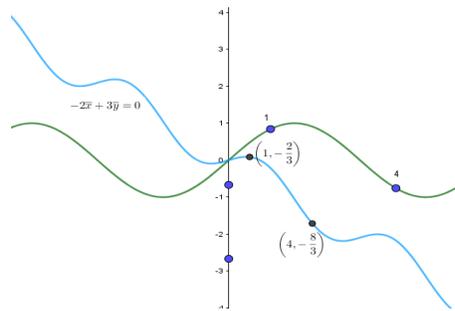


Figura 4-15.: s-Recta $2\bar{x} + 3\bar{y} = 0$

4.7. Cortes entre s-rectas

Se definirá el corte entre dos s-rectas l y t con ecuaciones

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \quad \text{y} \quad a'\bar{x} + b'\bar{y} + c' = 0$$

respectivamente, como los puntos $(x_0, y_0)_S$ que pertenecen a l y t simultáneamente. Hay que tener en cuenta que se está tomando la s-recta desde su definición algebraica y lo que cambia es su representación gráfica, por tanto, a partir de sus ecuaciones se puede construir un sistema lineal dos por dos que se desarrolla usando la determinante de esta matriz: si ésta tiene una única solución entonces se intersecan en un único punto, si no tiene solución no se intersecan y si tiene infinitas soluciones estas dos rectas coinciden en todos sus puntos, como se ilustra en la Figura 4-16.

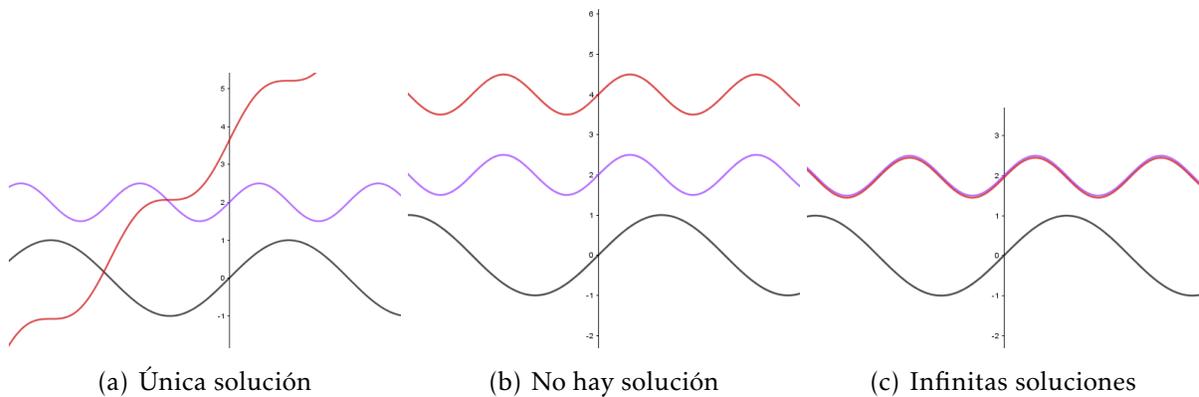


Figura 4-16.: Casos de cortes entre s-rectas

Ahora se mostrará una manera general de encontrar el punto de intersección entre dos s-rectas.

En la sección 2.1.5 se muestran diferentes definiciones de las rectas paralelas y la equivalencia entre ellas, en particular, la equivalencia entre la definición analítica y la definición geométrica. Usando la negación de la primera parte de ésta equivalencia se dice que si las rectas l y t con ecuaciones

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \quad (4-5)$$

$$a'\bar{x} + b'\bar{y} + c' = 0 \quad (4-6)$$

se intersecan en un único punto entonces $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$ teniendo en cuenta esta definición se procederá eliminando la variable \bar{y} de las ecuaciones multiplicando a 4-5 por b' y a 4-6 por $-b$, sumando los resultados se tiene que:

$$ab'\bar{x} + bb'\bar{y} + cb' = 0$$

$$-a'b\bar{x} - bb'\bar{y} - c'b = 0$$

$$ab'\bar{x} - a'b\bar{x} + cb' - c'b = 0$$

Factorizando \bar{x} , sumando el inverso aditivo de cb' y de $-c'b$ y por la condición $ab' \neq a'b$ se tiene que $ab' - a'b \neq 0$ entonces se puede multiplicar por el inverso multiplicativo de $ab' - a'b$ y se concluye que:

$$\bar{x} = \frac{c'b - cb'}{ab' - a'b}$$

Por último se sustituye el valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones y se despeja y luego, se obtiene que los puntos de intersección que deben ser de la siguiente forma:

$$\left(\frac{c'b - cb'}{ab' - a'b}, \frac{a(c'b - cb')}{b(ab' - a'b)} - \frac{c}{b} \right)_S \quad \text{ó} \quad \left(\frac{c'b - cb'}{ab' - a'b}, \frac{a'(c'b - cb')}{b'(ab' - a'b)} - \frac{c'}{b'} \right)_S$$

Es fácilmente verificable que las coordenadas en \bar{y} son iguales.

4.8. Ángulo entre s-rectas

Para este concepto se estudiaron dos formas de determinar el ángulo entre dos s-rectas: el primero a partir de **Líneas tangente a una s-recta** y el segundo a partir de **Líneas asociadas a una s-recta**. A continuación, se presentará la definición de estas líneas y la manera general de encontrar el ángulo entre dos s-rectas.

4.8.1. Definición de línea tangente a una s-recta

Sea l una s-recta con ecuación $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ y un punto A con coordenadas $(x_1, y_1)_S$ sobre l , se le denomina línea tangente a l por A al conjunto solución de la ecuación:

$$a'\bar{x} + b'\bar{y} + c' + b'\text{sen}(\bar{x}) = 0 \quad (4-7)$$

donde

$$a' = a - b \cos(x_1), \quad b' = b \quad \text{y} \quad c' = -ax_1 + bx_1 \cos(x_1) - by_1 - b \text{sen}(x_1)$$

Se realizará un ejercicio en el cual se presentará la gráfica de la línea tangente a una s-recta por un punto.

Ejemplo: Encuentre la línea tangente a la s-recta l con ecuación $3\bar{x} + 2\bar{y} - 1 = 0$ en el punto $(1, -1)_S$.

Solución: Identificando a los coeficientes $a = 3, b = 2, c = -1, x_1 = 1$ y $y_1 = -1$ y reemplazando en (4-7) se tiene que los coeficientes de la ecuación de línea tangente son:

$$\begin{aligned} a' &= 3 - 2 \cos(1), & b' &= 2, & c' &= -(3)(1) + (2)(1) \cos(1) - (2)(-1) - 2 \text{sen}(1) \\ & & & & c' &= -1 + 2 \cos(1) - 2 \text{sen}(1) \end{aligned}$$

Luego la ecuación de la línea tangente a esta s-recta por el punto $(1, -1)_S$ será de la forma:

$$\bar{y} = \frac{2 \cos(1) - 3}{2} \bar{x} + \frac{1 - 2 \cos(1) + 2 \text{sen}(1)}{2} - \text{sen}(\bar{x})$$

En la Figura 4-17 se muestra la representación gráfica de la línea tangente a la s-recta l por el punto $(1, -1)_S$.

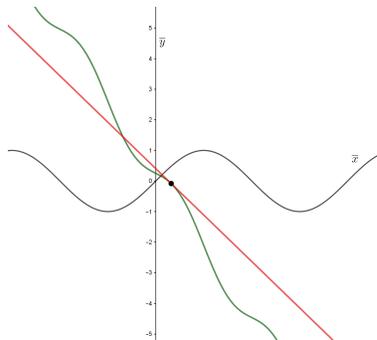


Figura 4-17.: Línea tangente a l por $(1, -1)$

4.8.2. Definición de línea asociada a una s-recta

Sea la s-recta l con ecuación $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ y un punto P con coordenadas $(x_0, y_0)_S$ sobre l , se le denomina línea asociada a l por P al conjunto solución de la ecuación:

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c' + b \operatorname{sen}(\bar{x}) = 0 \quad (4-8)$$

con $c' = -ax_0 - by_0 - b \operatorname{sen}(x_0)$.

Para ver gráficamente esta definición se encontrará la línea asociada de la siguiente recta $-\bar{x} + 2\bar{y} - 5 = 0$ en el punto $\left(4, \frac{9}{2}\right)_S$.

Primero se determina c' . Sustituyendo los coeficientes a, b, c de la ecuación de la s-recta y los valores x_0, y_0 del punto en (4-8) se tiene que:

$$\begin{aligned} c' &= -(-1)(4) - 2\frac{9}{2} - 2 \operatorname{sen}(4) \\ &= -5 - 2 \operatorname{sen}(4) \end{aligned}$$

Luego la línea asociada a la s-recta $-\bar{x} + 2\bar{y} - 5 = 0$ en el punto $\left(4, \frac{9}{2}\right)_S$ tendrá la siguiente ecuación:

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{5}{2} + \operatorname{sen}(4) - \operatorname{sen}(\bar{x})$$

En la Figura 4-18 se observa la representación de la línea asociada (en rojo) a la recta (en verde).

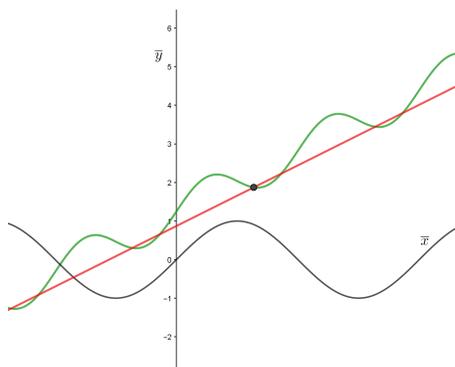


Figura 4-18.: Línea asociada a la recta $-\bar{x} + 2\bar{y} - 5 = 0$ por $(4, \frac{9}{2})$

Para nombrar las líneas se usarán letras griegas y se especificará a cuál tipo de línea se está haciendo alusión. Se puede ver que las rectas del sistema cartesiano (líneas) no son

rectas en el *Sistema Seno* si no curvas. Fíjese para cada punto sobre una s-recta, se tiene una línea asociada o tangente diferente.

A continuación se presentan dos applets en GeoGebra en los cuales el lector puede explorar las líneas asociadas a una s-recta y las líneas tangentes a una s-recta.

4.8.3. Applet Línea tangente a una s-recta

Este applet cuenta con dos ventanas: en la ventana de la parte derecha (azul claro) se encuentran cinco botones en los cuales en usuario puede ingresar los valores de a, b, c para la ecuación de la s-recta y los valores de x_1, y_1 para las coordenadas del punto $(x_1, y_1)_S$. También se muestra la ecuación de la línea asociada a esa s-recta por el punto que se digitó. En la ventana izquierda se muestra la gráfica de la s-recta, el punto y la gráfica de la línea asociada.

Link: <https://www.geogebra.org/m/sgaysp4w>

Ejemplo: Se determinará la línea tangente a la recta $-\bar{x} + \bar{y} = 0$ por el punto $(3, 3)_S$. Para ello se ingresan los valores $-1, 1, 0$ en los botones a, b, c respectivamente y los valores para x_1, y_1 los cuales son 3 y 3. En la Figura 4-19 se muestra el resultado del proceso anterior.

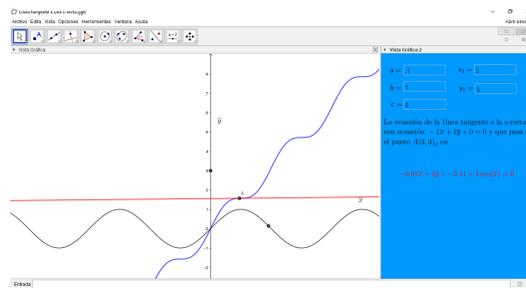


Figura 4-19.: Applet Línea tangente a una s-recta

En el caso de que el punto no este sobre la recta el programa no mostrará la gráfica de la línea y le avisará al usuario del problema.

4.8.4. Applet Línea asociada a una s-recta

Este applet cuenta con dos ventanas: en la ventana de la parte derecha (azul claro) se encuentran cinco botones en los cuales en usuario puede ingresar los valores de a, b, c para

la ecuación de la s-recta y los valores de x_1, y_1 para las coordenadas del punto $(x_1, y_1)_S$. También se muestra la ecuación de la línea asociada a esa s-recta por el punto que se digitó. En la ventana izquierda se muestra la gráfica de la s-recta, el punto y la gráfica de la línea asociada.

Link: <https://www.geogebra.org/m/y8h8hmjr>

Ejemplo: Se determinará la línea asociada a la recta l con ecuación $-\bar{x} + \bar{y} = 0$ por el punto $(3, 3)_S$. Para ello se ingresan los valores $-1, 1, 0$ en los botones a, b, c respectivamente y los valores para x_1, y_1 los cuales son 3 y 3. En la Figura 4-20 se muestra el resultado del proceso anterior.

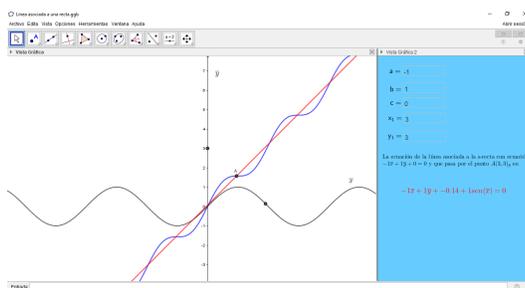


Figura 4-20.: Applet Línea asociada a una s-recta

En el caso de que el punto no este sobre la recta el programa no mostrará la gráfica de la línea y le avisará al usuario del problema.

Definiciones de ángulo

A continuación se presentan dos definiciones de ángulo entre dos s-rectas a partir de líneas tangentes y de líneas asociadas.

- **Ángulo entre rectas a partir de líneas tangentes:** Sean las rectas l y t con un único punto P en común y las líneas α y β tangentes a l y t respectivamente, por el punto P . El ángulo entre l y t será el ángulo θ determinado por α y β .
- **Ángulo entre rectas a partir de líneas asociadas:** Sean las rectas l y t con un único punto P en común y las líneas α y β asociadas a l y t respectivamente, por el punto P . El ángulo entre l y t será el ángulo θ determinado por α y β .

4.8.5. Ángulo a partir de líneas tangentes

Se tomarán las s-rectas l y t con el punto $(x_1, y_1)_S$ en común y ecuaciones

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \quad l\bar{x} + m\bar{y} + n = 0$$

respectivamente. Identificando los coeficientes para las ecuaciones de las líneas α y β tangentes l y t respectivamente se tiene que la ecuación de α es:

$$a'\bar{x} + b'\bar{y} + c' + b'\text{sen}(\bar{x}) = 0$$

con $a' = a - b \cos(x_1)$, $b' = b$ y $c' = -ax_1 + bx_1 \cos(x_1) - by_1 - b \text{sen}(x_1)$
y la ecuación de β será:

$$l'\bar{x} + m'\bar{y} + n' + m'\text{sen}(\bar{x}) = 0$$

con $l' = l - m \cos(x_1)$, $m' = m$ y $n' = -lx_1 + mx_1 \cos(x_1) - my_1 - m \text{sen}(x_1)$.
Luego ángulo entre α y β está determinado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{-a'm' + b'l'}{b'm' + a'l'}\right) \quad (4-9)$$

y por definición de ángulo entre s-rectas a partir de líneas tangentes, el ángulo entre l y t será θ .

Para ejemplificar este concepto se tomarán las s-rectas l y t que tienen en común el punto $(1, -1)_S$ y tienen las respectivas ecuaciones

$$3x + 2y - 1 = 0 \quad \text{y} \quad 4x - 2y - 6 = 0$$

identificando sus coeficientes se tiene que $a = 3, b = 2, l = 4, m = -2, x_1 = 1$ y $y_1 = -1$, para encontrar el ángulo se determinarán las ecuaciones de las líneas tangentes los coeficientes a', b', l', m' y se reemplazarán en (4-9). Por tanto

$$\begin{aligned} a' &= -3 + 2 \cos(1), & b' &= 2, & c' &= -1 + 2 \cos(1) - 2 \text{sen}(1) \\ l' &= -4 - 2 \cos(1), & m' &= -2, & n' &= 4 - 2 \cos(1) + 2 \text{sen}(1) \end{aligned}$$

Reemplazando estos coeficientes en (4-9), resolviendo y realizando los procedimientos algebraicos necesarios; se tiene que el ángulo que forman estas dos s-rectas en el *Sistema Seno* es:

$$\theta = 67,67^\circ$$

Se puede ver gráficamente como se muestra en la Figura 4-21

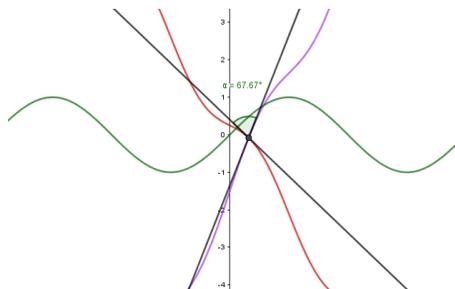


Figura 4-21.: Ángulo entre l y t

4.8.6. Ángulo a partir de líneas asociadas

Análogo a proceso de la definición de ángulo con líneas tangentes, si se tienen dos s-rectas l y t con ecuaciones

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \quad \text{y} \quad l\bar{x} + m\bar{y} + n = 0$$

respectivamente, y sus líneas asociadas α y β con ecuaciones

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c' + b\text{sen}(\bar{x}) = 0 \quad \text{y} \quad l\bar{x} + m\bar{y} + n' + m\text{sen}(\bar{x}) = 0$$

respectivamente. El ángulo θ entre α y β determinado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{-am + bl}{bm + al}\right) \quad (4-10)$$

será el ángulo entre l y t .

Para ejemplificar esta definición se encontrará el ángulo entre las siguientes s-rectas:

$$l: 3\bar{x} + 2\bar{y} - 1 = 0 \quad \text{y} \quad t: 4\bar{x} - 2\bar{y} - 6 = 0$$

en el punto de intersección $(1, -1)_S$.

Se encontrará la ecuación de la línea α asociada a l usando (4-8). Se determina el coeficiente c'

$$\begin{aligned} c' &= -(3)(1) - 2(-1) - 2\text{sen}(1) \\ &= -1 - 2\text{sen}(1) \end{aligned}$$

luego la ecuación de α será:

$$\bar{y} = -\frac{3}{2}\bar{x} + \frac{1}{2} + \text{sen}(1) - \text{sen}(\bar{x})$$

Análogamente se concluye que la ecuación de la línea β asociada a la recta t tiene como ecuación: $\bar{y} = 2\bar{x} - 3 + \text{sen}(1) - \text{sen}(\bar{x})$.

Por último se determina el ángulo entre las líneas asociadas. Por la ecuación (4-10) se tiene que el ángulo que se forma entre estas es:

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan\left(\frac{-(-3)(-2) + (2)(4)}{(2)(-2) + (-3)(4)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{7}{4}\right) \\ &= 60,26^\circ\end{aligned}$$

En la Figura 4-22 se muestra gráficamente el ángulo que forman las rectas l y t corroborando lo dicho en el procedimiento anterior.

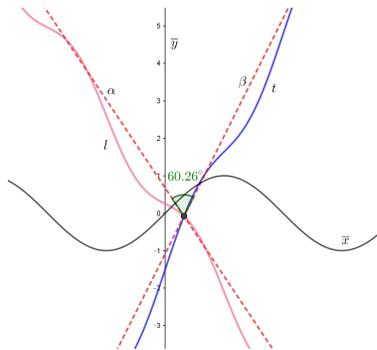


Figura 4-22.: Ángulo entre l y t

4.8.7. Applet Ángulo a partir de líneas tangentes

Este applet cuenta con dos ventanas: en la ventana de la parte derecha (azul claro) se encuentran seis botones en los cuales en usuario puede ingresar los valores de a, b, c, l, m, n para las ecuaciones $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ y $l\bar{x} + m\bar{y} + n = 0$ de las dos s-rectas l y t respectivamente. Se muestra el ángulo que forman estas dos s-rectas y las ecuaciones de las líneas tangentes a cada s-recta por el punto de intersección. En la ventana izquierda se muestra la gráfica de las s-rectas, el punto de intersección, las gráficas de las líneas tangentes a cada s-recta y el ángulo que forman entre ellas por el punto de intersección.

Link: <https://www.geogebra.org/m/uvd3ehah>

Ejemplo: Se determinará el ángulo entre las rectas l y t con ecuaciones $-x + y + 3 = 0$ y $x + y + 3 = 0$ respectivamente. Para ello se ingresan los valores $-1, 1, 0$ en los botones a, b, c , $1, 1, 0$ en l, m, n respectivamente. En la Figura 4-23 se muestra el resultado del proceso anterior.

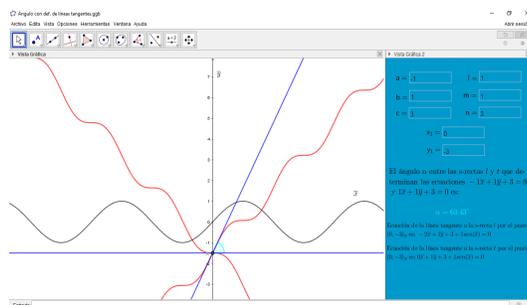


Figura 4-23.: Applet Ángulo a partir de líneas tangentes

Si las rectas no se intersecan el programa le avisará al usuario.

4.8.8. Applet Ángulo a partir de líneas asociadas

Este applet cuenta con dos ventanas: en la ventana de la parte derecha (azul claro) se encuentran ocho botones en los cuales el usuario puede ingresar los valores de a, b, c, l, m, n para las ecuaciones $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ y $l\bar{x} + m\bar{y} + n = 0$ de las dos s-rectas l y t respectivamente. Se muestra también el ángulo que forman estas dos s-rectas y las ecuaciones de las líneas asociadas a cada s-recta por el punto de intersección. En la ventana izquierda se muestra la gráfica de las s-rectas, las gráficas de las líneas asociadas a cada s-recta por el punto de intersección y el ángulo que forman entre ellas.

Link: <https://www.geogebra.org/m/kujfzzyf>

Ejemplo: Se determinará el ángulo entre las rectas l y t con ecuaciones $-x + y + 3 = 0$ y $x + y + 3 = 0$ respectivamente. Para ello se ingresan los valores $-1, 1, 0$ en los botones a, b, c , $1, 1, 0$ en l, m, n . En la Figura 4-24 se muestra el resultado del proceso anterior.

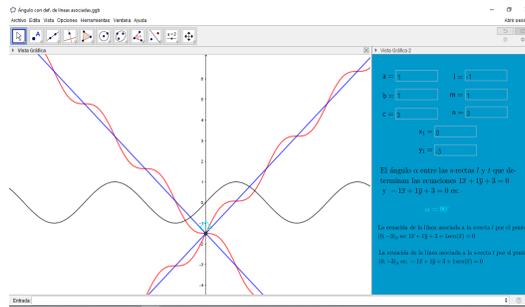


Figura 4-24.: Applet Ángulo a partir de líneas asociadas

Si las rectas no se intersecan el programa le avisará al usuario.

4.9. s-Rectas paralelas

Se definirá el paralelismo entre s-rectas con las definiciones analítica y geométrica del sistema cartesiano:

- Dos s-rectas l y t con ecuaciones

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \quad \text{y} \quad a'\bar{x} + b'\bar{y} + c' = 0$$

son paralelas si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. Si $a'\bar{x} + b'\bar{y} + c' = 0$ se puede escribir como $k(a\bar{x} + b\bar{y} + c) = 0$ con $k \neq 0$ entonces también son paralelas.

o de forma geométrica

- Dos s-rectas son paralelas si nunca se intersecan. Si se intersecan en dos o más puntos también son paralelas.

4.10. Resultados de s-rectas paralelas asociados a definiciones de ángulos

Analizando detenidamente y teniendo en cuenta la sección 2.1.4 que habla sobre ángulos entre rectas, se puede abordar el Teorema de la geometría Euclidiana *Paralelas - Ángulos Correspondientes Congruentes* representado en el sistema rectangular el cual dice que si

dos rectas son paralelas y hay una secante que las corta entonces, sus ángulos correspondientes son congruentes. (Figura 4-25).

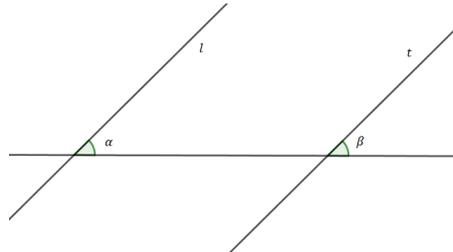


Figura 4-25.: Ángulos correspondientes congruentes

Se mostrará analítica y gráficamente que este teorema no se cumple para todos los casos en el *Sistema Seno* usando la definición de líneas tangentes. También se mostrará que se cumple para todos los casos usando la definición de líneas asociadas.

- **Teorema paralelas - ángulos correspondientes congruentes:** Sean las s-rectas l y t paralelas con ecuaciones

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \quad \text{y} \quad a'\bar{x} + b'\bar{y} + c' = 0$$

respectivamente, y la s-recta s con ecuación $d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0$ secante a ellas. El ángulo que forma l y s es congruente al ángulo entre t y s .

Usando líneas tangentes

Como l y t son paralelas entonces $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$; reemplazando en la ecuación de t se tiene

$$a\bar{x} + b\bar{x} + \frac{c'b}{b'} = 0$$

Sean los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) los puntos de intersección entre l y s y t y s respectivamente, se encontrarán las líneas tangentes a cada recta por los puntos.

Línea δ_1 tangente a s por (x_0, y_0)	Línea α tangente a l por (x_0, y_0)
$a''_1\bar{x} + b''_1\bar{y} + c''_1 + b''_1 \text{sen}(\bar{x}) = 0;$ $a''_1 = -d - e \cos(x_0), \quad b''_1 = e,$ $c''_1 = -dx_0 + ex_0 \cos(x_0) - ey_0 - e \text{sen}(x_0)$	$a'_1\bar{x} + b'_1\bar{y} + c'_1 + b'_1 \text{sen}(\bar{x}) = 0;$ $a'_1 = a - b \cos(x_0), \quad b'_1 = b,$ $c'_1 = -ax_0 + bx_0 \cos(x_0) - by_0 - b \text{sen}(x_0)$
Línea δ_2 tangente a s por (x_1, y_1)	Línea β tangente a t por (x_1, y_1)
$a''_2\bar{x} + b''_2\bar{y} + c''_2 + b''_2 \text{sen}(\bar{x}) = 0;$ $a''_2 = -d - e \cos(x_1), \quad b''_2 = e,$ $c''_2 = -dx_1 + ex_1 \cos(x_1) - ey_1 - e \text{sen}(x_1)$	$a'_2\bar{x} + b'_2\bar{y} + c'_2 + b'_2 \text{sen}(\bar{x}) = 0;$ $a'_2 = a - b \cos(x_1), \quad b'_2 = b,$ $c'_2 = -ax_1 + bx_1 \cos(x_1) - by_1 - b \text{sen}(x_1)$

Luego por la definición de ángulos a partir de líneas tangentes, los ángulos entre δ_1 y α y δ_2 y β son;

$$\theta_{\delta_1, \alpha} = \arctan\left(\frac{-a_1''b_1' + b_1''a_1'}{b_1''b_1' + a_1''a_1'}\right) \quad \text{y} \quad \theta_{\delta_2, \alpha} = \arctan\left(\frac{-a_2''b_2' + b_2''a_2'}{b_2''b_2' + a_2''a_2'}\right)$$

Para que se cumpla que $\theta_{\delta_1, \alpha} = \theta_{\delta_2, \alpha}$ las coordenadas de los puntos de intersección tienen que satisfacer las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} eb(\cos(x_1) - \cos(x_0)) &= 0 \\ (db + ea + eb)(\cos(x_1) - \cos(x_0)) &= 0 \end{aligned}$$

En conclusión los ángulos no siempre son congruentes luego, el teorema no se cumple en el *Sistema Seno* con esta definición. (Ver Figura 4-26)

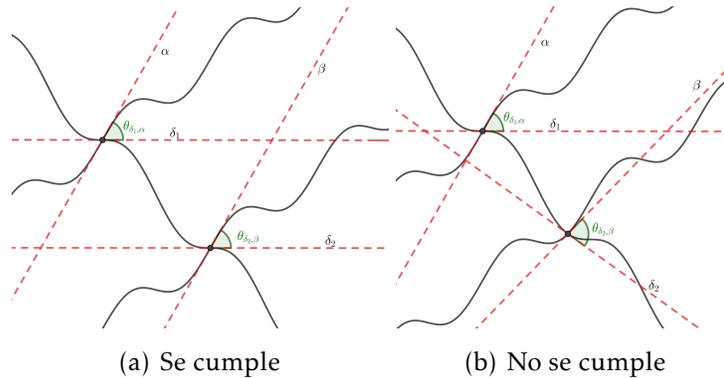


Figura 4-26.: Con la definición de ángulo a partir de líneas tangentes

Usando líneas asociadas

Teniendo las condiciones del teorema se tiene que: como l y t son paralelas entonces $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$; reemplazando en la ecuación de t se tiene

$$a\bar{x} + b\bar{x} + \frac{c'b}{b'} = 0$$

Sean los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) los puntos de intersección entre l y s y t y s respectivamente, se encontrarán las líneas asociadas a cada recta por los puntos.

Línea δ_1 asociada a s por (x_0, y_0)	Línea α asociada a l por (x_0, y_0)
$d\bar{x} + e\bar{y} + f'_1 + e \operatorname{sen}(\bar{x}) = 0;$ $f'_1 = -dx_0 - ey_0 - e \operatorname{sen}(x_0)$	$a\bar{x} + b\bar{y} + c'_1 + b \operatorname{sen}(\bar{x}) = 0;$ $c'_1 = -ax_0 - by_0 - b \operatorname{sen}(x_0)$
Línea δ_2 asociada a s por (x_1, y_1)	Línea β asociada a t por (x_1, y_1)
$d\bar{x} + e\bar{y} + f'_2 + e \operatorname{sen}(\bar{x}) = 0;$ $f'_2 = -dx_1 - ey_1 - e \operatorname{sen}(x_1)$	$a\bar{x} + b\bar{y} + c'_2 + b \operatorname{sen}(\bar{x}) = 0;$ $c'_2 = -ax_1 - by_1 - b \operatorname{sen}(x_1)$

Luego por la definición de ángulos a partir de líneas asociadas, los ángulos entre δ_1 y α y δ_2 y β son;

$$\theta_{\delta_1, \alpha} = \arctan\left(\frac{-ae + bd}{be + ad}\right) \quad \text{y} \quad \theta_{\delta_2, \beta} = \arctan\left(\frac{-ae + bd}{be + ad}\right)$$

En conclusión los ángulos son congruentes luego el teorema *Paralelas - ángulos correspondientes congruentes* se cumple en el Sistema Seno con la definición de ángulo a partir de líneas tangentes . (Véase Figura 4-27)

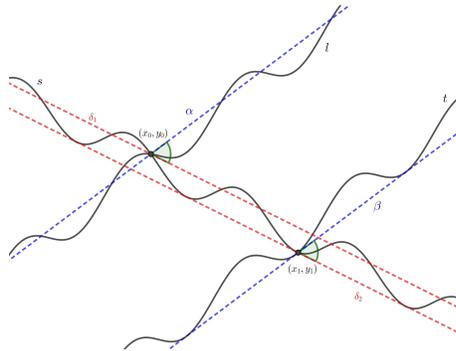


Figura 4-27.: Con la definición de ángulos a partir de líneas asociadas

Se realizará un ejemplo para mostrar el teorema anterior.

Ejemplo: Se tienen las s-rectas

$$l \rightarrow -\bar{x} + \bar{y} = 0, \quad t \rightarrow 2\bar{x} + \bar{y} - 4 = 0, \quad k \rightarrow 4\bar{x} + 2\bar{y} + 3 = 0$$

Por la definición analítica de paralelismo, t es paralela a k . Luego l interseca a t en el punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)_S$ y l interseca a k en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)_S$.

Ahora se determinarán las ecuaciones de las líneas asociadas a cada recta por los puntos encontrados.

Línea δ_1 asociada a l por $(-1/2, -1/2)_S$ $\bar{y} = \bar{x} + \text{sen}(-1/2) - \text{sen}(\bar{x})$	Línea α asociada a k por $(-1/2, -1/2)_S$ $\bar{y} = -2\bar{x} - 3/2 + \text{sen}(-1/2) - \text{sen}(\bar{x})$
Línea δ_2 asociada a s por $(4/3, 4/3)_S$ $\bar{y} = \bar{x} + \text{sen}(4/3) - \text{sen}(\bar{x})$	Línea β asociada a t por $(4/3, 4/3)_S$ $\bar{y} = -2\bar{x} + 4 + \text{sen}(1/2) - \text{sen}(\bar{x})$

Los ángulos que determinan δ_1 y α y δ_2 y β son:

$$\theta_{\delta_1, \alpha} = \arctan\left(\frac{1+2}{1-2}\right) = \theta_{\delta_2, \beta}$$

$$\theta_{\delta_1, \alpha} = 71,57^\circ = \theta_{\delta_2, \beta}$$

En la Figura 4-28 se muestra la gráfica de las s-rectas y líneas asociadas y el ángulo que se forma entre ellas.

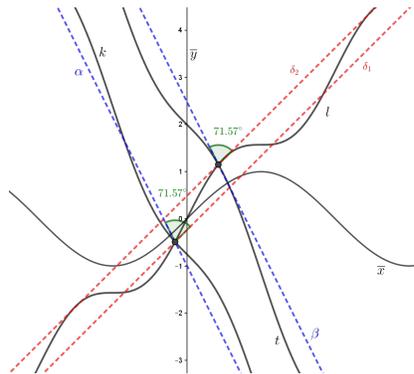


Figura 4-28.: Ángulos congruentes para t y k con respecto a k

Fíjese que a pesar de que cada punto sobre s tiene una línea asociada diferente, no infiere en el ángulo que determina l y t , es decir, se puede tomar cualquier punto sobre la s-recta para determinar la línea asociada a ella. También se puede mostrar otros teoremas de la geometría Euclidiana como *Paralelas - Ángulos Alternos Internos Congruentes* o el teorema 180 entre otros.

4.11. s-Rectas perpendiculares

Análogo desarrollo de la teoría en el sistema cartesiano se definirá la perpendicularidad entre s-rectas como:

- Sean las s-rectas l y t , si el ángulo θ que forman l y t es de 90° entonces l y t son perpendiculares.

En la sección 2.1.6 se mostró una relación entre el ángulo que forman las rectas y el producto de las pendientes de esas rectas. En el desarrollo de este estudio se encontró que esta equivalencia se cumple usando la definición de ángulo a partir de líneas asociadas pero, con la definición de ángulo a partir de líneas tangentes no se cumple. A continuación, se enunciará la equivalencia y se mostrará lo dicho anteriormente para cada caso.

- Las s-rectas l y t son perpendiculares si y solo si $m_1 \cdot m_2 = -1$

Con la definición de ángulo a partir de líneas tangentes

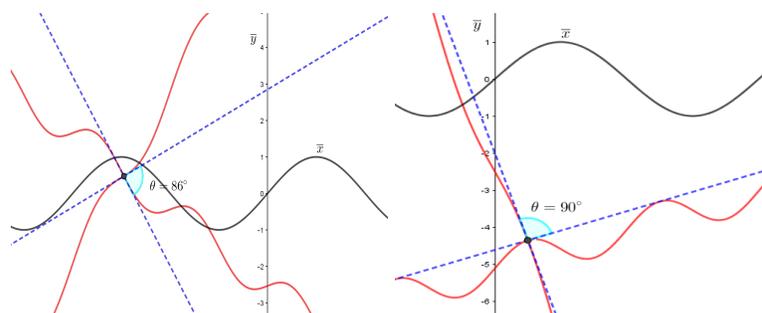
Primero se tomarán dos s-rectas en las cuales se cumpla que $m_1 \cdot m_2 = -1$ y se mostrará que no cumple siempre que sean perpendiculares.

Sean las s-rectas l y t con ecuaciones $2\bar{x} + 3\bar{y} + 15,2 = 0$ y $3\bar{x} - 2\bar{y} + 30 = 0$ respectivamente. Estas cumplen que $m_1 \cdot m_2 = -1$ ya que para l su pendiente es $m_1 = -\frac{2}{3}$ y para t es $m_2 = \frac{3}{2}$ luego:

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$$

En este caso las s-rectas no forman un ángulo recto. (Ver Figura 4-29)

Ahora se tomarán las s-rectas t y l perpendiculares con ecuaciones $-1\bar{x} + 3\bar{y} + 30,71 = 0$ y $3\bar{x} + 1\bar{y} + 5 = 0$. En este caso el producto de las pendientes de las s-rectas no es -1 luego no se cumple la equivalencia entre el producto de las pendientes y la perpendicularidad. (Ver Figura 4-29)



(a) De las pendientes al ángulo (b) Del ángulo a las pendientes

Figura 4-29.: Casos de los ángulos entre s-rectas

Esto se debe a que, como se mencionó cuando se estaba estudiando el *Teorema paralelas - ángulos correspondientes congruentes* desde esta definición de ángulo, si se construyen s-rectas t_i perpendiculares por cada punto de la s-recta l , las s-rectas t_i forman ángulos diferentes con l luego puede que algunas cumplan con la propiedad y otras no cumplan.

Con la definición de ángulo a partir de líneas asociadas

Esta demostración se realizó en la sección 2.1.6, por tanto solo se desarrollará un ejemplo. No está demás recordar que en el *Sistema Seno* cambia la representación gráfica, más no su representación algebraica.

Se tomarán las rectas l y t con ecuaciones

$$-4\bar{x} + 3\bar{y} - 10 = 0 \quad \text{y} \quad 3\bar{x} + 4\bar{y} - 4 = 0$$

luego el producto de sus pendientes es -1 , por tanto son perpendiculares. En la Figura 4-30 se muestra la gráfica de sus líneas asociadas y el ángulo recto que forman.

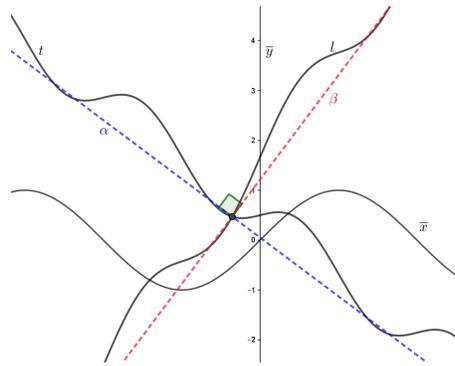


Figura 4-30.: Ángulo entre l y t

4.12. Distancia entre dos puntos

Sean los puntos P_1 y P_2 con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente, la distancia entre ellos se denotará $d_{P_1 P_2}$ y se determinará de la siguiente manera:

$$d_{P_1 P_2} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2 + \text{sen}(x_1) - \text{sen}(x_2))^2} \quad (4-11)$$

Esta distancia se encuentra a partir de la distancia Euclidiana entre dos puntos.

4.12.1. Applet Distancia entre dos puntos

Este applet cuenta con dos ventanas: en la ventana de la parte derecha (azul claro) se encuentran cuatro botones en los cuales en usuario puede ingresar los valores de x_1, x_2, y_1, y_2

para las coordenadas de los puntos $(x_1, y_1)_S$ y $(x_2, y_2)_S$. Se muestra la distancia d entre los dos puntos. En la ventana izquierda se muestran los dos puntos y el segmento de línea que tiene como longitud d . Si los puntos son iguales el programa le avisará al usuario de ello.

Link: <https://www.geogebra.org/m/tdghkukg>

Ejemplo: Se determinará la distancia entre los puntos A y B con coordenadas $(2, -5)_S$ y $(9, 15)_S$ respectivamente. Para ello se ingresan los valores $2, -5$ en los botones x_1, y_1 y $9, 15$ en x_2, y_2 respectivamente. En la Figura 4-31 se muestra el resultado del proceso anterior.

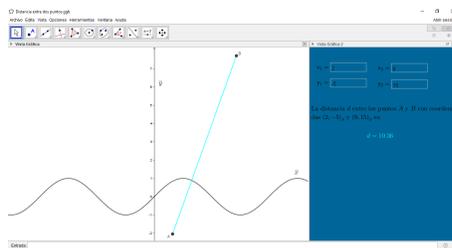


Figura 4-31.: Applet Distancia entre dos puntos

4.13. Distancia de un punto a una s-recta

Para esta definición se toma un punto P fuera de una s-recta l , se determina la distancia entre cada punto L_i sobre l . (Ver Figura 4-32)

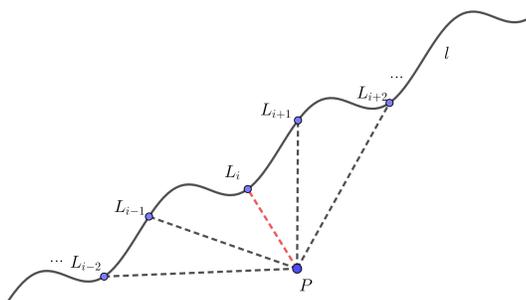


Figura 4-32.: Distancia entre un punto y una s-recta

La distancia entre P y l será la mínima distancia encontrada entre P y los puntos sobre l (segmento rojo).

- Sea una s-recta l y los puntos $L_1, L_2, \dots, L_j, L_{j+1}, \dots$ sobre l , un punto P fuera de ella y d_{P, L_i} la distancia de P a cada punto sobre l . La distancia de P a l será

$$d_{P, l} = \min[d_{P, L_i}]$$

Se supondrá una s-recta l con ecuación $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ y un punto $P(x_0, y_0)_S$ fuera de ella. Los puntos L_i que pertenecen a l tienen coordenadas

$$\left(\bar{x}, -\frac{a}{b}\bar{x} - \frac{c}{b}\right)_S$$

luego la distancia entre P y los puntos L_i , usando 4-11, estará dado por la siguiente ecuación

$$d_{P, L_i} = \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{x} - x_0)^2 + \left(-\frac{a}{b}\bar{x} - \frac{c}{b} - y_0 + \text{sen}(\bar{x}) - \text{sen}(x_0)\right)^2} \quad (4-12)$$

Como se necesita encontrar $\min[d_{P, L_i}]$ se usará el criterio de la segunda derivada viendo a d_{P, L_i} como una función en términos de \bar{x} . Para comodidad de lectura y escritura se omitirá el subíndice P, L_i .

La primera derivada de (4-12) será

$$dd' = \frac{1}{4} \left[\bar{x} - x_0 + \left(\frac{a}{b}\bar{x} + \frac{c}{b} + y_0 - \text{sen}(\bar{x}) + \text{sen}(x_0)\right) \left(\frac{a}{b} + \cos(\bar{x})\right) \right]$$

por el criterio de la primera derivada la ecuación anterior se iguala a 0 y se determina el conjunto

$$A = \{\bar{x} \in \mathbb{R} \mid d'(\bar{x}) = 0\}$$

los elementos de este conjunto se nombrarán como \bar{x}_A , luego la segunda derivada de (4-12) es:

$$d'^2 + dd'' = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{a^2}{b^2} - \cos^2(\bar{x}) - \left(\frac{a}{b}\bar{x} + \frac{c}{b} + y_0 - \text{sen}(\bar{x}) + \text{sen}(x_0)\right) (\text{sen}(\bar{x})) \right]$$

evaluando cada \bar{x}_A en d'' se van a tomar todos los valores positivos, es decir, se toma el conjunto B como

$$B = \{\bar{x}_A \mid d''(\bar{x}_A) > 0\}$$

Para finalizar se toman los elementos de B y se evalúan en d , por tanto, se concluye que el valor de la distancia entre P y l será el mínimo de los valores de $d(\bar{x}_B)$.

$$d_{P, l} = \min[d(\bar{x}_B)]$$

Como podrá observar, esta demostración está condicionada a que $b \neq 0$. En el caso que $b = 0$ la distancia entre la s-recta l y el punto P , se encontrará con la siguiente ecuación:

$$d_{P,l} = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{c}{a} \right)$$

Se realizará un ejemplo para mostrar la distancia entre un punto y una s-recta.

Ejemplo: Sea la s-recta l con ecuación $\bar{x} + \bar{y} + 5 = 0$ y el punto P con coordenadas $(4, 3)_S$. Siguiendo el procedimiento anterior se tiene que los puntos sobre l tienen coordenadas

$$(\bar{x}, -\bar{x} - 5)_S$$

y la distancia entre P y estos puntos L_i estará dada por

$$d_{P,L_i} = \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{x} - 4)^2 + (-\bar{x} - 8 + \text{sen}(\bar{x}) - \text{sen}(4))^2}$$

luego la derivada de esta función será

$$4dd' = \bar{x} - 4 + (\bar{x} + 8 - \text{sen}(\bar{x}) + \text{sen}(4))(1 + \cos(\bar{x}))$$

Ahora por el criterio de la primera derivada, se tiene el conjunto $A = \{-3,34, -1,35, 0,94\}$ tales que $d'(\bar{x}_A) = 0$ luego, la segunda derivada es:

$$4(d'^2 + dd'') = 1 + (1 - \cos(\bar{x}))(\cos(\bar{x}) - (\bar{x} + 6 - \text{sen}(\bar{x}) + \text{sen}(4))(\text{sen}(\bar{x})))$$

y el conjunto B tendrá los elementos $\{-3,34, 0,94\}$ tales que $d''(\bar{x}_A) > 0$, por último, se evalúan en d y se tiene que $d(-3,34) = 4,11$ y $d(0,94) = 3,99$ luego la distancia entre P y l será $d(0,94) = 3,99$. (Ver Figura 4-33)

$$d_{P,L_i} = 3,99$$

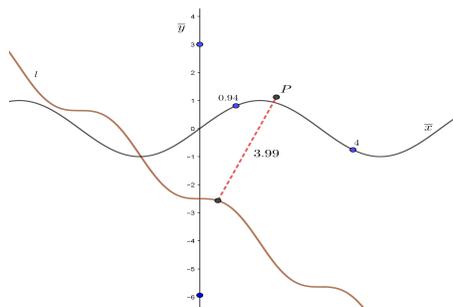


Figura 4-33.: Distancia entre $(4, 3)_S$ y $\bar{x} + \bar{y} + 5 = 0$

4.13.1. Applet Distancia entre un punto y una recta

Este applet cuenta con dos ventanas: en la ventana de la parte derecha (azul claro) se encuentran cinco botones en los cuales el usuario puede ingresar los valores de x_1, y_1 para las coordenadas del punto $(x_1, y_1)_S$ y los valores para a, b, c para la ecuación de la s-recta $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$. Se muestra la distancia d entre el punto y la s-recta. En la ventana izquierda se muestra la gráfica de la s-recta y el punto así como segmento de línea que tiene como longitud d .

Link: <https://www.geogebra.org/m/zwkfvy7w>

Ejemplo: Se determinará la distancia entre el puntos A con coordenadas $(7, 9)_S$ y la recta que determina la ecuación $-5\bar{x} - 4\bar{y} + 11 = 0$. Para ello se ingresan los valores $7, 9$ en los botones x_1, y_1 y $-5, -4, 11$ en a, b, c respectivamente. En la Figura 4-34 se muestra el resultado del proceso anterior.

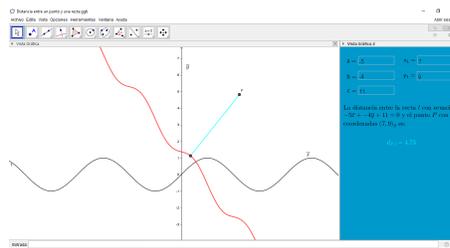


Figura 4-34.: Applet Distancia entre dos puntos

Si el punto llegase a pertenecer a la recta el programa le avisará al usuario de ello.

4.14. Simetría en el *Sistema Seno*

A continuación se presentan algunas definiciones de simetría que se cumplen en el sistema cartesiano y que se estudiarán posteriormente.

- **Definición 1:** Se dice que dos puntos A y B son simétricos con respecto a un punto O si O es el punto medio entre A y B .
- **Definición 2:** Se dice que dos puntos A y B son simétricos con respecto a un eje si el eje es el lugar geométrico determinado por el punto medio entre A y B .

- **Definición 3:** Se dice que una curva es simétrica con respecto a un eje si para cada punto correspondiente, también en la curva, tal que estos dos son puntos son simétricos con respecto al eje.

Las anteriores definiciones tienen una particularidad y es que son meramente geométricas; a continuación, se mostrará otra definición pero esta vez analítica para las cónicas en el *Sistema Seno*.

- **Definición 4:** Sea una s-cónica c con ecuación $a\bar{x}^2 + b\bar{x}\bar{y} + c\bar{y}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0$ y un punto P sobre c con coordenadas $(x_1, y_1)_S$. Sea una s-recta l paralela al eje con el cual se relaciona directamente la s-cónica por el punto P , luego l interseca en otro punto Q a c . Se le dice eje de simetría de una s-cónica al lugar geométrico que determine el punto medio entre P y Q .

Estas definiciones se cumplen en el *Sistema Seno* pero, existen otras definiciones que son equivalentes en el sistema cartesiano pero que en este sistema no se cumplen ya que se relacionan con la perpendicularidad entre s-rectas y con la distancia entre un punto y una s-recta, estas se presentan a continuación.

- **Definición 1.:** Sea una recta l y dos puntos P y Q diferentes tal que no pertenezcan a l y que no pertenezcan al mismo semiplano determinado por l . Si $d_{P,l} = d_{Q,l}$ y además los puntos que determinan las distancias coinciden entonces, los puntos P y Q son simétricos con respecto a l .
- **Definición 2.:** Sea una recta l y dos puntos P y Q diferentes tal que no pertenezcan a l . Si el segmento PQ es perpendicular a l y además se intersecan en el punto medio de P y Q entonces, los puntos P y Q son simétricos con respecto a l .

A continuación, en la Figura 4-35, se muestra cómo se ve gráficamente los puntos en el sistema cartesiano que cumplen estas dos definiciones.

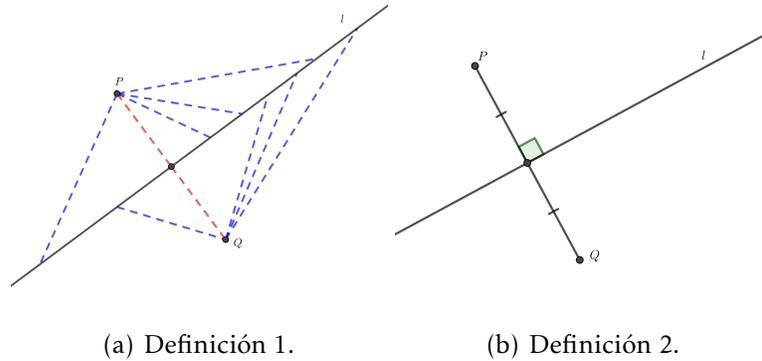


Figura 4-35.: Definiciones en el sistema cartesiano

La **definición 1.** no se cumple en el **Sistema Seno** ya que no existen P y Q que cumplan estas condiciones, esto se debe a la distancia entre un punto y una recta que se definió anteriormente y a la definición de distancia entre dos puntos. La **definición 2.** no se cumple para todos los casos ya que no se cumple siempre que cuando se forma un ángulo recto entre las dos s-rectas, los puntos P y Q equidistan.

5. Transformación de coordenadas en el *Sistema Seno*

5.1. Traslación

Se definirá la traslación en este sistema como el movimiento de h s-unidades en el semi-eje \bar{x} y k s-unidades en el semi-eje \bar{y} desde el origen $(0,0)_S$. En la Figura 5-1 se muestra la traslación de los semi-ejes a un punto con coordenadas $(h,k)_S$, es decir, se mueve k s-unidades en el semi-eje \bar{x} (en verde) y h s-unidades en el semi-eje \bar{y} (en azul). Luego, se crean otros semi-ejes coordenados (en rojo) que se nombran como \bar{x}' y \bar{y}' para diferenciarlos de los semi-ejes originales.

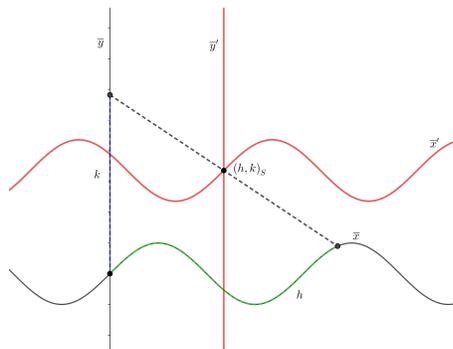


Figura 5-1.: Traslación en el *Sistema Seno*

Si se toma un punto $(x_0, y_0)_S$ en el sistema original y se quiere mirar qué coordenadas tendrá en el sistema que se trasladó al punto $(h, k)_S$, se usará el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned}x'_0 &= x_0 - h \\y'_0 &= y_0 - k - \text{sen}(h) - \text{sen}(x_0 - h) + \text{sen}(x_0)\end{aligned}\tag{5-1}$$

Es decir, el punto $(x_0, y_0)_S$ en el sistema trasladado tendrá coordenadas $(x'_0, y'_0)_{ST}$, esto se

muestra en la Figura 5-2 en la cual están las coordenadas x_0 y y_0 (en verde) en el sistema original y las coordenadas x'_0 y y'_0 (en morado) en el sistema trasladado.

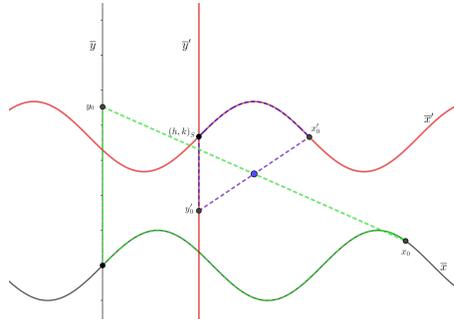


Figura 5-2.: Traslación en el *Sistema Seno*

Para las coordenadas de los puntos en el sistema trasladado se puso el subíndice **ST** que significa que está en el *Sistema Seno* trasladado.

5.1.1. Applet Traslación

Este applet cuenta con dos ventanas: la de la derecha (azul claro) en el cual están los botones para ingresar los coeficientes h, k para trasladar el sistema a ese punto y x_0, y_0 para determinar qué coordenadas tendrá el punto $(x_0, y_0)_S$ en el sistema trasladado y se muestra las coordenadas del punto en el sistema trasladado. En la otra ventana se presenta el sistema trasladado al punto $(h, k)_S$ y el punto $(x_0, y_0)_S$. Se mostrará un ejemplo del uso del applet.

Link: <https://www.geogebra.org/m/dnuq2dnb>.

Ejemplo: Para trasladar el *Sistema Seno* 5 s-unidades en el semi-eje \bar{x} y 7 en el semi-eje \bar{y} , se ingresan los valores en las casillas correspondientes y, para determinar las coordenadas del punto $(4, 9)_S$ en este nuevo sistema se ingresan los valores y se obtiene que las coordenadas son $(-1, 3)_{ST}$. (Ver Figura 5.1.1)

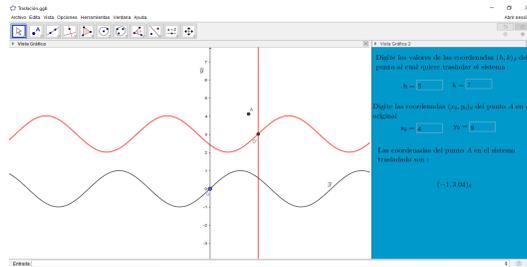


Figura 5-3.: Applet Traslación

5.2. Rotación

Rotación de los semi-ejes se le llama al proceso de girar el semi-eje \bar{x} y el semi-eje \bar{y} con un ángulo θ con respecto a su origen como semi-eje de rotación. Como el semi-eje \bar{x} no es una s-recta y las definiciones que se propusieron para determinar un ángulo necesitan de dos s-rectas, se tomará el eje \bar{x} , que por definición se puede representar analíticamente como la s-recta con ecuación $\bar{y} = 0$, como **base** para el ángulo de rotación. La ecuación resultante del eje \bar{x} , rotado con un ángulo θ , será:

$$-4\bar{x} \sin(\theta) + 2 \cos(\theta)(2\bar{y} - \sin(2\bar{x})) - \sin(4 \cos(\theta)\bar{x} + 2 \sin(\theta)(2\bar{y} - \sin(2\bar{x}))) = 0$$

En la Figura 5-4 se muestra la rotación del eje \bar{x} (en azul) con un ángulo θ . El eje \bar{x}' resultante está punteado (también en azul) y están las líneas asociadas a cada eje (o s-recta) que determina el ángulo θ (en rojo). El eje \bar{x}' no es una s-recta en el sistema original porque su ecuación no es lineal pero, en el sistema rotado sí lo es.

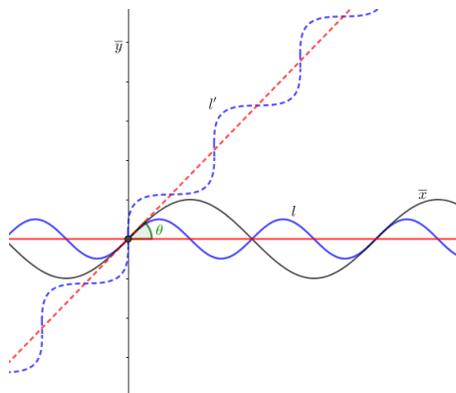


Figura 5-4.: Rotación de la s-recta base

Luego de esto se determina la ecuación en el sistema original del semi-eje \bar{x} que será de la forma:

$$-2\bar{x}\text{sen}(\theta) + \cos(\theta)(2\bar{y} - \text{sen}(2\bar{x})) - \text{sen}(2\cos(\theta)\bar{x} + \text{sen}(\theta)(2\bar{y} - \text{sen}(2\bar{x}))) = 0$$

En la Figura 5-5 se muestra el semi-eje \bar{y}' y el semi-eje \bar{x}' (en rojo) los cuales son los semi-ejes \bar{y} y \bar{x} rotados un ángulo θ con los respectivos ejes \bar{x} y \bar{x}' (en azul).

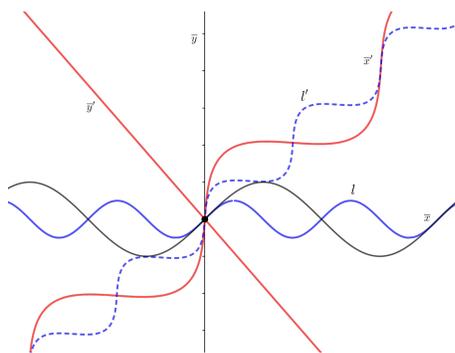


Figura 5-5.: Rotación de los ejes

Ahora si se tiene un punto P con coordenadas $(x_0, y_0)_S$ en el sistema original, para determinar qué coordenadas tiene P en el sistema rotado se usa las siguientes ecuaciones de rotación:

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0 \cos(\theta) + (y_0 + \text{sen}(x_0)) \text{sen}(\theta) \\ y'_0 &= -x_0 \text{sen}(\theta) + (y_0 + \text{sen}(x_0)) \cos(\theta) - \text{sen}(x'_0) \end{aligned} \quad (5-2)$$

Y se concluye que el punto P tendrá coordenadas $(2x'_0, 2y'_0 - \text{sen}(2x'_0))_{SR}$ en el sistema rotado. En la Figura 5-6 se muestra el cambio de las coordenadas del punto P del sistema original al sistema rotado.

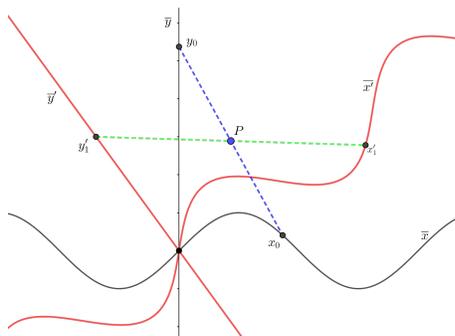


Figura 5-6.: Cambio de coordenadas de un punto cuando se rotan los ejes

Para las coordenadas de los puntos en el sistema rotado se les asignó el subíndice **SR** que significa que está en el *Sistema Seno* rotado.

5.2.1. Applet Rotación

Este applet cuenta con dos ventanas: la de la derecha (azul claro) en el cual están los botones para ingresar el ángulo θ con el cual se quiere rotar el sistema y x_0, y_0 para determinar qué coordenadas tendrá el punto $(x_0, y_0)_S$ en el sistema rotado y se muestra las coordenadas del punto en el sistema rotado. En la otra ventana se presenta el sistema rotado con un ángulo θ y el punto $(x_0, y_0)_S$. Se mostrará un ejemplo del uso del applet.

Link: <https://www.geogebra.org/m/hmkjhwau>.

Ejemplo: Para rotar el *Sistema Seno* con un ángulo $\theta = 30$, se ingresa el valor en la casilla correspondiente y, para determinar las coordenadas del punto $(-4, 5)_S$ en este nuevo sistema se ingresan los valores y se obtiene que las coordenadas son $(0,5, 7,5)_{SR}$. (Ver Figura 5-7)

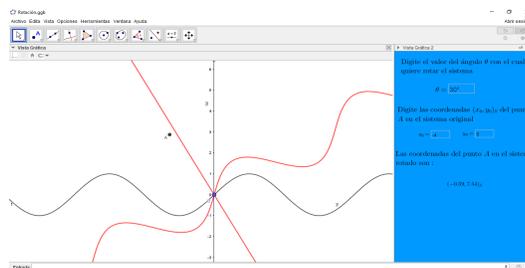


Figura 5-7.: Applet Rotación

6. Cónicas y soluciones a ecuaciones cuadráticas en el *Sistema Seno*

De manera similar a lo que se expuso en el capítulo 2.3, en este capítulo se representarán las soluciones a la ecuación general de segundo grado en el *Sistema Seno* y se estudiará la definición como lugar geométrico de las cónicas. Se analizarán de forma separada ya que una **gs-cónica** definida por lugar geométrico no se puede expresar algebraicamente como una ecuación cuadrática, tampoco cumple que si se define una **s-cónica** a partir de su ecuación cumple con la definición como lugar geométrico en el *Sistema Seno*.

Nótese que se nombró a las cónicas del *Sistema Seno* como **gs-cónicas** cuando estas están definidas como lugar geométrico y **s-cónicas** cuando están definidas desde la ecuación cuadrática. Esto se hace con el fin de diferenciarlas de las cónicas en el sistema cartesiano. Estos diminutivos se usarán de ahora en adelante para las cónicas en el *Sistema Seno*.

6.1. s-Cónicas a partir de la ecuación cuadrática

En esta sección se mostrarán las soluciones a la ecuación cuadrática y su representación gráfica. Para ello se tomará cada caso que se presenta a continuación, se graficará en el *Sistema Seno* y se presentarán los tipos de s-cónicas que se pueden obtener.

Sea la ecuación general de segundo grado

$$a\bar{x}^2 + b\bar{x}\bar{y} + c\bar{y}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0 \quad (6-1)$$

si

$b^2 - 4ac = 0$ entonces es **s-parábola**.

$b^2 - 4ac < 0$ entonces es **s-elipse**.

$b^2 - 4ac > 0$ entonces es **s-hipérbola**.

A continuación se desarrollará cada caso mostrando diferentes situaciones encontradas a través del estudio de estas. Cabe recordar que se puso una “s” a las cónicas (s-parábola, s-elipse, s-hipérbola) que están en el *Sistema Seno*.

Se analizarán varios casos generales en los cuales se mostrará el tipo de gráficas que forman y también, utilizando la **Definición 4** que se presentó en la sección 4.14, se mostrará la representación gráfica del eje de simetría para las s-cónicas y gs-cónicas así como una ecuación general para cada una. Se mostrará los cortes con los ejes y semi-ejes de cada objeto geométrico a estudiar.

6.1.1. s-Parábola

Con la ecuación (6-1) y la condición $b^2 - 4ac = 0$ surgen otras condiciones para que la representación gráfica de la solución a esta ecuación sea una s-parábola.

1. $ac \geq 0$
2. a y c diferentes de 0 simultáneamente, además, si a ó c son 0 necesariamente $b = 0$
3. Si $b = 0$ entonces a ó c tienen que ser 0. Además
 - a) Si $a = 0$ entonces $d \neq 0$
 - b) Si $c = 0$ entonces $e \neq 0$

1° **Caso:** $a\bar{x}^2 + e\bar{y} + f = 0$

Para este caso la representación a las soluciones a esta ecuación generarán una familia de s-parábolas las cuales tienen el punto de corte con el eje \bar{y} en $(0, -\frac{e}{f})_s$. Los puntos de corte con el eje \bar{x} de este tipo de s-parábolas serán en $(0, \sqrt{-\frac{f}{a}})_s$ y $(0, -\sqrt{-\frac{f}{a}})_s$.

Para determinar la concavidad de la s-parábola se mira el producto ae ; si es positivo entonces abre hacia “arriba”, si es negativo abre hacia “abajo”. Por la definición de simetría que se usará, se tiene que la ecuación del eje de simetría para este tipo de parábolas será de la forma:

$$\bar{x} = 0$$

En la Figura 6-1 parte (a) se muestra una s-parábola que abre hacia arriba (en azul) y su eje de simetría (en rojo), en la parte (b) se muestra una s-parábola que abre hacia abajo y su eje de simetría con los respectivos colores (azul y rojo).

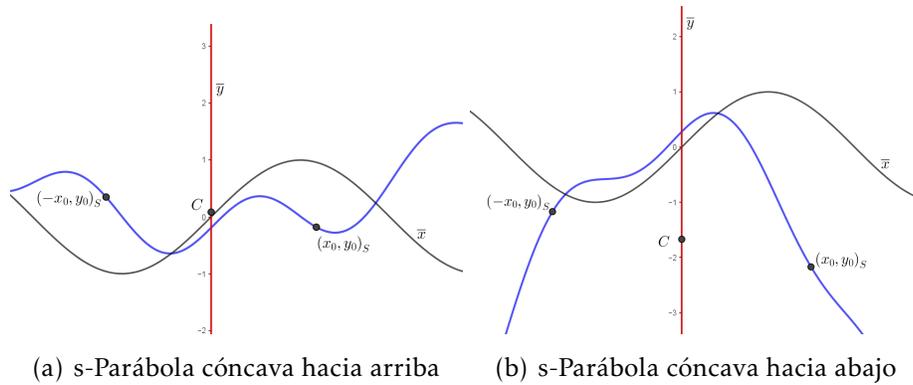


Figura 6-1.: Cuando $ae < 0$

En este estudio se encontró que cuando $-\frac{a}{e}$ se acerca a 0 la s-parábola se “cierra” y tiene menos ondulaciones, por el contrario, si se aleja se abre y tiene más ondulaciones. En la Figura 6-2 en la parte (a) se muestra una s-parábola “ancha” y una “delgada” en la parte (b).

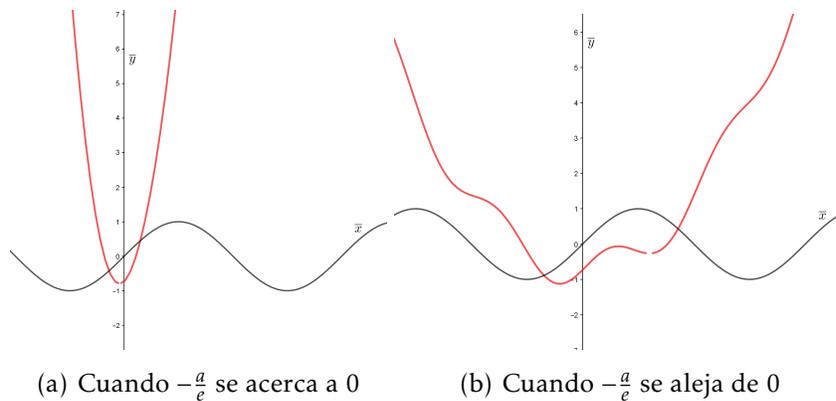


Figura 6-2.: Anchura de la s-parábola

Cabe resaltar que los casos que se mostraron en la Figura 6-2 solo se muestra cuando $-\frac{a}{e}$ es mayor que cero, también cumple cuando es menor que cero, solo que en este caso abriría hacia abajo.

Para determinar los cortes con el semi-eje \bar{x} se resuelve la siguiente ecuación:

$$e \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{x}}{2} \right) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \right) + a\bar{x}^2 + f = 0$$

Para algunos casos la anterior ecuación no tiene solución, esto significa que la s-parábola no tiene cortes con el semi-eje \bar{x} . Los cortes con el semi-eje \bar{y} coinciden con los del eje \bar{y} , por esto, solo se hablará acerca de los cortes con el semi-eje \bar{x} .

2° **Caso:** $c\bar{y}^2 + d\bar{x} + f = 0$

En este caso las parábolas cambian de posición y están “acostadas” tomando como referencia el eje \bar{x} . De manera similar al primer caso, cuando $-\frac{c}{d}$ se acerca a 0 la s-parábola se cierra y tiene menos ondulaciones, cuando se aleja de 0 se abre y tiene más ondulaciones. Para analizar el eje de simetría, tomando la **definición 4**, se tiene que en general el eje de simetría para estas parábolas es de la forma:

$$\bar{y} = 0$$

En la Figura 6-3 parte (b) se muestra una s-parábola que abre hacia la derecha (en azul) y su eje de simetría (en rojo), en la parte (a) se muestra una s-parábola que abre hacia la izquierda y su eje de simetría con los respectivos colores (azul y rojo).

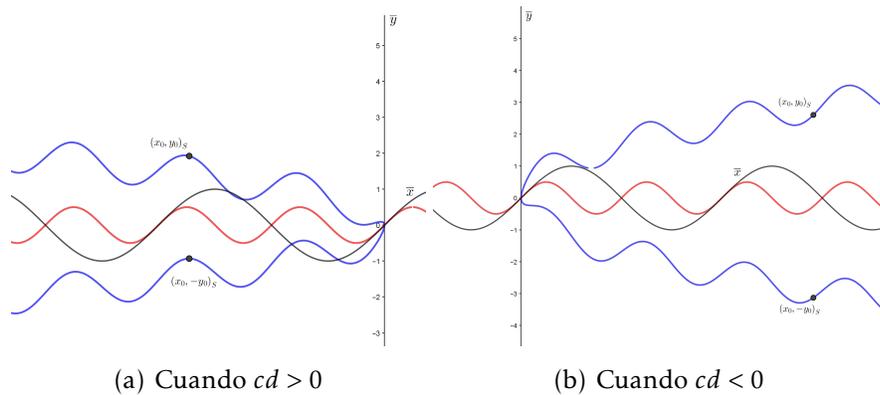


Figura 6-3.: Eje de simetría de la s-parábola caso 2.

Para determinar los cortes con el eje \bar{y} se reemplazan los coeficientes en las coordenadas $\left(0, \sqrt{-\frac{f}{c}}\right)_S$ y $\left(0, -\sqrt{-\frac{f}{c}}\right)_S$. Para los cortes con el eje \bar{x} serán en el punto con coordenadas $\left(-\frac{f}{d}, 0\right)_S$. Fíjese que cuando $-\frac{f}{c} < 0$ es un número no real luego, no tiene cortes con el eje \bar{y} .

Para los cortes con el semi-eje \bar{x} se tiene que resolver la siguiente ecuación:

$$c \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{x}}{2} \right) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \right)^2 + d\bar{x} + f = 0$$

3° **Caso:** $a\bar{x}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0$

Acá la s-parábola se mueve en el plano, de derecha a izquierda o de arriba para abajo manteniendo la misma forma, es decir, es como tomar una parábola del primer caso y moverla en el plano sin cambiar su forma. Lo anterior dicho se puede confirmar gráficamente. También cumplen las mismas propiedades de concavidad, de anchura y que se puede determinar un eje de simetría. Para determinar los movimientos de las s-parábolas se verán los coeficientes h y k que se determinan a partir de la ecuación dada.

$$h = -\frac{d}{2a} \quad \text{y} \quad k = \frac{d^2}{4af} - \frac{g}{f}$$

El coeficiente h va a determinar el movimiento en el semi-eje \bar{x} , si es positivo se mueve hacia la derecha, si es negativo hacia la izquierda y k determinará el movimiento en el semi-eje \bar{y} , si es positivo se mueve hacia arriba, si no, se mueve hacia abajo. Con el coeficiente h también se puede determinar el eje de simetría, que para este caso en específico es la s-recta:

$$\bar{x} = h$$

En la Figura 6-4 se muestra en la parte (a) una s-parábola que abre hacia arriba que esta desplazada hacia la derecha y hacia la abajo (en rojo) y su eje de simetría (en azul), en la parte (b) se muestra una s-parábola que abre hacia abajo, que esta desplazada hacia la izquierda y hacia arriba (en rojo) y su eje de simetría (en azul).

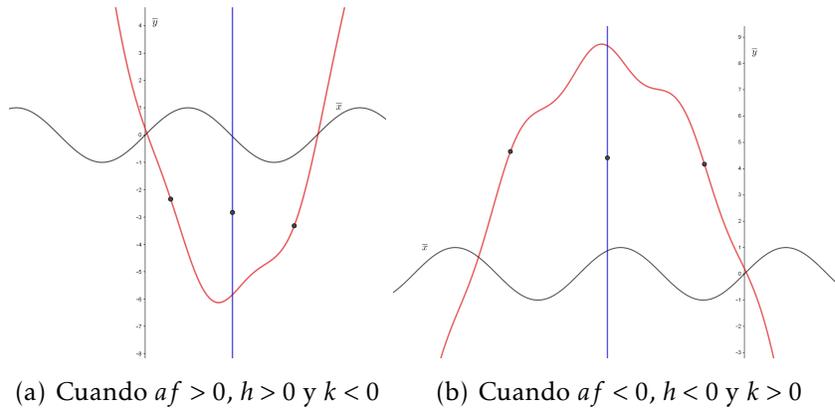


Figura 6-4.: Eje de simetría y movimientos en el plano de la s-parábola

El corte con el eje \bar{y} será en el punto $(0, -\frac{f}{e})_S$. Los cortes con el eje \bar{x} serán en los siguientes puntos:

$$\left(\frac{-d + \sqrt{d^2 - 4af}}{2a}, 0 \right)_S \quad \text{y} \quad \left(\frac{-d - \sqrt{d^2 - 4af}}{2a}, 0 \right)_S$$

Para determinar los cortes con el semi-eje \bar{x} se desarrolla la siguiente ecuación:

$$a\bar{x}^2 + d\bar{x} + e\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{\bar{x}}{2}\right) - \operatorname{sen}(\bar{x})\right) + f = 0$$

4° **Caso:** $c\bar{y}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0$

Análogo al caso 3 se tienen que estas s-parábolas tienen la misma forma de las del caso 2 pero desplazadas en el plano. Para determinar los movimientos de estas con respecto a los ejes coordenados se usan los coeficientes h y k con las siguientes sustituciones:

$$h = \frac{e^2}{4dc} - \frac{f}{d} \quad \text{y} \quad k = -\frac{e}{2c}$$

Si $h > 0$ se mueve hacia la derecha, si $h < 0$ se mueve hacia la izquierda. El coeficiente k determina el movimiento hacia arriba si es positivo y hacia abajo si es negativo. El eje de simetría para estas s-parábolas será siempre la s-recta con ecuación:

$$\bar{y} = k$$

En la Figura 6-5 se muestra en la parte a) una s-parábola que esta desplazada hacia la derecha y hacia la abajo (en rojo) y su eje de simetría (en azul), en la parte b) se muestra una s-parábola esta desplazada hacia la izquierda y hacia arriba (en rojo) y su eje de simetría (en azul).

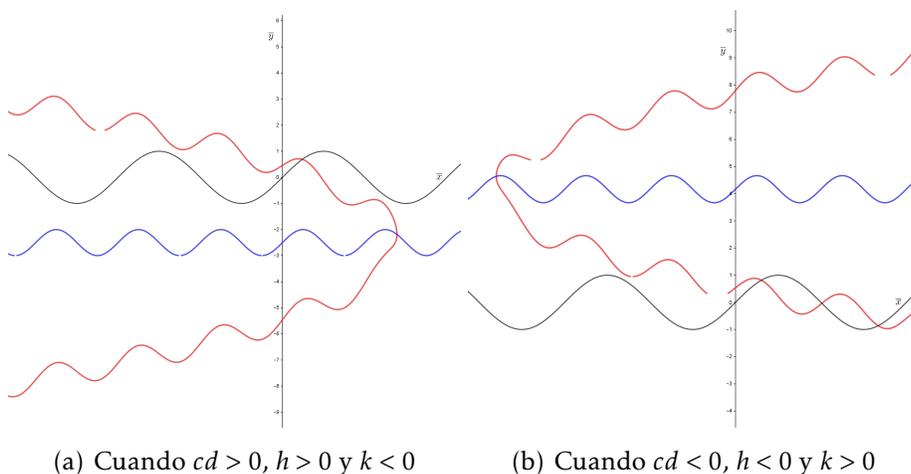


Figura 6-5.: Eje de simetría y movimientos en el plano de la s-parábola caso 4

El corte con el eje \bar{x} será en el punto $\left(-\frac{f}{d}, 0\right)_s$. Los cortes con el eje \bar{y} serán en los siguientes puntos:

$$\left(0, \frac{-e + \sqrt{e^2 - 4cf}}{2c}\right)_s \quad \text{y} \quad \left(0, \frac{-e - \sqrt{e^2 - 4cf}}{2c}\right)_s$$

Para determinar los cortes con el semi-eje \bar{x} se desarrolla la siguiente ecuación:

$$c\left(2 \operatorname{sen}\left(\frac{\bar{x}}{2}\right) - \operatorname{sen}(\bar{x})\right)^2 + d\bar{x} + e(2 \operatorname{sen}(\bar{x}) - \operatorname{sen}(\bar{x})) + f = 0$$

Dicho anteriormente se esta tomando una s-parábola y se está moviendo en el plano sin cambiar su forma y a partir de los coeficientes h y k se determina para qué lado del plano se movió, tomando como referencia los semi-ejes \bar{x} y \bar{y} . Como se están estudiando algunas propiedades que tienen las s-cónicas, en este caso, las diferentes formas de representar los movimientos en el plano que pueden tener las y , además, se está mirando si se comportan de manera similar a las cónicas, se mostrará otra forma análoga a la expuesta en el sección 2.3, en la cual se mueven los ejes coordenados tantas s-unidades en el semi-eje \bar{x} y en el semi-eje \bar{y} y se mostrará si la ecuación de la s-parábola se puede expresar algebraicamente de manera más sencilla. Para ello se usará la traslación de los semi-ejes que se mostró en el capítulo 5.1.

Para este análisis se determinará una manera general de determinar las coordenadas de los puntos sobre las s-parábolas y se usarán las ecuaciones (5-1) teniendo en cuenta el punto $(h, k)_s$ luego, se determinará una nueva ecuación en el sistema trasladado. Para esto se encuentra que, en general, los puntos de las s-parábolas de los casos 3. y 4. son de la forma:

$$1. \left(\bar{x}, \frac{-a\bar{x}^2 - d\bar{x} - f}{e}\right)_s \quad \text{y} \quad 2. \left(\bar{x}, \sqrt{\frac{-d\bar{x} - e\bar{y} - f}{c}}\right)_s$$

Ahora reemplazando en las ecuaciones (5.1), despejando y haciendo los diferentes cálculos algebraicos se concluye que las ecuaciones de las s-parábolas de los casos 3. y 4. se pueden ver como:

$$\begin{aligned} a\bar{x}'^2 + (2ah + d)\bar{x}' + \operatorname{sen}(\bar{x}') - \operatorname{sen}(\bar{x}' + h) + f' &= 0 \\ c(\bar{y}' + \operatorname{sen}(\bar{x}') - \operatorname{sen}(\bar{x}' + h) + k + \operatorname{sen}(h))^2 + d(\bar{x} + h) + e\bar{y} + f &= 0 \end{aligned}$$

con $f' = ah^2 + dh + f + ek + e \operatorname{sen}(h)$.

Acá se puede concluir que en cualquier sistema trasladado la s-parábola no se puede expresar con una ecuación cuadrática, ya que con el cambio de coordenadas aparecen el término $\operatorname{sen}(\bar{x})$ y con este se rompe el esquema que se tiene para las ecuaciones cuadráticas. Esto se puede ver gráficamente con alguna particularidad que tiene la s-parábola con

respecto a sus ejes, ya sea la intersección con alguno de ellos, la forma, entre otras. En la Figura 6-6 se muestra en la parte (a) la representación del primer caso en el cual la s-parábola abre hacia arriba o hacia abajo, en la parte (b) se toma el segundo caso donde la s-parábola puede abrir hacia la derecha o izquierda.

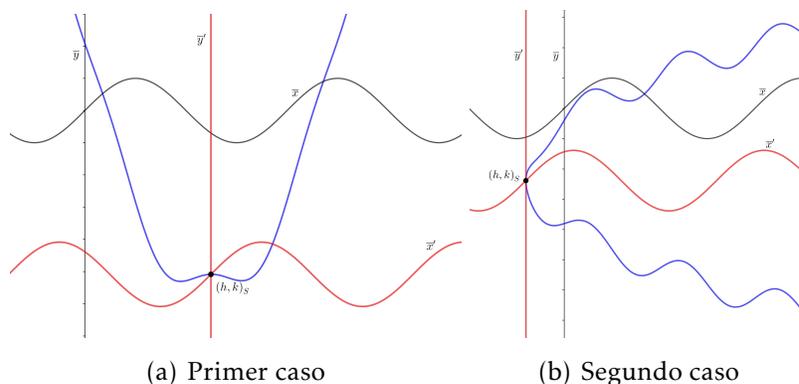


Figura 6-6.: Traslación de los ejes

5° Caso: $a\bar{x}^2 + b\bar{x}\bar{y} + c\bar{y}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0$

En este caso se encuentra que las s-parábolas cambian completamente con respecto a las de los casos anteriores ya que están rotadas, por lo tanto, los puntos que pertenecen a estas curvas no cumplen con una relación directa con alguno de los ejes, esto se ve reflejado en la forma de las s-parábolas. A continuación, en la Figura 6-7, se muestran algunos ejemplos de estas s-parábolas las cuales cambian su forma dependiendo los coeficientes. Como se está haciendo un estudio similar al que se propuso en el capítulo 2, para estudiar este tipo de s-parábolas se determina el ángulo de rotación que tiene la curva y se muestra que en un sistema rotado su ecuación cambia a una más sencilla, es decir, a una ecuación como las que se mostraron en el caso 1. y 2., en algunos casos también se tiene que trasladar para que esto ocurra.

Antes de realizar este proceso, se mostrarán los puntos de corte de estas s-parábolas con los ejes, estos se muestran a continuación:

$$\text{Cortes con el eje } \bar{x}: \left(\frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4af}}{2a}, 0 \right)_S$$

$$\text{Cortes con el eje } \bar{y}: \left(0, \frac{-e \pm \sqrt{e^2 - 4cf}}{2c} \right)_S$$

Para determinar los cortes con el semi-eje \bar{x} se resuelve la siguiente ecuación:

$$a\bar{x}^2 + b\bar{x}(2 \sin(\bar{x}) - \sin(\bar{x})) + c(2 \sin(\bar{x}) - \sin(\bar{x}))^2 + d\bar{x} + e(2 \sin(\bar{x}) - \sin(\bar{x})) + f = 0$$

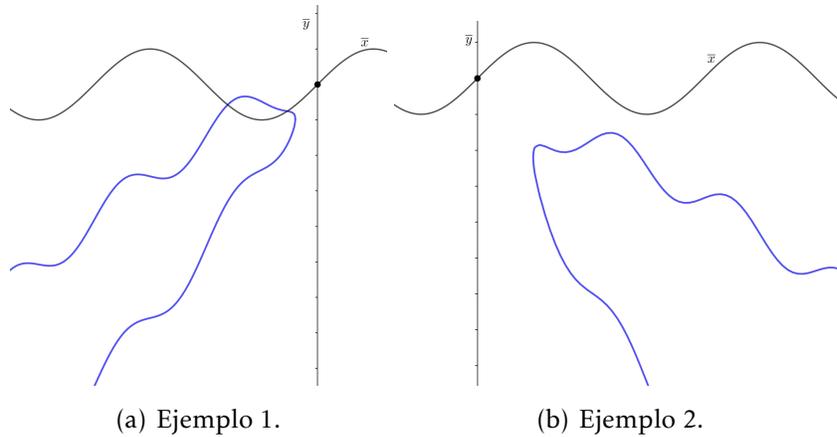


Figura 6-7.: Ejemplo de s-parábolas rotadas

En este estudio se encontró que esto no puede ser posible ya que, como se mencionó anteriormente, los puntos que pertenecen a estas s-parábolas no cumplen con una relación entre alguno de los ejes coordenados, por el contrario, hay una combinación entre los ejes. Además, usando las ecuaciones (5-2) para determinar las coordenadas en el sistema rotado de los puntos que pertenecen a la s-parábola se encuentra que aparece $\sin(\bar{x})$ y este rompe el esquema que se tiene para las ecuaciones cuadráticas, es decir, cuando se realiza la rotación de los semi-ejes la ecuación de la curva en este sistema rotado no se puede expresar como una ecuación cuadrática. (Ver Figura 6-8)

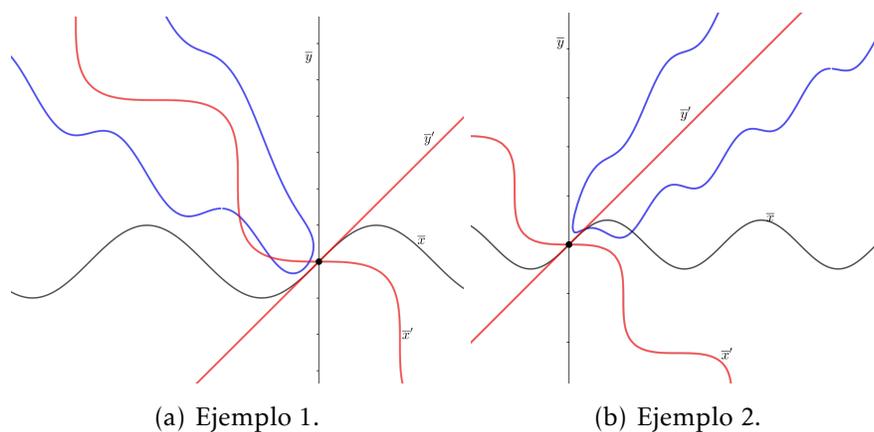


Figura 6-8.: Ejemplo de rotación de ejes para s-parábolas

Analizando el eje de simetría de estas s-parábolas se encontró que este no se puede ex-

presar como una ecuación y, aunque tiene una regularidad, esta es bastante extraña a comparación de las anteriores. En la Figura 6-9 se muestran dos ejemplos de las gráficas o formas de los ejes de simetría (en negro) para estas s-parábolas, se pintan algunos pedazos de la s-parábola en negro, pero estos no hacen parte del eje de simetría. Cabe resaltar que este eje de simetría solo es la parte que está en medio de la s-parábola por defectos del software Geogebra, en el cual se ha graficado todas las imágenes mostradas en este documento.

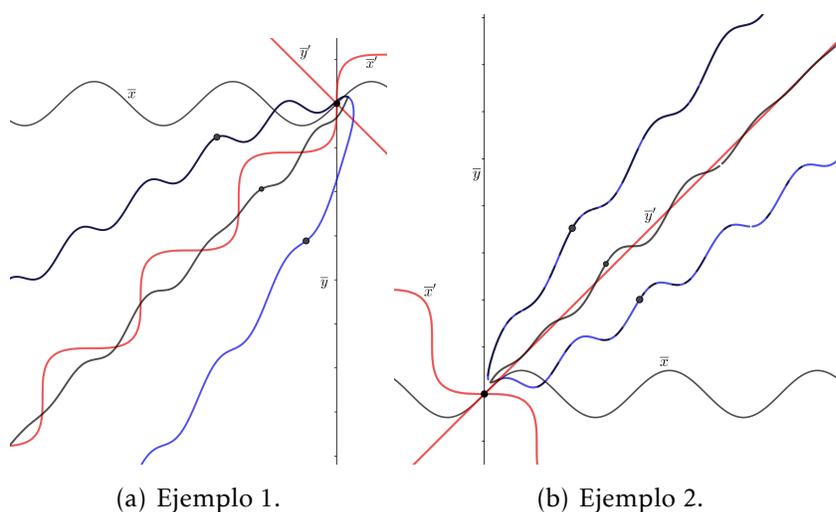


Figura 6-9.: Ejemplo de eje de simetría para s-parábolas rotadas

La regularidad que cumple el eje de simetría es que siempre al inicio de este es una curva suave, es decir, no tiene tantas ondulaciones. Luego se comporta como una s-recta y después de cierta cantidad de ondulaciones se vuelve de nuevo una curva suave por último, cambia a lo que parece ser una s-recta pero cambia el sentido de la ondulaciones, es decir, si en la s-recta inicia de abajo hacia arriba, estas van de manera contraria, de arriba hacia abajo. Esta regularidad se repite para todo el eje de simetría.

6.1.1.1. Applet s-parábola y eje de simetría

Este applet cuenta con dos ventanas: en la ventana de la parte derecha (azul claro) se encuentran seis botones en los cuales en usuario puede ingresar los valores de a, b, c, d, e, f para la ecuación de la s-parábola $a\bar{x}^2 + b\bar{x}\bar{y} + c\bar{y}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0$ y se muestra la ecuación de la s-parábola. En la ventana izquierda se muestra la gráfica de la s-parábola y su respectivo eje de simetría.

Link: <https://www.geogebra.org/m/sjszruwr>

Ejemplo: Se determinará la gráfica que determina la ecuación $\frac{1}{4}\bar{x}^2 + 3\bar{x}\bar{y} + 9\bar{y}^2 + 6\bar{x} + 7\bar{y} + 9 = 0$. Para ello se ingresan los valores $\frac{1}{4}, 3, 9, 6, 7, 9$ en los botones a, b, c, d, e, f respectivamente. En la Figura 6-10 se muestra el resultado del proceso anterior.

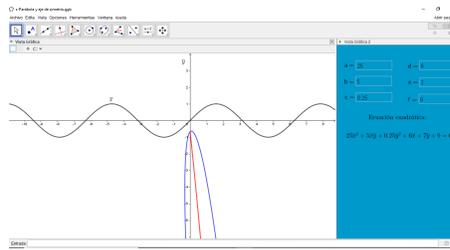


Figura 6-10.: Applet s-parábola y eje de simetría

Para que se muestre las gráficas los coeficientes deben cumplir que $b^2 - 4ac = 0$.

6.1.2. s-Elipse

Con la ecuación (6-1) y la condición que $b^2 - 4ac < 0$ surgen otras condiciones para que la representación gráfica de la solución a esta ecuación sea una s-elipse.

1. $ac \geq 0$
2. a y c diferentes de 0 simultáneamente, además, si a ó c son 0 necesariamente $b = 0$
3. Si $b = 0$ entonces a y c tienen que ser diferentes de 0.
4. Si a y c son menores que 0 entonces f tiene que ser mayor que 0. Si a y c son mayores que 0 entonces f tiene que ser menor que 0

1° Caso: $a\bar{x}^2 + c\bar{y}^2 + f = 0$

Para este caso la representación a las soluciones de esta ecuación se puede caracterizar teniendo en cuenta los coeficientes. El coeficiente $-\frac{f}{a}$ determinará el largo de la s-elipse con respecto al semi-eje \bar{x} , si se acerca a 0 la s-elipse se contraerá y si no entonces se alargará. El coeficiente $-\frac{f}{c}$ será el largo de la s-elipse pero con respecto al semi-eje \bar{y} , si se acerca a 0 la s-elipse se contraerá y si no entonces se alargará.

Para determinar el corte con el eje \bar{y} y el eje \bar{x} se resuelven las siguientes ecuaciones:

$$\bar{y} = \pm \sqrt{-\frac{f}{c}} \quad , \quad \bar{x} = \pm \sqrt{-\frac{f}{a}} \quad (6-2)$$

Con las condiciones iniciales se tiene que para este caso la ecuación (6-2) siempre tendrá solución, es decir, estas s-elipses siempre se intersecan en dos puntos con los ejes. Para determinar los cortes con el semi-eje \bar{x} se encuentran las soluciones a la siguiente ecuación la cual al menos tiene dos soluciones:

$$c \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{x}}{2} \right) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \right)^2 + a\bar{x}^2 + f = 0$$

En la Figura 6-11 se muestran dos s-elipses, en la parte a) se muestra una s-elipse en la cual el coeficiente $-\frac{f}{a}$ se aleja de 0 y en la parte b) se muestra una s-elipse donde el coeficiente $-\frac{f}{c}$ se aleja de 0.

Para definir el eje de simetría en este tipo de s-elipses se encontró que todas tienen dos ejes de simetría que cumplen con la **Definición 4** la cual se usó para mostrar el eje de simetría en las s-parábolas.

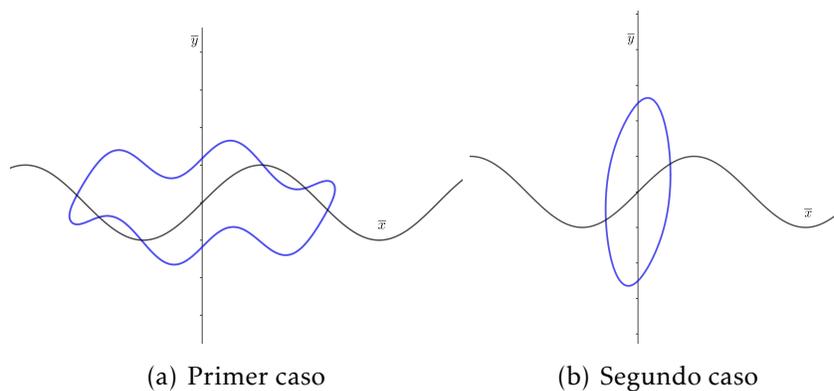


Figura 6-11.: Representaciones de s-elipses

Para escoger uno de los dos, se compararán los coeficientes $-\frac{f}{a}$ y $-\frac{f}{c}$, si $-\frac{f}{c} \leq -\frac{f}{a}$ el eje de simetría estará definido por la s-recta $\bar{x} = 0$, si $-\frac{f}{c} < -\frac{f}{a}$ entonces estará definido por la s-recta $\bar{y} = 0$. En la Figura 6-12 se muestran dos ejemplo en los cuales el eje de simetría es la s-recta $\bar{x} = 0$.

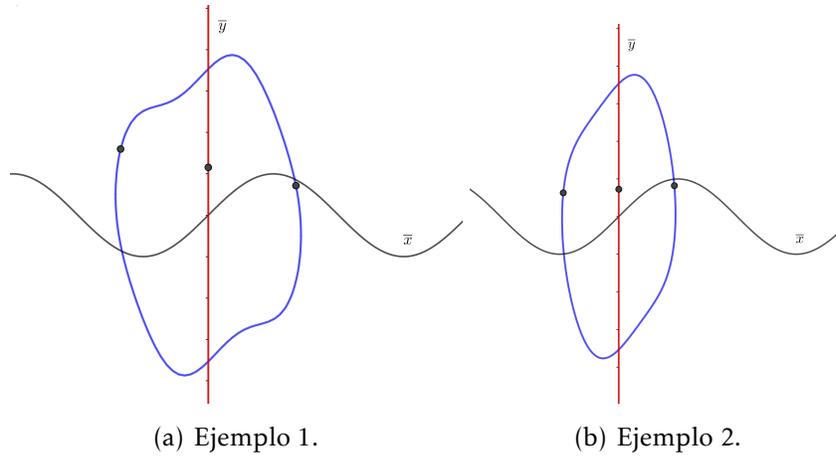


Figura 6-12.: Eje de simetría para s-elipses cuando $-\frac{f}{c} \leq -\frac{f}{a}$

De manera similar se muestran, en la Figura 6-13, dos ejemplos en los cuales el eje de simetría es la s-recta $\bar{y} = 0$. Cabe resaltar que se observa una relación de forma de la s-elipse con el eje de simetría. Si el eje de simetría es $\bar{x} = 0$ la s-elipse no tiene tantas ondulaciones, por otro lado, si es $\bar{y} = 0$ es más notorio su cambio.

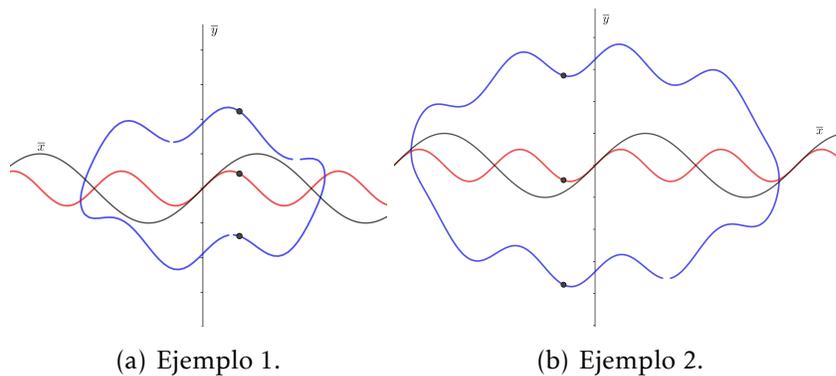


Figura 6-13.: Eje de simetría para s-elipses cuando $-\frac{f}{c} < -\frac{f}{a}$

2° Caso: $a\bar{x}^2 + c\bar{y}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0$

En este caso se tiene que las s-elipses tienen el mismo comportamiento que las del caso anterior pero estas se desplazan en el plano sin cambiar su forma. Para determinar el corte con el eje \bar{y} y el eje \bar{x} se resuelven las siguientes ecuaciones:

$$\bar{y} = \frac{-e \pm \sqrt{e^2 - 4cf}}{2c} , \quad \bar{x} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4af}}{2a} \quad (6-3)$$

Con las condiciones iniciales se tiene que para este caso la ecuación (6-3) no siempre tendrá solución, o sea que cuando no tienen solución significa que no tiene corte con el/los eje(s).

Para determinar los cortes con el semi-eje \bar{x} se encuentran las soluciones a la siguiente ecuación la cual al menos tiene dos soluciones:

$$a(\bar{x})^2 + c \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{x}}{2} \right) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \right)^2 + d\bar{x} + e \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{x}}{2} \right) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \right) + f = 0$$

Para determinar los movimientos en el plano de estas s-elipse se usarán los coeficientes h y k que será el cambio en el semi-eje \bar{x} y el cambio en el semi-eje \bar{y} respectivamente. Estos coeficientes tienen las siguientes sustituciones:

$$h = -\frac{d}{2a} \quad \text{y} \quad k = -\frac{e}{2c}$$

Si $h < 0$ se mueve hacia la izquierda, si $h > 0$ se mueve hacia la derecha. Ahora si $k < 0$ la s-elipse se moverá hacia arriba, si no, se moverá hacia abajo. (Ver Figura 6-14)

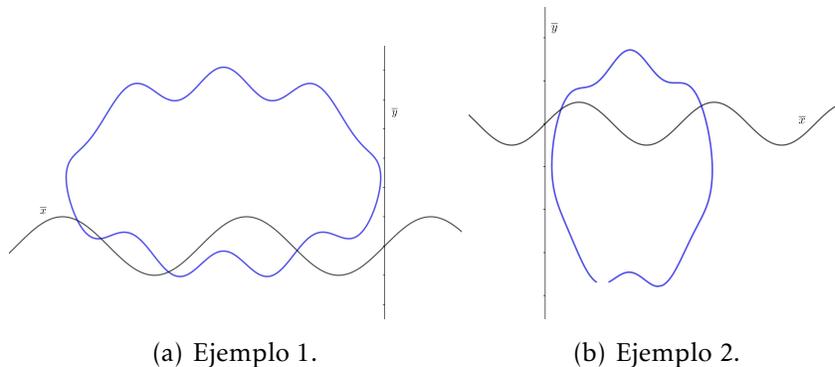


Figura 6-14.: Movimientos de la s-elipse

Fíjese que lo anterior dicho se refiere a tomar la s-elipse y moverla h s-unidades en el semi-eje \bar{x} y k s-unidades en el semi-eje \bar{y} .

Ahora realizará la traslación de los semi-ejes coordenados hasta el punto $(h, k)_S$. Se tiene que generalmente los puntos sobre las s-elipses son de la forma:

$$\left(\bar{x}, \frac{\sqrt{-4c(a\bar{x}^2 + d\bar{x} + f)} + e}{2c} \right)_S$$

Ahora utilizando las ecuaciones de traslación (5-1) se obtiene que la ecuación de la s-elipse en el sistema trasladado es de la forma:

$$4c^2(\bar{y}' + \text{sen}(\bar{x}) - \text{sen}(\bar{x} + h) - e + k + \text{sen}(h))^2 + 4c(a(\bar{x} + h)^2 + d(\bar{x} + h) + f) = 0$$

Luego se deduce que en el sistema trasladado la s-elipse no se puede expresar como una ecuación cuadrática.

Para el eje de simetría se tendrán en cuenta los siguientes coeficientes:

$$1. \frac{d^2c + e^2a - 4acf}{4a^2c} \quad \text{y} \quad 2. \frac{d^2c + e^2a - 4acf}{4ac^2}$$

Se contarán con dos posibles ejes de simetría: *i.* la s-recta $\bar{x} = h$ y *ii.* la s-recta $\bar{y} = k$. Si $1. < 2.$ el eje de simetría será la s-recta $\bar{y} = k$, en caso contrario, el eje de simetría será la s-recta $\bar{x} = h$. En la Figura 6-15 se muestran dos s-elipses en las cuales se trasladó los ejes coordenados hasta el punto $(h, k)_S$ en la parte a) se encuentra una s-elipse cuyo eje de simetría es s-recta $\bar{x} = h$ y en la parte b) una s-elipse cuyo eje de simetría es la s-recta $\bar{y} = k$.

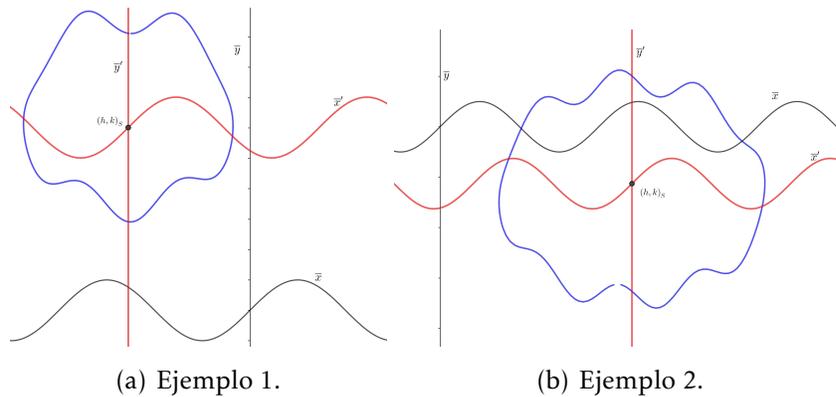


Figura 6-15.: Traslación de los ejes en las s-elipses

3° **Caso:** $a\bar{x}^2 + b\bar{x}\bar{y} + c\bar{y}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0$

Cuando aparece el término $\bar{x}\bar{y}$ se tiene que las s-elipses sufren un cambio con respecto a su forma y su posicionamiento en el plano. Éstas s-elipses están rotadas y/o trasladadas y por ello, sufren un cambio de forma porque, como se vio en el caso de la s-parábola, se tiene que los puntos sobre la curva no tienen una relación directa con algún eje coordenado, además, cuando se usan las ecuaciones de rotación se encuentra que la ecuación

resultante en el sistema rotado no es una ecuación cuadrática. En la Figura 6-16 se pueden ver dos ejemplos de este tipo de s-elipses y se puede observar que en algunas partes cambia su forma drásticamente con respecto a casos anteriores.

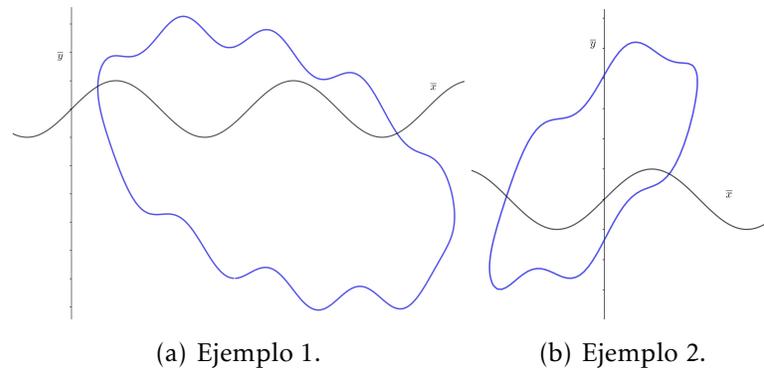


Figura 6-16.: s-Elipses rotadas

Para determinar el corte con el eje \bar{y} y el eje \bar{x} se resuelven las siguientes ecuaciones:

$$\bar{y} = \frac{-e \pm \sqrt{e^2 - 4cf}}{2c}, \quad \bar{x} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4af}}{2a} \quad (6-4)$$

Con las condiciones iniciales se tiene que para este caso la ecuación (6-4) no siempre tendrá solución, o sea que cuando no tienen solución significa que no tiene corte con el/los eje(s).

Para determinar los cortes con el semi-eje \bar{x} se encuentran las soluciones a la siguiente ecuación la cual al menos tiene dos soluciones:

$$a(\bar{x})^2 + b\bar{x} \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{x}}{2} \right) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \right) + c \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{x}}{2} \right) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \right)^2 + d\bar{x} + e \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{x}}{2} \right) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \right) + f = 0$$

En la Figura 6-17 se muestra a los ejes coordenados rotados con un ángulo

$$\theta = \frac{\arctan \left(\frac{b}{a-c} \right)}{2}$$

y dos s-elipses. Fíjese que a pesar de que en la parte (b) se ve alguna similitud de su forma con el semi-eje \bar{x} más adelante se mostrará que el eje de simetría no se comporta de la misma forma que en casos anteriores.

Como se ha mencionado anteriormente, ya que los puntos no tienen una relación directa con algún eje, los semi-ejes de simetría no se pueden expresar como una ecuación, aunque, estos cumplen cierta regularidad.

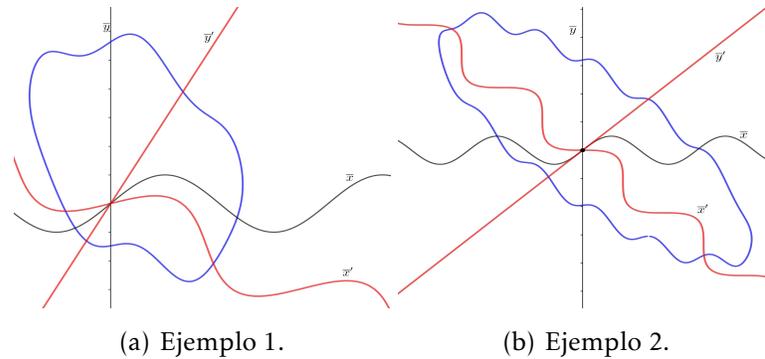


Figura 6-17.: s-Elipses rotadas

Cuando el eje de simetría se relaciona con el semi-eje \bar{x} este tiende a tener más ondulaciones y estas son más pronunciadas, también, se pueden observar algunos picos cuando el eje de simetría se acerca a la curva. Cuando se relaciona con el semi-eje \bar{y} la curva tiende a ser más suave, con menos ondulaciones y cambios. En la Figura 6-18 se muestran dos s-elipses con sus respectivos ejes de simetría. En este caso no se tomará ningún semi-eje en particular para alguna e-ellipse, por otro lado, se especifica que los ejes de simetría son los que se entre cruzan y están dentro (en su mayoría) de la s-ellipse (en rojo), la s-ellipse (en azul) es la que los encierra. Por defectos del software aparece la s-ellipse coloreada de rojo pero se resalta que esto no hace parte de los ejes de simetría.

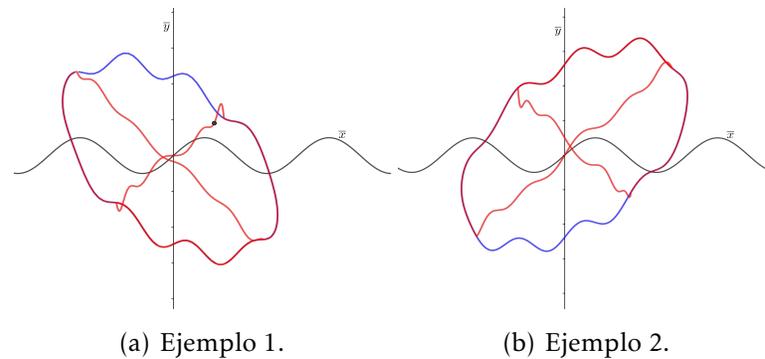


Figura 6-18.: s-Elipses rotadas

6.1.2.1. Applet s-ellipse y eje de simetría

Este applet cuenta con dos ventanas: en la ventana de la parte derecha (azul claro) se encuentran seis botones, en los cuales el usuario puede ingresar los valores de a, b, c, d, e, f

para la ecuación de la s-elipse $a\bar{x}^2 + c\bar{y}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0$ y se muestra la ecuación de la s-elipse. En la ventana izquierda se muestra la gráfica de la s-elipse y su respectivo eje de simetría. Para que se muestre la gráfica, los coeficientes deben cumplir que $b^2 - 4ac < 0$.

Link: <https://www.geogebra.org/m/pywuxmzq>

Ejemplo: Se determinará la ecuación $0,5\bar{x} + 0,9\bar{x}\bar{y} + 9\bar{y}^2 - 4\bar{x} + 5\bar{y} - 6 = 0$. Para ello se ingresarán los valores 0,5,0,9,4,5,-6 en los botones a,b,c,d,e,f respectivamente. En la figura 6-19 se muestra el resultado del proceso anterior.

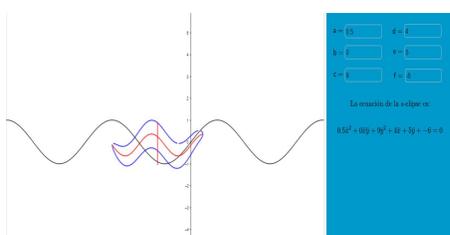


Figura 6-19.: Applet s-elipse y eje de simetría

6.1.3. s-Hipérbola

Con la ecuación 6-1 y la condición que $b^2 - 4ac > 0$ surgen otras condiciones para que la representación gráfica de la solución a esta ecuación sea una s-hipérbola.

1. Si a y c son 0 simultáneamente, b y f necesariamente serán diferentes de 0
2. Si $b = 0$ entonces a, c y f tienen que ser diferentes de 0.

Análogo a la secciones anteriores se analizarán algunos casos generales y se mostrará el eje de simetría para las s-hipérbolas.

1° **Caso:** $a\bar{x}^2 + c\bar{y}^2 + f = 0$

Estas s-hipérbolas se tienen una condición inicial la cual es que $f \neq 0$, además si $f < 0$ entonces a ó b tendrá que ser mayor que 0 o, de manera contraria, si $f > 0$ entonces a ó b tendrá que ser menor que 0. Por otro lado, se pueden caracterizar de dos formas teniendo en cuenta los coeficientes $-\frac{f}{a}$ y $-\frac{f}{c}$.

Si $-\frac{f}{a} < 0$ se tiene que las s-hipérbolas se relacionan directamente con el eje \bar{y} , es decir, que se tendrá aperturas hacia arriba y hacia abajo y debido a su relación con el eje \bar{y} se dice que el eje de simetría será la s-recta $\bar{x} = 0$. En la Figura 6-20 se muestran dos s-hipérbolas

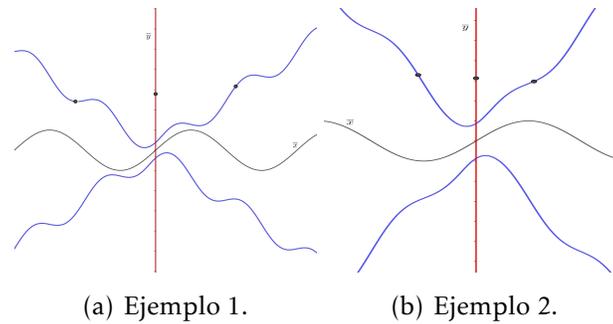


Figura 6-20.: s-Hipérbolas con $-\frac{f}{a} < 0$

que cumplen esta característica con su respectivo eje de simetría. Cuando el coeficiente a se aleja de 0, la s-hipérbola se angosta se aleja del eje \bar{y} , si a se acerca a 0 se ancha la curva o se aleja del eje \bar{y} . De manera contraria sucede con c , cuando se aleja de 0 se ancha y cuando se acerca a 0 se angosta. Para determinar el corte con el eje \bar{y} se resuelve la ecuación:

$$\bar{y} = \pm \sqrt{-\frac{f}{c}} \quad , \quad \bar{x} = \pm \sqrt{-\frac{f}{a}} \quad (6-5)$$

Cabe resaltar que estas ecuaciones siempre tienen solución por las condiciones puestas al inicio. Para determinar los cortes con el semi-eje \bar{x} se pueden determinar resolviendo la siguiente ecuación:

$$a\bar{x}^2 + c \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{x}}{2} \right) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \right)^2 + f = 0 \quad (6-6)$$

Ahora si $-\frac{f}{c} < 0$ se tiene que las s-hipérbolas tienen relación con el semi-eje \bar{x} por tanto, su apertura será hacia la izquierda y hacia la derecha y por consecuencia su eje de simetría será la s-recta $\bar{y} = 0$. En la Figura 6-21 se muestran dos s-hipérbolas con esta condición y su respectivo eje de simetría.

Para determinar los cortes con los ejes y semi-ejes se usan las ecuaciones (6-5) y (6-6) respectivamente. Por la condición inicial para este tipo de s-hipérbolas se concluye que estas no tienen corte con el eje \bar{y} ya que esta ecuación no tiene soluciones en los reales. De manera análoga a la condición anterior se tiene que cuando a se aleja de 0 la s-hipérbola se aleja del eje \bar{x} y cuando se acerca a 0 se acerca o angosta. De manera contraria sucede con c cuando se acerca a 0 se aleja y cuando se aleja de 0 se acerca al eje \bar{x} .

2° Caso: $a\bar{x}^2 + c\bar{y}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0$

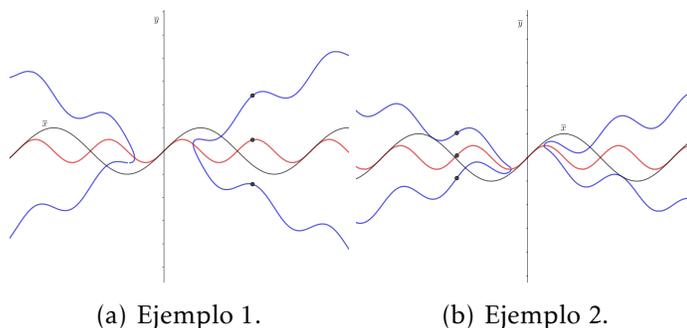


Figura 6-21.: s-Hipérbolas con $-\frac{f}{c} < 0$

En este caso se tiene que las s-hipérbolas tienen el mismo comportamiento que las del caso anterior pero estas se desplazan en el plano sin cambiar su forma. Para determinar estos movimientos se usarán los coeficientes h y k que será el cambio en el eje \bar{x} y el cambio en el eje \bar{y} respectivamente. Estos coeficientes tienen las siguientes sustituciones:

$$h = -\frac{d}{2a} \quad \text{y} \quad k = -\frac{e}{2c}$$

Si $h < 0$ se mueve hacia la izquierda, si $h > 0$ se mueve hacia la derecha. Ahora si $k < 0$ la s-hipérbola se moverá hacia arriba, si no, se moverá hacia abajo. (Ver Figura 6-22)

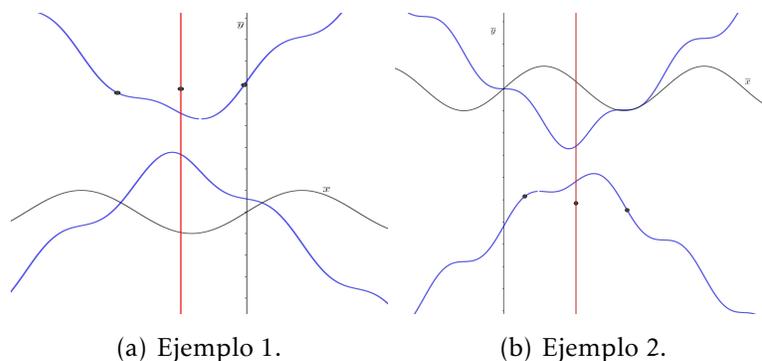


Figura 6-22.: Movimientos de la s-hipérbola

Fíjese que lo anterior dicho se refiere a tomar la s-hipérbola y moverla h s-unidades en el eje \bar{x} y k s-unidades en el eje \bar{y} .

Ahora realizará la traslación de los ejes coordenados hasta el punto $(h, k)_S$. Se tiene que

generalmente los puntos sobre las s-hipérbolas son de la forma:

$$\left(\bar{x}, \frac{\sqrt{-4c(a\bar{x}^2 + d\bar{x} + f) + e}}{2c} \right)_s$$

Ahora utilizando las ecuaciones de traslación (5-1) se obtiene que la ecuación de la s-hipérbola en el sistema trasladado es de la forma:

$$4c^2(\bar{y}' + \text{sen}(\bar{x}) - \text{sen}(\bar{x} + h) - e + k + \text{sen}(h))^2 + 4c(a(\bar{x} + h)^2 + d(\bar{x} + h) + f) = 0$$

Luego se deduce que en el sistema trasladado la s-hipérbola no se puede expresar como una ecuación cuadrática.

Para el eje de simetría se tendrán en cuenta los siguientes coeficientes:

$$1. \frac{d^2c + e^2a - 4acf}{4a^2c} \quad \text{y} \quad 2. \frac{d^2c + e^2a - 4acf}{4ac^2}$$

Se contarán con dos posibles ejes de simetría: *i)* la s-recta $\bar{x} = h$ y *ii)* la s-recta $\bar{y} = k$. Si $1. < 2.$ el eje de simetría será la s-recta $\bar{y} = k$, en caso contrario, el eje de simetría será la s-recta $\bar{x} = h$. En la Figura 6-23 se muestran dos s-hipérbolas en las cuales se trasladó los ejes coordenados hasta el punto $(h, k)_s$ en la parte a) se encuentra una s-hipérbola cuyo eje de simetría es s-recta $\bar{x} = h$ y en la parte b) una s-hipérbola cuyo eje de simetría es la s-recta $\bar{y} = k$.

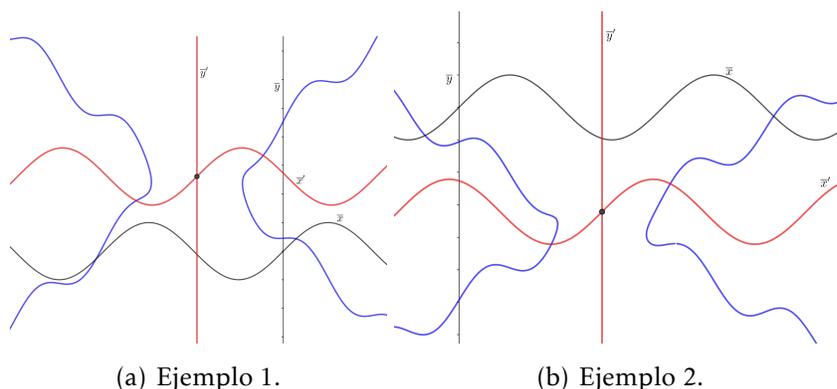


Figura 6-23.: Traslación de los ejes en las s-hipérbolas

Para determinar los cortes con el eje \bar{y} y el eje \bar{x} se resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\bar{y} = \frac{-e \pm \sqrt{e^2 - 4cf}}{2c}, \quad \bar{x} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4af}}{2a}$$

Cuando las ecuaciones tienen solución en los números complejos se concluye que no tiene cortes con los ejes. Para mirar los cortes con el semi-eje \bar{x} se soluciona la ecuación que se muestra a continuación:

$$a(\bar{x})^2 + c \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{x}}{2} \right) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \right)^2 + d\bar{x} + e \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{x}}{2} \right) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \right) + f = 0$$

De manera similar, cuando no tiene solución en los número reales es porque no tiene cortes con el eje \bar{x} .

3° **Caso:** $a\bar{x}^2 + b\bar{x}\bar{y} + c\bar{y}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0$

Cuando aparece el término $\bar{x}\bar{y}$ se tiene que las s-hipérbolas sufren un cambio con respecto a su forma y su posicionamiento en el plano. Éstas s-hipérbolas están rotadas y/o trasladadas y por ello, sufren un cambio de forma porque, como se vio en casos de las otras s-cónicas, se tiene que los puntos sobre la curva no tienen una relación directa con algún semi-eje coordenado, además, cuando se usan las ecuaciones de rotación se encuentra que la ecuación resultante en el sistema rotado no es una ecuación cuadrática. En la Figura 6-24 se pueden ver dos ejemplos de este tipo de s-hipérbolas y se puede observar que en algunas partes cambia su forma drásticamente con respecto a casos anteriores.

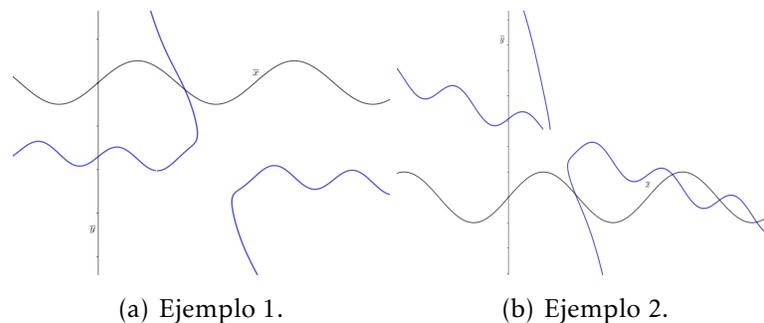


Figura 6-24.: s-Hipérbolas rotadas

En la Figura 6-25 se muestra a los ejes coordenados rotados con un ángulo

$$\theta = \frac{\arctan\left(\frac{b}{a-c}\right)}{2}$$

y dos s-hipérbolas. Fíjese que a pesar de que en la parte (a) se ve alguna similitud de su forma con el eje \bar{x} más adelante se mostrará que el eje de simetría no se comporta de la misma forma que en casos anteriores.

Como se ha mencionado anteriormente, ya que los puntos no tienen una relación directa con algún eje, los ejes de simetría no se pueden expresar como una ecuación, aunque, estos cumplen cierta regularidad.

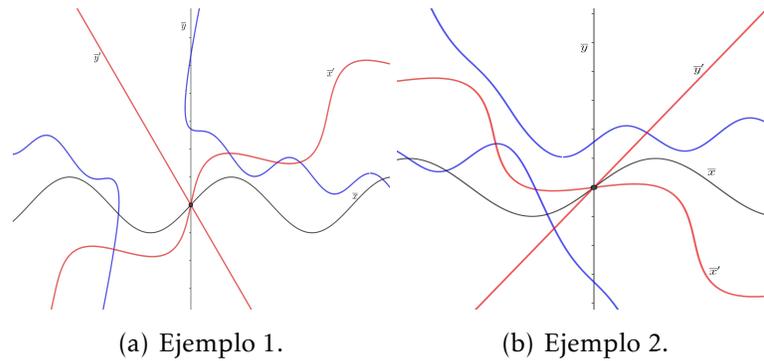


Figura 6-25.: s-Hipérbolas rotadas

Cuando el eje de simetría se relaciona con el semi-eje \bar{x} este tiende a tener más ondulaciones y estas son más pronunciadas. Cuando se relaciona con el semi-eje \bar{y} la curva tiene de a ser más suave, con menos ondulaciones y cambios. En la Figura 6-26 se muestran dos s-hipérbolas con sus respectivos semi-ejes de simetría. En este caso no se tomará ningún semi-eje en particular, por otro lado, se especifica que los ejes de simetría son los que están entre la s-hipérbola (en rojo). Por defectos del software aparece la s-hipérbola coloreada de rojo pero se resalta que esto no hace parte de los ejes de simetría.

Para determinar los cortes con el eje \bar{y} y el eje \bar{x} se resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\bar{y} = \frac{-e \pm \sqrt{e^2 - 4cf}}{2c}, \quad \bar{x} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4af}}{2a}$$

Cuando las ecuaciones tienen solución en los números complejos se concluye que no tiene cortes con los ejes. Para mirar los cortes con el semi-eje \bar{x} se soluciona la ecuación que se muestra a continuación:

$$a(\bar{x})^2 + b\bar{x} \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{x}}{2} \right) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \right) + c \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{x}}{2} \right) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \right)^2 + d\bar{x} + e \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{x}}{2} \right) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \right) + f = 0$$

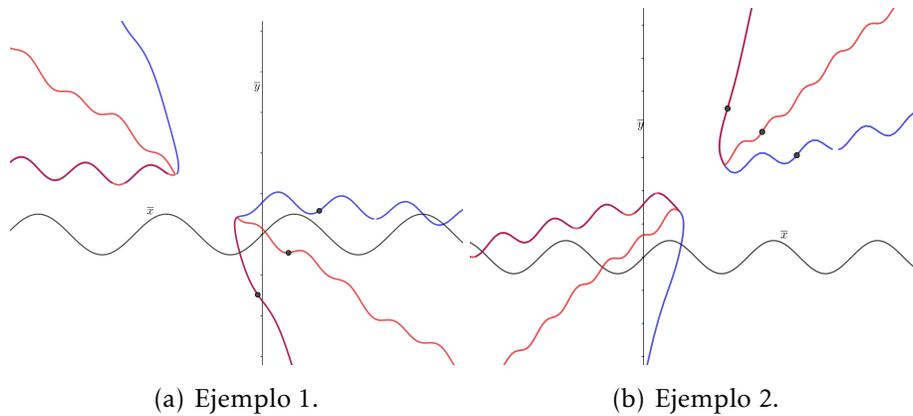


Figura 6-26.: Eje de simetría de s-Hipérbolas rotadas

De manera similar, cuando no tiene solución en los número reales es porque no tiene cortes con el eje \bar{x} .

6.1.3.1. Applet s-hipérbola y eje de simetría

Este applet cuenta con dos ventanas: en la ventana de la parte derecha (azul claro) se encuentran seis botones, en los cuales el usuario puede ingresar los valores de a, b, c, d, e, f para la ecuación de la s-elipse $a\bar{x}^2 + c\bar{y}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0$ y se muestra la ecuación de la s-hipérbola. En la ventana izquierda se muestra la gráfica de la s-hipérbola y su respectivo eje de simetría. Para que se muestre la gráfica, los coeficientes deben cumplir que $b^2 - 4ac > 0$.

Link: <https://www.geogebra.org/m/efsqhx5v>

Ejemplo: Se determinará la ecuación $-4\bar{x} - 3\bar{x}\bar{y} + 1\bar{y}^2 + 3\bar{x} + 1\bar{y} - 2 = 0$. Para ello se ingresarán los valores $-4, -3, 1, 3, 1, -2$ en los botones a, b, c, d, e, f respectivamente. En la figura 6-27 se muestra el resultado del proceso anterior.

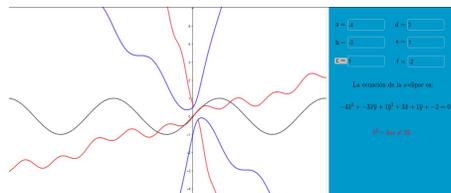


Figura 6-27.: Applet s-hipérbola y eje de simetría

6.2. gs-Cónicas a partir de la definición por lugar geométrico

En esta sección se mostrarán dos maneras de definir las gs-cónicas sin necesidad de usar su expresión algebraica. Una de ellas tendrá que ver con suma de dos distancias y otra a partir de la excentricidad \widehat{e} que es el cociente entre dos distancias. Como se mencionó al inicio del capítulo, estas gs-cónicas no se pueden expresar algebraicamente como una ecuación cuadrática, sin embargo, se mostrará su ecuación en el *Sistema Seno*, además, se dijo que no había una equivalencia entre la s-cónica definida por la ecuación cuadrática y la gs-cónica definida como lugar geométrico, por esto, a las cónicas definidas como lugar geométrico se denotarán con **gs** al inicio del nombre.

6.2.1. Lugar Geométrico a partir de suma de distancias

En el estudio de estas gs-cónicas en el *Sistema Seno* con las mismas definiciones que se presentaron en la sección 2.3, se encontró que, ya que la distancia entre dos puntos no cambia de un sistema a otro, su representación gráfica será la misma que se muestra en el sistema cartesiano, lo que cambia es su representación algebraica.

6.2.1.1. gs-Elipse

La definición por lugar geométrico de la gs-elipse se enuncia como:

- Sean dos puntos F_1, F_2 fijos y d_{F_1, F_2} la distancia entre ellos. Una elipse es el lugar geométrico que determina un punto P de tal manera que $d_{P, F_1} + d_{P, F_2} = k$, k una constante y $k > d_{F_1, F_2}$.

Esto se representa gráficamente en la Figura 6-28, donde se muestra el recorrido del punto P que cumple la anterior condición.

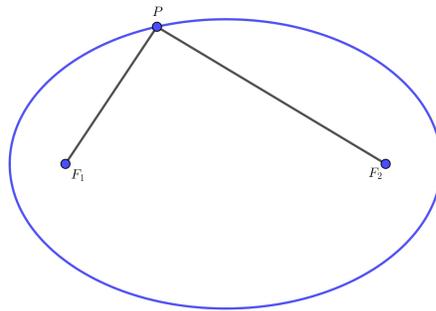


Figura 6-28.: gs-Elipse por definición de suma de distancias

Con esta definición de gs-elipse se encontró que se puede determinar sus ejes de simetría y su centro. El primer eje de simetría será la línea α que contiene a los focos (puntos F_1 y F_2) y el segundo eje de simetría será una línea β perpendicular a α por el centro C el cual es el punto medio entre los focos. Si se ubica el centro de la gs-elipse en el origen de los ejes \bar{x} , \bar{y} , se puede expresar algebraicamente de la siguiente forma:

$$a\bar{x}^2 + c(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 4f = 0$$

En el anexo B.1 se muestra el proceso que se realizó para determinar esta ecuación. Para determinar las ecuaciones de las líneas se tomará las coordenadas de los focos $(x_0, y_0)_S$ y $(x_1, y_1)_S$ y con esto se dirá que los ejes de simetría α y β se pueden expresar algebraicamente como:

$$\begin{aligned} \alpha : \quad a'\bar{x} + b'\bar{y} + b'\text{sen}(\bar{x}) + c' &= 0 \\ \beta : \quad a''\bar{x} + b''\bar{y} + b''\text{sen}(\bar{x}) + c'' &= 0 \end{aligned}$$

con las sustituciones

$a' =$	$y_1 - y_0 + \text{sen}(x_1) - \text{sen}(x_0)$
$b' =$	$x_0 - x_1$
$c' =$	$(x_1 - x_0)(y_0 + \text{sen}(x_0)) + y_0 + y_1 - \text{sen}(x_0) + \text{sen}(x_1)$
$a'' =$	$2(x_0 - x_1)$
$b'' =$	$2(y_0 - y_1 + \text{sen}(x_0) - \text{sen}(x_1))$
$c'' =$	$b''(y_0 + y_1 + \text{sen}(x_0) + \text{sen}(x_1)) + (x_1 - x_0)(x_0 + x_1)$

En la Figura 6-29 se muestran dos ejemplos de gs-elipses ubicadas en el *Sistema Seno*.

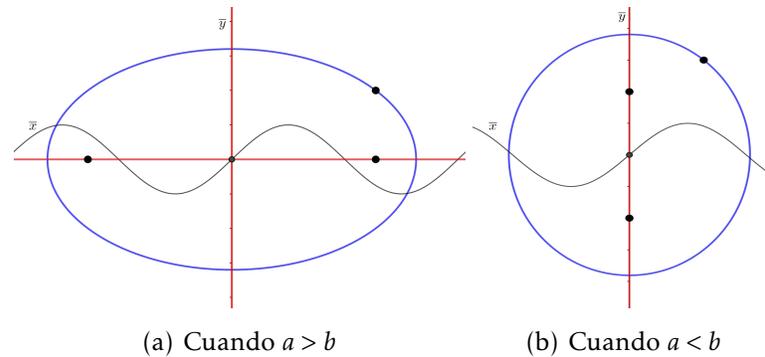


Figura 6-29.: Ejes de simetría de gs-elipse con centro en el origen

Si se ubican los ejes coordenados de tal manera que el origen no coincida con el centro de la gs-elipse se puede decir que el centro tiene coordenadas $(h, k)_S$ y esta se expresará algebraicamente con la siguiente ecuación:

$$a\bar{x}^2 + c(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 2d\bar{x} + 2e(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})) + 4f = 0$$

En el anexo B.1 se muestra el proceso que se realizó para determinar esta ecuación y en la Figura 6-30 se muestran dos representaciones de este tipo de gs-elipses.

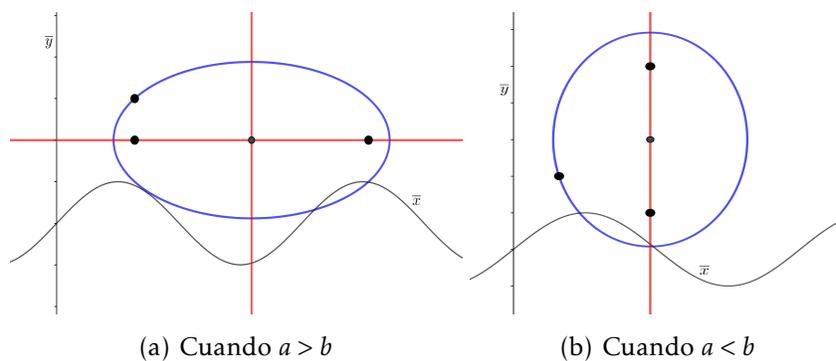


Figura 6-30.: Ejes de simetría de gs-elipses con centro diferente al origen

Si se ubican los ejes coordenados de tal manera que el origen no coincida con el centro de la gs-elipse y, además, la gs-elipse este rotada, esta se expresará algebraicamente con la siguiente ecuación:

$$a\bar{x}^2 + 2b\bar{x}(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})) + c(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 2d\bar{x} + 2e(\bar{x} + \text{sen}(\bar{x})) + 4f = 0$$

En el anexo B.1 se muestra el proceso que se realizó para determinar esta ecuación y en la Figura 6-31 se muestran dos representaciones de este tipo de gs-elipses.

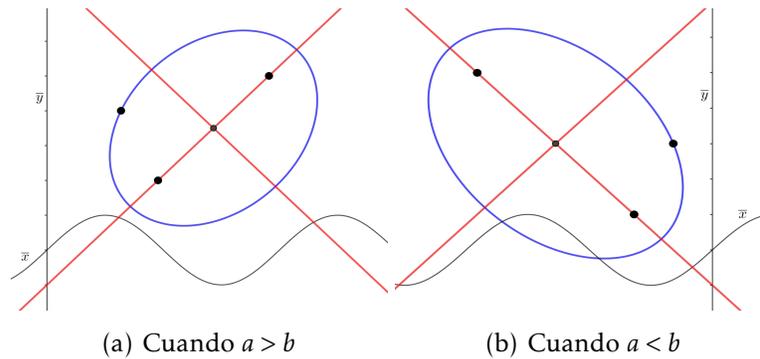


Figura 6-31.: Ejes de simetría de gs-elipses rotadas

6.2.1.2. gs-Hipérbola

La gs-hipérbola se define como:

- Sean dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados focos y d_{F_1, F_2} la distancia entre ellos. Una hipérbola es el conjunto de puntos que cumplen la condición que $|d_{P, F_1} - d_{P, F_2}| = k$, siendo k una constante positiva y cumple que $k < d_{F_1, F_2}$.

En la Figura 6-32 se muestra una representación gráfica de la gs-hipérbola.

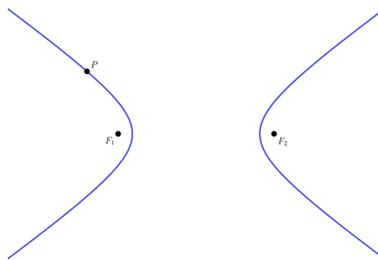


Figura 6-32.: gs-Hipérbola por definición de suma de distancias

Con esta definición de gs-hipérbola se encontró que se puede determinar sus ejes de simetría, su centro y además, sus asíntotas. El primer eje de simetría será la línea α que contiene a los focos y el segundo eje de simetría será una línea β perpendicular a α por el centro C el cual es el punto medio entre los focos y las asíntotas serán dos líneas que

pasan por C y nunca toca a la gs-hipérbola. Si se ubica el centro de la gs-hipérbola en el origen de los semi-ejes \bar{x} , \bar{y} , se puede expresar algebraicamente de la siguiente forma:

$$a\bar{x}^2 + c(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 4f = 0$$

En el anexo B.2 se muestra el proceso que se realizó para determinar esta ecuación. Para determinar las ecuaciones de las líneas en cualquier caso se tomará las coordenadas de los focos $(x_0, y_0)_S$ y $(x_1, y_1)_S$ y con esto se dirá que los ejes de simetría α y β se pueden expresar algebraicamente como:

$$\begin{aligned} \alpha: \quad a'\bar{x} + b'\bar{y} + b'\text{sen}(\bar{x}) + c' &= 0 \\ \beta: \quad a''\bar{x} + b''\bar{y} + b''\text{sen}(\bar{x}) + c'' &= 0 \end{aligned}$$

con las sustituciones

$a' =$	$y_1 - y_0 + \text{sen}(x_1) - \text{sen}(x_0)$
$b' =$	$x_0 - x_1$
$c' =$	$(x_1 - x_0)(y_0 + \text{sen}(x_0)) + y_0 + y_1 - \text{sen}(x_0) + \text{sen}(x_1)$
$a'' =$	$2(x_0 - x_1)$
$b'' =$	$2(y_0 - y_1 + \text{sen}(x_0) - \text{sen}(x_1))$
$c'' =$	$b''(y_0 + y_1 + \text{sen}(x_0) + \text{sen}(x_1)) + (x_1 - x_0)(x_0 + x_1)$

Por último, las asíntotas tendrán alguna de las siguientes ecuaciones:

$$\pm \sqrt{\frac{a}{b}}\bar{x} + \bar{y} + \text{sen}(\bar{x}) = 0 \quad \text{ó} \quad \pm \sqrt{\frac{b}{a}}\bar{x} + \bar{y} + \text{sen}(\bar{x}) = 0$$

En la Figura 6-33 se muestra una una representación de lo anteriormente dicho.

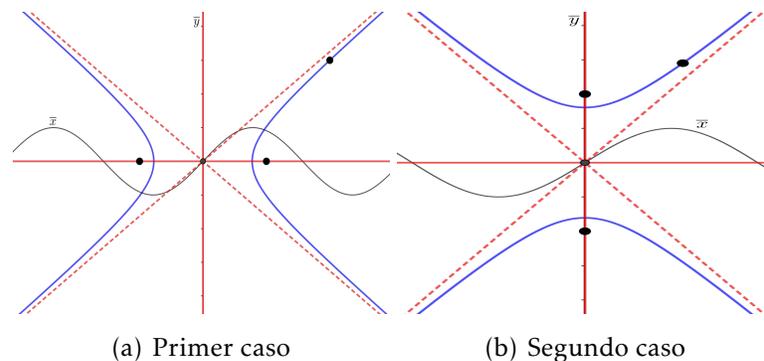


Figura 6-33.: Ejes de simetría de gs-Hipérbola con centro en el origen

Si se ubican los semi-ejes coordenados de tal manera que el origen no coincida con el centro de la gs-hipérbola se puede decir que el centro tiene coordenadas $(h, k)_S$ y esta se expresará algebraicamente con la siguiente ecuación:

$$a\bar{x}^2 + c(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 2d\bar{x} + 2e(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})) + 4f = 0$$

En el anexo B.2 se muestra el proceso que se realizó para determinar esta ecuación. Las asíntotas serán de la forma:

$$\pm\sqrt{\frac{a}{b}}(\bar{x} - h) + \bar{y} + \text{sen}(\bar{x}) - k - \text{sen}(h) = 0 \quad \text{ó} \quad \pm\sqrt{\frac{b}{a}}(\bar{x} - h) + \bar{y} + \text{sen}(\bar{x}) - k - \text{sen}(h) = 0$$

En la Figura 6-34 se muestran dos representaciones de este tipo de gs-hipérbolas.

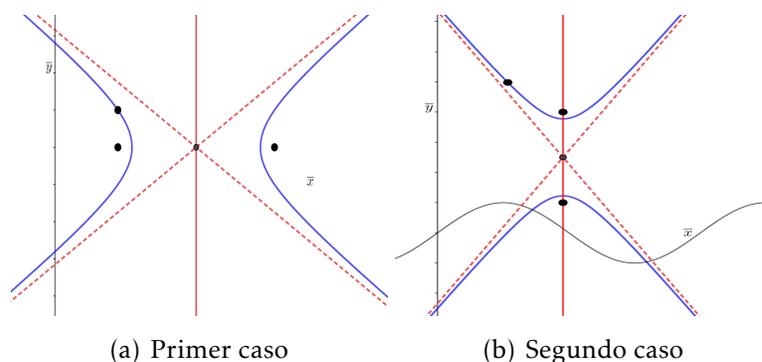


Figura 6-34.: Ejes de simetría de gs-hipérbolas con centro diferente al origen

Si se ubican los semi-ejes coordenados de tal manera que el origen no coincida con el centro de la gs-hipérbola y, además, la gs-hipérbola este rotada, esta se expresará algebraicamente con la siguiente ecuación:

$$a\bar{x}^2 + 2b\bar{x}(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})) + c(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 2d\bar{x} + 2e(\bar{x} + \text{sen}(\bar{x})) + 4f = 0$$

E el anexo B.2 se muestra el proceso que se realizó para determinar esta ecuación. Para las asíntotas se tiene en cuenta las ecuaciones de rotación (5-2) con un ángulo θ y se determina la ecuación:

$$\pm\sqrt{\frac{a}{b}}(\bar{x}' - h) + \bar{y}' + \text{sen}(\bar{x}') - k - \text{sen}(h) = 0 \quad \text{ó} \quad \pm\sqrt{\frac{b}{a}}(\bar{x}' - h) + \bar{y}' + \text{sen}(\bar{x}') - k - \text{sen}(h) = 0$$

En la Figura 6-35 se muestran dos representaciones de este tipo de gs-hipérbolas.

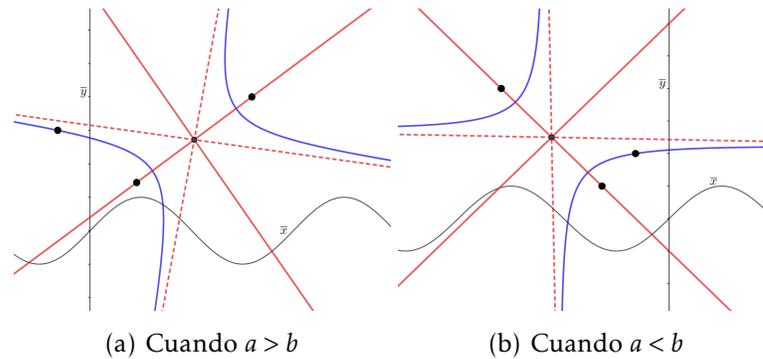


Figura 6-35.: Ejes de simetría de gs-hipérbolas rotadas

6.2.2. Lugar geométrico a partir de cociente de distancias

Estas definiciones tienen una particularidad y es que todas se definen a partir de un punto y una *s*-recta y como en el *Sistema Seno* las *s*-rectas pueden tener distintas formas se encontraron dos casos para cada gs-cónica. Cuando la *s*-recta es de la forma $a\bar{x} + c = 0$ y cuando es de la forma $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$. En el primer caso todas las gs-cónicas que se definan tendrán la misma forma pero, para el segundo caso las gs-cónicas varían con respecto a los coeficientes a, b, c . A continuación se presentan las definiciones y la representación algebraica de cada gs-cónica en los dos casos. La representación gráfica se presentará solo para el primer caso ya que no se pudo determinar la gráfica de las gs-cónicas del segundo caso porque la ecuación de estas resulta ser una ecuación diferencial la cual varía dependiendo de la distancia del punto a la *s*-recta y de los coeficientes de la *s*-recta.

6.2.2.1. gs-Parábola

Esta definición se enuncia como:

- Sea una *s*-recta l fija y un punto fijo F fuera de l . Una parábola es el lugar geométrico que determina un punto P de tal manera que la excentricidad es siempre 1, es decir, que el cociente entre la distancia de C a F y la distancia de C a l son siempre iguales.

$$\widehat{e} = \frac{d_{P,F}}{d_{P,l}} = 1$$

Las gs-parábolas del primer caso se ven gráficamente como se presenta en la Figura 6-36.

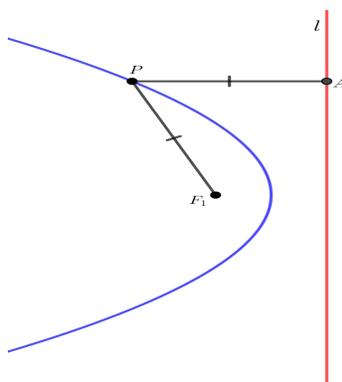


Figura 6-36.: gs-Parábola como definición de cociente entre distancias

Estas gs-parábolas también se les puede determinar un eje de simetría el cual es una línea α perpendicular a la s-recta l por el punto F con coordenadas $(x_0, y_0)_S$. Si se ubica el *Sistema Seno* de tal manera que el origen coincida con el vértice de la gs-parábola se puede determinar que la ecuación como:

$$c(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 2d\bar{x} = 0$$

Para el eje de simetría se tendrá la ecuación:

$$\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}) - y_0 + \text{sen}(x_0) = 0$$

Si se ubica el *Sistema Seno* de tal manera que el origen no coincida con el vértice de la gs-parábola, se deduce que el vértice tiene coordenadas (h, k) y se determina que la ecuación que le corresponde a este tipo de gs-parábolas es:

$$a(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 2d\bar{x} + 2e(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})) + 4f = 0$$

Y la ecuación para el eje de simetría es:

$$\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}) - k - \text{sen}(h) = 0$$

En el anexo B.3 se muestra el proceso que se realizó para determinar las ecuaciones de las gs-parábolas.

Para el segundo caso se tiene que encontrar los puntos P_i con coordenadas $(x_i, y_i)_S$ que satisfacen la definición teniendo en cuenta que la s-recta es de la forma $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$. Para ello se toma la ecuación de distancia entre dos puntos 4-11 y la definición de distancia

entre un punto y una s-recta, se igualan y se obtiene que la ecuación de las gs-parábolas será de la forma:

$$d_{F,P_i} = \min[d_{P_i,L_j}]$$

$$(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i + \text{sen}(x_0) - \text{sen}(x_1))^2 = 4(\min[d_{P,L_j}])^2$$

Fíjese que, por la definición de distancia de un punto a una s-recta, se obtiene una ecuación diferencial que cuando se resuelve no hay soluciones cuadráticas. Por esta dificultad en el momento de expresar estas gs-parábolas algebraicamente no fue posible representarlas gráficamente.

6.2.2.2. gs-Elipse

La definición por lugar geométrico de la la gs-elipse a partir de la excentricidad se enuncia como:

- Sea una s-recta l fija y un punto fijo F fuera de l . Una s-elipse es el lugar geométrico que determina un punto P de tal manera que la excentricidad es siempre está entre 0 y 1.

$$\widehat{e} = \frac{d_{P,F}}{d_{P,l}} < 1$$

Esto se representa gráficamente en la Figura 6-37, donde se muestra el recorrido del punto P que cumple la anterior condición.

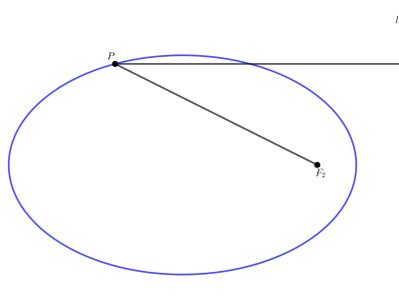


Figura 6-37.: gs-Elipse por definición de excentricidad

La ecuación de este tipo de s-elipse ya se mostró en la sección 6.2.1.1, así como su eje de simetría.

Para el segundo caso se hará un proceso análogo al de la sección anterior tomando la s-recta y el punto F y determinando los puntos de tal manera que:

$$\frac{d_{F,P_i}}{\min[d_{P_i,L_i}]} = k$$

con k entre 0 y 1. Luego, despejando y sustituyendo se encuentra que la ecuación de estas gs-elipses quedan en términos de una ecuación diferencial que no tiene soluciones cuadráticas.

$$(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i + \text{sen}(x_0) - \text{sen}(x_1))^2 = 4(k \min[d_{P_i,L_j}])^2$$

6.2.2.3. gs-Hipérbola

La gs-hipérbola se define como:

- Sea una s-recta l fija y un punto fijo F fuera de l . Una s-hipérbola es el lugar geométrico que determina un punto P de tal manera que la excentricidad es siempre mayor a 1.

$$\widehat{e} = \frac{d_{P,F}}{d_{P,l}} > 1$$

En la Figura 6-38 se muestra una representación gráfica.

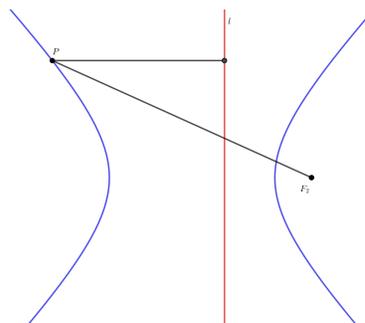


Figura 6-38.: gs-Hipérbola por definición de excentricidad

La ecuación de este tipo de gs-hipérbolas se mostró en la sección 6.2.1.2, así como su eje de simetría.

Para el segundo caso se hará un proceso análogo al de las secciones anteriores tomando la s -recta y el punto F y determinando los puntos de tal manera que:

$$\frac{d_{F,P_i}}{\min[d_{P_i,L_i}]} = k$$

con k mayor que 1. Luego, despejando y sustituyendo se encuentra que la ecuación de estas gs-hipérbolas queda en términos de una ecuación diferencial que no tiene soluciones cuadráticas.

$$(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i + \text{sen}(x_0) - \text{sen}(x_1))^2 = 4(k \min[d_{P_i,L_i}])^2$$

7. Conclusiones y reflexiones

7.1. Conclusiones

Teniendo en cuenta los objetivos y propósitos mencionados en la presentación de este documento se pueden tener diferentes conclusiones enfocadas principalmente en las rectas y cónicas definidas en el *Sistema Seno*.

Para iniciar el estudio se mostró una caracterización de las rectas del sistema cartesiano en el *Sistema Seno*, es decir, se tomó una recta del sistema coordenado usual y se ubicó en el *Sistema Seno* y a estas se les llamó líneas y se mostró su ecuación utilizando un cambio de coordenadas entre el sistema cartesiano y el *Sistema Seno*.

Para hablar acerca de las rectas en el *Sistema Seno* hay que resaltar que éstas se definieron como el conjunto solución a la ecuación lineal $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$, se les nombró s-rectas y se representaron gráficamente. Estas s-rectas visualmente son onduladas y no tienen un periodo de cambio, exceptuando los casos en los cuales $a = 0$ ó $b = 0$. Con estas se estudiaron diferentes definiciones y propiedades las cuales se enuncian a continuación.

- Teniendo en cuenta la pendiente m de la s-recta como la manera como se mueven los puntos sobre esta, se mostró que se puede encontrar m a partir de la ecuación lineal. Se definieron las s-unidades para referirse al cambio de coordenadas de los puntos, es decir, si se tienen los puntos A y B con coordenadas $(x_0, y_0)_S$ y $(x_0 + 1, y_0 + 1)_S$ respectivamente, se puede decir que B se movió 1 s-unidad en el eje \bar{x} y 1 s-unidad en el eje \bar{y} .
- Con relación a los ángulos entre s-rectas se tuvo que definir las líneas asociadas y las líneas tangentes a una s-recta para mostrar dos maneras de determinar los ángulos entre estas y se concluyó que a pesar que la definición de ángulos partir de líneas tangentes muestra un ángulo de barrido, o de apertura, entre las s-rectas, no cumple con los diferentes teoremas presentados en el documento, caso contrario si se utiliza la definición de ángulo a partir de líneas asociadas.
- Para los cortes entre s-rectas se encontraron tres posibles casos: si nunca se tocan, si se tocan en un solo punto o si se intersecan en todos sus puntos. El primer y último

caso se tomó como la definición geométrica del paralelismo entre s-rectas y, desde lo analítico, se relacionó el paralelismo con la igualdad de sus pendientes.

- Acerca de la perpendicularidad entre s-rectas, se estudió la equivalencia entre lo geométrico (que formen un ángulo de 90°) y lo algebraico ($m_1 \cdot m_2 = -1$) desde las dos definiciones de ángulo y se encontró que para la definición de ángulo a partir de líneas tangentes no se cumple esta equivalencia y con la definición a partir de líneas asociadas si se cumple.

Se estudió la traslación y rotación de los ejes para el *Sistema Seno* definiendo un cambio de coordenadas, para cada caso, en las cuales se puede ver las coordenadas de un punto del sistema original en el sistema trasladado o rotado.

Con respecto a la distancia entre dos puntos en este sistema se tuvo en cuenta la distancia Euclidiana y se caracterizó la ecuación para determinar esta distancia. Con esta definición se logra definir la distancia entre un punto y una s-recta y se muestra una manera de encontrarla algebraicamente. Esto fue de gran utilidad para mostrar las definiciones de las gs-cónicas y para definir la simetría entre dos puntos, entre un punto y una recta y el eje de simetría de una s-cónica y gs-cónica.

Acerca de las cónicas en el *Sistema Seno* se mostró la representación gráfica de cada una definida desde el conjunto de puntos solución a la ecuación cuadrática (o ecuación general de segundo grado) de la forma $a\bar{x}^2 + b\bar{x}\bar{y} + c\bar{y}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0$ llamadas s-cónicas y de las cónicas como lugar geométrico llamadas gs-cónicas.

- Para las s-cónicas se muestran los diferentes movimientos que pueden tener en el plano, según los coeficientes. Se muestran los posibles casos en los cuales las s-cónicas están trasladadas y/o rotadas y se concluye que cuando se realiza una traslación o rotación de los ejes, su ecuación no es cuadrática. También se mostró el eje de simetría para cada una usando la definición que se mencionó anteriormente, y para algunos casos se caracterizó una ecuación para el eje de simetría.
- Con las gs-cónicas se mostraron dos maneras distintas de definir las: con la suma de dos distancias y con el cociente de dos distancias. Se caracterizó una ecuación para cada caso y se mostró que no es una ecuación cuadrática. Por último, se mostró el eje de simetría para cada caso y la ecuación de este.
- Con respecto a la equivalencia entre la definición como lugar geométrico y el conjunto de puntos solución de la ecuación cuadrática que se cumple en el sistema cartesiano, se puede decir que en el *Sistema Seno* no se cumple por las siguientes

razones: para el segundo caso no se pudo determinar los foco y las directrices para las s-cónicas de tal manera que cumpla alguna de las definiciones como lugar geométrico. Para el primer caso se mostró que las gs-cónicas no se pueden representar algebraicamente como una ecuación cuadrática.

Por otro lado, se crearon los diferentes applets en los cuales el lector puede explorar en este sistema familiarizándose con los ejes coordenados, las representaciones gráficas y las diferentes definiciones mostradas.

Por último, acerca del tema que se trató en este documento, se hace una reflexión acerca de la presentación en el aula de los objetos geométricos ya que, usualmente, se presentan como objetos con una sola representación la cual es la única que cumple las propiedades o la definición. Con el desarrollo de este documento se evidencia que esto no es cierto, si se toman las definiciones usuales o no, se puede cambiar la manera de representarlos y mostrar que las matemáticas son flexibles en muchos aspectos.

7.2. Reflexiones y proyecciones

Al inicio del desarrollo de esta investigación se tenía pensado realizar un documento con un enfoque meramente matemático en el cual se trataran los mismos temas pero desde posturas diferentes. Esto se vería reflejado en la manera de presentar el documento, la teoría, el desarrollo, los resultados, entre otros temas tratados. Cuando se presenta como anteproyecto y se inicia a desarrollar como trabajo de grado se empieza a cambiar este enfoque a uno más explicativo en el cual se guíe al lector a partir de unos pasos a seguir, mostrando lo que se hizo para llegar a los diferentes resultados. Esto creemos que es de ayuda para que el lector entienda y se familiarice con la manera con la cual se desarrollarán los diferentes aspectos a tratar.

A medida de la construcción del documento fue evidente que la exploración fue fundamental para llegar a los resultados, en este instante se entendió la importancia que tuvo el software GeoGebra en la exploración de los diferentes objetos geométricos en este sistema, ya que gracias a este se pudo indagar, manipular y corroborar las diferentes conclusiones que se mostraron. Relacionado con la manipulación de estos tipos de software, en especial de GeoGebra, se evidenció que para manipularlos hay que tener un conocimiento previo para poder entender y relacionar los resultados que presenta el software, en algunos casos la aplicación mostraba resultados incoherentes y se tenía que realizar el programa de distintas maneras para corroborar que el resultado.

Teniendo en cuenta lo dicho en el anterior párrafo se crean diferentes reflexiones en términos de nuestra formación como docentes de matemáticas como la importancia de

la exploración y visualización de los diferentes conceptos que se presentan en el aula de clase. Una manera de lograrlo es a través de los diferentes software (o graficadores), como GeoGebra, o con diferentes herramientas didácticas. Claramente para construir algún objeto geométrico utilizando estas herramientas se tiene que tener diferentes conocimientos acerca del tema que se va a tratar ya que puede que por la manipulación errónea o un fallo de la herramienta se presenten resultados erróneos, pero esto no significa que el estudiante siempre tenga que tener conocimientos previos para la manipulación o visualización en estas herramientas. También crea consciencia en que el docente es un guía de los estudiantes, si no se muestra de manera concisa y sucinta los procedimientos que se tienen que realizar, probablemente los estudiantes no adquieran un aprendizaje significativo.

Acerca de las proyecciones de este documento se dejan algunas preguntas sin resolver en este *Sistema Seno* como:

- ¿Cómo se ven gráficamente las s-cónicas definidas como lugar geométrico? y ¿cómo se ven algebraicamente?
- Teniendo en cuenta la definición de ángulo a partir de líneas tangentes, ¿se podría encontrar una relación entre las pendientes y el ángulo entre dos s-rectas para realizar una equivalencia entre la definición geométrica y la definición algebraica de la perpendicularidad?
- En el sistema cartesiano la distancia entre dos puntos se puede definir como la longitud del segmento de recta que los une. Si se toma esta definición en el *Sistema Seno* ¿cómo cambiarían las representaciones de las definiciones que se asocian con distancia?

Bibliografía

- [1] APÓSTOL, T.: *Calculus. Vol I.* Barcelona : Reverté, 1984
- [2] FERNÁNDEZ SÁNCHEZ, F.: *Un estudio de las rectas en planos oblicuos perpendiculares*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Tesis de Grado, 2011
- [3] FILLOY, E. ; HITT, F.: Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. En: *Grupo Editorial Iberoamérica* 10 (1998), p. 23–45
- [4] KLETENIK, D.: *Problemas de geometría analítica.* Moscú : Mir, Moscú, 1968
- [5] KOLMAN, B. ; HILL, D.: *Álgebra lineal.* México D.F : Pearson, 2006
- [6] LEHMANN, C.: *Geometría analítica.* México D.F : Limusa, 1989
- [7] MENDIGAÑO, A.: *Distancia usual entre dos puntos en diferentes sistemas coordenados del plano y el espacio*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Tesis de Grado, 2016
- [8] MORENO CELEITA, L. A. ; CARREÑO GÓMEZ, O.: *Un tratamiento a las cónicas a partir de diferentes sistemas coordenados*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Tesis de Grado, 2011
- [9] ORTIZ PUENTES, L. A.: *Representación gráfica y algebraica de la ecuación cuadrática en el sistema PAR*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Tesis de Grado, 2012
- [10] STEWART, J. ; HERNÁNDEZ, R. ; SANMIGUEL, C.: *Introducción al Cálculo.* Thomson, 1989

A. Anexos capítulo 2

A.1.

A continuación se presentará una definición del sistema cartesiano y se mostrará cómo ubicar un punto A sobre este.

El sistema coordenado consta de dos rectas, una determinada por los puntos X y X' la cual llamaremos eje X y la otra determinada por los puntos Y y Y' la cual llamaremos eje Y , estas dos rectas intersecan en el origen del sistema coordenado el cual llamaremos O , ambas rectas adicionalmente son perpendiculares determinando cuatro regiones llamadas cuadrantes como se presenta en la Figura A-1.

Cualquier punto C puede localizarse por medio del sistema cartesiano, se traza el segmento CA perpendicular al eje X y el segmento CB perpendicular al eje Y , la distancia entre OA se representa como x siendo esta la abscisa de C y la distancia entre OB se representa como y siendo la ordenada de C . Los números reales x y y serán las coordenadas de C y se representan como (x, y) . Las abscisas medidas sobre el eje X a la derecha de O son positivas y a la izquierda son negativas; las ordenadas medidas sobre el eje Y arriba de O son positivas y abajo son negativas. (Ver Figura A-1)

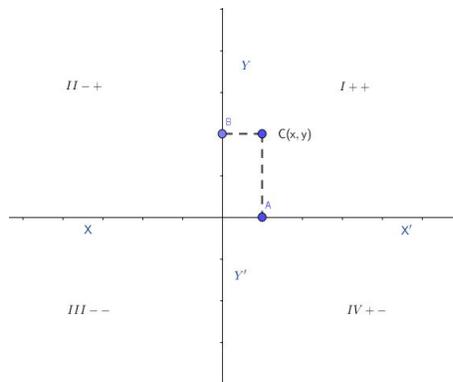


Figura A-1.: Ubicación de puntos en el plano cartesiano

Con esta manera de ubicar los puntos se mostrará un ejemplo de cómo representar la gráfica de una ecuación lineal en el sistema cartesiano.

Ejemplo: cuando $a = -1, b = 1$ y $c = 0$ en la ecuación $ax + by + c = 0$ se tendría que el conjunto solución de pajaras ordenadas serán de la forma (a, a) . Luego su gráfica en el plano cartesiano resulta ser una recta la cual se muestra en la Figura A-2.

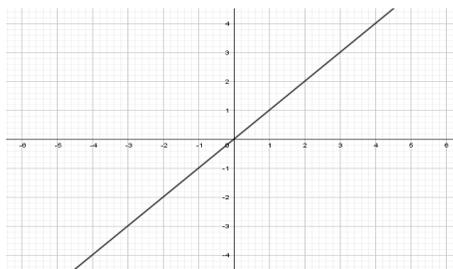


Figura A-2.: Gráfica del conjunto solución de $y - x = 0$

A.2.

Se desarrollará un ejemplo en el cual se muestre el movimiento que tiene una recta con ecuación $ax + by + c = 0$ cuando varía el coeficiente $-\frac{c}{b}$.

Ejemplo: Se tienen las rectas t y l con ecuaciones $x - y = 0$ y $-x + y - 2 = 0$ respectivamente. La gráfica de las rectas l y t se muestran en la Figura A-3 donde la recta l está en rojo y t en negro. Si miramos el coeficiente $-\frac{c}{b}$ en la ecuación de la recta t se tiene que $-\frac{c}{b} = 0$ y para l es $-\frac{c}{b} = 2$ por tanto, t no tienen ningún movimiento y l se mueve dos unidades hacia arriba.

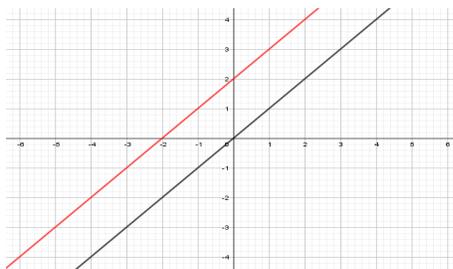


Figura A-3.: Movimiento vertical

A.3.

En este anexo se mostrará la relación que tiene el ángulo de inclinación (o elevación) de una recta con el eje x y la pendiente de esa recta. Se mostrará cómo partir del ángulo se puede llegar a la pendiente y cómo desde la pendiente se puede deducir el ángulo.

Como se muestra en la figura A-4 se toma una recta cualquiera la cual forme un ángulo α con la horizontal y sobre ella, se toman dos puntos con coordenadas (x_0, y_0) y (x_1, y_1) . Luego se determina un triángulo rectángulo y surge la ecuación A-1 a partir de razones trigonométricas. Surge también m la cual es la pendiente de la recta y se determina de manera análoga al proceso anterior, se tomando dos puntos sobre la recta y se mira cuántas unidades se movió en x y cuántas en y , se forma un triángulo rectángulo y, a partir de razones trigonométricas, se termina el ángulo que forma la recta con la horizontal.

$$\tan(\theta) = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = m \quad (\text{A-1})$$

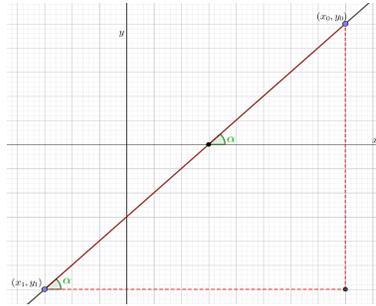


Figura A-4.: Razón de cambio entre puntos sobre una recta

A.4.

A continuación, se muestran dos ejemplos en los cuales a partir del ángulo que forma una recta con el eje x se determinan la manera en cómo se mueven los puntos de esta recta (la pendiente de la recta) y en otro donde a partir de la ecuación de la recta se determine la pendiente y con ella el ángulo que forma la recta con la horizontal.

Ejemplo: Se tiene una recta l la cual forma un ángulo de 45° con la horizontal. Para determinar la pendiente de esta recta se usa la ecuación (A-1) encontrada en A.3. Luego

se tiene que la pendiente de la recta l es:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha) &= m \\ \tan(45^\circ) &= 1 = m\end{aligned}$$

Es decir que los puntos sobre l corren una unidad a la izquierda y suben una unidad. Ahora se tomará la ecuación $-2x + y + 3 = 0$ de la recta t y los puntos $(-2, -7)$ y $(3, 3)$ sobre t . Por la ecuación (A-1) se tiene que:

$$\begin{aligned}m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ m &= \frac{3 - (-7)}{3 - (-2)} = \frac{10}{5} = 2\end{aligned}\tag{A-2}$$

$$\begin{aligned}m &= \tan(\alpha) = 2 \\ \alpha &= \arctan(2) \\ \alpha &= 63,43^\circ\end{aligned}\tag{A-3}$$

Ahora por A-2 se concluye que los puntos se mueven 1 unidad hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba. Y en A-3 se muestra el ángulo que forma t con la horizontal. En la Figura A-5 se muestra la representación de cada caso.

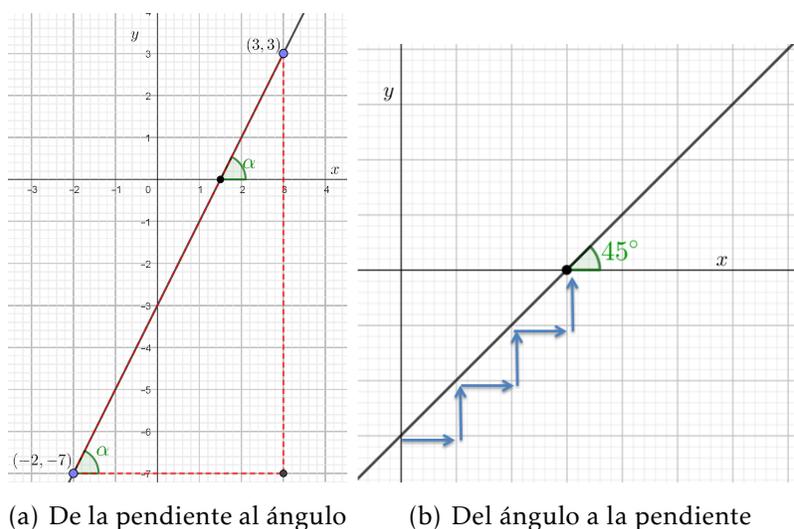


Figura A-5.: Relación entre pendiente y el ángulo de inclinación

La pendiente también se puede determinar a partir de la ecuación de la recta $ax + by + c = 0$

en la cual la pendiente será:

$$m = -\frac{c}{b}$$

A.5.

A continuación se presentará la demostración de la equivalencia entre las definiciones de paralelismo vistas desde lo geométrico, lo analítico y vectorial.

1. De la definición vectorial a la definición analítica.

- Sean los puntos $P(r_1, r_2)$ y $Q(q_1, q_2)$, dos vectores $\vec{d}_1 = \langle a, b \rangle$, $\vec{d}_2 = \langle c, d \rangle$ y $t \in \mathbb{R}$. Si \vec{d}_2 se puede expresar como $k \langle a, b \rangle$ con $k \neq 0$ entonces, las rectas l y h que determinan las ecuaciones vectoriales

$$X(t) = P + t\vec{d}_1 \quad y \quad X'(t) = Q + t\vec{d}_2$$

respectivamente, se pueden escribir como

$$bx + (-a)y + (ar_2 - br_1) = 0 \quad y \quad dx' + (-c)y' + (cq_2 - dq_1) = 0$$

y se cumple que $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$. Si $X(t) = X'(t)$ entonces la ecuación de la recta h se puede escribir como

$$k(bx + (-a)y + (ar_2 - br_1)) = 0$$

Tomando un punto P sobre la recta l que tiene como ecuación vectorial $X(t) = P + t\vec{d}_1$ entonces las coordenadas de P serán de la forma $(r_1 + ta, r_2 + tb)$ por tanto se tendrá que:

$$x = r_1 + ta \quad y \quad y = r_2 + tb$$

despejando el parámetro t

$$t = \frac{x - r_1}{a} \quad y \quad t = \frac{y - r_2}{b}$$

igualando y despejando las expresiones se concluye que $X(t) = P + t\vec{d}_1$ se puede ver como:

$$bx + (-a)y + c' = 0 \quad \text{con} \quad c' = ar_2 - br_1$$

Análogamente se toma un punto (x', y') que pertenece a la recta h que determina la ecuación vectorial $X'(t) = Q + t\vec{d}_2$ y se concluye que se puede expresar como

$$dx' + (-c)y' + c'' = 0 \quad \text{con} \quad c'' = cq_2 - dq_1.$$

Por la definición vectorial de rectas paralelas se tiene que $a = kc$ y $b = kd$, despejando k e igualando se tiene que $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ y por la definición analítica se concluye que l es paralela a h .

Para demostrar la segunda parte de la definición la cual dice que: si $X(t) = X'(t)$ entonces la ecuación de la recta h se puede escribir como $k(bx + (-a)y + (ar_2 - br_1)) = 0$. Se tomará un punto F con coordenadas (f_1, f_2) que pertenezca a $X(t)$; como $X(t) = X'(t)$ entonces, F también pertenecerá a $X'(t)$, por tanto, tendrá coordenadas

$$x = h_1 + ta \quad y \quad y = h_2 + tb \quad , \quad x' = h_1 + tc \quad y \quad y' = h_2 + td$$

despejando el parámetro y reemplazando en ambos casos se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} bx + (-a)y + c' = 0 & \text{con} \quad c' = ah_2 - bh_1 \\ dx' + (-c)y' + c'' = 0 & \text{con} \quad c'' = ch_2 - dh_1 \end{array}$$

Por la definición vectorial se tiene $a = kc$ y $b = kd$ reemplazando en la ecuación de h y factorizando se concluye que $k(dx' + (-c)y' + c'') = 0$ por tanto, las rectas son paralelas usando la definición analítica.

2. De la definición analítica a la definición geométrica.

- Sean las rectas l y t con ecuaciones

$$ax + by + c = 0 \tag{A-4}$$

$$dx + ey + f = 0 \tag{A-5}$$

que cumplan que $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ entonces, l y t no se intersecan en ningún punto. Si la ecuación (A-5) se puede escribir como $k(ax + by + c) = 0$, con $k \neq 0$ entonces, tienen dos o más puntos en común.

Multiplicando por d a (A-4) y a (A-5) por a y haciendo la resta $d*(A-4) - a*(A-5)$ se tiene que

$$dby - eay + dc - fa = 0$$

y despejando y se concluye que: $y = \frac{fa-dc}{db-ea}$ con $db \neq ea$ pero, esto no se puede dar porque se tiene que $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ o sea, $bd = ea$, por tanto, contradice la tesis. Luego l no tiene puntos en común con t y l y t son paralelas por la definición geométrica del paralelismo.

Siguiendo con la segunda parte se mostrará que si $a'x + b'y + c' = 0$ se puede escribir como $k(ax + by + c) = 0$ entonces t y l tienen dos o más puntos en común.

Sea el punto (x_1, y_1) que pertenece a l entonces, cumple que $ax_1 + by_1 + c = 0$. Para mostrar que también está en t , el punto (x_1, y_1) tiene que cumplir que $a'x_1 + b'y_1 + c' = 0$; como se tiene que $a'x + b'y + c' = 0$ se puede escribir como $k(ax + by + c) = 0$ entonces reemplazando

$$\begin{aligned} k(ax_1 + by_1 + c) &= 0 \\ k(0) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Como el punto (x_1, y_1) es solución a la ecuación de la recta t entonces el punto (x_1, y_1) está en t . Análogamente se muestra que los puntos (x_n, y_n) , con $n \in \mathbb{N}$, que son solución a $ax + by + c = 0$ también serán solución a $a'x + b'y + c' = 0$, es decir, l intersecta a t en dos o más puntos, por tanto, l es paralela a t por la definición geométrica del paralelismo.

3. De la definición analítica a la definición vectorial.

- Sean rectas l y h con ecuaciones $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ respectivamente, y $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ entonces, las ecuaciones de las rectas se puede escribir vectorialmente como:

$$X(t) = P + t\vec{d}_1 \quad \text{y} \quad X'(t) = Q + t\vec{d}_2$$

con P un punto en l , Q un punto en h y $t \in \mathbb{R}$, además $\vec{d}_1 = \langle a, b \rangle$ y $\vec{d}_2 = k \langle a, b \rangle$.
Si $a'x + b'y + c' = 0$ se puede escribir como $k(ax + by + c) = 0$ entonces $X(t) = X'(t)$.

Sea el punto P en l con coordenadas (p_1, p_2) y el punto Q en h con coordenadas (q_1, q_2) . Por el teorema *Punto Pendiente* las ecuaciones de l y de h se pueden escribir como

$$(y - p_2) = -\frac{a}{b}(x - p_1) \tag{A-6}$$

$$(y - q_2) = -\frac{a'}{b'}(x - q_1) \tag{A-7}$$

Se tiene que $-\frac{a'}{b'} = -\frac{a}{b}$ entonces, por la definición de proporcionalidad, $k\left(-\frac{a}{b}\right) = -\frac{a}{b}$. Sustituyendo en la ecuación (A-7) y multiplicando por $(-ka)^{-1}$ se tiene que

$$\frac{y - q_2}{(-ka)} = \frac{x - q_1}{kb}$$

igualando a un parámetro t a cada lado de la igualdad

$$t = \frac{y - q_2}{(ka)} \quad \text{y} \quad t = \frac{x - q_1}{-kb}$$

despejando y y x se concluye que los puntos de l con el parámetro t son de la forma

$$(q_1 + t(-kb), q_2 + t(ka))$$

y estos puntos satisfacen la siguiente ecuación vectorial $X'(t) = Q + t\vec{d}_1$ con $\vec{d}_1 = k \langle -b, a \rangle$. Análogamente se concluye que la ecuación (A-6) de la recta h se puede escribir vectorialmente como:

$$X(t) = P + t\vec{d}_2 \quad \text{con} \quad \vec{d}_2 = \langle -b, a \rangle$$

Por tanto, las rectas l y h son paralelas por la definición vectorial de rectas paralelas.

Para mostrar la segunda parte del enunciado, $X(t) = X'(t)$, se usará que $a'x + b'y + c' = 0$ se puede escribir como $k(ax + by + c) = 0$. Antes se mostró que $ax + by + c = 0$ se puede escribir vectorialmente con la ecuación $X(t) = P + t\vec{d}_2$, como P está en l entonces cumple que $ap_1 + bp_2 + c = 0$, y también está en h porque $k(ap_1 + bp_2 + c) = 0$. Haciendo el proceso que se hizo en el párrafo anterior se tiene que

$$(y - p_2) = \frac{(-ka)}{kb}(x - p_1)$$

$$\frac{y - p_2}{(-a)} = \frac{x - p_1}{b}$$

Igualando a un parámetro t y haciendo las respectivas sustituciones se tiene que la ecuación vectorial de la recta h se puede escribir como $X'(t) = P + t\vec{d}_2$ y sustituyendo se puede concluir que $X(t) = X'(t)$ y por la definición vectorial l es paralela a h .

Hasta el momento se ha demostrado tres permutaciones de las seis totales: De la definición vectorial a la analítica, de la analítica a la geométrica y de la analítica a la vectorial. Se puede mostrar que desde la definición vectorial se puede concluir la definición geométrica usando las equivalencias mostradas anteriormente.

4. De la definición vectorial a la definición geométrica

- Sean los puntos $P(r_1, r_2)$ y $Q(q_1, q_2)$, dos vectores $\vec{d}_1 = \langle a, b \rangle$, $\vec{d}_2 = \langle c, d \rangle$ y $t \in \mathbb{R}$. Si \vec{d}_2 se puede expresar como $k \langle a, b \rangle$, con $k \neq 0$, entonces las rectas que determinan las ecuaciones vectoriales

$$X(t) = P + t\vec{d}_1 \quad \text{y} \quad X'(t) = Q + t\vec{d}_2$$

nunca se cortan. Si $X(t) = X'(t)$ entonces se cortan en dos o más puntos.

Ya se mostró que teniendo las rectas l y h con ecuaciones vectoriales $X(t) = P + t\vec{d}_1$ y $X'(t) = Q + t\vec{d}_2$ y las condiciones iniciales dadas, las ecuaciones de las rectas se pueden escribir analíticamente como $bx + (-a)y + c' = 0$ con $c' = ar_2 - br_1$ y $dx' + (-c)y' + c'' = 0$ con $c'' = cq_2 - dq_1$; con la condición que $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$. También se mostró que las rectas l y h con ecuaciones

$$\begin{aligned} bx + (-a)y + c' &= 0 \\ dx' + (-c)y' + c'' &= 0 \end{aligned} \tag{A-8}$$

con la condición encontrada, nunca se cortan. Por tanto l y h son paralelas por la definición geométrica de paralelas.

Siguiendo con la demostración se tiene que si $X(t) = X'(t)$ entonces, como se puede pasar a la definición geométrica, la ecuación (A-8) se puede escribir como $k(bx + (-a)y + c') = 0$ y por la demostración de la definición analítica a la geométrica se concluye que $X(t)$ tiene dos o más puntos de corte con $X'(t)$. O sea l es paralela a h por definición geométrica de las paralelas.

Obsérvese que se cumple la propiedad transitiva entre definiciones, es decir, teniendo que a partir de la definición vectorial se puede llegar a la analítica y de la analítica a la geométrica se concluye que de la definición vectorial se puede pasar a la geométrica.

5. De la definición geométrica a la definición analítica

- Sean las rectas l y h tal que no tienen puntos en común entonces, l y h se pueden expresar como $ax + by + c = 0$ y $dx + ey + f = 0$ respectivamente además, $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$. Si l y h se intersecan en dos o más puntos entonces, $dx + ey + f = 0$ se puede expresar como $k(ax + by + c) = 0$ con $k \neq 0$.

Se procederá mirando en qué condiciones las rectas se intersecan desde una mirada analítica. Se iniciará multiplicando la ecuación de la recta l por d y la ecuación de h por $-a$, luego sumándolas se tiene que:

$$\begin{aligned} dby + dc - aey - af &= 0 \\ y &= \frac{af - dc}{db - ae} \end{aligned}$$

Analizando la última ecuación se pueden deducir dos cosas: si $db \neq ae$ entonces l y h se intersecan, si $db = ae$ entonces las rectas no se intersecan. Por hipótesis se tiene que l no se interseca con h luego $-\frac{a}{b} = -\frac{d}{e}$, por tanto, por la definición analítica de las rectas paralelas l y h son paralelas.

Para la segunda parte se tienen dos puntos con coordenadas (x_0, y_0) y (x_1, y_1) que pertenecen a la intersección entre l y h , ahora por el postulado *Dos puntos recta* se tiene que por dos puntos para una única recta, luego $l = h$ y en conclusión $dx + ey + f = 0$ se puede escribir como $k(ax + by + c) = 0$ entonces l y h son paralelas por la definición analítica de las paralelas.

6. De la definición geométrica a la definición vectorial.

- Sean las rectas l y h tal que no tienen puntos en común entonces l y h se pueden expresar como

$$X(t) = P + t\vec{d}_l \quad \text{y} \quad X'(t) = Q + t\vec{d}_h \quad (\text{A-9})$$

con $P(p_1, p_2)$ en l , $Q(q_1, q_2)$ en h , $t \in \mathbb{R}$; los vectores directores d_l, d_t además $\vec{d}_l = k\vec{d}_h$. Si l y h se intersecan en dos o más puntos entonces $X(t) = X'(t)$.

Anteriormente se vio que si l y h no tienen puntos en común sus expresiones analíticas $ax + by + c = 0$ y $dx + ey + f = 0$ cumplirán que $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$, además, se mostró que estas ecuaciones analíticas se pueden expresar de manera vectorial como:

$$X(t) = P + t\vec{d}_l \quad \text{y} \quad X'(t) = Q + t\vec{d}_h \quad (\text{A-10})$$

con $\vec{d}_l = \langle -b, a \rangle$ y $\vec{d}_h = \langle -b, a \rangle$, por tanto, las rectas son paralelas por la definición vectorial del paralelismo.

De manera análoga que muestra que si l y h se intersecan en dos o más puntos entonces sus ecuaciones vectoriales cumplen que $X(t) = X'(t)$ ya que la ecuación analítica de la recta h cumple que se puede escribir como $k(ax + by + c) = 0$ luego por la demostración 3. $X(t) = X'(t)$. En conclusión, las rectas h y l son paralelas gracias a la definición vectorial de las paralelas.

■

A.6.

En este anexo se realizará la demostración de la siguiente equivalencia:

- Las rectas l y t forman un ángulo θ recto si y solo si $m_1 \cdot m_2 = -1$

Se verificará que si $m_1 \cdot m_2 = -1$ entonces el ángulo que forman l y t es recto luego, si el ángulo que forman l y t es recto entonces, $m_1 \cdot m_2 = -1$.

- * Si $m_1 \cdot m_2$ entonces l y t son perpendiculares

Se encontrarán los vectores directores de l , $\vec{d}_1 = \langle -b, a \rangle$, y de t , $\vec{d}_2 = \langle -b', a' \rangle$, y reemplazando en la ecuación (2-1), presentada en el capítulo 2.1.4 para determinar el ángulo a partir de cosenos, se tiene que

$$\begin{aligned} \cos(\theta_{\vec{d}_1 \vec{d}_2}) &= \frac{\langle -b, a \rangle \cdot \langle -b', a' \rangle}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{bb' + aa'}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Por hipótesis $\frac{a}{b} = -\frac{b'}{a'}$, por tanto, $aa' = -bb'$, reemplazando y operando se tiene que

$$\cos(\theta_{\vec{d}_1 \vec{d}_2}) = 0$$

en particular $\theta_{\vec{d}_1 \vec{d}_2} = \frac{\pi}{2}$, luego el ángulo que forman l y t es recto.

- * Si el ángulo $\theta_{l,t}$ es recto entonces $m_1 \cdot m_2 = -1$.

En particular $\theta_{l,t} = \theta_{\vec{d}_1 \vec{d}_2} = \frac{\pi}{2}$ entonces

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

por la definición del ángulo a partir de coseno y los vectores directores se tiene que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \frac{bb' + aa'}{a^2 + b^2}$$

Y como $a^2 + b^2 > 0$ porque a y b son diferentes de 0 simultáneamente, $bb' + aa'$ tendrá que ser igual a 0; despejando y sustituyendo se concluye que $m_1 \cdot m_2 = -1$.

■

A.7.

En este anexo se mostrará la manera de determinar la ecuación de una parábola definida como lugar geométrico.

Sea una parábola definida como lugar geométrico. Se procederá ubicando un sistema con los ejes x y y de tal manera que el origen del sistema coincida con el vértice de la parábola. Pueden ocurrir dos casos: 1) que la directriz sea paralela al eje x o 2) que sea paralela al eje y . Luego se determina que el foco de la parábola tiene coordenadas $(p, 0)$ ó $(0, p)$ y que la ecuación de la directriz es $y = -p$ ó $y = p$.

Ahora por definición de parábola como lugar geométrico se tiene que la distancia de los puntos sobre la parábola al foco siempre es igual la distancia de los puntos a la directriz. Ahora por la definición de distancia entre puntos y usando la ecuación (2-2) se tiene que la ecuación de la parábola es una ecuación cuadrática como se muestra a continuación.

Directriz paralela al eje x
$d_{F,P} = d_{P,l}$ $\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = y+p $ $x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$ $x^2 = y^2 + 2py + p^2 - y^2 + 2py - p^2$ $x^2 = 4py$
Directriz paralela al eje y
$d_{F,P} = d_{P,l}$ $\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = x+p $ $(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$ $y^2 = x^2 + 2px + p^2 - x^2 + 2px - p^2$ $y^2 = 4px$

A continuación se mostrará la ecuación general de este tipo de parábolas con sus respectivas sustituciones.

Directriz paralela al eje x	Directriz paralela al eje y
$x^2 = 4py$ $ax^2 + ey = 0$	$y^2 = 4px$ $cy^2 + dx = 0$
con $p = -\frac{e}{4a}$; $a, e \in \mathbb{R}, a \neq 0$	con $p = -\frac{d}{4c}$; $c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0$

A.8.

Se mostrará la ecuación de la parábola como lugar geométrico teniendo en cuenta que la directriz es paralela a algún eje coordenado y que el origen de los ejes x y y es diferente al vértice de la parábola. Se tendrá en cuenta que en A.7 se mostró la ecuación de las parábolas en las cuales el vértice coincide con el origen.

Si el origen de los ejes coordenados no coincide con el vértice de la parábola se puede deducir que el vértice de la parábola tiene coordenadas (h, k) y se puede determinar unos ejes coordenados x' y y' de tal manera que el origen de estos ejes coincida con el vértice de la parábola, luego en este sistema x' , y' se tiene que la ecuación canónica de la parábola se puede ver como:

Directriz paralela al eje x' $x'^2 = 4py'$	Directriz paralela al eje y' $y'^2 = 4px'$
---	---

Usando las ecuaciones de traslación de ejes (2-5) se determina que en el sistema original la ecuación canónica es de la forma:

Directriz paralela al eje x $(x - h)^2 = 4p(y - k)$	Directriz paralela al eje y $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
--	--

Ahora para determinar la ecuación general de resuelven las ecuaciones anteriores y se concluye que este tipo de parábolas se ven como:

Directriz paralela al eje x	Directriz paralela al eje y
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$
$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4pk$	$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$
$x^2 - 2hx - 4py + 4pk + h^2 = 0$	$y^2 - 4px - 2ky + 4ph + k^2 = 0$
$ax^2 - 2ahx + ey - ek + h^2 = 0$	$cy^2 + dx - 2cky - dh + k^2 = 0$
$ax^2 + dx + ey + f = 0$	$cy^2 + dx + ey + f = 0$
con $d = -2ah$ y $f = h^2 - ek$	con $d = -2ck$ y $f = k^2 - dh$

Se tienen en cuenta las sustituciones de a , e , c , y d presentadas en anexo A.7.

A.9.

Se mostrará la ecuación de la parábola como lugar geométrico teniendo en cuenta que la directriz no es paralela a algún eje coordenado. Se tendrá en cuenta que en A.8 se mostró

la ecuación general y canónica de las parábolas en las cuales el vértice no coincide con el origen.

Si la directriz no es paralela a ningún eje coordenado y el origen no coincide con el vértice de la parábola, se puede terminar un sistema x'', y'' tal que la directriz sea paralela a algún eje coordenado y además el origen de este sistema coincida con el vértice de la parábola. En este sistema la parábola podría tener alguna de las siguientes ecuaciones teniendo en cuenta lo mostrado en A.7.

Directriz paralela al eje x'' $x''^2 = 4py''$	Directriz paralela al eje y'' $y''^2 = 4px''$
--	--

También se puede determinar un sistema x', y' donde la directriz de la parábola sea paralela a algún eje y el origen de este sistema coincida con el origen del sistema original. Luego el vértice de la parábola tendrá coordenadas (h', k') en el sistema x', y' . Ahora por el A.8 se puede determinar las siguientes ecuaciones que representan la parábola en el sistema x', y' .

Directriz paralela al eje x' $(x' - h')^2 = 4p(y' - k')$	Directriz paralela al eje y' $(y' - k')^2 = 4p(x' - h')$
---	---

Por último, utilizando las ecuaciones de rotación (2-7) y aplicándolas en la ecuación de la parábola en el sistema x', y' se termina la ecuación en el sistema original.

Directriz paralela al eje x'	
	$(x' - h')^2 = 4p(y' - k')$
	$a'x'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$
$a'(x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha))^2 + d'(x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha)) + e'(-x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha)) + f' = 0$	$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
Directriz paralela al eje y'	
	$(y' - k')^2 = 4p(x' - h')$
	$c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$
$c'(-x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha))^2 + d'(x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha)) + e'(x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha)) + f' = 0$	$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

Para cada caso en la segunda línea se tiene en cuenta las sustituciones presentadas en el anexo A.8. En la tercera línea se resuelven los cuadrados y se distribuyen los productos, en la cuarta línea se factoriza y se tienen en cuenta las siguientes sustituciones:

Paralela al eje x'	Paralela al eje y'
$a = a' \cos^2(\alpha)$	$a = a' \sin^2(\alpha)$
$b = 2a' \cos(\alpha) \sin(\alpha)$	$b = 2a' \cos(\alpha) \sin(\alpha)$
$c = a' \sin^2(\alpha)$	$c = a' \cos^2(\alpha)$
$d = d' \cos(\alpha) - e' \sin(\alpha)$	$d = d' \cos(\alpha) - e' \sin(\alpha)$
$e = d' \sin(\alpha) + e' \cos(\alpha)$	$e' = d \sin(\alpha) + e \cos(\alpha)$
$f = f'$	$f = f'$

Teniendo en cuenta las sustituciones que se presentan en el anexo A.8.

A.10.

En este anexo se mostrará la manera de determinar la ecuación de una elipse definida como lugar geométrico.

Sea una elipse definida como lugar geométrico. Se procederá ubicando un sistema con los ejes x y y de tal manera que el origen del sistema coincida con el centro de la elipse. Pueden ocurrir dos casos: 1) que las directrices sean paralelas al eje x o 2) que sean paralelas al eje y . Luego se determina que los focos de la elipse tienen coordenadas $(p, 0)$ y $(-p, 0)$ ó $(0, p)$ y $(0, -p)$.

Ahora por definición de elipse como lugar geométrico se tiene que la suma de la distancia de cada punto sobre la elipse a los focos siempre es igual a una constante k mayor que la distancia entre los focos. Ahora por la definición de distancia entre puntos y usando la ecuación (2-2) se tiene que la ecuación de la elipse es una ecuación cuadrática como se muestra a continuación.

Directrices paralelas al eje x	
$\frac{d_{F_1,P} + d_{F_2,P}}{k} = 1$ $\sqrt{(x+p)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = k$ $(x+p)^2 + y^2 = \left(k - \sqrt{(x-p)^2 + y^2}\right)^2$ $2k\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = k^2 - 4px$ $4k^2((x-p)^2 + y^2) = (k^2 - 4px)^2$ $4(k^2 - 4p^2)x^2 + 4k^2y^2 - k^2(k^2 - 4p^2) = 0$ $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$	
con	$a' = \frac{k^2}{4}, \quad b' = \frac{k^2 - 4p^2}{4}$
Directriz paralela al eje y	
$\frac{d_{F_1,P} + d_{F_2,P}}{k} = 1$ $\sqrt{(x-0)^2 + (y+p)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = k$ $x^2 + (y+p)^2 = \left(k - \sqrt{x^2 + (y-p)^2}\right)^2$ $2k\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = k^2 - 4py$ $4k^2(x^2 + (y-p)^2) = (k^2 - 4py)^2$ $4k^2x^2 + 4(k^2 - 4p^2)y^2 - k^2(k^2 - 4p^2) = 0$ $\frac{x^2}{b'^2} + \frac{y^2}{a'^2} = 1$	
con	$a' = \frac{k^2}{4}, \quad b' = \frac{k^2 - 4p^2}{4}$

En general, se dirá que si $a' > b'$ entonces las directrices son paralelas al eje x , si $a' < b'$ las directrices son paralelas al eje y .

A continuación se mostrará la ecuación general de este tipo de elipses con sus respectivas sustituciones.

Directriz paralela al eje x	Directriz paralela al eje y
$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ $b'x^2 + a'y^2 = a'b'$ $ax^2 + cy^2 + f = 0$	
con	$a = b', \quad c = a', \quad f = a'b'$

A.11.

Se mostrará la ecuación de la elipse como lugar geométrico teniendo en cuenta que las directrices son paralelas a algún eje coordenado y que el origen de los ejes x y y es diferente al centro de la elipse. Se tendrá en cuenta que en A.10 se mostró la ecuación de las

elipses en las cuales el centro coincide con el origen.

Si el origen de los ejes coordenados no coincide con el centro de la elipse se puede deducir que el centro tiene coordenadas (h, k) y se puede determinar unos ejes coordenados x' y y' de tal manera que el origen de estos ejes coincida con el centro de la elipse, luego en este sistema x', y' se tiene que la ecuación canónica de la elipse se puede ver como:

Directrices paralelas al eje x' si $a' < b'$	$\frac{x'^2}{a'} + \frac{y'^2}{b'} = 1$
Directrices paralelas al eje y' si $a' > b'$	

Usando las ecuaciones de traslación de ejes (2-5) se determina que en el sistema original la ecuación canónica es de la forma:

Directrices paralelas al eje x' si $a' < b'$	$\frac{(x-h)^2}{a'} + \frac{(y-k)^2}{b'} = 1$
Directrices paralelas al eje y' si $a' > b'$	

Ahora para determinar la ecuación general de resuelven las ecuaciones anteriores y se concluye que este tipo de parábolas se ven como:

Directrices paralelas al eje x' si $a' < b'$	Directrices paralelas al eje y' si $a' > b'$
$\frac{(x-h)^2}{a'} + \frac{(y-k)^2}{b'} = 1$	
$b'(x-h)^2 + a'(y-k)^2 = a'b'$	
$b'x^2 - 2b'hx + b'h^2 + a'y^2 - 2a'ky + a'k^2 - a'b' = 0$	
$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$	
con $a = b', \quad c = a', \quad d = -2a'h, \quad e = -2b'k, \quad f = ah^2 + bk^2 - a'b'$	

Se tienen en cuenta las sustituciones presentadas en el anexo A.10.

A.12.

Se mostrará la ecuación de la elipse como lugar geométrico teniendo en cuenta las directrices no son paralelas a algún eje coordenado. Se tendrá en cuenta que en el A.11 se mostró la ecuación general y canónica de las elipses en las cuales el centro no coincide con el origen.

Si las directrices no son paralelas a ningún eje coordenado y el origen no coincide con el centro de la elipse, se puede terminar un sistema x'', y'' tal que las directrices sean paralelas a algún eje coordenado y además el origen de este sistema coincida con el centro de la elipse. En este sistema la elipse podría tener alguna de las siguientes ecuaciones teniendo en cuenta el A.10.

Directrices paralelas al eje x' si $a'' < b''$	$\frac{x''^2}{a''} + \frac{y''^2}{b''} = 1$
Directrices paralelas al eje y' si $a'' > b''$	

También se puede determinar un sistema x', y' donde las directrices de la elipse sean paralelas a algún eje y el origen de este sistema coincida con el origen del sistema original. Luego el centro de la elipse tendrá coordenadas (h', k') en el sistema x', y' . Ahora por el A.11 se puede determinar las siguientes ecuaciones que representan la parábola en el sistema x', y' .

Directrices paralelas al eje x' si $a'' < b''$	$\frac{(x' - h')^2}{a''} + \frac{(y' - k')^2}{b''} = 1$
Directrices paralelas al eje y' si $a'' > b''$	

Por último, utilizando las ecuaciones de rotación (2-7) y aplicándolas en la ecuación de la parábola en el sistema x', y' se termina la ecuación en el sistema original.

Directrices paralelas al eje x' si $a'' < b''$	Directrices paralelas al eje y' si $a'' > b''$
$\frac{(x' - h')^2}{a''} + \frac{(y' - k')^2}{b''} = 1$ $a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$ $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$	

Cabe resaltar que se tienen en cuenta las sustituciones presentadas en el anexo A.11, en la segunda línea se sustituyen las ecuaciones (2-7), se resuelven los cuadrados y se distribuyen los productos. En la tercera línea se factoriza y se obtienen las siguientes sustituciones:

Paralela al eje x'	Paralela al eje y'
a	$a = a' \cos^2(\alpha) + c' \sin^2(\alpha)$
b	$b = 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)(a' - c')$
c	$c = a' \sin^2(\alpha) + c' \cos^2(\alpha)$
d	$d = d' \cos(\alpha) - e' \sin(\alpha)$
e	$e = d' \sin(\alpha) + e' \cos(\alpha)$
f	$f = f'$

Se tienen en cuenta las sustituciones de los coeficientes presentadas en el anexo A.11.

A.13.

En este anexo se mostrará la manera de determinar la ecuación de una hipérbola definida como lugar geométrico.

Sea una hipérbola definida como lugar geométrico. Se procederá ubicando un sistema con los ejes x y y de tal manera que el origen del sistema coincida con el centro de la elipse. Pueden ocurrir dos casos: 1) que las directrices sean paralelas al eje x o 2) que sean paralelas al eje y . Luego se determina que los focos de la hipérbola tienen coordenadas $(p, 0)$ y $(-p, 0)$ ó $(0, p)$ y $(0, -p)$.

Ahora por definición de hipérbola como lugar geométrico se tiene que la diferencia de la distancia de cada punto sobre la elipse a los focos siempre es igual a una constante k mayor que la distancia entre los focos. Ahora por la definición de distancia entre puntos y usando la ecuación (2-2) se tiene que la ecuación de la hipérbola es una ecuación cuadrática como se muestra a continuación.

Directrices paralelas al eje x	
$d_{F_1,P} - d_{F_2,P} = k$ $\sqrt{(x+p)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = k$ $(x+p)^2 + y^2 = (k + \sqrt{(x-p)^2 + y^2})^2$ $2k\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = 4px - k^2$ $4k^2((x-p)^2 + y^2) = (4px - k^2)^2$ $4(k^2 - 4p^2)x^2 + 4k^2y^2 - k^2(4p^2 - k^2) = 0$ $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$	
con	$a' = \frac{k^2}{4}, \quad b' = \frac{k^2 - 4p^2}{4}$
Directriz paralela al eje y	
$d_{F_1,P} - d_{F_2,P} = k$ $\sqrt{(x-0)^2 + (y+p)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = k$ $x^2 + (y+p)^2 = (k + \sqrt{x^2 + (y-p)^2})^2$ $2k\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = 4py - k^2$ $4k^2(x^2 + (y-p)^2) = (4py - k^2)^2$ $4k^2x^2 + 4(k^2 - 4p^2)y^2 - k^2(4p^2 - k^2) = 0$ $\frac{x^2}{b'^2} - \frac{y^2}{a'^2} = 1$	
con	$a' = \frac{k^2}{4}, \quad b' = \frac{k^2 - 4p^2}{4}$

A continuación se mostrará la ecuación general de este tipo de hipérbolas con sus respectivas sustituciones.

Directriz paralela al eje x	Directriz paralela al eje y
$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$ $b'x^2 - a'y^2 = a'b'$ $ax^2 + cy^2 + f = 0$	$\frac{y^2}{a'^2} - \frac{x^2}{b'^2} = 1$ $b'y^2 - a'x^2 = a'b'$ $ax^2 + cy^2 + f = 0$
con $a = b', c = -a', f = a'b'$	con $a = -a', c = b', f = a'b'$

A.14.

Se mostrará la ecuación de la hipérbola como lugar geométrico teniendo en cuenta que las directrices son paralelas a algún eje coordenado y que el origen de los ejes x y y es diferente al centro de la hipérbola. Se tendrá en cuenta que en A.13 se mostró la ecuación de las hipérbolas en las cuales el centro coincide con el origen.

Si el origen de los ejes coordenados no coincide con el centro de la hipérbola se puede deducir que el centro tiene coordenadas (h, k) y se puede determinar unos ejes coordenados x' y y' de tal manera que el origen de estos ejes coincida con el centro de la hipérbola, luego en este sistema x', y' se tiene que la ecuación canónica de la hipérbola se puede ver como:

Directrices paralelas al eje x'	Directrices paralelas al eje y'
$\frac{x'^2}{a'} - \frac{y'^2}{b'} = 1$	$\frac{y'^2}{b'} - \frac{x'^2}{a'} = 1$

Usando las ecuaciones de traslación de ejes (2-5) se determina que en el sistema original la ecuación canónica es de la forma:

Directrices paralelas al eje x'	Directrices paralelas al eje y'
$\frac{(x-h)^2}{a'} - \frac{(y-k)^2}{b'} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{b'} - \frac{(x-h)^2}{a'} = 1$

Ahora para determinar la ecuación general de resuelven las ecuaciones anteriores y se concluye que este tipo de parábolas se ven como:

Directrices paralelas al eje x'
$\frac{(x-h)^2}{a'} - \frac{(y-k)^2}{b'} = 1$ $b'(x-h)^2 - a'(y-k)^2 = a'b'$ $b'x^2 - 2b'hx + b'h^2 - a'y^2 + 2a'ky - a'k^2 - a'b' = 0$ $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$
Directrices paralelas al eje y'
$\frac{(y-k)^2}{b'} - \frac{(x-h)^2}{a'} = 1$ $a'(y-k)^2 - b'(x-h)^2 = a'b'$ $a'y^2 - 2a'ky + a'k^2 - b'x^2 + 2b'hx - b'h^2 - a'b' = 0$ $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$

Para cada caso en la cuarta línea se tienen en cuenta las siguientes sustituciones y, además, las presentadas en el anexo A.13:

Paralelas al eje x'	Paralelas al eje y'
$a = b', \quad c = -a', \quad d = -2b'h,$ $e = 2a'k, \quad f = b'h^2 - a'k^2 - a'b'$	$a = -b', \quad c = a', \quad d = 2b'h,$ $e = -2a'k, \quad f = a'k^2 - b'h^2 - a'b'$

A.15.

Se mostrará la ecuación de la hipérbola como lugar geométrico teniendo en cuenta las directrices no son paralelas a algún eje coordenado. Se tendrá en cuenta que en A.14 se mostró la ecuación general y canónica de las hipérbolas en las cuales el centro no coincide con el origen.

Si las directrices no son paralelas a ningún eje coordenado y el origen no coincide con el centro de la hipérbola, se puede terminar un sistema x'', y'' tal que las directrices sean paralelas a algún eje coordenado y además el origen de este sistema coincida con el centro de la hipérbola. En este sistema la hipérbola podría tener alguna de las siguientes ecuaciones teniendo en cuenta lo presentado en el anexo A.13.

Directrices paralelas al eje x''	Directrices paralelas al eje y''
$\frac{x''^2}{a''} - \frac{y''^2}{b''} = 1$	$\frac{y''^2}{b''} - \frac{x''^2}{a''} = 1$

También se puede determinar un sistema x', y' donde las directrices de la hipérbola sean paralelas a algún eje y el origen de este sistema coincida con el origen del sistema original.

Luego el centro de la hipérbola tendrá coordenadas (h', k') en el sistema x', y' . Ahora por el A.13 se puede determinar las siguientes ecuaciones que representan la hipérbola en el sistema x', y' .

Directrices paralelas al eje x'	Directrices paralelas al eje y'
$\frac{(x' - h')^2}{a''} - \frac{(y' - k')^2}{b''} = 1$	$\frac{(y' - k')^2}{b''} - \frac{(x' - h')^2}{a''} = 1$

Por último, utilizando las ecuaciones de rotación (2-7) y aplicándolas en la ecuación de la hipérbola en el sistema x', y' se termina la ecuación en el sistema original.

Directrices paralelas al eje x'	Directrices paralelas al eje y'
$\frac{(x' - h')^2}{a''} - \frac{(y' - k')^2}{b''} = 1$	$\frac{(y' - k')^2}{b''} - \frac{(x' - h')^2}{a''} = 1$
$a'x^2 + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0$	$a'x^2 + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0$
$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$	

Cabe resaltar que se tienen en cuenta las sustituciones presentadas en el anexo A.14, en la segunda línea se sustituyen las ecuaciones (2-7), se resuelven los cuadrados y se distribuyen los productos. En la tercera línea se factoriza y se obtienen las siguientes sustituciones:

Paralela al eje x'	Paralela al eje y'
$a = a' \cos^2(\alpha) + c' \sin^2(\alpha)$	
$b = 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)(a' - c')$	
$c = a' \sin^2(\alpha) + c' \cos^2(\alpha)$	
$d = d' \cos(\alpha) - e' \sin(\alpha)$	
$e = d' \sin(\alpha) + e' \cos(\alpha)$	
$f = f'$	

A.16.

En este anexo se mostrará cómo, a partir de la ecuación general de las parábolas que tienen su vértice en el origen, se puede llegar a su ecuación canónica.

En el anexo A.7 se mostró la ecuación general de las parábolas que tienen el vértice en el origen de los ejes coordenados x y y . A continuación se muestra el proceso que se realiza para determinar la ecuación canónica.

Directriz paralela al eje x	Directriz paralela al eje y
$ax^2 + ey = 0$ $x^2 = 4py$	$cy^2 + dx = 0$ $y^2 = 4px$
con $p = -\frac{e}{4a}$	con $p = -\frac{d}{4c}$

A.17.

A continuación se mostrará cómo llegar a la ecuación canónica teniendo como punto de partida la ecuación general de las parábolas trasladadas que se mostró en el A.8.

Se mostrará el proceso que se realizó para concluir la ecuación canónica con sus respectivas sustituciones:

Directriz paralela al eje x	Directriz paralela al eje y
$ax^2 + dx + ey + f = 0$ $x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{f}{a} = -\frac{e}{a}y$ $\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 = -\frac{e}{a}\left(y - \frac{d^2}{4ae} + \frac{f}{e}\right)$ $(x - h)^2 = 4p(y - k)$	$cy^2 + dx + ey + f = 0$ $y^2 + \frac{e}{c}y + \frac{f}{c} = -\frac{d}{c}x$ $\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = -\frac{d}{c}\left(x - \frac{e^2}{4cd} + \frac{f}{d}\right)$ $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
con $h = -\frac{d}{2a}$, $k = \frac{d^2}{4ae} - \frac{f}{e}$, $p = -\frac{e}{4a}$	con $h = -\frac{e^2}{4cd} - \frac{f}{d}$, $k = -\frac{e}{2c}$, $p = -\frac{d}{4c}$

A.18.

A continuación se mostrará cómo llegar a la ecuación canónica teniendo como punto de partida la ecuación general de las parábolas rotadas y/o trasladadas que se mostró en el A.9.

El primer paso es determinar con qué ángulo se tiene que rotar los ejes para que la directriz sea paralela a algún eje. Para ello se utiliza la siguiente fórmula:

$$\theta = \frac{\arctan\left(\frac{b}{a-c}\right)}{2}$$

Ahora reemplazando las ecuaciones de rotación (2-7) con este ángulo θ se encuentra que se anula el término xy . Se mostrará el proceso que se realizó para concluir la ecuación canónica con sus respectivas sustituciones:

Directriz paralela al eje x	Directriz paralela al eje y
$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ $a'x'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$ $(x' - h')^2 = 4p'(y' - k')$	$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ $c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$ $(y' - k')^2 = 4p'(x' - h')$

Se puede notar que se hace uso de lo encontrado en el anexo A.17. A parte se tienen las siguientes sustituciones que surgen a partir de la rotación de los ejes.

$$a' = a \cos^2 \theta + b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta$$

$$b' = (a - c) \tan 2\theta + 2b = 0$$

$$c' = a \sin^2 \theta - b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta$$

$$d' = d \cos \theta + e \sin \theta$$

$$e' = e \cos \theta - d \sin \theta$$

$$f' = f$$

A.19.

A continuación se presenta los pasos a seguir para poder determinar las coordenadas del foco y el vértice y las ecuaciones de las directrices y el eje de simetría de una parábola.

Ejemplo

- Sea la cónica $x^2 + 6xy + 9y^2 - 54x - 62y + 179 = 0$.

Se determinará qué tipo de cónica es y se encontrará las coordenadas del foco, el vértice, la ecuación de la recta directriz y el eje de simetría. También se determinará su excentricidad \widehat{e} . Se realizará un bosquejo de la curva.

Solución.

- Determinar los coeficientes a, b, c, d, e, f de la ecuación.

En este caso los coeficientes son:

$$a = 1, \quad b = 6, \quad c = 9, \quad d = -54, \quad e = -62, \quad f = 179$$

- Encontrar qué tipo de curva es.

Para esto se usa $b^2 - 4ac$ entonces, reemplazando y realizando las operaciones se tiene que

$$(6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

Se concluye que es una **parábola**.

Como aparece el término xy entonces se tiene que aplicar una rotación de los ejes, para esto se tiene que saber cuál es el ángulo con el cual se rotarán los ejes coordenados

3. Determinar el ángulo de rotación θ .

Este ángulo se puede encontrar como $\theta = \frac{\arctan\left(\frac{b}{a-c}\right)}{2}$, reemplazando y realizando las operaciones el ángulo será:

$$\theta = \frac{\arctan\left(\frac{6}{1-9}\right)}{2}$$

$$\theta = -18,43^\circ$$

Teniendo el ángulo de rotación se determinan a', b', c', d', e', f' que serán los coeficientes de la ecuación en el sistema rotado.

4. Encontrar la ecuación en el sistema rotado.

Para determinar dicha ecuación se mirará coeficiente por coeficiente. Se tiene que

$a' = 0$	$a' = a \cos^2 \theta + b \cos \theta \sen \theta + c \sen^2 \theta$ $a' = \cos^2(-18,43) - 6 \cos(-18,43) \sen(-18,43) + 9 \sen^2(-18,43)$
$c' = 10$	$c' = a \sen^2 \theta - b \sen \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta$ $c' = \sen^2(-18,43) - 6 \cos(-18,43) \sen(-18,43) + 9 \cos^2(-18,43)$
$d' = -31,62$	$d' = d \cos \theta + e \sen \theta$ $d' = -54 \cos(-18,43) - 62 \sen(-18,43)$
$e' = -75,89$	$e' = e \cos \theta - d \sen \theta$ $e' = -62 \cos(-18,43) + 54 \sen(-18,43)$
$f' = 179$	$f' = f$

Entonces se tiene que la ecuación en el sistema rotado es:

$$10y'^2 - 31,62x' - 75,89y' + 179 = 0$$

5. Encontrar la forma canónica de la ecuación en el sistema rotado.

Recuerde cuando $a' = 0$ la forma canónica de la parábola es:

$$(y' - k')^2 = 4p'(x' - h')$$

Por tanto se tienen que encontrar los valores desconocidos h', k', p' . Entonces se tiene que:

$h' = 1,11$	$h' = \frac{e'^2}{4d'c'} - \frac{f'}{d'}$ $h' = \frac{(-75,89)^2}{4(-31,62)(10)} - \frac{(179)}{-31,62}$
$k' = 3,79$	$k' = -\frac{e'}{2c'}$ $k' = -\frac{-75,89}{2(10)}$
$p' = 0,79$	$p' = -\frac{d'}{4c'}$ $p' = -\frac{-31,62}{4(10)}$

Por tanto, la ecuación canónica en el sistema rotado será:

$$(y' - 3,79)^2 = 4(0,79)(x' - 1,11)$$

Se puede encontrar fácilmente las partes de la parábola teniendo la forma canónica de la ecuación ya que las coordenadas y ecuaciones estarán en términos de los coeficientes de ésta.

6. Encontrar el vértice.

El vértice tendrá coordenadas (h', k') , reemplazando se tiene que en el sistema rotado el vértice tiene coordenadas

$$(1,11, 3,79)$$

7. Encontrar el foco.

El foco tendrá coordenadas $(h' + p', k')$, reemplazando se tiene que

$$(1,11 + 0,79, 3,79)$$

$$(1,9, 3,79)$$

8. Encontrar la ecuación de la directriz.

En este caso la directriz está dada por la ecuación

$$x' = h' - p'$$

Reemplazando los coeficientes en la ecuación la directriz, en el sistema rotado, será:

$$x' = 1,11 - 0,79$$

$$x' = 0,32$$

9. Encontrar la ecuación del eje de simetría.

El eje de simetría se puede determinar con la ecuación

$$y' = k'$$

Reemplazando los coeficientes en la ecuación del eje de simetría, en el sistema rotado, será:

$$y' = 3,79$$

Fíjese que durante el desarrollo del ejercicio se ha insistido en que lo que se está encontrando está en el sistema rotado, por tanto, se tendrán que “desrotar” los ejes para poder dar los resultados en el sistema inicial. Para ello, se usará el cambio de coordenadas para la rotación de ejes

$$x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta$$

$$y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta$$

10. Trasformar los resultados al sistema inicial.

El procedimiento a realizar será reemplazar en la ecuación de rotación los respectivos valores de x' y y' y el resultado estará en el sistema inicial.

Vértice

$$\begin{aligned} (1, 11, 3, 79) &\implies (1, 11 \cos(-18, 43) - 3, 79 \operatorname{sen}(-18, 43), (1, 11) \operatorname{sen}(-18, 43) + (3, 79) \cos(-18, 43)) \\ &\implies (2, 25, 3, 25) \end{aligned}$$

Foco

$$\begin{aligned} (1, 9, 3, 79) &\implies (1, 9 \cos(-18, 43) - 3, 79 \operatorname{sen}(-18, 43), (1, 9) \operatorname{sen}(-18, 43) + (3, 79) \cos(-18, 43)) \\ &\implies (3, 3) \end{aligned}$$

Directriz

En este caso se usa una cambio equivalente al primer cambio de coordenadas

$$x' = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta$$

$$y' = -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta$$

Por tanto se tiene que

$$\begin{aligned}x' = 0,32 &\implies x \cos(-18,43) + y \operatorname{sen}(-18,43) = 0,32 \\ &\implies y = -x \cot(-18,43) + \frac{0,32}{\operatorname{sen}(-18,43)}\end{aligned}$$

Eje de simetría

Análogo al proceso donde se determino la directriz, se tiene que el eje de simetría será:

$$\begin{aligned}y' = 3,79 &\implies -x \operatorname{sen}(-18,43) + y \cos(-18,43) = 3,79 \\ &\implies y = -x \cot(-18,43) + \frac{3,79}{\operatorname{sen}(-18,43)}\end{aligned}$$

10. Encontrar la excentricidad \widehat{e} .

Por definición de excentricidad de una parábola se tiene que el valor de \widehat{e} está dado por $\frac{d_{P,l}}{d_{P,F}}$ y este valor debe ser 1. Se tomará el vértice como P , es decir, tendrá coordenadas $(2,25, 3,25)$ y se determinará la distancia entre el y el foco que tiene coordenadas $(3, 3)$. La distancia $d_{P,F}$ es

$$\begin{aligned}d_{P,F} &= \sqrt{(2,25 - 3)^2 + (3,25 - 3)^2} \\ d_{P,F} &= 0,79\end{aligned}$$

Ahora se pondrá la ecuación de la recta directriz en su forma canónica

$$x \cot(-18,43) + y - \frac{0,32}{\operatorname{sen}(-18,43)} = 0$$

Luego la distancia del punto (x_1, y_1) a una recta $Ax + By + C = 0$ se determina a partir de

$$d_{P,l} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Identificando A, B, C en la ecuación de la directriz se tiene que la distancia entre P y l es

$$d_{P,l} = \frac{\left| \cot(-18,43)(2,25) + (1)(3,25) + \frac{0,32}{\operatorname{sen}(-18,43)} \right|}{\sqrt{\cot^2(-18,43) + 1^2}}$$

$$d_{P,l} = 0,79$$

Luego la excentricidad será

$$\begin{aligned}\widehat{e} &= \frac{0,79}{0,79} \\ \widehat{e} &= 1\end{aligned}$$

13. Realizar un bosquejo de la curva.

En la Figura A-6 muestra la gráfica de la ecuación dada.

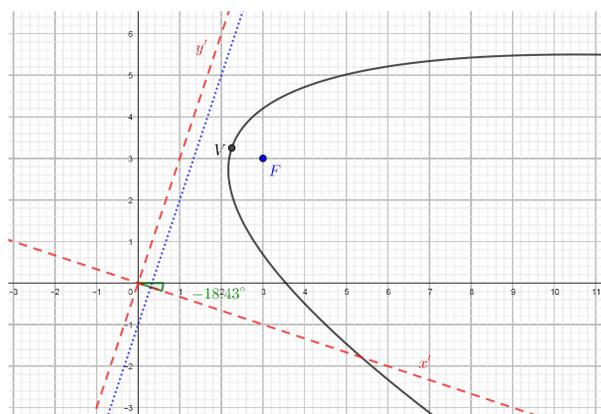


Figura A-6.: Gráfica de $x^2 + 6xy + 9y^2 - 54x - 62y + 179 = 0$

A.20.

En este anexo se mostrará cómo, a partir de la ecuación general de las elipses que tienen su centro en el origen, se puede llegar a su ecuación canónica.

En el anexo A.10 se mostró la ecuación general de las elipses que tienen el centro en el origen de los ejes coordenados x y y . A continuación se muestra el proceso que se realiza para determinar la ecuación canónica.

Directriz paralela al eje x	Directriz paralela al eje y
$ax^2 + cy^2 + f = 0$ $-\frac{a}{f}x^2 - \frac{c}{f}y^2 = 1$ $\frac{x^2}{-f/a} + \frac{y^2}{-f/c} = 1$ $\frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} = 1$	
con $a' = -\frac{f}{a}$, $b' = -\frac{f}{c}$	

A.21.

A continuación se mostrará cómo llegar a la ecuación canónica teniendo como punto de partida la ecuación general de las elipses trasladadas que se mostró en el A.11.

Se mostrará el proceso que se realizó para concluir la ecuación canónica con sus respectivas sustituciones:

Directriz paralela al eje x	Directriz paralela al eje y
$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$ $a\left(x^2 + \frac{d}{a}x\right) + c\left(y^2 + \frac{e}{c}y\right) + f = 0$ $a\left[\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 - \frac{d^2}{4a^2}\right] + c\left[\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 - \frac{e^2}{4c^2}\right] + f = 0$ $a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = \frac{d^2c + e^2a - 4acf}{4ac}$ $\frac{(x-h)^2}{a'} + \frac{(y-k)^2}{b'} = 1$	

Se tiene que tener en cuenta que cuando $a' < b'$ las directrices son paralelas al eje y , si $a' > b'$ entonces las directrices son paralelas al eje x . Y las siguientes sustituciones:

$$h = -\frac{d}{2a}, \quad k = -\frac{e}{2c}, \quad a' = \frac{d^2c + e^2a - 4acf}{4a^2c}, \quad b' = \frac{d^2c + e^2a - 4acf}{4ac^2}$$

A.22.

A continuación se mostrará cómo llegar a la ecuación canónica teniendo como punto de partida la ecuación general de las elipses rotadas y/o trasladadas que se mostró en el A.12.

El primer paso es determinar con qué ángulo se tiene que rotar los ejes para que la directriz sea paralela a algún eje. Para ello se utiliza la siguiente fórmula:

$$\theta = \frac{\arctan\left(\frac{b}{a-c}\right)}{2}$$

Ahora reemplazando las ecuaciones de rotación (2-7) con este ángulo θ se encuentra que se anula el término xy . Se mostrará el proceso que se realizó para concluir la ecuación canónica con sus respectivas sustituciones:

Directriz paralela al eje x	Directriz paralela al eje y
$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ $a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$ $\frac{(x'-h')^2}{a'} + \frac{(y'-k')^2}{b'} = 1$	

Se puede notar que se hace uso de lo encontrado en el anexo A.20. A parte se tienen las siguientes sustituciones que surgen a partir de la rotación de los ejes.

$$a' = a \cos^2 \theta + b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta$$

$$b' = (a - c) \tan 2\theta + 2b = 0$$

$$c' = a \sin^2 \theta - b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta$$

$$d' = d \cos \theta + e \sin \theta$$

$$e' = e \cos \theta - d \sin \theta$$

$$f' = f$$

A.23.

A continuación se presenta los pasos a seguir para poder determinar las coordenadas de los focos, vértices y centro y las ecuaciones de las directrices y el eje de simetría de una elipse.

Ejemplo

- Sea la curva $42x^2 - 30xy + 59y^2 - 282x - 278y + 543 = 0$.

Se encontrará los focos, los vértices, el centro y las ecuaciones de las rectas directrices. También se dirá cuál es la constante k de la definición por lugar geométrico y su excentricidad \widehat{e} . Se hará un bosquejo de la curva para corroborar lo dicho.

Solución.

1. **Determinar los coeficientes a, b, c, d, e, f de la ecuación.**

En este caso los coeficientes son

$$a = 42, \quad b = -30, \quad c = 59, \quad d = -282, \quad e = -278, \quad f = 543$$

2. **Encontrar qué tipo de curva es.**

Para esto se usa $b^2 - 4ac$ entonces, reemplazando y realizando las operaciones se tiene que

$$(-30)^2 - 4(42)(59) = -9012 < 0$$

Se concluye que es una **elipse**.

Como aparece el término xy entonces se tiene que aplicar una rotación de los ejes, para esto se tiene que saber cuál es el ángulo con el cual se rotarán los ejes coordenados

3. Determinar el ángulo de rotación θ .

Este ángulo se puede encontrar como $\theta = \frac{\arctan\left(\frac{b}{a-c}\right)}{2}$, reemplazando y realizando las operaciones el ángulo será

$$\theta = \frac{\arctan\left(\frac{-30}{42-59}\right)}{2}$$

$$\theta = 30,96^\circ$$

Teniendo el ángulo de rotación se determinan a', b', c', d', e', f' que serán los coeficientes de la ecuación en el sistema rotado.

4. Encontrar la ecuación en el sistema rotado.

Para determinar dicha ecuación se mirará coeficiente por coeficiente. Se tiene que:

$a' = 34$	$a' = a \cos^2 \theta + b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta$ $a' = 42 \cos^2(30,96) - 30 \cos(30,96) \sin(30,96) + 59 \sin^2(30,96)$
$c' = 68$	$c' = a \sin^2 \theta - b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta$ $c' = 42 \sin^2(30,96) + 30 \cos(30,96) \sin(30,96) + 59 \cos^2(30,96)$
$d' = -384,84$	$d' = d \cos \theta + e \sin \theta$ $d' = -282 \cos(30,96) - 278 \sin(30,96)$
$e' = -93,3$	$e' = e \cos \theta - d \sin \theta$ $e' = -278 \cos(30,96) + 282 \sin(30,96)$
$f' = 543$	$f' = f$

Entonces se tiene que la ecuación en el sistema rotado es:

$$34x'^2 + 68y'^2 - 384,84x' - 93,3y' + 543 = 0$$

5. Encontrar la forma canónica de la ecuación en el sistema rotado.

Recuerde que la forma canónica de la elipse es

$$\frac{(x-h')^2}{a''} + \frac{(y-k')^2}{b''} = 1$$

Por tanto se tienen que encontrar los valores desconocidos h', k', a'', b'' . Entonces

$h' = 5,66$	$h' = -\frac{d'}{2a'}$ $h' = -\frac{-384,84}{2(34)}$
$k' = 0,69$	$k' = -\frac{e'}{2c'}$ $k' = -\frac{-93,3}{2(68)}$
$a'' = 17$	$a'' = \frac{d'^2 c' + e'^2 a' - 4a' c' f'}{4a'^2 c'}$ $a'' = \frac{(-384,84)^2 (68) + (-93,3)^2 (34) - 4(34)(68)(543)}{4(34)^2 (68)}$
$b'' = 8,5$	$b'' = \frac{d'^2 c' + e'^2 a' - 4a' c' f'}{4a' c'^2}$ $b'' = \frac{(-384,84)^2 (68) + (-93,3)^2 (34) - 4(34)(68)(543)}{4(34)(68)^2}$
$c'' = 2,92$	$c'' = \sqrt{a' - b'}$ $c'' = \sqrt{(17)^2 - (8,5)^2}$

Entonces, la ecuación canónica en el sistema rotado será:

$$\frac{(x+5,66)^2}{17} + \frac{(y+0,69)^2}{8,5} = 1$$

Se puede encontrar fácilmente las partes de la elipse teniendo la forma canónica de la ecuación ya que las coordenadas y ecuaciones estarán en términos de los coeficientes de ésta. Se procederá teniendo en cuenta que $a' < c'$.

6. Encontrar el centro

El centro tendrá coordenadas (h', k') , reemplazando se tiene que en el sistema rotado tiene las coordenadas

$$(5,66, 0,69)$$

7. Encontrar los vértices.

Los vértices tendrán coordenadas $(h' + \sqrt{a''}, k')$ y $(h' - \sqrt{a''}, k')$, reemplazando se tiene que en el sistema rotado los vértices tienen coordenadas

$$\begin{array}{ccc} (5,66 + \sqrt{17}, 0,69) & \wedge & (5,66 - \sqrt{17}, 0,69) \\ (9,78, 0,69) & \wedge & (1,69, 0,69) \end{array}$$

8. Encontrar los focos.

Los focos tendrán coordenadas $(h' + c'', k')$ y $(h' - c'', k')$, reemplazando se tiene que

$$\begin{array}{ccc} (5,66 + 2,92, 0,69) & \wedge & (5,66 - 2,92, 0,69) \\ (8,58, 0,69) & \wedge & (2,74, 0,69) \end{array}$$

9. Encontrar las ecuaciones de las directrices.

Las directrices están dadas por la ecuaciones

$$x' = \frac{a''}{c''} + h' \quad \wedge \quad x' = -\frac{a''}{c''} + h'$$

Reemplazando los coeficientes en cada una de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= \frac{17}{2,92} + 5,66 & \wedge & & x' &= -\frac{17}{2,92} + 5,66 \\ x' &= 11,49 & \wedge & & x' &= -0,17 \end{aligned}$$

Fíjese que durante el desarrollo del ejercicio se ha insistido en que lo que se está encontrando está en el sistema rotado, por tanto, se tendrán que “desrotar” los ejes para poder dar los resultados en el sistema inicial. Para ello, se usará el cambio de coordenadas para la rotación de ejes

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned}$$

10. Trasformar los resultados al sistema inicial.

El procedimiento a realizar será reemplazar en la ecuación de rotación los respectivos valores de x' y y' y el resultado estará en el sistema inicial.

Vértices

$$\begin{aligned} (9,78, 0,69) &\Rightarrow (9,78 \cos(30,96) - 0,69 \sin(30,96), (9,78) \sin(30,96) + (0,69) \cos(30,96)) \\ &\Rightarrow (8,04, 5,62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1,69, 0,69) &\Rightarrow (1,69 \cos(30,96) - 0,69 \sin(30,96), (1,69) \sin(30,96) + (0,69) \cos(30,96)) \\ &\Rightarrow (0,96, 1,38) \end{aligned}$$

Focos

$$\begin{aligned} (8,58, 0,69) &\Rightarrow (8,58 \cos(30,96) - 0,69 \sin(30,96), (8,58) \sin(30,96) + (0,69) \cos(30,96)) \\ &\Rightarrow (7, 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2,74, 0,69) &\Rightarrow (1,69 \cos(30,96) - 0,69 \sin(30,96), (2,74) \sin(30,96) + (0,69) \cos(30,96)) \\ &\Rightarrow (2, 2) \end{aligned}$$

Directrices

En este caso se usa una cambio equivalente al primer cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta \\y' &= -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$

Por tanto se tiene que

$$\begin{aligned}x' = 11,49 &\implies x \cos(30,96) - y \operatorname{sen}(30,96) = 11,49 \\&\implies y = -x \cot(30,96) + \frac{11,49}{\operatorname{sen}(30,96)} \\x' = -0,17 &\implies x \cos(30,96) - y \operatorname{sen}(30,96) = -0,17 \\&\implies y = -x \cot(30,96) - \frac{0,17}{\operatorname{sen}(30,96)}\end{aligned}$$

11. Determinar el valor de la constante k .

Para encontrar el valor de la constante k se tiene que ver que por la definición de lugar geométrico $d_{P,F_1} + d_{P,F_2} = k$ siendo P un punto sobre la elipse, F_1 y F_2 los respectivos focos. Como P puede ser cualquier punto de la elipse se puede tomar un vértice como P y se encontrará la distancia entre P y F_1 y P y F_2 , en este caso P tiene coordenadas $(0,96, 1,38)$.

La distancia de P a F_1 será:

$$\begin{aligned}d_{P,F_1} &= \sqrt{(2 - 0,96)^2 + (2 - 1,38)^2} \\d_{P,F_1} &= 1,21\end{aligned}$$

La distancia de P a F_2 será:

$$\begin{aligned}d_{P,F_2} &= \sqrt{(7 - 0,96)^2 + (5 - 1,38)^2} \\d_{P,F_2} &= 7,04\end{aligned}$$

Por tanto la constante k tendrá el valor de

$$\begin{aligned}k &= d_{P,F_1} + d_{P,F_2} \\k &= 1,21 + 7,04 \\k &= 8,25\end{aligned}$$

12. Encontrar la excentricidad \widehat{e} .

Por definición de excentricidad de una elipse se tiene que el valor de \widehat{e} está dado por $\frac{d_{P,l_1}}{d_{P,F_1}}$ y este valor está entre 0 y 1. Deberá tener cuidado con la correspondencia entre el foco y la directriz; dependiendo del foco que tome deberá tomar la directriz más cercana a este, por el contrario, si toma una directriz deberá tomar el foco más cercano a la recta.

De manera análoga al ítem anterior se toma a P como $(0,96, 1,38)$ y al foco F_1 con coordenadas $(7,5)$; la forma canónica de la directriz l_1 correspondiente a este foco será

$$x \cot(30,96) + y + \frac{0,17}{\text{sen}(30,96)} = 0$$

Luego la distancia del punto (x_1, y_1) a una recta $Ax + By + C = 0$ se determina a partir de

$$d_{P,l} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Identificando A, B, C en la ecuación de la directriz se tiene que la distancia entre P y l_1 es

$$d_{P,l_1} = \frac{\left| \cot(30,96)(0,96) + (1)(1,38) + \frac{0,17}{\text{sen}(30,96)} \right|}{\sqrt{\cot^2(30,96) + \left(\frac{0,17}{\text{sen}(30,96)} \right)^2}}$$

$$d_{P,l_1} = 1,71$$

Luego la excentricidad será

$$e = \frac{1,21}{1,71}$$

$$e = 0,71$$

13. Realizar un bosquejo de la curva.

En la Figura A-7 muestra la gráfica de la ecuación dada.

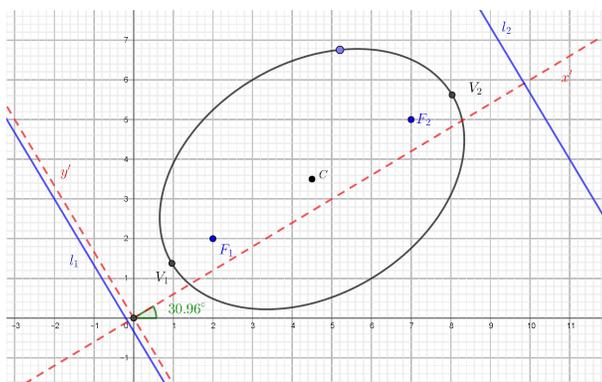


Figura A-7.: Gráfica de $42x^2 - 30xy + 59y^2 - 282x - 278y + 543 = 0$

A.24.

En este anexo se mostrará cómo, a partir de la ecuación general de las hipérbolas que tienen su centro en el origen, se puede llegar a su ecuación canónica.

En el anexo A.13 se mostró la ecuación general de las hipérbolas que tienen el centro en el origen de los ejes coordenados x y y . A continuación se muestra el proceso que se realiza para determinar la ecuación canónica.

Directriz paralela al eje x	Directriz paralela al eje y
$ax^2 + cy^2 + f = 0$ $-\frac{a}{f}x^2 - \frac{c}{f}y^2 = 1$ $\frac{x^2}{-f/a} + \frac{y^2}{-f/c} = 1$ $\frac{x^2}{a'} - \frac{y^2}{b'} = 1$	
con $a' = -\frac{f}{a}$, $b' = -\frac{f}{c}$	

A.25.

A continuación se mostrará cómo llegar a la ecuación canónica teniendo como punto de partida la ecuación general de las elipses trasladadas que se mostró en el A.14.

Se mostrará el proceso que se realizó para concluir la ecuación canónica con sus respectivas sustituciones:

Directriz paralela al eje x	Directriz paralela al eje y
$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$ $a\left(x^2 + \frac{d}{a}x\right) + c\left(y^2 + \frac{e}{c}y\right) + f = 0$ $a\left[\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 - \frac{d^2}{4a^2}\right] + c\left[\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 - \frac{e^2}{4c^2}\right] + f = 0$ $a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = \frac{d^2c + e^2a - 4acf}{4ac}$	
$\frac{(x-h)^2}{a'} - \frac{(y-k)^2}{b'} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{b'} - \frac{(x-h)^2}{a'} = 1$

Se tiene que tener en cuenta que cuando $a' < b'$ las directrices son paralelas al eje y , si $a' > b'$ entonces las directrices son paralelas al eje x . Y las siguientes sustituciones:

$$h = -\frac{d}{2a}, \quad k = -\frac{e}{2c}, \quad a' = \frac{d^2c + e^2a - 4acf}{4a^2c}, \quad b' = \frac{d^2c + e^2a - 4acf}{4ac^2}$$

A.26.

A continuación se mostrará cómo llegar a la ecuación canónica teniendo como punto de partida la ecuación general de las elipses rotadas y/o trasladadas que se mostró en el A.15.

El primer paso es determinar con qué ángulo se tiene que rotar los ejes para que las directrices sean paralelas a algún eje. Para ello se utiliza la siguiente fórmula:

$$\theta = \frac{\arctan\left(\frac{b}{a-c}\right)}{2}$$

Ahora reemplazando las ecuaciones de rotación (2-7) con este ángulo θ se encuentra que se anula el término xy . Se mostrará el proceso que se realizó para concluir la ecuación canónica con sus respectivas sustituciones:

Directriz paralela al eje x	Directriz paralela al eje y
$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ $a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$	
$\frac{(x'-h')^2}{a''} - \frac{(y'-k')^2}{b''} = 1$	$\frac{(y'-k')^2}{b''} - \frac{(x'-h')^2}{a''} = 1$

Se puede notar que se hace uso de lo encontrado en el anexo A.20. A parte se tienen las

siguientes sustituciones que surgen a partir de la rotación de los ejes.

$$a' = a \cos^2 \theta + b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta$$

$$b' = (a - c) \tan 2\theta + 2b = 0$$

$$c' = a \sin^2 \theta - b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta$$

$$d' = d \cos \theta + e \sin \theta$$

$$e' = e \cos \theta - d \sin \theta$$

$$f' = f$$

A.27.

A continuación se presenta los pasos a seguir para poder determinar las coordenadas de los focos, vértices y centro y las ecuaciones de las directrices, el eje de simetría y las asíntotas de una hipérbola.

Ejemplo

- Sea la curva $30,33x^2 - 64xy - 17,67y^2 + 192x + 106,05y - 61,58 = 0$. Se encontrará los focos, los vértices, el centro y las ecuaciones de las rectas directrices. También se dirá cuál es la constante k de la definición por lugar geométrico y su excentricidad \widehat{e} . Se hará un bosquejo de la curva para corroborar lo dicho.

Solución.

1. **Determinar los coeficientes a, b, c, d, e, f de la ecuación.**

En este caso los coeficientes son

$$a = 30,33, \quad b = -64, \quad c = -17,67, \quad d = 192, \quad e = 106,05, \quad f = -61,58$$

2. **Encontrar qué tipo de curva es.**

Para esto se usa $b^2 - 4ac$ entonces, reemplazando y realizando las operaciones se tiene que

$$(-64)^2 - 4(30,33)(-17,67) = 6270,82 > 0$$

Se concluye que es una **elipse**.

Como aparece el término xy entonces se tiene que aplicar una rotación de los ejes, para esto se tiene que saber cuál es el ángulo con el cual se rotarán los ejes coordenados

$h' = -1,34$	$h' = -\frac{d'}{2a'}$ $h' = -\frac{124,3}{2(46,33)}$
$k' = 2,68$	$k' = -\frac{e'}{2c'}$ $k' = -\frac{180,72}{2(-33,67)}$
$a'' = -2,11$	$a'' = \frac{d'^2c' + e'^2a' - 4a'c'f'}{4a'^2c'}$ $a'' = \frac{(124,3)^2(-33,67) + (180,72)^2(46,33) - 4(46,33)(-33,67)(-61,58)}{4(46,33)^2(-33,67)}$
$b'' = 2,9$	$b'' = \frac{d'^2c' + e'^2a' - 4a'c'f'}{4a'c'^2}$ $b'' = \frac{(124,3)^2(-33,67) + (180,72)^2(46,33) - 4(46,33)(-33,67)(-61,58)}{4(46,33)(-33,67)^2}$
$c'' = 2,24$	$c'' = \sqrt{b'' - a''}$ $c'' = \sqrt{(2,9)^2 - (-2,11)^2}$

Entonces, la ecuación canónica en el sistema rotado será:

$$\frac{(y-2,68)^2}{2,9} - \frac{(x+1,39)^2}{2,11} = 1$$

Se puede encontrar fácilmente las partes de la hipérbola teniendo la forma canónica de la ecuación ya que las coordenadas y ecuaciones estarán en términos de los coeficientes de ésta. Se procederá teniendo en cuenta que $a'' < b''$.

6. Encontrar el centro

El centro tendrá coordenadas (h', k') , reemplazando se tiene que en el sistema rotado tiene las coordenadas

$$(-1,34,2,68)$$

7. Encontrar los vértices.

Los vértices tendrán coordenadas $(h', k' + \sqrt{b''})$ y $(h', k' - \sqrt{b''})$, reemplazando se tiene que en el sistema rotado los vértices tienen coordenadas

$$\begin{aligned} (-1,34,2,68 + \sqrt{2,9}) & \wedge & (-1,34,2,68 - \sqrt{2,9}) \\ (-1,34,4,39) & \wedge & (-1,34,0,98) \end{aligned}$$

8. Encontrar los focos.

Los focos tendrán coordenadas $(h', k' + c'')$ y $(h', k' - c'')$, reemplazando se tiene que

$$\begin{aligned} (-1,34,2,68 + 2,24) & \wedge & (-1,34,2,68 - 2,24) \\ (-1,34,4,92) & \wedge & (-1,34,0,45) \end{aligned}$$

9. Encontrar las ecuaciones de las directrices.

Las directrices están dadas por la ecuaciones

$$y' = \frac{b''}{c''} + k' \quad \wedge \quad y' = -\frac{b''}{c''} + k'$$

Reemplazando los coeficientes en cada una de las ecuaciones

$$y' = \frac{2,9}{2,24} + 2,68 \quad \wedge \quad y' = -\frac{2,9}{2,24} + 2,68$$

$$y' = 3,98 \quad \wedge \quad y' = 1,39$$

Fíjese que durante el desarrollo del ejercicio se ha insistido en que lo que se está encontrando está en el sistema rotado, por tanto, se tendrán que “desrotar” los ejes para poder dar los resultados en el sistema inicial. Para ello, se usará el cambio de coordenadas para la rotación de ejes

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

10. Trasformar los resultados al sistema inicial.

El procedimiento a realizar será reemplazar en la ecuación de rotación los respectivos valores de x' y y' y el resultado estará en el sistema inicial.

Vértices

$$(-1,34, 4,39) \Rightarrow (-1,34 \cos(-26,57) - 4,39 \sin(-26,57),$$

$$(-1,34) \sin(-26,57) + (4,39) \cos(-26,57))$$

$$\Rightarrow (-0,76, 1,48)$$

$$(-1,34, 0,45) \Rightarrow -1,34 \cos(-26,57) - 0,45 \sin(-26,57),$$

$$(-1,34) \sin(-26,57) + (0,45) \cos(-26,57))$$

$$\Rightarrow (0,76, 4,52)$$

Focos

$$(-1,34, 4,92) \Rightarrow (-1,34 \cos(-26,57) - 4,92 \sin(-26,57),$$

$$(-1,34) \sin(-26,57) + (4,92) \cos(-26,57))$$

$$\Rightarrow (1, 5)$$

$$(-1,34, 0,45) \Rightarrow (-1,34 \cos(-26,57) - 0,45 \sin(-26,57),$$

$$(-1,34) \sin(-26,57) + (0,45) \cos(-26,57))$$

$$\Rightarrow (-1, 1)$$

Directrices

En este caso se usa una cambio equivalente al primer cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta \\y' &= -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$

Por tanto se tiene que

$$\begin{aligned}y' = 3,98 &\implies -x \operatorname{sen}(-26,57) + y \cos(-26,57) = 3,98 \\&\implies y = x \tan(-26,57) + \frac{3,98}{\cos(-26,57)} \\y' = 1,39 &\implies -x \operatorname{sen}(-26,57) + y \cos(-26,57) = 1,39 \\&\implies y = x \tan(-26,57) - \frac{1,39}{\operatorname{sen}(-26,57)}\end{aligned}$$

11. Determinar el valor de la constante k .

Para encontrar el valor de la constante k se tiene que ver que por la definición de lugar geométrico $|d_{P,F_1} - d_{P,F_2}| = k$ siendo P un punto sobre la hipérbola, F_1 y F_2 los focos.

Como P puede ser cualquier punto en la hipérbola se puede tomar un vértice como P y se encontrará la distancia entre P y F_1 y P y F_2 , en este caso P tiene coordenadas $(-0,76, 1,48)$.

La distancia de P a F_1 será:

$$\begin{aligned}d_{P,F_1} &= \sqrt{(-1 + 0,76)^2 + (1 - 1,48)^2} \\d_{P,F_1} &= 0,53\end{aligned}$$

La distancia de P a F_2 será:

$$\begin{aligned}d_{P,F_2} &= \sqrt{(1 + 0,76)^2 + (5 - 1,48)^2} \\d_{P,F_2} &= 3,94\end{aligned}$$

Por tanto la constante k tendrá el valor de

$$\begin{aligned}k &= |d_{P,F_1} - d_{P,F_2}| \\k &= |0,53 - 3,94| \\k &= 3,41\end{aligned}$$

12. Encontrar la excentricidad \widehat{e} .

Por definición de excentricidad de una hipérbola se tiene que el valor de \widehat{e} está dado por $\frac{d_{P,l_1}}{d_{P,F_1}}$ y este valor será mayor a 1. Deberá tener cuidado con la correspondencia entre el foco y la directriz; dependiendo del foco que tome deberá tomar la directriz más cercana a este, por el contrario, si toma una directriz deberá tomar el foco más cercano a esta.

De manera análoga al ítem anterior se toma a P como $(-0,76, 1,48)$ y al foco F_1 con coordenadas $(-1, 1)$; la forma canónica de la directriz l_1 correspondiente a este foco será

$$x \tan(-26,57) + y + \frac{1,39}{\sin(-26,57)} = 0$$

Luego la distancia del punto (x_1, y_1) a una recta $Ax + By + C = 0$ se determina a partir de

$$d_{P,l} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Identificando A, B, C en la ecuación de la directriz se tiene que la distancia entre P y l_1 es

$$d_{P,l_1} = \frac{\left| \tan(-26,57)(-0,76) + (1)(1,48) + \frac{1,39}{\sin(-26,57)} \right|}{\sqrt{\tan^2(-26,57) + \left(\frac{1,39}{\sin(-26,57)} \right)^2}}$$

$$d_{P,l_1} = 0,41$$

Luego la excentricidad será

$$e = \frac{0,53}{0,41}$$

$$e = 1,31$$

13. Realizar un bosquejo de la curva.

En la Figura A-8 muestra la gráfica de la ecuación dada.

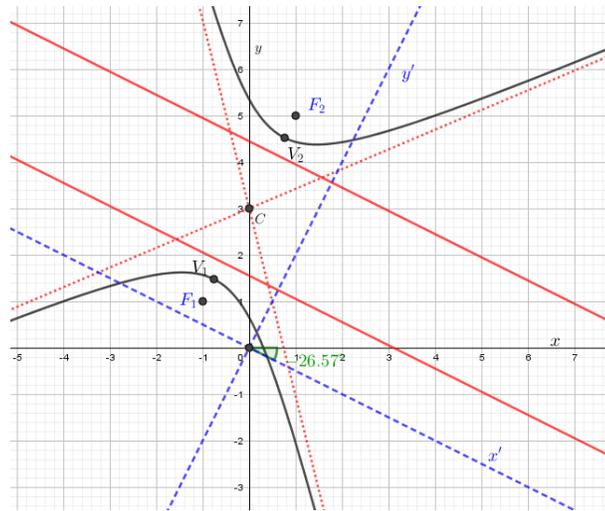


Figura A-8.: Gráfica de $30,33x^2 - 64xy - 17,67y^2 + 192x + 106,05y - 61,58 = 0$

B. Anexos capítulo 3

B.1.

En este anexo se mostrará cómo encontrarla ecuación de la gs-elipse definida como lugar geométrico cuando el centro coincide con el origen de los ejes del *Sistema Seno*, cuando el origen no coincide con el centro y cuando la gs-elipse esta rotada.

Como se mencionó en el texto ya que la definición de distancia no cambia la representación gráfica tampoco, es decir, que la representación de las gs-elipses es la misma que las elipses. Luego, en el anexo A.10 se mostró la ecuación general de las elipses y utilizando el cambio de coordenadas presentada en la sección 4.3 se determina que la ecuación de la gs-elipse es de la forma:

$$\begin{aligned}ax^2 + cy^2 + f &= 0 \\a\left(\frac{\bar{x}}{2}\right)^2 + c\left(\frac{\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})}{2}\right)^2 + f &= 0 \\a\bar{x}^2 + c(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 4f &= 0\end{aligned}$$

Para las gs-elipses en las cuales el centro no coincide con el origen de los ejes \bar{x}, \bar{y} , se deduce que el centro tendrá coordenadas $(h, k)_S$, es decir, que en el sistema cartesiano serán $\left(\frac{h}{2}, \frac{k - \text{sen}(h)}{2}\right)_C$, para este caso las elipses están trasladadas y en el anexo A.11 se mostró las ecuaciones de las elipses trasladadas, y con las ecuaciones de cambio de coordenadas se tiene que las gs-elipse tienen como ecuación:

$$\begin{aligned}ax^2 + cy^2 + dx + ey + f &= 0 \\a\left(\frac{\bar{x}}{4}\right)^2 + c\left(\frac{\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})}{2}\right)^2 + d\frac{\bar{x}}{2} + e\left(\frac{\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})}{2}\right) + f &= 0 \\a\bar{x}^2 + c(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 2d\bar{x} + 2e(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})) + 4f &= 0\end{aligned}$$

Análogo a los casos anteriores se determinará la ecuación para las gs-elipses que están rotadas. Teniendo en cuenta el anexo A.12 y las ecuaciones de cambio de coordenadas se

tiene que su ecuación es:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f &= 0 \\
 a\left(\frac{\bar{x}}{2}\right)^2 + b\left(\frac{\bar{x}}{2}\right)\left(\frac{\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})}{2}\right) + c\left(\frac{\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})}{2}\right)^2 + d\frac{\bar{x}}{2} + e\left(\frac{\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})}{2}\right) + f &= 0 \\
 a\bar{x}^2 + 2b\bar{x}(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})) + c(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 2d\bar{x} + 2e(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})) + 4f &= 0
 \end{aligned}$$

B.2.

En este anexo se mostrará cómo encontrarla ecuación de la gs-hipérbola definida como lugar geométrico cuando el centro coincide con el origen de los ejes del *Sistema Seno*, cuando el origen no coincide con el centro y cuando la gs-hipérbola esta rotada.

Como se mencionó en el texto ya que la definición de distancia no cambia la representación gráfica tampoco, es decir, que la representación de las gs-hipérbolas es la misma que las hipérbolas. Luego, en el anexo A.13 se mostró la ecuación general de las hipérbolas y utilizando el cambio de coordenadas presentada en la sección 4.3 se determina que la ecuación de la gs-hipérbola es de la forma:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + cy^2 + f &= 0 \\
 a\left(\frac{\bar{x}}{2}\right)^2 + c\left(\frac{\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})}{2}\right)^2 + f &= 0 \\
 a\bar{x}^2 + c(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 4f &= 0
 \end{aligned}$$

Para las gs-hipérbolas en las cuales el centro no coincide con el origen de los ejes \bar{x}, \bar{y} , se deduce que el centro tendrá coordenadas $(h, k)_S$, es decir, que en el sistema cartesiano serán $\left(\frac{h}{2}, \frac{k - \text{sen}(h)}{2}\right)_C$, para este caso las hipérbolas están trasladadas y en el anexo A.14 se mostró las ecuaciones de las hipérbolas trasladadas, y con las ecuaciones de cambio de coordenadas se tiene que las gs-hipérbolas tienen como ecuación:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + cy^2 + dx + ey + f &= 0 \\
 a\left(\frac{\bar{x}}{4}\right)^2 + c\left(\frac{\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})}{2}\right)^2 + d\frac{\bar{x}}{2} + e\left(\frac{\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})}{2}\right) + f &= 0 \\
 a\bar{x}^2 + c(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 2d\bar{x} + 2e(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})) + 4f &= 0
 \end{aligned}$$

Análogo a los casos anteriores se determinará la ecuación para las gs-hipérbolas que están rotadas. Teniendo en cuenta el anexo A.15 y las ecuaciones de cambio de coordenadas se

tiene que su ecuación es:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f &= 0 \\
 a\left(\frac{\bar{x}}{2}\right)^2 + b\left(\frac{\bar{x}}{2}\right)\left(\frac{\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})}{2}\right) + c\left(\frac{\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})}{2}\right)^2 + d\frac{\bar{x}}{2} + e\left(\frac{\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})}{2}\right) + f &= 0 \\
 a\bar{x}^2 + 2b\bar{x}(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})) + c(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 2d\bar{x} + 2e(\bar{x} + \text{sen}(\bar{x})) + 4f &= 0
 \end{aligned}$$

B.3.

En este anexo se mostrará cómo encontrarla ecuación de la gs-parábola definida como lugar geométrico cuando el centro coincide con el origen de los ejes del *Sistema Seno* y cuando el origen no coincide con el centro.

Como se mencionó en el texto ya que la definición de distancia no cambia la representación gráfica tampoco, es decir, que la representación de las gs-parábolas es la misma que las parábolas. Luego, en el anexo A.7 se mostró la ecuación general de las parábolas y utilizando el cambio de coordenadas presentada en la sección 4.3 se determina que la ecuación de la gs-parábola es de la forma:

$$\begin{aligned}
 cy^2 + dx &= 0 \\
 c\left(\frac{\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})}{2}\right)^2 + d\left(\frac{\bar{x}}{2}\right) &= 0 \\
 c(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 2d\bar{x} &= 0
 \end{aligned}$$

Para las gs-parábolas en las cuales el centro no coincide con el origen de los ejes \bar{x}, \bar{y} , se deduce que el centro tendrá coordenadas $(h, k)_S$, es decir, que en el sistema cartesiano serán $\left(\frac{h}{2}, \frac{k - \text{sen}(h)}{2}\right)_C$, para este caso las parábolas están trasladadas y en el anexo A.8 se mostró las ecuaciones de las parábolas trasladadas, y con las ecuaciones de cambio de coordenadas se tiene que las gs-parábolas tienen como ecuación:

$$\begin{aligned}
 cy^2 + dx + ey + f &= 0 \\
 c\left(\frac{\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})}{2}\right)^2 + d\frac{\bar{x}}{2} + e\left(\frac{\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})}{2}\right) + f &= 0 \\
 c(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x}))^2 + 2d\bar{x} + 2e(\bar{y} + \text{sen}(\bar{x})) + 4f &= 0
 \end{aligned}$$