Identificación de errores en la realización de las operaciones potenciación y radicación en $\mathbb{Z}$

Sergio Yesid Bejarano Sánchez

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2022

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Dignificar lo público
Potenciar la universidad

Identificación de errores en la realización de las operaciones potenciación y radicación en $\mathbb{Z}$

Sergio Yesid Bejarano Sánchez

Trabajo de grado tipo monografía presentado como requisito parcial para optar al título de:

Licenciado en Matemáticas

Asesora:
Lyda Constanza Mora Mendieta

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bogotá, Colombia
2022

A Dios y mi familia (especialmente a Marigna, Mauro, Andres y Lucila), quienes me han acobijado y me han apoyado incondicionalmente toda mi vida.

"…a los que aman a Dios, todas las cosas les ayudan a bien…"

Ro. 8:28 (Reina Valera 1960)

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios y a mi familia, han sido el motor principal que me ha movido a la realización de este trabajo con aras de obtener el tan anhelado título profesional. Agradezco a la familia Mahecha Vargas (Sandra, Otoniel, Jeison, Daniel y Santiago), han sido mi segundo hogar, en donde he encontrado el apoyo necesario para continuar en esta carrera profesional.

Agradezco a la profesora Lyda Constanza Mora Mendieta, mi maestra y la asesora de este trabajo de grado; con su paciencia, comprensión y voto de confianza logró llenarme de valor para afrontar la realización de este trabajo.

Gracias al colegio Liceo Antonio de Toledo por abrir sus puertas para poder recolectar la información que es objeto de estudio en este trabajo; en específico, agradezco a la Rectora Flor María Carrero, al Vicerrector Felipe Gutiérrez, a la coordinadora académica Paola Rojas y a los profesores, profesoras y estudiantes que participaron de la actividad investigativa.

Agradezco a los compañeros y las compañeras con quienes he compartido en esta etapa universitaria, toda experiencia vivida a su lado ha contribuido a mi formación docente; en especial, agradezco a Sandra Liliana Benavides Barrera, su amistad y apoyo han sido un aliciente en muchos momentos de mi andar por esta carrera universitaria. Finalmente, doy gracias a Danna Isabella Huertas Sandoval, quien, con su cariño y apoyo desde el Trabajo Social, logró motivarme para culminar este trabajo de grado de la mejor manera.

Tabla de Contenido

Introducción ... **9**

Objetivos ... **11**

Objetivo general ... 11

Objetivos específicos ... 11

Antecedentes ... **12**

Justificación ... **17**

Potenciación y radicación con Números Enteros ... **20**

Acercamiento histórico y conceptual a los Números Enteros ... 20

Potenciación en $\mathbb{Z}$ ... 26

Radicación en $\mathbb{Z}$ ... 31

Marco de referencia desde la Didáctica de la Matemática ... **35**

Los errores, los obstáculos y las dificultades ... 35

Tipos de errores ... 38

La potenciación y la radicación en los referentes normativos nacionales ... 45

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas ... 45

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas ... 47

En los Derechos Básicos de Aprendizaje ... 50

Metodología y análisis ... **55**

Fases del trabajo ... 55

Fase 1. Construcción de los fundamentos del trabajo ... 55

Fase 2. Elaboración del instrumento de recolección de información ... 56

Fase 4. Análisis de resultados ... 68

Análisis de la información ... 70

Caracterización de la población ... 71

Presentación de hallazgos ... 71

Conclusiones ... **90**

Conclusiones del análisis: ... 90

Sobre la información recolectada ... 91

Sobre el trabajo en general ... 92

Recomendaciones ... 94

Referencias Bibliográficas ... 95

Anexos ... 99

Anexo 1. Carta de solicitud al colegio para la aplicación del test ... 99

Anexo 2. Consentimiento informado para la recolección de datos ... 102

Anexo 3. Tabla con los errores identificados en la realización de las operaciones potenciación y radicación ... 104

Lista de figuras

Pág.

Figura 1: Disposición de los números enteros a lo largo de una recta real........................... 26

Figura 2: Test para la recolección de información..59

Figura 3: Estudiante presentando el test 67

Figura 4: Errores 1 en el escenario 1 72

Figura 5: Errores 2 en el escenario 1 74

Figura 6: Errores 1 en el escenario 2 77

Figura 7: Errores 2 en el escenario 2 78

Figura 8: Errores 3 en el escenario 2 79

Figura 9: Errores 4 en el escenario 2 81

Figura 10: Errores 5 en el escenario 2 82

Figura 11: Errores 6 en el escenario 2 83

Figura 12: Errores 7 en el escenario 2 84

Figura 13: Errores 8 en el escenario 2 85

Figura 14: Errores 1 en el escenario 3 87

Figura 15: Errores 2 en el escenario 3 89

Figura 16: Varios errores 90

Lista de tablas

Pág.

Tabla 1: Axiomática de Padoa …………………………………………………………………………………….24
Tabla 2: Potenciación como notación exponencial……………………………………………………………27
Tabla 3: Casos de la potenciación en ℤ ………………………………………………………………………28
Tabla 4: Leyes de la potenciación ……………………………………………………………………………….30
Tabla 5: Definición de la radicación ……………………………………………………………………………31
Tabla 6: Casos de la radicación en ℤ ………………………………………………………………………….32
Tabla 7: Propiedades de la radicación……………………………………………………………………………34
Tabla 8: Tipificaciones de errores expuestas por Franchi y Hernández (2004) …………………39
Tabla 9: Categorías de errores determinadas por Franchi y Hernández (2004)..………………41
Tabla 10: Categorías de errores determinadas por Martínez (2010) ………………………………..42
Tabla 11: Ítems sobre el aprendizaje de operaciones según los lineamientos……………………..46
Tabla 12: EBCM grados cuarto y quinto ……………………………………………………………………..48
Tabla 13: EBCM grados sexto y séptimo…………………………………………………………………….48
Tabla 14: EBCM grados octavo y noveno………………………………………………………………………49
Tabla 15: DBA grado quinto…………………………………………………………………………………………50
Tabla 16: DBA grado sexto……………………………………………………………………………………………52
Tabla 17: DBA grado séptimo…………………………………………………………………………………………53
Tabla 18: Elementos para la construcción del test.………………………………………………………57
Tabla 19: Relación entre unidades de análisis…………………………………………………………………76

Introducción

El presente trabajo pretende mostrar la manera en que se identificaron un conjunto de errores cometidos por estudiantes de séptimo y octavo grado con relación a la realización de las operaciones potenciación y radicación en $\mathbb{Z}$. Posterior a la identificación de los errores, se procedió a clasificar y analizar cada uno de estos según unas categorías de análisis establecidas.

En primer lugar, el trabajo muestra en el apartado Antecedentes los estudios que se han realizado con relación a la identificación de errores en matemáticas, no sin antes mencionar el trabajo que algunos filósofos y pensadores antiguos realizaron en relación a los errores. En este apartado se menciona en especial el trabajo de grado de Danny Martínez, egresado de la Licenciatura en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, en el cual se trató la identificación de errores en la aplicación de las propiedades de la potenciación. Dicho trabajo sirvió como uno de los referentes principales para la realización del presente trabajo. Luego, se presentan las justificaciones por las cuales nace la motivación por abordar el estudio de los errores, y en específico, los errores que puedan surgir de la realización de las operaciones potenciación y radicación en $\mathbb{Z}$. Luego de esto, se presentan los objetivos del trabajo de grado y se da paso a las secciones que componen el cuerpo del trabajo.

Luego de los apartados preliminares, en el trabajo aparece una sección que versa sobre la potenciación y la radicación con números enteros. Para esta sección se muestra un acercamiento histórico y conceptual a dichos números, en el cual se expone brevemente la manera en que los números enteros negativos y el cero han aparecido a lo largo de la historia hasta poder ser reconocidos formalmente como números, y luego mostrar un acercamiento conceptual de lo que se entiende por el conjunto de los números enteros. Además de esto, se presenta la potenciación y la radicación en $\mathbb{Z}$, mostrando la manera en que se pueden definir y las propiedades que las acompañan.

En la siguiente sección, se establece un marco de referencia desde la Didáctica de la Matemática, en el cual se abordan algunos conceptos que se tienen sobre error, obstáculo y dificultad; luego se exponen varias de las tipificaciones que diversos autores han establecido para los errores que los estudiantes pueden cometer en su práctica matemática; finalmente, en la sección se muestran los apartados principales tomados de los documentos curriculares colombianos en los que hay presencia explicita e implícita de la potenciación y la radicación en $\mathbb{Z}$.

En seguida del marco de referencia, se presenta la sección de metodología y análisis, en la cual se describen las fases que atravesó el trabajo de grado, comenzando desde la construcción de los fundamentos del trabajo, hasta el análisis de los resultados obtenidos del instrumento de indagación. Después, aparece el análisis hecho sobre los errores identificados en las respuestas dadas por estudiantes de séptimo y octavo grado al test que sirvió como instrumento de indagación y recolección de información. El análisis se muestra bajo tres escenarios en los que se dividen los numerales que componen el test y sobre los cuales se precisan las categorías de error en las que se clasifican los errores identificados en cada numeral.

Finalmente, se dan a conocer las conclusiones sobre la información recolectada, las conclusiones sobre el trabajo en general y las recomendaciones que nacen como producto del desarrollo del trabajo de grado.

Objetivos

Para el presente trabajo se han establecido un objetivo general y unos objetivos específicos, los cuales son:

Objetivo general

Identificar y caracterizar los errores cometidos por estudiantes de básica secundaria al realizar las operaciones de potenciación y radicación en $\mathbb{Z}$, por medio de instrumentos para la recolección de información y el posterior análisis de datos, para contribuir con el crecimiento personal y profesional, como futuro profesor de matemáticas, y aportar un insumo para la comunidad de educadores matemáticos.

Objetivos específicos

- Detectar posibles errores que cometen estudiantes de básica secundaria al realizar las operaciones potenciación y radicación en $\mathbb{Z}$.
- Caracterizar los errores obtenidos, contrastando la información con algunos referentes teóricos.
- Generar un crecimiento personal y académico, especialmente en temas de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, teniendo en cuenta el trasfondo de los conceptos matemáticos tratados y la importancia de la actividad investigativa.

Antecedentes

Considerar el error como un objeto de estudio es una idea que se gestó en varios de los trabajos de pensadores y filósofos antiguos, ya que se reconoció el error como un elemento inherente en la búsqueda establecida por el ser humano al tratar de determinar la verdad absoluta. Algunos ejemplos, aunque relacionados en específico con la filosofía de las ciencias, son mencionados por Rico (1997), quien destaca las concepciones desarrolladas por Popper, Bachelard y Lakatos, en el marco de la aproximación epistemológica sobre el error.

Para Popper era de suma importancia determinar la fuente última del conocimiento y es por esto que analizó tanto la respuesta que ofrece el empirismo como la que ofrece el racionalismo; pero luego de un arduo trabajo concluyó que era sumamente complejo determinar la verdad absoluta, y más aún sostener esa verdad, por lo que fijó la mirada en los errores, ya que un mismo error puede aparecer reiteradamente y con más frecuencia, y de este modo se empeñó en contestar a la pregunta ¿Cómo podemos detectar y eliminar el error?, de la cual surgieron nueve tesis que ostentan la idea de que es imprescindible encontrar el error en el camino hacia la verdad objetiva. En el caso de Bachelard, la idea de error fue abordada a partir de la noción de obstáculo epistemológico, desde la cual se han sentado las bases del estudio y análisis de los errores en el pensamiento científico. De manera relevante, el concepto de obstáculo epistemológico permitió considerar la aparición de entorpecimientos y dificultades en el desarrollo científico, como elementos que alimentan el conocimiento y no como barreras que no permiten avanzar en la construcción del saber. Por otro lado, Lakatos preciso algunas ideas sobre la lógica del descubrimiento y la elaboración de conceptos en matemáticas desde las cuales se ha podido determinar que

> El proceso de construcción de conceptos matemáticos deberá incluir el diagnóstico, detección, corrección y superación de errores mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones. (Rico, 1997, p. 10).

Luego, considerando la relevancia del error en la construcción de las ciencias, desde la Educación Matemática surgió la motivación por estudiar la incidencia del error en el aprendizaje y la enseñanza de este saber, en lo que ha logrado destacarse el trabajo de autores como Brousseau, Socas, Movshovitz, Radatz y Astolfi, quienes, además de establecer sus concepciones sobre el error en el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias, han ofrecido una tipificación de los errores que ha permitido realizar la clasificación de los errores según distintas corrientes de pensamiento.

Este abordaje del error en el marco de la Educación Matemática ha impulsado la realización de trabajos que pretenden profundizar en los errores que pueden llegarse a cometer tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de temas específicos del saber matemático. Algunos trabajos que se han consultado para la configuración de este documento son los realizados por Franchi y Hernández (2004), en el que se hace un recorrido al significado de error, algunas tipologías que se han establecido y finalmente se centra en los errores en el área de la geometría plana; Martínez et al. (2006), en el cual se analizaron los posibles errores que se pueden cometer al desarrollar expresiones con valor absoluto; el trabajo de Morales (2017), quien muestra el análisis de producciones de estudiantes de grado once en cuanto al uso del lenguaje algebraico en la resolución de problemas de aplicación; y el trabajo de Ángel (2009), desde el cual se estudiaron los errores que cometieron un grupo de estudiantes del club de matemáticas de la UPN al caracterizar triángulos y expresar ciertas propiedades geométricas.

De acuerdo con lo anterior y en relación con el propósito de este trabajo, se resalta el trabajo de Martínez (2010), fruto de su trabajo de grado en el paso por la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander hace un estudio a los errores cometidos por estudiantes de colegio al realizar la operación potenciación. Martínez (2010) identificó y clasificó los errores cometidos por estudiantes de grado octavo al aplicar el concepto de potenciación y sus propiedades; en este se muestra una metodología de desarrollo de investigación, en la que, luego de establecer un marco conceptual, se elabora un test diagnóstico, el cual sirvió como instrumento de recolección de información para el análisis correspondiente sobre los errores.

Es importante resaltar que el test diagnóstico fue elaborado en dos fases; la primera fue la elaboración de un test que incluyó preguntas cerradas y constituyó la implementación piloto del mismo; la segunda fase fue el refinamiento del test, con base en la implementación piloto, en la que se resalta el establecimiento de solamente preguntas abiertas, dado que las preguntas cerradas, al parecer, no proporcionaban información concluyente, relativa a los objetivos de la investigación. Con respecto al concepto de error, no se evidencia una postura puntual, a pesar de que sí se muestra la inclinación por la clasificación de los errores establecida por Radatz, quien tiene como base la teoría del procesamiento de la información, y se resume en los siguientes tipos de errores:

a) Errores debidos a la dificultad del lenguaje
b) Errores debidos a dificultades para obtener información espacial
c) Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos: esta categoría abarca todas las deficiencias sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática.
d) Errores debido a rigidez del pensamiento: relacionados con los obstáculos.
e) Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes: referidos a los que surgen por aplicar con éxito una estrategia en áreas de contenidos diferentes

Luego del análisis de la información, Martínez (2010) sugiere unas nuevas categorías de clasificación de los errores, subdividiendo la categoría c) propuesta por Radatz con el fin de indagar con mayor profundidad la naturaleza de algunos errores. Las nuevas categorías que sugiere Martínez (2010) son:

a) error de tipo aritmético,
b) error debido a la ignorancia del algoritmo,
c) error debido al dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios (pre-saberes), y

d) error debido a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento.

El trabajo concluye determinando que el error debido al dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios (pre-saberes) es el más común entre los estudiantes, aludiendo a la construcción deficiente de saberes matemáticos previos, además de la poca comprensión del lenguaje matemático y su simbología.

Finalmente, Castillo et al. (2015) aterrizan la idea de Martínez (2010) a la potenciación en $\mathbb{Z}$, rediseñando el test diagnóstico diseñado por él y ciñéndose exclusivamente en la clasificación de los errores ofrecida por Martínez (2006). En dicha publicación se destaca que la principal razón por la que los estudiantes recaen en errores es por la ignorancia del algoritmo, seguido del manejo insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

Justificación

Durante el transcurso por la Licenciatura en Matemáticas de la UPN el autor de esta monografía tuvo la necesidad de buscar un apoyo teórico de los errores que posiblemente cometen los estudiantes al realizar las operaciones de potenciación y radicación en el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$), con el fin de justificar algunas actividades de las unidades didácticas dispuestas para las prácticas de inmersión. Una búsqueda en recursos digitales evidenció el poco material que hoy en día está disponible sobre este tipo de errores, por lo cual, surgió la motivación por realizar una actividad de formación investigativa que indagara sobre el tema, de primera mano, pensando en que el desarrollo de un trabajo de este tipo permitiera profundizar en conceptos matemáticos elementales, como lo son la potenciación y la radicación, y pudiera servir como un insumo para la construcción de actividades en el aula escolar en el futuro profesional.

Es posible notar que la identificación de errores cometidos por estudiantes va ligada a la reflexión entre el saber teórico del profesor y lo que él evidencia en la práctica. A partir de esto, el profesor puede reconocer algunas flaquezas en los procesos de enseñanza y aprendizaje que está llevando a cabo, y así mismo hacer ajustes sobre sus planes de trabajo con miras a mejoramiento; es así como la identificación de errores puede permitir la creación de herramientas de enseñanza y aprendizaje que mejoren las experiencias en el aula y procuren la superación de los errores que los estudiantes cometen (Ángel, 2009). De esta manera, el reconocimiento de los errores en la realización de las operaciones potenciación y radicación en $\mathbb{Z}$

cometidos por estudiantes de básica secundaria contribuye a la experiencia y al saber, como futuro profesor de matemáticas, y también permite el crecimiento en el rol como investigador, ya que permite construir criterios para apoyar a los estudiantes en la aprehensión del conocimiento (Morales, 2017). También, cabe destacar que la identificación de errores puede ser vista como una actividad que contribuye a la idoneidad cognitiva del profesor, de la cual hace referencia Godino (2013) cuando señala que, para el componente de aprendizaje, en cuanto a la idoneidad cognitiva, uno de los indicadores es la difusión y el uso de los resultados de las evaluaciones para la toma de decisiones. Sin lugar a dudas, los errores que puedan encontrarse en los resultados de las pruebas y evaluaciones pueden servir como un insumo en la planeación de clases que pretendan que los estudiantes tomen conciencia de sus errores y logren la superación de estos.

Finalmente, cabe mencionar que el interés por trabajar con $\mathbb{Z}$ radica en abordar el sentido que los estudiantes adoptan al pasar de trabajar con solamente números naturales, a tener que lidiar con operaciones que involucran números negativos y en las cuales el cero no solo es un elemento neutro, sino que también toma parte activa en la determinación de propiedades. Como lo indica Vargas-Machuca et al. (1990) los estudiantes estudian los números enteros ya sea realizando abstracciones a partir de lo real, o realizando una actividad puramente intelectual con la cual construyen un conocimiento desde el que intentan explicar la realidad; para el primer caso está el peligro de no lograr el acceso a lo abstracto, y para el segundo caso se presenta el peligro de crear un formalismo vacío que conlleva a errores y confusiones. Con esto, vemos que los estudiantes al abordar los números enteros tienen que lidiar con la confrontación entre un conocimiento teórico y un conocimiento práctico que poseen acerca de los números, y en su proceso los va a llevar a cometer errores que, si son identificados por el profesor, han de servir como referente para afrontar con éxito el estudio de estos números.

Potenciación y radicación con Números Enteros

El estudio de los números enteros en la escuela se puede enfocar desde varias perspectivas que determinarán las acciones en el aula y serán la motivación para abordar determinados temas. Si bien, algunos de estos enfoques van relacionados con el mero cumplimiento de un currículo o el abordaje de temas que puedan ser útiles en el diario vivir, consideramos relevante rescatar el carácter formal de los números enteros que al atenderlos en conjunto con ciertas operaciones y relaciones nos da pie para hablar de lo que conocemos como sistema numérico.

En esta sección, se presenta un acercamiento a la definición y constitución de dicho conjunto, destacando la importancia histórica de la aceptación de los enteros negativos y el cero como números; además, se muestra la axiomática de Padoa como ejemplo de una construcción formal de los números enteros. Finalmente, se exponen algunas consideraciones sobre la potenciación y la radicación entre los números enteros, lo que conllevó a analizar los conjuntos numéricos que realmente intervienen al realizar dichas operaciones.

Acercamiento histórico y conceptual a los Números Enteros

La determinación del conjunto de los números enteros lleva a cuestas un proceso histórico que evoca el surgimiento, reconocimiento y aceptación de ideas que se tienen propiamente de este conjunto. Una concepción que es usual en la escuela es la de entender que los números enteros son una extensión de los números naturales, y dicha idea tiene correspondencia con el hecho de que objetos como lo son el cero y los enteros negativos fueron aceptados como números mucho tiempo después del reconocimiento de los números naturales (naturales sin el cero) como tales.

En las civilizaciones antiguas la aparición de los números naturales fue impulsada por la necesidad de contar y realizar mediciones. Dichas necesidades en un comienzo no permitieron que se pensara en el uso del número cero ya que inicialmente los números estaban asociados a la cantidad y esto chocaba con la idea de la representación de la nada, o de no tener algo. Sin embargo, el cero tuvo su aparición y se desarrolló, según Contreras (2013), en tres periodos importantes:

- Período intra-representacional, en el cual el cero aparece como una representación para llenar los vacíos entre numerales en algunos sistemas de numeración. A este cero se le conoce como cero medial y cumplía con solo ser un signo para diferenciar cantidades.
- Periodo inter-representacional, en el que se destaca el paso del cero medial a un cero que sirve como operador. Las civilizaciones que manejaron sistemas de numeración posicional fueron las que lograron involucrar el cero en las operaciones. Una de las civilizaciones que manejó el cero operacional fue la Maya; los mayas "representaron a la base veinte de su sistema de numeración con los signos correspondientes al uno y el cero a la derecha" (Contreras, 2013, p. 45). En este mismo periodo, el cero se convirtió en un excelente recurso para la realización de cálculos, y se lograron atender propiedades como $0 + 0 = 0$, $a + 0 = a$ y $a - a = 0$.
- Periodo trans-representacional, para el cual el cero logra ser considerado como un objeto matemático a raíz de los aportes de matemáticos como Richard

Dedekind, Giuseppe Peano y George Cantor, quienes estudiaron a profundidad la fundamentación del número y aportaron teorías y axiomatizaciones para la construcción de los conjuntos numéricos. Resaltamos el caso de Peano, quien inicialmente no consideró el cero dentro de su axiomática, si no que años después “se autocorrigió y consideró que el primer número natural era el cero” (Contreras, 2013, p.46).

Paralelamente, se dio la aceptación de los enteros negativos como números, en un proceso controversial que requirió más de mil años para que fuera formalizada dicha aceptación. Hasta finales del siglo XIX, los enteros negativos habían ingresado a las matemáticas “como sustraendos (como en $a - b$)[1], como distintas entidades matemáticas, como coeficientes en ecuaciones polinómicas y como raíces de tales ecuaciones” (Kleiner, 1992, p.454, traducción propia), pero hasta ahí no se había dado una aceptación definitiva de los enteros negativos como números.

Los chinos, hacia el año 200 a.C., usaron libremente los números negativos en sus cálculos, y los hindúes hacia el año 620 d.C. dieron las primeras reglas explicitas para las operaciones con números negativos (negativo por negativo igual a positivo) y permitieron las raíces negativas para las ecuaciones (determinaron que todo número positivo tienen dos raíces cuadradas). Civilizaciones antiguas, como la babilónica, egipcia y griega, implícitamente manipulaban los enteros negativos al buscar las raíces de las ecuaciones, aunque no permitían que una raíz entera negativa se considerara

[1] Ver Cid, E. y Bolea, P. (2007). *Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico*[Comunicación]. 2 e congrès TAD, Uzès. http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/11%20-%20Cid&Bolea%20TAD%202.pdf

como solución, ya que pensaban que estas expresiones no eran imprescindibles en la práctica cotidiana y, de esta manera, se ignoraban los resultados con enteros negativos y se tenían en cuenta solo los positivos. Hacia los siglos XVI y XVII, varios matemáticos como Girard, Stifel y Hudde permitieron el uso de exponentes y coeficientes negativos en ecuaciones y expresiones algebraicas, lo que permitió el tratamiento unificado de ecuaciones polinómicas de determinado grado, como, por ejemplo, el considerar que $x^3 + ax = b$ y $x^3 = ax + b$ son un mismo tipo de ecuación. Sin embargo, para esta época otros matemáticos se seguían negando a dar un uso diferente a los enteros negativos; por ejemplo, Descartes, quien se negó a usar coordenadas negativas en el desarrollo de la geometría analítica. Y hubo otros como Pascal, quien consideró que la resta $0 - 4$ da como resultado 0, y Arnauld, quien se oponía a la igualdad $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$ (Kleiner, 1992); esto da muestra de lo ajeno que eran los enteros negativos en el desarrollo matemático de la época (Kleiner, 1992).

No fue sino hasta finales del siglo XIX que matemáticos como Weierstrass y Peano aportaron en la consolidación de bases para hacer una propuesta teórica de los números enteros, a través de ideas como la de ver a los números enteros como pares ordenados de números naturales (Kleiner, 1992), así, se da la inclusión al cero y a los enteros negativos como números que forman parte de un solo conjunto. Gracias a esta concepción hoy en día se tienen diferentes teorías que permitieron construcciones de los números enteros y se cuenta con varias formas de axiomatizar este conjunto. Podemos reconocer, por ejemplo, la Teoría de los pares, que permitió la extensión de la operación resta entre números naturales en los números enteros; la teoría de las congruencias que muestra el uso del cálculo de congruencias módulo $x + 1$ en determinado anillo para establecer el cálculo de los números enteros; la construcción de B. Russell (1872-1970), quien definió los números enteros como relaciones asimétricas entre números naturales; y las axiomáticas de Padoa y Le Veque, que otorgaron una definición de los números enteros por medio de un conjunto que satisfacía ciertas condiciones[2].

A continuación, a modo de ejemplo, se muestra una tabla con la axiomática propuesta por Alessandro Padoa (1868-1937), quien fue un alumno de Peano y definió el conjunto de los números enteros como elementos de un conjunto $\mathbb{Z}$ no vacío que satisface:

Tabla 1
Axiomática de Padoa

AXIOMATICA DE ALESSANDRO PADOA
1. Para cada $a \in \mathbb{Z}$ existe un único elemento de $\mathbb{Z}$ que denominamos el siguiente de a y notaremos a^+. 2. Para cada $a \in \mathbb{Z}$ existe un único elemento de $\mathbb{Z}$ que denominamos el simétrico de a y notaremos $(-a)$. 3. El simétrico del simétrico de a es a. En símbolos, $a = (-(-a))$. 4. El simétrico de a es igual al siguiente del simétrico del siguiente de a. En símbolos, $-a = (-(a^+))^+$. 5. Existe un elemento en $\mathbb{Z}$ que se llama cero y se nota 0 y es el simétrico de sí mismo. 6. Todo elemento distinto de 0 es distinto de su simétrico.

[2] Es posible establecer una equivalencia entre los sistemas axiomáticos de Padoa y Le Veque. Dicha equivalencia se puede ver en Luque et al. (2013, pp. 317-319)

7. Si A es un subconjunto de $\mathbb{Z}$ no vacío tal que:

    a) Si $a \in A$ entonces $a^{+} \in A$

    b) Si $a \in A$ y $a = b^{+}$ implica que $b \in A$, entonces $A = Z$.

En el caso de que $a = b^{+}$ se dice que b es el antecesor inmediato de a y se nota $´a$.

La suma la define como:

$$a + 0 = a$$

$$a + b^{+} = (a + b)^{+}$$

$$a + ´b = ´(a + b)$$

Y la multiplicación por

$$a \times 0 = 0$$

$$a \times b^{+} = a \times b + a$$

$$a \times ´b = a \times b + (-a)$$

Fuente: Tomado de Luque et al. (2013, pp. 317-319)

Finalmente, luego de reconocer varios aspectos característicos de los números enteros, recordemos que este conjunto, el cual se designa usualmente con el símbolo $\mathbb{Z}$, ya que proviene del alemán Zahlen que significa número, hoy en día, en varias de las escuelas se suele representar, básicamente, de la siguiente manera:

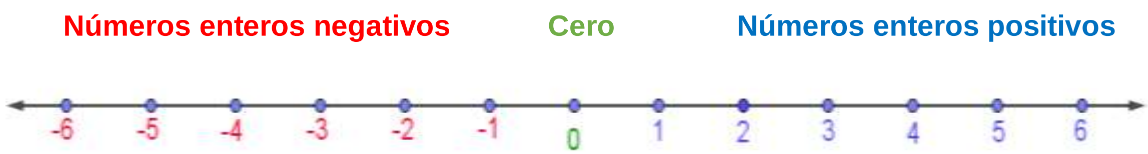
$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, \mathbf{-3}\ , \mathbf{-2}, \mathbf{-1}\ , \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots \}$$

Es así como se entiende el conjunto de los números enteros, como la unión de los números naturales con los opuestos de los números naturales mayores que 0.

Además, otra representación usual de los números enteros es la que se da al disponer dichos números a lo largo de una recta real, bajo una relación de orden, como se muestra a continuación:

Figura 1

Disposición de los números enteros a lo largo de una recta real



Cabe aclarar que la representación de los números enteros por medio de la recta real ha sido cuestionada por matemáticos como Carlos Vasco, ya que al no presentarse completitud ni densidad en los enteros se debería pensar en una representación compuesta por una sucesión de puntos, en la que cada punto represente un número entero.

Potenciación en $\mathbb{Z}$

Algunos matemáticos como Stewart et al. (2007) hacen una presentación de la potenciación, en el caso en el que la base sea un número real y el exponente un número entero, sin llamarla operación y se refieren a esta usando la expresión “notación exponencial”. La siguiente tabla muestra la definición dada por Stewart, et al. (2007):

Tabla 2
Potenciación como notación exponencial

NOTACIÓN EXPONENCIAL
Si a es un número real cualquiera y n es un entero positivo entonces la potencia n-ésima de a es $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores}}$ El número a se denomina base y n es el exponente.
EXPONENTES CERO Y NEGATIVOS
Si $a \neq 0$ es un número real y n es un entero positivo, entonces $a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Fuente: Tomado de Stewart et al. (2017, p. 13)

No obstante, es posible considerar la potenciación como una operación en $\mathbb{Z}$, expresada por medio de la relación Pot, la cual se puede definir como:

$$\begin{aligned} Pot: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow P \\ (a, b) &\longmapsto a^b \end{aligned}$$

en la que a^b se desarrolla según lo expuesto por Stewart et. al (2007) y P hace referencia al conjunto de llegada de la relación.

Esta manera de ver la potenciación conduce a analizar el conjunto de llegada P, ya que como vemos en la definición de Stewart et. al (2007) si el exponente es negativo, es posible que la potencia sea un elemento que pertenezca a los números racionales, pero si el exponente es positivo, el resultado (potencia) estará en los números enteros. Este hecho es el motivo por el cual la potenciación en el conjunto de los números enteros no puede ser considerada como una operación interna, así como lo es la adición y la multiplicación en este conjunto; sin embargo, Pot es una operación externa.

La siguiente tabla muestra los posibles casos que se pueden dar al considerar la potenciación como la relación antes mencionada y asumiendo los números enteros como la unión de los números enteros positivos ($\mathbb{Z}^{+}$), los números enteros negativos ($\mathbb{Z}^{-}$) y el cero:

Tabla 3
Casos de la potenciación en $\mathbb{Z}$

Caso	**Ejemplo**
$Pot:\ \mathbb{Z}^{+} \times \mathbb{Z}^{+} \rightarrow \mathbb{Z}^{+}$	$(2,3) \longmapsto 2^{3} = 8$
$Pot:\ \mathbb{Z}^{+} \times \{0\} \rightarrow \{1\}$	$(2,0) \longmapsto 2^{0} = 1$
$Pot:\ \mathbb{Z}^{+} \times \mathbb{Z}^{-} \rightarrow \mathbb{Q}^{+}$	$(2,-4) \longmapsto 2^{-4} = \frac{1}{16}$
$Pot:\ \{0\} \times \mathbb{Z}^{+} \rightarrow \{0\}$	$(0,3) \longmapsto 0^{3} = 0$
$Pot:\ \{0\} \times \{0\} \rightarrow No\ definido$	$(0,0) \longmapsto 0^{0}\quad No\ definido$
$Pot:\ \{0\} \times \mathbb{Z}^{-} \rightarrow No\ definido$	$(0,-4) \longmapsto 0^{-4} = \frac{1}{0}\quad No\ definido$
$Pot:\ \mathbb{Z}^{-} \times \mathbb{Z}^{+} \rightarrow \mathbb{Z} - \{0\}$	$(-4,2) \longmapsto (-4)^{2} = 16$
$Pot:\ \mathbb{Z}^{-} \times \{0\} \rightarrow \{1\}$	$(-4,0) \longmapsto (-4)^{0} = 1$

$Pot:\ \mathbb{Z}^{-}\times\mathbb{Z}^{-}\ \rightarrow\ \mathbb{Q}-\{0\}$	$(-4,-2)\ \mapsto\ (-4)^{-2}=\frac{1}{16}$

El análisis realizado nos permite ver los diversos conjuntos de llegada que hay para la potenciación entre números enteros. En especial, se destaca el hecho de que hay casos en los que la operación no está definida, además de los casos en los que la operación deja de estar en $\mathbb{Z}$ para llegar a un subconjunto de $\mathbb{Q}$ que no es subconjunto de $\mathbb{Z}$. Estos casos permiten pensar que para un estudio completo de la potenciación en $\mathbb{Z}$ es favorable que los estudiantes tengan un conocimiento previo de los números racionales. También, es importante resaltar que como los casos $Pot:\ \{0\}\times\{0\}$ y $Pot:\ \{0\}\times\mathbb{Z}^{-}$ no están definidos, estos se toman como restricciones a la relación Pot. Además de esto, es importante notar que el caso $Pot:\ \mathbb{Z}^{+}\times\mathbb{Z}^{+}\ \rightarrow\ \mathbb{Z}^{+}$ hace alusión al significado clásico respecto a que el exponente indica las veces que se escribe la base y luego se multiplican los números de la base entre sí, siempre y cuando el exponente sea al menos 2.

Finalmente, es importante recordar que en la potenciación es posible usar lo que Stewart et. al (2007) llaman como leyes de los exponentes; dichas leyes son aplicables bajo la “notación exponencial” expuesta por Stewart et. al (2007, p.13) y se presentan en la tabla siguiente, en la que las bases a y b son números reales y los exponentes m y n son números enteros:

Tabla 4
Leyes de la potenciación

Ley	Ejemplo
$a^m a^n = a^{m+n}$	$5^2 \cdot 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{4^5}{4^2} = 4^{5-2} = 4^3$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6$
$(ab)^n = a^n b^n$	$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{16}{4}\right)^2 = \frac{16^2}{4^2}$

Fuente: Elaborado a partir de Stewart et al. (2017, pp. 14-15)

Para las leyes $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ tenemos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Al tener que estas leyes se cumplen para bases a y b que son números reales, entendemos que también se cumplen cuando las bases son números enteros. Es importante resaltar que hay que tener cuidado cuando a o b toman el valor cero, ya que se pueden llegar a expresiones indeterminadas, por ejemplo, para la ley $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, no es posible que $a = 0$ ya que tendríamos la indeterminación $\frac{0}{0}$, además de que, si los exponentes también son cero, también se tendría la indeterminación 0^0.

Radicación en $\mathbb{Z}$

Stewart et. al (2007) expone la radicación como una forma de notar una potenciación, y la definen como:

Tabla 5
Definición de la radicación

DEFINICIÓN DE LA RAIZ N-ÉSIMA
Si n es un entero positivo, entonces la raíz n-ésima principal de a se define como sigue: $\sqrt[n]{a} = b$ quiere decir $b^n = a$ Si n es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$

Fuente: Tomado de Stewart et al. (2017, p. 18)

En la definición de la raíz n-ésima, a se le conoce como radicando, n se conoce como índice y b como raíz. De dicha definición es importante resaltar que cuando n es par la radicación solo está definida para números reales no negativos, ya que al considerar el radicando como un número negativo la raíz ya no pertenecería al conjunto de los números reales. Además, la definición expuesta hace referencia a "*la raíz n-ésima principal de a*" ya que como comentan Stewart et al. (2007, p.18), a pesar de que por ejemplo el número 9 tiene dos raíces cuadradas, 3 y -3, la notación se reserva para la raíz cuadrada positiva de 9 (la cual llaman raíz principal de 9); por lo tanto, si se pretende hacer referencia a la raíz negativa, los autores aconsejan escribir $-\sqrt{9}$, que es -3.

A pesar de que la definición de radicación expuesta por Stewart et al. (2007) la muestra como una manera de notar una potenciación, también es posible ver la radicación como una operación entre números enteros, expresada por medio de la relación Rad que definimos como:

$$Rad : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow R$$

$$(a, n) \longmapsto \sqrt[n]{a}$$

en la cual $\sqrt[n]{a}$ se desarrolla según lo expuesto por Stewart et. al (2007) y R hace referencia al conjunto de llegada de la relación[3].

Al igual que con la potenciación, a continuación, se muestra una tabla de los posibles casos que se pueden dar al considerar la radicación como la relación antes mencionada y asumiendo los números enteros como la unión de los números enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$), los números enteros negativos ($\mathbb{Z}^-$) y el cero:

Tabla 6
Casos de la potenciación en $\mathbb{Z}$

Caso	**Ejemplo**
$Rad : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$	$(10,3) \longmapsto \sqrt[3]{10}$
$Rad : \mathbb{Z}^+ \times \{0\} \rightarrow No\ definido$	$(8,0) \longmapsto \sqrt[0]{8} \quad No\ definido$
$Rad : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$	$(8,-3) \longmapsto \sqrt[-3]{8} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}}$
$Rad : \{0\} \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \{0\}$	$(0,5) \longmapsto \sqrt[5]{0} = 0$
$Rad : \{0\} \times \{0\} \rightarrow No\ definido$	$(0,0) \longmapsto \sqrt[0]{0} \quad No\ definido$
$Rad : \{0\} \times \mathbb{Z}^- \rightarrow No\ definido$	$(0,-3) \longmapsto \sqrt[-3]{0} = 0^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{0} \quad No\ definido$

[3] Para este texto, R no representa el conjunto de los números reales, usualmente representado con esta letra.

$Rad: \mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^+ \quad \rightarrow \quad \mathbb{C}$	$(-6,2) \mapsto \sqrt[2]{-4} = 2i$
$Rad: \mathbb{Z}^- \times \{0\} \quad \rightarrow \quad No\ definido$	$(-4,0) \mapsto \sqrt[0]{-4} \quad No\ definido$
$Rad: \mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^- \quad \rightarrow \quad \mathbb{C}$	$(-4,-2) \mapsto \sqrt[-2]{-4} = (-4)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2i}$

Esta manera de ver la radicación en conjunto con la definición de Stewart et. al (2007) conlleva a restringir en el conjunto de partida la presencia del cero; en específico cuando este conlleva a una radicación con índice cero, ya que, como se puede observar en la tabla, dicha opción no está definida. Además, cuando el índice es un número entero negativo y el radicando es cero, la radicación tampoco está definida, por lo tanto, se tendría otra restricción en el conjunto de partida de la relación Rad.También, es importante notar que para las radicaciones en las que el radicando es un número entero negativo y el índice es un número entero diferente de cero, la raíz pertenece al conjunto de los números complejos.

Finalmente, es importante recordar que en la radicación es posible usar lo que Stewart et al. (2007) llaman *propiedades de las raíces n-ésimas*; dichas propiedades son aplicables bajo la definición de raíz n-ésima expuesta por Stewart et al. (2007) y se presentan en la tabla siguiente, en la que la se suponen que existen las raíces en el conjunto de los números reales:

Tabla 7
Propiedades de la radicación

Propiedad	Ejemplo
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{27} = -6$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[2]{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
$\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$

Fuente: Tomado de Stewart et al. (2017, p.18)

Marco de referencia desde la Didáctica de la Matemática

En los siguientes apartados se hará un acercamiento conceptual al término error y a los términos obstáculo y dificultad, los cuales se encuentran estrechamente relacionados con este. Luego se muestran algunas tipificaciones de errores que han sido importantes en el estudio del error, y en específico se muestra las categorías determinadas por Martínez (2010) que serán relevantes para el análisis que se presenta más adelante, producto de la actividad investigativa. Finalmente, se muestra la presencia de la potenciación y la radicación en el conjunto de los números enteros en los documentos curriculares colombianos.

Los errores, los obstáculos y las dificultades

La construcción del conocimiento se ha visto permeada por la presencia de ideas que, aunque en sus comienzos eran válidas, con el tiempo fueron revisadas y luego pasaron a ser consideradas como ideas erróneas. Sin embargo, estas ideas erróneas, más que representar un atraso en la sociedad, se han entendido como el punto de partida para el desarrollo de conceptos. Por ejemplo, luego de que por muchos años los matemáticos pensaran que los números naturales y las facciones eran los que gobernaban la existencia, al toparse con la existencia de $\sqrt{2}$ fueron fuertemente confrontados a cambiar su modo de pensar; y así, debieron reconstruir sus ideas sobre lo que conocían de matemáticas, dando paso, incluso, a las primeras nociones de lo que es la potenciación y la radicación. Al observar los procesos de aprendizaje de los estudiantes es innegable la presencia de errores, ya que, como se ha mencionado, a lo largo de la historia la construcción de lo que hoy se considera como conocimiento verdadero ha sido el producto de la modificación continua de ideas que en algún momento manifestaron un error. Ligado a esto, Martínez et al. (2006) manifiesta que los errores tienen parte en el proceso de construcción del conocimiento, de tal manera que pueden ser estos el impulso provocador de un avance, logrando transformarse en un elemento que sirve para construir e innovar el proceso de aprendizaje.

La inherencia del error en el proceso de aprendizaje ha llevado a que varios autores tomen postura sobre lo que se concibe como error. Para Socas (1997) el error es la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en los estudiantes, más allá de ser solamente el resultado de una falta específica de conocimiento o despiste. Esta postura se condice con lo dicho por Rico (1998), quien considera el error como conocimiento deficiente e incompleto, o, con lo expuesto por Carrión (2007), quien dice que “se considera que el error es un conocimiento deficiente, insuficiente, imperfecto, defectuoso, escaso o incompleto; una desviación de un conocimiento establecido” (p.11). Sin embargo, para Franchi y Hernández (2004), definiciones de error como las anteriores, las cuales hacen referencia principalmente a los esquemas cognitivos de los estudiantes, parecen estar vinculadas con el concepto de obstáculo manejado por Brousseau (1997) desde la teoría de las situaciones didácticas. Franchi y Hernández (2004) comentan que para Brousseau:

> un obstáculo es una concepción que ha sido, en principio, eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito

> previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior (p. 66).

De esta manera, aunque es posible entender que el error guarda una estrecha relación con una construcción de conocimiento deficiente, que los estudiantes han podido tener durante su desarrollo en la etapa escolar, se hace referencia a dichas concepciones equivocadas de los estudiantes no como error, sino como obstáculo, atendiendo así la mirada impuesta por Brousseau (1997).

Para intentar, entonces, precisar lo que se entenderá como error, se debe atender lo dicho por Godino (2004), quien establece que “hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (p.73). De esta manera, se puede entender que el error se encuentra en las producciones de los estudiantes que, si bien dichas producciones se encuentran asociadas al conocimiento construido del estudiante, en realidad estas son en sí las manifestaciones orales o escritas de los estudiantes como respuesta a una tarea que se ha establecido. Así las cosas, se asume que un error es una producción (oral o escrita) incorrecta e invalidada desde el punto de vista de la institución matemática escolar.

Finalmente, ligado al concepto de error se encuentra presente el concepto de dificultad. Al respecto, se tiene que

- Godino (2004) hace referencia a dificultad como aquella que “indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que, si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja." (p. 73)

- Gómez et. al (2012) definen dificultad como "toda característica académica (en cuanto a lectura, escritura y matemáticas) que hace que el estudiante se muestre desnivelado con relación a sus compañeros de aula y al programa académico y a lo que se espera de él" (p. 29).

Las nociones expresadas muestran que las dificultades se encuentran íntimamente ligadas a las facultades y competencias desarrolladas por los estudiantes para la ejecución de una tarea. En consecuencia, las dificultades se convierten en un factor importante a la hora de analizar las causas de los errores que los estudiantes puedan cometer.

Tipos de errores

Varias investigaciones sobre errores apuntan al establecimiento de nuevas tipificaciones que permitan un mejor reconocimiento y caracterización de las producciones de los estudiantes que contienen errores. Autores como Franchi y Hernández (2004) reconocieron y dieron importancia a las tipificaciones dadas por Radatz (1979), Movshovitz et al. (1987), Socas (1997), Astolfi (1999) y Brousseau (2001)[4], con el propósito de consolidar una base teórica que en conjunto con su práctica investigativa dieron luces para una nueva tipificación. Dichas tipificaciones se muestran en la siguiente tabla:

---

[4] Los autores mencionados son citados y referenciados por Franchi y Hernández (2004).

Tabla 8
Tipificaciones de errores expuestas por Franchi y Hernández (2004)

Autor	**Tipificación**
Radatz (1979)	▪ Errores debidos a la dificultad del lenguaje ▪ Errores debidos a dificultades para obtener información espacial ▪ Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos ▪ Errores debido a rigidez del pensamiento ▪ Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes
Movshovitz et al. (1987)	▪ Errores debidos a datos mal utilizados ▪ Errores debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje ▪ Errores debidos a inferencias no válidas lógicamente ▪ Errores debidos al uso de teoremas o definiciones deformados ▪ Errores debidos a la falta de verificación en la solución ▪ Errores técnicos

Socas (1997)	▪ Errores que tienen su origen en un obstáculo ▪ Errores que tienen su origen en la ausencia de sentido ▪ Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas
Astolfi (1999)	▪ Errores debidos a la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas ▪ Errores que provienen de los hábitos escolares o de una mala. interpretación de las expectativas ▪ Errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos ▪ Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas ▪ Errores debidos a los procesos adoptados ▪ Errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad ▪ Errores que tienen su origen en otra disciplina ▪ Errores causados por la complejidad del contenido

Brousseau (2001)	▪ Error a un nivel práctico ▪ Error en la tarea[5] ▪ Error de técnica ▪ Error de tecnología ▪ Error de nivel teórico

Fuente: Tomado de Franchi y Hernández (2004, pp.66-67)

Franchi y Hernández (2004) destacan que las tipificaciones expuestas fueron desarrolladas para la clasificación de errores en las matemáticas y en las ciencias en general. A partir de estas, lograron establecer una nueva tipificación para la clasificación de errores que cometen los estudiantes de primeros semestres de universidad en el área de la geometría. La nueva tipificación lograda se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 9

Categorías de errores determinadas por Franchi y Hernández (2004)

Tipificación
▪ Errores de prerrequisitos ▪ Errores propios del lenguaje geométrico ▪ Errores gráficos ▪ Errores de razonamiento ▪ Errores de transferencia ▪ Errores de técnica ▪ Errores de tecnología

[5] El error en la tarea es un tipo de error que no es definido originalmente por Brousseau (2001), sino que su definición es dada por Franchi y Hernández (2004) para efectos de su investigación.

▪ Errores azarosos

Para los fines de este trabajo, se considera la tipificación establecida por Martínez (2010), la cual tiene como base la tipificación establecida por Radatz (1979) y nace como respuesta al objetivo de clasificar varios errores que cometen los estudiantes de grado octavo al aplicar las propiedades de la potenciación. Los tipos de errores que determinó Martínez (2010) son:

Tabla 10
Categorías de errores determinadas por Martínez (2010)

Tipificación
▪ ***Error de tipo aritmético***   Hace referencia a los errores debidos al mal uso de las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división.   Algunos ejemplos son: $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 30$ $\sqrt{9} = 9 \times 9 = 18$ ▪ ***Error debido a la ignorancia del algoritmo***   Se refiere a los errores cometidos cuando los estudiantes olvidan el conjunto de procesos que permiten hallar la solución al problema o desconocen las operaciones

Un ejemplo al respecto es:

$$3^{-2} = no\ existe$$

- ***Error debido al dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios (presaberes)***

  Son los debidos al dominio insuficiente de símbolos, son las fallas debidas a su manejo inadecuado o al desconocimiento de corchetes, paréntesis y signos a la hora de resolver los ejercicios. Los errores debidos al manejo insuficiente de los conceptos necesarios, son aquellos que se presentan cuando el estudiante no maneja de forma correcta el conjunto de reglas necesarias para responder de forma correcta el problema planteado.

  Un ejemplo al respecto es:

$$-7^2 = -7 \times -7$$

- ***Error debido a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento***

  Las asociaciones incorrectas se deben a que el estudiante intenta resolver un nuevo ejercicio aplicando procedimientos que usó en ejercicios anteriores en los cuales tuvo éxito. La rigidez de pensamiento, se presenta cuando el estudiante solo responde a reglas memorizadas y no es capaz de dar explicaciones a sus respuestas.

  Algunos ejemplos son:

$$10^3 = 10 \times 3$$

$$\sqrt[3]{100} = 33{,}3$$

Fuente: Tomado de Martínez (2010, pp.52)

La potenciación y la radicación en los referentes normativos nacionales

Es común ver que en las instituciones educativas se manejen textos escolares de matemáticas, los cuales sugieren una organización de los contenidos de la matemática escolar a lo largo de un año académico. Sin embargo, el Ministerio de Educación Nacional desde finales del siglo pasado, ha venido produciendo varios documentos que se constituyen actualmente en los referentes más importantes, ya que pretenden dar luz sobre los procesos, y conocimientos que deben tratarse, mínimamente, en la escuela, las competencias que deben desarrollar los estudiantes, algunas evidencias de aprendizaje, entre otros. Para esta sección, se han seleccionado los apartados más importantes de los referentes normativos nacionales, específicamente, aquellos apartados que hacen referencia (directa o indirecta) a la potenciación y radicación en $\mathbb{Z}$.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (LCM), publicados en el año 1998, hacen parte de los primeros documentos que pretendían orientar a los profesores colombianos, frente a los cambios curriculares que se estaban produciendo en el país en la época de su publicación. Bajo este enfoque, los LCM brindan un panorama muy general sobre los elementos curriculares relevantes en materia de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se deben considerar al construir currículo. Luego, teniendo en cuenta esto, es entendible ver que al hacer una revisión a los LCM no se haya podido encontrar una mención explícita sobre la potenciación y la radicación en los números enteros, pero sí se logra reconocer que estos objetos estarían considerados en el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, considerando que estos conceptos tienen que ver con el conocimiento sobre las operaciones y los conjuntos numéricos, en este caso particular, con el conjunto de los números enteros.

Podemos notar que el concepto que da fuerza al pensamiento numérico es el de sentido numérico, el cual es tratado inicialmente por Mcintosh et. al (1992) relacionando el sentido numérico con la comprensión general de número y de las operaciones, y luego es utilizado en los LCM para determinar que la comprensión de los números y de la numeración, la comprensión del concepto de las operaciones, y los cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones, son los aspectos básicos para el desarrollo del pensamiento numérico (MEN, 1998). Centrando la mirada en lo concerniente a la potenciación y la radicación en $\mathbb{Z}$, se han rescatado de los LCM cuatro ítems básicos que dan luz sobre la construcción del significado y la orientación del aprendizaje de cada operación, los cuales se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 11

Ítems sobre el aprendizaje de operaciones según los lineamientos

Comprensión del concepto de las operaciones
• Reconocer el significado de la operación en situaciones concretas, de las cuales emergen • Reconocer los modelos más usuales y prácticos de las operaciones • Comprender las propiedades matemáticas de las operaciones • Comprender el efecto de cada operación y las relaciones entre operaciones

Fuente: Elaborado a partir de MEN (1998)

Considerar los ítems expuestos en la tabla 11 permiten el establecimiento de criterios para la construcción de ejercicios o problemas, que rindan cuenta de un aspecto del desarrollo del pensamiento numérico y de la apropiación de los conjuntos numéricos que se pretendan abordar en el aula.

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM), publicados en el año 2006, se distinguen dos tipos de conocimiento matemático: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental (MEN, 2006). Estos tipos de conocimiento resaltan la importancia de la reflexión y la caracterización de la teoría matemática, el reconocimiento de las relaciones entre los componentes matemáticos, la ejecución de técnicas y estrategias para representar conceptos y transformas dichas representaciones, por medio de algoritmos y argumentos bien estructurados. Estas características mencionadas en los EBCM aplican en particular sobre la potenciación y radicación, considerando estos como conceptos propios de las matemáticas.

Los estándares que se relacionan con la potenciación y la radicación en $\mathbb{Z}$ (o en $\mathbb{N}$) se presentan en la parte del Pensamiento numérico y los sistemas numéricos. Los primeros estándares que aparecen están en los grados cuarto y quinto, los cuales, por el contexto inmediato, dan a entender que el conjunto numérico que se considera es el de los números naturales; en estos se promueve la formulación y resolución de problemas por medio de las propiedades sobre las operaciones, considerando diferentes contextos (matemáticos y no matemáticos). En la siguiente tabla se explicita lo que se comenta:

Tabla 12
EBCM grados cuarto y quinto

Grados cuarto y quinto
- Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las *relaciones y propiedades* de los *números naturales* y sus *operaciones.* - Identifico la *potenciación* y la *radicación* en *contextos matemáticos y no matemáticos* - Justifico regularidades y *propiedades de* los números, sus relaciones y *operaciones.*

Fuente: Elaborado a partir de MEN (2006, pp.82-83) (Cursivas puestas por el autor)

Luego, se encuentran los estándares para los grados sexto y séptimo, estos establecen a los números enteros como el conjunto base de trabajo. Cabe destacar que en los EBCM se comenta que pasar de estudiar los números naturales a estudiar los números enteros incide en la ampliación del concepto de número, lo cual conlleva también a realizar algunos cambios sobre las nociones que se tiene sobre las operaciones y las relaciones. A continuación, se tiene una tabla con los estándares más relevantes en relación con los propósitos de este trabajo:

Tabla 13
EBCM Grados sexto y séptimo

Grados sexto y séptimo
- *Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas* de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la

desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y *potenciación.* - Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y *propiedades de las operaciones.* - *Resuelvo y formulo problemas* cuya solución requiere de la *potenciación o radicación.*

Fuente: Elaborado a partir de MEN (2006, pp.84-85) (Cursivas puestas por el autor)

Entre los grados octavo y undécimo, los EBCM hacen alusión al sistema de los números reales principalmente. Sin embargo, en un estándar para grado décimo y undécimo, se hace explícito el conjunto de los números enteros, dando a entender la importancia de diferenciar las particularidades de las propiedades de las operaciones en este conjunto numérico. La siguiente tabla muestra lo mencionado:

Tabla 14
EBCM Grados octavo y noveno

Grados octavo y noveno
- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los *números reales* y de las relaciones y operaciones entre ellos. - *Identifico y utilizo la potenciación, la radicación* y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.
Grados décimo y undécimo

- Comparo y contrasto las *propiedades de los números* (naturales, *enteros*, racionales y reales) y las de sus relaciones y *operaciones* para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.

Fuente: Elaborado a partir de MEN (2006, pp.86-87) (Cursivas puestas por el autor)

Luego de ver los Estándares relacionados, es importante recalcar que uno de los objetivos que se desea alcanzar con todo concepto matemático, y en este caso con la potenciación y radicación en $\mathbb{Z}$, es establecer varios tipos de saberes (saber qué, saber por qué, saber hacer y saber cómo) que den cuenta del carácter sistémico de los conceptos. De esta manera, se intenta promover que la enseñanza no debe atender solamente a conocimientos teóricos, sino también a saberes prácticos, los cuales pueden evidenciarse en distintas situaciones, por ejemplo, de la cotidianidad.

En los Derechos Básicos de Aprendizaje

Al revisar los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) formulados en el 2016 se encuentra que la potenciación es mencionada por primera vez en el grado quinto como una operación en los números naturales, sobre la cual se espera que los estudiantes formulen y resuelvan problemas (MEN, 2016). Además, de manera específica, se le dedican dos derechos básicos a la potenciación, como se muestra enseguida:

Tabla 15
DBA Grado quinto

Grado quinto
DBA 1. Interpreta y utiliza los *números naturales* y racionales en su representación fraccionaria para *formular y resolver problemas* aditivos, multiplicativos y que involucren operaciones de *potenciación*.

Evidencias de aprendizaje – Determina las *operaciones* suficientes y necesarias para solucionar diferentes *tipos de problemas.*
DBA 2. Describe y desarrolla estrategias (algoritmos, propiedades de las operaciones básicas y sus relaciones) para *hacer estimaciones y cálculos al solucionar problemas de potenciación*. *Evidencias de aprendizaje* - Utiliza las *propiedades de las operaciones con números naturales* y racionales (fraccionarios) *para justificar algunas estrategias de cálculo o estimación relacionados con áreas de cuadrados y volúmenes de cubos.* - Descompone un número en sus factores primos. - Identifica y utiliza las *propiedades de la potenciación* para resolver problemas aritméticos. - Determina y argumenta acerca de *la validez o no de estrategias para calcular potencias.*

Fuente: Elaborado a partir de MEN (2016, p.37) (Cursivas puestas por el autor)

Luego, desdelos dos primeros DBA para grado sexto, se promueve el trabajo con los números enteros y sus operaciones. En estos DBA no se especifica la operación potenciación ni la operación radicación, y, al igual que en los DBA de grado quinto, se espera que las operaciones y sus propiedades permitan la formulación y resolución de problemas, como se puede notar a continuación:

Tabla 16
DBA Grado sexto

Grado sexto
DBA 1. Interpreta *los números enteros* y racionales (en sus representaciones de fracción y de decimal) con *sus operaciones*, en diferentes contextos, *al resolver problemas* de variación, repartos, particiones, estimaciones, etc. Reconoce y establece diferentes relaciones (de orden y equivalencia y las utiliza para argumentar procedimientos). *Evidencias de aprendizaje* - Interpreta y justifica cálculos numéricos al solucionar problemas.
DBA 2. Utiliza las propiedades de los *números enteros* y racionales y las propiedades de sus *operaciones* para proponer estrategias y procedimientos de cálculo en la solución de problemas. *Evidencias de aprendizaje* - Propone y utiliza diferentes procedimientos para realizar operaciones con números enteros y racionales. - Argumenta de diversas maneras la necesidad de establecer relaciones y características en conjuntos de números (ser par, ser impar, ser primo, ser el doble de, el triple de, la mitad de, etc.).

Fuente: Elaborado a partir de MEN (2016, p.45) (Cursivas puestas por el autor)

Finalmente, en los DBA para el grado séptimo se mencionan explícitamente las operaciones potenciación y radicación en el conjunto de los números enteros, las cuales se esperan que sirvan para la descripción y resolución de situaciones y problemas, además de la estimación de valores que resulten de estas operaciones.

Tabla 17
DBA Grado séptimo

Grado séptimo
DBA 1. Comprende y resuelve problemas, que involucran los números racionales con las *operaciones* (suma, resta, multiplicación, división, *potenciación, radicación*) en contextos escolares y extraescolares. *Evidencias de aprendizaje* - Describe situaciones en las que los *números enteros* y racionales *con sus operaciones* están presentes.
DBA 2. Describe y utiliza diferentes algoritmos, convencionales y no convencionales, al realizar *operaciones* entre números racionales en sus diferentes representaciones (fracciones y decimales) y los emplea con sentido en la solución de problemas. *Evidencias de aprendizaje* - *Estima el valor* de una raíz cuadrada y de una potencia.

Fuente: Elaborado a partir de MEN (2016, p.53) (Cursivas puestas por el autor)

Se concluye entonces que, como es natural, los DBA están directamente relacionados con los EBCM y que de alguna manera, los DBA proponen una línea cronológica para la enseñanza de la potenciación y la radicación, así: se abordaría la potenciación en el conjunto de los números naturales en grado quinto; luego, en sexto se realizaría la ampliación de los números naturales al conjunto de los números enteros, y aunque no se hace mención ni de la potenciación ni de la radicación, sería posible abordarlas en este grado dado que se hace referencia a las *operaciones* entre números enteros; y después, en grado séptimo, definitivamente, se hace explícito el tratamiento de la potenciación y la radicación en el conjunto de los números enteros. No obstante, también se puede notar que, sin distinción de grado, la potenciación y la radicación deben permitir especialmente la formulación y la resolución de problemas, el cálculo y las estimaciones razonables, y la argumentación de procedimientos utilizando propiedades sobre dichas operaciones.

Metodología y análisis

A continuación, se presenta cada una de las fases que permitieron la construcción y análisis del instrumento a partir del cual se recolectó información sobre los errores que comenten estudiantes de la educación básica secundaria alrededor de la potenciación y radicación entre números enteros y sus respectivos resultados. Finalmente se expone el análisis hecho de la información obtenida por medio del test, usando las unidades de análisis establecidas en la fase 4 del trabajo.

Fases del trabajo

Las fases del trabajo se presentan en seguida:

Fase 1. Construcción de los fundamentos del trabajo

La primera fase se centró en la consolidación del conocimiento necesario para la elaboración del instrumento y su posterior análisis. Lo primero que se realizó fue una revisión de antecedentes, dando importancia a las ideas sobre error que concibieron grandes filósofos en la antigüedad, pero finalmente centrando la atención en los aportes más recientes sobre errores, en especial los errores en potenciación y radicación, entre los que se destacan el trabajo de Martínez (2010) y Franchi et al. (2004). Luego, teniendo en cuenta que el test se aplicaría en Colombia, se hizo un reconocimiento de la presencia de la potenciación y la radicación en los referentes curriculares colombianos, fijando la mirada en los apartados en los que explícitamente se mencionaban estas operaciones y en los que se hacía referencia a estas por medio del término “operaciones”. Además, se dió una mirada sobre el contenido matemático relacionado con el trabajo, es decir, se indagó acerca del conjunto de los números enteros y se revisó los conceptos potenciación y radicación en este conjunto. Finalmente, se realizó un estudio sobre los errores, buscando diferenciar los términos error, obstáculo y dificultad, y consultando sobre las tipificaciones que existen de los errores.

Fase 2. Elaboración del instrumento de recolección de información

El instrumento para la recolección de información es un test diagnóstico. Con base en los fundamentos que se lograron construir en la fase 1, se establecieron los asuntos principales sobre los cuales se dio la elaboración del test. Los asuntos fueron establecidos de acuerdo a las a acciones (competencias) exigidas desde los documentos curriculares emitidos por el MEN, y a partir de estos se seleccionaron preguntas y ejercicios que identificaran tanto el saber teórico como el saber práctico que se esperaba que los estudiantes tuvieran acerca de la potenciación y la radicación en $\mathbb{Z}$. Tales asuntos sirvieron como referentes para la determinación de los enunciados de las tareas y ejercicios que componen el test; así mismo, estos asuntos sirvieron como parámetros sobre los cuales se enmarcó la selección y organización de varias preguntas y ejercicios que fueron tomados de textos escolares. A continuación, se listan dichos asuntos sobre los cuales se elaboró el test:

- Hacer estimaciones razonables a partir de la potenciación o la radicación
- Definición y significado de la potenciación y la radicación
- Argumentar y/o justificar procedimientos (aritméticos)

- Aplicación de propiedades (leyes) de la potenciación y la radicación
- Efecto y relaciones entre la radicación y la potenciación
- Formulación de problemas que involucran la potenciación o la radicación (contextos matemáticos y no matemáticos)
- Resolución de problemas que involucran la potenciación o la radicación (contextos matemáticos y no matemáticos)

En total, el test quedó compuesto por 11 numerales, en los cuales se esperaba tratar por lo menos uno de los asuntos mencionados. Además de esto, para cada numeral se determinó si se promovía un saber teórico o un saber práctico; cabe recordar que, al mencionar saber teórico, se hace referencia a un saber qué, un saber por qué y un saber cómo, y cuando mencionamos saber práctico, se hace referencia a un saber hacer y un saber cómo. A continuación, se muestra una tabla en la que se relaciona cada numeral del test con los asuntos a considerar de la potenciación o la radicación, el tipo de conocimiento que se pretende atender y lo que se requiere (relacionado a la tarea o ejercicio que se pide al estudiante realizar):

Tabla 18
Elementos para la construcción del test

NUMERAL	ASUNTO A CONSIDERAR DE LA POTENCIACIÓN O LA RADICACIÓN	TIPO DE SABER	REQUERIMIENTO
1, 2	Definición y significado de la potenciación y la radicación	Teórico	Nombrar las partes de las operaciones
3, 4	Definición y significado de la potenciación	Teórico Práctico	Escribir la potenciación como

			multiplicaciones y viceversa
5	Resolución de problemas que involucran la radicación (contexto matemático)	Práctico	Resolver un problema sobre el volumen de un cubo
6, 7	Hacer estimaciones razonables a partir de la potenciación o la radicación, y efecto y relaciones entre operaciones	Práctico	Comparar cantidades expresadas en potenciación y en radicación
8	Aplicación de propiedades (leyes) de la potenciación y la radicación, y definición y significado de la potenciación y la radicación	Práctico	Resolver varios ejercicios de potenciación y radicación
9	Resolución de problemas que involucran la potenciación (contexto no matemático)	Práctico	Problema sobre la reproducción exponencial de una bacteria
10	Argumentar y/o justificar procedimientos (aritméticos), y efecto y relaciones entre la radicación y la potenciación	Teórico Práctico	Determinar el valor de verdad de un conjunto de afirmaciones
11	Formulación de problemas que involucran la potenciación (contexto matemático o no matemático)	Práctico	Formular un problema que implique el uso de una potenciación

Finalmente, en el test se destinó un espacio para recordar la motivación por la cual se solicitaba a los estudiantes realizar la prueba, además de algunas observaciones adicionales, como la prohibición del uso de calculadora. La presentación final del test es la que se muestra a continuación:

Figura 2

Test para la recolección de información

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Licenciatura en Matemáticas
Sergio Yesid Bejarano Sánchez
Maestro en formación

¿Qué tanto sabes sobre potenciación y radicación en los números enteros?

Nombre: ______________________________ **Curso:** ____________ **Fecha:** ______________

Hola. El siguiente test fue diseñado con propósitos netamente académicos y hace parte de la realización del Trabajo de grado del maestro en formación Sergio Bejarano de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Agradecemos su participación y esperamos que logre completar todos los numerales propuestos; sus respuestas y procedimientos son de gran valor para nosotros, ya que contribuirán a ampliar nuestros conocimientos relacionados con la Educación Matemática. Por favor resuelva el test individualmente y sin utilizar calculadora. Éxitos.

1. **Identificar la base, el exponente y la potencia en la siguiente expresión:**

$$(-2)^3 = -8$$

Base: __________ Exponente: __________ Potencia: __________

2. **Identificar el índice, el radicando y la raíz en las siguientes expresiones:**

$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt[3]{-125} = -5$
Índice: __________	Índice: __________
Radicando: __________	Radicando: __________
Raíz: __________	Raíz: __________

3. **Escribir en forma de potenciación indicada las siguientes multiplicaciones**

   a. $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 =$ __________________

   b. $7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 7 =$ __________________

   c. $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) =$ __________________

   d. $(-5) \times 5 \times (-5) \times 5 \times (-5) =$ __________________

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Licenciatura en Matemáticas
Sergio Yesid Bejarano Sánchez
Maestro en formación

4. Escribir en forma de multiplicación las siguientes potencias

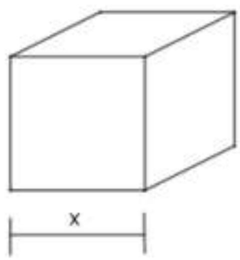
a. $10^3 =$ ______________________________

b. $(-4)^5 =$ ______________________________

c. $5^3 \times 3^5 =$ ______________________________

d. $(-2)^2 \times 4^2 =$ ______________________________

5. El volumen de un cubo es $125\ m^3$. ¿Cuál es la longitud de una de sus aristas?



6. **De las siguientes expresiones encerrar la que considere verdadera:**

$\sqrt{50} > \sqrt[3]{100}$ $\qquad$ $\sqrt{50} = \sqrt[3]{100}$ $\qquad$ $\sqrt{50} < \sqrt[3]{100}$

En el siguiente recuadro escribir el procedimiento que usó para escoger la expresión.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Licenciatura en Matemáticas
Sergio Yesid Bejarano Sánchez
Maestro en formación

7. De las siguientes expresiones encerrar la que considere verdadera:

$10^{100} > 100^{10}$ $\quad$ $10^{100} = 100^{10}$ $\quad$ $10^{100} < 100^{10}$

En el siguiente recuadro escribir el procedimiento que usó para escoger la expresión.

8. Resolver las siguientes operaciones en su respectivo recuadro:

a. $4^2 =$

c. $-7^2 =$

b. $(-7)^2 =$

d. $7^{-2} =$

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Licenciatura en Matemáticas
Sergio Yesid Bejarano Sánchez
Maestro en formación

e. $5^0 =$

i. $\sqrt{-64} =$

f. $0^3 =$

j. $\sqrt[3]{-64} =$

g. $\sqrt{9} =$

k. $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$

h. $-5^0 =$

l. $\frac{4^2}{2^2}$

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Licenciatura en Matemáticas
Sergio Yesid Bejarano Sánchez
Maestro en formación

m. $\frac{2^5 \cdot 2^2}{2^3} =$

p. $\sqrt{25 \times 36} =$

n. $(-1)^5 =$

q. $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} =$

o. $1^5 =$

r. $0^0 =$

9. Una bacteria se reproduce por bipartición cada 15 minutos. En esta forma de reproducción, cada bacteria se divide en dos, dando lugar a un nuevo individuo. Si inicialmente se tienen tres bacterias, ¿cuántas bacterias habrá en una hora?

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Licenciatura en Matemáticas
Sergio Yesid Bejarano Sánchez
Maestro en formación

10. Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones escribiendo (v) si es verdadera o (f) si es falsa.

- (   ) Siempre es posible expresar la raíz cuadrada de un número entero con un número entero

Justificar la respuesta en el recuadro.

- (   ) Cero no tiene raíz cuadrada

Justificar la respuesta en el recuadro.

- (   ) La raíz par de un número entero negativo es positiva

Justificar la respuesta en el recuadro.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Licenciatura en Matemáticas
Sergio Yesid Bejarano Sánchez
Maestro en formación

- ( ) $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$

Justificar la respuesta en el recuadro.

- ( ) Si $(-2)^3 = -8$ entonces $\sqrt{-8} = 3$

Justificar la respuesta en el recuadro.

- ( ) La raíz de un número entero cualquiera, sin importar su índice, es siempre menor que ese número

Justificar la respuesta en el recuadro.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Licenciatura en Matemáticas
Sergio Yesid Bejarano Sánchez
Maestro en formación

- ( ) La potencia de un número entero cualquiera, sin importar su exponente, es siempre mayor que ese número

Justificar la respuesta en el recuadro.

11. Formular un problema en el que se deba utilizar la expresión $7^3 = 343$ para determinar su solución.

Fase 3. Aplicación del test sobre potenciación y radicación en $\mathbb{Z}$

El test que se elaboró para la identificación de errores se aplicó en estudiantes que estaban en séptimo y octavo grado de la institución educativa Liceo Antonio de Toledo, de la localidad de Bosa, en Bogotá, el día 16 de noviembre del 2021. Los estudiantes que participaron con sus respuestas tenían una edad entre 12 y 15 años. Para poder aplicar el test, primero se envió una carta vía correo electrónico (la cual se puede ver en el Anexo 1) a la coordinación académica del colegio solicitando el permiso para la recolección de información. En respuesta a la solicitud, el colegio dio el aval para aplicar el test e indicó la fecha en la que se debía ir a la institución. El test se aplicó de manera presencial, contando con 12 estudiantes en promedio por salón y atendiendo a las medidas de bioseguridad exigidas por el colegio para la prevención de contagio del COVID-19. En total, el test se aplicó en seis cursos diferentes, tres de séptimo y tres de octavo, consiguiendo finalmente 65 soluciones al test. En la siguiente imagen se puede observar a un estudiante resolviendo el test para la identificación de errores:

Figura 3
Estudiante presentando el test

Los estudiantes contaron con 60 minutos para resolver la totalidad de ítems propuestos, con la opción de pedir alguna aclaración si no entendían lo que se pedía en alguno de los enunciados. No se permitió el uso de calculadoras o de apuntes, sino que se pidió que contestaran de acuerdo con los conocimientos adquiridos y sin presión de que los resultados del test influyeran en sus notas del colegio.

Según el protocolo establecido por la UPN para el desarrollo de trabajos de investigación fue necesario que los acudientes de los estudiantes participantes en esta fase del proyecto firmaran un consentimiento informado (ver consentimiento en el anexo 2) que aclaraba las finalidades e intenciones de la actividad investigativa que se desarrolló con los estudiantes.

Fase 4. Análisis de resultados

Los resultados obtenidos por medio del test mostraron un conjunto de errores que los estudiantes cometieron relacionados con la realización de las operaciones potenciación y radicación. La clasificación y el análisis de los errores identificados se realizó teniendo en cuenta dos grupos de unidades de análisis, los cuales se describen a continuación:

Unidades de análisis 1: Este grupo de unidades son los mismos asuntos que permitieron la creación del instrumento de recolección de información, por lo que se espera que estas unidades permitan relacionar cada uno de los errores identificados con algunos de los numerales del test. De esta manera, las unidades de análisis 1 develan la conexión que puede existir entre un error y algunas de las competencias exigidas desde el MEN con relación a la potenciación y la radicación en $\mathbb{Z}$. La siguiente lista muestra las unidades de análisis, cada una con su respectiva abreviatura entre paréntesis:

- (ER) Hacer estimaciones razonables a partir de la potenciación o la radicación
- (DS) Definición y significado de la potenciación y la radicación
- (AJ) Argumentar y/o justificar procedimientos (aritméticos)
- (AP) Aplicación de propiedades (leyes) de la potenciación y la radicación
- (ERO) Efecto y relaciones entre la radicación y la potenciación
- (FP) Formulación de problemas que involucran la potenciación o la radicación (contextos matemáticos y no matemáticos)
- (RP) Resolución de problemas que involucran la potenciación o la radicación (contextos matemáticos y no matemáticos)

Unidades de análisis 2: las unidades que componen este grupo son las categorías de errores propuestas por Martínez (2010), además de considerar la categoría “Errores de nivel teórico (conceptual)”. Estas unidades permiten enmarcar los errores encontrados de acuerdo a una posible causa que generó el error, ya que cada una de las categorías enlaza los errores a una acción u omisión por parte de los estudiantes en la resolución de los ejercicios y tareas del test.

La siguiente lista muestra las unidades de análisis, cada una con su respectiva abreviatura entre paréntesis:

- (ETA) Errores de tipo aritmético
- (EIA) Errores debidos a la ignorancia del algoritmo
- (ESP) Errores debidos al manejo inadecuado de símbolos y presaberes
- (EAR) Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento
- (ENT) Errores de nivel teórico (conceptual)

Análisis de la información

Para el análisis de la información se tuvo en cuenta las intenciones con las cuales fueron propuestos cada uno de los ítems del instrumento de recolección de información y algunas categorías de errores descritas en el marco conceptual, sin descartar las implicaciones por el contexto en el que se encontraban los estudiantes que desarrollaron la prueba diagnóstica. Con base en esto, a continuación, se realiza una breve caracterización de la población que atendió el instrumento de recolección de información, y posteriormente se presentan los hallazgos referentes a los errores identificados, cometidos por los estudiantes al realizar potenciaciones y radicaciones en $\mathbb{Z}$.

Caracterización de la población

Los estudiantes que participaron en la resolución de la prueba diagnóstica fueron 36 niños y 29 niñas con edades entre los 12 y 15 años, los cuales estaban cursando grado séptimo o grado octavo; en específico, fueron 32 estudiantes de grado séptimo y 33 estudiantes de grado octavo. Dichos estudiantes pertenecían al colegio Liceo Antonio de Toledo, ubicado en la localidad de Bosa, en Bogotá, Colombia. Los profesores del área de matemáticas, manifestaron que a lo largo del año habían tratado la potenciación y la radicación en $\mathbb{Z}$, aunque percibían que por la manera en que se estudió en el tiempo de pandemia, los estudiantes presentaban obstáculos y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Presentación de hallazgos

Luego de recolectar los 65 test, se realizó la identificación de errores cometidos por los estudiantes con relación a la realización de las operaciones potenciación y radicación. La identificación de errores se realizó punto a punto, y en cada test. Los errores identificados fueron clasificados de acuerdo con las unidades de análisis establecidas. Con respecto a los resultados del test, cabe mencionar que ningún estudiante logró dar respuesta a todos los numerales, y, además de esto, en aproximadamente el 40% de los test, los estudiantes no lograron responder a más de la mitad de los numerales.

Por la manera en la que se construyó el test y por los resultados obtenidos, se determinaron tres escenarios desde los cuales se realizó el análisis de la información, intentando atender con precisión las dinámicas que se generaron a partir de cada numeral del test. De esta manera, se muestra a continuación el análisis hecho en cada uno de los escenarios, con una breve descripción de estos:

Escenario 1

El primer escenario se compone de los numerales 1 y 2 que se presentan en el test, los cuales son los únicos numerales que pretenden indagar solamente por el saber teórico. Por tal razón, los errores identificados en este escenario están clasificados directamente en los errores a nivel teórico (conceptual) de las *unidades de análisis 2* y se relacionan con la definición y significado de las operaciones potenciación y radicación, de las unidades de análisis 1. En este escenario se identificaron un total de 50 errores, todos relacionados con el nombramiento incorrecto de las partes de la potenciación o de la radicación.

Algunos de los errores identificados en el numeral 1 del test se muestran a continuación

Figura 4
Errores 1 en el escenario 1

ENUNCIADO
1. Identificar la base, el exponente y la potencia en la siguiente expresión: $$(-2)^3 = -8$$ Base: ___________ Exponente: ___________ Potencia: ___________

RESPUESTAS
$(-2)^3 = -8$ Base: -2 Exponente: -8 Potencia: 3
$(-2)^3 = -8$ Base: 2 Exponente: 8 Potencia: 3
$(-2)^3 = -8$ Base: -8 Exponente: (-2) Potencia: 3
$(-2)^3 = -8$ Base: -2 Exponente: - Potencia: 3

Los errores identificados muestran que los estudiantes no solamente confunden las partes de la potenciación, sino que algunos consideran que el signo negativo se puede entender como una parte de la potenciación, en específico, se observa que un estudiante consideró que el signo negativo de alguno de los números mostrados corresponde a lo que conocemos como exponente.

Ahora, algunos de los errores identificados en el numeral 2 se muestran a continuación:

Figura 5

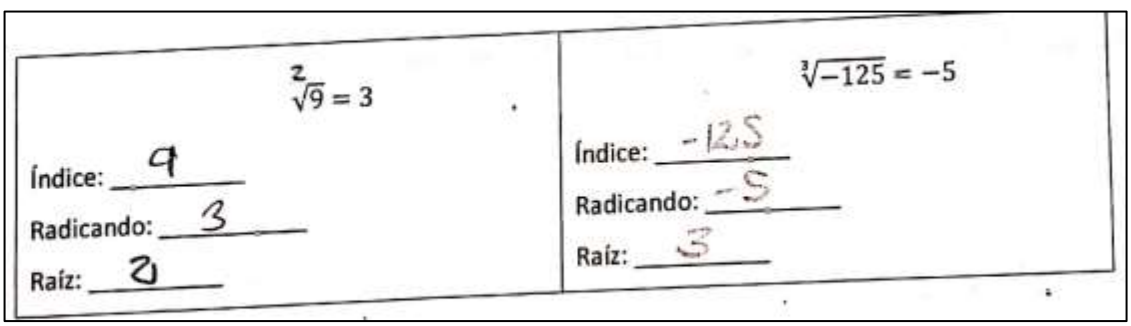
Errores 2 en el escenario 1

ENUNCIADO

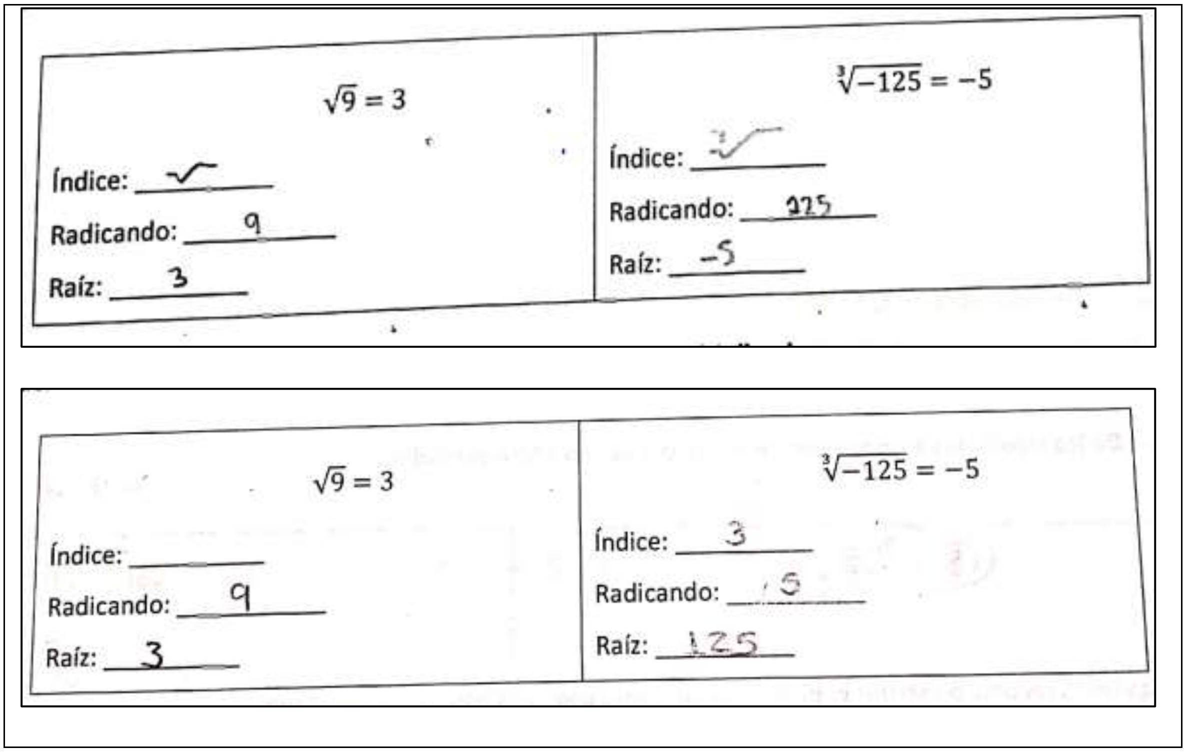
2. Identificar el índice, el radicando y la raíz en las siguientes expresiones:

$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt[3]{-125} = -5$
Índice: __________	Índice: __________
Radicando: ___________	Radicando: __________
Raíz: __________	Raíz: __________

RESPUESTAS



$\sqrt[2]{9} = 3$	$\sqrt[3]{-125} = -5$
Índice: 9	Índice: -125
Radicando: 3	Radicando: -5
Raíz: 2	Raíz: 3



$\sqrt{9} = 3$

Índice: √

Radicando: 9

Raíz: 3

$\sqrt[3]{-125} = -5$

Índice: √

Radicando: 125

Raíz: -5

$\sqrt{9} = 3$

Índice:

Radicando: 9

Raíz: 3

$\sqrt[3]{-125} = -5$

Índice: 3

Radicando: 5

Raíz: 125

Los hallazgos permiten ver varios errores que no se relacionan solamente con el nombramiento incorrecto de las partes de la radicación. Se observa que algunos estudiantes consideraron que el índice corresponde al símbolo de la radicación. Algunos otros estudiantes, al ver que de manera explícita el símbolo de la raíz cuadrada no mostraba el índice 2, consideraron que la radicación no tiene índice.

Escenario 2

Este escenario se compone de los numerales 3 al 10, los cuales permitieron que los estudiantes mostraran de manera explícita la manera en que entendían y realizaban la potenciación o la radicación. De esta manera, este escenario involucra todas las unidades de análisis 1, a excepción de la formulación de problemas. Esto indica que la mayoría de asuntos que se tomaron en cuenta para la elaboración del test condujeron a los estudiantes a la realización de potenciaciones y radicaciones.

De las unidades de análisis 2, solo se tuvieron en cuenta los tipos de errores establecidos por Martínez (2010), ya que estas categorías le permitieron clasificar los errores identificados en la realización de ejercicios que pedían directamente la realización de potenciaciones. La siguiente tabla muestra la cantidad de errores identificados en este escenario, relacionando las unidades de análisis 1 y 2 mencionadas.

Tabla 19
Relación entre unidades de análisis

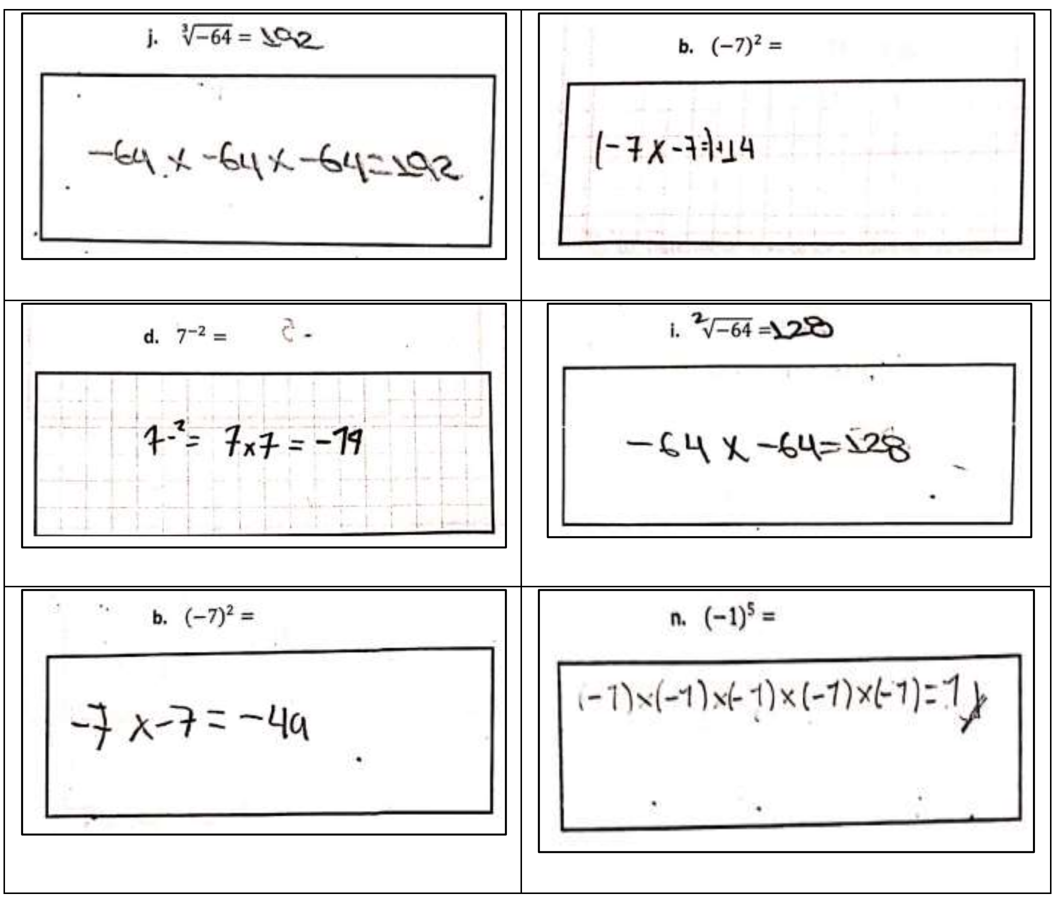
UNIDADES DE ANÁLISIS	ETA	EIA	ESP	EAR	TOTAL
ER	4	-	-	16	20
DS	44	-	37	99	180
AJ	-	-	-	4	4
AP	19	-	4	59	82
ERO	-	-	-	4	4
RP	-	-	1	-	1
TOTAL	67	-	42	182	

En el Anexo 3 se pueden observar en una tabla todos los errores que se identificaron cuando los estudiantes realizaron potenciaciones y radicaciones, con los cuales se construyó la tabla 19.

Ahora, para cada una de las categorías de error propuestas por Martínez (2010) se presentan algunos ejemplos de errores que se identificaron con comentarios al respecto.

- ***Errores de tipo aritmético:*** los errores encontrados bajo esta categoría se dieron en su mayoría por la presencia de números enteros negativos. Los estudiantes presentaron errores principalmente al ver números enteros negativos como base de alguna potenciación, aunque de igual manera se presentaron errores al ver estos números como índices o radicandos. Algunos de estos errores se muestran a continuación:

Figura 6
Errores 1 en el escenario 2

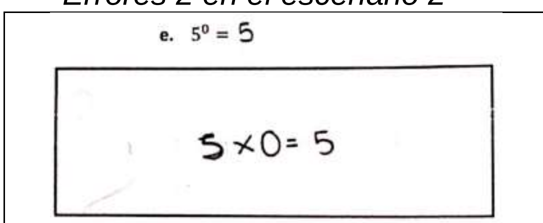


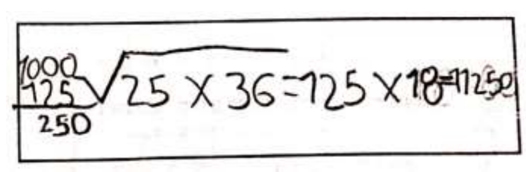
Los ejemplos muestran que, aunque los estudiantes entienden la potenciación como la escritura de la base tantas veces como lo indica el exponente para luego multiplicar, al momento de realizar las multiplicaciones algunos confunden esta operación con la adición. Además, se evidencia que algunos estudiantes no saben u operan mal de acuerdo a la ley de los signos. También, se observa que algunos estudiantes no realizan de forma correcta las operaciones, en específico cuando se tiene exponentes negativos y cuando se deben realizar radicaciones, ya que expresan su solución como varias multiplicaciones, y luego a esto realizan de forma incorrecta dichas operaciones. Estos ejemplos develan que es posible encontrar más de un tipo de error al momento de realizar una potenciación o una radicación, pues los estudiantes tienen asociaciones incorrectas al momento de realizar las operaciones o cometen un error de tipo teórico (por ejemplo, desarrollando una radicación como una potenciación), y luego cometen errores aritméticos sobre dichas asociaciones incorrectas.

Otros ejemplos de errores de tipo aritmético son los siguientes

Figura 7

Errores 2 en el escenario 2





En estos ejemplos, de nuevo, es posible observar que adicional a las asociaciones incorrectas para resolver las operaciones, los estudiantes realizan de forma incorrecta las multiplicaciones, ya que al parecer piensan que al multiplicar un número por cero da el mismo número, y además algunos presentan errores con la realización de multiplicaciones entre números de dos o tres cifras.

- ***Errores debidos al manejo inadecuado de símbolos y presaberes:*** para esta categoría se evidencia que los errores cometidos por los estudiantes están relacionados principalmente con los numerales en los que se trataba sobre la definición y el significado de la potenciación y la radicación, además de la presencia de números enteros negativos en dichas operaciones. Algunos ejemplos son los siguientes:

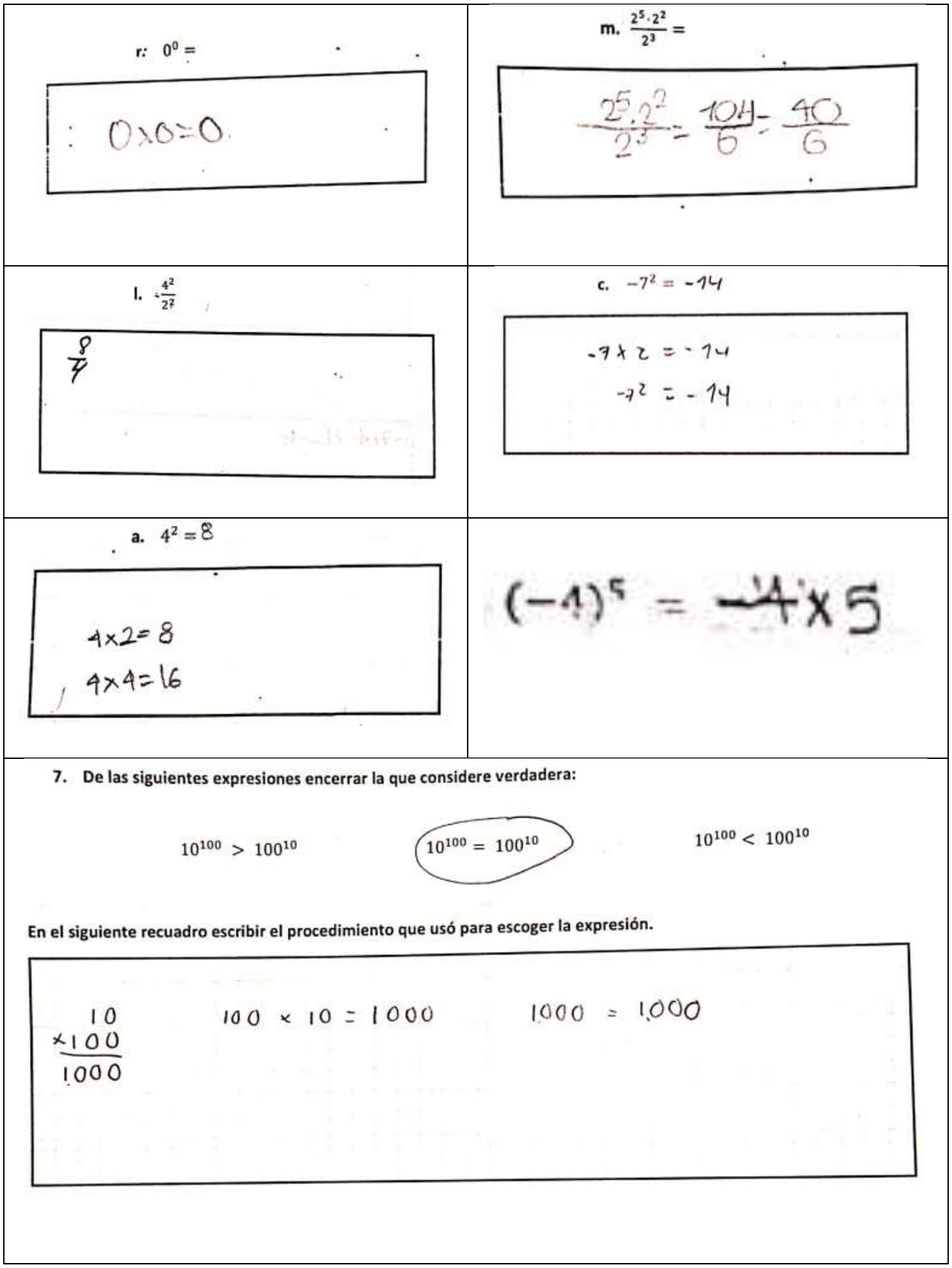
Figura 8
Errores 3 en el escenario 2

$7\times7\times8\times8\times8\times7 = 7^3\ 8^3 = 21, 24$	$7\times7\times8\times8\times8\times7 = 7^3 \quad 8^3$
$(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = -2^4$	$(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = (-2^4)$
j. $\sqrt[3]{-64} = 4$ $\boxed{4\times4\times4=64}$	

Algunos estudiantes evidencian, en los ejemplos anteriores, que no hay un manejo adecuado del símbolo que expresa la multiplicación, ya que luego de expresar las multiplicaciones como potenciaciones, al parecer no se sintieron seguros de usar el símbolo de multiplicación para dar una sola solución, sino que prefirieron dejar un espacio considerable o usar una coma en el lugar en el cual se debería expresar multiplicación. Además, los ejemplos muestran que algunos estudiantes no tienen un manejo adecuado de los paréntesis cuando se pretende distinguir si un número entero es positivo o negativo. Es posible que estos estudiantes no identifiquen que los paréntesis determinan muchas veces la jerarquía de las operaciones que se muestran en una expresión, lo cual es determinante cuando en las operaciones hay presencia de números negativos y la manera de proceder con dichos números determina el signo final de la expresión simplificada. Finalmente, en el ejemplo del error en la radicación, podemos ver que el estudiante ignoró o no considero el signo negativo del radicando, por lo cual procedió como si se tratara de una radicación de solo números positivos.

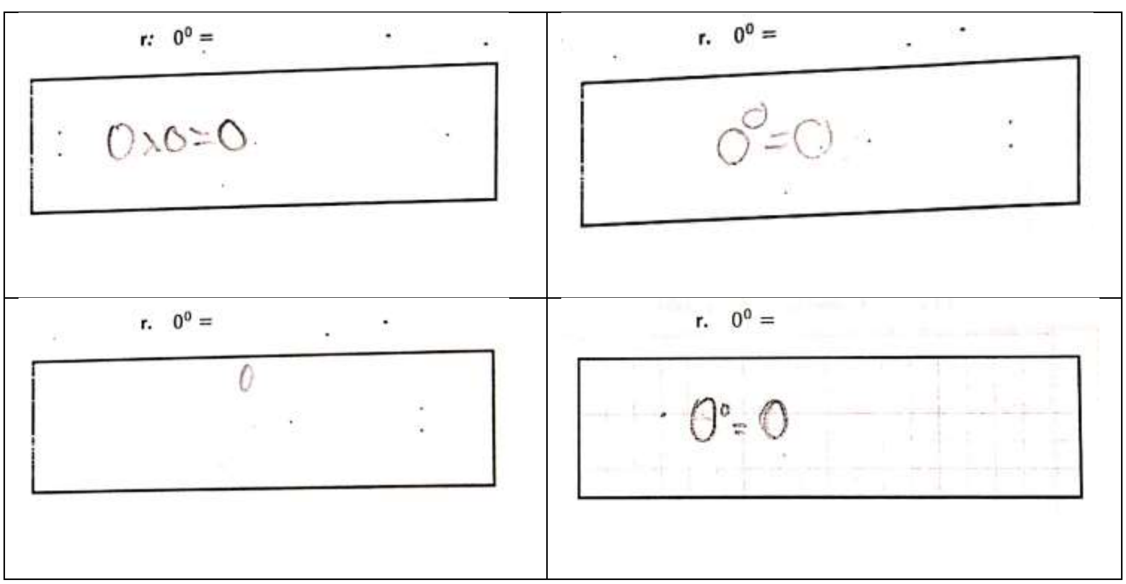
- ***Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento:*** varios de los errores identificados en los resultados de la prueba diagnostican fueron a causa de que algunos estudiantes entendían que la realización de una potenciación era la multiplicación entre la base y el exponente. Esta idea fue evidenciada en 24 estudiantes; algunas de las producciones que contienen errores a causa de esta asociación incorrecta de la potenciación son:

Figura 9
Errores 4 en el escenario 2



Es posible pensar que esta idea de realizar la potenciación multiplicando la base por el exponente sea la que haya impulsado a una buena parte de los estudiantes a decir que la indeterminación 0^0 es igual a 0, aunque, de las 37 pruebas en las que se halló este error, solamente en una se muestra explícitamente la multiplicación $0 \times 0 = 0$. Por otro lado, también se puede considerar la rigidez de pensamiento que pueden tener algunos estudiantes, al pensar que si una operación involucra el número cero su resultado va a ser cero, aludiendo a que todo número multiplicado por cero da como resultado cero, o pensando en que como el cero sirve como representación de la nada, entonces operar en conjunto con el cero dará como resultado la nada, es decir, cero. Algunas de las evidencias que muestran este error son:

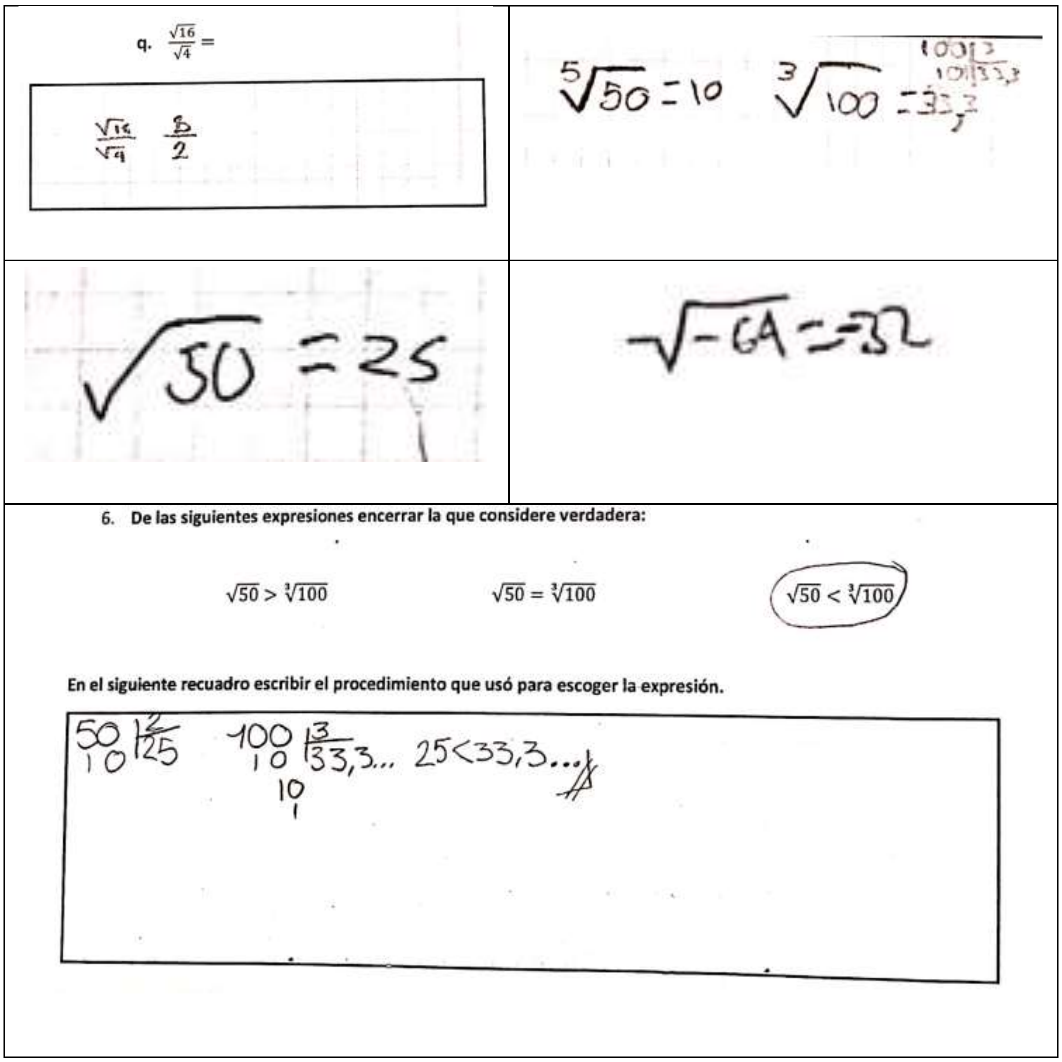
Figura 10
Errores 5 en el escenario 2



Con respecto a la radicación, se evidenció que algunos estudiantes relacionan esta operación con la división, por lo tanto, cuando se les presenta una radicación proceden a realizarla dividiendo el radicando entre el índice. Algunos ejemplos que evidencian esto son

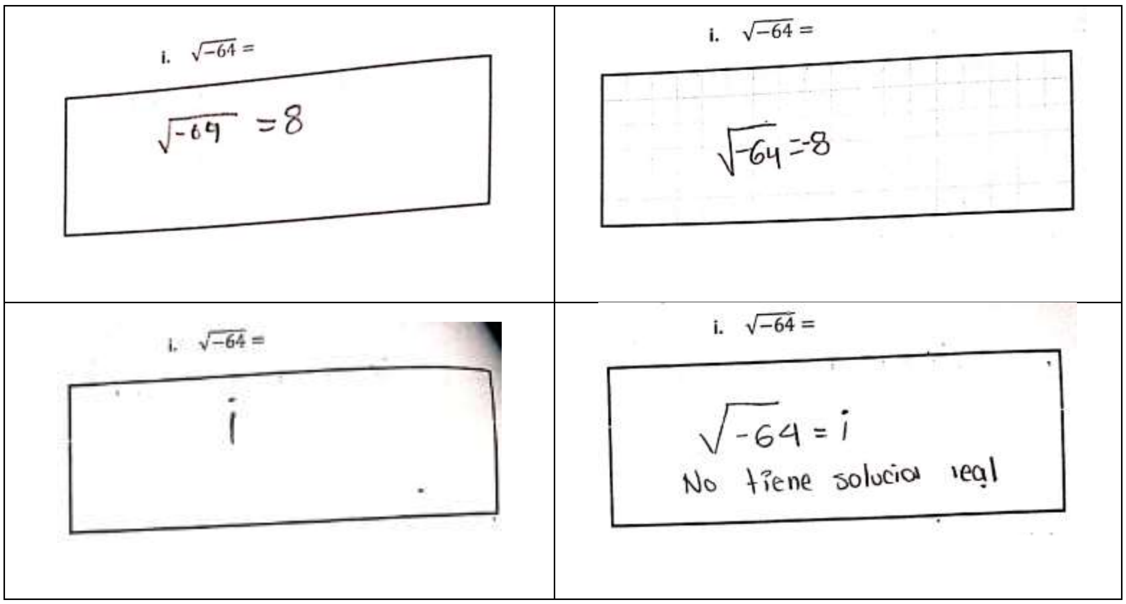
Figura 11

Errores 6 en el escenario 2



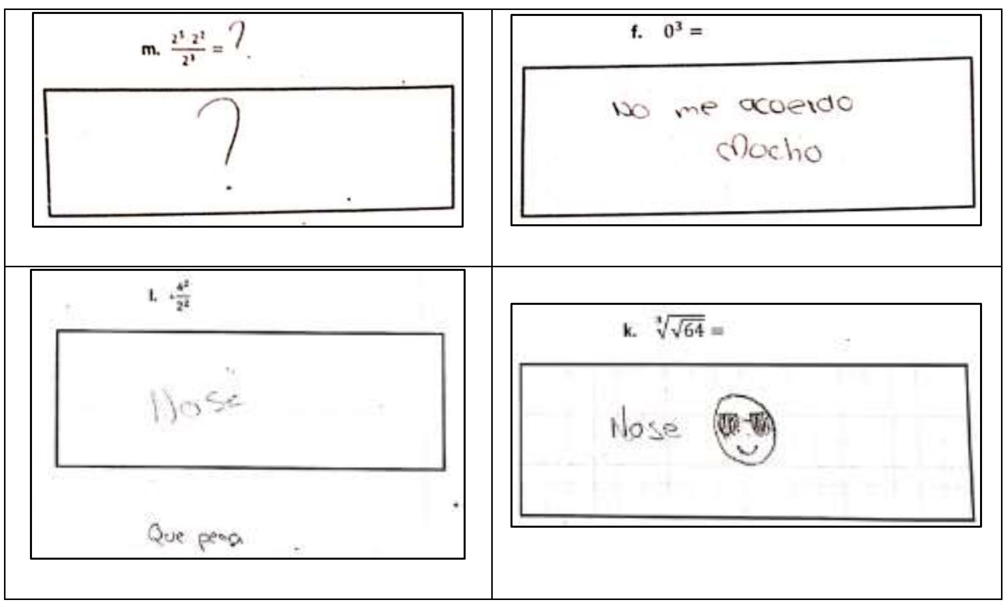
Además, también se encontró que varios estudiantes asocian de manera incorrecta la realización de una raíz cuadrada de un número negativo con la raíz cuadrada de un número positivo; aunque también, se vio el caso en que algunos estudiantes reconocían que la raíz cuadrada de un número negativo pertenece al conjunto de los números complejos, por lo cual en sus respuestas indicaban esto con el símbolo de los números imaginarios, pero respondían de manera errónea. Algunos ejemplos de lo que se comenta son:

Figura 12
Errores 7 en el escenario 2



- ***Errores debidos a la ignorancia del algoritmo:*** en cuanto a este tipo de error, Martínez (2010) permite evidenciar que la garantía que respalda el clasificar un error dentro de esta categoría es el testimonio de los estudiantes. En su trabajo, Martínez (2010) muestra que por medio de entrevistas a los estudiantes que participaron respondiendo el test diagnóstico que elaboró para la identificación de errores, logró corroborar que varias de las respuestas dadas por los estudiantes eran dadas porque no sabían o no recordaban como resolver las operaciones. Debido a esto, y al hecho de que para el presente trabajo no se realizaron entrevistas a estudiantes para que confirmaran las razones de sus respuestas, se determinó no incluir en esta categoría ningún error de los que se identificaron y que posiblemente podrían estar incluidos. Además de esto, al revisar la postura que se ha tomado sobre la definición de error, se considera que las manifestaciones de los estudiantes expresando el desconocimiento o el olvido del saber relacionado con la realización de la potenciación y la radicación, no se tomará como un error. De esta manera, evidencias como las que se muestran a continuación, no se contaron como errores

Figura 13
Errores 8 en el escenario 2



Finalmente, cabe resaltar que respecto a los numerales que requerían la resolución de un problema y estimaciones razonables, se evidenció lo siguiente:

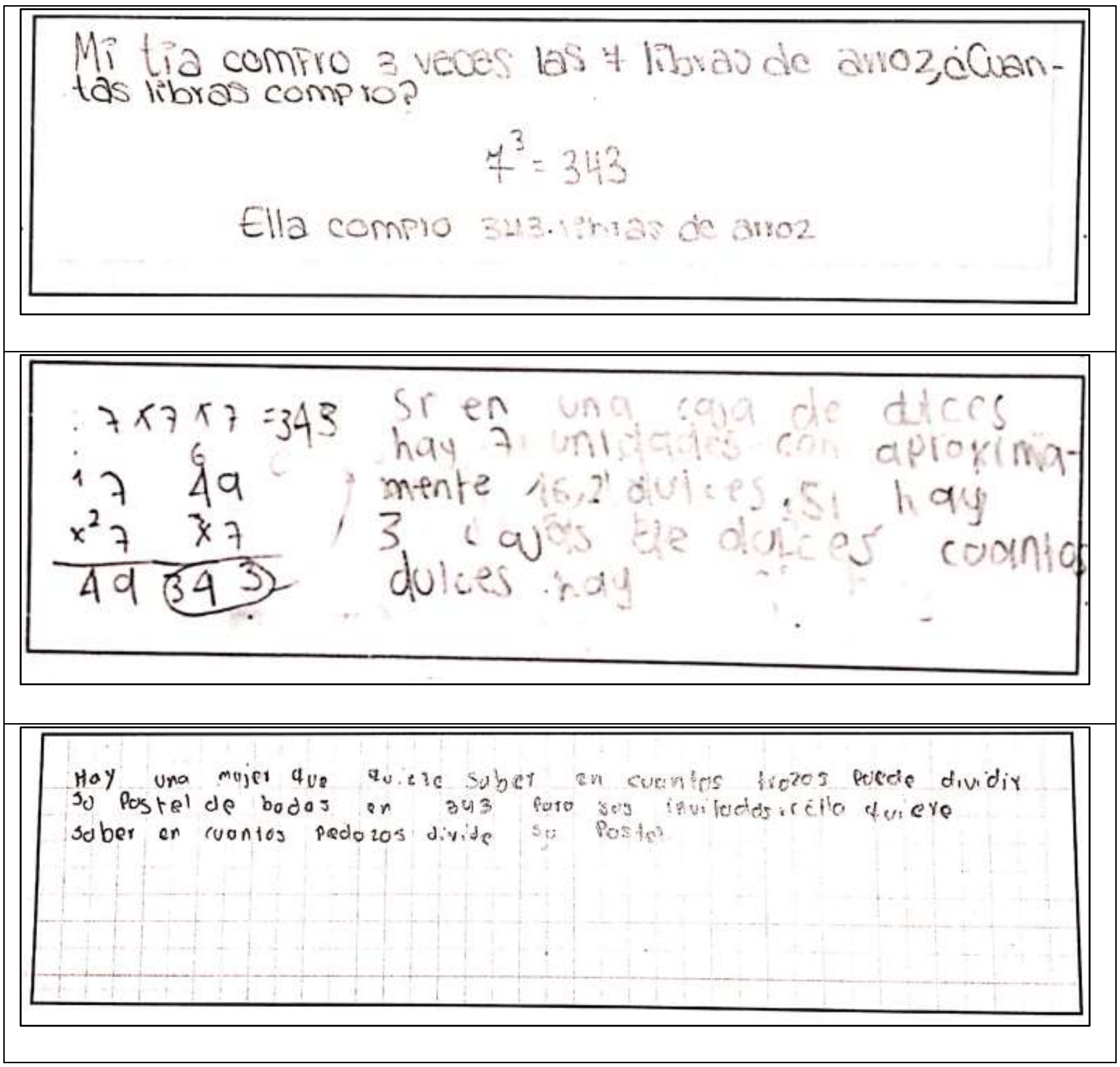
- El numeral 5, que solicita la longitud de una arista de un cubo según un volumen dado, solo fue contestado por 20 de los 65 estudiantes que realizaron el test. De estos 20 estudiantes, doce estudiantes plantearon una radicación para resolver el problema, pero dos de ellos cometieron un error en la realización de la potenciación. Dicho error, parece ser azaroso, pues no se logra detectar alguna posible causa para cometerlo.

- El numeral 9, que planteaba una situación sobre la reproducción de una bacteria, no llevó a que ningún estudiante planteara una potenciación para resolverlo, Los estudiantes que lograron resolverlo plantearon una serie de multiplicaciones repetidas, pero no explicitaron la potenciación que se esperaba.
- Los numerales 6 y 7, los cuales pretendían que los estudiantes realizaran estimaciones razonables con base en la potenciación y la radicación, condujeron a que algunos estudiantes realizaran radicaciones y potenciaciones de forma explícita. Para estos numerales se evidencio que algunos estudiantes tienen asociaciones incorrectas con respecto a la potenciación, pues ante la expresión 100^{10} determinaban que la potencia se obtenía al multiplicar la base con el exponente. Para el caso de la expresión $\sqrt[3]{100}$ algunos determinaron la raíz dividiendo el radicando entre el índice.

Escenario 3

En este escenario únicamente se tiene en cuenta el numeral 11 de la prueba diagnóstica. Dicho ítem se propuso con la intención de que los estudiantes formularan un problema en un contexto matemático o no matemático, con base en una potenciación dada. Se decidió analizar las respuestas dadas a este ítem en un apartado diferente, ya que según los datos obtenidos los estudiantes en su mayoría no respondieron a la solicitud, y las pocas respuestas obtenidas aluden a ciertos conceptos que se deberían tratar desde los errores en la invención de problemas. Para este ítem se obtuvieron siete respuestas. De las siete respuestas, cuatro de estas se muestran a continuación:

Figura 14
Errores 1 en el escenario 3


Mi tia compro 3 veces las 7 libras de arroz, ¿Cuantas libras compro?

$7^3 = 343$

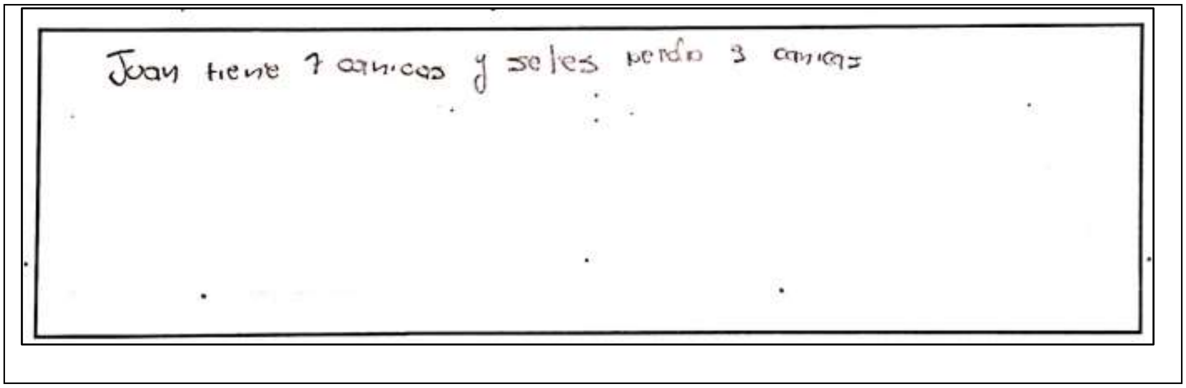
Ella compro 343 libras de arroz

$7 \times 7 \times 7 = 343$

$$\begin{array}{rr} 7 & 49 \\ \times^2 7 & \times 7 \\ \hline 49 & 343 \end{array}$$

Si en una caja de dulces hay 7 unidades con aproximadamente 16,21 dulces, si hay 3 cajas de dulces cuantos dulces hay

Hay una mujer que quiere saber en cuantos trozos puede dividir su postel de bodas en 343 para sus invitados, ella quiere saber en cuantos pedazos divide su postel

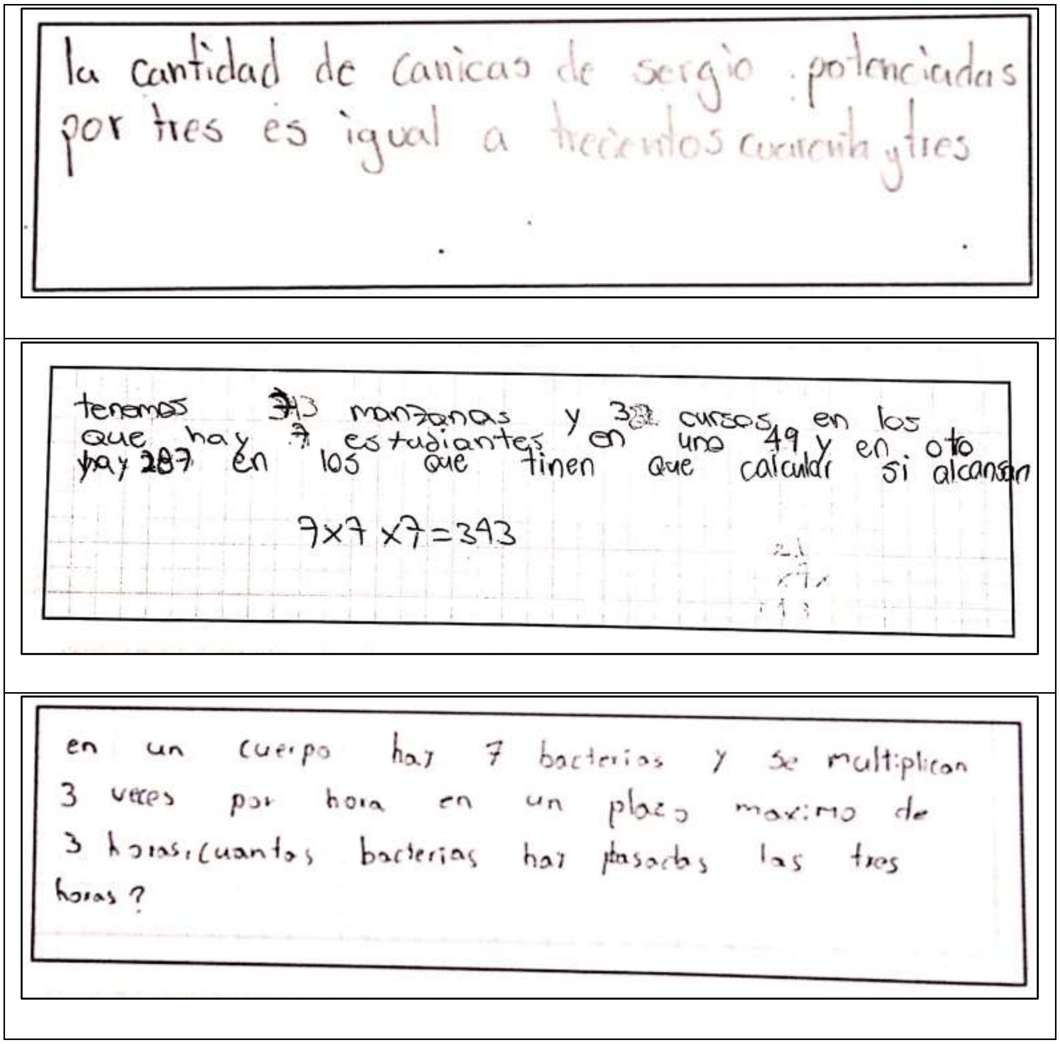


Estas respuestas permiten ver que los estudiantes plantean un contexto inadecuado del problema, ya que las situaciones que describen conllevan a pensar en las operaciones multiplicación, división y resta, y no aluden a una potenciación. En las cuatro respuestas dadas, se procura utilizar los datos que se proporcionaron; sin embargo, la asociación que al parecer se estableció para cada parte de la potenciación en las situaciones problema no es la más apropiada para lograr establecer que la potenciación es la operación a la cual deba acudirse para resolver el problema. Estas respuestas permiten pensar que los estudiantes están teniendo asociaciones incorrectas respecto a la realización de la potenciación.

Las otras tres respuestas evidencian que los estudiantes no proponen una situación problema, sino que solamente escriben una afirmación procurando usar los datos que se dan en el enunciado. Un estudiante intentó usar como referencia uno de los enunciados propuestos en el test, pero no le fue posible plantear con éxito el problema que se requería. Las tres repuestas de las cuales se comenta son:

Figura 15

Errores 2 en el escenario 3



la cantidad de canicas de sergio potenciadas por tres es igual a trecentos cuarenta y tres

tenemos 343 manzanas y 3 cursos en los que hay 7 estudiantes en uno 49 y en oto hay 287 en los que tinen que calculár si alcansan

$7 \times 7 \times 7 = 343$

en un cuerpo hay 7 bacterias y se multiplican 3 veces por hora en un plazo maximo de 3 horas, cuantos bacterias hay pasadas las tres horas ?

De esta manera, en este escenario se observaron errores que no tienen relación directa con la realización de la potenciación, sin embargo, tales errores son evidencias de que los estudiantes les cuesta asociar dicha operación con contextos matemáticos o no matemáticos, es decir, los estudiantes realizan planteamientos de contextos inadecuados, en los que ellos creen que se deberán usar la potenciación para encontrar una solución, pero en realidad aluden a otras operaciones, haciendo asociaciones incorrectas entre la potenciación y los contextos que proponen.

Conclusiones

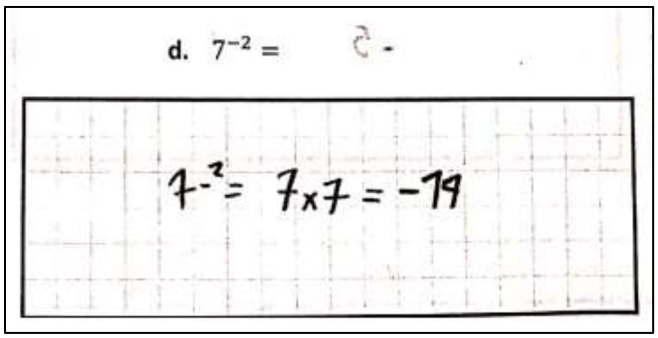
En seguida se muestran las diferentes conclusiones del trabajo.

Conclusiones del análisis:

Se listan a continuación las conclusiones del análisis realizado:

- Es posible encontrar respuestas de estudiantes que no tienen un solo tipo de error, sino que corresponden a distintos tipos de errores, por ejemplo:

Figura 16
Varios errores



En la imagen notamos que el estudiante tiene una asociación incorrecta de cómo resolver la potenciación, y ante un exponente negativo resuelve como si se tratara de un exponente positivo, pero, además, la multiplicación que plantea la resuelve de forma incorrecta. De esta manera, vemos un caso en el que tenemos un error debido a asociación incorrecta o rigidez de pensamiento, y a su vez, un error de tipo aritmético.

- La presencia de números enteros negativos y el cero en las potenciaciones y radicaciones tienden a llevar a los estudiantes a que cometan algún tipo de error, aunque principalmente errores de tipo aritmético o errores debidos a asociación incorrecta o rigidez de pensamiento.

- A pesar de que se procuró clasificar todos los errores identificados, se observó que hay errores posiblemente debidos al azar o a algún despiste, en algunos casos posiblemente como producto del desconocimiento o el olvido de lo relacionado con la realización de la potenciación y la radicación. Dichos errores no son posibles de clasificar dentro de las categorías propuestas por Martínez (2010), ya que para este autor estos errores no debían ser tenidos en cuenta.

Sobre la información recolectada

La información recolectada permitió ver que para los estudiantes resulta tedioso el estudio de la potenciación y la radicación en $\mathbb{Z}$. Muchos de los errores que se identificaron fueron producto de potenciaciones y radicaciones que involucraban números negativos y el cero. Esto muestra que para los estudiantes es realmente difícil pasar de estudiar las operaciones con números naturales a estudiar las operaciones con números enteros.

También, vemos que es posible que a partir de las competencias promovidas por el MEN desde los documentos curriculares se conduzca a los estudiantes a realizar las operaciones potenciación y radicación, y en el caso de la formulación de problemas, se lleve al estudiante a reflexionar sobre su saber teórico con respecto a las operaciones en cuestión.

Al notar que cerca del 40% de los estudiantes no respondió más de la mitad de los numerales propuestos en el test diagnóstico, se evidencia la desatención que pueden tener las instituciones educativas a las operaciones potenciación y radicación, además de proporcionar un abordaje ineficaz al conjunto de los números enteros, ya que una gran parte de los errores identificados por medio del test involucraban el mal manejo de los números enteros negativos y el cero.

Sobre el trabajo en general

La actividad investigativa que se generó por medio del trabajo de grado realmente contribuyó a la formación profesional del autor del presente texto. El poder entrar a las aulas de clase y estar en contacto con los estudiantes es una experiencia que hace palpable el saber teórico que se maneja a lo largo de toda una carrera de Licenciatura en matemáticas. Intentar precisar la manera en que los estudiantes van construyendo su conocimiento, fue una actividad permanente a lo largo del desarrollo del trabajo de grado, pues, para la identificación de los errores que los estudiantes cometieron al realizar potenciaciones y radicaciones, se requirió leer con bastante discernimiento las respuestas que se dieron al test.

Algunos elementos relacionados con la recolección de la información fueron determinantes al intentar dar más profundidad a la actividad investigativa que acarreó el desarrollo del trabajo de grado. El volumen de preguntas y solicitudes de explicaciones a lo largo del test procuró atender una amplia gama de factores relacionados con la potenciación y la radicación en $\mathbb{Z}$, sin embargo, en el afán de atender todos los factores se diseñó un test un poco extenso, el cual debió ser resuelto por los estudiantes en un tiempo muy ajustado. Además de esto, varias de las respuestas de los estudiantes realmente invitaban a indagar por medio de entrevistas el verdadero motivo por el cual eran escritas dichas respuestas, ya que en muchas ocasiones no eran claras las intenciones de los estudiantes; las entrevistas nos hubieran acercado un poco más al por que los estudiantes cometen ciertos errores.

Inevitablemente se debe reconocer que la potenciación y la radicación en $\mathbb{Z}$ no son tan suficientemente atendidos en la educación escolar, incluso ni en la formación de profesores, ya que también se presentaron momentos en los que el autor y la asesora del trabajo de grado confundían u olvidaban los nombres de los términos de una radicación.

Recomendaciones

- Se recomienda dar una mirada al estudio de la evolución histórica de la potenciación y radicación, desde su uso hasta su objetivación, para ver si los errores identificados en los cuestionarios resueltos por los estudiantes se corresponden con momentos históricos.
- Es importante explorar y profundizar las construcciones teóricas de los números enteros por pares ordenados según Peano y Weitrass mencionado por kline (1972) citado por Kleiner (1992)
- Se sugiere atender, de forma investigativa, lo relacionado a la formulación y resolución de problemas en contextos matemáticos y no matemáticos, con miras a establecer acciones que promuevan dichas competencias en los estudiantes.

Referencias Bibliográficas

Ángel, H. (2009). *Errores identificados en los niños y niñas del club de matemáticas al estudiar los triángulos* [Trabajo de grado]. Universidad pedagógica Nacional

Brousseau, G (1997). *Theory of didactical situations in Mathematics*. Editado y traducido por Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. Y Warfield, V. Gran Bretaña. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers

Carrión, V. (2007). *Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales*. Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática, (11), 19-57.
http://www.fisem.org/www/union/revistas/2007/11/Union_011_007.pdf

Castillo, L., Galvis, F., y Parada, S. (2015). *Errores en los que recaen los estudiantes de séptimo grado cuando resuelven situaciones que implican el uso de la potenciación y sus propiedades*. RECME, 1(1), 107-112.
http://funes.uniandes.edu.co/8545/1/Castillo2015Errores.pdf

Cid, E. y Bolea, P. (2007). *Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico* [Comunicación]. 2 e congrès TAD, Uzès.
http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/11%20-%20Cid&Bolea%20TAD%202.pdf

Contreras, F. (2013). *Epistemología del número cero*. Horizonte de la Ciencia, 3(4), 43-48. https://www.redalyc.org/journal/5709/570960879006/570960879006.pdf

Franchi, L. y Hernández, A. (2004). *Tipología de errores en el área de la geometría plana*. Educere, 8(24), 63-71. https://www.redalyc.org/pdf/356/35602411.pdf

Godino, J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/local/jgodino/

Godino, J. (2013). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, (11), 111-132.

Gómez, K., Wilches, L., Ruiz, R. y Corrales, Z. (2012). *Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes del 6º grado de educación básica secundaria en la institución educativa Almirante Colón* [Trabajo de grado]. Universidad Francisco de Paula Santander, Santander, Colombia.

Kleiner, I. (1992). *Themes in the evolution of number systems*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 23(3), 445-461. http://dx.doi.org/10.1080/0020739920230314

Luque, C., Jiménez, H. y Ángel, J. (2013). *Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Representar estructuras algebraicas finitas y enumerables*. Fondo editorial. Universidad Pedagógica Nacional

Martínez, I., Lentini, M., Crespo, S. y Lentini M.C. (2006). *Observación y analisis de errores en una expresión con valor absoluto cometidos en una evaluación: un estudio de caso*. REPEM. La pampa, Argentina

Martínez, D. (2010) *Identificación de los errores en la aplicación de las propiedades de la potenciación* [Trabajo de grado]. Universidad Industrial de Santander

McIntosh, A., Reys, B., y Reys, R. (1992). *A proposed framework for examining basic number sense*. For the learning of mathematics, 12(3), 2-44. http://www.jstor.org/stable/40248053

MEN (1998). *Serie Lineamientos Curriculares Matemáticas*. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

MEN (2016). *Derechos básicos de aprendizaje: Matemáticas. http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/DBA_Matematicas.pdf*

Morales, S. (2017). *Errores que presentan estudiantes de undécimo, en el uso del lenguaje algebraico* [Trabajo de grado]. Universidad Pedagógica Nacional.

Rico, L. (1997). *Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas*. Revista Épsilon, 38, 185-198. http://funes.uniandes.edu.co/2354/1/Rico1997Reivindicaci%C3%B3n.pdf

Rico, L. (1998). *Errores en el aprendizaje de las matemáticas*. En Jeremy Kilpatrick, Pedro Gómez y Luis Rico (Eds.), Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: una empresa docente. http://funes.uniandes.edu.co/679/1/KilpatrickEducacion.pdf

Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria*. En Rico, L. Dir., Castro E., Coriat, M., Martín, A., Puig, L., Sierra, M., Socas, M.M. (Ed.). *La Educación Matemática en la Secundaria*.: ice-Horsori. (pp. 125-154)

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2007). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo. Quinta Edición*. Editorial Cengage Learning.

Vargas-Machuca, I., Jimeno, M., Iriarte, M., González, J., Ortiz, A., Sanz, E., y Ortiz, A. (1990). *Números enteros.* Editorial Síntesis, Madrid, España.

Anexos

Anexo 1. Carta de solicitud al colegio para la aplicación del test

Bogotá, D.C., noviembre 10 de 2021

Profesor
Felipe Gutiérrez
Consejo Directivo
Colegio Liceo Antonio de Toledo
La Ciudad

Cordial saludo:

Mediante esta comunicación nos permitimos solicitarle su colaboración para que los estudiantes de su institución de los grados 7° y 8° participen en la respuesta a un test diseñado en el marco del trabajo de grado para optar al titulo de Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), titulado "Identificación de errores en la realización de las operaciones potenciación y radicación en los números enteros", el cual está siendo llevado a cabo por el maestro en formación inicial abajo firmante, bajo la asesoría de la profesora de la UPN también abajo firmante.

El objetivo de este trabajo es indagar y caracterizar los errores que cometen los estudiantes al realizar potenciaciones y radicaciones, partiendo fundamentalmente de que el error es un elemento fundamental para la construcción de los saberes y porque el profesor requiere conocer los posibles errores que pueden cometer sus estudiantes, no para señalarlos sino para contribuir en los procesos de aprendizaje de los educandos.

En esta dirección, algunas de las preguntas que se formularán en el test son las siguientes:

1. **Identificar la base, el exponente y la potencia en la siguiente expresión:**

$$(-2)^3 = -8$$

Base: __________ Exponente: ______________ Potencia: _____________

2. **Identificar el índice, el radicando y la raíz en las siguientes expresiones:**

$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt[3]{-125} = -3$

Índice: Radicando: Raíz:	Índice: Radicando: Raíz:

3. **De las siguientes expresiones encerrar la que considere verdadera. En el recuadro escribir el procedimiento que usó para escoger la expresión.**

$\sqrt{50} > \sqrt[3]{100}$ $\sqrt{50} = \sqrt[3]{100}$ $\sqrt{50} < \sqrt[3]{100}$

4. **De las siguientes expresiones encerrar la que considere verdadera. En el recuadro escribir el procedimiento que usó para escoger la expresión.**

$10^{100} > 100^{10}$ $10^{100} = 100^{10}$ $10^{100} < 100^{10}$

5. **Escribir en forma de potencia las siguientes multiplicaciones**

   a. $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$
   b. $7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 7$
   c. $(-5) \times 5 \times (-5) \times 5$

6. **Escribir en forma de multiplicación las siguientes potencias**

   a. $(-4)^8$
   b. 10^3
   c. 9^{-2}
   d. $5^3 \times 3^5$

7. **El volumen de un cubo es $4913m^3$. ¿Cuál es la longitud de una de sus aristas?**

8. **Formular un problema en el que se deba utilizar la expresión $14^3 = 2744$ para determinar su solución.**

Prevemos que la solución al test tarde entre 45 y 60 minutos (1 hora de clase)

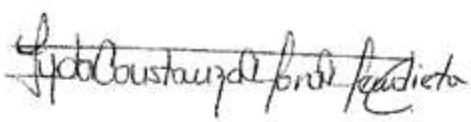
La información recolectada en las respuestas al test serán protegidas de acuerdo con la normatividad nacional e institucional de la UPN y serán utilizadas solo con fines académicos;

por ello, para el uso de la información suministrada por los estudiantes, será necesario contar con la autorización de los acudientes en el formato dispuesto por la Universidad para tal fin, el cual, si Ud. está de acuerdo, podría ser llevado impreso a los acudientes el día de la entrega de calificaciones finales por parte del maestro en formación.

Agradeciendo su atención y el apoyo que puedan brindar,

Firman:

Sergio Yesid Bejarano Sánchez
Maestro en formación inicial
Est. Licenciatura en Matemáticas
Departamento de Matemáticas - Facultad de Ciencia y Tecnología
Cód. 2017240005
C.C. 1012403599



Lyda Constanza Mora Mendieta
Profesora T.C.
Departamento de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Departamento de Psicopedagogía
Licenciatura en Educación Básica Primaria
Móvil: 300 555 74 04

Anexo 2. Consentimiento informado para la recolección de datos

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	FORMATO		
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN		
Código: FOR026INV	Fecha de Aprobación: 28-08-2019	Versión: 02	Página 1 de 2

Vicerrectoría de Gestión Universitaria
Subdirección de Gestión de Proyectos – Centro de Investigaciones CIUP
Comité de Ética en la Investigación

En el marco de la Constitución Política Nacional de Colombia, la Ley Estatutaria 1581 de 2012 "Por la cual se dictan disposiciones generales para la protección de datos personales" y la Resolución 1642 del 18 de diciembre de 2018 "Por la cual se derogan las Resoluciones Nº0546 de 2015 y Nº1804 de 2016, y se reglamenta el Comité de Ética en Investigación de la Universidad Pedagógica Nacional y demás normatividad aplicable vigente, se ha definido el siguiente formato de consentimiento informado para proyectos de investigación realizados por miembros de la comunidad académica considerando el principio de autonomía de las comunidades y de las personas que participan en los estudios adelantados por miembros de la comunidad académica.

Lo invitamos a que lea detenidamente el Consentimiento informado, y si está de acuerdo con su contenido exprese su aprobación firmando el siguiente documento:

PARTE UNO: INFORMACIÓN GENERAL DEL PROYECTO

Titulo del proyecto de investigación	Identificación de errores en la realización de las operaciones potenciación y radicación en $\mathbb{Z}$.		
Resumen de la investigación	Esta investigación tiene objetivo principal proveer información valiosa para el profesor de matemáticas, en formación inicial o en ejercicio, alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de la potenciación y la radicación en $\mathbb{Z}$, presentando posibles errores de los estudiantes alrededor de estos contenidos. Esto, a partir de la sistematización de errores expresados por estudiantes de la ciudad de Bogotá, D.C., de séptimo y octavo grado al proponerles un test organizado a la luz de información matemática y didáctica consultada en investigaciones análogas, documentos curriculares colombianos y textos escolares. Todo lo anterior, considerando que el error siempre está presente en cualquier proceso de aprendizaje e incluso reconociendo que es fundamental para que este se dé y que es insumo para la continua construcción del conocimiento y que contar con esos posibles errores puede contribuir a los profesores en sus gestiones de clase y en la comprensión de los procesos cognitivos de sus estudiantes. Vale indicar que en la bibliografía consultada no se halló información alguna sobre errores relativos a la radicación, lo que implica, de alguna manera, la pertinencia de este estudio.		
Descriptores claves del proyecto de investigación	Errores, potenciación, radicación, números enteros.		
Descripción de los posibles beneficios de participar en el estudio	La participación en este estudio permitirá que los estudiantes confronten sus saberes adquiridos con los saberes esperados según las disposiciones curriculares colombianas, alrededor de la potenciación y radicación entre números enteros, reforzando además los conocimientos que se tienen de estos objetos matemáticas. Además, las respuestas de los estudiantes permitirán al profesor, que consulte el trabajo de grado, la reflexión sobre la labor del docente en matemáticas en el tratamiento de los errores y la implicación que tienen estos en la planeación de tareas escolares y en aprendizaje de las matemáticas en general. Los errores identificados en la radicación entre números enteros serán novedosos por cuanto no se halló información bibliográfica alguna alrededor de ello.		
Mencione la forma en que se socializarán los resultados de la investigación	El análisis de los datos obtenidos se presentará en una monografía, en el marco de un trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Además, se intentará divulgar los resultados en eventos académicos, por medio de alguna ponencia en algún evento nacional o internacional o de algún artículo.		
Explicite la forma en que mantendrá la reserva de la información	No se hará mención de los nombres de los participantes, se hará referencia a los estudiantes por medio de frases como "Estudiante A" o "Estudiante B".		
Datos generales del investigador	**Nombre(s) y Apellido(s):** Sergio Yesid Bejarano Sánchez		
	Nº de Identificación: 1012403599	**Teléfono**	3144252528

FORMATO			
CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN			
Código: FOR026INV	Fecha de Aprobación: 28-08-2019	Versión: 02	Página 2 de 2

principal	**Correo electrónico:** sybejaranos@upn.edu.co
	Dirección: Calle 72 sur # 78ª - 32

PARTE DOS: CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo: ____

Identificado con Cédula de Ciudadanía__________________, en representación de ___________________________ con número de identificación __________________.

Declaro que:

1. He sido invitado a participar en la investigación y de manera voluntaria he decidido hacer parte de este estudio.
2. He sido informado sobre los temas en que se desarrollará el estudio, han sido resueltas todas mis inquietudes y entiendo que puedo dejar de participar en cualquier momento si así lo deseo.
3. Sobre esta investigación me asisten los derechos de acceso, rectificación y oposición que podré ejercer mediante solicitud ante el investigador responsable, en la dirección de contacto que figura en este documento.
4. Conozco el mecanismo mediante el cual los investigadores garantizan la custodia y confidencialidad de mis datos.
5. La información obtenida de mi participación será parte del estudio y mi anonimato se garantizará. Sin embargo, si así lo deseo, autorizaré de manera escrita que la información personal o institucional se mencione en el estudio.
6. Autorizo a los investigadores para que divulguen la información y las grabaciones de audio, video o imágenes que se generen en el marco del proyecto y que no comprometan lo enunciado en el punto 4D.

En constancia, manifiesto que he leído y entendido el presente documento.

Firma, Firma del participante (si aplica),

____ ________________________________

Nombre: ___________________________________
Identificación: _______________________________
Fecha: _____________________________
Con domicilio en la ciudad de: ___________________
Dirección: ______________________________
Teléfono y N° de celular: ______________________

Correo electrónico: ________________________

La Universidad Pedagógica Nacional agradece sus aportes y su decidida participación

Anexo 3. Tabla con los errores identificados en la realización de las operaciones potenciación y radicación

#	ERROR IDENTIFICADO	CLASIFICACIÓN SEGÚN CATEGORIAS DE MARTINEZ (2010)
1	$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^6 = 36$	ETA
2	$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^5$	ESP
3	$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = \sqrt{6}^6$	ESP
4	$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6x^6x^6x^6x^6x^6$	ESP
5	$7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 7 = 7^3\ 8^3 = 21{,}24$	ESP, EAR
6	$7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 7 = 7^3 \qquad 8^3$	ESP
7	$7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 7 = 7^7 = 49$	ESP, EAR
8	$7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 7 = 7^3 \times 8^3 = 21{,}24$	ESP, EAR
9	$7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 7 = 7^8$	-
10	$7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 7 = 7^3 + 8^3$	ESP
11	$7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 7 = 6^{7\ 8}$	ESP
12	$7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 7 = \sqrt{8}^7$	ESP
13	$7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 7 = 7^2 \times 8^2$	ESP, EAR
14	$7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 7 = 7x^7x^8x^8x^8x^7$	ESP
15	$7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 7 = 7^2$	-
16	$7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 7 = 7x^3 \times 8^3$	-
17	$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 2^8$	-
18	$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^4 = -8$	EAR
19	$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 2^2$	-
20	$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^3$	EAR
21	$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -2^4$	ESP
22	$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = \sqrt{4}^2$	-
23	$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -2x^2x^2x^2$	ESP
25	$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2^4)$	ESP
26	$(-5) \times 5 \times (-5) \times 5 \times (-5) = (-5^5) = 25$	EAR
27	$(-5) \times 5 \times (-5) \times 5 \times (-5) = 5^2 \times (5)^3 = 25$	ESP
28	$(-5) \times 5 \times (-5) \times 5 \times (-5) = 5^5 = 25$	ESP
29	$(-5) \times 5 \times (-5) \times 5 \times (-5) = 5^5$	ESP
30	$(-5) \times 5 \times (-5) \times 5 \times (-5) = (-5)^3 + 5^2$	EAR
31	$(-5) \times 5 \times (-5) \times 5 \times (-5) = (-5)^2 \times 5^1$	-
32	$(-5) \times 5 \times (-5) \times 5 \times (-5) = (-5)^3 \times 5^3$	-
33	$(-5) \times 5 \times (-5) \times 5 \times (-5) = -5^3 \times 5^2$	ESP
34	$(-5) \times 5 \times (-5) \times 5 \times (-5) = \sqrt{5}^5$	-
35	$(-5) \times 5 \times (-5) \times 5 \times (-5) = -5x^5x^5x^5x^5$	ESP

36	$(-5) \times 5 \times (-5) \times 5\ \times (-5) = -5^5 \cdot 5^5$	EAR
37	$(-5) \times 5 \times (-5) \times 5\ \times (-5) = (-5)^3 \quad 5^2$	ESP
38	$10^3\ = \text{Diez multiplicado por tres}$	EAR
39	$10^3\ = 30$	EAR
40	$10^3\ = 10 \times 10 \times 10 = 30$	ETA
41	$10^3\ = 10 \times 3$	EAR
42	$10^3\ = 10 \times 10 \times 10 \times 10$	EAR
43	$10^3\ = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 8 \times 3 \times 3$	EAR
44	$(-4)^5$ =Cuatro multiplicado por cinco	EAR
45	$(-4)^5\ = +20^6$	-
46	$(-4)^5\ = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$	ESP
47	$(-4)^5\ = 13.280$	ETA
48	$(-4)^5\ = -4 \times -4 \times -4 \times -4 \times -4 = -20$	ETA
49	$(-4)^5\ = -4 \times 5$	EAR
50	$(-4)^5\ = (-4) \times (-4) \times (-4)$	-
51	$(-4)^5\ = (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4)$	ESP, EAR
52	$(-4)^5\ = (-4) \times (-4)$	-
53	$(-4)^5\ = 5 \times 5 \times 5 \times 5$	ESP, EAR
54	$5^3 \times 3^5 = \text{Cincuenta y tres multiplicado treinta y cinco}$	EAR
55	$5^3 \times 3^5\ = 5 \times +515 = 245$	-
56	$5^3 \times 3^5\ = 5 \times 5 \times 5 \qquad 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	ESP
57	$5^3 \times 3^5\ = 1.365.875$	ETA
58	$5^3 \times 3^5\ = 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 15,15$	ETA, ESP
59	$5^3 \times 3^5\ = 5 \times 3 \times 5 \times 5$	-
60	$5^3 \times 3^5\ = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	EAR
61	$5^3 \times 3^5\ = 3 \times 5 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5 \times 3$	-
62	$5^3 \times 3^5\ = 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3$	-
63	$5^3 \times 3^5\ = 5 \times 3 \times 3 \times 5$	-
64	$5^3 \times 3^5\ = 45 \times 27$	-
65	$5^3 \times 3^5\ = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	-
66	$5^3 \times 3^5\ = 53 \times 35$	EAR
67	$(-2)^2 \times 4^2$ =Veintidós multiplicado por cuarenta y dos	ESP, EAR
68	$(-2)^2 \times 4^2\ = +2 + \times 4 = 48$	-
69	$(-2)^2 \times 4^2\ = (2) \times (2) \qquad 4 \times 4 \times 4$	-
70	$(-2)^2 \times 4^2\ = 512$	ETA
71	$(-2)^2 \times 4^2\ = -2 \times -2 \times\ 4 \times 4 = -4\ ,8$	ETA, ESP
72	$(-2)^2 \times 4^2\ = -2 \times 4 \times 2 \times 2$	-
73	$(-2)^2 \times 4^2\ = (-2) \times (-2) \times (-2) \times 4 \times 4 \times 4$	EAR
74	$(-2)^2 \times 4^2\ = (-2) \times 4^2 \times (-2) \times 4^2$	EAR
75	$(-2)^2 \times 4^2\ = -2 \times 2 \times 4 \times 2$	ESP, EAR

76	$(-2)^2 \times 4^2 = (-2) \times (-2) \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$	EAR
77	$(-2)^2 \times 4^2 = -2 - 2 \times 4 \times 4$	ESP
78	$(-2)^2 \times 4^2 = (-2)^2 \times (-2)^2 \times (-2)^2 \times (-2)^2$	-
79	$(-2)^2 \times 4^2 = -22 - 42$	EAR
80	$125 = \sqrt[3]{125} = 25$	ESP
81	$\sqrt[3]{125} = 25$	-
82	$\sqrt{50} = 10$	-
83	$\sqrt{100} = 9$	-
84	$\sqrt[3]{100} = 9$	-
85	$\sqrt[3]{100} = 10$	-
86	$\sqrt{50} = 50 \times 50 = 100$	ETA, EAR
87	$50 \times 3 = \sqrt{100}$	EAR
88	$\sqrt[3]{100} = 3 \div 100 = 50$	ETA, EAR
89	$\sqrt{50} = 25$	EAR
90	$\sqrt[3]{100} = 25$	-
91	$100^3 = 300$	EAR
92	$\sqrt[5]{50} = 10$	EAR
93	$\sqrt[3]{100} = 33{,}3$	EAR
94	$\sqrt{50} = 50 \div 2 = 25$	EAR
95	$\sqrt[3]{100} = 100 \div 3 = 33{,}3..$	EAR
96	$\sqrt{50} = 2 \times 50 = 250$	ETA, EAR
97	$\sqrt[3]{100} = 3 \times 100 = 10.000$	ETA, EAR
98	$10^{100} = 1000$	EAR
99	$100^{10} = 1000$	EAR
100	$100^{10} = 100 \times 10 = 1000$	EAR
101	$10^{100} = 10 \times 100 = 1000$	EAR
102	$10 \times 100 = 100^{10}$	EAR
103	$10^{100} = 100$	-
104	$\sqrt[10]{100} = 10$	-
105	$4^2 = 2 \times 2$	-
106	$4^2 = 4 \times 4 = 8$	ETA
107	$4^2 = 64$	-
108	$4^2 = 8$	EAR
109	$4^2 = 4 \times 2 = 8$	EAR
110	$(-7)^2 = (-7) - (-7)$	ESP
111	$(-7)^2 = -49$	EAR
112	$(-7)^2 = (-7) \times (-7) = -40$	ETA
113	$(-7)^2 = -343$	-
114	$(-7)^2 = 14$	EAR, ETA
115	$(-7)^2 = (-7) \times (-7) = -49$	ETA
116	$(-7)^2 = (-7) \times 2 = -14$	EAR

117	$(-7)^2 = (-7) \times (-7) = -14$	ETA
118	$(-7)^2 = -7 \times -7 = -49$	ETA
119	$(-7)^2 = 7 \times 7 = -2$	ETA
120	$(-7)^2 = -14$	EAR
121	$(-7)^2 = -7 \times -7 = 14$	ETA
122	$(-7)^2 = -49^2$	-
123	$-7^2 = -7 \times -7 = -14$	ETA
124	$-7^2 = 2 \times 3 = 7^2$	-
125	$-7^2 = -7 \times -7$	ESP
126	$-7^2 = 49$	ESP
127	$-7^2 = -7 - 7 = 49$	ETA, EAR
128	$-7^2 = -343$	-
129	$-7^2 = -7 \times -7$	ESP
130	$-7^2 = 14$	ETA, EAR
131	$-7^2 = -7 \times 2 = -14$	EAR
132	$-7^2 = -7 \times -7 = -49$	ETA
133	$-7^2 = (-7) \times (-7) = -49$	ETA
134	$-7^2 = 7 - 7$	EAR
135	$-7^2 = -7 \times -7 = 49$	EAR
136	$-7^2 = 7 \times 7 = 40$	ETA
137	$-7^2 = -14$	EAR
138	$-7^2 = -7 \times -7 = 14$	ETA
139	$7^{-2} = -7 \times -7$	EAR
140	$7^{-2} = 49$	ETA, EAR
141	$7^{-2} = 7 - 7 = 0$	EAR
142	$7^{-2} = 343$	-
143	$7^{-2} = 7^{-2} \times 7^{-2}$	-
144	$7^{-2} = 14$	ETA, EAR
145	$7^{-2} = 7 -\times 7 -= 49$	EAR
146	$7^{-2} = -49$	EAR
147	$7^{-2} = 7 \times -2 = 14$	ETA
148	$7^{-2} = 7 \times 7 = 49$	EAR
149	$7^{-2} = 7^2 = -49^{-2}$	EAR
150	$7^{-2} = (7 - 2) \times (7 - 2)$	EAR
151	$7^{-2} = 7 - 7$	EAR
152	$7^{-2} = 7 \times 7 = -14$	ETA
153	$7^{-2} = 7 \times 7$	EAR
154	$7^{-2} = 7 \times 7 = -49$	ETA
155	$7^{-2} = 7 \times 7 = 14$	ETA
156	$7^{-2} = 7 \times 7 = 40$	ETA
157	$7^{-2} = -14$	EAR
158	$7^{-2} = -7 \times -7 = 14$	ETA
159	$5^0 = 0$	EAR
160	$5^0 = 5$	ETA, EAR

161	$5^0 = 5 \times 0 = 5$	ETA, EAR
162	$5^0 = 5 \times 0 = 0$	EAR
163	$0^3 = 0 \times 3 = 0$	EAR
164	$0^3 = 1$	EAR
165	$\sqrt{9} = 9$	-
166	$\sqrt{9} = -10$	-
167	$\sqrt{9} = 9 \times 9 = 18$	ETA
168	$\sqrt{9} = 9$ dado que $3 \times 3 = 9$	EAR
169	$\sqrt{9} = 1$	-
170	$\sqrt{9} = \sqrt{3}$	-
171	$-5^0 = 0$	EAR
172	$-5^0 = 1$	EAR
173	$-5^0 = 5$	ETA, EAR
174	$-5^0 = -0$	EAR
175	$-5^0 = -5$	ETA, EAR
176	$-5^0 = i$	EAR
177	$-5^0 = -2$	-
178	$\sqrt{-64} = 60$	-
179	$\sqrt{-64} = 6$ ya que $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$	EAR
180	$\sqrt{-64} = 64$	-
181	$\sqrt{-64} = -64 \times -64 = 128$	ETA, EAR
182	$\sqrt{-64} = 8$	EAR
183	$\sqrt{-64} = -8$	EAR
184	$\sqrt{-64} = 3$	-
185	$\sqrt{-64} = i$	EAR
186	$\sqrt{-64} = -1$	-
187	$\sqrt{-64} = -32$	EAR
188	$\sqrt[3]{-64} = 8$	EAR
189	$\sqrt[3]{-64} = -64 \times -64 \times -64 = 192$	ETA, EAR
190	$\sqrt[3]{-64} = \sqrt{-64} = 4$	EAR
191	$\sqrt[3]{-64} = i$	EAR
192	$\sqrt[3]{-64} = 4$	ESP, EAR
193	$\sqrt[3]{-64} = -16$	-
194	$\sqrt[3]{-64} = -21$	EAR
195	$\sqrt[3]{-64} = 24$	-
196	$\sqrt[3]{-64} = -21{,}5$	EAR
197	$\sqrt[3]{-64} = 21{,}1$	EAR
198	$\sqrt[3]{-64} = -24$	-
199	$\sqrt[3]{-64} = -4^3$	ESP

200	$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = 8$	ESP
201	$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = 64$	-
202	$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt{64} = 4$	EAR
203	$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = 21$	EAR
204	$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = 8{,}48$	-
205	$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = 4{,}8989$	-
206	$\frac{4^2}{2^2} = \frac{4^2}{4^2} = \frac{8}{8}$	EAR
207	$\frac{4^2}{2^2}$ =32 ya que $4 \times 8 = 32$	-
208	$\frac{4^2}{2^2} = \frac{8}{4}$	EAR
209	$\frac{4^2}{2^2} = \frac{2}{1}$	EAR
210	$\frac{2^5 \cdot 2^2}{2^3} = \frac{10 \cdot 4}{6}$	EAR
211	$\frac{2^5 \cdot 2^2}{2^3} = 207$	-
212	$\frac{2^5 \cdot 2^2}{2^3} = \frac{10 \cdot 4}{9}$	EAR
213	$\frac{2^5 \cdot 2^2}{2^3} = \frac{128}{8} = 6$	ETA
214	$\frac{2^5 \cdot 2^2}{2^3} = \frac{128}{16}$	-
215	$\frac{2^5 \cdot 2^2}{2^3} = \frac{25 \cdot 4}{8}$	EAR
216	$\frac{2^5 \cdot 2^2}{2^3} = \frac{96}{8}$	-
217	$\frac{2^5 \cdot 2^2}{2^3} = \frac{10 \cdot 4}{8}$	EAR
218	$\frac{2^5 \cdot 2^2}{2^3} = \frac{88}{8}$	-
219	$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 10$	ETA
220	$2^3 = 2 \times 3 = 6$	EAR
221	$(-1)^5 = (-1)^5 = 5$	EAR
222	$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -5$	ETA
223	$(-1)^5 = -5$	EAR
224	$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$	ETA

225	$(-1)^5 = 1^5 = 5$	EAR
226	$(-1)^5 = 1$	ESP
227	$1^5 = 5$	EAR
228	$1^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 5$	ETA
229	$\sqrt{25 \times 36} = 900$	EAR
230	$\sqrt{25 \times 36} = \sqrt{1200} = 600$	EAR
231	$\sqrt{25 \times 36} = 905$	-
232	$\sqrt{25 \times 36} = 895$	-
233	$\sqrt{25 \times 36} = 125 \times 18 = 11250$	ETA
234	$\sqrt{25 \times 36} = \sqrt{80}$	-
235	$\sqrt{25 \times 36} = 180$	-
236	$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = 20$	-
237	$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{16}{4}$	EAR
238	$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{1}$	-
239	$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{2}{4}$	-
240	$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{8}{2}$	EAR
241	$0^0 = 0$	EAR
242	$0^0 = 1$	EAR
243	$0^0 = 0 \times 0 = 0$	EAR
244	$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{3 + 8}$	EAR
245	$\sqrt{-8} = 4$	EAR
246	$\sqrt{-8} = -4$	EAR
247	$\sqrt{-8} = i$	EAR