

¿QUÉ OFRECE LA TECNOLOGÍA NO DIGITAL EN UN MUNDO DONDE
TODO ES DIGITAL? EL CASO DE LA GEOMETRÍA Y EL PROCESO DE
CONCEPTUALIZAR

ANGÉLICA JOHANNA DÍAZ HUERTAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.

2019

¿QUÉ OFRECE LA TECNOLOGÍA NO DIGITAL EN UN MUNDO DONDE
TODO ES DIGITAL? EL CASO DE LA GEOMETRÍA Y EL PROCESO DE
CONCEPTUALIZAR

ANGÉLICA JOHANNA DÍAZ HUERTAS

Trabajo de grado para optar el título de

Licenciado en Matemáticas

Asesor

CAMILO SUA FLÓREZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2019

Dedicatoria

Dedico este trabajo de grado principalmente a Dios por siempre guiarme en el camino y a cada uno de mis seres queridos, quienes son mi motivación para seguir adelante.

A mis padres Jesús Díaz y Doris Huertas por ser el motor de mi vida, por sus valores que me han permitido ser una persona de bien, sus enseñanzas y sobre todo por su amor.

A Diego Díaz y Nicolás Caballero por el apoyo, la paciencia y el amor incondicional.

Agradecimientos

A mi director de trabajo de grado, Camilo Sua, quien, con sus conocimientos, su experiencia, paciencia, dedicación y motivación ha hecho posible lo que parecía ser imposible.

A las personas que, de una u otra manera, han sido claves en mi vida profesional.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <u>Formación y transformación</u>	FORMATO	
RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE		
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página iii de 129	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	¿Qué ofrece la tecnología no digital en un mundo donde todo es digital? el caso de la geometría y el proceso de conceptualizar
Autor(es)	Díaz Huertas, Angélica Johanna
Director	Sua Flórez, Camilo
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Tecnología digital, tecnología no digital, doblado de papel, regla y compás, GeoGebra

2. Descripción
¿Qué ofrece la tecnología no digital en un mundo donde todo es digital? Es la pregunta que motivó el desarrollo de este estudio en el marco de la Licenciatura en Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Esta investigación tiene como principal propósito identificar y comparar las potencialidades proporcionadas por las tecnologías digitales y no digitales en tareas geométricas de construcción. A través del estudio esperamos aportar evidencia empírica sobre aspectos de los objetos geométricos que se favorecen con cada una de las tecnologías al afrontar este tipo de situaciones, dado que, nuestra hipótesis inicial es que un engranaje entre distintas tecnologías (digitales y no digitales) aporta en gran medida al establecimiento de conexiones entre distintos objetos geométricos, lo que en última instancia aporta a una construcción de significado más robusta.

3. Fuentes

En este trabajo se consultaron en total 70 fuentes, para la búsqueda de estos documentos usamos bases de datos de acceso libre tales como Scielo, Dialnet, Redalyc y Google Académico; usando palabras clave como regla y compás, doblado de papel, tecnología digital, TIC, artefacto, herramienta entre otras.

Alfaro, E. B. (2008). Instrumentos psicológicos y la teoría de la actividad instrumentada: fundamento teórico para el estudio del papel de los recursos tecnológicos en los procesos educativos. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.

Álvarez, R. B., & Mayo, I. C. (2009). Las tecnologías de la información y la comunicación en la educación superior. Revista Iberoamericana de Educación/Revista Ibero-americana de Educação, (50/7), 10.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International journal of computers for mathematical learning, 7(3), 245.

Avilés. P. (2016). Uso de la didáctica del plegado de papel, como herramienta de apoyo en la enseñanza de los contenidos de la geometría para estudiantes del 10° año de educación general básica, de la unidad educativa Best del Cantón Vines. (Tesis de maestría) Pontificia Universidad Católica Del Ecuador, Quito.

Ayala, N. (2008). Construcciones geométricas con regla y compás: pasos. Revista argentina de psicopedagogía, (62), 4.

Blanco, C., & Otero, T. (2005). Geometría con papel (papiroflexia matemática). Recuperado de <http://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo3tf/1/cblanco.pdf>.

Buccino, S. (2011). Historia de la Matemática en un ambiente de Geometría Dinámica: un nuevo enfoque en la enseñanza de las Cónicas.

Buckingham, D. (2011). Educación en medios: alfabetización, aprendizaje y cultura contemporánea. Editorial Paidós. España. Disponible: books.google.co.ve.

Cabero, J. (2007). Las necesidades de las TIC en el ámbito educativo: oportunidades, riesgos y oportunidades. Tecnologías y educación educativas, 21, 45.

Caceres, I. T. S., & Armella, L. E. M. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: Retos para la educación. Horizontes Pedagógicos, 14(1).

Calder, N. (2012). Processing mathematics through digital technologies. Springer Science & Business Media.

Carnoy, M. (2004). Las TIC en la enseñanza: posibilidades y retos. Lección inaugural del curso académico, 2005, 1-19.

- Castells, M. (1997). La era de la información. Tomo1: economía, sociedad y cultura. Madrid, Alianza. Representar la comunidad: la teoría sociológica clásica y la perspectiva de.
- Castro, S., Guzmán, B., & Casado, D. (2007). Las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Laurus*, 13(23), 213-234.
- Chassapis, D. (1998). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 37(3), 275-293.
- Chavarría, J. V. (2005). Software libre, alternativa tecnológica para la educación. *Revista Electrónica" Actualidades Investigativas en Educación"*, 5(2), 1-9.
- Choque Larrauri, R. (2009). Eficacia en el desarrollo de capacidades TIC en estudiantes de educación secundaria de Lima, Perú. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, 2009, (35): 5-20.
- Czwieniczek, F. (2009). Estudio de la Elipse con Plegado de Papel. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (18), 150-155.
- de Villiers, M. (1998). El futuro de la geometría en la escuela secundaria. Trad. de Victor Larios Osorio). Recuperado de: http://www.fing.edu.uy/imerl/didactica_matematica/Documentos_2008/futuro%20de%20la%20geometria%20deVilliers.pdf.
- Díaz, P. (2000). Las construcciones con regla y compás en la enseñanza de la geometría. *Didactica de La Geometria*, 552, 30–35.
- Diković, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6(2), 191-203.
- Drenoyianni, H. (2006). Reconsidering change and ICT: Perspectives of a human and democratic education. *Education and Information Technologies*, 11(3-4), 401-413.
- Duarte, E. S. (2008). Las tecnologías de información y comunicación (TIC) desde una perspectiva social. *Revista Electrónica Educare*, 12, 155-162.
- Fernández, D., & Montoya, E. (2013). Geometría dinámica: de la visualización a la prueba.
- García, M. T. (2011). La geometría dinámica como herramienta didáctica para el dibujo. Recuperado de <http://www.geogebra.es>.
- Gomes, A. S., & Vergnaud, G. (2004). On the learning of geometric concepts using Dynamic Geometry Software. *Novas Tecnologias na Educaçao*, 2(1), 1-20.
- Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa*, 10(1), 93-111.
- Gómez, P., & Carulla, C. (1998). De lo simbólico a lo gráfico. Efectos de la tecnología en la educación matemática.

- González-López, M. J. (2001). La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica. *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Universidad de Granada, 277-290.
- Graells, P. M. (2000). Las TIC y sus aportaciones a la sociedad. Departamento de pedagogía aplicada, facultad.
- Guevara, C. (2005). Historia de los instrumentos matemáticos. Arte, astronomía y geometría. En Magaña, M. F. (Ed.), *Instrumentos Y Matematicas. Historia, Fundamentos Y Pespectivas Educativas*. (pp. 7-40) México.
- Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. In *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 7-10).
- Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. In *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 7-10).
- Hilliard, A. T. (2015). Global Blended Learning Practices for Teaching and Learning, Leadership and Professional Development. *Journal of International Education Research*, 11(3), 179-188.
- Kortenkamp, U. H. (1999). Foundations of dynamic geometry (Doctoral dissertation, ETH Zurich).
- Laborde, C. (2005, December). Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. In *Proceedings of the 10th Asian technology conference in mathematics* (pp. 22-35).
- Lai, K. W. (2011). Digital technology and the culture of teaching and learning in higher education. *Australasian Journal of Educational Technology*, 27(8).
- Lalli, L. T. (2009). Mathematical machines: A laboratory for mathematics. *Nexus Network Journal*, 11(2), 317-324.
- Leung, A., & Lopez-Real, F. (2000). An analysis of students' explorations and constructions using Cabri geometry. *Science, Mathematics and Technical Education in the 20th and 21st Centuries*, 144-154.
- Lingefjård, T. (2011). Rebirth of Euclidean Geometry? In *Model-Centered Learning* (pp. 205-215). SensePublishers.
- López, M. B. (2003). Caracterización de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en Primaria y Secundaria. *Campo abierto*, (24), 1.
- Lupiáñez, J. L., & Moreno, L. (2001). Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas.
- Manzoor, M., & Vimarlund, V. (2018). Digital technologies for social inclusion of individuals with disabilities. *Health and technology*, 8(5), 377-390.

- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In Handbook of research on the psychology of mathematics education (pp. 173-204). Brill Sense.
- Molfino Vigo, V., & Lezama, J. (2011). Lugares geométricos: su rol en el aprendizaje de la demostración en geometría. *Educación matemática*, 23(1), 37-61.
- Monaghan, J. (2016). Doing Mathematics with Tools: One Task, Four Tools. In *Tools and Mathematics* (pp. 13-22). Springer, Cham.
- Monsalve, O. (2013). El origami y el doblado de papel como herramientas mediadoras para la enseñanza y el aprendizaje matemáticos.
- Moreno, N., Castro, M., & Sua, C. (2019). Tecnologías digitales y no digitales en el proceso de construcción de significado. In *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (Vol. 24). Bogotá.
- Ng, W. (2015). Change and continuity in educational uses of new digital technologies. In *New digital technology in education* (pp. 3-23). Springer, Cham.
- Páez, G. A. (2005) Reseña de “razonamiento griego con regla y compás” de I. Castro. *Universitas Scientiarum*, 10(1es), 85-86.
- Pérez Médina, C. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva Educacional*, 53(2), 129-150.
- Pierce, R., & Stacey, K. (2011). Using dynamic geometry to bring the real world into the classroom. In *Model-centered learning* (pp. 41-55). SensePublishers.
- Re, A. A., & Berti, A. Artefactos, objetos técnicos y objetos estéticos. Por una adecuación de conceptos. *Artefactos, intenciones y agencia técnica*, 15-28.
- Romaní, J. C. C. (2009). El concepto de tecnologías de la información. Benchmarking sobre las definiciones de las TIC en la sociedad del conocimiento. *Zer: Revista de estudios de comunicación*, 14(27).
- Rosales Riady, M. A., & Guzmán Retamal, I. (2016). Resolución de problemas de Construcción Geométrica con Estudiantes de Pedagogía en Educación Básica. *Paradigma*, 37(1), 135-160.
- Rosario, H. (2007). TIC en Ambientes Educativos. *Comunidad y Salud*, 5(2), 1-2.
- Royo, J. I. (2010). Matemáticas y papiroflexia. *Uno*, (53), 11.
- Ruiz López, N. (2012). Análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría dinámica GeoGebra en la formación inicial del profesorado de Primaria.
- Sánchez, C. H. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné Episteme y Didaxis TED*, (32).
- Sánchez-Torres, J. M., González-Zabala, M. P., & Muñoz, M. P. S. (2012). La sociedad de la información: génesis, iniciativas, concepto y su relación con las TIC. *Revista UIS Ingenierías*, 11(1), 113-128.

- Sandoval Cáceres, I. T. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación matemática*, 21(1), 5-27.
- Santa Ramírez, Z. M., & López, C. M. J. (2010). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (31), 338-362.
- Santa Ramírez, Z. M., Jaramillo López, C. M., & Carvalho Borba, M. D. (2015). El doblado de papel como medio para la producción de conocimiento geométrico.
- Sarasua, J. (2013). Representación externa de figuras planas y razonamiento geométrico.
- Sinclair, N., & Yerushalmy, M. (2016). Digital technology in mathematics teaching and learning: A decade focused on theorising and teaching. In *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 235-274). Brill Sense.
- Sua, C. (2017). Saber suficiente no es suficiente: un estudio de los comportamientos metacognitivos al resolver problemas de demostración con el apoyo de la geometría dinámica (Doctoral dissertation, Universidad Pedagógica Nacional).
- Trouche, L. (2014). Instrumentation in mathematics education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 307-313.
- Vargas, A., & Rey, R. (2016). Apropiación de las TIC en el aula de matemáticas colombiana. Un estudio diagnóstico.
- Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education*, 10(1), 77-101.
- Villarreal, M. E. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia*, 3(5), 73-94.
- Vygotsky, L. S. (1978). Internalización de las funciones psicológicas superiores - Intracción entre aprendizaje y desarrollo. *El Desarrollo de Los Procesos Psicológicos Superiores*.
- White, T. (2008). Debugging an artifact, instrumenting a bug: Dialectics of instrumentation and design in technology-rich learning environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(1), 1-26.

4. Contenidos

El estudio se ha organizado en siete capítulos. El primero presenta la justificación del estudio, las motivaciones y sustento teórico del mismo. El segundo capítulo brinda un desarrollo teórico a cada tecnología involucrada en este estudio, a saber: GeoGebra, regla y compás y doblado de papel. Este desarrollo pretende situar al lector frente a asuntos como la presencia y desarrollo histórico de cada

tecnología, con lo que se reconocerán las bondades de cada recurso tecnológico involucrado. El tercer capítulo presenta detalles sobre el desarrollo del estudio, el contexto donde este se desarrolló y la forma en que se acopiaron y analizaron los datos.

El cuarto capítulo presenta un análisis de las tareas diseñadas en el estudio, mostrando con ello la forma en que cada tecnología promueve distintos aspectos de los objetos geométricos involucrados y las diferencias en las formas de solucionar estas tareas con cada recurso tecnológico. El quinto capítulo describe el proceso llevado a cabo por los estudiantes involucrados en el estudio al encarar cada tarea, mientras que en el sexto capítulo se analizan con mayor detalle estas producciones. Finalmente, se presentan las conclusiones derivadas del estudio.

5. Metodología

En primera instancia se realizaron dos búsquedas de bibliografía, una para el glosario y otra para el marco teórico, estos documentos fueron buscados en bases de datos de acceso libre tales como Redalyc, Dialnet Plus, Google Académico, Doaj y Scielo; con el fin de apropiarse del tema y concretar términos asociados a las tecnologías seleccionadas. Seguidamente se realiza una contextualización de los estudiantes con los que se realiza el ejercicio investigativo, seguido de la formulación de las tareas, las cuales unas fueron tomadas del software Euclidea y otras fueron autoría de la escritora del documento; todas las tareas propuestas tuvieron como criterio que se pudieran resolver con las tres tecnologías involucradas.

En el desarrollo de este proyecto se llevaron a cabo veinticuatro sesiones con cuatro estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas que fueron grabadas y luego analizadas teniendo en cuenta, para cada grupo, el proceso de solución de cada una de las tareas, su validez y el uso de la tecnología. Con base en este análisis se consolida la discusión en la cual se realizó la comparación entre las tres tecnologías en cada una de las tareas implementadas, teniendo como referencia las definiciones, propiedades y modo de uso de la tecnología usadas; obteniendo así una comparación entre las tres tecnologías.

6. Conclusiones

Las conclusiones obtenidas de este estudio están divididas en dos partes, las primeras que están basadas en la comparación de los beneficios y deficiencias encontradas en la literatura y lo encontrado al momento de desarrollar las tareas realizadas en cada una de las tecnologías. La segunda donde se resaltan las tecnologías no digitales (regla y compás y doblado de papel) dado que aportan una mayor movilización de propiedades, características y estrategias de solución en comparación a las que se movilizaron con tecnologías digitales (GeoGebra).

Elaborado por:	Díaz Huertas, Angélica Johanna
Revisado por:	Sua Flórez, Camilo

Fecha de elaboración del			
Resumen:	26	08	2019

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: ***“¿Que ofrece la tecnología no digital en un mundo donde todo es digital? Qué caso de la geometría y el proceso de conceptualizar?”***, elaborado por la estudiante:

Angélica Johanna Díaz Huertas código 2012240029 y cédula 1023004016

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **44** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

En constancia se firma a los 19 días del mes de septiembre de 2019.

Director del Trabajo: Profesor


FELIPE FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ (Ad Hoc)

Jurado:

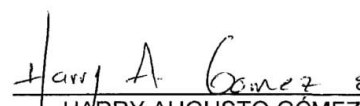
Profesor 
HARRY AUGUSTO GÓMEZ ESPINOSA

Tabla de Contenidos

1.	Introducción.....	24
2.	Justificación.....	26
2.1.	Objetivos.....	29
1.1.1.	Objetivo general	29
1.1.2.	Objetivos específicos.....	30
3.	Marco Teórico	31
3.1.	Artefactos e instrumentos	31
3.2.	Regla y Compás	34
3.3.	Doblado de papel	37
3.4.	Geometría Dinámica	41
4.	Metodología.....	45
4.1.	Búsqueda de literatura	45
4.2.	Contexto del estudio	45
4.3.	Diseño de la secuencia.....	46
4.4.	Acopio de datos	47
4.5.	Análisis retrospectivo	47
5.	Diseño de tareas.....	49
5.1.	Construir un ángulo de 30° dado uno de sus lados	49
	Construcción de ángulo de 30 con Regla y Compás	49
	Construcción ángulo de 30 con Doblado de papel	50
	Construcción ángulo de 30 con GeoGebra.....	50
5.2.	Construir un triángulo equilátero dado uno de sus lados.....	51
	Construcción triángulo equilátero con Regla y Compás	51
	Construcción triángulo equilátero con Doblado de papel	52
	Construcción triángulo equilátero con GeoGebra	53
5.3.	Construya el centro de una circunferencia dada	53
	Construcción centro de circunferencia con Regla y Compás.....	53
	Construcción de centro de circunferencia con Doblado de papel	54
	Construcción de centro de circunferencia con GeoGebra	54
5.4.	Construir un ángulo congruente al dado de tal forma que compartan un lado	55

Construcción de ángulo congruente con Regla y Compás	55
Construcción de ángulo congruente con Doblado de papel	56
Construcción de ángulo congruente con GeoGebra	56
5.5. Dados tres puntos no colineales, construir un paralelogramo de tal modo que los tres puntos sean vértices de este.	57
Construcción paralelogramo con Regla y Compás.....	57
Construcción paralelogramo con Doblado de papel.....	58
Construcción paralelogramo con GeoGebra.....	59
5.6. Construir el punto medio de un segmento	59
Construcción punto medio con Regla y Compás.....	59
Construcción punto medio con Doblado de papel.....	60
Construcción punto medio con GeoGebra.....	60
5.7. Dado un segmento y un punto no colineal construir un segmento congruente al dado cuyo extremo sea el punto dado	61
Construcción segmento congruente con Regla y Compás.....	61
Construcción segmento congruente con Doblado de papel.....	62
Construcción segmento congruente con GeoGebra.....	62
5.8. Dado el segmento AB encuentre un punto M en el segmento tal que $3AM=AB$..	63
Construcción trisección del segmento con Regla y Compás.....	63
Construcción trisección del segmento con Doblado de papel	64
Construcción trisección del segmento con GeoGebra	64
6. Análisis	66
6.1. Construir un ángulo de 30° dado uno de sus lados	66
Regla y Compás - Grupo A	66
Regla y Compás - Grupo B	67
Doblado de papel - Grupo A.....	68
Doblado de papel - Grupo B.....	70
GeoGebra - Grupo A y B.....	71
6.2. Construir un triángulo equilátero dado uno de sus lados	72
Regla y Compás - Grupo A y B.....	72
Doblado de papel - Grupo A y B.....	73

GeoGebra - Grupo A y B.....	74
6.3. Construya el centro de una circunferencia dada	75
Regla y Compás - Grupo A	75
Regla y Compás - Grupo B	76
Doblado de papel - Grupo A.....	77
Doblado de papel - Grupo B.....	78
GeoGebra - Grupo A	80
GeoGebra - Grupo B.....	81
6.4. Construir un ángulo congruente al dado de tal forma que compartan un lado	82
Regla y Compás - Grupo A	82
Regla y Compás - Grupo B	83
Doblado de papel - Grupo A y B.....	84
GeoGebra - Grupo A	85
GeoGebra - Grupo B.....	86
6.5. Dados tres puntos no colineales, construir un paralelogramo de tal modo que los tres puntos sean vértices de este.	87
Regla y Compás - Grupo A y B.....	87
Doblado de papel - Grupo A y B.....	88
GeoGebra - Grupo A y B.....	89
6.6. Construir el punto medio de un segmento	91
Regla y Compás - Grupo A y B.....	91
Doblado de papel - Grupo A.....	92
Doblado de papel – Grupo B	93
GeoGebra - Grupo A y B.....	94
6.7. Dado un segmento y un punto no colineal construir un segmento congruente al dado cuyo extremo sea el punto dado	95
Regla y Compás - Grupo A y B.....	95
Doblado de papel - Grupo A.....	96
Doblado de papel - Grupo B.....	96
GeoGebra - Grupo A y B.....	98
6.8. Dado el segmento AB encuentre un punto M en el segmento tal que $3AM=AB$..	99

Regla y Compás - Grupo A	99
Regla y Compás - Grupo B	100
Doblado de papel - Grupo A.....	101
Doblado de papel – Grupo B	102
GeoGebra - Grupo A	103
GeoGebra - Grupo B.....	105
7. Discusión	106
7.1. Construir un ángulo de 30° dado uno de sus lados	106
7.2. Construir un triángulo equilátero dado uno de sus lados	107
7.3. Construya el centro de una circunferencia dada	109
7.4. Construir un ángulo congruente al dado de tal forma que compartan un lado	111
7.5. Dados tres puntos no colineales, construir un paralelogramo de tal modo que los tres puntos sean vértices de este.	112
7.6. Construir el punto medio de un segmento	113
7.7. Dado un segmento y un punto no colineal construir un segmento congruente al dado cuyo extremo sea el punto dado.	115
7.8. Dado el segmento AB encuentre un punto M en el segmento tal que $3AM=AB$	116
8. Conclusiones.....	119
9. Referencias	123

Lista de tablas

Tabla 1. Cuadro comparativo entre las bondades y deficiencias de las tres tecnologías mencionadas por los autores.....	43
Tabla 2. Cuadro comparativo de la tarea 1. Conceptos involucrados.	51
<i>Tabla 3. Cuadro comparativo de la tarea 2. Conceptos involucrados.</i>	<i>53</i>
Tabla 4. Cuadro comparativo de la tarea 3. Conceptos involucrados.	55
Tabla 5. Cuadro comparativo de la tarea 4. Conceptos involucrados.	57
Tabla 6. Cuadro comparativo de la tarea 5. Conceptos involucrados.	59
Tabla 7. Cuadro comparativo de la tarea 6. Conceptos involucrados.	61
Tabla 8. Cuadro comparativo de la tarea 7. Conceptos involucrados.	62
Tabla 9. Comparación entre regla y compás, doblado de papel y GeoGebra para trisección segmento.....	65
Tabla 10. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea 1.	106
Tabla 11. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea triángulo equilátero.....	107
Tabla 12. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea centro de circunferencia.....	109
Tabla 13. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea ángulo congruente.....	111
Tabla 14. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea paralelogramo.	112
Tabla 15. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea punto medio.	113
Tabla 16. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea segmento congruente.	115
Tabla 17. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea trisección del segmento.	116

Lista de figuras

Imagen 1. construcción inexacta de una circunferencia dados tres puntos no colineales. ...	32
Imagen 2, construcción rigurosa de una circunferencia dados tres puntos no colineales. ...	33
Imagen 3. Compás rígido, similar al que se usa actualmente. Tomado de Maschieto (2005)	36
Imagen 4. Compás perfecto, usado por Euclides para las construcciones geométricas. Tomado de Tedeschini (2009).....	36

Imagen 5. Construcción de puntos equidistantes de A y B con regla y compás.	50
Imagen 6. Construcción de rayo para generar un ángulo de 30	50
Imagen 7. Ángulo de 30 con regla y compás.	50
Imagen 8. Doble perpendicular al segmento AB por el punto A.....	50
Imagen 9. Doble en el que se lleva la esquina superior izquierda hacia la mediatriz.....	50
Imagen 10. Doble donde el papel se hace coincidir sobre el mismo.	50
Imagen 11. Obtención de 3 ángulos que miden 30.....	50
Imagen 12. Ventana emergente dada por la herramienta ángulo dada su amplitud.	51
Imagen 13. Construcción de un ángulo de 30 con regla y compás	51
Imagen 14. Construcción de puntos equidistantes con regla y compás.....	52
Imagen 15. Construcción de un triángulo equilátero con regla y compás.....	52
Imagen 16. Mediatriz del segmento AP por medio del doblado de papel.....	52
Imagen 17. Doble en el que se construye el ángulo de 30 y la mediatriz del segmento AB.	52
Imagen 18. Triángulo equilátero con doblado de papel.	52
Imagen 19. Ventana emergente proporcionada por la herramienta polígono.....	53
Imagen 20. Construcción de un triángulo equilátero con la herramienta polígono en GeoGebra.....	53
Imagen 21. Construcción de la mediatriz de una cuerda.....	54
Imagen 22. Construcción de la mediatriz de una segunda cuerda.....	54
Imagen 23. Centro de circunferencia con regla y compás.....	54
Imagen 24. Doble en el que la circunferencia se superpone a ella misma.	54
Imagen 25. Doble 2 en el que la circunferencia se superpone a ella misma por un lado distinto al primero.....	54
Imagen 26. Se determina el centro de la circunferencia por medio del doblado del papel. .	54
Imagen 27. Centro de circunferencia por medio de la herramienta medio o centro con GeoGebra.....	55
Imagen 28. Construcción de puntos equidistantes a través del compás.	56
Imagen 29. Construcción del ángulo congruente por medio de regla y compás.	56
Imagen 30. Doble determinado por un lado del ángulo.....	56
Imagen 31. Doble determinado por el otro lado del ángulo.	56
Imagen 32. Obtención del ángulo congruente a través del doblado del papel.	56
Imagen 33. Medida del ángulo dado por medio de la herramienta ángulo.	57

Imagen 34. Construcción del punto que determina el ángulo congruente a través de la herramienta ángulo dada su amplitud.	57
Imagen 35. Construcción del rayo que determina el ángulo congruente con GeoGebra.	57
Imagen 36. Construcción de puntos equidistantes.	58
Imagen 37. Construcción de puntos equidistantes a B.	58
Imagen 38. Construcción del paralelogramo con regla y compás.	58
Imagen 39. Mediatriz del segmento por medio de la superposición de la recta.	58
Imagen 40. Se determina el punto de intersección de las diagonales y las diagonales del paralelogramo.	58
Imagen 41. Paralelogramo determinado por la simetría dada por una de sus diagonales. ...	58
Imagen 42. Construcción de los segmentos determinados por los puntos no colineales.	59
Imagen 43. Construcción de las rectas paralelas a ambos segmentos.	59
Imagen 44. Construcción del paralelogramo con GeoGebra.	59
Imagen 45. Construcción de puntos equidistantes con el compás.	60
Imagen 46. Mediatriz del segmento determinada por los puntos equidistantes.	60
Imagen 47. Punto medio del segmento por medio de regla y compás.	60
Imagen 48. Mediatriz determinada por la superposición del doblez.	60
Imagen 49. Punto medio del segmento con doblado de papel.	60
Imagen 50. Punto medio del segmento por medio de la herramienta medio o centro.	61
Imagen 51. Construcción de puntos equidistantes con regla y compás tomando como referencia un punto no colineal.	61
Imagen 52. Construcción de segmentos congruentes por medio de regla y compás.	61
Imagen 53. Superposición de dos puntos.	62
Imagen 54. Copia de un punto a través de un doblez.	62
Imagen 55. Construcción del segmento congruente por medio del doblado de papel.	62
Imagen 56. Ventana emergente proporcionada por la herramienta segmento de longitud dada.	62
Imagen 57. Surge el segmento congruente al dado	62
Imagen 58. Construcción de puntos equidistantes colineales.	64
Imagen 59. Construcción de rectas paralelas.	64
Imagen 60. Construcción del punto que determina la trisección del segmento.	64
Imagen 61. Dobleses perpendiculares al segmento por sus extremos.	64
Imagen 62. Se determinan dos dobleces congruentes, se simula la parte superior de la hoja.	64

Imagen 63. Al desdoblar se determina la triseccion del segmento.....	64
Imagen 64. Segundo segmento determinado por la herramienta segmento dada su amplitud, cuya medida es la tercera parte del segmento dado.....	65
Imagen 65. Circunferencia cuyo radio es la tercera parte del segmento y su centro es uno de los extremos del mismo.	65
Imagen 66. Se especifica que el punto de interseccion entre la circunferencia y el segmento es el que determina la tercera parte del segmento.	65
Imagen 67. Construcción de un segmento en el interior del ángulo recto.....	67
Imagen 68. Contrucción auxiliar de un rayo.	67
Imagen 69. Rectas paralelas construidas con la regla.	67
Imagen 70. Triseccion del segmento construido en el interior del ángulo.	67
Imagen 71. Construcccion de puntos equidistantes colineales.....	68
Imagen 72. Construcción de un lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia.	68
Imagen 73. El ángulo de 90, el cual hace parte de las propiedades fisicas de la hoja se biseca superponiendo los lados del ángulo.....	69
Imagen 74. El ángulo de 45 se biseca por medio de la superposicion de los lados.....	69
Imagen 75. Doble en el que se superpone un lado de la hoja al doblez construido anteriormente.	69
Imagen 76. Doble en el que se superponen los lados mas cortos de la hoja.....	70
Imagen 77. Se determinan las diagonales del rectángulo formado por el doblez anterior. ..	70
Imagen 78. Construcción del rayo AB, por medio de la herramienta rayo.	71
Imagen 79. Construcción de l ángulo de 30 con ayuda de la herramienta ángulo dada su amplitud.	71
Imagen 80. Construcccion de puntos equidistantes a traves del compás.	72
Imagen 81. Construcción de segmentos determinados por los puntos equidistantes.	72
Imagen 82. Mediatriz del segmento dado a traves de la superposición.	73
Imagen 83. Doble en el que se superpone un lado de la hoja al doblez construido anteriormente.	73
Imagen 84. Segundo doblez determinado por la superposicion del punto A en la mediatriz del segmento.	73
Imagen 85. Puntos equidistantes a traves de la herramienta circunferencia	74
Imagen 86. Punto C determinado por la herramienta intersección.....	74
Imagen 87. Triángulo equilatero formado a traves de la herramienta segmento.	74
Imagen 88. Construcción de rectas tangentes a la circunferencia con regla.	75

Imagen 89. Construcción de las diagonales del cuadrado.	75
Imagen 90. Punto E determinado por la intersección de las diagonales del cuadrado.	75
Imagen 91. Construcción de circunferencias las cuales determinan una cuerda de la circunferencia dada.	77
Imagen 92. Circunferencia la cual determina otra cuerda distinta de la circunferencia dada.	77
Imagen 93. El punto G es el centro de la circunferencia.	77
Imagen 94. Doble en el que la circunferencia se superpone a ella misma.	78
Imagen 95. Doble 2 en el que la circunferencia se superpone a ella misma por un lado distinto al primero.	78
Imagen 96. Se determina el centro de la circunferencia por medio del doblado del papel. .	78
Imagen 97. Dobles horizontales tangentes a la circunferencia.	79
Imagen 98. Dobles verticales tangentes a la circunferencia.	79
Imagen 99. Dobles determinados por las diagonales del cuadrilátero formado.	79
Imagen 100. Mediatriz de una de las cuerdas de la circunferencia dada por la herramienta mediatriz.	80
Imagen 101. Punto medio de uno de los diámetros de la circunferencia gracias a la herramienta medio o centro.	80
Imagen 102. Dos cuerdas de la circunferencia construidas a través de circunferencias congruentes.	82
Imagen 103. La intersección de las mediatrices de las cuerdas permiten obtener el centro de la circunferencia a través de las herramientas mediatriz e intersección.	82
Imagen 104. Construcción de una recta paralela a otra por medio de la regla.	83
Imagen 105. Se determinan ángulos congruentes con regla y compás.	83
Imagen 106. Construcción de los primeros puntos equidistantes.	84
Imagen 107. Construcción de puntos equidistantes.	84
Imagen 108. Construcción del rayo faltante para la construcción de ángulos congruentes.	84
Imagen 109. Doble determinado por un lado del ángulo.	85
Imagen 110. Doble determinado por el otro lado del ángulo.	85
Imagen 111. Obtención del ángulo congruente a través del doblado del papel.	85
Imagen 112. Medida del ángulo dado por medio de la herramienta ángulo.	86
Imagen 113. Construcción del punto que determina el ángulo congruente a través de la herramienta ángulo dada su amplitud.	86
Imagen 114. Comprobación de la congruencia de los ángulos congruentes con GeoGebra.	86
Imagen 115. Medida del ángulo dado a través de la herramienta ángulo.	87

Imagen 116. Construcción del ángulo congruente por medio de la herramienta ángulo dada su amplitud.	87
Imagen 117. Construcción de puntos equidistantes por medio del compás.	88
Imagen 118. Construcción de los lados del paralelogramo con la regla.	88
Imagen 119. Dobles determinados por los puntos no colineales.	89
Imagen 120. Dobles aparentemente paralelos al doblez BC.....	89
Imagen 121. Dobles aparentemente paralelos al doblez AB	89
Imagen 122. Construcción de rectas paralelas a los segmentos por medio de la herramienta paralela.....	90
Imagen 123. Cuadrilátero ABCD a través de las herramientas intersección y segmento. ...	90
Imagen 124. Construcción de puntos equidistantes con el compás.....	91
Imagen 125. Punto medio del segmento por medio de regla y compás.	91
Imagen 126. Dobles paralelos a los lados de la hoja por los extremos del segmento.....	92
Imagen 127. Mediatriz del segmento dada a partir de la superposición de los puntos A y B.	92
Imagen 128. Doble determinado por los puntos A y B.	93
Imagen 129. Punto medio construido por medio de la superposición de los extremos del segmento.....	93
<i>Imagen 130. Punto medio por medio de la herramienta medio o centro.</i>	<i>94</i>
Imagen 131. Construcción de puntos equidistantes con regla y compás tomando como referencia un punto no colineal.	95
Imagen 132. Construcción de segmentos congruentes por medio de regla y compás.....	95
Imagen 133. Doble determinado por los puntos del segmento.....	96
Imagen 134. Superposición de dos puntos.	96
Imagen 135. Segmentos congruentes a través del doblado de papel.....	96
Imagen 136. Dobles determinados por los tres puntos no colineales.	97
Imagen 137. Doble aparentemente paralelo al doblez AB.	97
Imagen 138. Doble aparentemente paralelo al doblez AC.	97
Imagen 139. Construcción de puntos equidistantes a través de la herramienta circunferencia centro, radio.	98
Imagen 140. Construcción del segmento congruente por medio de GeoGebra.	98
Imagen 141. Construcción de puntos equidistantes colineales.....	99
Imagen 142. Construcción de rectas aparentemente paralelas por medio de la regla.	99
Imagen 143. Construcción de arcos de circunferencia aparentemente equidistantes.....	100

Imagen 144. Triseccion del segmento por medio de la exploración y la equidistancia.	100
Imagen 145. Dobleces verticales paralelos a los lados de la hoja.	101
Imagen 146, parte superior de la hoja.....	101
Imagen 147. Construcción de puntos equidistantes a través del doblado de papel.	101
Imagen 148. Doblez paralelo al lado de la hoja.	103
Imagen 149. Doblez en el que se superpone el lado de la hoja al doblado anterior.	103
Imagen 150, parte superior de la hoja en la que se experimenta que los tres segmentos sean congruentes.	103
Imagen 151. Construcción de puntos equidistantes colineales gracias a la herramienta circunferencia centro, punto.	104
Imagen 152. Construcción de rectas paralelas por medio de la herramienta paralela.	104
Imagen 153. Segundo segmento determinado por la herramienta segmento dada su amplitud, cuya medida es la tercera parte del segmento dado.....	105
Imagen 154. Extremo del segmento contenido en el segmento dado gracias a la herramienta limitar/liberar.	105

1. Introducción

¿Qué ofrece la tecnología no digital en un mundo donde todo es digital? Es la pregunta que motivó el desarrollo de este estudio en el marco de la Licenciatura en Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Esta investigación tiene como principal propósito identificar y comparar las potencialidades proporcionadas por las tecnologías digitales y no digitales en tareas geométricas de construcción.

A través del estudio se espera aportar evidencia empírica sobre aspectos de los objetos geométricos que se favorecen con cada una de las tecnologías al afrontar este tipo de situaciones, dado que nuestra hipótesis inicial es que un engranaje entre distintas tecnologías (digitales y no digitales) aporta en gran medida al establecimiento de conexiones entre distintos objetos geométricos, lo que en última instancia aporta a una construcción de significado más robusta.

El estudio se ha organizado en siete capítulos. El primero presenta la justificación del estudio, las motivaciones y sustento teórico del mismo. El segundo capítulo brinda un desarrollo teórico a cada tecnología involucrada en este estudio, a saber: GeoGebra, regla y compás y doblado de papel. Este desarrollo pretende situar al lector frente a asuntos como la presencia y desarrollo histórico de cada tecnología, con lo que se reconocerán las bondades de cada recurso tecnológico involucrado. El tercer capítulo presenta detalles sobre el desarrollo del estudio, el contexto donde este se desarrolló y la forma en que se acopiaron y analizaron los datos.

El cuarto capítulo presenta un análisis de las tareas diseñadas en el estudio, mostrando con ello la forma en que cada tecnología promueve distintos aspectos de los objetos geométricos involucrados y las diferencias en las formas de solucionar estas tareas con cada recurso tecnológico. El quinto capítulo describe el proceso llevado a cabo por los estudiantes involucrados en el estudio al encarar

cada tarea, mientras que en el sexto capítulo se analizan con mayor detalle estas producciones. Finalmente, se presentan las conclusiones derivadas del estudio.

2. Justificación

En los últimos años las Tecnologías de la Información y Comunicación [TIC] han experimentado un crecimiento exponencial debido al constante mejoramiento de sus potencialidades y características. Por esta razón, se han convertido en una herramienta indispensable que ha logrado apoderarse de diversos aspectos de la vida cotidiana (Cabero, 2007; Sánchez, 2008). Ejemplo de ello es el acceso masivo a la información en la actualidad, pues basta con ingresar a internet para encontrar tanta información como se desee, relacionada con cualquier asunto de interés.

Las TIC han impactado en múltiples escenarios, entre los que se incluye el educativo, allí precisamente se han obtenido resultados novedosos gracias a su incorporación (Carnoy, 2004). La importancia que se le ha dado a las TIC en la sociedad contemporánea demanda en el ámbito educativo la necesidad de instruir a los estudiantes para su uso adecuado (Castro, Guzmán, & Casado, 2007; Drenoyianni, 2006).

De manera particular, el campo de la educación matemática no es ajeno a esta transformación tecnológica, pues son varios los programas computacionales que involucran objetos matemáticos del nivel escolar para su estudio y tratamiento (Mariotti, 2006). Estos programas han tomado un papel protagónico en el desarrollo de la investigación, poniendo en evidencia algunas bondades y problemáticas en su incorporación (Sinclair & Yerushalmy, 2016; Sua, 2017).

Una de las problemáticas que se ha reconocido alrededor de estos recursos radica en la imposibilidad que tienen algunas instituciones educativas para disponer de estos elementos en la clase de matemáticas. Esta situación conlleva a la aparición de una brecha digital entre países o distintas clases sociales (Sánchez, 2008; Selfe, 2000, citado por Buckinham, 2011).

En el contexto educativo colombiano se evidencia la insuficiencia de equipos tecnológicos, específicamente que la cantidad de estudiantes en una institución educativa supera la cantidad de estos (Vargas & Rey, 2016). Igualmente, puede señalarse que en muchos casos estos equipos computacionales están en una misma sala y su disponibilidad es exclusiva de espacios académicos distintos a matemáticas, por lo tanto, el profesor de matemáticas no puede acceder a estos recursos en la gestión de su clase. No obstante, algunos profesores de matemáticas que tienen acceso a dichas tecnologías digitales (tabletas o computadores portátiles) no las usan en muchas ocasiones, ya sea por desconocer cómo utilizarlas o por considerar que estas no son afortunadas en el proceso de aprendizaje de sus estudiantes (Carnoy, 2004; Sinclair & Yerushalmy, 2016).

En la enseñanza y aprendizaje de la geometría, pese a las bondades que se han reconocido frente a recursos computacionales como la geometría dinámica, se han reconocido algunas problemáticas en a su uso. Ejemplo de ello es que los estudiantes se confían de las representaciones visuales generadas por los programas computacionales, aspecto que desaprovecha un tratamiento conceptual de los asuntos de estudio o impide el desarrollo de habilidades de argumentación, ya que los resultados en pantalla son sustento suficiente sobre la veracidad de alguna propiedad (Gómez & Carulla, 1998; Mariotti, 2006).

Por otro lado, sobre la presencia de las tecnologías digitales en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, una revisión realizada por los autores del documento en algunas bases de datos de acceso libre (Google Académico, Scielo, Dialnet, Redalyc y Doaj) permite ver que en los últimos 20 años las investigaciones en educación matemática que involucran el uso de geometría dinámica han exhibido un constante crecimiento y protagonismo, mientras que aquellas que acuden a recursos tecnológicos no digitales (regla y compás, doblado de papel) se mantienen en un bajo

nivel o muestran un crecimiento no tan marcado como el de las investigaciones que involucran geometría dinámica. El diagrama 1 ilustra la relación que anteriormente se menciona.

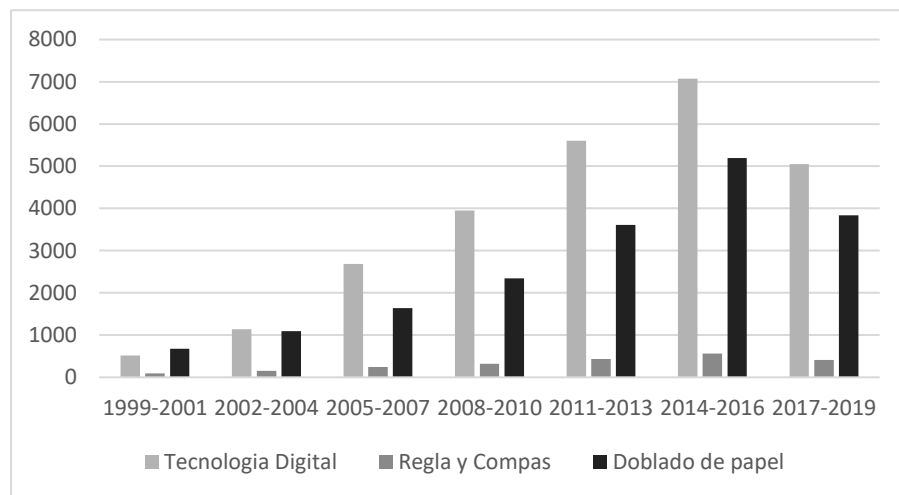


Diagrama 1. Investigaciones que involucran las tecnologías del estudio.

De lo dicho hasta ahora puede reconocerse que la presencia de la tecnología digital en la enseñanza y aprendizaje de la geometría ha sido notable, incluso en el desarrollo investigativo. Pese a ello, sin desconocer las bondades que acarrea el uso de la tecnología digital como la mencionada hasta ahora, surge el interrogante sobre las bondades que trae consigo el uso de aquellas que podrían catalogarse como tecnologías no digitales (regla y compás, doblado de papel) en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Lo reportado en el diagrama 1, permitiría pensar que el uso de estas tecnologías no digitales se ha reducido en distintos escenarios, incluyendo acá el escolar. Pero si la respuesta a nuestro anterior interrogante involucrara diversos e interesantes elementos, podría también pensarse que tales elementos se estarían desaprovechando al hacer uso principalmente de recursos computacionales como la geometría dinámica. Al respecto, estudios como los de Monaghan (2016) han mostrado el potencial que tiene la tecnología no digital cuando se incorpora en tareas de construcciones geométricas. Similarmente, autores como Moreno, Castro, y Sua (2019), quienes se apoyan en

Monaghan, muestran los aspectos del objeto geométrico que se promueven cuando se involucran distintas tecnologías en la solución de una misma tarea, destacando los aspectos del objeto geométrico favorecidos al usar tecnología no digital.

Bajo el panorama anteriormente presentado, podría considerarse que la masiva presencia de las tecnologías digitales en la clase de geometría pone en relieve, gracias a su uso, apenas algunos aspectos de los objetos geométricos estudiados, dejando de lado otros que únicamente se alcanzarían al involucrar tecnologías no digitales. Una revisión no exhaustiva de la literatura deja ver pocos documentos que se encargan de resaltar la pertinencia de trabajar de manera integrada con distintos tipos de tecnologías en la clase de geometría. Tal resultado da soporte a la necesidad de realizar estudios en esta vía.

Por lo anterior, a través de este trabajo pretendemos aportar evidencia a la idea que se ha desarrollado hasta el momento. Particularmente, nos preguntamos por ¿qué aspectos del objeto geométrico se promueven con tecnologías no digitales, como regla, compás y doblado de papel, en comparación con los que se promueven con el uso de las tecnologías digitales, específicamente GeoGebra?

2.1.Objetivos

1.1.1. Objetivo general

Identificar aspectos de los objetos geométricos estudiados que se promueven con tecnologías digitales (GeoGebra) y no digitales (regla y compás y doblado de papel) al resolver tareas de construcción.

1.1.2. Objetivos específicos

- Diseñar e implementar tareas de construcción que involucren distintos procesos de solución por parte de cada tecnología involucrada.
- Analizar las producciones de los estudiantes (conceptos y procesos de la geometría exhibidos) al resolver las tareas propuestas.
- Reconocer en las producciones de los estudiantes el rol dado a cada tecnología involucrada.
- Comparar los resultados obtenidos con el fin de brindar evidencia frente al potencial de las tecnologías no digitales en tareas de construcción.

3. Marco Teórico

Presentamos en este capítulo los elementos conceptuales que dan soporte al estudio desarrollado. Atendiendo al estudio del uso, bondades y desventajas de algunas tecnologías digitales y no digitales en la solución de tareas geométricas de construcción, en primer lugar, se exponen algunas ideas sobre la génesis instrumental, específicamente la noción de artefacto e instrumento. Posteriormente se presentan algunas ideas alrededor de las tecnologías involucradas en el desarrollo de este estudio, estas son regla y compás, doblado de papel y GeoGebra. Frente a cada tecnología involucrada se menciona una aproximación histórica, sus usos iniciales y cómo esta llegó al campo educativo. Se describen, además, apoyados en la literatura especializada, las ventajas y desventajas en el uso de estas tecnologías.

3.1.Artefactos e instrumentos

Según la RAE, la palabra artefacto viene del latín arte-factum que significa “hecho con arte”. De este modo un artefacto es cualquier objeto que el hombre ha hecho con alguna finalidad (Alfaro, 2007; Calder, 2012; Gomes & Vergnaud, 2004; Ré & Berti, 2011). Según Calder (2012), un artefacto es una herramienta utilizada por una persona para realizar una tarea específica. Al hablar de herramienta podríamos contemplar la definición propuesta por Choque (2009), quien considera esta como una extensión diseñada para facilitar un trabajo, idea similar a la de Vygotsky (1978), quien la ve como un medio para realizar una actividad. Lo anterior deja ver que una herramienta ha sido creada por el hombre con un fin específico (considere por ejemplo una cuerda cuya finalidad es atar objetos), mientras que el estatus de artefacto es dado a esta herramienta cuando un sujeto la incorpora en la realización de alguna tarea específica para la cual no está diseñada propiamente dicha herramienta (utilizar la cuerda para dibujar circunferencias). Una cuerda, un lápiz y una escoba son ejemplos de artefactos; sin embargo, puede considerarse la existencia de

artefectos intangibles, ejemplo de ello son los programas computacionales o sus comandos (Varillone y Rabardel, 1995 citado por 8).

Cuando el hombre usa un artefacto se enfrenta a las limitaciones impuestas por el mismo. Ejemplo de ello, en el caso de los programas computacionales, particularmente GeoGebra, es el comando circunferencia (centro, punto) el cual fue diseñado para construir una circunferencia a partir de dos puntos, uno de ellos su centro y el otro un punto que pertenezca a dicha circunferencia. En el caso que se quisiera construir una circunferencia que contuviese dos puntos dados, ninguno de ellos su centro, nos enfrentamos a una limitación del artefacto, puesto que es desconocido el centro de la circunferencia y solo contendría a un punto, por lo que no podría utilizarse bajo el esquema en que dicho comando funcionaría regularmente (ver imagen 1).

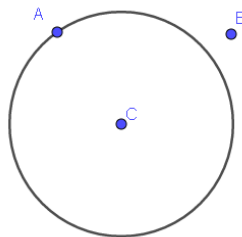


Imagen 1. construcción inexacta de una circunferencia dados tres puntos no colineales.

No obstante, algunas de estas limitaciones son susceptibles de eliminarse gracias a transformaciones que tienen lugar sobre el uso que se le da al artefacto (Guin y Trouche, 1999 citado por Lingefjård, 2011; Ruiz López, 2012). Apoyados en el ejemplo presentado anteriormente, podría utilizarse el comando circunferencia (centro, punto) para construir la circunferencia que contenga a los puntos A y B si realizamos una construcción auxiliar en la que tomamos ambos puntos como extremos de un segmento, determinamos su mediatriz y luego construimos un punto C en dicha recta, el cual sería el centro de la circunferencia deseada. En este momento el comando circunferencia (centro, punto) podría utilizarse sin problema alguno (imagen

2) gracias a la incorporación de otros artefactos. Este tipo de modificación lleva a que un artefacto o conjunto de estos (en el ejemplo presentado se considerarían los comandos utilizados para construir la circunferencia que contenga a los puntos A y B) adquiriera una nueva dimensión, una en la que tiene un significado particular para quien los usa, en este punto se dice que el artefacto se ha convertido en instrumento (Calder, 2012).

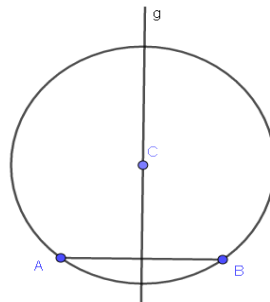


Imagen 2, construcción rigurosa de una circunferencia dados tres puntos no colineales.

Según la RAE la palabra instrumento viene del latín instrumentum, la cual significa objeto fabricado con el que se puede realizar una actividad. Esta definición puede dar lugar a considerar que un instrumento es lo mismo que un artefacto. Sin embargo, autores como Artigue (2002), Pérez Medina (2014), Caceres y Armella (2012), White, (2008), quienes se apoyan en otros autores, mencionan que un instrumento se considera como una entidad mixta, compuesta por dos partes, un artefacto y un componente cognitivo. Esta idea se apoya en las presentadas por Verillon & Rabardel (1995), quienes sugieren que el instrumento no existe en sí mismo, se convierte en este cuando el hombre ha sido capaz de apropiarse de un artefacto y lo ha integrado para realizar una tarea específica. Lo anterior deja ver ya diferencias entre estos dos términos, delegando un mayor estatus al instrumento.

El proceso a través del cual un artefacto se transforma en un instrumento es denominado por autores como Calder (2012) y Alfaro (2008) como génesis instrumental. Trouche (2014) indica

que este proceso consiste en la apropiación de un artefacto para realizar una actividad específica. Las ideas presentadas hasta ahora pueden apreciarse en el siguiente ejemplo. Considere una cuerda que ha sido diseñada para atar o sujetar cosas (artefacto) y un problema que demanda la construcción de una circunferencia. El sujeto que pretende solucionar dicho problema no posee un compás, pero toma una cuerda junto con un lápiz y un chinche, este último en un extremo de la cuerda y el otro dependiendo del radio de la circunferencia que requiera construir. Dado que el artefacto por sí solo no da solución al problema, el sujeto realiza una transformación en él involucrando más artefactos. El uso recurrente de este estilo de uso sobre el artefacto en otros contextos dejará ver que dicho artefacto se convierte en un instrumento.

3.2.Regla y Compás

Tedeschini (2009) menciona que se conoce muy poco acerca de la geometría antes de Euclides, pero reconoce que artefactos como la regla y el compás nacieron con mucha anterioridad ya que se crearon con diferentes fines respecto al uso actual. Según Castells (1997) el compás fue creado por la civilización china alrededor del año 960 d.C. para la navegación. Por otra parte, en Guevara (2005) se reconocen registros que datan del año 2200 a. C. los cuales permiten encontrar una primera evidencia de la existencia de la regla.

Para varios autores como Ayala (2008), Sánchez (2008) y Diaz (2000) la regla y el compás fueron artefactos usados por los griegos, específicamente por Platón, cuando diseñaba un modelo para explicar el universo físico basado en formas perfectas como círculos, esferas y poliedros regulares, y por Euclides en el momento que elaboró los Elementos.

Sánchez (2012) menciona que la regla y el compás son conocidos específicamente como herramientas euclidianas, puesto que permiten construcciones geométricas, especialmente los tres primeros postulados de Euclides mencionados por Sánchez (2012) como sigue:

1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. El prolongar continuamente una recta finita en línea recta.
3. El describir un círculo con cualquier centro y distancia.

Como lo menciona Sánchez (2012), la regla y el compás se encuentran en las construcciones del libro Elementos y por medio de estos artefactos se lograba demostrar la existencia de un objeto geométrico, pues no bastaba con definirlo.

Davis y Hersh (1989, mencionados por Villarreal, 2012) aluden que la geometría euclidiana y las construcciones realizadas por regla y compas se ven estrictamente ligadas debido a que la geometría de Euclides puede ser definida por sus construcciones. Análogamente, Sánchez (2012) hace alusión a los libros de Euclides en los cuales se encuentran las construcciones de diferentes polígonos regulares, rectas perpendiculares y paralelas, la inscripción y la circunscripción de polígonos en una circunferencia, todas ellas construidas con ayuda de la regla y el compás.

Ahora bien, Sánchez (2012), Chadid (2004, citado por Páez, 2005) y Varilly (2003, citado por Díaz, 2000) ostentan que la regla y el compás de la actualidad (imagen 3) no son iguales a los que usaba Euclides y Platón, puesto que la regla no tenía marcas, calibraciones ni graduaciones, solo fue usada como borde para dibujar rectas y no para medir o transportar distancias. Por su parte, el compás (imagen 4) cumplía las exigencias del tercer postulado de Euclides al lograr construir un círculo con un centro y un radio, sin embargo, este se cerraba al levantar las puntas del papel.

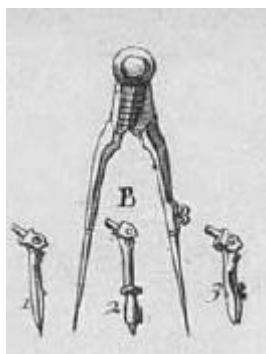


Imagen 3. Compás rígido, similar al que se usa actualmente. Tomado de Maschieto (2005)

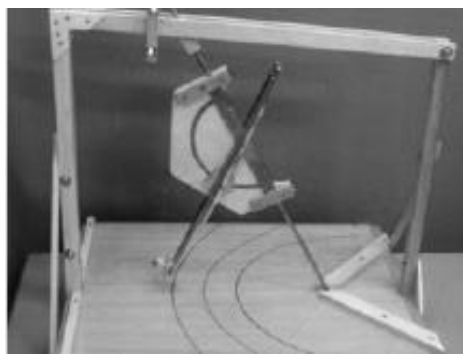


Imagen 4. Compás perfecto, usado por Euclides para las construcciones geométricas. Tomado de Tedeschini (2009)

Según Chassapis (1998) el compás pone en juego un pensamiento vinculado a la acción, es decir, al realizar construcciones con el compás podemos inferir características o propiedades que son necesarias para los objetos matemáticos, por ejemplo la congruencia de segmentos, la cual fácilmente puede darse por medio del compás tomando una distancia dada entre dos puntos, contemplándola como un patrón, y trazándolas las veces que sean necesarias. Como lo menciona el mismo autor, este tipo de pensamiento promueve una mejor construcción y comprensión de este u otros conceptos.

Según Chassapis (1998), debido a la estructura física del compás y el uso que se le daba, este exhibe una definición de la circunferencia como curva cerrada, en la que todos sus puntos equidistan del punto interior común, el cual es llamado centro. Del mismo modo, este autor menciona que este artefacto ofrece el control acerca de la longitud del radio (es decir la distancia entre dos puntos) de la circunferencia y posibilita la comprensión de la relación que existe entre el radio y el área de esta.

Para Sarasua (2013) y Rosales y Guzmán (2016) al trabajar construcciones con regla y compás se pueden producir errores derivados de la inexactitud en el uso de este recurso. Sarasua (2013) también menciona que esto no le resta al valor que tienen estos artefactos, Rosales & Guzmán

(2016) mencionan que este error puede evitarse si se utiliza un software de geometría dinámica. Por otro lado, Gonzalez (2001), indica que en los casos de regla y compás y geometría dinámica se le debe destacar el proceso de construcción antes que a la obtención de una representación gráfica, así mismo, Santinelli y Siñeriz (2001, mencionado por Lopez, 2003) aluden que al realizar la comparación y socialización entre las construcciones de regla y compás con geometría dinámica favorecen la comprensión de conceptos y obtención de estrategias en la solución de tareas.

Respecto al uso de estos recursos, también es posible que en algunas situaciones se pueda encontrar una respuesta aparentemente correcta, aunque esto realmente no sea así. Lo anterior deja ver que una deficiencia de estos artefactos es la forma estática de las situaciones en las que se involucran (Molfino & Lezama, 2011). Según Duval (1998, citado por Rosales y Guzmán, 2016), al realizar una construcción se establece un orden en el proceso y este depende del artefacto usado, ya sea un procesador o regla y compás, este orden depende de las características del artefacto.

Gonzales y Larios (2001, citado por Sarasua, 2013) mencionan la importancia del doblado de papel en la enseñanza antes que el uso de la regla y el compás, puesto que, en estos niveles, los estudiantes perciben las propiedades geométricas de forma intuitiva, y esto es proporcionado por el doblado del papel, mientras que la regla y el compás proporcionan un pensamiento más formal frente a los objetos geométricos.

3.3.Doblado de papel

Papiroflexia es una palabra de origen latino que deriva de papiro (papel) y flectere (doblar); según el diccionario de la RAE significa doblar el papel y, por extensión, darle la figura de determinados objetos. Por lo tanto, el término define tanto el objeto resultante como la acción de doblar. El término original de la disciplina es origami, palabra japonesa con la misma composición lingüística que la castellana: ori (doblar), kami (papel). Los japoneses inventaron la papiroflexia hace más de

mil años. Le dieron el nombre de origami y le dotaron de principios estéticos ligados a su cultura. Es en China donde se introduce el papel en los primeros siglos de la era cristiana y llega a Japón en el siglo VI d.C.; con el papel hizo su aparición la papiroflexia, considerada como un arte, una ciencia y un entretenimiento. De ahí su importancia en el aprendizaje de las matemáticas como estimulante de la actividad cerebral.

Es posible clasificar la papiroflexia considerando varios aspectos, entre ellos la finalidad, el tipo de papel utilizado y la cantidad de piezas utilizadas. De acuerdo a lo anterior se presentarán las tres clasificaciones que se proponen, de acuerdo a la finalidad. En primer lugar, se considera la finalidad artística, en donde se construyen figuras de la naturaleza o para el ornamento; la finalidad educativa, donde se construyen figuras para el estudio de propiedades geométricas; ahora, de acuerdo a la forma del papel, completo (de forma cuadrangular, rectangular o triangular) o por tiras (tiras largas); por último, es posible clasificarlo por la cantidad de piezas: tradicional, en donde se usa un solo trozo de papel y modular, cuando se involucran varios trozos de papel que se pliegan para formar unidades (módulos), generalmente iguales, los cuales se ensamblan para formar una figura compleja. Según Monsalve (2013), el origami consiste en elaborar una figura, generalmente tridimensional, a partir de una hoja de papel; por el contrario, el doblado de papel no pretende la elaboración de una figura, sino en doblar la hoja y luego analizar geométricamente los dobleces de la misma.

Para Santa y Jaramillo (2010), el doblado de papel se ha consolidado como una herramienta alternativa para mejorar el razonamiento en el área de Matemáticas, específicamente en Geometría, ya que, por su carácter visual y experimental, permite que el estudiante manipule el papel haciendo dobleces, además de visualizar algunos conceptos geométricos y justificar por medio de un sistema axiomático las construcciones elaboradas. Royo (2002), mencionado por Santa y Jaramillo, (2010),

afirma que el ejercicio de doblar papel se puede usar con fines educativos, para estudiar e ilustrar la geometría elemental plana y que la clave radica en interpretar geométricamente qué se está haciendo cuando se dobla el papel. Estos mismos autores afirman que las construcciones realizadas por medio del doblado de papel, son tan precisas como las elaboradas con regla y compás que, en los últimos años, esto ha permitido fundamentar un sistema axiomático, paralelo al de la Geometría euclidiana para justificar dichas construcciones. Esta nueva Geometría, es denominada Geometría del doblado de papel.

Santa & Jaramillo (2010) establecen como conceptos primitivos el doblez, el punto y la hoja de papel, haciendo un paralelo con la geometría euclidiana con el punto, la recta y el plano. El doblez, de manera análoga a la recta, hecho en un pedazo de papel que aparece tanto al anverso como al reverso de este, se considera como un concepto primitivo no definido, estrechamente relacionado con un segmento de recta, pues el pedazo de papel es limitado, pero se hará énfasis en que el doblez representa de manera abstracta una recta. El punto, es un concepto no definido. Sin embargo, se establece una relación directa de manera natural con la intersección de dos dobleces o con las esquinas (ángulos) de la hoja de papel. Sin perder generalidad, en algunos casos, los puntos se van a asumir de manera intuitiva como la marca más pequeña que se puede dibujar con un lápiz. Es decir, un punto puede ser dibujado o construido en la hoja de papel. Una cara de la hoja de papel se puede tomar como una porción del plano. Por lo tanto, tiene límites y es finito, pero puede ser una representación abstracta de un plano infinito. Por lo tanto, podemos afirmar que en una hoja de papel se pueden construir infinitos segmentos de recta que pasan por un punto, rectas perpendiculares a otras, la bisectriz de un ángulo, la mediatriz de un segmento; se puede trisecar un ángulo o hacer demostraciones (Monsalve & Jaramillo, 2003, mencionado por Santa y Jaramillo, 2010).

Avilés (2016) afirma que la didáctica del plegado de papel o papiroflexia, es un recurso de apoyo al trabajo pedagógico del docente para la enseñanza y aprendizaje de la geometría elemental plana, permitiendo desarrollar diferentes contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, generando destreza manual, exactitud e interdisciplinaridad de la ciencia matemática con otras ciencias o con el arte. En esta misma línea se ubican Blanco & Otero (2005) quienes aseguran que el origami puede ser de gran ayuda para la educación matemática, ya que proporciona al profesor, una herramienta pedagógica que permite explicar diferentes contenidos, no solo conceptuales sino procedimentales, así mismo relaciona la disciplina de las matemáticas con otras ciencias, como las artes, por ejemplo. Igualmente, Santa & Jaramillo (2010), aseveran que la geometría del doblado de papel se consolida como una propuesta didáctica alternativa para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Además, Santa, Jaramillo & Carvalho (2015), aseguran que el doblado de papel es un medio que posibilita la comprensión de algunos conceptos y procedimientos inmersos en la actividad de doblar, dado que propicia procesos de visualización, de experimentación, generación y validación de conjeturas visuales, pruebas visuales, procesos de argumentación, entre otros.

Esta actividad tan sencilla que comienza plegando papel (actividad lúdica y manipulativa), puede generar una discusión en clase que permita establecer distintas conjeturas, evaluar la comprobación de estas (formalización) y también la deducción de construcciones con regla y compás (Czwieniczek, 2009). La utilización del papel como material didáctico, introduce y refuerza la enseñanza de los conceptos y propiedades geométricas para luego formalizarlos con más rigurosidad, es atrayente, innovador, entretenido, motivador, produce un cambio en la actitud e interés por la actividad geométrica de manera natural (Santa et al., 2015).

El doblado de papel también desarrolla la psicomotricidad fina, así como la percepción espacial, además de mejorar la destreza manual y la exactitud en la realización del trabajo y motiva al estudiante a ser creativo, ya que puede crear sus propios modelos e investigar la conexión que tiene con la geometría no sólo plana, sino también espacial (Blanco & Otero, 2005). Conjuntamente Avilés (2016) afirma que el doblado de papel es una metodología que desarrolla actitudes como la observación, paciencia, cuidado, socialización y atención, dependiendo los logros del mismo estudiante y no tanto del profesor.

3.4.Geometría Dinámica

Según Gutiérrez (2005), el uso de software para enseñar geometría se dio a inicios de los años 80 con la llegada de LOGO (lenguaje de programación). Así mismo, Ulrich (1999), indica que la geometría dinámica surge en esta misma década, cuando las computadoras poseen mayor resolución y capacidad para ejecutar estos programas con el fin, en un principio, de reemplazar la regla y el compás. Gutiérrez (2005) afirma que años después aparecen los softwares de geometría dinámica, específicamente, según Ulrich (1999) y de Villiers (2004) los primeros programas de esta naturaleza que se crearon fueron The Geometer Sketchpad en 1989 y Cabri Geometre en 1988. Dichos programas fueron usados para la enseñanza y realización de la comprobación de teoremas de la geometría euclídea.

Ruiz (2012), afirma que la geometría dinámica favorece el estudio de las propiedades invariantes que posee una construcción geométrica. En este sentido, la GD no es un simple medio de interacción entre el estudiante y los objetos matemáticos representados, por el contrario, modifica la forma en que se ejerce la actividad matemática respecto a la enseñanza geométrica tradicional con lápiz y papel (Ruíz, 2012). Para Ulrich (1999), la precisión del software supera a la provista por la regla y el compás. De igual manera, la interactividad con los objetos construidos en pantalla

tuvo mucho impacto, puesto que, al tomar un punto, moverlo, observar cómo cambia la construcción y tener la posibilidad de rehacer nuevamente la construcción se reconocía algo que no se podía realizar con regla y compás.

Para de Villiers (1999) el software de geometría dinámica induce en gran medida el pensamiento geométrico puesto que no solamente es usado para verificar conjeturas, sino también es útil para construir contraejemplos. De la misma manera, el mismo autor menciona que este software permite modelar eficazmente situaciones reales y problemas por medio de dibujos dinámicos a escala. Gutiérrez (2005) menciona que esto favorece el aprendizaje, debido a que supera las limitaciones que se dan en contextos como en el lápiz, papel, pizarra, la regla y el compás. Asimismo, Ulrich (1999) indica que estas propiedades permiten a los alumnos confrontar su percepción y conocimientos geométricos a la vez que realimenta inmediatamente sus acciones como un mecanismo de verificación. Por ello, como Gutiérrez (2005) lo revela, numerosos investigadores se han dedicado a explorar las posibilidades del software de geometría dinámica en la enseñanza de la geometría, así como distintas formas de llevarla al aula.

Para Gutiérrez (2005) la principal ventaja del uso de software de GD es la facilidad y rapidez con la que los estudiantes pueden transformar las construcciones hechas en la pantalla, realizar mediciones y disponer de ejemplos tan variados como lo deseen. Gracias a esto los estudiantes tienen la posibilidad de experimentar, lo que les permite plantear, verificar conjeturas y encontrar propiedades matemáticas (Gutiérrez, 2005). Autores como Ruíz (2012), afirman que un entorno de geometría dinámica promueve justificaciones empíricas dado que proporciona un entorno en el que los estudiantes pueden experimentar libremente, lo que causa que desarrollen formas no tradicionales de aprendizaje de procedimientos y conceptos matemáticos. Acosta y Fiallo (2017) aseguran que la experimentación implica no solo manipular de manera perceptiva los objetos, sino

además adoptar una postura teórica que busca explicar y predecir el comportamiento de dichos objetos.

En relación con el posible obstáculo que puede suponer el uso de software de geometría dinámica para fundamentar la necesidad de justificar y probar propiedades o soluciones a problemas, de Villiers (2004) recomienda introducir la prueba no como una forma de comprobación, sino como un medio de explicación, de comprensión y descubrimiento, antes de llegar al concepto formal y abstracto de demostración. De esta manera también la argumentación y conceptos quedan limitados debido a la visualización que promueve el programa. (Gómez & Carulla, 1998; Mariotti, 2006).

A continuación, se presenta un cuadro comparativo de las bondades y deficiencias de las tres tecnologías con base en la información recolectada en este marco teórico.

Tabla 1. Cuadro comparativo entre las bondades y deficiencias de las tres tecnologías mencionadas por los autores.

	Bondades	Deficiencias
Regla y Compás	• Promueven la inferencia de características o propiedades desde la definición que son necesarias para los objetos matemáticos que se desean construir. (Chassapis, 1998) • Fomenta la definición de circunferencia como todos los puntos que equidistan de un centro, debido a la estructura física del compás. (Chassapis, 1998) • Proporcionan un pensamiento más formal frente a los objetos geométricos, ya que estos se definen por medio de su construcción. (Chassapis, 1998) • Favorecen el desarrollo de las capacidades cognitivas, prácticas y estéticas. (Ayala, 2008) • Aumenta el interés y motiva a los estudiantes a profundizar en el área de matemáticas. (Peñuela, 2015). • Permite la asimilación de diferentes conceptos de la geometría (Peñuela, 2015). • Favorece el análisis e interpretación de las diferentes representaciones geométricas (Peñuela, 2015)	• La falta de motricidad fina puede llevar a la inexactitud en la construcción de figuras geométricas. (Sarasua, 2013; Rosales y Guzmán, 2016) • Una deficiencia de estos artefactos es la forma estática de las situaciones que se pueden presentar, puesto que el estudiante puede llegar a una solución de un problema, pero esta no ser única. (Molfino y Lezama, 2011)
Doblado del papel	• Los estudiantes perciben las propiedades geométricas de forma intuitiva. (Gonzales y Larios, 2001, citado por Sarasua, 2013)	

Geometría Dinámica

- Propicia procesos de visualización, de experimentación, generación y validación de conjeturas visuales, pruebas visuales, procesos de argumentación, entre otros. (Carvalho y Santa, 2015)
- Generar una discusión en clase que permita establecer distintas conjeturas, evaluar la comprobación de estas (formalización). (Czwieniczek, 2009).
- Desarrolla la psicomotricidad fina, así como la percepción espacial, además de mejorar la destreza manual y la exactitud en la realización del trabajo y motiva al estudiante a ser creativo. (Blanco y Otero, 2005)
- Desarrolla actitudes como la observación, paciencia, cuidado, socialización y atención, dependiendo los logros del mismo estudiante y no tanto del profesor. Avilés (2016)
- Desarrolla el tránsito de la visualización a la prueba, así mismo cumple el rol de convencer a los estudiantes de la veracidad de las propiedades. (Fernández y Montoya, 2013)
- A través de la exploración se reconocen propiedades de dependencia que permiten la formulación de conjeturas y contraejemplos a las mismas. (Gutiérrez, 2005; Buccino, 2011; Ruíz, 2012; Acosta y Fiallo, 2017, Sandoval, 2009)
- Ofrece oportunidades de realizar simulaciones lo cual permite reconocimiento de propiedades matemáticas. (Villiers, 1999)
- Ofrece nuevos estilos de razonamiento, aspectos de orden didáctico más que axiomático (Goldenberg, 1995 citado por Sua, 2017)
- Favorece la comprensión de proposiciones geométricas dado que permite construcciones con precisión. (Hanna, 2001 citado por Sua, 2017)
- Permite avanzar desde casos particulares hasta casos generales por medio de la experimentación. (Guven et al. 2012 citado por Sua, 2017)
- Permite observar la relación entre las construcciones geométricas y algunos teoremas de la geometría euclidiana. (Mariotti, 2000 y Smith, Hollebrands, Iwancio y Kogan, 2007 citados por Sua, 2017)
- Permite determinar si una conjetura es verdadera o no por medio de la función de arrastre. (Christou et al. 2004 citado por Sua, 2017)
- Favorece la resolución de problemas, la comprensión de conceptos y teoremas geométricos y desarrolla habilidades de demostración disminuyendo la brecha entre la construcción y deducción geométrica. (Sua, 2017).
- Limita la importancia de la demostración matemática, atribuyéndosela al enfoque experimental. (Hanna, 2001 citado por Sua, 2017)
- La argumentación y conceptos quedan limitados debido a la visualización que promueve el programa. (Gómez & Carulla, 1998; Mariotti, 2006).

4. Metodología

En este capítulo se expondrán los métodos y criterios adoptados para llevar a cabo la investigación. Desde la búsqueda de literatura, hasta el diseño y análisis de cada tarea propuesta.

4.1. Búsqueda de literatura

Atendiendo a que este trabajo de grado involucra las tecnologías regla y compás, doblado del papel y GeoGebra, consideramos pertinente revisar desde el punto de vista teórico, lo que se ha dicho de cada una de estas tecnologías teniendo en cuenta aspectos como su origen, su presencia en el campo educativo y sus bondades y desventajas. Para ello recurrimos a bases de datos como Scielo, Dialnet y Redalyc. Se buscaron documentos que contuvieran ideas que permitieran construir una visión panorámica sobre los asuntos que anteriormente se mencionaron. Se encontraron alrededor de 70 documentos, de los cuales se encontró principalmente información sobre GeoGebra.

4.2. Contexto del estudio

Para el desarrollo del estudio se involucraron cuatro estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas que apenas habían culminado un primer curso de geometría en el cual se había tenido una aproximación a la argumentación, al trabajo con geometría dinámica con regla y compas, pero no al relacionado con el doblado del papel. Los estudiantes tenían conocimientos sobre relaciones entre triángulos, otras referidas a rectas como el paralelismo y la perpendicularidad y algunas propiedades de la circunferencia. Debido a su corta experiencia en el programa de formación, los conocimientos de los estudiantes sobre los objetos geométricos mencionados no eran profundos y se limitaba a algunas ideas nucleares en cada caso.

4.3.Diseño de la secuencia

En esta fase se propusieron alrededor de once tareas. Algunas de estas provenían de documentos acopiados o de video juegos con construcciones geométricas bajo el formato de acertijo (v.g. Euclidea). Al momento de incluir cada tarea se tenía en cuenta que esta se pudiera resolver con las tres tecnologías involucradas, preferiblemente bajo un esquema distinto, y que su proceso de solución no fuera extenso. A continuación, presentamos los enunciados de las tareas que se propusieron:

1. Construir un ángulo de 30° dado uno de sus lados.
2. Construir un triángulo equilátero dado uno de sus lados.
3. Construya el centro de una circunferencia dada.
4. Construir un ángulo congruente al dado de tal forma que compartan un lado.
5. Dados tres puntos no colineales, construir un paralelogramo de tal modo que los tres puntos sean vértices de este.
6. Construir el punto medio de un segmento.
7. Dado un segmento y un punto no colineal construir un segmento congruente al dado cuyo extremo sea el punto dado.
8. Dado el segmento AB encuentre un punto M en el segmento AB tal que $3AM=AB$.
9. Construir un rombo dado uno de sus lados de tal forma que uno de sus ángulos mida 45° .
10. Dados dos puntos, construir un cuadrado tal que los puntos dados sean puntos medios de dos lados consecutivos.
11. Dado un segmento AB y un punto C no colineal con A y B. Construya a D tal que C sea ortocentro de triángulo ABD.

Aun cuando se contemplaron once tareas, solo se implementaron ocho de ellas por cuestiones de tiempo. En el siguiente capítulo se analiza cada tarea, mostrando con ello el potencial de cada tecnología involucrada en su desarrollo.

4.4.Acopio de datos

Durante cuatro semanas los estudiantes involucrados resolvieron las tareas propuestas, dado el número de tecnologías involucradas, ellos se enfrentaron a veinticuatro tareas en total. Los cuatro estudiantes se organizaron por parejas, lo que permitiría que discutieran entre ellos, propusieran estrategias de solución y buscaran acuerdos al resolver cada tarea. Como cada tarea se debía resolver con distintas tecnologías, se buscó que estas no se resolvieran de manera consecutiva, pues creíamos que esto podría incidir negativamente en las estrategias de solución.

La interacción entre los estudiantes se grabó en formato de audio y video. Mientras que los estudiantes iban resolviendo cada tarea, el investigador que acompañaba iba haciendo preguntas que pretendían hacer explícito lo que los estudiantes pensaban, esto con el fin de registrar la mayor cantidad de datos a través de ideas, propuestas, discusiones y replicas a las ideas de sus compañeros que ellos pudieran manifestar.

4.5.Análisis retrospectivo

Se observaron los videos generados para cada tarea propuesta. En este caso se observaban los videos que registraban el proceso de solución de cada tarea con las tres tecnologías. A la vez que se observaban los videos, se realizaba una descripción escrita del proceso que los estudiantes tenían en cuenta para resolver cada tarea. Esta descripción registraba tres momentos principalmente: (i) un recuento de lo hecho por los estudiantes para solucionar la tarea, (ii) una interpretación geométrica de lo acontecido en el video, con lo cual se podría comprender la pertinencia y validez de los procedimientos empleados y los objetos geométricos involucrados, finalmente (iii) se

identificó el rol o papel atribuido a la tecnología empleada para resolver la tarea, lo cual permitiría reconocer la forma en que este recurso se involucraba y si en su uso se reconocían aspectos particulares.

Posteriormente se realizó un cuadro comparativo entre el proceso de solución de cada tarea al involucrar cada tecnología, reconociendo en este ejercicio los objetos y procesos geométricos que cada uno de estos recursos promovía. Esta información permitió reconocer aspectos comunales favorecidos por cada tecnología, con lo que se brindó respuesta al objetivo del estudio reportado en este documento.

5. Diseño de tareas

Previo a la implementación de las tareas con los estudiantes, realizamos un análisis de cada tarea propuesta. Este análisis tenía la intención de reconocer la pertinencia de cada tarea de acuerdo al objetivo del estudio, además identificar posibles estrategias de solución para cada una, así como los objetos geométricos movilizados en estas estrategias. Presentamos en este capítulo el análisis en mención. Para cada tarea implementada y cada tecnología se ha elaborado además un cuadro comparativo que presenta las bondades de cada tecnología involucrada en términos de los objetos geométricos que se utilizan.

5.1. Construir un ángulo de 30° dado uno de sus lados

Construcción de ángulo de 30 con Regla y Compás

Dado el rayo AB, se construye una circunferencia con centro en A y radio AB; de igual manera, se construye la circunferencia con centro en B y radio AB. Luego tomaremos uno de los dos puntos de intersección de las circunferencias que será nombrado C (imagen 5). Se traza el rayo AC, haciendo que la medida del ángulo CAB sea 60° (imagen 6); en consecuencia, se debe bisecar el ángulo CAB para obtener un ángulo de 30° . Para ello se dibuja la circunferencia con centro en C y radio CB; el punto de intersección entre la circunferencia con centro en C y la circunferencia con centro en B se nombra P. finalmente se traza el rayo AP y por tanto la medida del ángulo PAB es 30° (imagen 7).

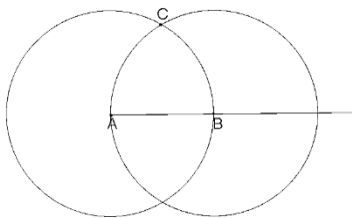


Imagen 5. Construcción de puntos equidistantes de A y B con regla y compás.

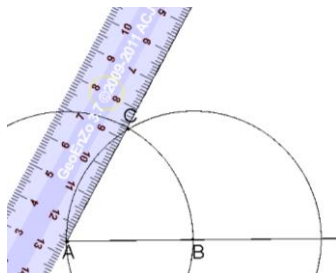


Imagen 6. Construcción de rayo para generar un ángulo de 30

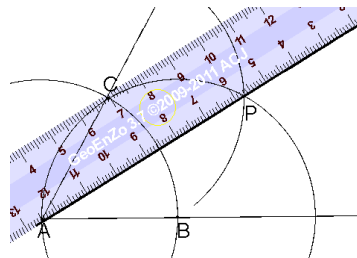


Imagen 7. Ángulo de 30 con regla y compás.

Construcción ángulo de 30 con Doblado de papel

Se realiza un doblado, sea este m, haciendo coincidir la parte superior de la hoja y el rayo AB. Luego se desdobra y se realiza el doblado perpendicular al rayo AB por el punto A (imagen 8), este doblado se deja hecho para los siguientes pasos. Ahora se lleva la esquina superior de la hoja al doblado m, el doblado anterior se deja hecho (imagen 9) y se realiza el siguiente doblado, llevando el rayo dado hacia la recta construida al unir la esquina superior con el doblado m (imagen 10). Por último, se desdobra el papel y se observan tres ángulos de 30°, imagen 11.

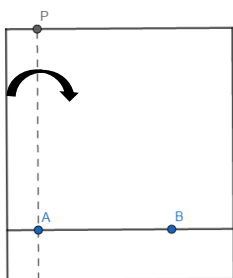


Imagen 8. Doblez perpendicular al segmento AB por el punto A.

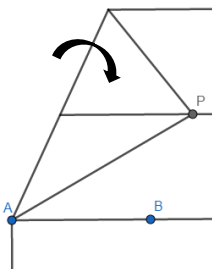


Imagen 9. Doblez en el que se lleva la esquina superior izquierda hacia la mediatriz.

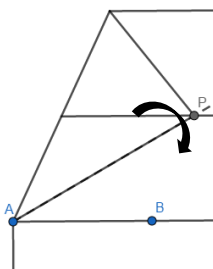


Imagen 10. Doblez donde el papel se hace coincidir sobre el mismo.

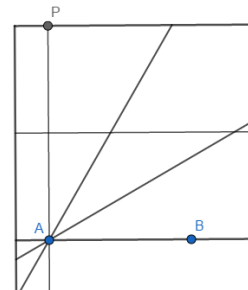


Imagen 11. Obtención de 3 ángulos que miden 30.

Construcción ángulo de 30 con GeoGebra

Dado el rayo AB, con la opción *ángulo dado su amplitud* se seleccionan los puntos B y A respectivamente y al aparecer la ventana emergente se coloca como valor el número 30 (imagen

12). Inmediatamente aparece el punto B' . Finalmente, con la opción rayo, se construye el rayo AB' (imagen 13).



Imagen 12. Ventana emergente dada por la herramienta ángulo dada su amplitud.

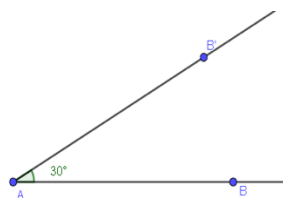


Imagen 13. Construcción de un ángulo de 30 con regla y compás

Tabla 2. Cuadro comparativo de la tarea 1. Conceptos involucrados.

		Regla compás	y	Doblado de papel	GeoGebra
Conceptos involucrados	Equidistancia	X		X	
	Triángulo equilátero	X			
	Mediatriz			X	
	Medida de ángulo/rotación				X

5.2. Construir un triángulo equilátero dado uno de sus lados

Construcción triángulo equilátero con Regla y Compás

Dado un segmento AB , se construye la circunferencia con centro en A y radio AB , de la misma manera se construye la circunferencia con centro en B y radio AB . El punto de intersección entre estas dos circunferencias es llamado C (imagen 14). Para finalizar se trazan los segmentos AC y CB , construyendo así el triángulo ABC (imagen 15).

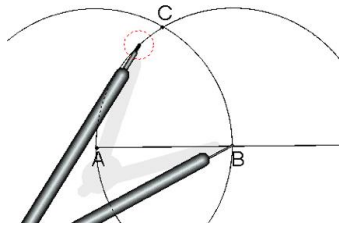


Imagen 14. Construcción de puntos equidistantes con regla y compás

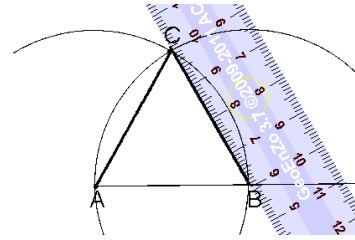


Imagen 15. Construcción de un triángulo equilátero con regla y compás.

Construcción triángulo equilátero con Doblado de papel

Dado un segmento AB, se realiza el doblado que contiene a los puntos A y B. Luego se hace coincidir el doblado AB consigo mismo, que pase por el punto A, creando un doblado perpendicular a AB por A. Posteriormente, se hace coincidir al punto A con el punto P, el cual es el extremo del doblado perpendicular, creando así la mediatriz, imagen 16. Consecutivamente se lleva el punto P hacia la mediatriz, creando la recta n; con este doblado realizado se superponen los puntos A y B, creando la mediatriz m del segmento AB, imagen 17. Se desdobra y el punto de intersección entre la recta n y m se llama C. Para finalizar se realiza el doblado determinado por los puntos B y C, creando el triángulo equilátero ABC, imagen 18.

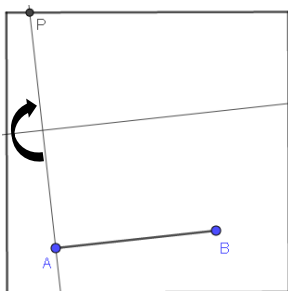


Imagen 16. Mediatriz del segmento AP por medio del doblado de papel.

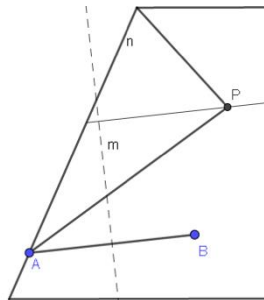


Imagen 17. Doblez en el que se construye el ángulo de 30 y la mediatriz del segmento AB.

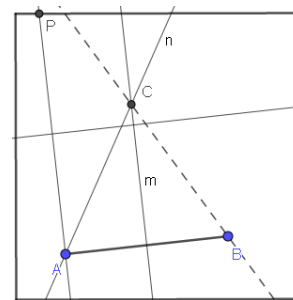


Imagen 18. Triángulo equilátero con doblado de papel.

Construcción triángulo equilátero con GeoGebra

Dado el segmento AB, con la opción polígono regular se da clic sobre el punto A y luego sobre el punto B. Automáticamente aparece una ventana que solicita la cantidad de lados del polígono, en este se ingresa el número 3 (imagen 19). Finalmente aparece el polígono regular de tres lados o triángulo equilátero ABD (imagen 20).



Imagen 19. Ventana emergente proporcionada por la herramienta polígono.

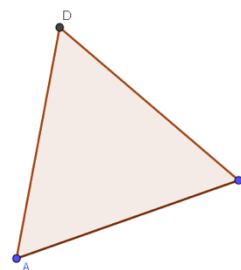


Imagen 20. Construcción de un triángulo equilátero con la herramienta polígono en GeoGebra.

Tabla 3. Cuadro comparativo de la tarea 2. Conceptos involucrados.

		Regla y compás	Doblado de papel	GeoGebra
Conceptos involucrados	Mediatriz		X	
	Def. triángulo equilátero	X	X	X
	Equidistancia	X	X	
	Polígono regular			X

5.3.Construya el centro de una circunferencia dada

Construcción centro de circunferencia con Regla y Compás

Se colocan tres puntos que pertenecen a la circunferencia dada, como se muestra en la imagen 21. Se construyen las mediatrices de dos de los segmentos determinados por estos puntos (imagen 22). Por último, se nombra el punto de intersección entre las dos mediatrices, llamado W. Este punto es el centro de la circunferencia (imagen 23).

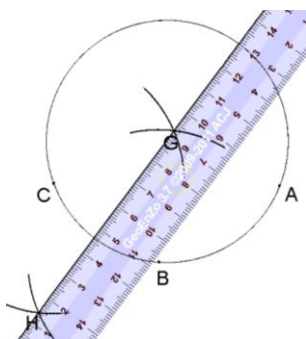


Imagen 21. Construcción de la mediatriz de una cuerda.

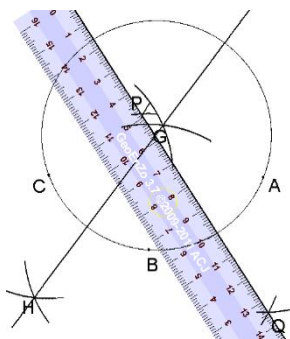


Imagen 22. Construcción de la mediatriz de una segunda cuerda.

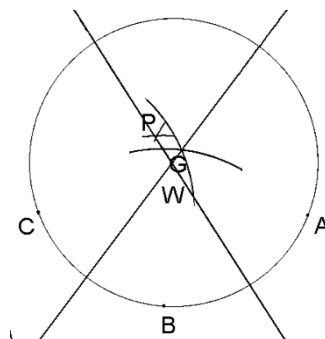


Imagen 23. Centro de circunferencia con regla y compás.

Construcción de centro de circunferencia con Doblado de papel

Se realiza el doblez de forma que la circunferencia se superponga a ella misma (imagen 24). Luego se desdobra y se realiza otro doblez de tal forma que la circunferencia se superponga a ella misma (imagen 25). Finalmente, el punto de intersección de los dos dobleces, nombrado C, es el centro de la circunferencia (imagen 26).

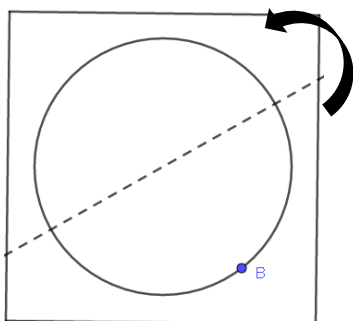


Imagen 24. Doble en el que la circunferencia se superpone a ella misma.

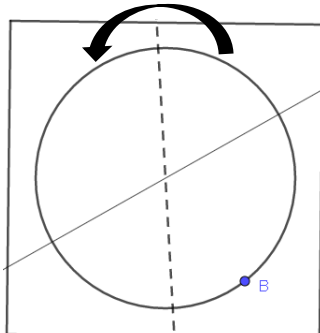


Imagen 25. Doble 2 en el que la circunferencia se superpone a ella misma por un lado distinto al primero.

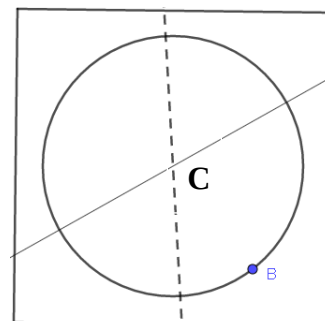


Imagen 26. Se determina el centro de la circunferencia por medio del doblado del papel.

Construcción de centro de circunferencia con GeoGebra

Con el comando del programa llamado *medio* o *centro* se da clic sobre la circunferencia y automáticamente se visualiza el centro de esta (imagen 27).

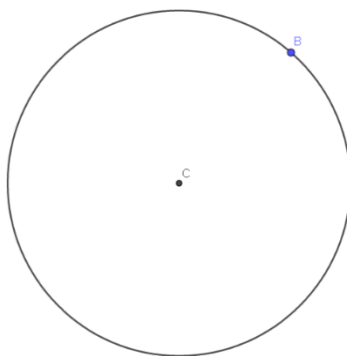


Imagen 27. Centro de circunferencia por medio de la herramienta medio o centro con GeoGebra.

Tabla 4. Cuadro comparativo de la tarea 3. Conceptos involucrados.

		Regla y compás	Doblado de papel	GeoGebra
Conceptos involucrados	Mediatriz	X		
	Circunferencia	X		
	Cuerdas	X		
	Simetría		X	

5.4.Construir un ángulo congruente al dado de tal forma que compartan un lado

Construcción de ángulo congruente con Regla y Compás

Dado el ángulo CAB, se traza una circunferencia con centro en B y radio BA, de tal forma que se nombra D al punto de intersección entre la circunferencia B y el rayo BC. Después se traza la circunferencia con centro en D y radio DA (imagen 28). El punto de intersección entre la circunferencia con centro B y la circunferencia con centro D se nombra E. Por último, se determina el rayo BE. La medida del ángulo DBE es igual a la medida del ángulo ABC (imagen 29).

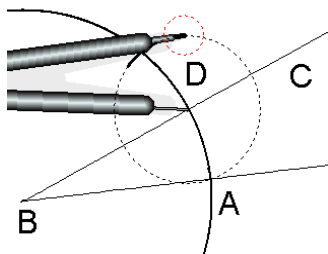


Imagen 28. Construcción de puntos equidistantes a través del compás.

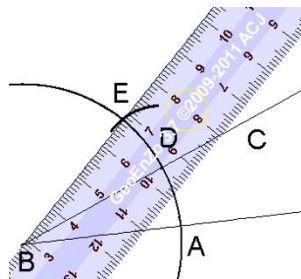


Imagen 29. Construcción del ángulo congruente por medio de regla y compás.

Construcción de ángulo congruente con Doblado de papel

Se inicia realizando el doblez que pasa por los puntos A y C (imagen 30). Después, con el papel sin desdoblar, realizamos el doblez que pasa por los puntos A y B (imagen 31). Para finalizar, desdoblamos el papel y observamos el doblez obtenido, el cual contiene al punto A; por lo tanto, la medida del ángulo formado por el rayo AC y el ultimo doblez creado es la misma medida del ángulo inicial, como se muestra en la imagen 32.

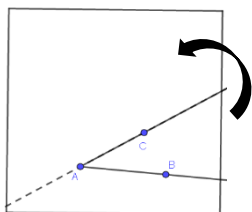


Imagen 30. Doble z determinado por un lado del ángulo.

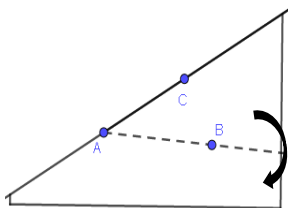


Imagen 31. Doble z determinado por el otro lado del ángulo.

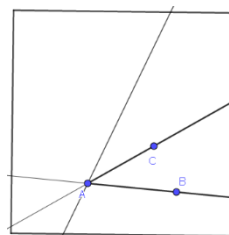


Imagen 32. Obtención del ángulo congruente a través del doblado del papel.

Construcción de ángulo congruente con GeoGebra

Usando la opción *ángulo*, se seleccionan los tres puntos que determinan el ángulo, en orden específico, A, B y C; al usar esta opción se obtiene la medida del ángulo (imagen 33). Luego, usando la herramienta *ángulo dada su amplitud*, se construye un ángulo con la amplitud α . Seleccionando los puntos C y A se obtiene el punto C' (imagen 34). Por último, se construye el rayo AC', imagen 35.

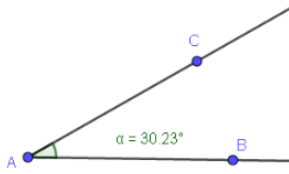


Imagen 33. Medida del ángulo dado por medio de la herramienta ángulo.

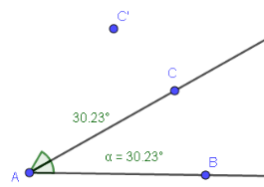


Imagen 34. Construcción del punto que determina el ángulo congruente a través de la herramienta ángulo dada su amplitud.

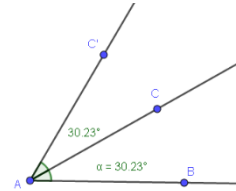


Imagen 35. Construcción del rayo que determina el ángulo congruente con GeoGebra.

Tabla 5. Cuadro comparativo de la tarea 4. Conceptos involucrados.

		Regla y compás	Doblado de papel	GeoGebra
Conceptos involucrados	Congruencia de triángulos	X		
	Equidistancia	X		
	Simetría axial		X	
	Medida de ángulos			X

5.5. Dados tres puntos no colineales, construir un paralelogramo de tal modo que los tres puntos sean vértices de este.

Construcción paralelogramo con Regla y Compás

Dados tres puntos A, B y C no colineales, se trazan las rectas AB y BC. Luego se traza una circunferencia con centro en C y radio AB (imagen 36). Consecutivamente se traza una circunferencia con centro en B y radio AC (imagen 37). Posteriormente se marca el punto de intersección entre ambas circunferencias, siendo este D. Finalmente se trazan los segmentos CD y BD, construyendo el paralelogramo ABDC, imagen 38.

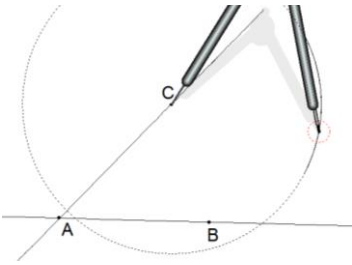


Imagen 36. Construcción de puntos equidistantes.

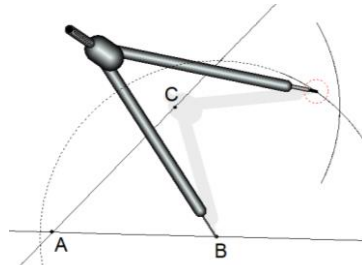


Imagen 37. Construcción de puntos equidistantes a B.

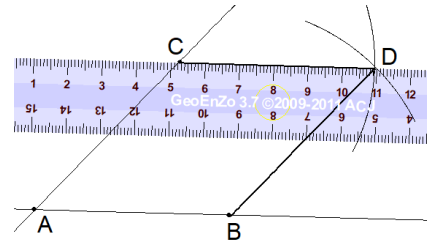


Imagen 38. Construcción del paralelogramo con regla y compás.

Construcción paralelogramo con Doblado de papel

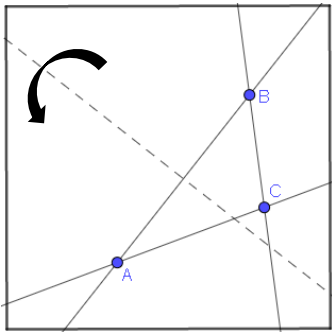


Imagen 39. Mediatriz del segmento por medio de la superposición de la recta.

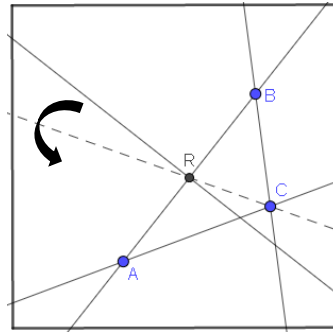


Imagen 40. Se determina el punto de intersección de las diagonales y las diagonales del paralelogramo.

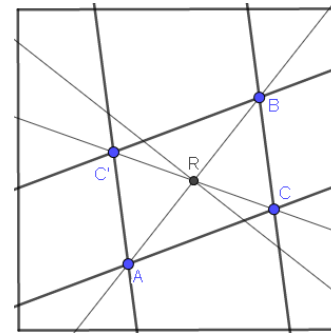


Imagen 41. Paralelogramo determinado por la simetría dada por una de sus diagonales.

Dados tres puntos A, B y C no colineales, se realizan los dobleces de tal manera que pase por los puntos AC, CB y AB. Después se hace coincidir al punto A con el punto B, creando la mediatriz del segmento AB (imagen 39). Al punto de intersección entre la mediatriz y el segmento AB se le nombra R. Ahora se realiza el doblez determinado por los puntos R y C (imagen 40). Posteriormente se dobla el papel de tal manera que la recta CR se superponga con ella misma y pase por el punto R. De esta manera, con el doblez realizado, se copia el punto C, creando el punto C'. Luego se realiza el doblez determinado por los puntos B, C' y A, C' creando así el paralelogramo AC'BC (imagen 41).

Construcción paralelogramo con GeoGebra

Dados tres puntos A, B y C no colineales, con la opción segmento se trazan los segmentos AB y BC (imagen 42). Luego, con la herramienta *paralela* se selecciona el segmento AB y luego el punto C, creando la recta m que es paralela al segmento AB. El mismo procedimiento se realiza con el segmento AC y el punto B, obteniendo la recta n paralela al segmento AC (imagen 43). La intersección de ambas rectas se nombre R. Finalmente, el cuadrilátero BACR es paralelogramo (imagen 44).

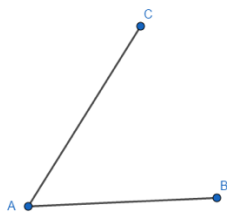


Imagen 42. Construcción de los segmentos determinados por los puntos no colieales.

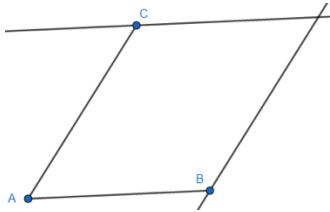


Imagen 43. Construcción de las rectas paralelas a ambos segmentos.

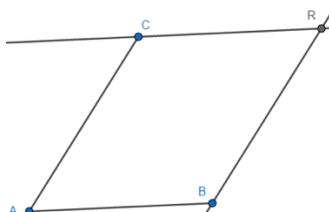


Imagen 44. Construcción del paralelogramo con GeoGebra.

Tabla 6. Cuadro comparativo de la tarea 5. Conceptos involucrados.

		Regla y compás	Doblado de papel	GeoGebra
Conceptos involucrados	Paralelismo, lados del paralelogramo			X
	Congruencia de lados opuestos	X		
	Diagonales que se bisecan		X	

5.6.Construir el punto medio de un segmento

Construcción punto medio con Regla y Compás

Dado el segmento AB, se trazan las circunferencias con centros en A y B y radios AB (imagen 45). Los puntos P y Q son las intersecciones de ambas circunferencias y se construye la recta PQ (imagen 46). Finalmente, el punto M es la intersección de la recta PQ y el segmento AB, siendo este el punto medio del segmento AB (imagen 47).

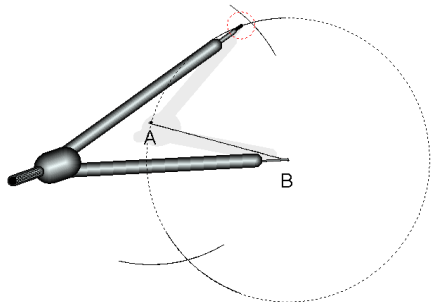


Imagen 45. Construcción de puntos equidistantes con el compás.

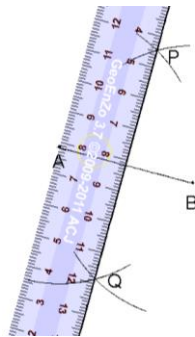


Imagen 46. Mediatriz del segmento determinada por los puntos equidistantes.

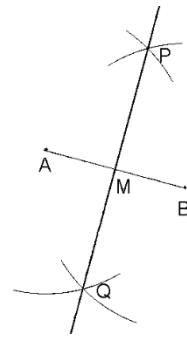


Imagen 47. Punto medio del segmento por medio de regla y compás.

Construcción punto medio con Doblado de papel

Dado el segmento AB se realiza un doblado de tal modo que A y B se superpongan, este doblado es la mediatriz del segmento (imagen 48). El punto de intersección entre la mediatriz y el segmento es C, siendo este el punto medio del segmento AB (imagen 49).

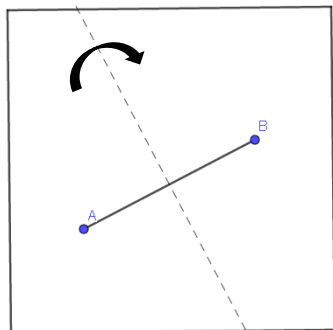


Imagen 48. Mediatriz determinada por la superposición del doblado.

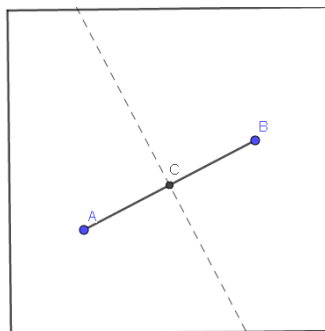


Imagen 49. Punto medio del segmento con doblado de papel.

Construcción punto medio con GeoGebra

Dado el segmento AB, con la opción *medio* o *centro*, se hace clic sobre el segmento y aparece el punto C. Este es punto medio del segmento AB (imagen 50).

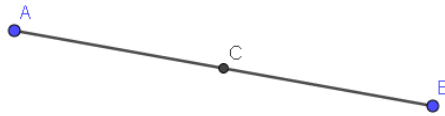


Imagen 50. Punto medio del segmento por medio de la herramienta medio o centro.

Tabla 7. Cuadro comparativo de la tarea 6. Conceptos involucrados.

		Regla y compás	Doblado de papel	GeoGebra
Conceptos involucrados	Circunferencia	X		
	Equidistancia		X	
	Mediatriz	X		
	Simetría axial		X	

5.7. Dado un segmento y un punto no colineal construir un segmento congruente al dado cuyo extremo sea el punto dado

Construcción segmento congruente con Regla y Compás

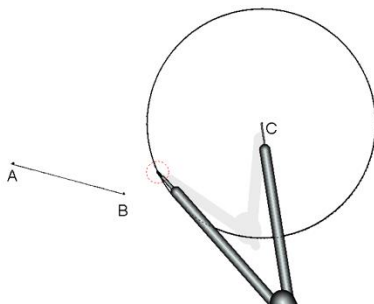


Imagen 51. Construcción de puntos equidistantes con regla y compás tomando como referencia un punto no colineal.

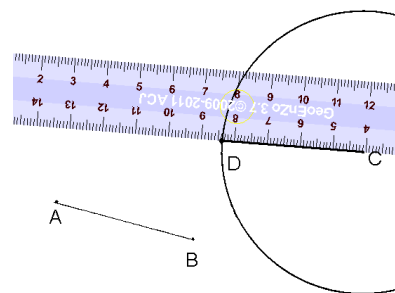


Imagen 52. Construcción de segmentos congruentes por medio de regla y compás.

Dado el segmento AB y el punto C no colineal, se toma la distancia entre A y B con el compás. Luego se traza la circunferencia con centro en C y radio AB (imagen 51). Posteriormente se toma cualquier punto de la circunferencia llamándolo D y se traza el segmento CD. Este segmento es congruente al segmento AB (imagen 52).

Construcción segmento congruente con Doblado de papel

Dado el segmento AB y el punto C no colineal, se realiza un doblado haciendo coincidir al punto A con el punto C (imagen 53). Posteriormente, con el doblado realizado se copia el punto B, creando así a B' (imagen 54). Finalmente se realiza el doblado que contiene a C y B', el segmento CB' es congruente al segmento AB (imagen 55).

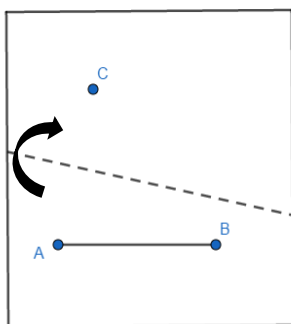


Imagen 53. Superposicion de dos puntos.

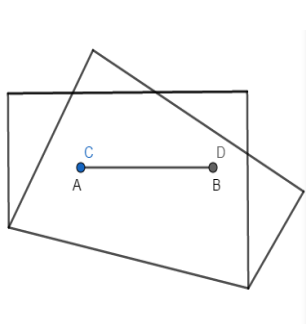


Imagen 54. Copia de un punto a traves de un doblado.

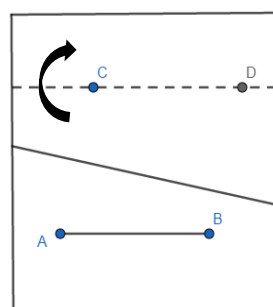


Imagen 55. Construcción del segmento congruente por medio del doblado de papel.

Construcción segmento congruente con GeoGebra

Dado el segmento AB y el punto C no colineal, se usa la herramienta *segmento de longitud dada* haciendo clic en el punto C. Aparece una ventana emergente, en la cual se coloca AB (esta se toma como la longitud del segmento AB, imagen 56). Finalmente aparece el segmento CD el cual es congruente al segmento dado (imagen 57).

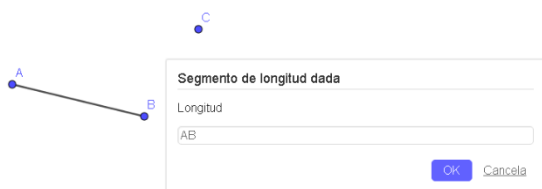


Imagen 56. Ventana emergente proporcionada por la herramienta segmento de longitud dada.

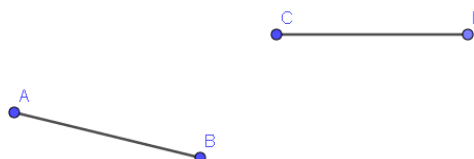


Imagen 57. Surge el segmento congruente al dado

Tabla 8. Cuadro comparativo de la tarea 7. Conceptos involucrados.

		Regla y compás	Doblado de papel	GeoGebra
Conceptos involucrados	Radio de circunferencia	X		
	Simetría axial		X	
	Radios de circunferencia			X

5.8.Dado el segmento AB encuentre un punto M en el segmento tal que $3AM=AB$

Construcción trisección del segmento con Regla y Compás

Dado el segmento AB, se traza el rayo AC de tal manera que C no sea colineal con A y B. Luego se realiza una circunferencia con centro en C y radio AC, el punto de intersección entre la circunferencia con centro en C y el rayo AC se nombra P. Posteriormente se dibuja la circunferencia con centro en P y radio AC, el punto de intersección entre la circunferencia con centro P y el rayo AC se nombra Q (imagen 58). Después se traza la recta QB y las paralelas a esta por los puntos C y P.

Para trazar dichas paralelas se debe trazar la circunferencia con centro en Q y radio AC, el punto de intersección entre la circunferencia con centro en Q y la recta QB se nombra R. Se traza la circunferencia con centro en C y radio PR, el punto de intersección entre la circunferencia anteriormente realizada y la circunferencia con centro en P se nombra K y se traza la recta PK (imagen 59). Del mismo modo se traza la circunferencia con centro en A y radio PR; el punto de intersección entre la circunferencia anteriormente realizada y la circunferencia con centro en C y radio AC se nombra Z. Se traza la recta CZ, la cual es paralela a la recta QB por C. El punto de intersección entre la recta CZ y el segmento AB se nombra M. Finalmente $3AM = AB$ (imagen 60).

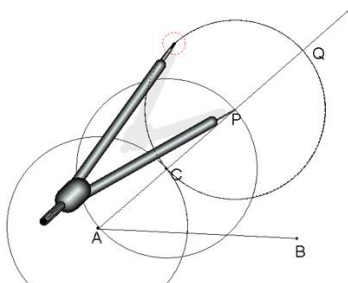


Imagen 58. Construcción de puntos equidistantes colineales.

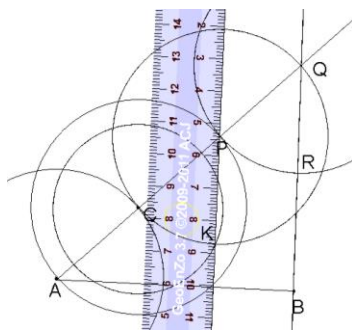


Imagen 59. Construcción de rectas paralelas.

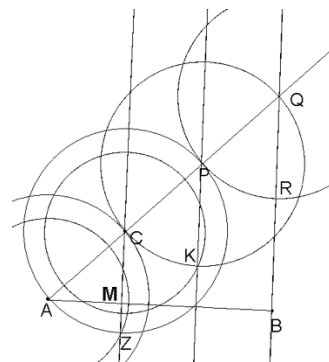


Imagen 60. Construcción del punto que determina la trisección del segmento.

Construcción trisección del segmento con Doblado de papel

Dado el segmento AB, se realiza un doblado de manera que el segmento se superponga a sí mismo en el punto A y de la misma forma otro doblado por el punto B (imagen 61). Luego se realizan dos dobleces de tal forma que las tres partes sean iguales, similar a un folleto que se divide en tres partes (imagen 62). Para finalizar, se desdobra y se marcan las intersecciones entre los dobleces y el segmento AB (imagen 63).

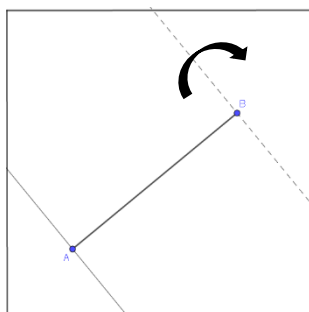


Imagen 61. Dobleces perpendiculares al segmento por sus extremos.

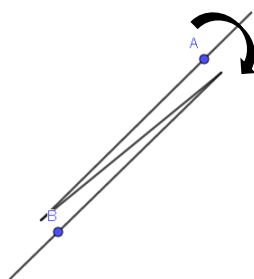


Imagen 62. Se determinan dos dobleces congruentes, se simula la parte superior de la hoja.

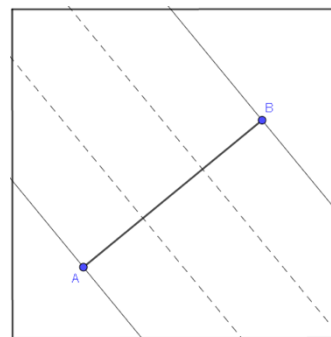


Imagen 63. Al desdoblar se determina la trisección del segmento.

Construcción trisección del segmento con GeoGebra

Dado el segmento AF, se hace uso de la opción segmento dada su amplitud haciendo clic en el punto A y se coloca la expresión $AB/3$ en la ventana emergente. Así se crea el segmento AC, cuya

longitud es la tercera parte del segmento AB (imagen 64). Después se determina la circunferencia con centro en A y radio AC, ya que el punto C no pertenece al segmento dado (imagen 65). Se marca el punto de intersección entre el segmento AB y la circunferencia con centro en A y se llama M. AM mide la tercera parte de lo que mide AB (imagen 66).

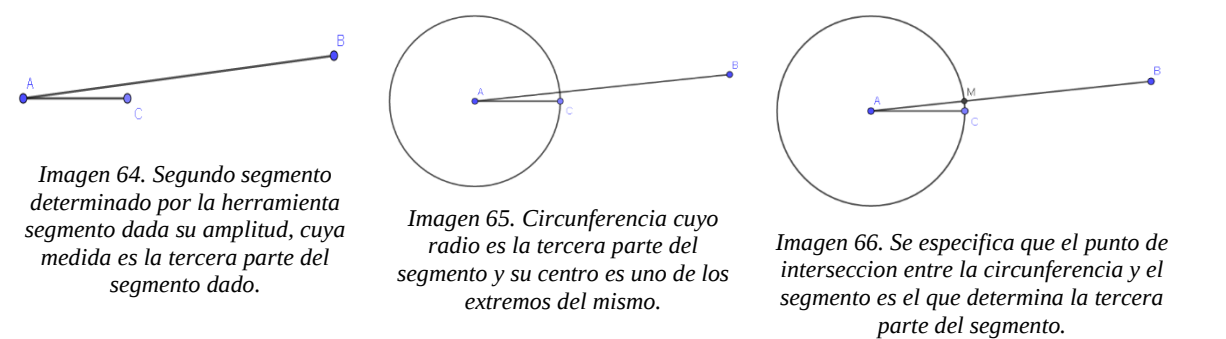


Tabla 9. Comparación entre regla y compás, doblado de papel y GeoGebra para trisección segmento.

		Regla y compás	Doblado de papel	GeoGebra
Conceptos involucrados	Segmento			X
	Rectas paralelas	X		
	Proyección paralela	X	X	X
	Semejanza de triángulos	X		
	Circunferencia	X		X
	Rectas secantes	X		
	Segmento dada su amplitud			X

6. Análisis

En este capítulo se presentan las estrategias de solución de las tareas por parte de los estudiantes. El capítulo presenta cada tarea implementada, en el mismo orden que se presentó en el anterior capítulo, y para cada una se menciona la forma en que cada grupo dio respuesta a esta con ayuda de cada tecnología involucrada. El protocolo presentado para cada grupo atiende a la siguiente estructura: se describe primero el proceso llevado a cabo por el grupo de estudiantes, luego se explica la pertinencia o no del proceso realizado desde un punto de vista matemático, donde se reconocen también los objetos geométricos involucrados, y finalmente se hace mención a la forma en que la tecnología involucrada se utilizó. Esto último permitirá reconocer en estos artefactos formas de uso distintas a los usuales, además de recurrentes, que permitan reconocer instrumentos en ellos.

6.1. Construir un ángulo de 30° dado uno de sus lados

Regla y Compás - Grupo A

Se construye un segmento AB y se marca su punto medio, el cual se nombra M, con ayuda de la regla. Se construye la semicircunferencia con centro en M y radio AM con el compás. Con la regla se traza un radio de la circunferencia, sea este el segmento MC, de tal forma que sea perpendicular al segmento AB (imagen 67). Luego se traza el segmento AC y se realiza una construcción auxiliar trazando el rayo AD, donde el punto D es cualquiera. En este rayo se marca un punto E y se construye una circunferencia con centro en A y radio AE. Con el compás se copia la distancia entre A y E y se replica dos veces más en el rayo, obteniendo así los puntos F y G (imagen 68). Con ayuda de la regla se construye el segmento GC y dos rectas paralelas, m y n, al segmento GC por los puntos E y F (imagen 69). Finalmente, se marcan los puntos de intersección de m y n con el

Regla y Compás - Grupo B

67

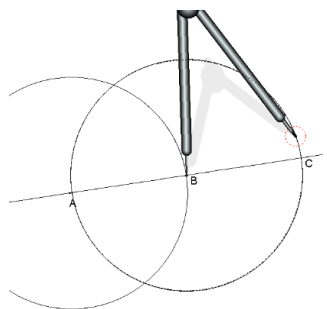


Imagen 71. Construcción de puntos equidistantes colineales.

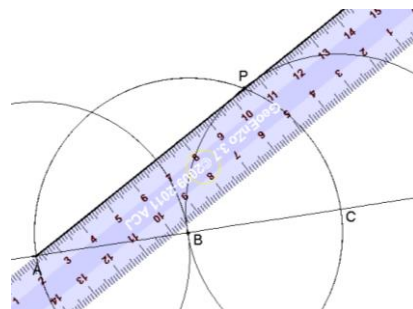


Imagen 72. Construcción de un lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia.

En esta propuesta se reconoce la construcción de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de centro B y radio AB, particularmente el segmento AP es uno de sus lados. Dado que los ángulos del triángulo equilátero miden 60 y la recta AB coincide con la bisectriz de uno de sus ángulos, se obtiene el ángulo de 30. En papel que desempeñan la regla y el compás es apenas el de construir objetos geométricos, aunque en el compás se reconoce la posibilidad de construir de manera implícita puntos que equidisten de otros. En este sentido se ven reflejados aspectos positivos de la tecnología regla y compás nombradas por autores como Peñuela (2015) y Ayala (2008), quienes mencionan que se favorece tanto el análisis e interpretación de diferentes representaciones como el desarrollo de capacidades prácticas y cognitivas, esto se ve reflejado en la construcción anteriormente realizada ya que pone en juego propiedades de figuras geométricas como el ángulo de 60 de un triángulo equilátero, el cual está inscrito en una circunferencia.

Doblado de papel - Grupo A

Se toma una de las esquinas de la hoja de papel, la cual determina un ángulo de 90 y se nombra el ángulo ABC (imagen 73). Se superponen los bordes de la hoja que contienen a los rayos BA y BC y el doblado determinado por esta acción se nombra m (imagen 74). Se superpone ahora la recta m y el rayo BC y el doblado resultante se nombra p (imagen 75). Luego se superpone el rayo BA con

el doblez p , lo que determina un tercer doblez, al que se llama r . Se coloca un punto D sobre el doblez r y se obtiene que el ángulo DBA mide 30.

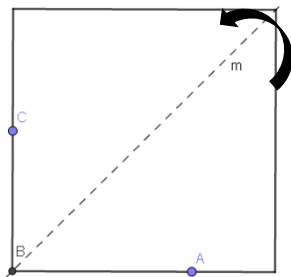


Imagen 73. El ángulo de 90, el cual hace parte de las propiedades físicas de la hoja se biseca superponiendo los lados del ángulo.

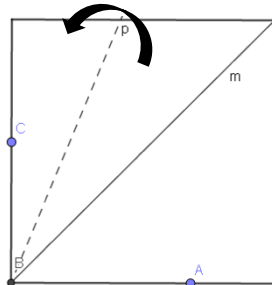


Imagen 74. El ángulo de 45 se biseca por medio de la superposición de los lados.

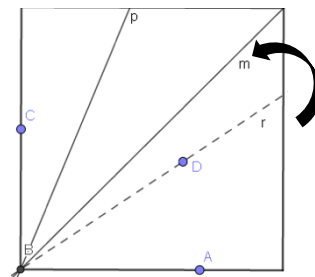


Imagen 75. Doble en el que se superpone un lado de la hoja al doblez construido anteriormente.

La construcción realizada no responde a lo solicitado, aun cuando los tres ángulos juntos den 90, ninguno de estos mide 30. Pese a ello, bajo esta propuesta se reconoce la bisectriz como protagonista, usada varias veces con el fin de dividir ángulos ya construidos, aunque ninguno de estos permite llegar realmente a lo requerido. El papel, como medio empleado, favorece la construcción de este objeto geométrico con facilidad, gracias a la simetría axial que tiene presencia cuando se hacen coincidir dobleces o bordes de la hoja. En este tipo de solución no se reconocen bondades ni debilidades mencionadas por los autores, sin embargo, se puede evidenciar que el estudiante intenta realizar una construcción de tres ángulos congruentes, pero al no saber cómo, intenta evocar construcciones similares y deja de lado la ventaja de la manipulación, la visualización y la validez que este proporciona en cuanto a la comprobación de congruencia de objetos geométricos.

Doblado de papel - Grupo B

Se realiza un doblado que divide la hoja a la mitad por la parte más larga, creando así el rectángulo ABCD (imagen 76). Luego se realizan los dobleces AC y BD. El ángulo ACD mide 30, imagen 77.

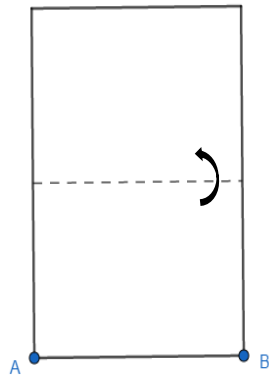


Imagen 76. Doble en el que se superponen los lados mas cortos de la hoja.

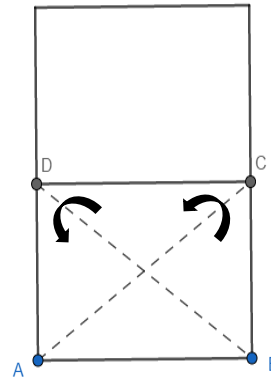


Imagen 77. Se determinan las diagonales del rectángulo formado por el doblado anterior.

La idea principal para encontrar la solución de esta tarea estaba basada en obtener ángulos de 30 cuyos lados estuvieran contenidos en las diagonales y los lados de un rectángulo, este rectángulo logra heredar las propiedades de perpendicularidad y paralelismo dadas por el medio. Sin embargo, la idea de esta construcción resulta ser un caso particular de uno muy general, por ello se tendría que tener en cuenta las medidas de los lados del rectángulo para que uno de los ángulos internos sea trisecado por la diagonal del mismo. Por esta razón la construcción no resulta ser útil para dar solución a la tarea. En este caso el doblado de papel se usa para construir figuras geométricas que tengan propiedades similares a él, puesto que el rectángulo se construye de tal manera que este hereda las propiedades de paralelismo y perpendicularidad que tiene la hoja. En este sentido no se reconocen bondades ni debilidades mencionadas por los autores, sin embargo, los estudiantes usan propiedades de las figuras geométricas que se cumplen teniendo en cuenta un caso específico,

como se muestra en este caso. Por lo tanto, se puede inferir que una debilidad del medio es que no permite verificar medidas.

GeoGebra - Grupo A y B

Inicialmente, con la herramienta *semirrecta* se construye el rayo AB haciendo clic sobre la pantalla dos veces en lugares diferentes (imagen 78). Con el comando *ángulo dada su amplitud* seleccionan los puntos B y A, se proporciona el número 30 y se selecciona la opción sentido antihorario. Posteriormente en pantalla aparece el punto C. Con *semirrecta* se construye el rayo AC, obteniendo el ángulo CAB cuya medida es 30 (imagen 79).

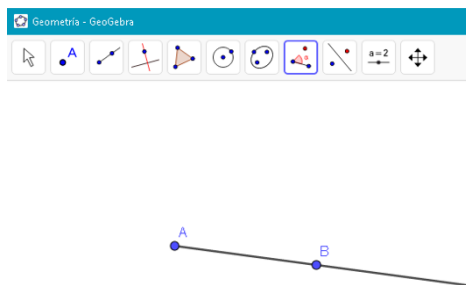


Imagen 78. Construcción del rayo AB, por medio de la herramienta rayo.

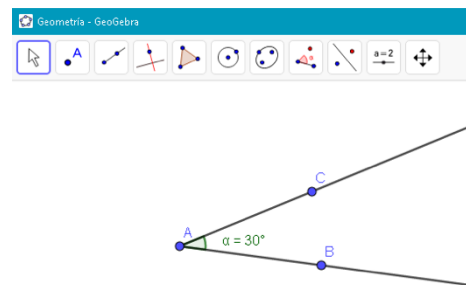


Imagen 79. Construcción de l ángulo de 30 con ayuda de la herramienta ángulo dada su amplitud.

Esta manera de abordar el problema no deja reconocer algún objeto geométrico involucrado, dado que la herramienta usada construye el ángulo de forma inmediata y no propone a los estudiantes hacer uso de propiedades adicionales que permitan obtener el objeto solicitado. La propuesta de solución movilizada por este medio hubiese podido ser diferente si dicho comando no existiera en el programa y con ello el uso de objetos y propiedades geométricas diversas. Una de las deficiencias vinculadas a esta construcción es aquella en la que la argumentación y los conceptos quedan limitados a la visualización (Gómez & Carulla, 1998; Mariotti, 2006).

6.2.Construir un triángulo equilátero dado uno de sus lados

Regla y Compás - Grupo A y B

Con ayuda de la regla se traza el segmento AB. Con el compás se construye la circunferencia con centro en B y radio AB y la circunferencia con centro en A y radio AB (imagen 80). Luego se marca uno de los puntos de intersección de las circunferencias, sea este C. Finalmente se usa la regla para construir los segmentos AC y BC (imagen 81).

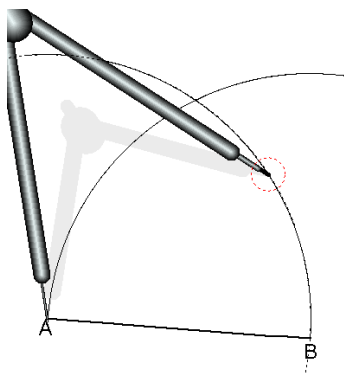


Imagen 80. Construcción de puntos equidistantes a través del compás.

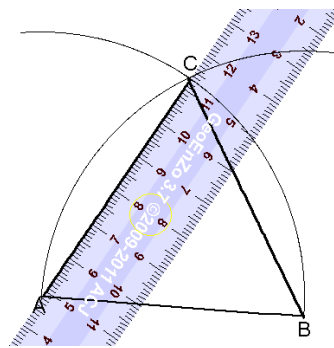


Imagen 81. Construcción de segmentos determinados por los puntos equidistantes.

Bajo esta perspectiva de solución se observa el uso de la definición de triángulo equilátero, donde se acude a la congruencia de lados la cual se logra gracias a la equidistancia que provee el compás al construir los arcos y por ello la intersección de ambos arcos garantizan puntos que equidistan de los puntos A y B y por ello se puede obtener el triángulo. Por ello el compás tiene el rol de construir puntos que equidistan simultáneamente de A y de B; de esta manera se ven evidenciadas dos bondades descritas por Chassapis (1998), una en la que se alude a la definición de circunferencia como todos los puntos que equidistan de un centro, debido a la estructura física del compás y la inferencia de características o propiedades desde la definición que son necesarias para los objetos matemáticos que se desean construir.

Doblado de papel - Grupo A y B

Dado el segmento AB en la hoja de papel, se superponen los puntos A y B permitiendo obtener el doblez m (imagen 82). La hoja se dobla ahora alrededor del punto A, ubicando al punto B sobre el doblez m, este nuevo doblez es p, luego se marca (con ayuda del lápiz) el segmento determinado por el doblez p (imagen 83). Esta misma operación se realiza intercambiando los puntos A y B, determinando así el doblez q y se marca el segmento determinado por el doblez q (imagen 84). La intersección de los segmentos marcados con el lápiz determina el punto C. Finalmente se establece que el triángulo ABC es equilátero.

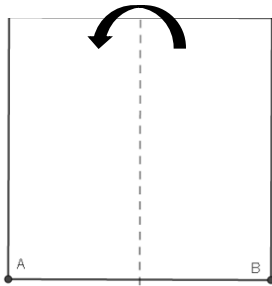


Imagen 82. Mediatriz del segmento dado a través de la superposición.

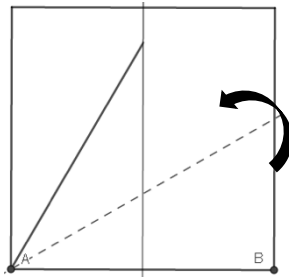


Imagen 83. Doble z determinado por la superposición del punto B en la mediatriz del segmento.

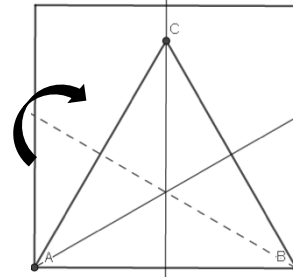


Imagen 84. Segundo doble z determinado por la superposición del punto A en la mediatriz del segmento.

Al momento de hacer coincidir A y B se obtiene la mediatriz m del segmento dado. Posteriormente, al realizar el segundo doblez se garantiza que el punto B pertenezca a la mediatriz, lo que lleva a asegurar la congruencia de dos lados del triángulo a construir; de la misma manera se construye el otro lado del triángulo, lo que lleva a contar con tres segmentos congruentes. En este caso la forma de usar el papel recrea en parte la de un compás, particularmente para copiar medidas, conservando a los puntos A y B como centros de rotación que permiten determinar al punto C. Este tipo de solución permite observar que los estudiantes perciban de manera intuitiva propiedades geométricas (Gonzales y Larios, 2001, citado por Sarasua, 2013), puesto que usan la congruencia

de los lados del triángulo como una igualdad de medidas. A su vez favorece actitudes como la observación y paciencia de los estudiantes (Avilés, 2016).

GeoGebra - Grupo A y B

En la pantalla se construye el segmento AB con la herramienta *segmento*, haciendo clic sobre la pantalla para crear el punto A y luego el punto B. Con el segmento construido, se usa el comando *circunferencia centro punto* y se hace clic sobre A y después sobre B; de la misma manera se hace clic sobre B y luego sobre A, esto permite determinar dos circunferencias (imagen 85). Gracias al comando *intersección*, se seleccionan ambas circunferencias y aparece el punto C (imagen 86). Nuevamente con *segmento* se hace clic sobre los puntos B y C y luego sobre A y C (imagen 87). Finalmente se obtiene el triángulo ABC.

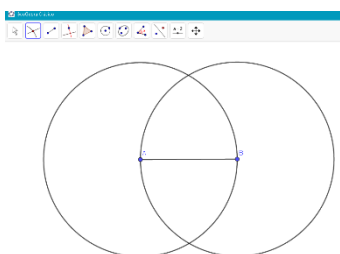


Imagen 85. Puntos equidistantes a través de la herramienta circunferencia

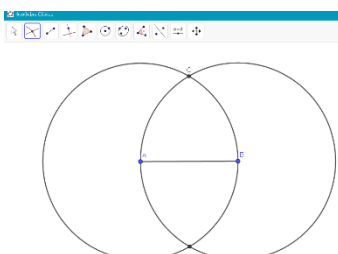


Imagen 86. Punto C determinado por la herramienta intersección.

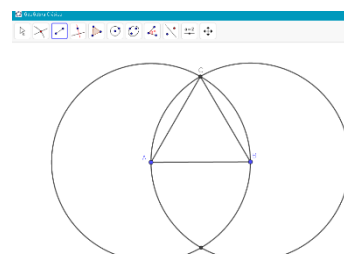


Imagen 87. Triángulo equilátero formado a través de la herramienta segmento.

Esta estrategia de solución funciona puesto que se acude a la congruencia de lados de este tipo de triángulo, la cual se alcanza gracias al uso de las circunferencias congruentes. Bajo esta propuesta de construcción se observa que los estudiantes no se percatan de la existencia de dos soluciones posibles. Por otro lado, esta construcción pudo haberse llevado a cabo por medio de la herramienta polígono, la cual se hubiera realizado de manera inmediata; por esa razón se observa que los estudiantes no conocen todos los comandos del programa o prefieren quedarse con el algoritmo aprendido acerca de la construcción de un triángulo con regla y compás replicándola en GeoGebra.

En este caso la argumentación parece estar más dada a los objetos geométricos que a las herramientas del programa, lo que juega un papel de bondad con respecto a la inferencia de propiedades desde la definición del objeto.

6.3.Construya el centro de una circunferencia dada

Regla y Compás - Grupo A

Dada la circunferencia, con ayuda de la regla se trazan cuatro rectas tangentes a la circunferencia (m, n, o y p) por diferentes puntos, de tal forma que el resultado asemeje a un cuadrado, sea este ABCD (imagen 88). Luego se trazan las diagonales de este (imagen 89). El punto de intersección de estos segmentos se nombra E, siendo además el centro de la circunferencia, como se muestra en la imagen 90.

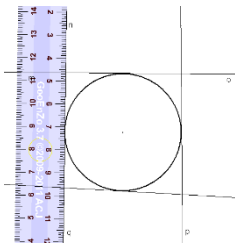


Imagen 88. Construcción de rectas tangentes a la circunferencia con regla.

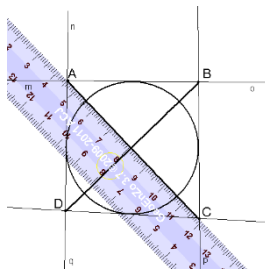


Imagen 89. Construcción de las diagonales del cuadrado.

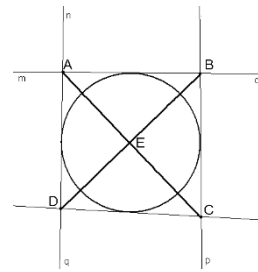


Imagen 90. Punto E determinado por la intersección de las diagonales del cuadrado.

La idea para dar solución a este ejercicio estaba basada en la construcción de un cuadrado circunscrito a una circunferencia por medio de rectas tangentes y de la intersección de sus diagonales. Sin embargo, este tipo de construcción no es correcta en tanto que no se construyen con precisión las rectas tangentes, dejando una alta posibilidad a que el cuadrilátero no sea cuadrado, a razón de que las rectas no son perpendiculares entre sí, por ello es poco probable que la intersección de las diagonales del cuadrilátero sea realmente el centro de la circunferencia. Respecto al rol del medio empleado, la regla específicamente, este solo se emplea para construir

rectas, mientras que el compás no se involucra en absoluto. Por este motivo se ve reflejado la deficiencia nombrada por Sarasua (2013) y Rosales y Guzmán (2016), la cual especifica la falta de motricidad fina la cual puede llevar a la inexactitud en la construcción de figuras geométricas. Una de las deficiencias que no es mencionada por los autores consiste en la falta de conocimiento de construcción de rectas paralelas y perpendiculares que llevan al estudiante a construir figuras geométricas sin rigurosidad y por tanto a errores en la construcción.

Regla y Compás - Grupo B

Dada la circunferencia, se traza con el compás una circunferencia con centro en A y un radio cualquiera, siendo A un punto que pertenece a la circunferencia dada, se marca uno de los puntos de intersección entre las circunferencias, siendo este B. Nuevamente, con ayuda del compás, se realiza una circunferencia con centro en B y radio AB, se marcan los puntos de intersección, P y Q, de las circunferencias con centros en A y en B; también se marca el punto de intersección, siendo este C, entre la circunferencia con centro en B y la circunferencia dada (imagen 91). Del mismo modo se traza la circunferencia con centro en C y radio AB, se marca el punto de intersección entre la circunferencia con centro en C y la circunferencia dada, siendo este D (imagen 92); se marcan los puntos de intersección entre las circunferencias con centros en C y B y son nombrados R y S. Con ayuda de la regla se trazan las rectas PQ y RS, el punto de intersección de ambas rectas es nombrado G el cual es el centro de la circunferencia, como se muestra en la imagen 93.

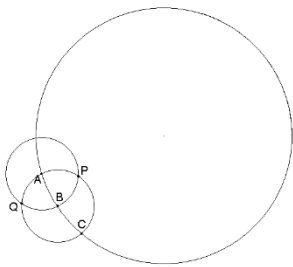


Imagen 91. Construcción de circunferencias las cuales determinan una cuerda de la circunferencia dada.

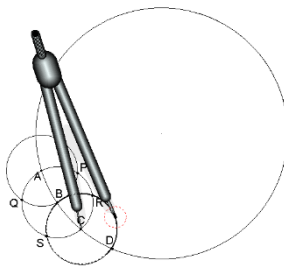


Imagen 92. Circunferencia la cual determina otra cuerda distinta de la circunferencia dada.

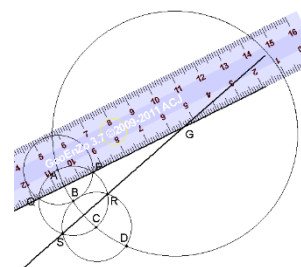


Imagen 93. El punto G es el centro de la circunferencia.

Bajo esta perspectiva de solución se observa que los estudiantes construyen dos cuerdas de la circunferencia y luego sus respectivas mediatrices, lo cual es alcanzado con ayuda de las circunferencias. Al trazar estas rectas se determinan dos diámetros de la circunferencia, los cuales al intersectarse determinan el centro de la circunferencia. En este sentido, esta propuesta involucra objetos geométricos como mediatriz, cuerda, diámetro y propiedades asociadas a estos. El rol que juega el compás en esta construcción es el de encontrar puntos que equidistantes, en este caso R, S, P y Q, para lograr construir las mediatrices que se usan para hallar el centro de la circunferencia. La solución de esta tarea refleja beneficios nombrados por autores como Chassapis (1998) y Peñuela (2015) los cuales aluden a la asimilación de diferentes conceptos de la geometría y la definición de circunferencia como todos los puntos que equidistan de uno.

Doblado de papel - Grupo A

Dada la circunferencia m, se dobla el papel de tal manera que el círculo se divida en dos partes iguales (imagen 94). Esto se realiza nuevamente, determinando así un doblez diferente al primero (imagen 95). Se marca con un lápiz la intersección de ambos dobleces como C, este es el centro de la circunferencia (imagen 96).

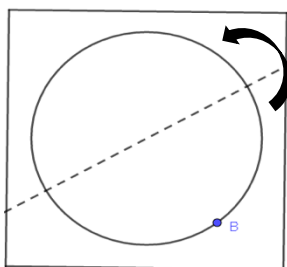


Imagen 94. Doble en el que la circunferencia se superpone a ella misma.

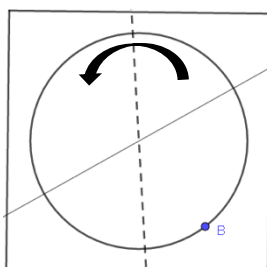


Imagen 95. Doble 2 en el que la circunferencia se superpone a ella misma por un lado distinto al primero.

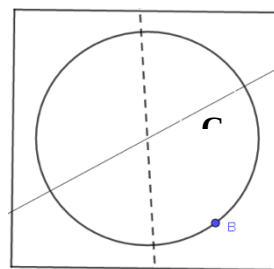


Imagen 96. Se determina el centro de la circunferencia por medio del doblado del papel.

Esta propuesta de construcción involucra el diámetro como objeto geométrico, así como algunas propiedades de este. Adicionalmente, la forma en que se involucra el papel y se realizan los dobleces, deja ver un nexo entre esta cuerda y el eje de simetría de una circunferencia. Al construir dos diámetros distintos de la misma circunferencia, se garantiza que la intersección de estos corresponda al centro de la circunferencia. En esta construcción el rol del papel posibilita que el diámetro se muestre como un eje de simetría de la circunferencia, consiguiendo encontrar el centro de la circunferencia. Este tipo de construcción es exclusiva de este medio, puesto que permite superponer objetos geométricos creando ejes de simetría. Por otra parte, se ve reflejado bondades del medio como que este permite el desarrollo de la psicomotricidad fina, la observación y la percepción espacial lo cual es mencionado por autores como Avilés (2016) Blanco y Otero (2005).

Doblado de papel - Grupo B

Dada la circunferencia, se inicia doblando el papel de tal modo que los lados horizontales de la hoja se doblen hacia el interior de la misma, con el fin de que los dobleces realizados sean tangentes a la circunferencia (imagen 97), estos dobleces son nombrados m y n. De igual manera doblan los otros dos lados de la hoja, obteniendo así las rectas p y q. De esta manera se obtiene así el cuadrado ABCD, en el cual está inscrita la circunferencia (imagen 98). Después de inscribir dicha circunferencia en el cuadrado se realizan los dobleces que contienen las diagonales del cuadrado.

El punto de intersección de estos últimos dobleces se nombra M y corresponde al centro de la circunferencia (imagen 99).

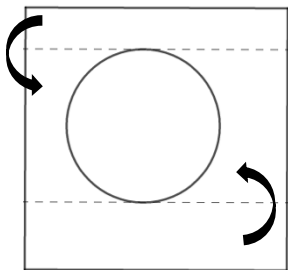


Imagen 97. Dobleces horizontales tangentes a la circunferencia.

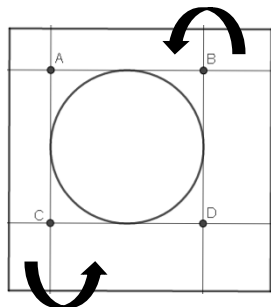


Imagen 98. Dobleces verticales tangentes a la circunferencia.

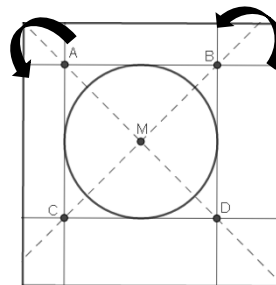


Imagen 99. Dobleces determinados por las diagonales del cuadrilátero formado.

Apoyados en la forma rectangular de una hoja de papel, los estudiantes realizan dobleces los cuales logran heredar las propiedades de perpendicularidad y paralelismo; como consecuencia a ello la figura construida con dichos dobleces es un paralelogramo, cuyos lados opuestos son paralelos. Ahora bien, los dobleces realizados anteriormente también se construyen de manera que sean tangentes a la circunferencia, por ello el paralelogramo corresponde a un cuadrado, el cual está circunscrito a la circunferencia dada y por tanto al hallar la intersección de sus diagonales se determina el centro de la circunferencia. Esta manera de afrontar la tarea deja ver que los estudiantes construyen el cuadrado apoyados en las propiedades de paralelismo y perpendicularidad de la hoja haciendo coincidir al menos uno de sus lados sobre el mismo para que el doblez logre heredar la perpendicularidad; este paso de la construcción no hubiera sido posible si al estudiante se le hubiera presentado el problema en una hoja cuya forma fuera irregular. Por otro lado, fue necesario acudir a representaciones visuales para construir las rectas tangentes a la circunferencia, lo que conlleva a que el estudiante deba tener una motricidad fina. De lo contrario, las rectas tangentes no lo serían y por tanto el punto hallado después de toda la construcción no sería el centro de la circunferencia. Por ello se ve reflejada la bondad mencionada

por Blanco y Otero (2005) que hace alusión al desarrollo de la psicomotricidad fina, al igual que la mencionada por Avilés (2016) en la que promueve el desarrollo de la visualización paciencia y cuidado.

GeoGebra - Grupo A

Dada la circunferencia, en esta se construyen los puntos B, C y D. Posteriormente, con la herramienta *mediatriz* se seleccionan los puntos C y D y aparece en la pantalla la recta m, mediatriz de estos dos (imagen 100). Con la herramienta *intersección* se seleccionan la recta m y la circunferencia, lo que lleva a determinar los puntos E y F. Luego, con la herramienta *medio o centro* se hace clic sobre el punto E y el punto F y aparece el punto G, punto medio de estos dos, que a su vez es centro de la circunferencia (imagen 101).

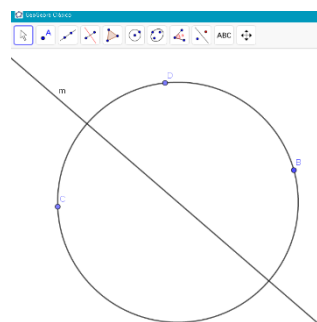


Imagen 100. Mediatriz de una de las cuerdas de la circunferencia dada por la herramienta mediatriz.

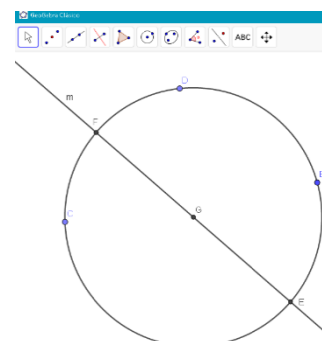


Imagen 101. Punto medio de uno de los diámetros de la circunferencia gracias a la herramienta medio o centro.

Esta construcción funciona puesto que, al construir la mediatriz de cualquier cuerda de la circunferencia, determinar el diámetro contenido en esta recta (el cual es obtenido por los dos puntos de intersección entre la mediatriz y la circunferencia) y hallar su punto medio se determina el centro de la circunferencia. Puesto que se conoce por definición que en el diámetro está contenido el centro de la circunferencia y que su punto medio corresponde al centro de la misma. Por ello, determinar el punto medio de este segmento lleva a obtener el punto buscado. En este tipo de construcción se observa que los estudiantes no conocen todas las herramientas que

proporciona el programa, dado que con la herramienta *medio o centro* se hubiera podido solucionar el problema. Sin embargo, la estrategia empleada pone en juego objetos geométricos como cuerda, mediatriz, diámetro y punto medio, brindando así mayor riqueza en los conocimientos movilizados bajo esta propuesta. Este enfoque guarda mucha semejanza con el que se podría emplear al abordar el problema con regla y compás, por lo que en este caso el medio involucrado corporeiza en gran medida el ambientado por regla y compás.

GeoGebra - Grupo B

Dada la circunferencia en pantalla, se usa la herramienta *punto* para construir dos puntos, nombrados C y D, que pertenezca a la circunferencia inicial. Después con la herramienta *circunferencia centro punto* se hace clic sobre el punto C y luego sobre el punto D, obteniendo así la circunferencia con centro en C y radio CD; con la misma herramienta se construye la circunferencia con centro en D y radio CD. Con ayuda de la herramienta *intersección* se selecciona la circunferencia inicial y la circunferencia con centro en D obteniendo de esta manera el punto de intersección, el cual se nombra E. nuevamente con la herramienta *circunferencia centro punto* se selecciona el punto E y luego el punto D, construyendo así la circunferencia con centro en E y radio ED (imagen 102). Seleccionando la herramienta *recta* y los puntos de intersección entre las circunferencias con centros en D y E, sean estos P y Q, se construye la recta PQ; de la misma manera seleccionando los puntos de intersección entre las circunferencias con centros en D y C, siendo estos R y S, se construye la recta RS. Gracias a la herramienta *intersección* se seleccionan las rectas RS y PQ y automáticamente se construye el punto G el cual es el centro de la circunferencia B (imagen 103).

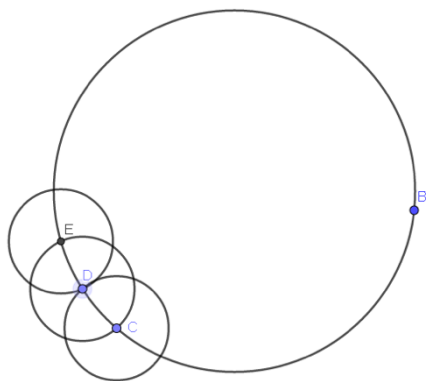


Imagen 102. Dos cuerdas de la circunferencia construidas a través de circunferencias congruentes.

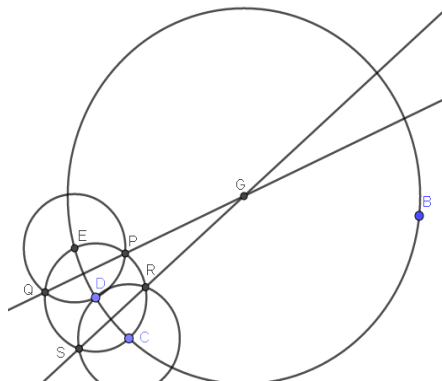


Imagen 103. La intersección de las mediatrices de las cuerdas permiten obtener el centro de la circunferencia a través de las herramientas mediatriz e intersección.

Esta forma de abordar el problema deja ver una réplica de la solución realizada con regla y compás, por lo que su análisis es el mismo. Sin embargo, utilizar este medio garantiza la precisión del resultado, asunto que con regla y compás podría no alcanzarse con seguridad. En este caso no se puede inferir el rol que juega GeoGebra es representar de manera dinámica los objetos que se pueden construir con regla y compás.

6.4. Construir un ángulo congruente al dado de tal forma que compartan un lado

Regla y Compás - Grupo A

Se construyen los rayos AB y AC, con ello el ángulo CAB. Con la regla se traza una recta n , paralela a uno de los rayos, esta recta interseca el otro rayo en el punto P (imagen 104). Se dibujan los puntos R y S de tal modo que pertenezcan uno al rayo AB y el otro a la recta n (imagen 105). El ángulo RPS es congruente al ángulo CAB.

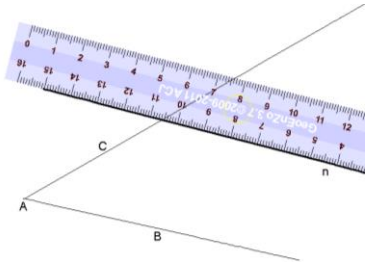


Imagen 104. Construcción de una recta paralela a otra por medio de la regla.

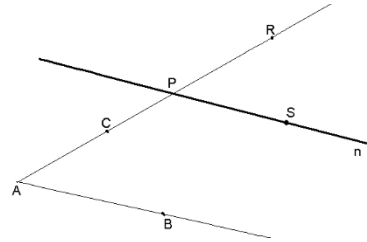


Imagen 105. Se determinan ángulos congruentes con regla y compás.

Esta propuesta de construcción se sustenta en ángulos correspondientes y una propiedad que estos satisfacen cuando están comprendidos entre paralelas. Pese a ello, la propuesta presentada no se ajusta a lo solicitado por la tarea, ya que los ángulos debían compartir un lado. Por otro lado, la recta paralela es construida solamente con la regla, por lo que no goza de precisión en su construcción. De esta manera se observa que se delega a la regla la construcción de rectas con propiedades específicas, como la equidistancia, que por sí sola no puede cumplir, por ello se evidencia en primera instancia que la falta de motricidad fina lleva a la inexactitud de la construcción de la recta paralela; esta deficiencia es nombrada por Sarasua (2013), Rosales y Guzmán (2016). Por otra parte, se observa una deficiencia la cual es la construcción de objetos geométricos sin rigurosidad, dado que esto lleva al estudiante a considerar propiedades y características de los objetos que no son verdaderas.

Regla y Compás - Grupo B

Con ayuda de la regla se construyen los rayos AC y AB. Con el compás se traza una circunferencia con centro en A y radio AP, el punto P pertenece al rayo AB (imagen 106). Se marca el punto de intersección entre la circunferencia y el rayo AC, este se nombra R. Con el compás se construye la circunferencia con centro en R y radio RP (imagen 107) y la intersección entre esta y la primera circunferencia distinta a P se nombra Q. Utilizando la regla se traza el rayo AQ, de esta manera el ángulo QAC es congruente al ángulo CAB (imagen 108).

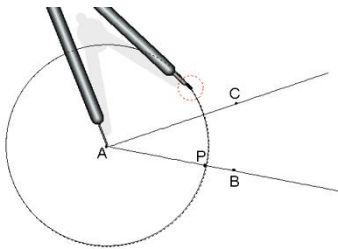


Imagen 106. Construcción de los primeros puntos equidistantes.

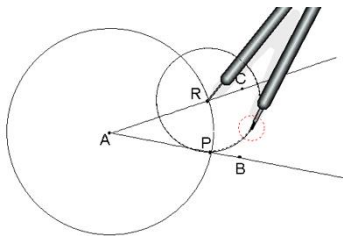


Imagen 107. Construcción de puntos equidistantes.

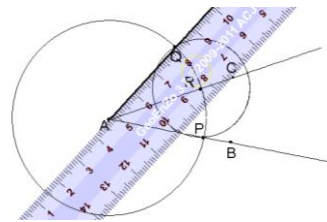


Imagen 108. Construcción del rayo faltante para la construcción de ángulos congruentes.

Al realizar la primera circunferencia se determinan dos radios de la misma, en este caso los segmentos AP y AR, los cuales son congruentes. Luego al construir la segunda circunferencia se determinan puntos equidistantes y por ello dos radios de la circunferencia, en este caso los segmentos RP y RQ, los cuales en efecto son congruentes. Finalmente, al construir el segmento AQ se determina un radio de la primera circunferencia obteniendo así tres segmentos congruentes y por tanto dos triángulos, APR y ARQ, cuyos lados correspondientes son congruentes. En consecuencia, estos triángulos son congruentes y por ello se puede concluir que sus ángulos internos también lo son. El rol del compás en esta construcción es aquel de construir puntos equidistantes y segmentos congruentes, por tanto, se manifiesta la definición de circunferencia como todos los puntos que equidistan de un centro (Chassapis, 1998) y el desarrollo de capacidades cognitivas y prácticas (Ayala 2008).

Doblado de papel - Grupo A y B

Dado el ángulo ABC en el papel se realiza doblez determinado por los puntos B y C (imagen 109). Simultáneamente, sin desdoblar el papel, se realiza el doblez determinado por los puntos B y A (imagen 110). Finalmente, al desdoblar se observa un tercer doblez resultante, este se nombra BD (imagen 111).

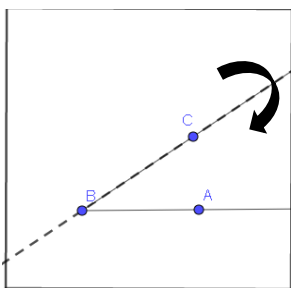


Imagen 109. Doblez determinado por un lado del ángulo.

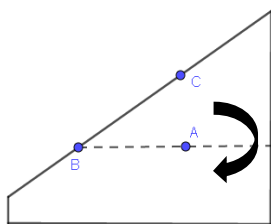


Imagen 110. Doblez determinado por el otro lado del ángulo.

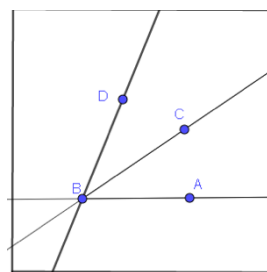


Imagen 111. Obtención del ángulo congruente a través del doblado del papel.

Al realizar el primer doblado determinado por el rayo BC se observa que este funciona como eje de simetría para determinar el otro ángulo congruente. Al mantener el primer doblado y realizar el doblado que se determina por los puntos B y A, se logra copiar el rayo BA. Al desdoblar completamente el papel se observan los ángulos ABC y DBC y se deducen como congruentes, debido a que estos coinciden al doblar sobre el eje de simetría. En esta oportunidad el papel es empleado para calcar objetos geométricos gracias a la translucidez del mismo, crear ejes de simetría y comprobar propiedades de congruencia a través de la superposición de los objetos geométricos. Se ven reflejadas bondades del papel como percibir propiedades geométricas de forma intuitiva al calcar el rayo del ángulo creando uno congruente (Gonzales y Larios, 2001, citado por Sarasua, 2013), además de favorecer procesos de visualización, validación y el desarrollo de la psicomotricidad fina (Blanco y Otero, 2005; Carvalho y Santa, 2015)

GeoGebra - Grupo A

Dado el ángulo ABC con la herramienta *ángulo* se seleccionan los puntos C, B y A en ese orden, de esta manera el programa proporciona la medida del ángulo, imagen 112. Con el comando *ángulo dada su amplitud* se hace clic sobre los puntos C y B, en ese orden. Posteriormente, en la ventana emergente se digita el número que aparece en la pantalla correspondiente al ángulo ABC

y se selecciona la opción sentido anti horario, de esta manera en pantalla aparece el punto C' (imagen 113). Con *semirrecta* se construye el rayo BC', obteniendo el ángulo CBC' congruente al ángulo ABC (imagen 114).

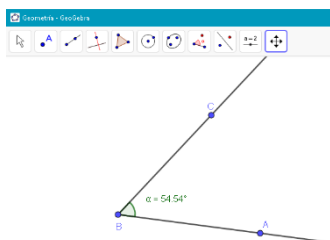


Imagen 112. Medida del ángulo dado por medio de la herramienta ángulo.

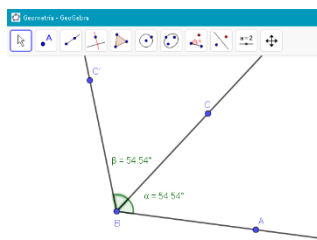


Imagen 113. Construcción del punto que determina el ángulo congruente a través de la herramienta ángulo dada su amplitud.

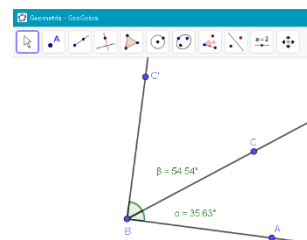


Imagen 114. Comprobación de la congruencia de los ángulos congruentes con GeoGebra.

Esta propuesta de construcción muestra que dos ángulos son congruentes por la igualdad de sus medidas. Sin embargo, por la forma en que se construye el segundo ángulo, la construcción no funciona bajo arrastre, dado que al mover el punto C la medida del ángulo ABC cambiará, pero la medida del ángulo CBC' quedará estática. Por ello el rol de la geometría dinámica se rige por la facilidad de construir objetos, en este caso ángulos a partir de su medida, sin involucrar objetos geométricos adicionales. Por otra parte, un aspecto relevante en esta construcción es la falta de dinamismo para comprobar que se cumple la congruencia de los ángulos siempre y no solo en una situación específica.

GeoGebra - Grupo B

Dado el ángulo ABC en pantalla, se utiliza la herramienta, *ángulo* para medir el ángulo, para ello se seleccionan los puntos A, B y C (imagen 115). Luego con la herramienta *ángulo dada su amplitud* se seleccionan los puntos A y B, simultáneamente aparece una ventana en la que se ingresa el nombre del ángulo dado, en este α y se selecciona el sentido horario para que el punto

que se construya sea diferente al punto C. De esta forma se construye el punto A' y con ello el ángulo A'BA, cuya medida es igual a la del ángulo BAC (imagen 116).

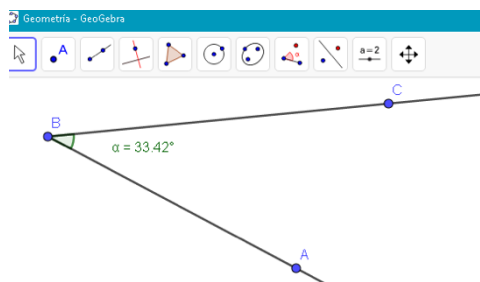


Imagen 115. Medida del ángulo dado a través de la herramienta ángulo.

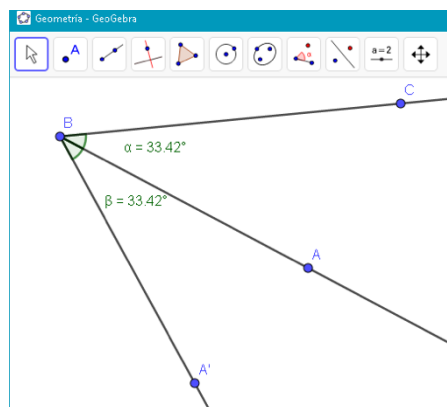


Imagen 116. Construcción del ángulo congruente por medio de la herramienta ángulo dada su amplitud.

Esta construcción funciona dado que al usar la herramienta *ángulo dada su amplitud* y seleccionar el ángulo completo se selecciona el ángulo en general, lo que conlleva a que bajo el arrastre el ángulo sea siempre congruente. En esta oportunidad GeoGebra aporta precisión en la construcción y facilidad de construir objetos geométricos, en este caso un ángulo a partir de su medida. También proporciona la comprobación de la construcción por medio del arrastre, lo que conlleva a la generalización a partir de un caso específico. En este caso, la argumentación y los conceptos quedan limitados a la visualización, deficiencia nombrada por Gómez y Carulla (1998) y Mariotti (2006).

6.5.Dados tres puntos no colineales, construir un paralelogramo de tal modo que los tres puntos sean vértices de este.

Regla y Compás - Grupo A y B

Inicialmente, con la regla se trazan los segmentos AB y AC, con el compás se copia la distancia entre los puntos A y B y se construye la circunferencia con centro en C y radio AB. De manera similar, se construye la circunferencia de centro B y radio AC (imagen 117). Se marca el punto de

intersección de las circunferencias con centros en C y B que está en el interior del ángulo ABC, sea este D. Finalmente, con la regla se trazan los segmentos BD y DC (imagen 118).

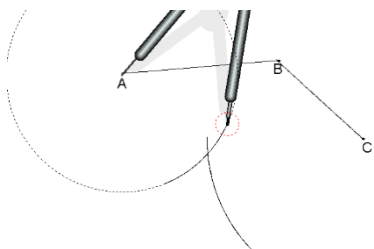


Imagen 117. Construcción de puntos equidistantes por medio del compás.

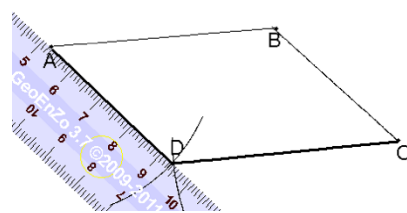


Imagen 118. Construcción de los lados del paralelogramo con la regla.

Esta construcción involucra una propiedad de los paralelogramos, aquella que menciona la congruencia de sus lados opuestos. Al construir las circunferencias y encontrar el punto de intersección entre ellas se determinan segmentos opuestos congruentes y por tanto un paralelogramo. Esta forma de afrontar la tarea deja ver en el compás un uso ligado a la conservación de distancias, aspecto relevante de acuerdo a lo que geoméricamente sustenta este tipo de solución. De esta manera se ve manifestado lo expuesto por Peñuela (2015) quien menciona que se permite el análisis e interpretación de diferentes representaciones y Chassapis (1998) al mencionar la inferencia de características que son necesarias del objeto geométrico.

Doblado de papel - Grupo A y B

Se marcan los tres puntos no colineales en la hoja, siendo estos A, B y C. Se dobla el papel de tal manera que el doblez resultante contenga a los puntos A y B, luego se realiza un doblez que contenga a los puntos B y C (imagen 119). Se realizan varios dobleces paralelos al doblez BC, los cuales intersecan al doblez AB, tratando que uno de estos dobleces contenga al punto A (imagen 120). De la misma manera se realiza un doblez que contenga a los puntos A y B y posteriormente varios dobleces paralelos a este, tratando que uno de estos dobleces contenga al punto C. Cuando

los dos dobleces buscados se obtienen se marca el punto D como su punto de intersección (imagen 121).

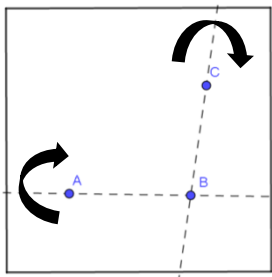


Imagen 119. Dobleces determinados por los puntos no colineales.

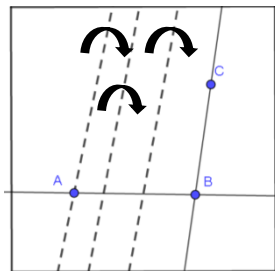


Imagen 120. Dobleces aparentemente paralelos al dobléz BC

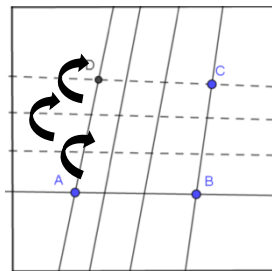


Imagen 121. Dobleces aparentemente paralelos al dobléz AB

Esta manera de abordar el problema nos deja ver que el paralelogramo se involucra como un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos. Al intentar construir los lados paralelos a los dos que se tienen desde el principio (dobles AB y BC), se construyen dobleces de manera no rigurosa que cumplan esta propiedad, por lo que no se puede garantizar que estos sean realmente paralelos. El rol que juega el papel en esta construcción es el de permitir construir dobleces que tengan la misma inclinación para determinar con ello rectas paralelas. Una deficiencia de este medio es la falta de motricidad fina del estudiante puesto que esta puede llevar a la inexactitud de la construcción de la figura geométrica, además la bondad que menciona que los estudiantes perciben propiedades geométricas de forma intuitiva (Gonzales y Larios, 2001, citado por Sarasua, 2013) puede también ser una deficiencia en este caso, debido a que los estudiantes dejan de lado las propiedades de los objetos geométricos lo cual le aportaría más significado a la construcción de dicha solución.

GeoGebra - Grupo A y B

En la pantalla se tienen los puntos A, B y C no colineales. Con la herramienta segmento se hace clic sobre el punto A y B luego sobre B y C, de esta manera se construyen los segmentos AB y

BC. Utilizando la herramienta *paralela* se hace clic sobre el segmento BC y luego sobre el punto A, construyendo la recta m; de la misma manera se hace clic sobre el segmento AB y se hace clic sobre el punto C, construyendo la recta n (imagen 122). Posteriormente, con *intersección* se hace clic sobre las rectas m y n y se construye el punto D (imagen 123).

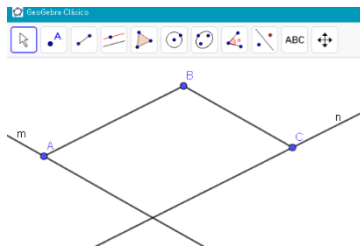


Imagen 122. Construcción de rectas paralelas a los segmentos por medio de la herramienta paralela.

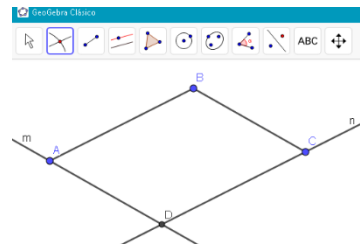


Imagen 123. Cuadrilatero ABCD a traves de las herramientas interseccion y segmento.

La anterior estrategia de solución funciona, en cuanto se acude a la propiedad del paralelogramo que señala que sus lados opuestos son paralelos. Esta se materializa al utilizar la herramienta *paralela*. En este caso las herramientas de GeoGebra utilizadas aportan en dos aspectos principalmente, a saber, aportan agilidad en el proceso de construcción y al mismo tiempo precisión en el resultado obtenido. Sin embargo, este enfoque de trabajo no deja ver si el estudiante tiene claridad sobre la forma en que se construye una recta paralela a otra dada, pues la inmediatez del comando involucrado delega todo el trabajo al recurso involucrado y por tanto la que la argumentación y los conceptos quedan limitados a la visualización (Gómez & Carulla, 1998; Mariotti, 2006). Esto lleva a pensar en lo que hubiera sucedido si dicha herramienta no existiera en el menú del programa, pues en este caso se hubiera necesitado acudir a propiedades del paralelogramo que permitieran su construcción (v.g. lados o ángulos opuestos congruentes, ángulos adyacentes suplementarios).

6.6.Construir el punto medio de un segmento

Regla y Compás - Grupo A y B

Con ayuda de la regla se traza el segmento AB. Con el compás se traza la circunferencia con centro en A y radio AB, de la misma manera se construye la circunferencia con centro en B y radio AB. Se marcan los puntos de intersección de ambas circunferencias construidas, sean estos C y D (imagen 124). Con la regla se traza la recta CD y el punto de intersección entre la recta y el segmento dado se nombra M, el cual es punto medio del segmento (imagen 125).

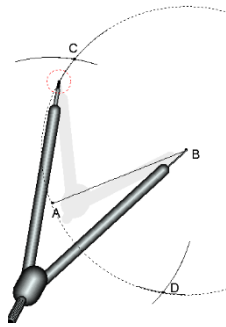


Imagen 124. Construcción de puntos equidistantes con el compás.

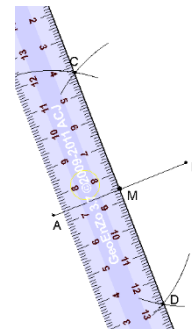


Imagen 125. Punto medio del segmento por medio de regla y compás.

Esta construcción funciona dado que se construye la mediatriz del segmento, lo que se logra con ayuda de las circunferencias auxiliares y sus puntos de intersección, los cuales equidistan de los extremos del segmento AB. Como se sabe que la mediatriz es una recta perpendicular al segmento por su punto medio, se puede asegurar que la intersección del segmento y de la mediatriz es el punto deseado. En esta oportunidad la regla es utilizada apenas para trazar rectas, mientras que el compás se involucra como recurso para determinar puntos que equidisten de los extremos del segmento, por esta razón, se ve relegada la definición de circunferencia como todos los puntos que equidistan de un centro, bondad mencionada por Chassapis (1998), además en esta construcción se permite la asimilación de diferentes conceptos de la geometría (Peñuela, 2015), como lo es la mediatriz.

Doblado de papel - Grupo A

Se traza el segmento AB y se dobla el papel creando una recta que contenga al punto A sea paralela al lado de la hoja, siendo nombrada m. De la misma manera se realiza el doblez de tal manera que la recta creada contenga al punto B y sea paralela a la recta m, sea esta n (imagen 126). Con ambos dobleces realizados se hace coincidir el punto A y el punto B y se realiza el doblez p. Finalmente se marca el punto de intersección entre la recta p y el segmento AB, el cual se nombra M, véase imagen 127.

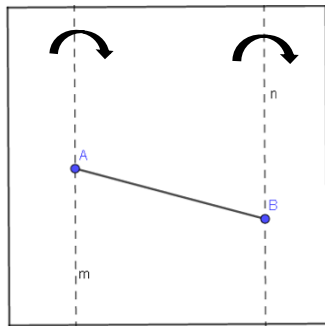


Imagen 126. Dobleces paralelos a los lados de la hoja por los extremos del segmento.

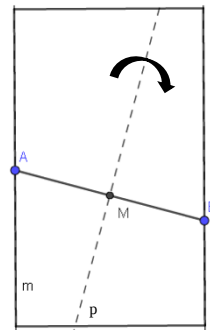


Imagen 127. Mediatriz del segmento dada a partir de la superposición de los puntos A y B.

En la propuesta presentada las rectas m y n no tienen gran importancia en el proceso de solución, sumado esto a la gran posibilidad de error en el paralelismo con el cual una se construye a partir de la otra y la perpendicularidad que se dice que estas tienen con el segmento dado. Posteriormente, al hacer coincidir los puntos A y B se construye la mediatriz del segmento AB, donde una de las propiedades de este objeto permite declarar que su intersección con el segmento corresponde al punto medio del segmento. El rol que juega el papel en la solución de este ejercicio es el de doblar para superponer objetos geométricos, de poder construir rectas paralelas o perpendiculares debido a la superposición de los lados de la hoja. Debido a este medio se crea la posibilidad de establecer un eje de simetría, en este caso el eje de simetría se convierte en la mediatriz del segmento, también se identifica el desarrollo de la psicomotricidad fina, la percepción espacial, la observación y el

desarrollo de procesos de validación (Carvalho y Santa, 2015; Blanco y Otero, 2005; Avilés, 2016).

Doblado de papel – Grupo B

Se realiza con ayuda de una regla el segmento AB y se realiza el doblado determinado por los puntos A y B, creando así la recta AB (imagen 128). Se hacen coincidir los puntos A y B superponiéndolos y se marca el doblado. Luego con un lápiz se marca el punto de intersección entre los dos dobleces realizados, siendo este M (imagen 129).

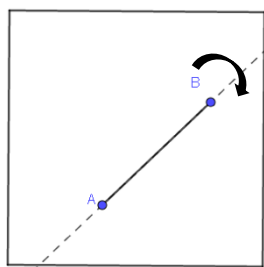


Imagen 128. Doblado determinado por los puntos A y B.

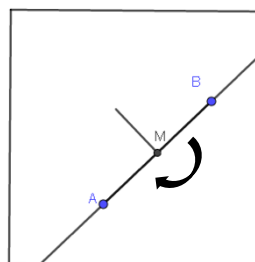


Imagen 129. Punto medio construido por medio de la superposición de los extremos del segmento.

En la propuesta de construcción se acude a la superposición de los puntos, para lo cual se apoyan en la recta que los contiene para que estos sean más evidentes, luego se construye la mediatriz del segmento superponiendo los puntos extremos del segmento. El punto de intersección entre el doblado correspondiente a la mediatriz y el doblado correspondiente al segmento es el punto medio del mismo. El rol del papel para esta construcción es el de poder superponer objetos geométricos y de esta manera ejes de simetría, lo cual es exclusivo de este medio. Además, por medio de esta solución el estudiante logra desarrollar la visualización y la validación de la construcción, beneficio nombrado por Carvalho y Santa (2015). Por otra parte, la imprecisión o la falta de motricidad fina podría hacer que la construcción no sea precisa, lo que juega como una deficiencia.

GeoGebra - Grupo A y B

En pantalla se construye el segmento AB con la herramienta *segmento*, haciendo clic sobre la pantalla para crear el punto A y luego el punto B. Ya teniendo el segmento construido, con el comando *medio o centro* se hace clic sobre A y después sobre B. De esta manera aparece el punto C que es punto medio del segmento (imagen 130).

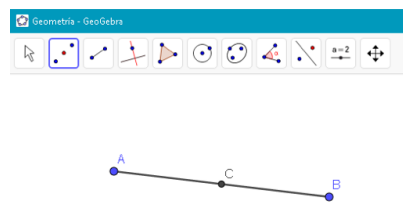


Imagen 130. Punto medio por medio de la herramienta medio o centro.

Bajo esta propuesta de solución no se reconoce algún objeto geométrico involucrado. Dado que existe una herramienta que de manera inmediata construye el punto deseado, no se requiere por parte de los estudiantes movilizar algún conocimiento. Esta situación podría ser distinta si dicha herramienta no existiera, o si la tarea solicitara explícitamente en su enunciado no acudir a esta herramienta. La forma de abordar esta tarea no permite decir si los estudiantes tienen conciencia de la forma en que este punto se obtiene, o si apenas reconocen la herramienta como una caja negra, lo cual hace que la argumentación está ligada a la visualización de dicha construcción, lo que se considera una deficiencia de la tecnología (Gómez & Carulla, 1998; Mariotti, 2006).

6.7.Dado un segmento y un punto no colineal construir un segmento congruente al dado cuyo extremo sea el punto dado

Regla y Compás - Grupo A y B

Se dibujan los puntos A, B y C no colineales. Con la regla se traza el segmento AB, con el compás se toma la distancia entre los puntos A y B y se traza la circunferencia con centro en C y radio AB (imagen 131). Posteriormente se toma cualquier punto de la circunferencia llamándolo D y se traza el segmento determinado por los puntos C y D. El segmento CD es congruente al segmento AB (imagen 132).

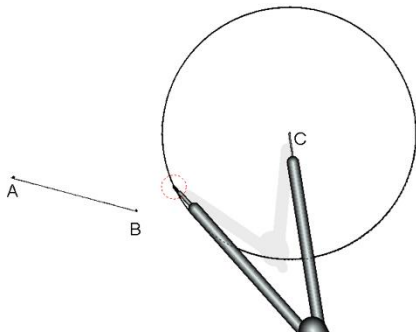


Imagen 131. Construcción de puntos equidistantes con regla y compás tomando como referencia un punto no colineal.

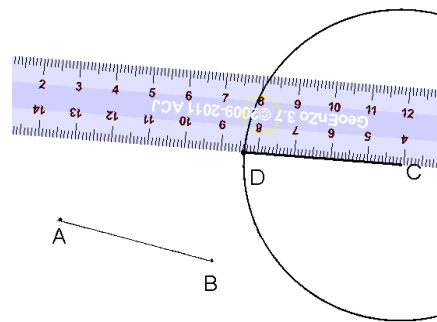


Imagen 132. Construcción de segmentos congruentes por medio de regla y compás.

Esta construcción funciona dado que se involucra la circunferencia como lugar geométrico de puntos que equidistan de uno fijo. Igualmente, esta propuesta se apoya en la propiedad de congruencia de los radios de la circunferencia. Por tanto, ambos segmentos lo son. El rol del compás para esta solución es apenas el de copiar medidas, mientras que el rol de la regla es el de permitir construir segmentos de recta. En este sentido se ven ligadas dos bondades mencionadas por Chassapis (1998), la primera que hace alusión a la definición de circunferencia como todos los puntos que equidistan de un centro y la segunda indica la inferencia de propiedades o características desde la definición que son necesarias para los objetos, en este caso los segmentos

cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto que pertenecen a la circunferencia son congruentes.

Doblado de papel - Grupo A

Se inicia trazando con lápiz el segmento AB y el punto C, no colineal con los puntos A y B. Luego se realiza el doblado que pasa por los puntos A y B (imagen 133). Sin desdoblar la hoja, se superpone el punto A con el punto C y se calca el punto B, luego se marca el punto D (imagen 134). Al desdoblar la hoja se muestra el segmento congruente determinado por los puntos C y D, imagen 135.

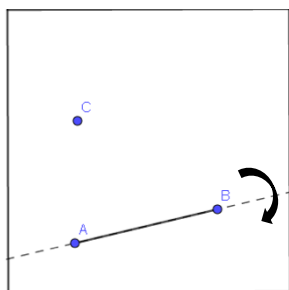


Imagen 133. Doble de determinado por los puntos del segmento.

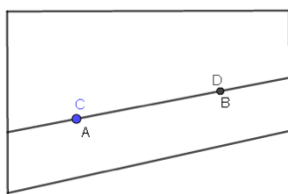


Imagen 134. Superposición de dos puntos.

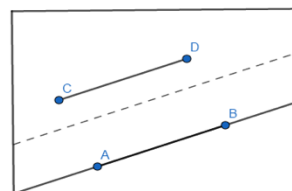


Imagen 135. Segmentos congruentes a través del doblado de papel.

Este tipo de solución evoca la congruencia de segmentos a partir de la igualdad de sus medidas, lo cual se logra al superponerlos. En este sentido, se puede ver que el uso dado al papel corresponde al de copiar segmentos a partir de la superposición, convirtiendo al segmento AB en una unidad de medida que sirve para replicar el segmento original en otro lugar de la hoja. De esta manera también se observan bondades como la visualización, la validez y la psicomotricidad fina mencionadas por autores como Carvalho y Santa (2015) y Blanco y Otero (2005).

Doblado de papel - Grupo B

Se marcan en la hoja los puntos A, B y C no colineales. Se realiza el doblado determinado por los puntos A y B; de la misma manera se determina el doblado por los puntos A y C (imagen 136). Se

realiza un dobléz del papel de tal manera que este sea paralelo al dobléz AB y contenga al punto C, este se nombra m (imagen 137). Así mismo, se determina el dobléz paralelo al dobléz AC que pasa por el punto B, siendo este n. Posteriormente se marca la intersección de los dobleces m y n, siendo este D. Finalmente se marca el segmento CD, el cual es congruente con el segmento AB (imagen 138).

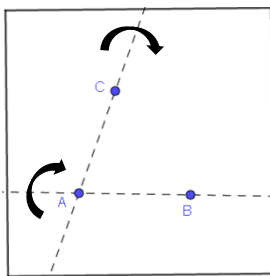


Imagen 136. Dobleces determinados por los tres puntos no colineales.

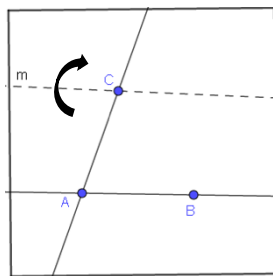


Imagen 137. Doblez aparentemente paralelo al dobléz AB.

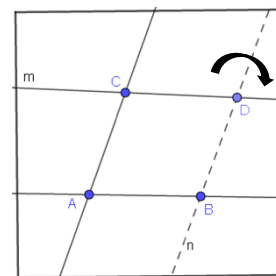


Imagen 138. Doblez aparentemente paralelo al dobléz AC.

La solución de este problema acude a la propiedad del paralelogramo que señala la congruencia de sus lados opuestos. De ahí el interés de construir rectas paralelas a los dos dobleces representados en el papel que permitieran obtener este cuadrilátero. Sin embargo, la construcción de las rectas paralelas no se hace con rigurosidad, esto conlleva a un posible error de precisión y por lo tanto un error en la construcción del segmento congruente. Se observa que el rol del papel es el de construir rectas que aparentemente tengan la misma inclinación, en consecuencia, paralelas. Sin embargo, la falta de motricidad fina y de algoritmos que permitan la construcción de rectas paralelas o perpendiculares de forma adecuada, hacen que la construcción no sea verdadera y por tanto los estudiantes acuden a la visualización; lo cual puede jugar como una deficiencia dado que los estudiantes se fían de propiedades que no son verdaderas.

GeoGebra - Grupo A y B

Con la herramienta *segmento* se construye el segmento AB, haciendo clic en dos lugares distintos de la pantalla para construir los extremos del segmento. Utilizando el comando *punto* se hace clic en otro lugar de la pantalla, lo que lleva a construir el punto C. Luego, con la opción *circunferencia (centro, radio)*, se hace clic en el punto C y en la ventana emergente se ingresa el nombre del segmento AB, lo que permite en últimas construir una circunferencia de centro C y radio AB (imagen 139). Posteriormente, con *punto* se coloca un punto D sobre la circunferencia y con la herramienta *segmento* se hace clic sobre C y D, construyendo el segmento CD (imagen 140).

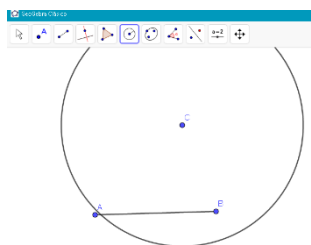


Imagen 139. Construcción de puntos equidistantes a través de la herramienta circunferencia centro, radio.

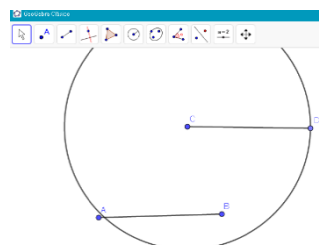


Imagen 140. Construcción del segmento congruente por medio de GeoGebra.

Esta construcción involucra a la circunferencia como lugar geométrico de puntos que equidistan de uno fijo y la propiedad de congruencia de los radios de esta. En esta oportunidad las herramientas empleadas agilizan la construcción del segmento congruente con alta precisión, además el método empleado permite modificar el segmento construido originalmente a través del arrastre y con ello ver que la circunferencia se modifica instantáneamente, lo que aportaría evidencia empírica sobre la validez de la construcción realizada. Este enfoque es idéntico al que se podría involucrar si se trabajara con regla y compás, lo que deja ver que los estudiantes no reconocen otras herramientas más rápidas en el programa que proporcionarían el mismo resultado.

6.8. Dado el segmento AB encuentre un punto M en el segmento tal que $3AM=AB$

Regla y Compás - Grupo A

Inicialmente se traza el segmento AB con la regla. Luego se traza un rayo AC, tal que C no pertenece a la recta AB; con ayuda del compás se traza una circunferencia con centro en C y radio AC y se marca el punto P, el cual es el otro punto de intersección entre la circunferencia con centro en C y el rayo AC; de la misma manera se traza la circunferencia con centro en P y radio AC, siendo Q el otro punto de intersección entre la circunferencia y el rayo AC (imagen 141). Se traza con ayuda de la regla el segmento QB y posteriormente los segmentos paralelos a este por los puntos P y C, siendo estos r y s respectivamente (imagen 142). Debe notarse que los segmentos paralelos se construyeron apoyados en la condición visual mas no de manera precisa. Se marcan los puntos M y N los cuales son la intersección de los segmentos paralelos r y s con el segmento AB respectivamente. Finalmente, se concluye que $AB=3AM$.

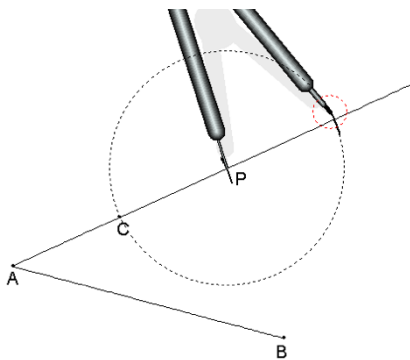


Imagen 141. Construcción de puntos equidistantes colineales.

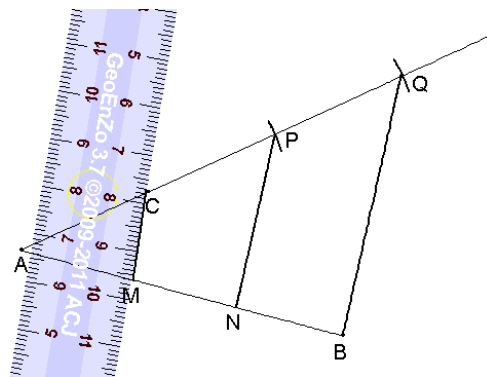


Imagen 142. Construcción de rectas aparentemente paralelas por medio de la regla.

La anterior forma de solución permite ver que al momento de construir con el compás tres segmentos congruentes y luego realizar las rectas paralelas se determinan tres triángulos semejantes, en particular el triángulo AQB es semejante al triángulo ACM. Dado que la distancia entre los puntos A y Q es tres veces la que hay entre A y C, entonces la distancia entre A y B es

tres veces la distancia que hay entre los puntos A y M. Sin embargo, dichos triángulos podrían no ser semejantes puesto que la manera de construir las rectas paralelas no fue la adecuada. En esta oportunidad la regla, además de permitir el trazo de líneas rectas, apoya la construcción de rectas paralelas a partir de una dada, aunque esta construcción se apoya en la percepción visual. El compás en esta oportunidad favorece la construcción de segmentos congruentes colineales. De esta manera se ven desarrolladas diferentes bondades descritas por Chassapis (1998) y Peñuela (2015), puesto que se usa la definición de circunferencia como todos los puntos que equidistan de un centro y a su vez este tipo de construcción favorece la asimilación de diferentes conceptos geométricos ayudando al análisis e interpretación de diferentes representaciones geométricas.

Regla y Compás - Grupo B

Se traza el segmento AB con ayuda de la regla, se toma el compás y con él un valor aproximadamente de un tercio del segmento y este se va ajustando hasta que, al hacer dos cortes en el segmento, las distancias entre los puntos sea la misma (imagen 143). Luego se marcan los puntos M y P, los cuales dividen al segmento en 3 partes iguales, como se puede observar en la imagen 144.

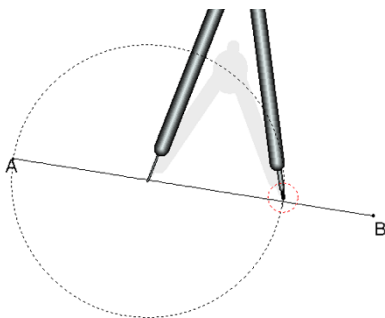


Imagen 143. Construcción de arcos de circunferencia aparentemente equidistantes.

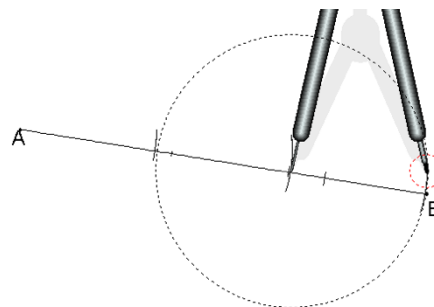


Imagen 144. Trisección del segmento por medio de la exploración y la equidistancia.

Esta forma de solución no es apropiada para abordar el problema puesto que está basada en una estrategia de ensayo y error, por ello es probable que tenga lugar algún margen de error. Sin

embargo, en tanto este error no se dé, la estrategia de solución planteada lleva a la obtención de los dos puntos buscados. El compás es utilizado para la construcción segmentos congruentes evocando con ello el concepto de circunferencia como todos los puntos que equidistan de un centro (Chassapis, 1998); sin embargo, este tipo de construcción manifiesta una deficiencia, puesto que la falta de motricidad fina puede llevar a la inexactitud en la construcción del punto buscado (Sarasua, 2013; Rosales y Guzmán, 2016).

Doblado de papel - Grupo A

Se traza el segmento AB, luego se doblan los bordes de la hoja de tal manera que cada doblez resultante contenga a uno de los extremos del segmento, tal como se muestra en la imagen 145. Posteriormente se realizan dos dobleces sobre el papel de tal manera que uno se superponga con el doblez que contiene al punto A y el otro se superponga al doblez que contiene al punto B, tal como se muestra en la imagen 146. Finalmente se desdobra y se marcan los puntos de intersección entre los últimos dos dobleces construidos y el segmento AB, los cuales se nombran M y C (imagen 147).

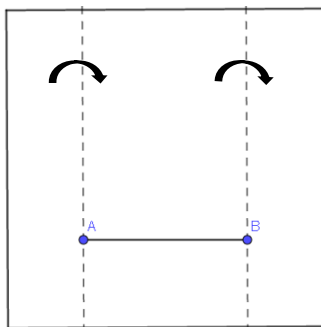


Imagen 145. Dobleces verticales paralelos a los lados de la hoja.

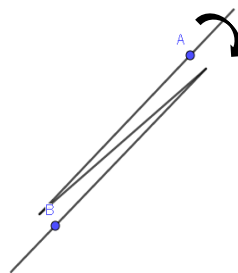


Imagen 146, parte superior de la hoja.

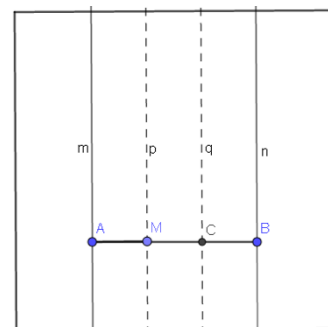


Imagen 147. Construcción de puntos equidistantes a través del doblado de papel.

El segmento AB no satisface paralelismo con ninguno de los lados de la hoja, sin embargo, al realizar los dobleces que contienen al punto A y al punto B, estos son paralelos entre sí, en tanto

son perpendiculares al borde inferior de la hoja. Cuando se construyen los dos primeros dobleces se busca delimitar el espacio de la hoja, haciendo exclusivo el espacio del segmento a trisecar. Luego se busca realizar dos dobleces paralelos entre sí y al mismo tiempo paralelos los dobleces principales lo que lleva a que se determinen cuatro dobleces paralelos. En el borde inferior de la hoja los cuatro dobleces determinan tres segmentos congruentes entre sí, asunto que lleva a justificar desde la proyección paralela que los tres segmentos determinados también deben ser congruentes entre sí.

En esta oportunidad el papel se usa de dos maneras distintas. La primera deja ver un uso de las propiedades físicas del papel, a través de la cual se construyen los primeros dos dobleces que resultan ser paralelos, de este modo los estudiantes acuden a propiedades geométricas de manera intuitiva, bondad mencionada por Gonzales y Larios (2001, citado por Sarasua, 2013). La segunda forma se ve a través de la manipulación que permite construir los siguientes dos dobleces. Finalmente, vale la pena mencionar que el proceso presentado demanda una motricidad o manipulación del papel muy precisa, lo cual propicia en el estudiante un desarrollo de la psicomotricidad fina (Blanco y Otero, 2005)

Doblado de papel – Grupo B

Se toma un lado vertical de la hoja y se dobla hacia el interior de tal manera que los lados horizontales se superpongan a sí mismos (imagen 148). Luego con el otro lado vertical de la hoja se lleva hacia el doblez realizado anteriormente (como si fuese un folleto), como se muestra en la imagen 149. Finalmente se verifica si los tres segmentos son iguales (imagen 150).

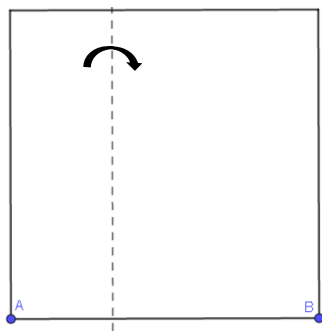


Imagen 148. Doble paralelo al lado de la hoja.

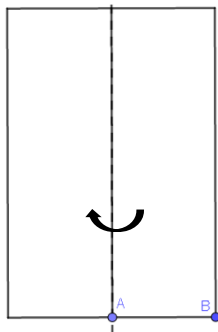


Imagen 149. Doble en el que se superpone el lado de la hoja al doblez anterior.

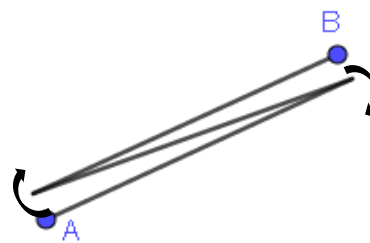


Imagen 150, parte superior de la hoja en la que se experimenta que los tres segmentos sean congruentes.

La manera en la que se da solución a este problema es correcta, sin embargo, no se toma un segmento cualquiera, dado que el segmento tomado es el largo de la hoja, y sus extremos pertenecen a dos rectas perpendiculares al mismo. Por ello se construyen dos dobleces perpendiculares al segmento dado y paralelos a los lados verticales de la hoja, formando tres paralelogramos congruentes debido a la superposición de los lados horizontales a sí mismos. Dado que el papel y la forma de la hoja permiten la comprobación de igualdad de medidas entre las áreas y la herencia de propiedades como la perpendicularidad y el paralelismo, se puede comprobar que los segmentos contruidos a través de las perpendiculares son congruentes y por tanto la trisección del lado horizontal de la hoja. En este sentido se promueve el desarrollo de la percepción espacial del estudiante y la verificación de propiedades de congruencia, aspectos resaltados por autores como Blanco y Otero (2005) y Carvalho y Santa (2015). Finalmente, esta construcción no hubiera sido posible si la forma del papel hubiera sido diferente a un paralelogramo.

GeoGebra - Grupo A

Se inicia construyendo el segmento AB con el comando *segmento*, haciendo clic sobre la pantalla dos veces en diferentes partes para construir dicho segmento. Luego gracias al comando *punto* se construye un punto C haciendo clic en cualquier lugar de la pantalla. Utilizando *segmento* y

utilizando los puntos A y C se crea el segmento AC. Posteriormente con la herramienta *circunferencia centro punto* se hace clic primero sobre A y luego sobre el segmento AC, creando la circunferencia con centro en A y radio AD, con ayuda del comando *intersección* se corrobora que el punto D sea el único punto de intersección entre la circunferencia con centro en A y el segmento AC. Haciendo uso de *circunferencia centro punto* se realiza la construcción de otras dos circunferencias para obtener tres segmentos congruentes AD, DE y EF (imagen 151). Con la herramienta *segmento* se construye el segmento FB y con *paralela* se construyen las rectas paralelas al segmento FB por los puntos D y E, siendo estas m y n respectivamente. Finalmente, usando la herramienta *intersección* se determinan los puntos de intersección entre las rectas m y n con el segmento AB, obteniendo los puntos G y H (imagen 152).

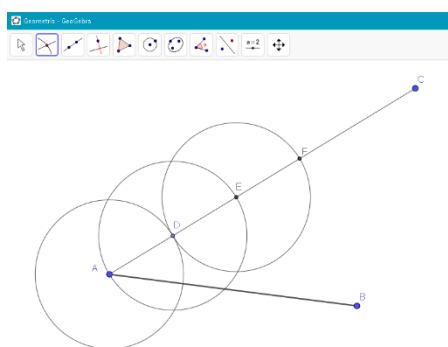


Imagen 151. Construcción de puntos equidistantes colineales gracias a la herramienta *circunferencia centro, punto*.

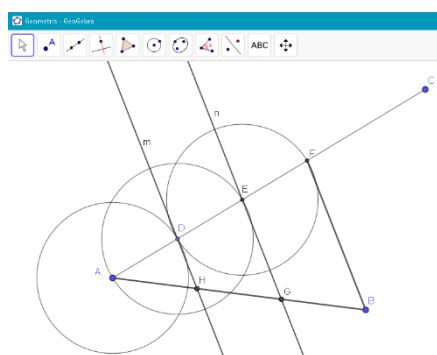


Imagen 152. Construcción de rectas paralelas por medio de la herramienta *paralela*.

La anterior estrategia de solución involucra la definición de semejanza de triángulos, pues al construir tres segmentos congruentes y al trazar las paralelas al segmento BF por los extremos de los segmentos congruentes (D y E) se determinan dos triángulos semejantes, EGA y DHA, al triángulo ABF. Se concluye que las rectas m y n trisecan al segmento AB. Esta manera de resolver la tarea deja ver que los estudiantes acuden a operaciones ligadas a otros artefactos, dejando de lado opciones que la geometría dinámica les puede ofrecer o que tal vez no conocen todas las

herramientas que este ambiente brinda. En este sentido, se evidencia que usan el programa de la misma forma que usarían la regla y el compás.

GeoGebra - Grupo B

Con la herramienta *segmento* se construye el segmento AB, haciendo clic sobre la pantalla en diferentes lugares para construir los extremos del segmento. Gracias al comando *segmento de longitud dada* se construye el segmento AC, ingresando la expresión $AB/3$ en la casilla de entrada que da el programa en la pantalla (imagen 153). Posteriormente con *limitar/liberar punto* se selecciona el segmento AB y el punto C, obteniendo a C en el segmento AB, como se observa en la imagen 154.

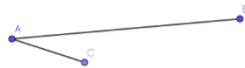


Imagen 153. Segundo segmento determinado por la herramienta *segmento dada* su amplitud, cuya medida es la tercera parte del segmento dado.

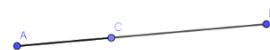


Imagen 154. Extremo del segmento contenido en el segmento dado gracias a la herramienta *limitar/liberar*.

Este tipo de solución es correcta puesto que al construir el segmento con la herramienta *segmento de longitud dada* se crea un segmento con una longitud fija. Sin embargo, la expresión ingresada permite conservar la relación “medir la tercera parte” a través del arrastre. Además, con la herramienta *limitar/liberar punto* se hace que el punto C pertenezca al segmento. El artefacto involucrado permite construir el punto deseado de manera precisa, conservando la propiedad deseada, sin embargo, la argumentación y los conceptos quedan limitados a la visualización (Gómez & Carulla, 1998; Mariotti, 2006). Por otra parte, la función de arrastre permite corroborar el cumplimiento de esta propiedad al manipular los extremos del segmento.

7. Discusión

En el anterior capítulo presentamos de manera descriptiva el proceso de solución llevado a cabo por los estudiantes al afrontar cada tarea. En esa descripción se mencionaban aspectos como los objetos geométricos involucrados y el papel que se daba a la tecnología que involucraron para dar respuesta a la tarea. En este capítulo, con el fin de reconocer las bondades y limitantes de cada tecnología involucrada, comparamos las producciones de los estudiantes con cada tecnología atendiendo a los objetos geométricos movilizados y el rol dado al recurso mismo. Pretendemos que las producciones de los estudiantes, de acuerdo con el recurso involucrado, se agrupen y permitan así reconocer las bondades y limitaciones buscadas.

Presentamos en este capítulo un análisis en el que se presentará para cada una de las tareas implementadas la comparación entre los conceptos trabajados y el uso de cada tecnología. Lo cual incluirá: el nombre general del concepto trabajado en la tarea, el enunciado general de la tarea, un cuadro en el cual se enmarcan las definiciones y propiedades usadas por los estudiantes a la hora de resolver el problema y el uso de la tecnología y finalmente un párrafo en el que se realiza una comparación más descriptiva.

7.1. Construir un ángulo de 30° dado uno de sus lados

Tabla 10. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea 1.

	Objetos geométricos	Rol del recurso
Regla y compás	Triángulo equilátero inscrito en una circunferencia, medida de los ángulos del triángulo equilátero y definición de bisectriz.	Obtener de puntos que equidistan de otros con la ayuda de circunferencias.
	Trisección de segmentos.	Copiar medidas.
Doblado de papel	Definición de bisectriz	Superponer rectas.
	Ángulos determinados por las diagonales del rectángulo.	Comprobación de congruencia entre ángulos por medio de la superposición.
GeoGebra	No se reconoce.	Crear ángulos de una medida fija.

Resolver esta tarea con ayuda de GeoGebra es algo casi inmediato, puesto que solo se necesita del comando *ángulo dada su amplitud* para construir el ángulo, por ello no se reconoce en la estrategia involucrada objeto geométrico alguno. A pesar de que esta herramienta aporta la precisión en la medida del ángulo construido, se puede evidenciar que sus aportes en la movilización de objetos geométricos no tienen comparación con el logrado con ayuda de la regla y el compás, pues este recurso no tecnológico pone en juego asuntos como la definición de triángulo equilátero, la propiedad de la medida de sus ángulos y la construcción auxiliar de la bisectriz de uno de estos ángulos. Por lo anterior esta tecnología promueve el tratamiento de un objeto geométrico desde un punto de vista alterno, en el que se involucran propiedades no accesibles a simple vista y se cuenta con un grado de confianza sobre el resultado obtenido, en este caso el ángulo cuya medida es 30.

La otra construcción realizada con este recurso exhibe aproximaciones no rigurosas y la presencia de objetos geométricos cuya finalidad no es clara, ejemplo de ello es la construcción de un arco y la construcción de rectas paralelas solamente usando la regla. De la misma manera se intenta establecer propiedades no verdaderas para dar solución a la tarea, considere por ejemplo la intención de trisecar el ángulo de 90 a partir de la trisección de un segmento opuesto a dicho ángulo.

Por otra parte, con el doblado de papel los estudiantes se valen de algunos dobleces para trisecar el ángulo de 90, específicamente acuden a dobleces que representan la bisectriz de un ángulo. Sin embargo, esta aproximación no es correcta. De la misma manera, se intenta construir un ángulo de 30 usando las diagonales de un rectángulo y los ángulos determinados por estas, aunque esto no arrojará el resultado deseado en todo momento.

7.2. Construir un triángulo equilátero dado uno de sus lados

Tabla 11. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea triángulo equilátero.

	Objetos geométricos	Rol del recurso
Regla y compás	Lados congruentes, equidistancia, circunferencias.	Construir puntos que equidistan de unos dados.
Doblado de papel	Segmentos congruentes, simetría axial y mediatriz.	El papel se usa como un compás con el ánimo de copiar distancias y encontrar ejes de simetría a través de dobleces.
GeoGebra	Definición de triángulo equilátero, congruencia de segmentos y circunferencia.	Construir puntos que equidistan de unos dados.

Al resolver esta tarea con GeoGebra se utiliza la herramienta *circunferencia (centro, punto)* y con ella la definición de triángulo equilátero, la cual menciona la congruencia de sus lados. Por ello la construcción que se realiza con esta tecnología permite garantizar que los puntos que se obtienen de las intersecciones de dos circunferencias (cuyos radios son segmentos congruentes) equidistan entre sí y por tanto los segmentos determinados por estos puntos son congruentes. No obstante, los estudiantes pudieron usar herramientas más inmediatas como el comando *polígono regular*, sin embargo, prefirieron hacer uso de la herramienta circunferencia, lo cual los llevaría a asegurar muy fácilmente los tres lados del triángulo congruentes. Cabe mencionar que la construcción realizada con este medio es idéntica a la que se realiza con regla y compás, en consecuencia, moviliza los mismos aspectos.

Por otra parte, cuando la tarea se resuelve con ayuda del doblado de papel, los estudiantes involucran dos procedimientos de distinta naturaleza. En primer lugar, para construir la mediatriz de uno de los lados del triángulo se hace uso, gracias a las propiedades físicas del medio, de la simetría axial, lo que permite obtener el eje de simetría al superponer uno de los extremos del segmento con el otro. La recta determinada por esta operación muestra el lugar geométrico al cual pertenece el tercer vértice del triángulo. En un segundo momento, con el ánimo de encontrar el lugar exacto de la mediatriz en el cual está el tercer vértice, los estudiantes improvisan una estrategia que se apoya en la manipulación del papel. Esta consiste en realizar un doblez a través

del cual se hace rotar el lado inicial del triángulo alrededor de uno de sus extremos de tal manera que el otro extremo quede sobre la mediatriz. Esta acción deja ver que se busca recrear un compás en el medio que se está utilizando. La validez de esta construcción se da gracias a la conservación de las distancias por la mediatriz y por la rotación del segmento que correspondería a uno de los radios de la circunferencia.

Las soluciones dadas con las tres tecnologías tienen como aspecto común el uso de la definición de triángulo equilátero. Sin embargo, lo que se realiza con doblado de papel deja ver el uso de otros objetos geométricos, lo que lleva a que esta propuesta sea más rica en cuanto a los conceptos involucrados en comparación a las otras.

7.3.Construya el centro de una circunferencia dada

Tabla 12. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea centro de circunferencia.

	Objetos geométricos	Rol del recurso
Regla y compás	Circunferencia inscrita en un cuadrado, rectas tangentes, diagonales de cuadrado.	Construir rectas tangentes a una circunferencia por medio de la regla. El compás no se usa en esta construcción.
	Definición de cuerda de circunferencia, mediatriz, diámetro de circunferencia y propiedades asociadas a estos.	Construir puntos equidistantes para determinar el centro de la circunferencia el cual es la intersección de dos mediatrices de cuerdas de esta.
Doblado de papel	Definición diámetro de circunferencia y propiedades asociadas a estos objetos.	Superponer objetos geométricos de manera que el diámetro de la circunferencia sea visto como eje de simetría.
	Paralelismo y perpendicularidad, definición de rectas tangentes, circunferencia inscrita en un cuadrado y propiedades de sus diagonales.	Superponer rectas para heredar propiedades de paralelismo y perpendicularidad de los bordes de la hoja de papel.
GeoGebra	Definición de cuerda, mediatriz, diámetro y punto medio.	Construir objetos geométricos de forma inmediata.
	Definición de cuerda de circunferencia, mediatriz, diámetro de circunferencia y propiedades asociadas.	Construir objetos geométricos de forma inmediata.

Al solucionar esta tarea con GeoGebra se obtiene como beneficio la agilidad y precisión al usar herramientas como *mediatriz*, *punto* e *intersección* puesto que estas no tienen margen de error. Sin

embargo, se desprecian herramientas inmediatas que tiene el programa para la solución de esta. Las dos construcciones realizadas con GeoGebra permiten observar que en ambas se hace uso de definiciones como cuerda, mediatriz y diámetro, dado que son similares las construcciones. Por esa razón, en ambas se construyen cuerdas de la circunferencia y las mediatrices de estas (construidas una con el comando y otra por medio del algoritmo de regla y compás) obteniendo así uno o dos diámetros de la circunferencia dependiendo el caso. No obstante, en ellas difiere la obtención del centro de la circunferencia, ya que en una de las construcciones realizadas se usa la definición de diámetro, la cual hace alusión a que su punto medio es el centro de la circunferencia y en la otra una propiedad del diámetro que señala que la intersección de dos diámetros de la circunferencia es el centro de esta.

La construcción con regla y compás funciona dado que se puede demostrar que la intersección de las mediatrices de dos cuerdas de la circunferencia es el centro de ella. Sin embargo, la otra solución propuesta con ayuda de la regla y el compás no es correcta dado que la idea principal era circunscribir un cuadrado en la circunferencia dada y al hallar la intersección de las diagonales del cuadrado, se encontraría el centro de la circunferencia. Pero al tener que construir las rectas que contienen los lados del cuadrado circunscrito, el procedimiento empleado no es riguroso y por lo tanto estas podrían ser o no tangentes a la circunferencia, del mismo modo podrían ser o no ser perpendiculares y por tanto no es posible justificar que la construcción sea verdadera. Esta forma de construcción también se lleva a cabo con doblado de papel, en la cual es posible demostrar que las rectas que contienen los lados del cuadrado son perpendiculares, pero similarmente a la construcción con regla y compás, no se puede asegurar que dichas rectas sean realmente tangentes a la circunferencia. Por tanto, esta construcción recurre a propiedades gráficas y a la motricidad fina del estudiante.

Por otro lado, la otra solución propuesta con doblado de papel requiere de motricidad fina, de la definición de diámetro de circunferencia y de la propiedad de que la intersección de dos diámetros de la circunferencia es el centro de la circunferencia. La manera de construir los diámetros es diferente en esta oportunidad. Los diámetros se construyen haciendo coincidir la circunferencia con ella misma, doblándola por la mitad.

7.4.Construir un ángulo congruente al dado de tal forma que compartan un lado

Tabla 13. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea ángulo congruente.

	Objetos geométricos	Rol del recurso
Regla y compás	Definición de ángulos alternos internos, propiedades de ángulos opuestos por el vértice.	Construir rectas paralelas solamente usando la regla
	Definición de equidistancia, congruencia de radios de circunferencia y congruencia de triángulos.	Copiar medidas por medio del compás y construir segmentos de recta por medio de la regla.
Doblado de papel	Definición de ángulos congruentes.	Construir objetos geométricos a partir de la superposición de rectas. Simetría axial.
GeoGebra	Definición de ángulos congruentes.	Construir ángulos congruentes por medio de la herramienta <i>ángulo dada su amplitud</i> .

Resolver esta tarea con GeoGebra se hace sencillo, puesto que se necesita de una sola herramienta, *ángulo dada su amplitud*, para lograr construir un ángulo congruente a otro, bajo la definición de ángulos congruentes. Sin embargo, esta herramienta se puede utilizar de dos maneras, dado que es posible ingresar un valor dado o la variable que corresponde a la medida del ángulo dado. De esta manera al ingresar un valor y comprobar con la herramienta arrastre, moviendo uno de los rayos del ángulo dado, el ángulo construido no es congruente al otro; mientras que al ingresar la variable con la que está definido el ángulo y comprobar el ángulo construido es congruente al otro. Por este motivo se infiere que no basta con conocer las herramientas que ofrece el programa, sino que también se debe conocer el uso de cada una de ellas.

Al proponer esta tarea con otra tecnología como regla y compás se manifiesta la construcción de una recta paralela a uno de los lados del ángulo, mientras que el otro lado queda como recta secante, esto con el fin de determinar dos ángulos alternos internos y opuestos, los cuales son congruentes al ángulo dado. Aunque se cumple la congruencia de los ángulos, no se da una de las características que se dan en la tarea, puesto que, no comparten un lado. Esto nos lleva a concluir que la construcción no es la apropiada para darle solución a la tarea. Por otra parte, se realizó otra construcción en la cual se usa la definición de equidistancia, y la de radios congruentes, en la cual el compás tiene la mayor participación, dado que, es usado para copiar distancias. Esta construcción evoca un algoritmo ya definido para copiar la medida de los ángulos y por tanto es funcional.

La forma en la que se resuelve esta tarea con doblado de papel pone en evidencia la definición de ángulo congruente, dado que se realiza el primer doblado, el cual funciona como un eje de simetría para determinar el lado del otro ángulo, construyéndolo así de la misma medida y por tanto congruente al dado. Por este motivo se puede inferir que las construcciones con las tres tecnologías son similares en cuanto a las definiciones usadas pero diferentes en la manera de construir cada una, es decir que cada una de ellas favorece algo que la otra no.

7.5.Dados tres puntos no colineales, construir un paralelogramo de tal modo que los tres puntos sean vértices de este.

Tabla 14. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea paralelogramo.

	Objetos geométricos	Rol del recurso
Regla y compás	Los lados opuestos del paralelogramo son congruentes.	Uso del compás ligado a la conservación de distancias.
Doblado de papel	Los lados opuestos del paralelogramo son paralelos	Construir rectas con la misma inclinación, para obtener rectas paralelas.
GeoGebra	Los lados opuestos del paralelogramo son paralelos	Construir rectas paralelas por medio de la herramienta <i>paralelas</i> .

Resolver esta tarea en GeoGebra se convierte en un proceso muy sencillo, debido a que se usa la herramienta recta paralela en dos ocasiones, lo que aporta agilidad y precisión. Si bien es cierto que se puede evidenciar que en esta construcción se promueve el uso de la definición de paralelogramo y por ello el uso de la herramienta paralela, al proponer esta misma tarea con las otras tecnologías, las limitaciones de no contar con esta herramienta inmediata llevan a los estudiantes a movilizar otro tipo de cosas. Por ejemplo, al utilizar doblado de papel los estudiantes, para construir las rectas paralelas, buscaron realizar dobleces que tuvieran la misma inclinación, lo que los llevaría a obtener el paralelismo entre estos dobleces si entendemos esta relación desde un punto de vista de la geometría analítica. Sin embargo, el proceso de construcción de estos dobleces no evocó una construcción que permitiera garantizar que los dobleces eran realmente paralelos. Los estudiantes acudieron a la percepción visual y la manipulación del papel para tratar de obtener lo deseado.

Por otro lado, cuando se propone esta tarea para resolver con regla y compás, nos damos cuenta de que lo ocurrido en las dos tareas anteriores, que era evocar la propiedad del paralelismo del paralelogramo, queda de lado porque ahora los estudiantes acuden a otra propiedad que es la congruencia de los lados opuestos. Aun cuando ellos hubieran podido utilizar procedimientos con regla y compás para la construcción de rectas paralelas, consideraron más fácil construir un paralelogramo a partir de la congruencia de los lados opuestos y en este caso el compás se convierte en una herramienta apropiada puesto que favorece esto de manera sencilla y rápida. Por ello, en esta tarea la regla y el compás favorecen algo que no favorecen las otras dos.

7.6.Construir el punto medio de un segmento

Tabla 15. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea punto medio.

Objetos geométricos	Rol del recurso
---------------------	-----------------

Regla y compás	Definición de mediatriz.	Construir puntos que equidistan de los extremos del segmento. Trazar segmentos de recta por medio de la regla.
Doblado de papel	Definición de rectas perpendiculares y mediatriz.	Construir objetos geométricos a partir de la superposición de puntos.
	Definición de punto medio.	Construir objetos geométricos a través de la superposición de puntos.
GeoGebra	No se reconoce	Construir el punto medio del segmento usando la herramienta <i>punto medio</i>

Al solucionar esta tarea con GeoGebra no se reconoce una definición o concepto arraigado a la construcción, puesto que gracias a la herramienta *punto medio*, al hacer clic sobre el segmento, aparece dicho punto. En consecuencia, esta tecnología no proporciona al estudiante una oportunidad de exhibir conocimientos que le permitan construir este punto. Por otra parte, al proponer esta tarea con otra tecnología se reconoce la definición de mediatriz y punto medio, esta es la situación de regla y compás y doblado de papel. La diferencia al resolver esta tarea entre estas dos tecnologías es la manera en la que se construye la mediatriz, puesto que por medio del compás se realizan dos circunferencias cuyos centros son extremos del segmento y su radio es el segmento que estos determinan. De esta manera, las intersecciones de ambas circunferencias determinan una recta que contiene todos los puntos que equidistan de los puntos extremos del segmento, siendo el punto medio uno de ellos y obteniéndolo como la intersección de la mediatriz con el segmento.

Por otra parte, con doblado de papel se reconoce en las dos construcciones realizadas la importancia de delimitar el espacio para lograr construir el punto medio del segmento. En la primera construcción se hace uso del doblado para construir rectas perpendiculares que pasen por los extremos del segmento, lo cual es una propiedad heredada por el papel; en esta se determina la mediatriz como la recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio construyéndolo por medio de la superposición de los puntos extremos del segmento y doblando la hoja completamente; por lo tanto, se reconoce que no es necesario construir la mediatriz para obtener

el punto medio, puesto que en este caso primero se construye el punto medio y luego la mediatriz. En la segunda construcción se delimita el espacio determinando el doblez que contiene el segmento y se hacen coincidir los puntos extremos del segmento, similar a lo construido en la primera construcción. Sin embargo, en esta no se determina la mediatriz y se usa solamente la definición de punto medio.

En consecuencia, se puede observar que las tres construcciones son distintas entre sí, por tanto, favorecen procesos distintos de construcción y búsqueda de propiedades o características propias del punto medio.

7.7. Dado un segmento y un punto no colineal construir un segmento congruente al dado cuyo extremo sea el punto dado.

Tabla 16. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea segmento congruente.

	Objetos geométricos	Rol del recurso
Regla y compás	Radios de una circunferencia y congruencia entre ellos.	Copiar medidas con el compás y construir segmentos de recta por medio de la regla.
Doblado de papel	Dos segmentos son congruentes si y solo si tienen la misma medida.	Copiar medidas a partir de la superposición de puntos.
	Los lados opuestos del paralelogramo son congruentes.	Construir rectas con la misma inclinación.
GeoGebra	Todos los radios de una circunferencia son congruentes.	Construir el segmento congruente con el comando circunferencia (centro, radio) o la herramienta compás.

Para la solución de esta tarea en GeoGebra se acude a la definición de radio de circunferencia, particularmente la congruencia entre ellos. La forma en que se usa el comando circunferencia guarda mucha similitud a la que se emplearía al utilizar regla y compás. Parece que los estudiantes buscan la posibilidad de recrear lo que harían con regla y compás utilizando esta tecnología digital, debido a que el compás facilita la construcción de circunferencias y con ello la obtención de puntos que equidistan de uno fijo. Aun cuando existen comandos en GeoGebra que hubieran simplificado esta tarea (segmento de longitud dada), lo que llevaría a pensar en un primer momento que no se

utilizan las herramientas que el software provee para obtener resultados inmediatos, se puede ver que la forma de proceder con esta tecnología evoca propiedades como la congruencia de los radios de la circunferencia lo que consideramos como un aspecto positivo.

Por otra parte, la forma como se resuelve el problema con el apoyo de doblado de papel pone en evidencia relaciones geométricas como la equidistancia y objetos geométricos como el paralelogramo. La equidistancia podría estar relacionada con la circunferencia puesto que al superponer el punto extremo del segmento con el no colineal se intenta construir un radio de la misma, sin embargo, se observa que al doblar el papel mediante la superposición solo construyen un punto que cumple la equidistancia y por ello es diferente el uso de las definiciones, aunque una se relacione con la otra. En el caso del paralelogramo, se usa la propiedad de los lados opuestos congruentes, propiedad que no estuvo presente en ninguna de las otras dos tecnologías aun cuando esta podría construirse.

7.8.Dado el segmento AB encuentre un punto M en el segmento tal que $3AM=AB$

Tabla 17. Comparación entre conceptos y el uso de cada tecnología en la solución de la tarea trisección del segmento.

	Objetos geométricos	Rol del recurso
Regla y compás	Definición de segmentos congruentes y semejanza de triángulos.	Construir segmentos congruentes colineales por medio del compás.
	Definición de segmentos congruentes y circunferencia.	Construir segmentos congruentes evocando la definición de circunferencia.
Doblado de papel	Definición de rectas paralelas.	Construir rectas paralelas por medio de las propiedades físicas del papel, y dobleces congruentes por medio de la manipulación del papel.
GeoGebra	Semejanza de triángulos, definición de rectas paralelas	Construir rectas paralelas por medio de la herramienta <i>paralelas</i> y segmentos congruentes por medio de la herramienta <i>circunferencia (centro, punto)</i>
	Trisección de un segmento.	Construir el segmento con la herramienta <i>segmento de longitud dada</i>

Al resolver esta tarea con GeoGebra se encontraron dos construcciones. La primera se resuelve de manera sencilla por medio de la herramienta *segmento de longitud dada* donde se construye un segmento el cual mide un tercio del segmento dado. Luego, para que la construcción cumpla todas las especificaciones de la tarea, con la herramienta *limitar/liberar punto* se selecciona el segmento dado y el extremo del segmento construido para que este pertenezca al segmento dado. Si bien es cierto que se puede evidenciar que en esta construcción se promueve el uso de la definición de trisección de segmento y por ello el uso de la herramienta anteriormente mencionada, también se podría considerar otra construcción alterna haciendo uso de otras herramientas que promueve el programa. La segunda construcción involucra herramientas como *circunferencia (centro, punto)*, *paralela e intersección*, haciendo una construcción auxiliar en la que se realizan tres circunferencias congruentes sobre un rayo y su punto extremo se une por medio de un segmento con el extremo del segmento dado, construyendo así un triángulo. Finalmente, por medio de este segmento se construyen, usando la herramienta de rectas paralelas, dos triángulos semejantes a la inicial y por tanto la trisección del segmento inicial. En este sentido se evidencia que esta construcción es idéntica a la realizada con regla y compás, sin embargo, con este artefacto, los estudiantes no lograron construir las rectas paralelas de manera rigurosa y acudieron a la percepción gráfica. Por tanto, no se puede sustentar la veracidad de dicha construcción.

Una segunda construcción hace uso únicamente del compás, allí se evidencia una estrategia de ensayo y error, la cual es poco usual para dar solución a tareas de este tipo. En esta solución, se tiene como finalidad construir tres segmentos congruentes dentro del segmento dado, por tanto, se acude a la definición de circunferencia y a la propiedad del compás de crear puntos equidistantes para solventar la trisección del segmento.

Ahora bien, cuando se propone esta tarea con doblado de papel, se evidencia la definición de rectas paralelas junto con la construcción de lo que podría denominarse es un folleto. En la otra construcción se construyen rectas paralelas a los lados del papel que pasan por los extremos del segmento, estas son construidas gracias a la forma rectangular de la hoja y con ayuda de los lados de esta, por consiguiente, se superponen segmentos hasta que estos sean congruentes. De esta manera se puede inferir que las construcciones con los tres artefactos son diferentes, en cuanto los estudiantes no buscan replicar un algoritmo con otro artefacto.

8. Conclusiones

Con base en los resultados y análisis realizado, respondiendo a la pregunta que motivó este estudio, podemos mencionar las siguientes conclusiones:

Las bondades de regla y compás manifestadas por diferentes autores se evidenciaron en el análisis de las tareas propuestas en este estudio (ver capítulo de análisis). En el análisis de las tareas se reconocieron diferentes bondades de esta tecnología, la mayoría de estas agrupadas en la fomentación de la definición de circunferencia debido a la estructura física del compás, la cual es mencionada por Chassapis (1998). Además de ello, también se reconoce que los estudiantes a través de esta tecnología logran hacer uso de los conocimientos adquiridos previamente y a su vez inferir características propias de los objetos geométricos posibilitando la asimilación de diferentes conceptos favoreciendo la interpretación y el análisis de diferentes representaciones (Chassapis, 1998; Ayala, 2008; Peñuela, 2015). Por otra parte, las deficiencias de este recurso expuestas por autores como Sarasua (2013), Rosales y Guzmán (2016) también fueron evidenciadas al construir diferentes objetos geométricos en los que al usar el compás este se movía o su medida no era exacta.

Además de todas estas bondades y deficiencias encontradas en la literatura y en el estudio, se reconoció como deficiencia la falta de conocimiento de relaciones y procedimientos para la construcción de algunos objetos geométricos como lo son las rectas paralelas y perpendiculares, la cual se evidenció al momento de resolver la tarea trisección del segmento y realizar una construcción auxiliar la cual está dada por rectas paralelas o al construir el centro de una circunferencia cuya idea estaba basada en construir un cuadrado. Por ello se infiere que los estudiantes no conocen o recuerdan los procedimientos de construcción y por ello recurren a la percepción visual y tienden a construir rectas con inclinaciones similares (en el caso de las rectas

paralelas) o rectas cuyo ángulo determinado sea aparentemente de 90 (rectas perpendiculares), llevando consigo a una argumentación empírica.

En cuanto a las bondades de doblado de papel, se observó en el análisis de tareas bondades desde la perspectiva de diferentes autores, tales como el desarrollo de procesos como la observación, validación, la intuición de diferentes propiedades, la percepción espacial, la psicomotricidad fina y los procesos de argumentación (Carvalho y Santa, 2015; Blanco y Otero, 2005; Avilés, 2016; Gonzales y Larios, 2001). Similarmente, se reconoce que la forma rectangular del papel puede llegar a ser una ventaja, dado que el estudiante percibe la forma en que los dobleces pueden llegar a heredar características como el paralelismo y la perpendicularidad. Sin embargo, al tomar un segmento que no sea paralelo a alguno de los lados de la hoja, la dificultad de realizar dobleces paralelos a este segmento aumenta y por lo tanto los estudiantes recurren a la percepción visual sin tener en cuenta si el doblez realizado cumple o no con las características atribuidas. Además de esta bondad también se reconoce que los estudiantes juegan con propiedades del papel como su translucidez para superponer, copiar y crear ejes de simetría con el fin de demostrar propiedades como la congruencia de segmentos, ángulos y áreas.

Por otra parte, aunque en la literatura consultada no se encontraron autores que mencionaran dificultades adicionales a la motricidad fina; por medio de la implementación de las tareas se pudo deducir que en muchos casos los estudiantes acuden a la visualización usándola como demostración, aun cuando lo construido no sea con rigurosidad, por ello esta bondad mencionada por Carvalho y Santa (2015) también juega como una dificultad de la tecnología. Otras deficiencias que se perciben de esta tecnología es la forma estática de las situaciones y la falta de poder comprobar medidas, puesto que los estudiantes pueden considerar válida una construcción por

medio de la visualización, pero esta no ser cierta como por ejemplo lo sucedido con la tarea del ángulo de 30.

Adicionalmente, en la solución de las tareas propuestas se evidencia el cambio de este artefacto a una herramienta puesto que uno de los lados del papel se usa similarmente a un compás para lograr construir puntos equidistantes, ejemplo de ello es la solución de la tarea de triángulo equilátero con doblado de papel.

En el caso de GeoGebra, la mayoría de las bondades atribuidas por los autores a esta tecnología están ligadas a la herramienta *arrastre*, con la cual es posible generalizar propiedades, comprobar la veracidad de una construcción, entre otras. En el desarrollo de este trabajo esta herramienta no fue foco de interés, puesto que las tareas propuestas estaban ligadas a la construcción de objetos geométricos más no a la comprobación de propiedades o generalización de estos. Por otra parte, las soluciones tuvieron dos enfoques particulares: uno en el que bastaba conocer el comando y usarlo; de esta manera, su solución se daba de forma inmediata y no era necesario hacer uso de definiciones ni propiedades atribuidas al objeto, ejemplo de ello el punto medio de un segmento y ángulo con una medida determinada, deficiencia mencionada por Mariotti (2006) y Gómez y Carulla, (1998) y como complemento otro enfoque en el que los estudiantes buscaban replicar procedimientos particulares de regla y compás, donde se hacía uso de herramientas como *recta*, *segmento* y *circunferencia (centro, punto)* y se observaba que se acudía a las definiciones, propiedades y características del objeto geométrico.

Finalmente, se resalta en las construcciones realizadas con tecnologías no digitales (regla y compás y doblado de papel) una mayor movilización de propiedades, características y estrategias de solución en comparación a las que se movilizaron con tecnologías digitales (GeoGebra). Por otra parte, se evidenció que los estudiantes que conocen métodos de construcción con regla y compás

pretenden replicarlos en GeoGebra usando comandos similares a esta tecnología, lo cual aporta más protagonismo a las estrategias de solución de las tecnologías no digitales. Además de ello, en las sesiones con los estudiantes se logra observar que las construcciones con GeoGebra parecen no interesarles demasiado dado que estas se pueden solucionar de manera inmediata; mientras que con las tecnologías como regla y compás y sobre todo doblado de papel intentan diferentes métodos de construcción y a su vez pretenden comprobar la validez de este, lo cual motiva al estudiante a seguir proponiendo estrategias de solución.

Este trabajo nos lleva a pensar que, si se quiere obtener mayor riqueza en la apropiación de un objeto geométrico y conexión de este con otros más, se requieren tareas cuidadosamente diseñadas que involucren distintas tecnologías, donde el proceso de solución por parte de cada una sea distinto. Como se vio en este estudio, esta consideración llevó a la aparición de distintas estrategias de solución y con ello de diversos nexos entre varios objetos geométricos.

9. Referencias

- Alfaro, E. B. (2008). Instrumentos psicológicos y la teoría de la actividad instrumentada: fundamento teórico para el estudio del papel de los recursos tecnológicos en los procesos educativos. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.
- Álvarez, R. B., & Mayo, I. C. (2009). Las tecnologías de la información y la comunicación en la educación superior. *Revista Iberoamericana de Educación/Revista Ibero-americana de Educação*, (50/7), 10.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International journal of computers for mathematical learning*, 7(3), 245.
- Avilés, P. (2016). Uso de la didáctica del plegado de papel, como herramienta de apoyo en la enseñanza de los contenidos de la geometría para estudiantes del 10° año de educación general básica, de la unidad educativa Best del Cantón Vines. (Tesis de maestría) Pontificia Universidad Católica Del Ecuador, Quito.
- Ayala, N. (2008). Construcciones geométricas con regla y compás: pasos. *Revista argentina de psicopedagogía*, (62), 4.
- Blanco, C., & Otero, T. (2005). Geometría con papel (papiroflexia matemática). Recuperado de <http://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo3tf/1/cblanco.pdf>.
- Buccino, S. (2011). Historia de la Matemática en un ambiente de Geometría Dinámica: un nuevo enfoque en la enseñanza de las Cónicas.
- Buckingham, D. (2011). Educación en medios: alfabetización, aprendizaje y cultura contemporánea. Editorial Paidós. España. Disponible: books.google.co.ve.
- Cabero, J. (2007). Las necesidades de las TIC en el ámbito educativo: oportunidades, riesgos y oportunidades. *Tecnologías y educación educativas*, 21, 45.
- Caceres, I. T. S., & Armella, L. E. M. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: Retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos*, 14(1).
- Calder, N. (2012). Processing mathematics through digital technologies. Springer Science & Business Media.
- Carnoy, M. (2004). Las TIC en la enseñanza: posibilidades y retos. Lección inaugural del curso académico, 2005, 1-19.
- Castells, M. (1997). La era de la información. Tomo1: economía, sociedad y cultura. Madrid, Alianza. Representar la comunidad: la teoría sociológica clásica y la perspectiva de.
- Castro, S., Guzmán, B., & Casado, D. (2007). Las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Laurus*, 13(23), 213-234.

- Chassapis, D. (1998). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 37(3), 275-293.
- Chavarría, J. V. (2005). Software libre, alternativa tecnológica para la educación. *Revista Electrónica" Actualidades Investigativas en Educación"*, 5(2), 1-9.
- Choque Larrauri, R. (2009). Eficacia en el desarrollo de capacidades TIC en estudiantes de educación secundaria de Lima, Perú. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, 2009, (35): 5-20.
- Czwieniczek, F. (2009). Estudio de la Elipse con Plegado de Papel. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (18), 150-155.
- de Villiers, M. (1998). El futuro de la geometría en la escuela secundaria. Trad. de Victor Larios Osorio). Recuperado de: http://www.fing.edu.uy/imerl/didactica_matematica/Documentos_2008/futuro%20de%20la%20geometria%20deVilliers.pdf.
- Díaz, P. (2000). Las construcciones con regla y compás en la enseñanza de la geometría. *Didactica de La Geometria*, 552, 30-35.
- Diković, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6(2), 191-203.
- Drenoyianni, H. (2006). Reconsidering change and ICT: Perspectives of a human and democratic education. *Education and Information Technologies*, 11(3-4), 401-413.
- Duarte, E. S. (2008). Las tecnologías de información y comunicación (TIC) desde una perspectiva social. *Revista Electrónica Educare*, 12, 155-162.
- Fernández, D., & Montoya, E. (2013). Geometría dinámica: de la visualización a la prueba.
- García, M. T. (2011). La geometría dinámica como herramienta didáctica para el dibujo. Recuperado de <http://www.geogebra.es>.
- Gomes, A. S., & Vergnaud, G. (2004). On the learning of geometric concepts using Dynamic Geometry Software. *Novas Tecnologias na Educação*, 2(1), 1-20.
- Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa*, 10(1), 93-111.
- Gómez, P., & Carulla, C. (1998). De lo simbólico a lo gráfico. Efectos de la tecnología en la educación matemática.
- González-López, M. J. (2001). La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica. *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Universidad de Granada, 277-290.
- Graells, P. M. (2000). Las TIC y sus aportaciones a la sociedad. Departamento de pedagogía aplicada, facultad.

- Guevara, C. (2005). Historia de los instrumentos matemáticos. Arte, astronomía y geometría. En Magaña, M. F. (Ed.), *Instrumentos Y Matematicas. Historia, Fundamentos Y Pespectivas Educativas*. (pp. 7-40) México.
- Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. In *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 7-10).
- Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. In *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 7-10).
- Hilliard, A. T. (2015). Global Blended Learning Practices for Teaching and Learning, Leadership and Professional Development. *Journal of International Education Research*, 11(3), 179-188.
- Kortenkamp, U. H. (1999). *Foundations of dynamic geometry* (Doctoral dissertation, ETH Zurich).
- Laborde, C. (2005, December). Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. In *Proceedings of the 10th Asian technology conference in mathematics* (pp. 22-35).
- Lai, K. W. (2011). Digital technology and the culture of teaching and learning in higher education. *Australasian Journal of Educational Technology*, 27(8).
- Lalli, L. T. (2009). Mathematical machines: A laboratory for mathematics. *Nexus Network Journal*, 11(2), 317-324.
- Leung, A., & Lopez-Real, F. (2000). An analysis of students' explorations and constructions using Cabri geometry. *Science, Mathematics and Technical Education in the 20th and 21st Centuries*, 144-154.
- Lingefjärd, T. (2011). Rebirth of Euclidean Geometry? In *Model-Centered Learning* (pp. 205-215). SensePublishers.
- López, M. B. (2003). Caracterización de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en Primaria y Secundaria. *Campo abierto*, (24), 1.
- Lupiáñez, J. L., & Moreno, L. (2001). *Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas*.
- Manzoor, M., & Vimarlund, V. (2018). Digital technologies for social inclusion of individuals with disabilities. *Health and technology*, 8(5), 377-390.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Brill Sense.
- Molfino Vigo, V., & Lezama, J. (2011). Lugares geométricos: su rol en el aprendizaje de la demostración en geometría. *Educación matemática*, 23(1), 37-61.

- Monaghan, J. (2016). Doing Mathematics with Tools: One Task, Four Tools. In *Tools and Mathematics* (pp. 13-22). Springer, Cham.
- Monsalve, O. (2013). El origami y el doblado de papel como herramientas mediadoras para la enseñanza y el aprendizaje matemáticos.
- Moreno, N., Castro, M., & Sua, C. (2019). Tecnologías digitales y no digitales en el proceso de construcción de significado. In *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (Vol. 24). Bogotá.
- Ng, W. (2015). Change and continuity in educational uses of new digital technologies. In *New digital technology in education* (pp. 3-23). Springer, Cham.
- Páez, G. A. (2005) Reseña de “razonamiento griego con regla y compás” de I. Castro. *Universitas Scientiarum*, 10(1es), 85-86.
- Pérez Médina, C. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva Educacional*, 53(2), 129-150.
- Pierce, R., & Stacey, K. (2011). Using dynamic geometry to bring the real world into the classroom. In *Model-centered learning* (pp. 41-55). SensePublishers.
- Re, A. A., & Berti, A. Artefactos, objetos técnicos y objetos estéticos. Por una adecuación de conceptos. *Artefactos, intenciones y agencia técnica*, 15-28.
- Romaní, J. C. C. (2009). El concepto de tecnologías de la información. Benchmarking sobre las definiciones de las TIC en la sociedad del conocimiento. *Zer: Revista de estudios de comunicación*, 14(27).
- Rosales Riady, M. A., & Guzmán Retamal, I. (2016). Resolución de problemas de Construcción Geométrica con Estudiantes de Pedagogía en Educación Básica. *Paradigma*, 37(1), 135-160.
- Rosario, H. (2007). TIC en Ambientes Educativos. *Comunidad y Salud*, 5(2), 1-2.
- Royo, J. I. (2010). Matemáticas y papiroflexia. *Uno*, (53), 11.
- Ruiz López, N. (2012). Análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría dinámica GeoGebra en la formación inicial del profesorado de Primaria.
- Sánchez, C. H. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné Episteme y Didaxis TED*, (32).
- Sánchez-Torres, J. M., González-Zabala, M. P., & Muñoz, M. P. S. (2012). La sociedad de la información: génesis, iniciativas, concepto y su relación con las TIC. *Revista UIS Ingenierías*, 11(1), 113-128.
- Sandoval Cáceres, I. T. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación matemática*, 21(1), 5-27.
- Santa Ramírez, Z. M., & López, C. M. J. (2010). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (31), 338-362.

- Santa Ramírez, Z. M., Jaramillo López, C. M., & Carvalho Borba, M. D. (2015). El doblado de papel como medio para la producción de conocimiento geométrico.
- Sarasua, J. (2013). Representación externa de figuras planas y razonamiento geométrico.
- Sinclair, N., & Yerushalmy, M. (2016). Digital technology in mathematics teaching and learning: A decade focused on theorising and teaching. In *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 235-274). Brill Sense.
- Sua, C. (2017). Saber suficiente no es suficiente: un estudio de los comportamientos metacognitivos al resolver problemas de demostración con el apoyo de la geometría dinámica (Doctoral dissertation, Universidad Pedagógica Nacional).
- Trouche, L. (2014). Instrumentation in mathematics education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 307-313.
- Vargas, A., & Rey, R. (2016). Apropiación de las TIC en el aula de matemáticas colombiana. Un estudio diagnóstico.
- Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education*, 10(1), 77-101.
- Villarreal, M. E. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia*, 3(5), 73-94.
- Vygotsky, L. S. (1978). Internalización de las funciones psicológicas superiores - Intracción entre aprendizaje y desarrollo. *El Desarrollo de Los Procesos Psicológicos Superiores*.
- White, T. (2008). Debugging an artifact, instrumenting a bug: Dialectics of instrumentation and design in technology-rich learning environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(1), 1-26.